Вучоныя запіскі 2013 • Вып. 9
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 519.6+517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

ОБ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве предлагается явный метод итераций решения операторных уравнений первого рода с неотрицательным самосопряженным и несамосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае апостериорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова.

В статье предлагается итерационный метод явного типа решения некорректных задач. Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в работе [1]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме. Априорный выбор числа итераций для изучаемого в данной статье метода в случае приближенного оператора исследован в [2]. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным методом простой итерации $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n)$, $x_0 = 0$ [3–5] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: выполнение здесь одного шага итераций равносильно выполнению двух шагов по методу простой итерации.

В данной статье продолжено изучение предлагаемого метода. Доказана его сходимость в случае апостериорного выбора числа итераций, и получены оценки погрешности метода и оценки момента останова в предположении, что оператор задан приближенно.

1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}\,(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного процесса

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0 \tag{2}$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг.

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A-A_\eta\|\le\eta$. Предполагаем, что $0\in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{(n+1)(\eta,\delta)}=(E-\alpha A_\eta)^2x_{n(\eta,\delta)}+2\alpha y_\delta-\alpha^2A_\eta y_\delta,\quad x_{0(\eta,\delta)}=0. \tag{3}$$

Докажем сходимость метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x=y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближённо: $\|A_\eta-A\|\le\eta$, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. Подобные вопросы изучались в [3], но только для других методов. Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру.

2. Правило останова по невязке

Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left.\begin{aligned}&\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta\|>\varepsilon,\ (n<m),\\&\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)}-y_\delta\|\le\varepsilon,\end{aligned}\right\}\ \varepsilon=b(\delta+\|x^*\|\eta),\ b>1. \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)}-y_\delta\|>\varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3).

3. Случай самосопряжённых неотрицательных операторов

Пусть $H=F$, $A=A^*\ge0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge0$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $0<\eta\le\eta_0$. Итерационный метод (3) запишем в виде: $x_{n(\eta,\delta)}=g_n(A_\eta)y_\delta$, где $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{2n}\right]$. В [1] получены следующие условия для функций $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\gamma n,\quad \gamma=2\alpha,\quad 0<\alpha<\frac{2}{M},\quad n>0; \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_s n^{-s},\ (n>0),\ 0<s<\infty,\quad \gamma_s=\left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^s,\quad 0<\alpha\le\frac{5}{4M}, \tag{6}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^*=A^sz$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$);

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_0,\quad \gamma_0=1,\quad 0<\alpha<\frac{2}{M},\quad n>0; \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda|1-\lambda g_n(\lambda)|\to0,\quad n\to\infty,\ 0<\alpha<\frac{2}{M}. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, *и выполнено условие* (6) с $s_0 > 1$. *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{9}$$

Доказательство

Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [6, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \ldots$ ограничены не зависящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (6) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\| = n\|A_\eta (E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = n \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n\gamma_1 n^{-1} = \gamma_1, (n > 0, \eta > 0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (6) имеем

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| = n\|A_\eta G_{n\eta} A\omega\| \leq n\|A_\eta G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| +$$
$$+ n\|A_\eta G_{n\eta} A_\eta \omega\| \leq \left(\gamma_1 \eta + n \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^2 |1 - \lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \leq$$
$$\leq \left(\gamma_1 \eta + n\gamma_2 n^{-2}\right)\|\omega\| = \left(\gamma_1 \eta + \gamma_2 n^{-1}\right)\|\omega\| \to 0,\ n \to \infty, \eta \to 0.$$

По теореме Банаха–Штейнгауза $n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0$ при $n \to \infty, \eta \to 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, *и выполнены условия* (6) *и* (8). *Если для некоторых* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \leq \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0$.

Доказательство

В силу неравенства (7) последовательность $\upsilon_p = G_{n_p \eta_p} \upsilon_0$ ограничена, т. е. $\|\upsilon_p\| = \|G_{n_p \eta_p} \upsilon_0\| \leq \gamma_0 \|\upsilon_0\|$, $p \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p \rightharpoonup \upsilon, (p \in N' \subseteq N)$. Тогда $A_{\eta_p} \upsilon_p \rightharpoonup A_{\eta_p} \upsilon, (p \in N')$. По условию $\omega_p = A_{\eta_p} \upsilon_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p} \upsilon = 0$. Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon = 0$. Теперь

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \left(E - A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) -$$
$$-\left(A_{\eta_p}\upsilon_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) \to (\upsilon, \upsilon_0) = (0, \upsilon_0) = 0, \quad (p \in N'),$$

