



УДК 539.12:530.145

**В.А. Плетюхов¹, В.В. Кисель², Е.М. Овсиюк³
Я.А. Войнова⁴, О.В. Веко⁵, В.М. Редьков⁶**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

⁴учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

⁵учитель физики гимназии г. Калинковичи

⁶д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: otf@brsu.brest.by

ФЕРМИОН С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

В рамках подхода Гельфанда – Яглома получено новое 20-компонентное релятивистское волновое уравнение для фермиона со спином $\frac{1}{2}$ и тремя массовыми параметрами. Из компонент волновой функции строятся три вспомогательных биспинора, которые в отсутствие внешнего поля удовлетворяют трем независимым диракоподобным уравнениям с различными массами M_1, M_2, M_3 . Выполнено обобщение на случай псевдоримановой структуры пространства-времени, показано, что в этом случае возникает дополнительное зацепление трех биспинорных компонент через скалярную кривизну Риччи. Теория допускает переход к случаю электрически нейтральных частиц, т.е. возможно существование майрановских фермионов с тремя массовыми состояниями.

1. Уравнение для фермиона с тремя массовыми параметрами, формализм Гельфанда – Яглома

Имея в виду существование нейтрино с различными массами, исследуем в рамках теории релятивистских волновых уравнений возможность описания частицы со спином $\frac{1}{2}$ и тремя массовыми параметрами. При этом в качестве исходного будем использовать подход Гельфанда – Яглома [1; 2]. Для построения уравнения для фермиона с тремя массовыми параметрами будем исходить из следующего набора зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца

$$T = (0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})' \oplus (\frac{1}{2}, 0)' \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1), \quad (1.1)$$

или (нумеруем отдельные представления цифрами от 1 до 6)

$$T = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6, \quad (1.2)$$

где введены обозначения

$$1 = (0, \frac{1}{2}), \quad 2 = (\frac{1}{2}, 0), \quad 3 = (0, \frac{1}{2})', \quad 4 = (\frac{1}{2}, 0)', \quad 6 = (1, \frac{1}{2}), \quad 5 = (\frac{1}{2}, 1). \quad (1.3)$$

Соответствующая схема зацеплений имеет вид

$$\begin{array}{c} 1-2 \\ | \quad | \\ 5-6 \\ | \quad | \\ 3-4. \end{array} \quad (1.4)$$



Базисные вектора пространства определим в виде (см. детали общего формализма в кн. [2])

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow (\mathcal{E}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^1, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^1, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2, \mathcal{E}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2), (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^3, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^3, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^4, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^4), (\mathcal{E}_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}}^6);$$

$$s = \frac{3}{2} \Rightarrow (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^6), (\mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^5, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^6, \mathcal{E}_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^6). \quad (1.5)$$

Матрица Γ_4 при этом представима в виде

$$L_4 = \begin{vmatrix} L_4^{(1/2)} & 0 \\ 0 & L_4^{(3/2)} \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

где блоки $L_4^{(1/2)}$ и $L_4^{(3/2)}$ имеют следующую структуру:

$$L_4^{(1/2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{35}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{64}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{1/2} \\ c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{51}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

$$L_4^{(3/2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{65}^{3/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Из требования Р-инвариантности модели получаем ограничения

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2}, \quad (1.9)$$

тогда блок $L_4^{(3/2)}$ записывается короче

$$L_4^{(3/2)} = \begin{vmatrix} c_{65}^{3/2} \gamma_4 & 0 \\ 0 & c_{65}^{3/2} \gamma_4 \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$



Исключаем из модели присутствие спина $3/2$, это дает ограничения

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2} = 0 \Rightarrow L_4^{(3/2)} = 0; \quad (1.11)$$

таким образом, блок $L_4^{(3/2)}$ является нулевым.

Рассматриваем блок $L_4^{(1/2)}$. В нем помимо ограничений на $c_{56}^{1/2}$ из требования P-инвариантности уравнения имеем и другие ограничения:

$$\begin{aligned} c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \quad c_{15}^{1/2} = c_{26}^{1/2}, \\ c_{35}^{1/2} = c_{46}^{1/2}, \quad c_{62}^{1/2} = c_{51}^{1/2}, \quad c_{64}^{1/2} = c_{53}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Условие существования лагранжевой формулировки теории приводит к вещественности параметров $c_{12}^{1/2}, c_{34}^{1/2}$ и к условиям

$$c_{62}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} (c_{15}^{1/2})^*, \quad c_{64}^{1/2} = \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} (c_{35}^{1/2})^*. \quad (1.13)$$

Введем обозначения:

$$c_{12}^{1/2} = c_1, \quad c_{34}^{1/2} = c_2, \quad c_{15}^{1/2} = c_3, \quad c_{35}^{1/2} = c_4, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} = f, \quad \frac{\eta_{56}^{1/2}}{\eta_{34}^{1/2}} = g, \quad (1.14)$$

где c_1, c_2 – вещественные, c_3, c_4 – комплексные, а $f, g \in \{-1, +1\}$. С учетом этого спиновый блок $L_4^{(1/2)}$ представляется в виде

$$L_4^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1 \gamma_4 & 0 & c_1 \gamma_4 \\ 0 & c_2 \gamma_4 & c_4 \gamma_4 \\ f c_3^* \gamma_4 & g c_4^* \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & 0 \end{vmatrix} \otimes \gamma_4 = \beta^{(1/2)} \otimes \gamma_4, \quad (1.15)$$

где

$$\beta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

В аналогичной форме представима и матрица билинейной формы:

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta^{(1/2)} & 0 \\ 0 & \eta^{(3/2)} \end{vmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\eta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} \eta_{12}^{(1/2)} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{34}^{(1/2)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{56}^{(1/2)} \end{vmatrix} \otimes \gamma_4, \quad (1.18)$$

$$\eta^{(3/2)} = \eta_{56}^{(3/2)} I_2 \otimes \gamma_4, \quad \eta_{56}^{(3/2)} = -\eta_{56}^{(1/2)}; \quad (1.19)$$

не уменьшая общности, можно считать, что

$$\eta_{ij}^{(1/2)} = \pm 1.$$

Найдем явный вид характеристического уравнения для матрицы $\beta^{(1/2)}$:

$$\begin{vmatrix} c_1 - \lambda & 0 & c_1 \\ 0 & c_2 - \lambda & c_4 \\ f c_3^* & g c_4^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda[c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2] + (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0. \quad (1.20)$$



Определим спинорный вариант записи системы спинорных уравнений для рассматриваемого случая. Для решения данной задачи необходимо определить оператор перехода от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее спинорному представлению и наоборот.

Решение этой задачи проведем поэтапно: сначала определим операторы переходов от представления функции ψ в модифицированном базисе Гельфанда – Яглома к ее каноническому представлению, а затем от канонического представления к спинорному. Функцию ψ в указанных представлениях определим соответственно следующим образом:

$$\psi_{G.-Y.} = \begin{pmatrix} \psi_{1/2,1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,3/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,-3/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,3/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,-3/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{3/2,1/2}^{(1/2,1)} \\ \psi_{3/2,-1/2}^{(1/2,1)} \end{pmatrix}, \psi_{canon.} = \begin{pmatrix} \psi_{0,1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,0}^{(1/2,0)} \\ \psi_{-1/2,0}^{(1/2,0)} \\ \psi_{0,1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{r(0,1/2)} \\ \psi_{1/2,0}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{-1/2,0}^{r(1/2,0)} \\ \psi_{1,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{0,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{-1,1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{0,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{-1,-1/2}^{(1,1/2)} \\ \psi_{1/2,1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,0}^{(1/2,1)} \\ \psi_{1/2,-1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,1}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,0}^{(1/2,1)} \\ \psi_{-1/2,-1}^{(1/2,1)} \end{pmatrix}, \psi_{spinor} = \begin{pmatrix} \psi^i \\ \psi^{\dot{2}} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi^{i\dot{1}} \\ \psi^{r\dot{2}} \\ \psi'^1 \\ \psi'^2 \\ \psi_{(11)}^i \\ \psi_{(12)}^i \\ \psi_{(22)}^i \\ \psi_{(11)}^{\dot{2}} \\ \psi_{(12)}^{\dot{2}} \\ \psi_{(22)}^{\dot{2}} \\ \psi_1^{(i\dot{1})} \\ \psi_1^{(i\dot{2})} \\ \psi_1^{(\dot{2}\dot{2})} \\ \psi_2^{(i\dot{1})} \\ \psi_2^{(i\dot{2})} \\ \psi_2^{(\dot{2}\dot{2})} \end{pmatrix},$$

