УДК 512.542

Д.В. Грицук
канд. физ.-мат. наук,
ст. преподаватель каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ПРОИЗВОДНАЯ π-ДЛИНА КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП, У КОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫЙ КОММУТАНТ π-ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТЕН

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Доказано, что производная π-длина конечной π-разрешимой группы, у которой обобщенный коммутант π-холловой подгруппы G_π нильпотентен, не превышает $|\pi(G_\pi)|-1+\max_{p\in\pi} l_p^a(G)$, где $l_p^a(G)$ – производная p-длина π-разрешимой группы G.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1]. В 1956 г. Холл и Хигмэн [2] предложили понятие p-длины p-разрешимых групп. Они установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. Элементарная теория p-длины изложена в монографии [1, VI.6]. Картер, Фишер и Хоукс [3] в 1968 г. ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья Нумата [4]. Оценкам нильпотентной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы [5; 6]. В 2006 г. В.С. Монахов предложил понятие производной π-длины π-разрешимой группы [7]. Некоторые оценки производной π-длины π-разрешимой групп были получены автором в работах [8–10]. В частности, в работе [9] установлена оценка производной π-длины π-разрешимой группы, у которой коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен. В настоящей заметке получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы, у которой обобщенный коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен.

Используемые определения и обозначения

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел N следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G)=\pi(|G|)$ и $\pi(G:H)=\pi(|G:H|)$. Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m)\subseteq\pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется π-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi$ и π'-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi'$ В этом случае $\pi(G)\cap\pi'=\varnothing$.

Ряд подгрупп
$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1 \qquad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i-1}. Фактор-группы G_{i-1}/G_i называются факторами ряда (1).

Группа называется π-разрешимой, если факторы G_{i-1}/G_i являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Каждая π-разрешимая группа G обладает следующими рядами:

(π',π)-рядом, когда каждый фактор ряда (1) является либо π-группой, либо π'-группой; наименьшее число π-факторов среди всех субнормальных (π',π)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$;

(π',π^n)-рядом, когда каждый фактор ряда (1) является либо π'-группой, либо нильпотентной π-группой; наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех субнормальных (π',π^n)-рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$;

(π',π^a)-рядом, когда каждый фактор ряда (1) является либо π'-группой, либо абелевой π-группой; наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных (π',π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$.

В случае, когда $\pi=\pi(G)$ группа G становится разрешимой и значения $l_\pi^n(G)$ и $l_\pi^a(G)$ совпадают со значениями нильпотентной и производной длин группы G соответственно.

Свойства производной π-длины $l_\pi^a(G)$ во многом схожи со свойствами π-длины $l_\pi(G)$ и нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$, но есть и отличия. Например,

$$l_\pi(G)=l_\pi(G/\Phi(G)),\ l_\pi^n(G)=l_\pi^n(G/\Phi(G)),$$

а для производной π-длины аналоги этих равенств нарушаются. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Очевидно, что обобщенный коммутант совпадает с A-корадикалом группы G, где A – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Вспомогательные результаты

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Если G – π-разрешимая группа, то

$$l_\pi(G)\le l_\pi^n(G)\le l_\pi^a(G).$$

Доказательство

Вытекает непосредственно из определений π-длины, нильпотентной π-длины и производной π-длины π-разрешимой группы.

Лемма 2. [8] Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G, то $l_\pi^a(H)\le l_\pi^a(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$l_\pi^a(G/N) \le l_\pi^a(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N);$$

3) если N – нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;

4) если G и V – π-разрешимые группы, то

$$l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\};$$

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то

$$l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}.$$

Лемма 3. [11] Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_\pi^a(G/N) \le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_\pi^a(G) > t$. Тогда:

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p \in \pi$;

4) $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Лемма 4. Если в p-разрешимой группе G силовская p-подгруппа является абелевой, то $l_p^a(G) \le 1$.

