УДК 512.542

Д. В. Грицук
[1]*канд. физ.-мат. наук, зав. каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: [1]dmitry.gritsuk@gmail.com

ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОФАКТОРАМИ*

К инвариантам конечной частично разрешимых групп относят p-длину, π-длину, нильпотентную π-длину и произвоную π-длину. В разделе 1 приведены результаты, устанавливающие оценки производной π-длины π-разрешимой группы с ограничениями на порядки кофакторов или индексы нормальных замыканий подгрупп. В разделе 2 содержится описание формационного строения разрешимой группы, у которой подгруппы из факторов имеют ограничения на индексы фиттинговых р-подгрупп в своих нормальных замыканиях. В разделе 3 перечислены оценки инвариантов π-разрешимых групп, у которых силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения (циклические, метациклические, бициклические, бициклические или свободны от четвертых степеней). В разделе 4 приведены оценки производной π-длины π-разрешимых групп, у которых индексы нормальных замыканий или кофакторы подгрупп из факторов ограничены.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2]. Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G \quad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, что число n называется длиной ряда.

Производная (нильпотентная) длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми (нильпотентными) факторами. Эти длины обозначаются через $d(G)$ и $n(G)$ соответственно. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы.

Пусть p – простое число. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо p-фактором, либо p'-фактором. Наименьшее число p-факторов среди всех таких субнормальных рядов называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] в 1956 г. и установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. В 1967 г. Л. А. Шеметков [4] распространил понятие p-длины на произвольные группы и доказал, что p-длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовской p-подгруппы. Оценкам p-длины посвящены работы А. Х. Журтова и С. А. Сыскина [5], В. С. Монахова и О. А. Шпырко [6; 7], А. А. Трофимука [8–10].

*В статье приводится обзор результатов, полученных в рамках темы исследования, выполняемого при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф17М-063).

В 2013 г. Е. И. Хухро и П. В. Шумятский [13] предложили понятия неразрешимой и не-p-разрешимой длин и доказали, что не-p-разрешимая длина конечной группы не превышает наибольшей из p-длин ее p-разрешимых подгрупп.

Аналогом p-длины для π-разрешимой группы является понятие π-длины. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо либо π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$. С понятием π-длины связана следующая проблема Л. А. Шеметкова [11]: верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел π-длина π-разрешимой группы ограничена сверху производной длиной ее π-холловой подгруппы? Эта проблема рассматривалась в работе Л. С. Казарина [12], где получен положительный ответ в случае, когда $2 \notin \pi$.

В 1968 г. Р. Картер, Б. Фишер и Т. Хоукс [14] ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Они доказали, что класс всех разрешимых групп ограниченной нильпотентной π-длины является наследственной насыщенной формацией и описали ее локальный экран.

Для π-разрешимой группы аналогом нильпотентной длины является понятие нильпотентной π-длины. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо нильпотентным π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^n(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G. Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья М. Нумата [15], в которой она ограничена числом классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп, чьи индексы принадлежат π. Оценкам нильпотентной π-длины посвящены работы В. С. Монахова и О. А. Шпырко [6; 7].

В 2006 г. В. С. Монахов [16] предложил аналог производной длины для π-разрешимой группы – понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G. Оценкам производной π-длины π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой либо силовскими подгруппами посвящены работы [17–22]. Естественно возникает вопрос о влиянии строения кофакторов на производную π-длину π-разрешимой группы.

1. Исследование строения π-разрешимой группы с ограничениями на порядки кофакторов или индексы нормальных замыканий подгрупп

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. В частности, при $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – свободно от кубов.

Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $H/\mathrm{Core}_G H$, где $\mathrm{Core}_G H$ – ядро подгруппы H в группе G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H. В дальнейшем кофактор подгруппы H в группе G будем обозначать $\mathrm{Cof}_G(H)$.

В [23] изучено строение группы с циклическими кофакторами примарных подгрупп. В частности, доказано, что p-длина таких групп не превышает 1 для всех простых p. Строение разрешимых групп с бициклическими кофакторами примарных подгрупп приведено в [24]. Из следствия 4.2 работы [23] и основной теоремы работы [25] следует описание групп с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов. В частности, производная длина такой группы G не превышает 4, нильпотентная длина не превышает 3, а p-длина не превышает 1 для всех простых p.