Представление Гельфанда – Яглома для функции ψ может быть определено согласно формуле

$$\psi_{s,m}^r = \sum_{l_3, l'_3} C_{ll'_3 l_3}^{s,m} \psi_{l_3 l'_3}^{(l,l')},$$

где s, m – фиксированы, $l_3 + l'_3 = m$, а каноническое и спинорное – согласно формуле

$$\psi_{l_3 l'_3}^{(l,l')} = \left\{ \frac{(2l)!}{(l+l_3)!(l-l_3)!} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{(2l')!}{(l'+l'_3)!(l'-l'_3)!} \right\}^{1/2} \psi_{(1\dots i\dot{1}\dot{2}\dots\dot{2})}^{(i\dots i\dot{2}\dots\dot{2})},$$

где число индексов типа: $\dot{1}$ равно $l' + l'_3$; $\dot{2}$ равно $l' - l'_3$; 1 равно $l + l_3$; 2 равно $l - l_3$.

В результате получаем

$$\psi_{canon.} = A\psi_{spinor},$$



Полученный результат представим в ином виде, более удобном при переходе к системе спинорных уравнений первого порядка в координатном представлении. Определим функцию ψ в виде

$$\psi_{spinor} = \begin{pmatrix} \psi^{\dot{R}} \\ \psi_R \\ \psi'^{\dot{R}} \\ \psi'_R \\ \psi_{(AB)}^{\dot{R}} \\ \psi_R^{(\dot{A}\dot{B})} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$L_4^{(spinor)} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \sigma^{4\dot{a}R} & 0 \\ c_1 \sigma_{a\dot{R}}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \sigma_{a\dot{R}}^4 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} f c_3^* \{ \sigma_b^{4\dot{a}} \delta_c^R + \sigma_c^{4\dot{a}} \delta_b^R \} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} f c_3^* \{ \sigma_a^{4\dot{b}} \delta_R^{\dot{c}} + \sigma_a^{4\dot{c}} \delta_R^{\dot{b}} \} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(AB)}^{(\dot{a}\dot{c})} \sigma_{\dot{c}}^{4R} \\ 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(ac)}^{(AB)} \sigma_R^{4c} & 0 \\ c_2 \sigma^{4\dot{a}R} & 0 & c_4 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(AB)}^{(\dot{a}\dot{c})} \sigma_{\dot{c}}^{4R} \\ 0 & c_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{(ac)}^{(AB)} \sigma_R^{4c} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} g c_4^* \{ \sigma_b^{4\dot{a}} \delta_c^R + \sigma_c^{4\dot{a}} \delta_b^R \} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\delta_B^A, \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}$ – спинорные символы Кронекера, равные 1 при $A=B, \dot{A}=\dot{B}$ и 0 при $A \neq B, \dot{A} \neq \dot{B}$;

$$\delta_{(cd)}^{(ab)} = \frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b), \quad \delta_{(\dot{c}\dot{d})}^{(\dot{a}\dot{b})} = \frac{1}{2} (\delta_{\dot{c}}^{\dot{a}} \delta_{\dot{d}}^{\dot{b}} + \delta_{\dot{d}}^{\dot{a}} \delta_{\dot{c}}^{\dot{b}}); \quad \sigma_{\dot{a}\dot{b}}^4 = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}.$$

В аналогичном виде задаются и другие матрицы исследуемого уравнения. При этом σ^4 следует заменить на σ^μ , причем



$$\sigma_{ab}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_{ab}^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_{ab}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Соответственно, система спинорных уравнений в рассматриваемом случае имеет вид ($\partial_{ab} = \frac{1}{i} \partial_\mu \sigma_{ab}^\mu$)

$$c_1 \partial^{ab} \Psi_b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_3 \partial_b^c \Psi_c^{(ab)} + M \Psi^a = 0, \quad (1.21)$$

$$c_1 \partial_{ab} \Psi^b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_3 \partial_c^b \Psi_{(ab)}^c + M \Psi_a = 0, \quad (1.22)$$

$$c_2 \partial^{ab} \Psi'_b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_4 \partial_b^c \Psi_c^{(ab)} + M \Psi'^a = 0, \quad (1.23)$$

$$c_2 \partial_{ab} \Psi'^b + \sqrt{\frac{2}{3}} c_4 \partial_c^b \Psi_{(ab)}^c + M \Psi'_a = 0, \quad (1.24)$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi^c + \partial_b^c \Psi^a) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi'^c + \partial_b^c \Psi'^a) + M \Psi_b^{(ac)} = 0, \quad (1.25)$$

$$-\frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi_c + \partial_c^b \Psi_a) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi'_c + \partial_c^b \Psi'_a) + M \Psi_{(ac)}^b = 0. \quad (1.26)$$

Определим спин-тензорный вариант записи системы (1.21)–(1.26). Для этого зададим входящие в (1.21–1.26) спиноры формулами

$$\begin{aligned} \Psi^a &= \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b}, & \Psi_a &= \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b, & \Psi'^a &= \Psi_0^a, & \Psi'_a &= \Psi_{0a}, \\ \Psi_{(bc)}^a &= \frac{1}{2} (\sigma_b^{\mu a} \Psi_{\mu c} + \sigma_c^{\mu a} \Psi_{\mu b}), & \Psi_a^{(bc)} &= \frac{1}{2} (\sigma_a^{\mu b} \Psi_\mu^c + \sigma_a^{\mu c} \Psi_\mu^b). \end{aligned} \quad (1.27)$$

При этом уравнение (1.21) принимает вид

$$c_1 \partial^{ab} \sigma_{bc}^\mu \Psi_\mu^c + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_b^c (\sigma_c^{\mu a} \Psi_\mu^b + \sigma_c^{\mu b} \Psi_\mu^a) + M \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b} = 0,$$

или

$$c_1 \partial^{ab} \sigma_{bc}^\mu \Psi_\mu^c + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\sigma^{\mu ac} \partial_{cb} \Psi_\mu^b + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu^a) + M \sigma^{\mu ab} \Psi_{\mu b} = 0. \quad (1.28)$$

В случае уравнения (1.22) имеем

$$c_1 \partial_{ab} \sigma^{\mu bc} \Psi_{\mu c} + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_c^b (\sigma_a^{\mu c} \Psi_{\mu b} + \sigma_b^{\mu c} \Psi_{\mu a}) + M \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b = 0,$$

или

$$c_1 \partial_{ab} \sigma^{\mu bc} \Psi_{\mu c} + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\sigma_a^{\mu c} \partial^{cb} \Psi_{\mu b} + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_{\mu a}) + M \sigma_{ab}^\mu \Psi_\mu^b = 0. \quad (1.29)$$

Уравнения (1.28) и (1.29) объединяем в одно

$$ic_1 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-i \gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu) + iM (\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$



или

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (-\gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu - 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0, \quad (1.30)$$

где

$$\gamma_\mu = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & \sigma^{\mu ab} \\ \sigma_{ab}^\mu & 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_\mu = \begin{vmatrix} \Psi_\mu^a \\ \Psi_{\mu a} \end{vmatrix}.$$

Из уравнений (1.23), (1.24) аналогичным образом получаем

$$c_2 \partial^{ab} \Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_b^c (\sigma_c^{\mu a} \Psi_\mu^b + \sigma_c^{\mu b} \Psi_\mu^a) + M \Psi_0^a = 0,$$

