УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, П.П. Андрусевич

О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ И ДИРАК-КЭЛЕРОВСКИХ ПОЛЕЙ

Исследована внутренняя симметрия лагранжиана 4n-компонентных дираковских полей (n=1, 2, 3, 4), а также комплексного и вещественного поля Дирака-Кэлера на классическом и квантовом уровнях. Используется метод, основанный на приведении соответствующих уравнений к вещественной форме. Показано, что группы симметрии, которые при этом обнаруживаются, существенно шире симметрий, обычно сопоставляемых данным полям. Полученные результаты могут найти применение в современных калибровочных теориях фундаментальных частиц и их взаимодействий.

Введение

Обычно под преобразованиями внутренней симметрии релятивистских волновых уравнений (РВУ), записанных в стандартной матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \qquad (1)$$

(Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные матрицы, m – массовый параметр), понимаются преобразования

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \qquad (2)$$

удовлетворяющие условию

$$[\Gamma_\mu,\ Q]_- = 0\,. \qquad (3)$$

Если, однако, применить условия (3), например, непосредственно к уравнению Дирака, получим, что матрица Q кратна единичной. В то же время известно, что лагранжева формулировка массивного дираковского поля обладает зарядовой симметрией, описываемой группой SO(2,1) [1, 2].

Таким образом, обычно используемый подход не всегда позволяет установить в матричной формулировке РВУ полную группу внутренней симметрии теории.

1.1 Уравнение Дирака

Рассмотрим уравнение Дирака с $m \neq 0$

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0\,, \qquad (1.1)$$

где ψ – биспинор первого ранга, γ_μ – матрицы Дирака размерности 4x4 вида

$$\gamma_i = \sigma_2 \otimes \sigma_i,\ \gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2\ (i = 1,2,3)\,, \qquad (1.2)$$

σ_i – матрицы Паули.

Приведем уравнение (1.1) к другому виду. Для этого возьмем от (1.1) комплексное сопряжение и, учитывая, что $\gamma_1^* = -\gamma_1$, $\gamma_2^* = \gamma_2$, $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = \gamma_4$, $\partial_i^* = \partial_i$, $\partial_4^* = -\partial_4$, будем иметь:

$$\left(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m\right)\psi^* = 0\,. \qquad (1.3)$$

Складывая и вычитая уравнения (1.1) и (1.3) и вводя функции

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*),\ \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*)\,, \qquad (1.4)$$

получаем систему, которая может быть записана в стандартной форме (1), где волновая функция Ψ имеет структуру

$$\Psi = (\psi^r, \psi^i) \text{ – столбец} \tag{1.5}$$

(ψ^r – вещественные, ψ^i – чисто мнимые компоненты), а матрицы Γ_μ приобретают вид:

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \ \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2, \ \ \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \gamma_3, \ \ \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes \gamma_4. \tag{1.6}$$

Нетрудно убедиться, что при выборе (1.5), (1.6) система уравнений (1) становится вещественной. Поэтому будем называть ее вещественной формой уравнения Дирака, или 8-компонентным вещественным полем Дирака.

Аналогичным образом можно записать в вещественной форме любое РВУ первого порядка с дираковской алгеброй матриц Γ_μ. Данная запись позволяет установить полную группу внутренней симметрии РВУ как в классическом, так и в квантовом случаях.

Заметим, что переход к вещественной форме РВУ эквивалентен введению волновой функции $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$, поскольку последняя связана с функцией (1.5) посредством унитарного преобразования:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ \gamma_4 & -\gamma_4 \end{pmatrix}, \ S^{-1} = S^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & \gamma_4 \\ I_4 & -\gamma_4 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Диракоподобность матриц Γ_μ (1.4) позволяет привести их к виду

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu \tag{1.8}$$

(соответствующий базис назовем «фермионным»). Переход к нему из базиса (1.5) осуществляется посредством унитарного преобразования в пространстве волновой функции Ψ, задаваемого матрицей

$$\begin{gathered} A = \frac{1}{2}[I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \\ A^{-1} = A^{+} = \frac{1}{2}[I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Наиболее общий вид матрицы преобразования Q, которая коммутирует со всеми матрицами Γ_μ (1.8), в фермионном базисе таков:

$$Q = q \otimes I_4 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \otimes I_4, \tag{1.10}$$

где q_{mn} ($m, n = 1, 2$) – произвольные комплексные числа.