Доказательство

Пусть G – p-разрешимая группа с абелевой силовской p-подгруппой. Для доказательства воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа в G. Так как $G_pN/N \cong G_p/(G_p \cap N)$, то их силовские подгруппы изоморфны. Следовательно, в любой фактор-группе группы G силовская p-подгруппа является абелевой. Поэтому по индукции $l_p^a(G/N) \le 1$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G. По лемме 3 в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа, а по лемме 2

$$O_{p'}(G) = 1,\ F(G) = O_p(G) \text{ и } C_G(F(G)) \subseteq F(G).$$

Так как $F(G) \subseteq G_p$ и G_p абелева, то

$$G_p \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G).$$

Поэтому $G_p = F(G)$ и $l_p^a(G) \le 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. [11, 12] Пусть G – π-разрешимая группа и $\tau \subseteq \pi$. Тогда

$$l_\pi^*(G) \le l_\tau^*(G) + l_{\pi\setminus\tau}^*(G).$$

Здесь под $l_\pi^*(G)$ понимается либо всюду $l_\pi^n(G)$, любо всюду $l_\pi^a(G)$.

Лемма 6. Если G – π-разрешимая группа с абелевыми силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \le |\pi(G_\pi)|$.

Доказательство

Очевидно, что группа G является p-разрешимой для любого $p \in \pi$. Так как силовские p-подгруппы группы G абелевы, то по лемме 4 $l_p^a(G) \le 1$ для каждого $p \in \pi$. Применяя лемму 5, получаем $l_\pi^a(G) \le |\pi(G_\pi)|$. Лемма доказана.

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [1, III.5].

Лемма 7. [13] Пусть G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой P. Если P изоморфна нормальной силовской p-подгруппе группы Шмидта, то $l_p(G)=1$.

Основные результаты

Теорема 8. Пусть G – π-разрешимая группа, у которой обобщенный коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен. Тогда

$$l_\pi^n(G)\le|\pi(G_\pi)|-1+\max_{p\in\pi} l_p(G) \text{ и } l_\pi^a(G)\le|\pi(G_\pi)|-1+\max_{p\in\pi} l_p^a(G).$$

Доказательство

Пусть G – π-разрешимая группа, у которой обобщенный коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен. Для доказательства воспользуемся индукцией по порядку группы G. Очевидно, что условия теоремы переносятся на фактор-группы группы G, поэтому по лемме 3 в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Кроме того, по лемме 2

$$O_{\pi'}(G)=O_{p'}(G)=1,$$
$$F(G)=O_p(G)=F(O_\pi(G))$$

для некоторого простого $p\in\pi$ и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$.

Пусть N – обобщенный коммутант π-холловой подгруппы G_π. Так как N является нильпотентной группой, то p'-холлова подгруппа $N_{p'}$ из N нормальна в G_π и, следовательно,

$$N_{p'}\subseteq C_G(F(G))\subseteq F(G).$$

Поэтому $N_{p'}=1$ и N является p-группой.

Так как N обобщенный коммутант π-холловой подгруппы G_π, то силовская r-подгруппа G_rN/N группы G_π/N абелева для всех $r\in\pi$. По [14, теорема 2.4] $G_qN/N \cong G_q$ для всех $q\in\pi\setminus\{p\}$. Таким образом, силовские q-подгруппы в группе G абелевы для всех $q\in\pi\setminus\{p\}$. По лемме 4 $l_q^a(G)\le 1$ для всех $q\in\pi\setminus\{p\}$. Поэтому $\max_{t\in\pi} l_t^a(G)=l_p^a(G)$.

Так как в $G_{\pi\setminus\{p\}}$ все силовские подгруппы абелевы, то из леммы 6 получаем

$$l_{\pi\setminus\{p\}}^a(G)\le|\pi(G_{\pi\setminus\{p\}})|=|\pi(G_\pi)|-1.$$

По лемме 5 $l_\pi^a(G)\le l_{\pi\setminus\{p\}}^a(G)+l_p^a(G)$. Поэтому

$$l_\pi^a(G)\le|\pi(G_\pi)|-1+\max_{p\in\pi} l_p^a(G).$$

Таким образом, утверждение для производной π-длины конечной π-разрешимой группы доказано.