или

$$c_2 \partial^{ab} \Psi_{0b} + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\sigma^{\mu ac} \partial_{cb} \Psi_\mu^b + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu^a) + M \Psi_0^a = 0. \quad (1.31)$$

И аналогично

$$c_2 \partial_{ab} \Psi_0^b + \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_c^b (\sigma_a^{\mu c} \Psi_{\mu b} + \sigma_b^{\mu c} \Psi_{\mu a}) + M \Psi_{0a} = 0,$$

или

$$c_2 \partial_{ab} \Psi_0^b + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\sigma_{ac}^{\mu} \partial^{cb} \Psi_{\mu b} + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_{\mu a}) + M \Psi_{0a} = 0. \quad (1.32)$$

При объединении (1.31), (1.32) приходим к следующему уравнению:

$$c_2 \hat{\partial} \Psi_0 + \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-i \gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + \frac{2}{i} \partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{c_4}{\sqrt{6}} (\gamma_\mu \hat{\partial} \Psi_\mu + 2(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_0 &= 0; \\ c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{c_4}{\sqrt{6}} (-\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Обратимся к уравнению (1.25). Его можно переписать в виде

$$-\frac{f c_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \sigma^{\mu ck} \Psi_{\mu k} + \partial_b^c \sigma^{\mu ak} \Psi_{\mu k}) - \frac{g c_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_b^a \Psi_0^c + \partial_b^c \Psi_0^a) + M \frac{1}{2} (\sigma_b^{\mu a} \Psi_\mu^c + \sigma_b^{\mu c} \Psi_\mu^a) = 0. \quad (1.34)$$

Под действием на уравнение (1.34) оператором $\sigma_a^{\lambda b}$. В результате находим

$$-\frac{f c_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_a^{\lambda b} \partial_b^a \sigma^{\mu ck} \Psi_{\mu k} + \sigma_a^{\lambda b} \partial_b^c \sigma^{\mu ak} \Psi_{\mu k}) - \frac{g c_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma_a^{\lambda b} \partial_b^a \Psi_0^c + \sigma_a^{\lambda b} \partial_b^c \Psi_0^a) +$$



$$+M \frac{1}{2} (\sigma_a^{\lambda b} \sigma_b^{\mu \dot{a}} \Psi_\mu^{\dot{c}} + \sigma_a^{\lambda b} \sigma_b^{\mu \dot{c}} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \partial_{b \dot{a}} \sigma^{\mu \dot{c} k} \Psi_{\mu k} + \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \sigma^{\mu \dot{a} k} \Psi_{\mu k}) + \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \partial_{b \dot{a}} \Psi_0^{\dot{c}} + \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_0^{\dot{a}}) - \\ & - \frac{M}{2} (\sigma^{\lambda \dot{a} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\mu} \Psi_\mu^{\dot{c}} + \sigma^{\mu \dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0, \\ & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \sigma^{\mu \dot{c} k} \Psi_{\mu k} - \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \sigma^{\mu \dot{a} k} \Psi_{\mu k} \right) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_0^{\dot{c}} - \partial^{\dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_0^{\dot{a}} \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_\lambda^{\dot{c}} - \sigma^{\mu \dot{c} b} \sigma_{b \dot{a}}^{\lambda} \Psi_\mu^{\dot{a}}) = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Из уравнения (1.26) следует, что

$$- \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \partial_c^b \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_a^b \Psi_{0c} + \partial_c^b \Psi_{0a}) + \frac{M}{2} (\sigma_a^{\mu b} \Psi_{\mu c} + \sigma_c^{\mu b} \Psi_{\mu a}) = 0. \quad (1.36)$$

Подействовав на уравнение (1.36) оператором $\sigma_b^{\lambda a}$, получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \Psi_{0c} + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \partial_c^b \Psi_{0a}) + \\ & + \frac{M}{2} (\sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_a^{\mu b} \Psi_{\mu c} + \sigma_b^{\lambda a} \partial_a^b \sigma_c^{\mu b} \Psi_{\mu a}) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (\sigma_{ab}^{\lambda} \partial^{ba} \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k + \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k) + \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} (\sigma^{\lambda ba} \partial_{ab} \Psi_{0c} + \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{0a}) - \\ & - \frac{M}{2} (\sigma^{\lambda ba} \sigma_{ab}^{\mu} \Psi_{\mu c} + \sigma_{cb}^{\mu} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{\mu a}) = 0, \\ & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \sigma_{c k}^{\mu} \Psi_\mu^k - \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \sigma_{a k}^{\mu} \Psi_\mu^k \right) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_{0c} - \partial_{cb} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{0a} \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_{\lambda c} - \sigma_{cb}^{\mu} \sigma^{\lambda ba} \Psi_{\mu a}) = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Объединения (1.36) и (1.37), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & - \frac{fc_3^*}{\sqrt{6}} (2\partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \hat{\partial} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) - \frac{gc_4^*}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{i} \partial_\lambda \Psi_0 - i \hat{\partial} \gamma_\lambda \Psi_0 \right) + \\ & + \frac{M}{2} (2\Psi_\lambda + \gamma_\mu \gamma_\lambda \Psi_\mu) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu)) + \\ & + i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + M (\Psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$



Таким образом, искомая система спин-тензорных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\ c_2 \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{4c_4}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + (\partial_\mu \Psi_\mu) \right) + M \Psi_0 &= 0, \\ -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + \\ + i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + M(\Psi_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Система уравнений может быть представлена в несколько иной форме. Подействуем на первое уравнение системы (1.39) оператором $\frac{1}{4} \gamma_\lambda$. Получаем

$$\frac{1}{4} c_1 \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \gamma_\lambda (\partial_\mu \Psi_\mu) \right) + \frac{M}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (1.40)$$

Суммируя вновь полученное уравнение с третьим уравнением (1.39), приходим к тому, что

$$\begin{aligned} -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + i \frac{2gc_4^*}{\sqrt{6}} (\partial_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial} \Psi_0) + \\ \frac{1}{4} c_1 \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\gamma_\lambda (\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu)) + M \Psi_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение совместно со вторым уравнением системы (1.39) и образует систему, эквивалентную (1.39) (обозначим её, не выписывая, (1.41)).

$$c_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - 4(\partial_\mu \Psi_\mu)) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$

2. Дальнейший анализ спин-тензорных уравнений

Проведем дополнительные исследования системы уравнений (1.78). Поскольку вектор-биспинор Ψ_μ определяется через биспиноры Ψ_0 , $(\gamma_\mu \Psi_\mu)$, $(\partial_\mu \Psi_\mu)$ (см. второе уравнение в (1.41)), то попытаемся сформулировать систему уравнений первого порядка исключительно относительно указанных биспиноров $(\gamma_\mu \Psi_\mu)$, Ψ_0 , $(\partial_\mu \Psi_\mu)$.

Действуя на второе уравнение системы (1.41) оператором ∂_λ , находим

$$\begin{aligned} -f \frac{\sqrt{6}}{4} c_3^* \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + \frac{1}{4} c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{4\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из первого уравнения системы (1.41) следует

$$c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (\hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu)) + M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$



$$c_1 \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu).$$

С учетом этого уравнение (2.1) представимо в виде

$$-f \frac{\sqrt{6}}{4} c_3^* \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + M(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (2.2)$$

В свою очередь, из уравнения (1.40) получаем

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu),$$

или

$$\partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \frac{1}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \left\{ \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\}. \quad (2.3)$$

Используя (2.3), уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{f|c_3|^2}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{fc_3^*}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} + ig \frac{\sqrt{6}}{4} c_4^* \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + \\ & + M(\partial_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{4} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из первого уравнения системы (1.41) получаем уравнение

$$c_2 \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + i \frac{c_4}{\sqrt{6}} \partial_\lambda \partial_\lambda (\gamma_\mu \Psi_\mu) = \hat{\partial} \left\{ i \frac{4}{\sqrt{6}} c_4 (\partial_\mu \Psi_\mu) - M \Psi_0 \right\},$$