В базисе (1.4), (1.5) матрица Q имеет вид:

$$Q = \frac{1}{2}[(q + \sigma_1 q \sigma_1) \otimes I_4 + (\sigma_1 q - q\sigma_1) \otimes i\gamma_2], \tag{1.11}$$

который представим в блочной форме

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho & -\lambda \\ \lambda & \rho \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2, \tag{1.12}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(q_{11} + q_{22}),\ \lambda = \frac{1}{2}(q_{11} - q_{22}),$$
$$\beta = \frac{1}{2}(q_{12} + q_{21}),\ \rho = \frac{1}{2}(q_{12} - q_{21}). \tag{1.13}$$

Рассматриваемые преобразования не должны нарушать вещественный характер поля, т.е. должны удовлетворять условию, заключающемуся в следующем: если Ψ_A – вещественная (мнимая) функция, то и $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_B$ – также вещественная (мнимая).

Налагая на матрицу Q (1.12) данное условие, приходим к тому, что параметры α и λ должны быть вещественными, а β и ρ – чисто мнимыми.

Дальнейший анализ удобно провести в базисе, в котором

$$\Psi = (\psi, \psi^*) \text{ – столбец.} \tag{1.14}$$

Переход к нему из базиса (1.5) осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_4. \tag{1.15}$$

Для матрицы Q в базисе (1.14) получается выражение

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \\ & \alpha-\beta \end{pmatrix} \otimes I_4 - \begin{pmatrix} & i(\rho-\lambda) \\ i(\rho+\lambda) & \end{pmatrix} \otimes \gamma_2. \tag{1.16}$$

Для установления групповой структуры данного преобразования параметризуем его посредством эрмитовских матриц J^i $(i = 1, 2, 3)$, которые в фермионном базисе, а также в базисах (1.5), (1.14) имеют соответственно вид:

$$J^i = \sigma_i \otimes I_4, \tag{1.17}$$

$$J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,\ J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2,\ J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \tag{1.18}$$

$$J^1 = \sigma_3 \otimes I_4,\ J^2 = -\sigma_1 \otimes \gamma_2,\ J^3 = -\sigma_2 \otimes \gamma_2. \tag{1.19}$$

Сопоставляя матрицы (1.19) с выражением (1.16) для матрицы Q, получим, что одно-параметрическим преобразованиям с генераторами J^i соответствуют параметры

$$\omega_1 = \beta,\ \omega_2 = i\rho,\ \omega_3 = \lambda, \tag{1.20}$$

среди которых один мнимый (ω_1) и два вещественных (ω_2, ω_3).

Лагранжиан уравнения (1) с матрицами (1.6)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = -\Psi^+ \eta (\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \tag{1.21}$$

эквивалентен лагранжиану исходного уравнения Дирака (1.1) при выборе матрицы билинейной лоренц-инвариантной формы η в виде

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4. \tag{1.22}$$

Требование инвариантности лагранжиана (1.21) относительно преобразований внутренней симметрии накладывает на матрицу Q ограничение

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu, \tag{1.23}$$

которое с учетом коммутации Q с матрицами Γ_μ приводится к виду

$$Q^+ \eta Q = \eta. \tag{1.24}$$

Отсюда для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = 1 + \omega J \tag{1.25}$$

получаем условие:

$$(\omega J)^{+}\eta = -\eta\omega J\ . \tag{1.26}$$

Налагая на преобразования, задаваемые генераторами J^i (1.19), условие (1.26), можно убедиться, что оно выполняется для всех таких преобразований. Следовательно, внутренняя симметрия лагранжиана уравнения Дирака с $m \neq 0$ совпадает с симметрией самого уравнения и описывается группой SO(2,1).