В теоремах 1.1 и 1.2 отмеченные выше результаты, связанные с кофакторами подгрупп, распространены на случай π-разрешимых групп.

Теорема 1.1 [26]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если $Cof_G(X)$ свободен от $(n+1)$-степеней, где X – произвольная p-подгруппа группы G, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{n^2+n+2}{4}$ для $p \not\in \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{n^2+n+4}{4}$ для $p \in \{2,3\}$.*

Следствие. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если порядок $Cof_G(X)$ свободен от квадратов, где X – произвольная p-подгруппа группы G, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 2$.*

Теорема 1.2 [26]. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если $Cof_G(X)$ циклический, где X – произвольная p-подгруппа группы G и $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 2$, если $2 \not\in \pi$, и $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$, если $2 \in \pi$.*

Следствие. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если $Cof_G(X)$ свободен от квадратов, где X – произвольная π-подгруппа группы G, то $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$.*

2. Изучение формационного строения разрешимой группы, у которой подгруппы из факторов имеют заданные ограничения

Главным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G,$$

в которой для каждого $i = 1,2,\ldots,m-1$ подгруппа G_i/G_{i-1} является минимальной нормальной подгруппой в группе G/G_{i-1}. Фактор-группы G_i/G_{i-1} называются главными факторами группы G.

Пусть p – простое число. Если G – p-разрешимая неединичная группа, то ее главные факторы являются либо p-группами, либо p'-группами. Главный фактор группы G, который является p-группой, называется p-главным фактором группы G. Если p^n – наибольший из порядков p-главных факторов группы G, то n называют p-рангом группы G и обозначают через $r_p(G)$ [1, с. 685].

Разрешимая группа p-разрешима для каждого p. Рангом неединичной разрешимой группы G называют $\max_{p\in\pi(G)} r_p(G)$. Здесь $\pi(G)$ – совокупность всех простых делителей порядка группы G. Ранг разрешимой группы G обозначают через $r(G)$.

Пусть H и K – нормальные подгруппы группы G. Напомним, что фактор-группа H/K называется фиттинговой, если $H \subseteq F(G)$. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G.

Б. Хупперт [27] показал, что разрешимая группа тогда и только тогда является сверхразрешимой, когда фиттинговы главные факторы имеют простые порядки. Я. Г. Беркович [28] продолжил исследования в данном направлении и обнаружил, что разрешимая группа имеет главный ранг, не превосходящий 2, тогда и только тогда, когда порядки ее фиттинговых главных факторов свободны от кубов. В работе [9] получены новые свойства разрешимых групп главного ранга 2 и проведено полное изучение разрешимых группы главного ранга 3. Р. Бэр ([29], VI.9.9) установил, что если на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки, то группа сверхразрешима.

В 1978 г. Гашюц [30, следствие 6] установил справедливость следующего утверждения: если H/K – главный фактор наибольшего порядка разрешимой группы G, то подгруппа $H \leq F(G)$. Развивая этот результат, В. С. Монахов [31, теорема 2] доказал существование в разрешимых группах фиттинговых главных факторов порядка $p^{r(G/\Phi(G))}$, где p – простое число, $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, $r(G/\Phi(G)$ – главный ранг группы $G/\Phi(G)$.

Исследование влияния Фиттинговых факторов на строение группы также проведено в работах [32–35]. Например, в [32] найдена зависимость оценки производной длины разрешимой группы от порядков силовских подгрупп из ее подгруппы Фиттинга, в [33] получены оценки инвариантов разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга силовские подгруппы факторов являются бициклическими, в [34] исследованы разрешимые группы с нормальным рангом подгруппы Фиттинга, не превышающим 2.

Теоремы 2.1 и 2.2 являются развитием отмеченных выше работ.

Пусть $G - p$-разрешимая группа. Рассмотрим функцию

$$t_p^F(G) = \max\{n | p^n \intercal |H^G : H|, \qquad H \leq F_p(G)\}, p \in \pi(G).$$

Следуя Б. Хупперту, будем использовать запись $p^m \intercal |H^G : H|$ для обозначения того, что p^m делит $|H^G : H|$, а p^{m+1} не делит $|H^G : H|$. Кроме того, H^G – наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H, а $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G.