которое с учетом (2.3) переписывается так:

$$c_2 \partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 + i \frac{c_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{c_1 + c_3/\sqrt{6}} \left\{ \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - M \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\} = \hat{\partial} \left\{ i \frac{4}{\sqrt{6}} c_4 (\partial_\mu \Psi_\mu) - M \Psi_0 \right\};$$

отсюда следует:

$$\partial_\lambda \partial_\lambda \Psi_0 = \frac{i}{c_2} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{c_3 c_4}{c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}} + \frac{4c_4}{\sqrt{6}} \right\} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + i \frac{M}{c_2 \sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0.$$

С учетом последнего равенства уравнение (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - igM \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 + \\ & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \left\{ \sqrt{6} fc_2 c_3^* - g|c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \right\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является одним из требуемых уравнений первого порядка относительно указанного выше набора биспинорных функций. Для получения еще одного уравнения необходимо из уравнения (2.5) выразить величину $(\partial_\mu \Psi_\mu)$ и подставить результат в первое из уравнений системы (1.41). В результате получаем



$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогічным образом может быть получено третье из уравнений первого порядка относительно биспинорных функций

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Итак, система уравнений первого порядка относительно биспинорных функций $\gamma_\mu \Psi_\mu$, Ψ_0 , $\partial_\mu \Psi_\mu$, определяющих вектор-биспинор Ψ_λ , задается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left\{ c_1 c_2 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2 \right\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \\ & - i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})\} \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} \hat{\partial} \Psi_0 - \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определим характеристическое уравнение для матрицы, составленной из коэффициентов при операторе $\hat{\partial}$ в системе уравнений (2.8–2.10). Оно имеет вид равенства нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda & -i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda & -i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\ \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \lambda \end{vmatrix}$$



Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda \right\} \left\{ \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda \right\} \left\{ -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \lambda \right\} + \\ & + \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 \} (-i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2}) (-\frac{4 c_3}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}) + \\ & + (-i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2}) (-i \frac{4 c_4}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}) \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \} + \\ & + \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \} \left\{ \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \lambda \right\} \frac{4 c_3}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} - \\ & - i g \frac{c_3 c_4^*}{c_2} \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{ \sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 \} \left\{ \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} + \lambda \right\} - \\ & - i g M \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} i \frac{4 c_4}{M \sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} - \lambda \right\} = \\ & = -\lambda^3 + \lambda^2 \left\{ \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} + \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} - \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \right\} - \\ & - \lambda \left\{ \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot [c_2^2 + g |c_4|^2] - \right. \\ & - \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot [f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2] - \\ & - \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} (c_2^2 + g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) \left. \right\} - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] \cdot \\ & \cdot (c_2^2 + g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{g c_3 |c_4|^2}{\sqrt{6}} (\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2)(f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) - \\ & - \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{g c_3 |c_4|^2}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})) - \\ & - \lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}))(c_2^2 + g |c_4|^2) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot g |c_4|^2 (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) [c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2)] - \\ & - \lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \cdot g |c_4|^2 (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) + \\ & + \frac{1}{c_2^3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2} \cdot g |c_4|^2 \frac{c_3}{\sqrt{6}} (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2)(\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\lambda \frac{1}{c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \cdot g |c_4|^2 \frac{c_3}{\sqrt{6}} (\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2) = \\
 & = -\lambda^3 + \lambda^2(c_1 + c_2) - \lambda(c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) - (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет относительно простой вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) + (f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2) = 0, \quad (2.11)$$

это уравнение совпадает (как и следовало ожидать) с характеристическим уравнением матрицы $\beta^{(1/2)}$. Это означает, что матрица (вводим сокращенные обозначения для ее элементов) системы уравнений (2.8–2.10)

$$\begin{vmatrix}
 \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{c_1 c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + f c_2 |c_3|^2 - \frac{g}{\sqrt{6}} c_3 |c_4|^2\} & -ig \frac{c_3 c_4^*}{c_2} & -\frac{4c_3}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\
 \frac{i}{\sqrt{6}} \cdot \frac{c_4}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2\} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} & -i \frac{4c_4}{M\sqrt{6}} \cdot \frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \\
 \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})} \{\sqrt{6} f c_2 c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\} & -igM \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{c_4^*}{c_2} & -\frac{f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})}
 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_1 & B_1 & R_1 \\
 A_2 & B_2 & R_2 \\
 A_3 & B_3 & R_3
 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

может быть приведена к диагональному виду. Соответственно, система (2.8–2.10) примет вид трех независимых диракоподобных уравнений с массами

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_1}, \quad M_2 = \frac{M}{\lambda_2}, \quad M_3 = \frac{M}{\lambda_3}. \quad (2.13)$$

Осуществим подобный переход в соответствии с преобразованием

$$(\hat{K} - M)\Psi = 0, \quad \Psi' = S\Psi, \quad S\hat{K}S^{-1} = \hat{K}' = \begin{vmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3
 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрицу преобразования S ищем в виде

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix},$$

она удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 A_1 & B_1 & R_1 \\
 A_2 & B_2 & R_2 \\
 A_3 & B_3 & R_3
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 r_1 & r_2 & r_3
 \end{vmatrix}.$$



Откуда получаем три системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= \lambda_2 b_1, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 &= \lambda_2 b_2, \\ b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 &= \lambda_2 b_3; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 &= \lambda_3 r_1, \\ r_1 B_1 + r_2 B_2 + r_3 B_3 &= \lambda_3 r_2, \\ r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3 &= \lambda_3 r_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя явный вид величин R_i (см. (2.12)), из третьего уравнения системы (2.15) будем иметь

$$a_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{\lambda_1 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]} (a_1 c_3 + ia_2 c_4). \quad (2.18)$$

При учете соотношения (2.18) из второго уравнения системы (2.15) получаем

$$a_2 = a_1 \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \lambda_1}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}, \quad (2.19)$$

$$a_3 = -a_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3 (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}. \quad (2.20)$$

При определении постоянных a_2, a_3 в форме (2.19), (2.20) первое из уравнений (2.15) выполняется автоматически, поскольку сводится к соотношению

$$c_2^2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_1^3 - \lambda_1^2 (c_1 + c_2) + \lambda_1 (c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2) + (fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2) \} = 0, \quad (2.21)$$

где λ_1 – решение характеристического уравнения (2.11).

Действуя в той же последовательности, из системы уравнений (2.16) получаем

$$b_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{\lambda_2 c_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]} (b_1 c_3 + ib_2 c_4), \quad (2.22)$$

$$b_2 = b_1 \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \lambda_2}{\lambda_2 c_2 (\lambda_2 - c_2) + (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}, \quad (2.23)$$

$$b_3 = -b_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3 (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_2 c_2 (\lambda_2 - c_2) + (\lambda_2 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_2 (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) g |c_4|^2}. \quad (2.24)$$

При этом первое уравнение системы (2.16) сводится к равенству



$$c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_2^3 - \lambda_2^2(c_1 + c_2) + \lambda_2(c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2) + (fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2) \} = 0, \quad (2.25)$$

которое выполняется, т.к. λ_2 – решение характеристического уравнения (2.11).