Для того чтобы выяснить, сохраняется ли установленная выше симметрия уравнения Дирака на квантовом уровне, надо проверить инвариантность перестановочных соотношения для операторов рождения и уничтожения относительно соответствующих преобразований. Здесь естественно использовать принятый в квантовой теории базис, в котором 8-компонентная волновая функция Ψ имеет вид:

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi}) \text{ – столбец.} \tag{1.27}$$

Разложим ψ и $\bar{\psi}$ по «чистым» состояниям $\psi_s^{(+)}$, $\psi_s^{(-)}$, $\bar{\psi}_s^{(+)}$, $\bar{\psi}_s^{(-)}$, представляющим решения уравнения Дирака с положительными и отрицательными частотами и проекцией спина $s = 1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned} \psi &= a_s\psi_s^{(+)} + b_s^{+}\psi_s^{(-)}\ , \\ \bar{\psi} &= a_s^{+}\bar{\psi}_s^{(+)} + b_s\bar{\psi}_s^{(-)}\ . \end{aligned} \tag{1.28}$$

При квантовании коэффициенты разложения a_s^+, b_s^+, a_s, b_s принимают смысл операторов рождения и уничтожения, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям:

$$[a_s, a_{s'}^{+}]_{+} = [b_s, b_{s'}^{+}]_{+} = \delta_{ss'}\ , \tag{1.29}$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности этих соотношений относительно однопараметрических преобразований, которые задаются генераторами J^i, необходимо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе (1.27) генераторы J^i, а также матрицы $\widehat{\Gamma}_4$ и $\widehat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$, играющие роль операторов полного набора, приобретают соответственно вид:

$$J^1 = \sigma_3 \otimes I_4,\ J^2 = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ J^3 = i\sigma_1 \otimes \gamma_2\gamma_4, \tag{1.30}$$

$$\widehat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1)\ , \tag{1.31}$$

$$\widehat{S}_3 = \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,-1,1,-1,1)\ . \tag{1.32}$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в порядке, соответствующем выражениям (1.31), (1.32), и рассматривая, например, однопараметрическое преобразование с генератором J^3, получим следующий закон преобразования этих операторов в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a'_{1/2} \\ a'_{-1/2} \\ (b^+_{1/2})' \\ (b^+_{-1/2})' \\ (a^+_{-1/2})' \\ (a^+_{1/2})' \\ b'_{-1/2} \\ b'_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & i\omega_3 \\ & 1 & & & & & -i\omega_3 & \\ & & 1 & & & i\omega_3 & & \\ & & & 1 & -i\omega_3 & & & \\ & & & -i\omega_3 & 1 & & & \\ & & i\omega_3 & & & 1 & & \\ & -i\omega_3 & & & & & 1 & \\ i\omega_3 & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1/2} \\ a_{-1/2} \\ b^+_{1/2} \\ b^+_{-1/2} \\ a^+_{-1/2} \\ a^+_{1/2} \\ b_{-1/2} \\ b_{1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} & a'_{1/2} = a_{1/2} + i\omega_3 b_{1/2}, \quad a'_{-1/2} = a_{-1/2} - i\omega_3 b_{-1/2}, \\ & (b^+_{1/2})' = b^+_{1/2} + i\omega_3 a^+_{1/2}, \quad (b^+_{-1/2})' = b^+_{-1/2} - i\omega_3 a^+_{-1/2}, \\ & (a^+_{-1/2})' = a^+_{-1/2} - i\omega_3 b^+_{-1/2}, \quad (a^+_{1/2})' = a^+_{1/2} + i\omega_3 b^+_{1/2}, \\ & b'_{-1/2} = b_{-1/2} - i\omega_3 a_{-1/2}, \quad b'_{1/2} = b_{1/2} + i\omega_3 a_{1/2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Для генераторов J^1 и J^2 соответственно получим