так как $\omega_p \to 0$, $\left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p \le \gamma\bar{n}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p \to 0$, $p \to \infty$ по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (6), (7) *с* $s_0 > 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (4). *Тогда* $(\delta + \eta)m(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta$, тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + \left(E - A_\eta g_n\left(A_\eta\right)\right)x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + x^* - A_\eta g_n\left(A_\eta\right)x^* - x^* +$$
$$+g_n\left(A_\eta\right)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta\right)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{10}$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - y_\delta + \left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)A_\eta x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta =$$
$$= -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - \left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)y_\delta =$$
$$= -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - G_{n\eta}y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{11}$$

Покажем, что $\|G_{n\eta}x^*\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$. В силу (7) имеем $\|G_{n\eta}\| = \|E - A_\eta g_n(A_\eta)\| \le \gamma_0$, $(n > 0, 0 < \eta \le \eta_0)$. Для элементов вида $u = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (8) имеем

$$\|G_{n\eta}u\| = \|G_{n\eta}A\omega\| \le \|G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| + \|G_{n\eta}A_\eta\omega\| \le$$
$$\le \left(\gamma_0\eta + \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \le (\gamma_0\eta + \gamma_1 n^{-1})\|\omega\| \to 0,$$

при $n \to \infty, \eta \to 0$. Итак,

$$\|G_{n\eta}x^*\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \qquad (12)$$

Покажем, что

$$\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \le \gamma n(\delta + \|x^*\|\eta). \qquad (13)$$

По условию (5) $\|g_n(A_\eta)\| \le \sup\limits_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \gamma n$, а $\|y_\delta - A_\eta x^*\| \le \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \le \delta + \|(A - A_\eta)x^*\| \le \delta + \|x^*\|\eta$, поэтому получим $\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \le \gamma n(\delta + \|x^*\|\eta)$.

В силу леммы 1

$$\sigma_{n\eta} = n\|A_\eta G_{n\eta}x^*\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \qquad (14)$$

Применим правило останова (4), тогда $\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\| \le b(\delta + \|x^*\|\eta)$, $b > 1$ и из (7) и (11) получим

$$\|A_\eta G_{m\eta}x^*\| \le (b+1)(\delta + \|x^*\|\eta). \qquad (15)$$

Действительно, из (11) $\|A_\eta G_{m\eta}x^*\| \le \|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\| + \|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \le b(\delta + \|x^*\|\eta) + (\delta + \|x^*\|\eta) = (b+1)(\delta + \|x^*\|\eta)$. Для $\forall n < m$ $\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A_\eta G_{n\eta}x^*\| \ge \|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\| - \|G_{n\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \ge (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta).$$

Следовательно, для $\forall n < m$

$$\|A_\eta G_{n\eta}x^*\| \ge (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta). \qquad (16)$$

Из (16) и (14) при $n = m-1$ $\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{m-1} = \|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\| \ge (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta)$ или $(m-1)(\delta + \|x^*\|\eta) \le \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0, \delta \to 0, \eta \to 0$ (так как из (14) $\sigma_{m\eta} \to 0, m \to \infty, \eta \to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta) \to \infty$, при $\delta \to 0, \eta \to 0$, то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| \le \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \le \|G_{m\eta}x^*\| +$$
$$+ \gamma m(\delta,\eta)(\delta + \|x^*\|\eta) \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \eta \to 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$. Действительно, из (15) выполняется $\left\| A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\| x^* \right\| \eta_n\right) \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$. Следовательно, имеем $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ и по лемме 2 получаем, что при $\delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ выполняется $G_{m\eta_n} x^* \to 0$. Отсюда

$$\left\| x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^* \right\| \le \left\| G_{m\eta_n} x^* \right\| + \gamma m(\delta_n, \eta_n) \left(\delta_n + \left\| x^* \right\| \eta_n\right) \to 0, \ \delta_n \to 0, \eta_n \to 0 .$$

Теорема 1 доказана.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $x^* = A^s z, s > 0, \|z\| \le \rho$, *то справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2\alpha e} \dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right) - c_s \gamma_1 \eta \rho\right]^{1/(s+1)}}$;

$$\left\| x_{m(\delta,\eta)} - x^* \right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left[c_s \gamma_1 \eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$
$$+ 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{2\alpha e} \frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right) - c_s \gamma_1 \eta \rho\right]^{1/(s+1)}} \right\} \left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right). \qquad (17)$$

<u>Доказательство</u>

Оценим заново элемент $\left\| A_\eta G_{m-1,\eta} x^* \right\|$. В силу (6) и леммы 1.1 [3, с. 91]

$$\left\| A_\eta G_{m-1,\eta} x^* \right\| = \left\| A_\eta G_{m-1,\eta} A^s z \right\| \le \left\| A_\eta G_{m-1,\eta} \left(A^s - A_\eta^s\right) z \right\| +$$
$$+ \left\| A_\eta^{s+1} G_{m-1,\eta} z \right\| \le \left(\beta_{m-1,s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)}\right) \rho,$$