Подобный результат получается и при решении системы алгебраических уравнений (2.17):

$$r_3 = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{\lambda_3c_2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) + [fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2]} (r_1c_3 + ir_2c_4), \quad (2.26)$$

$$r_2 = r_1 \frac{-igc_3c_4^*(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\lambda_3}{\lambda_3c_2(\lambda_3 - c_2) + (\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2] - \lambda_3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})g|c_4|^2}, \quad (2.27)$$

$$r_3 = -r_1 \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c_3(\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2]}{\lambda_3c_2(\lambda_3 - c_2) + (\lambda_3 - c_2)[fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2] - \lambda_3(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})g|c_4|^2}, \quad (2.28)$$

$$c_2^2(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})^2 \{ \lambda_3^3 - \lambda_3^2(c_1 + c_2) + \lambda_3(c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2) + (fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2) \} = 0. \quad (2.29)$$

3. О решениях характеристического уравнения

Запишем характеристическое уравнение (2.11) в краткой форме

$$\lambda^3 + \lambda^2a + \lambda b + c = 0, \quad (3.1)$$

где

$$a = -(c_1 + c_2), \quad b = c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \quad c = fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2. \quad (3.2)$$

Выполнив стандартную замену переменной, преобразуем уравнение (3.1) к более простому виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad y = \lambda - \frac{c_1 + c_3}{3} = \lambda + \frac{a}{3}, \quad (3.3)$$

$$p = -\frac{a^3}{3} + b = -\frac{1}{3}(c_1 + c_3)^3 + c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \quad (3.4)$$

$$q = 2(\frac{a}{3})^3 - \frac{ab}{3} + c = -\frac{2}{27}c_1 + c_3^3 + \frac{c_1 + c_2}{3} \{ c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2 \} + \{ f|c_3|^2 + g|c_4|^2 \}. \quad (3.5)$$

По физическим соображениям требуем вещественность всех трех корней уравнения (3.3). Это возможно при выполнении неравенств

$$p < 0, \quad Q < 0, \quad \text{где } Q = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2. \quad (3.6)$$

Решения уравнения (3.3) могут быть представлены в тригонометрической форме

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}),$$

$$y_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}), \quad \cos \alpha = \frac{-q/2}{\sqrt{-(\frac{p}{3})^3}}, \quad (3.7)$$



что дает для исходных физически интерпретируемых корней следующие выражения:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= y_1 + \frac{c_1 + c_2}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{c_1 + c_2}{3} >, \\ \lambda_2 &= y_2 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3}, \\ \lambda_3 &= y_3 + \frac{c_1 + c_2}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{c_1 + c_2}{3}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Нетрудно получить следующие равенства (учитываем требование вещественности корней):

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= c_1 + c_2, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -fc_2|c_3|^2 - gc_1|c_4|^2, \\ p &= \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q &= \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} &= \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

В первую очередь интерес представляет случай трех положительных корней, при этом соотношения (3.9) дают

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2,3} &> 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -fc_2|c_3|^2 - gc_1|c_4|^2 > 0, \\ p &= \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q &= \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} &= \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$



Очевидно, что случаю трех положительных корней может соответствовать только вариант

$$f = -1, \quad g = -1. \quad (3.11)$$

При этом соотношения (3.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2,3} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 + c_2 > 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2|c_3|^2 - 2|c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = c_1c_2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 > 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +c_2|c_3|^2 + c_1|c_4|^2 > 0, \\ p = \frac{1}{6}\{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} < 0, \\ q = \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\right\}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \cos \frac{\alpha}{3} = \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}, \\ \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{-2[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)]}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем обозначения

$$|c_4|^2 = a^2, \quad |c_3|^2 = b^2 \quad (3.13)$$

и проанализируем два из приведенных выше соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3};$$

отсюда находим выражения для корней λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}, \\ \lambda_2 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2}\right)^2 - \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{\lambda_3}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где под корнем должно стоять положительно число. Замечаем, что поскольку

$$\lambda_1 + \lambda_2 = c_1 + c_2 - \lambda_3 > 0,$$

то должно выполняться неравенство

$$0 < \lambda_3 < c_1 + c_2;$$

отсюда следует возможность тригонометрической параметризации значений для λ :

$$\lambda_3 = (c_1 + c_2) \cos \alpha, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.15)$$



Соответственно, формулы (3.12) переписываются так:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (c_1 + c_2) \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3} \frac{1}{\cos \alpha}} \right\}, \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_2) \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3} \frac{1}{\cos \alpha}} \right\}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Имеет смысл ввести обозначение

$$\Gamma = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{(c_1 + c_2)^3}.\quad (3.17)$$

Тогда можно получить выражения для корней λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha} \right\}\quad (3.18)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha} \right\};\quad (3.19)$$

а также

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}.\quad (3.20)$$

Учтем, что под корнем должно стоять положительное число, т.е.

$$\cos \alpha \sin^4(\alpha/2) > \Gamma.\quad (3.21)$$

Отсюда получаем выражения для трех возможных масс

$$M_3 = \frac{M}{\lambda_3} = \frac{M}{(c_1 + c_2) \cos \alpha} = \mu \cdot \frac{1}{\cos \alpha},\quad (3.22)$$

$$M_2 = \frac{M}{\lambda_2} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) - \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}\quad (3.23)$$

$$M_1 = \frac{M}{\lambda_1} = \frac{\mu}{\sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) - \Gamma / \cos \alpha}}\quad (3.24)$$

Отмечаем, что корни задавались тремя параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < \dots (c_1 + c_2), \cos \alpha, \Gamma$; три массы также задаются с помощью следующих трех параметров

$$M_1, M_2, M_3 < \dots \mu, \cos \alpha, \Gamma.$$

Заметим, что если

$$a \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma \rightarrow 0,$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos \alpha}, \quad M_2 \rightarrow \infty, \quad M_1 = \frac{\mu}{1 - \cos^2 \alpha}.\quad (3.25)$$

При этом значения $\alpha = 0, \pi/2$ также особые, поскольку приводят к еще одной бесконечной массе.



Проанализируем неравенство $\cos \alpha \sin^4(\alpha/2) > \Gamma$, которое равносильно задаче

$$f(\alpha) = \cos \alpha \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2}{4} > \Gamma.$$
$$f(\alpha = 0) = 0, \quad f(\alpha = \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Можно ввести переменную $x = \cos \alpha$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{4} x(1 - x^2)^2 > \Gamma, \quad x \in (0, 1);$$

внутри интервала $x \in (0, 1)$ есть точка локального максимума α_0 :

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1 - x^2)(1 - 5x^2)}{4}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad f(\alpha_0) = \frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

Таким образом, при каждом $\Gamma < \Gamma_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}}$ неравенство $f(\alpha) > \Gamma$ имеет решением непустой интервал, содержащий внутри себя точку α_0 .

Случай

$$\Gamma_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}}$$

является особым, поскольку при этом интервал значений для параметра α стягивается в одну точку $\alpha = \alpha_0$ и имеем ситуацию, когда две массы равны друг другу:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (c_1 + c_2) \frac{1 - \cos \alpha_0}{2}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$M_3 = \frac{\mu}{\cos \alpha_0} = \mu\sqrt{5}, \quad (3.26)$$

$$M_{1,2} = \frac{\mu}{(1 - \cos \alpha_0)/2} = \mu \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}. \quad (3.27)$$

4. Диагонализация системы уравнений для свободной частицы, дополнительный анализ

Для упрощения дальнейших расчетов будем использовать обозначения

$$A_1 = \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f |c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1 c_2 - g |c_4|^2) \right],$$
$$A_2 = \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g |c_4|^2 \right],$$
$$A_3 = \frac{M}{4} \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g |c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) \right]; \quad (4.1)$$



$$B_1 = -ig \frac{c_3 c_4^*}{c_2}, \quad B_2 = \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2}, \quad B_3 = -igM \frac{\sqrt{6} c_4^*}{4 c_2}; \quad (4.2)$$

$$R_1 = -\frac{4}{M} \frac{c_3}{\sqrt{6}} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, \quad R_2 = -\frac{4i}{M} \frac{c_4}{\sqrt{6}} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})},$$

$$R_3 = -\frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}. \quad (4.3)$$

Корень λ_1 исследуемого характеристического уравнения, определяющий массовый параметр M_1 , входит в следующую систему (см. предыдущий раздел):

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3; \end{aligned} \quad (4.4)$$

решение системы (4.4) имеет вид

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{-igc_3 c_4^* (c_1 + c_3/\sqrt{6}) \lambda_1}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) g |c_4|^2},$$

$$a_3 = a_1 \cdot \frac{-4}{\sqrt{6} M} \times$$

$$\times \frac{c_3 (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{\lambda_1 c_2 (\lambda_1 - c_2) (c_1 + c_3/\sqrt{6}) + (\lambda_1 - c_2) [fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] - \lambda_1 (c_1 + c_3/\sqrt{6}) g |c_4|^2}. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4–4.5) в первое уравнение системы (4.4), приходим к характеристическому уравнению с корнем $\lambda = \lambda_1$.