Теорема 2.1 [26]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 6}{4}$ *для* $p \not\in \{2,3\}$ *и* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{(t_p^F(G))^2 + t_p^F(G) + 8}{4}$ *для* $p \in \{2,3\}$.

Следствие 1. *Пусть $G - p$-разрешимая группа.*

1) Если $t_p^F(G) \leq 1$, *то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 2$.

2) Если $t_p^F(G) \leq 2$, *то* $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 3$.

Следствие 2. *Пусть G – разрешимая группа и* $t^F(G) \leq 2$. *Тогда* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$ *и* $d(G/\Phi(G)) \leq 6$, $n(G) \leq 4$. *В частности, если группа A_4-свободна, то* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ *и* $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

3. Исследование строения π-разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что G сверхразрешима. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2. Поскольку любая p-группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [10]. В частности, получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p-длины) таких разрешимых групп. В 2013 г. [33] получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга, факторы имеют простые порядки. В частности, получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p-длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

Развитием данного направления иследования частично разрешимых групп является теорема 3.1.

Теорема 3.1 [36]. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются:*

1) циклическими, то $l_\pi(G) \leq 1, l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$;

2) метациклическими, то $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$, *если* $2 \in \pi$;

3) бициклическими, то $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$, *если* $2 \in \pi$;

4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то

$$l_\pi(G) \leq 3, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 18, \text{ если } 2 \in \pi.$$

4. Исследование строения π-разрешимой группы, у которой индексы нормальных замыканий или кофакторы подгрупп из факторов ограничены

Хорошо известно, что свойство нормальности подгруппы в группе не является транзитивным. В 1957 г. Гашюц [37] установил строение разрешимых групп, у которых нормальность обладает транзитивным свойством (t-группы). Такие группы можно представить в виде полупрямого произведения нормальной абелевой холловой подгруппы нечетного порядка и дедекиндовой подгруппы. Группы, близкие к t-группам, можно определять при помощи дефекта субнормальной подгруппы H, т. е. длины наименьшего субнормального ряда от подгруппы H до группы G. Очевидно, что каждая собственная нормальная подгруппа имеет дефект 1, поэтому в t-группах все субнормальные подгруппы имеют дефект 1. Группы с субнормальными подгруппами дефекта 2 исследовались в [38].

В теории групп всякую подгруппу H группы G можно окружить двумя нормальными в G подгруппами – нормальным замыканим H^G и ядром H_G, где H^G является наименьшей нормальной в G подгруппой, содержащей H, а H_G – наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H. Понятно, что в t-группах $|H^G{:}H| = |H{:}H_G| = 1$ для каждой субнормальной подгруппы H. Если G не является t-группой, то $|H^G{:}H| > 1, |H{:}H_G| > 1$ для каждой субнормальной ненормальной подгруппы H.

В работе [39] Го Вэньбинь, Ху Бинь и В. С. Монахов изучили инварианты разрешимой группы G в зависимости от значений числовой функции $t(G)$, определенной следующим образом:

$$t_p(G) = \max\{n | p^n \intercal |H^G{:}H|, H \text{ sn } G\}, p \in \pi(G).$$
$$t(G) = max_{p\in\pi(G)}(t_p(\mathrm{G})).$$

Следуя Б. Хупперту, будем использовать запись $p^m \,\rceil\, |H^G\colon H|$ для обозначения того, что p^m делит $|H^G\colon H|$, а p^{m+1} не делит $|H^G\colon H|$. Запись $H \operatorname{sn} G$ обозначает, что подгруппа H субнормальна в группе G.

Если $t(G) = 0$, то $H^G = H$ для всех субнормальных подгрупп H группы G и группа G становится t-группой. В [25] в зависимости от значений $t(G)$ найдены верхние границы нильпотентной, производной и p-длины разрешимой группы G.

В работе [40] решена двойственная задача: исследованы инварианты разрешимой группы G в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп.

В теореме 4.1 рассмотренные выше результаты работ [39] и [40] распространены на случай π-разрешимых групп.