где

$$\beta_{m-1,s} = c_s \sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda \left(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)\right) \le \left[2(m-1)\alpha e\right]^{-1} c_s =$$
$$= c_s \gamma_1 (m-1)^{-1}, \quad \beta_{m-1,s} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Здесь $c_s = \text{const}$ (при $0 < s \le 1$ $c_s \le 2$). Сопоставляя это с (16), получим $(b-1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right) \le \left(\beta_{m-1,s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)}\right) \rho$. Отсюда получим $\gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)} \rho \ge$ $\ge (b-1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right) - \beta_{m-1,s} \eta \rho$, тогда $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2\alpha e} \left[\dfrac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta\right) - \beta_{m-1,s} \eta \rho} \right]^{1/(s+1)}$.

Поскольку $\beta_{m-1,s}=c_s\gamma_1\dfrac{1}{m-1}\le c_s\gamma_1$ (так как при $m>1$ $\dfrac{1}{m-1}\le 1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m: $m\le 1+\dfrac{s+1}{2\alpha e}\dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}}$.

Из (10) и (13) имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\|=\left\|G_{m\eta}A^s z\right\|\le\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|+\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По лемме 1.1 [3, с. 91] $\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, что даёт в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|$ вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ [3, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [3, с. 91] и (15):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|=\left\|A_\eta^s G_{m\eta}z\right\|=\left\|A_\eta^{s+1}G_{m\eta}z\right\|^{s/(s+1)}\left\|G_{m\eta}z\right\|^{1/(s+1)}\le$$
$$\le\left\|A_\eta G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}\le\left(\left\|A_\eta G_{m\eta}\left(A_\eta^s-A^s\right)z\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|A_\eta G_{m\eta}A^s z\right\|\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}\le\left[\beta_{ms}\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|G_{m\eta}x^*\right\|+\left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[\beta_{ms}\eta\rho+(b+1)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+\gamma m\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[c_s\gamma_1\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$
$$+2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho)\right]^{1/(s+1)}}\right\}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 2 доказана.

<u>Замечание 1.</u> *Порядок оценки* (17) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

<u>Замечание 2.</u> *Хотя формулировка теоремы* 2 *даётся с указанием степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (4).

4. Случай несамосопряжённой задачи

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (3) примет вид

$$x_{(n+1)(\eta,\delta)}=(E-\alpha A_\eta^*A_\eta)^2x_{n(\eta,\delta)}+2\alpha A_\eta^*y_\delta-\alpha^2\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*y_\delta,\quad x_{0(\eta,\delta)}=0. \qquad (18)$$

Нетрудно показать, что метод (18) с правилом останова (4) сходится и можно получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (18). Справедливы

Лемма 3. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$ *и выполнено условие* (6) *с* $s_0 > 1/2$. *Тогда* $n^{1/2}\|A_\eta K_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0$, $\forall v \in \overline{R(A^*)}$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n \left(A_\eta^* A_\eta\right)$. *Если* $s_0 > 1$, *то* $n\|A_\eta^* A_\eta K_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0, \forall v \in \overline{R(A^*)}$.

Лемма 4. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$ *и выполнены условия* (6), (8). *Если для некоторого* $v_0 \in \overline{R(A^*)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $K_{n_p \eta_p} v_0 \to 0$.

Теорема 3. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (6), (7) *с* $s_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$. *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (4). *Тогда* $(\delta + \eta)^2 m(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$, то *справедливы оценки* $m \le 1 + \frac{s+1}{4\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s \gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}$;

$$\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| \le c_s\left(1 + |\ln \eta|\right)\eta^{\min(1,s)} + \left[c_s \gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$

$$+\left(\frac{35}{27}\alpha\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{4\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s \gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right). \quad (19)$$

Доказательство лемм 3–4, теорем 3–4 аналогично доказательству подобных лемм и теорем из раздела 3.

Замечание 3. *Порядок оценки* (19) *есть* $O\left((\delta + \eta)^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 4. *Знание порядка* $s > 0$ *и истокопредставляющего элемента* z, *используемое в теореме* 4, *на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 195 с.

2. Матысик, О.В. О регуляризации некорректных задач с приближенным оператором явным методом итераций / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна – 2012. – Вып. 8. – Ч. 2. – С. 7–13.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
5. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
6. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk **On Aposteriori Choice of Regularization Parameter in Explicit Method of Iterations Incorrect Problems with Approximately Operator**

The explicit iteration method for solution of the first–kind operator equations with a self–conjugated and non self–conjugated non negative bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of a method is proved in case of an aposteori choice of number of iterations in ussual norm of Hilbert space, supposing that not only the right part of the equation but the operator as well have errors. The estimation of an error method and estimation for aposteori moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.09.2013