С применением обозначений (4.1–4.3) полученная выше система уравнений для трех биспиноров

$$\Psi_0, \quad \gamma_\mu \Psi_\mu, \quad \partial_\mu \Psi_\mu \quad (4.6)$$

запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_1 \hat{\partial} \Psi_0 + R_1 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M (\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\ A_2 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_2 \hat{\partial} \Psi_0 + R_2 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 &= 0, \\ A_3 \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_3 \hat{\partial} \Psi_0 + R_3 \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M (\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти уравнения можно преобразовать в три уравнения для отдельных биспиноров. Для этого сначала суммируем эти три уравнения с коэффициентами a_1, a_2, a_3 соответственно:

$$\begin{aligned} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \hat{\partial} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3) \hat{\partial} \Psi_0 + \\ + (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3) \hat{\partial} (\partial_\mu \Psi_\mu) + M \{a_1 (\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3 (\partial_\mu \Psi_\mu)\} &= 0, \end{aligned}$$



с учетом (4.4) последнее уравнение можно переписать так:

$$\lambda_1 a_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \lambda_1 a_2 \hat{\partial} \Psi_0 + \lambda_1 a_3 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \{a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu)\} = 0.$$

Введем биспинор

$$\Phi_1 = a_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + a_2 \Psi_0 + a_3(\partial_\mu \Psi_\mu), \quad (4.8)$$

тогда предыдущее уравнение принимает дираковский вид

$$(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_1}) \Phi_1 = 0, \quad M_1 = M/\lambda_1. \quad (4.9)$$

Собственное значение λ_2 , определяющее второй массовый параметр M_2 , входит в систему уравнений

$$\begin{aligned} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= \lambda_2 b_1, \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 &= \lambda_2 b_2, \\ b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 &= \lambda_2 b_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обратимся снова к уравнениям для трех биспиноров

$$\begin{aligned} A_1 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_1 \hat{\partial} \Psi_0 + R_1 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) &= 0, \\ A_2 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_2 \hat{\partial} \Psi_0 + R_2 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M \Psi_0 &= 0, \\ A_3 \hat{\partial}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + B_3 \hat{\partial} \Psi_0 + R_3 \hat{\partial}(\partial_\mu \Psi_\mu) + M(\partial_\mu \Psi_\mu) &= 0, \end{aligned}$$

из которых для биспинора

$$\Phi_2 = b_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + b_2 \Psi_0 + b_3(\partial_\mu \Psi_\mu) \quad (4.11)$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_2 :

$$(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_2}) \Phi_2 = 0, \quad M_2 = M/\lambda_2. \quad (4.12)$$

Наконец, обращаемся к уравнениям, в которые входит корень λ_3 :

$$\begin{aligned} r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 &= \lambda_3 r_1, \\ r_1 B_1 + r_2 B_2 + r_3 B_3 &= \lambda_3 r_2, \\ r_1 R_1 + r_2 R_2 + r_3 R_3 &= \lambda_3 r_3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поступая аналогично двум предыдущим случаям, получаем

$$\begin{aligned} r_2 &= -r_1 \cdot \frac{igc_3 c_4^* (c_1 + c_3/\sqrt{6}) \lambda_3}{(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] + \lambda_3 c_2 (\lambda_3 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - \lambda_3 (c_1 + c_3/\sqrt{6})g |c_4|^2}, \\ r_3 &= -r_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \times \end{aligned}$$



$$\times \frac{c_3(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2]}{(\lambda_3 - c_2)[fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2] + \lambda_3 c_2 (\lambda_3 - c_2)(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - \lambda_3 (c_1 + c_3/\sqrt{6})g |c_4|^2}; \quad (4.14)$$

а для биспинора

$$\Phi_3 = r_1(\gamma_\mu \Psi_\mu) + r_2 \Psi_0 + r_3(\partial_\mu \Psi_\mu) \quad (4.15)$$

находим уравнение дираковского вида с массой M_3 :

$$(\hat{\partial} + \frac{M}{\lambda_3})\Phi_3 = 0, \quad M_3 = M/\lambda_3. \quad (4.16)$$

5. Учет электромагнитного поля

Присутствие внешнего электромагнитного поля учтем обычным приемом удлинения производной:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x). \quad (5.1)$$

Обращаемся вновь к двум уравнениям (см. (1.41)), которые с учетом внешних полей принимают вид

$$c_2 \hat{D}\Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\Psi_0 = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[D_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[D_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\Psi_\lambda = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Совершим над этой системой некоторые преобразования. Сначала свернем уравнение (5.3) с матрицей γ_λ . Получим уравнение

$$\begin{aligned} & - \frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda D_\lambda(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda D_\lambda \Psi_0 - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\gamma_\lambda \gamma_\lambda (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\gamma_\lambda \Psi_\lambda = 0, \end{aligned}$$

из которого с учетом тождества $\frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\lambda = 1$ будем иметь



$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}\Psi_0 - \hat{D}\Psi_0 \right] + c_1 \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[4(D_\mu \Psi_\mu) - \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M\gamma_\lambda \Psi_\lambda = 0, \\
 & (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Теперь на уравнение (5.3) действуем оператором D_λ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}\Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} \hat{D} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $D^2 = D_\lambda D_\lambda$. С учётом тождества

$$\begin{aligned}
 \hat{D} \hat{D} & = D_\lambda D_\rho \left[\frac{1}{2} (\gamma_\lambda \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\lambda) + \frac{1}{2} (\gamma_\lambda \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\lambda) \right] = \\
 & = 2D_\lambda D_\rho \sigma_{\lambda\rho} + D^2 = [D^2 + (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho}]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

уравнение (5.5) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} (D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] + \frac{c_1}{4} [(D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} + D^2] (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\
 & - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} [(D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda) \sigma_{\lambda\rho} + D^2] (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Отметим здесь выражение для коммутатора

$$D_\lambda D_\rho - D_\rho D_\lambda = (-ieF_{\lambda\rho}). \tag{5.8}$$

Уравнение (5.7) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\
 & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2\Psi_0 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\
 & + \frac{1}{4} (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) [D^2 + (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho}] (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$



С учетом (5.4) уравнение (5.9) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 \right] - \frac{c_3}{\sqrt{6}} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{4c_3}{\sqrt{6}} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - M \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -\frac{2fc_3^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \right] (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{2igc_4^*}{\sqrt{6}} \left[\frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \right] \Psi_0 - \frac{M}{4} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0; \end{aligned} \quad (5.11)$$

обозначаем его как уравнение III. Приведем здесь же два других уравнения:

уравнение I

$$c_2 \hat{D} \Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M \Psi_0 = 0, \quad (5.12)$$

уравнение II

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M (\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \quad (5.13)$$

Заметим, что только уравнение III содержит оператор второго порядка D^2 .