Теорема 4.1. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 2$, если $2 \notin \pi$, и $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$, если $2 \in \pi$ в каждом из следующих случаев:*

1) порядок кофактора H/H_G свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G;

2) индекс $|H^G\colon H|$ свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967.

2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

3. Hall, P. The p-length of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

4. Шеметков, Л. А. О частично разрешимых конечных группах / Л. А. Шеметков // Мат. сб. – 1967. – Т. 72 (114), № 1. – С. 97–107.

5. Журтов, А. Х. О группах Шмидта / А. Х. Журтов, С. А. Сыскин // Сиб. мат. журн. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.

6. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискрет. математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.

7. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.

8. Монахов, В. С. Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Фундам. и приклад. математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.

9. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

10. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. –Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.

11. Коуровская тетрадь: неразрешимые вопросы теории групп. № 18. – Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2014. – 253 с.

12. Kazarin, L. S. Soluble products of groups / L. S. Kazarin // Infinite groups 94. – New York ; Berlin : Walter de Gruyter, 1995. – P. 111–123.

13. Khukhro, E. I. Nonsoluble and non-p-soluble length of finite groups / E. I. Khukhro, P. Shumyatsky // Cornell University Library. – 2013. – 1 Sept. – 14 p.

14. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

15. Numata, M. On the π-nilpotent length of π-solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

16. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.

17. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

18. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.

19. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.

20. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

21. Грицук, Д. В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальны / Д. В. Грицук, В. С. Монахов // Тр. ин-та математики. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.

22. Монахов, В. С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.

23. Liu, Yu. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Yu. Liu, X. Yi / Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – Vol. 34, № 2. – P. 337–344.

24. Трофимук, А. А. Конечные разрешимые группы с бициклическими кофакторами примарных подгрупп / А. А. Трофимук, Д. Д. Даудов // Тр. ин-та математики. – 2016. – Т. 24, № 1. – С. 95–99.

25. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49. – С. 26–29.

26. Грицук, Д. В. Производная p-длина p-разрешимой группы с ограниченными кофакторами / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. Естеств. науки. – 2019. – № 3 (114). – С. 147–152.

27. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

28. Беркович, Я. Г. О разрешимых группах конечного порядка // Мат. сб. – 1967. – Т. 74 (116), № 1. – С. 75–92.

29. Baer, R. Supersolvable immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

30. Gashutz, W. Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind / W. Gashutz // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 389–394.

31. Монахов, В. С. К теореме Хупперта – Шеметкова / В. С. Монахов // Тр. ин-та математики. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 64–66.

32. Трофимук, А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы // Мат. заметки. – 2010. – № 87. – С. 287–293.
33. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 304–307.
34. Trofimuk, A. A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A. A. Trofimuk // Asian-Eur. J. Math. – 2016. – Vol. 9 (2). – P. 1650037.
35. Трофимук, А. А. О Фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 242–246.
36. Грицук, Д. В. Инварианты π-разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 2. – С. 77–83.
37. Gaschütz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
38. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.
39. Guo, W. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups / W. Guo, B. Hu, V. S. Monakhov // Commun. Algebra. – 2004. – Vol. 33, № 3. – P. 855–863.
40. Monakhov, V. S. On cofactors of subnormal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 9. – P. 1650169-1–1650169-9.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.10.2019

***Gritsuk D. V.* Invariants of Partially Soluble Groups with Restrictions on Cofactors**

The invariants of a partially soluble group include the p-length, π-length, nilpotent π-length, and derived π-length. This article provides an overview of the results obtained by the authors in the framework of the research topic carried out with the financial support of the BRFFR (project No. F17M-063). In Section 1 lists the results that establish the estimates of the derived π-length of a π-soluble group in which the order of a cofactors or indices of normal closures of subgroups. Section 2 describes the formation structure of a solvable group in which subgroups of factors have restrictions on indices of fitting p-subgroups in their normal closures. Section 3 lists estimates of invariants of a π-soluble group in which Sylow subgroups of factors have given restrictions (cyclic, metacyclic, bicyclic, bicyclic or free from fourth degrees). Section 4 provides estimates of the derived π-length of a π-soluble group in which normal closure indices or cofactors of subgroups of factors are bounded.