Докажем утверждение для нильпотентной π-длины. По лемме 1

$$l_{\pi\setminus\{p\}}^n(G)\le l_{\pi\setminus\{p\}}^a(G)\le|\pi(G_\pi)|-1.$$

Так как $l_\pi^n(G)\le l_{\pi\setminus\{p\}}^n(G)+l_p^n(G)$ по лемме 5, то

$$l_\pi^n(G) \le |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G).$$

Теорема доказана.

Следствие 9. Пусть G – π-разрешимая группа, π-холлова подгруппа которой является группой Шмидта. Тогда $l_\pi^n(G) \le 2$ и $l_\pi^a(G) \le 3$.

Доказательство

Пусть π-холлова подгруппа G_π π-разрешимой группы G является группой Шмидта и $G_\pi = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – ненормальная силовская q-подгруппа ($p \ne q$), причем Q – циклическая. Известно, что $(G_\pi)' = P$. Так как обобщенный коммутант группы содержится в ее коммутанте, то по теореме 8 имеем

$$l_\pi^n(G) \le |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \le |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p\in\pi} l_p^a(G).$$

По лемме 7 $l_p(G) \le 1$. Так как P либо абелева, либо метабелева, то $l_p^a(G) \le 2$. Тогда $l_\pi^n(G) \le 2$ и $l_\pi^a(G) \le 3$. Следствие доказано.

Группой Миллера – Морено называют наименьшую неабелеву группу. Ненильпотентные группы Миллера – Морено являются частным случаем групп Шмидта и их строение легко выводится из свойств групп Шмидта. Нильпотентные группы Миллера – Морено являются примарными.

Следствие 10. Пусть G – π-разрешимая группа, у которой π-холлова подгруппа является непримарной группой Миллера – Морено. Тогда

$$l_\pi^n(G) \le l_\pi^a(G) \le 2.$$

Доказательство

Пусть π-холлова подгруппа G_π π-разрешимой группы G является группой Миллера – Морено и $G_\pi = [P]Q$, где P – минимальная нормальная силовская p-подгруппа, а Q – ненормальная силовская q-подгруппа ($p \ne q$). Так как π-холлова подгруппа G_π является группой Милера – Морено, то ее обобщенный коммутант является абелевой группой. Тогда по теореме 8

$$l_\pi^a(G) \le |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p\in\pi} l_p^a(G).$$

По определению групп Миллера – Морено все подгруппы в G_π абелевы, поэтому $l_p^a(G) \le 1$ для всех $p \in \pi$ по лемме 4. Следовательно, $l_\pi^a(G) \le 2$, а с учетом леммы 1 $l_\pi^n(G) \le l_\pi^a(G) \le 2$. Следствие доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967.

2. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

3. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // Journal Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

4. Numata, M. On the p-nilpotent length of p-solvable groups / M. Numata // Osaka Journal. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

5. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.

6. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.

7. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Математические заметки – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

8. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 61–66.

9. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finifte π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – С. 233–241.

10. Грицук, Д. В. Производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.

11. Грицук, Д. В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальные / Д. В. Грицук, В. С. Монахов // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.

12. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – De Gruyter Expositions in Mathematics, 2010. – 334 p.

13. Shemetkov, L. A. On the p-length of a finite p-solvable groups / L. A. Shemetkov, Yi Xiaolan // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 93–96.

14. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2015

Gritsuk D.V. **The Derived π-length of a π-solvable Group in which Generalized Derived Subgroup of a π-Hall Subgroup is Nilpotent**

The smallest normal subgroup N of a group G such that G/N is the group in which the Syllow subgroups are the Abelin is called generalized derived subgroup of the group G. It is proved that the derived π-length of the π-solvable group in which generalized derived subgroup of the π-Hall subgroup G_π is nilpotent is at most $|\pi(G_\pi)|-1+\max_{p\in\pi} l_p^a(G)$, when $l_p^a(G)$ is the derived p-length of the π-solvable group G.