Наша цель – получить систему уравнений первого порядка для биспиноров

$$\Psi_0, (\gamma_\mu \Psi_\mu), (D_\mu \Psi_\mu).$$

Покажем, как можно исключить из уравнения (5.11) оператор второго порядка. Сначала выделим в уравнении (5.11) отдельные слагаемые:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4} D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 - \frac{1}{4} M \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M (D_\lambda \Psi_\lambda) = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении преобразуем с помощью (5.10), переписанного в виде

$$\begin{aligned} & D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) = (+ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu), \end{aligned} \quad (5.14)$$

первое слагаемое:

$$-\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4} \left\{ (+ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (D_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D} (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right\} +$$



$$+ \frac{fc_3^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) +$$

$$+ \frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 - \frac{1}{4} M \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0,$$

или

$$- \frac{\sqrt{6}fc_3^*}{4} \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \frac{M}{4} \frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) +$$

$$+ \frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 +$$

$$+ fc_3^* \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} M \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0.$$

Это уравнение после простой перегруппировки представляем так:

$$- \frac{f|c_3|^2}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \frac{M}{4} \left[\frac{\sqrt{6}fc_3^*}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} - 1 \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) +$$

$$+ \frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} D^2 \Psi_0 - \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(D_\lambda \Psi_\lambda) = 0. \quad (5.15)$$

Чтобы преобразовать член $D^2 \Psi_0$, обратимся к первому уравнению (5.12) и подействуем на него оператором \hat{D} :

$$c_2 \hat{D} \hat{D} \Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M \hat{D} \Psi_0 = 0.$$

Отсюда, учитывая тождество (5.6)

$$\hat{D} \hat{D} = D^2 + (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho},$$

получаем

$$c_2 [D^2 + (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho}] \Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[\hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{1}{4} [D^2 + (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho}] (\gamma_\mu \Psi_\mu) \right] + M \hat{D} \Psi_0 = 0,$$

или

$$D^2 \Psi_0 = -(-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) -$$

$$- \frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2} D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2} (-ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{c_2} \hat{D} \Psi_0.$$

В этом соотношении член $D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu)$ выражаем с помощью (5.14):

$$D^2 (\gamma_\mu \Psi_\mu) = (+ieF_{\lambda\rho}) \sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu),$$



тогда получаем

$$D^2\Psi_0 = -(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{4ic_4}{\sqrt{6}c_2}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}\left\{(+ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{c_3}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{ic_4}{\sqrt{6}c_2}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - \frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0.$$

Отсюда после приведения подобных членов, приходим к равенству

$$D^2\Psi_0 = -\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu). \quad (5.16)$$

С учетом этого из уравнения (5.15) исключаем член $D^2\Psi_0$:

$$-\frac{f|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + \frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1+c_3/\sqrt{6})}{(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\left\{-\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) + iM\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\} -$$

$$-\frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 + \frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M(D_\lambda\Psi_\lambda) = 0.$$

Собираем подобные члены вместе:

$$\left[-\frac{f|c_3|^2}{(c_1+c_3/\sqrt{6})} + \frac{4i}{\sqrt{6}}\frac{c_1c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu) +$$

$$+\left[\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_3^* - (c_1+c_3/\sqrt{6})}{(c_1+c_3/\sqrt{6})} - \frac{M}{4}\frac{gc_4^*c_4}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\right]\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) -$$

$$-\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4}\frac{M}{c_2}\hat{D}\Psi_0 - \left(\frac{i\sqrt{6}gc_4^*}{4} + \frac{igc_4^*}{2\sqrt{6}}\right)(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu) + M(D_\mu\Psi_\mu) = 0.$$

Окончательно для уравнения III получаем представление

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1+c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu) - i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0 -$$



$$-\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \\ +\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0; \quad (5.17)$$

оно не содержит оператора D^2 .

6. Приведение системы уравнений во внешнем поле к квазидиагональному виду

Будем исходить из трех уравнений:

уравнение I

$$c_2\hat{D}\Psi_0-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}\left[(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{4}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right]+M\Psi_0=0, \quad (6.1)$$

уравнение II

$$(c_1+\frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M(\gamma_\mu\Psi_\mu)=0, \quad (6.2)$$

уравнение III

$$+\frac{M}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}M\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0- \\ -\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \\ +\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+M(D_\mu\Psi_\mu)=0. \quad (6.3)$$

Дальнейшая задача – привести систему уравнений к виду, когда смешивание трех биспиноров

$$(\gamma_\mu\Psi_\mu), \Psi_0, (D_\mu\Psi_\mu). \quad (6.4)$$

осуществляется только через тензор электромагнитного поля.

Обратимся к первому уравнению (6.1):

$$c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-\frac{4ic_4}{\sqrt{6}}(D_\mu\Psi_\mu)+M\Psi_0=0,$$

Исключим член $(D_\mu\Psi_\mu)$ с помощью третьего уравнения (6.3), получаем

$$c_2\hat{D}\Psi_0+\frac{ic_4}{\sqrt{6}}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)+\frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \\ \left\{+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}fc_2c_3^*-c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})-g|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(\gamma_\mu\Psi_\mu)-i\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{gc_4^*}{c_2}\hat{D}\Psi_0- \right. \\ \left.-\frac{1}{M}\frac{fc_2|c_3|^2+gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1+c_3/\sqrt{6})}\hat{D}(D_\mu\Psi_\mu)-\frac{1}{M}i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}\Psi_0+ \right. \\ \left. +\frac{1}{M}\frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho}(\gamma_\mu\Psi_\mu)\right\}+M\Psi_0=0.$$



Приводим подобные члены

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{D}\Psi_0 + \\ & + \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \left[1 + \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g |c_4|^2 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*c_4 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении можно упростить второе слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{c_2^2 + g |c_4|^2}{c_2} \hat{D}\Psi_0 + \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g |c_4|^2 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*c_4 (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M\Psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Аналогично, обратившись к уравнению II:

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} (D_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0,$$

исключим в нем также член $(D_\mu \Psi_\mu)$:

$$\begin{aligned} & (c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}}) \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) + \\ & + \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} i \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{gc_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \\ & + \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned}$$

Приводим подобные члены:

$$\begin{aligned} & \left[(c_1 + c_3/\sqrt{6}) + \frac{c_3}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4c_3}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2 |c_3|^2 + gc_1 |c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned}$$



В этом уравнении можно упростить первый член

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g_4|c^2) \right] \hat{D}(\gamma_\mu \Psi_\mu) - \\ & - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D_\mu \Psi_\mu) - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ & - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} \Psi_0 + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^*(-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} (\gamma_\mu \Psi_\mu) + M(\gamma_\mu \Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Вводим обозначения

$$\gamma_\mu \Psi_\mu = \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_2 = \Psi_0, \quad \bar{\Phi}_3 = D_\mu \Psi_\mu; \quad (-ieF_{\lambda\rho})\sigma_{\lambda\rho} = \Sigma.$$

Полученную выше систему из трех уравнений записываем так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g_4|c^2) \right] \hat{D}\bar{\Phi}_1 - \\ & - i \frac{gc_3c_4^*}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{c_3}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{4c_3}{3} \frac{1}{M} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 - \frac{4ic_3}{3} \frac{1}{M} gc_4^*\Sigma \bar{\Phi}_2 + M\bar{\Phi}_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{ic_4}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_1 + \frac{c_2^2 + g|c_4|^2}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \frac{1}{M} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{4i}{3} \frac{1}{M} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{1}{M} g|c_4|^2 \Sigma \bar{\Phi}_2 + M\Psi_0 = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{M}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_1 - i \frac{\sqrt{6}}{4} M \frac{gc_4^*}{c_2} \hat{D}\bar{\Phi}_2 - \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}\bar{\Phi}_3 + \\ & + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*\Sigma \bar{\Phi}_1 - i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^*\Sigma \bar{\Phi}_2 + M\bar{\Phi}_3 = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Если воспользоваться обозначениями, которые были введены при рассмотрении случая свободной частицы

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[c_2(c_1^2 + f|c_3|^2) + \frac{c_3}{\sqrt{6}}(c_1c_2 - g|c_4|^2) \right], \\ A_2 &= \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{c_4}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g|c_4|^2 \right], \\ A_3 &= \frac{M}{4} \frac{1}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \left[f\sqrt{6}c_2c_3^* - g|c_4|^2 - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) \right]; \\ B_1 &= -ig \frac{c_3c_4^*}{c_2}, \quad B_2 = \frac{c_2^2 + g|c_4|^2}{c_2}, \quad B_3 = -igM \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{c_4^*}{c_2}; \end{aligned}$$



$$R_1 = -\frac{4}{M} \frac{c_3}{\sqrt{6}} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, R_2 = -\frac{4i}{M} \frac{c_4}{\sqrt{6}} \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})}, R_3 = -\frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})};$$

то последние три уравнения записываем коротко таким образом:

$$\begin{aligned} A_1 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_1 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_1 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} \Sigma \bar{\Phi}_1 - \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0, \\ A_2 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_2 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_2 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_2 + \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} \Sigma \bar{\Phi}_1 + \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0, \\ A_3 \hat{D} \bar{\Phi}_1 + B_3 \hat{D} \bar{\Phi}_2 + R_3 \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M \bar{\Phi}_3 + \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^* \Sigma \bar{\Phi}_1 - i \frac{2}{\sqrt{6}} gc_4^* \Sigma \bar{\Phi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Дальше действуем как и в случае свободного поля. Умножаем первое, второе, третье уравнения соответственно на a_1, a_2, a_3 и результаты складываем:

$$\begin{aligned} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \hat{D} \bar{\Phi}_1 + (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3) \hat{D} \bar{\Phi}_2 + \\ + (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3) \hat{D} \bar{\Phi}_3 + M(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [a_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-a_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0; \end{aligned}$$

откуда, учитывая равенства

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= \lambda_1 a_1, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 &= \lambda_1 a_2, \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 &= \lambda_1 a_3, \end{aligned} \quad (6.11)$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + M(a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [a_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-a_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Аналогично находим еще два уравнения (заменяя a_i на b_i и на r_i)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3) + M(b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [b_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + b_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + b_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ + [-b_1 \frac{4i}{3} \frac{gc_3 c_4^*}{M} + b_2 \frac{4}{3} \frac{g|c_4|^2}{M} - b_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} gc_4^*] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \hat{D}(r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3) + M(r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3) + \\ + [r_1 \frac{4}{3} \frac{f|c_3|^2}{M} + r_2 \frac{4i}{3} \frac{fc_3^* c_4}{M} + r_3 \frac{2}{\sqrt{6}} fc_3^*] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \end{aligned}$$



$$+ \left[-r_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + r_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - r_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \quad (6.14)$$

Вводим три новых биспинора следующими линейными комбинациями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1 \bar{\Phi}_1 + a_2 \bar{\Phi}_2 + a_3 \bar{\Phi}_3, \\ \Phi_2 &= b_1 \bar{\Phi}_1 + b_2 \bar{\Phi}_2 + b_3 \bar{\Phi}_3, \\ \Phi_3 &= r_1 \bar{\Phi}_1 + r_2 \bar{\Phi}_2 + r_3 \bar{\Phi}_3; \end{aligned} \quad (6.15)$$

тогда система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_1 + M \Phi_1 + \\ &+ \left[a_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + a_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + a_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-a_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + a_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - a_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_2 + M \Phi_2 + \\ &+ \left[b_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + b_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + b_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-b_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + b_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - b_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \hat{D} \Phi_3 + M \Phi_3 + \\ &+ \left[r_1 \frac{4}{3} \frac{f |c_3|^2}{M} + r_2 \frac{4i}{3} \frac{f c_3^* c_4}{M} + r_3 \frac{2}{\sqrt{6}} f c_3^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_1 + \\ &+ \left[-r_1 \frac{4i}{3} \frac{g c_3 c_4^*}{M} + r_2 \frac{4}{3} \frac{g |c_4|^2}{M} - r_3 \frac{2i}{\sqrt{6}} g c_4^* \right] \Sigma \bar{\Phi}_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

7. Обобщение теории на общековариантный случай

Чтобы обобщить подход на риманово пространство-время, нужно сделать ряд изменений.

1. Поскольку в римановом пространстве будем использовать метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$, соответствующий сигнатуре $(+, -, -, -)$, нужно сделать замену

$$M \rightarrow iM. \quad (7.1)$$

2. Затем нужно использовать другие матрицы Дирака (для определенности имеем в виду спинорный базис)

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix}. \quad (7.2)$$

3. Нужно изменить выражения для операторов дифференцирования [1.3]

$$D_\alpha(x) = \partial_\alpha + ieA_\alpha(x) \rightarrow D_\alpha(x) = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \quad \hat{D} = \gamma^\alpha(x) D_\alpha(x), \quad (7.3)$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ – биспинорная связность, и $\gamma^\alpha(x) = \gamma^a e_{(a)}^\alpha(x)$.



4. Будем учитывать перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma^\rho(x)D_\beta &= D_\beta\gamma^\rho(x), & D_\sigma(x)g_{\alpha\beta}(x) &= g_{\alpha\beta}(x)D_\sigma(x), \\ \hat{D}\hat{D} &= D_\alpha D_\beta \left(\frac{\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha}{2} + \frac{\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha}{2} \right) = -\Sigma(x), \\ D^2 &= D^\alpha D_\alpha, & \Sigma(x) &= (-ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R}{4}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $R(x)$ – скалярная кривизна Риччи.

С учетом этого имеем модифицированную общековариантную систему уравнений

$$c_2\hat{D}\Psi_0 - \frac{4ic_4}{\sqrt{6}} \left[(D^\mu\Psi_\mu) - \frac{1}{4}\hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) \right] + iM\Psi_0 = 0, \quad (7.5)$$

$$(c_1 + \frac{c_3}{\sqrt{6}})\hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) - \frac{4c_3}{\sqrt{6}}(D^\mu\Psi_\mu) + iM(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) = 0, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} + \frac{iM}{4} \frac{\sqrt{6}fc_2c_3^* - c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6}) - g|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) - i\frac{\sqrt{6}}{4}iM \frac{gc_4^*}{c_2} \hat{D}\Psi_0 - \\ - \frac{fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2}{c_2(c_1 + c_3/\sqrt{6})} \hat{D}(D^\mu\Psi_\mu) - i\frac{2}{\sqrt{6}}gc_4^* (-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R}{4})\Psi_0 + \\ + \frac{2}{\sqrt{6}}fc_3^* (-ieF_{\lambda\rho}\sigma_{\lambda\rho} + \frac{R}{4})(\gamma^\mu(x)\Psi_\mu) + iM(D^\mu\Psi_\mu) = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Дальнейший анализ повторяется с небольшими формальными изменениями, в результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} i\hat{D}(x)\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + iY_1\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\hat{D}(x)\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + iY_2\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\hat{D}(x)\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + iY_3\Sigma(x)\Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{D}(x) &= \gamma^\alpha(x)D_\alpha, & D_\alpha(x) &= \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x), \\ Y_i &= \frac{4c_2c_3}{3iM}(\lambda_i - c_2), & i &= 1, 2, 3; & \Phi &= L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x), \\ \Sigma(x) &= -ieF_{\lambda\rho}(x)\sigma_{\lambda\rho}(x) + \frac{R(x)}{4}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Отметим, что система уравнений (7.8) допускает ограничение в случае майорановских частиц (когда $e = 0$), при этом имеем уравнения

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y'_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y'_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)(\nabla_\alpha + \Gamma_\alpha)\Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y'_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (7.10)$$



где

$$Y'_i = \frac{4c_2c_3}{3M}(\lambda_i - c_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad \Phi = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x). \quad (7.11)$$

Поскольку в любом из майорановских базисов выполняется тождество $[i\gamma^\alpha(x)]^* = i\gamma^\alpha(x) [\Gamma_\alpha(x)]^* = \Gamma_\alpha(x)$; то биспиноры $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ и биспинор $\Phi(x)$ могут быть либо вещественными, либо чисто мнимыми.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.
3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.09.2018

Pletyukhov V.A., Kisel V.V., Ovsyuk E.M., Voynova Y.A., Veko O.V., Red'kov V.M. Fermion with Three Mass Parameters. General Theory, Interaction with External Fields

In the paper, starting from general Gel'fand – Yaglom approach a new 20-component wave equation for spin 1/2 fermion, which is characterized by three mass parameters, is derived. On the base of 20-component wave function, three auxiliary bispinors are introduced, they in absence of external field for these bispinors obey to three separate Dirac-like equations with different masses M_1, M_2, M_3 . It is shown that in presence of external fields, electromagnetic field and gravitational non-Euclidean background with non-vanishing Ricci scalar curvature, the main equation is not split into separated equations, instead a quite definite mixing of three Dirac-like equations arises. It is shown that a generalized equation for Majorana particle with three mass parameters exists as well, such a generalized Majorana equation is not split into three separated equations in curved background if Ricci scalar of space-time model does not vanish.