$$\begin{aligned} & a_{1/2}{}' = a_{1/2} + \omega_1 a_{1/2}, \; a_{-1/2}{}' = a_{-1/2} + \omega_1 a_{-1/2}, \\ & (b^+_{1/2})' = b^+_{1/2} + \omega_1 b^+_{1/2}, \; (b^+_{-1/2})' = b^+_{-1/2} + \omega_1 b^+_{-1/2}, \\ & (a^+_{-1/2})' = a^+_{-1/2} - \omega_1 a^+_{-1/2}, \; (a^+_{1/2})' = a^+_{1/2} - \omega_1 a^+_{1/2}, \\ & b_{-1/2}{}' = b_{-1/2} - \omega_1 b_{-1/2}, \; b_{1/2}{}' = b_{1/2} - \omega_1 b_{1/2}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} & a_{1/2}{}' = a_{1/2} - \omega_2 b_{1/2}, \; a_{-1/2}{}' = a_{-1/2} + \omega_2 b_{-1/2}, \\ & (b^+_{1/2})' = b^+_{1/2} - \omega_2 a^+_{1/2}, \; (b^+_{-1/2})' = b^+_{-1/2} + \omega_2 a^+_{-1/2}, \\ & (a^+_{-1/2})' = a^+_{-1/2} + \omega_2 b^+_{-1/2}, \; (a^+_{1/2})' = a^+_{1/2} - \omega_2 b^+_{1/2}, \\ & b_{-1/2}{}' = b_{-1/2} + \omega_2 a_{-1/2}, \; b_{1/2}{}' = b_{1/2} - \omega_2 a_{1/2}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Теперь, используя (1.34), вычислим, например, антикоммутант $[a'_{1/2},(b_{1/2}{}^+)']_+$:

$$\begin{aligned} & [a'_{1/2},(b_{1/2}{}^+)']_+ = [a_{1/2}, b^+_{1/2}]_+ + i\omega_3 [a_{1/2}, a^+_{1/2}]_+ + i\omega_3 [b_{1/2}, b^+_{1/2}]_+ = \\ & = [a_{1/2}, b^+_{1/2}]_+ + 2i\omega_3 \neq [a_{1/2}, b^+_{1/2}]_+. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Этот результат означает, что данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования уравнения Дирака, не инвариантны относительно преобразования, задаваемого генератором J^3. Аналогичный вывод получается и для генератора J^2. Генератор J^1 соответствует обычному фазовому преобразованию.

Физической причиной возникновения симметрии дираковского поля, описываемого группой SO(2,1), является наличие у уравнения Дирака двух типов решений, соответствующих в рамках релятивистской квантовой механики состояниям с положительной и отрицательной энергиями. Эта симметрия может быть рассмотрена в качестве теоретико-группового истолкования такого известного в теории Дирака явления как Zitterbewegung (см., напр., [3]). «Невыживание» внутренней симметрии на вторичноквантованном уровне объясняется тем, что здесь «появляются» перестановочные соотношения между ψ и $\bar{\psi}$, что, по сути, эквивалентно введению дополнительных условий.

1.2 Система двух уравнений Дирака

Рассмотрим систему из двух уравнений Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0,$$
$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \quad (1.38)$$

где ψ_1, ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_μ – матрицы Дирака вида (1.2). Соответствующий системе (1.38) лагранжиан выберем в виде

$$L = L_1 + L_2 = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 - \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 . \quad (1.39)$$

Возьмем от (1.38) комплексное сопряжение и получим уравнения:

$$(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\psi_1^* = 0,$$
$$(-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 + m)\psi_2^* = 0. \quad (1.40)$$

Объединяя (1.40) с исходными уравнениями (1.38), приходим к системе уравнений, которая может быть записана в универсальной матричной форме (1). Для такой системы матрицы Γ_μ 16x16 и матрица η в базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \text{ – столбец} \quad (1.41)$$

будут иметь вид:

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4,\ \eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (1.42)$$

Поступая далее так же, как и в п. 1.1, и вводя функции

$$\psi_1^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1^*),\ \psi_2^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_2^*),$$
$$\psi_1^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_1^*),\ \psi_2^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_2^*), \quad (1.43)$$

получим эквивалентную исходной 16-компонентную систему уравнений, которая также может быть записана в форме (1). Если расположить вещественные (ψ_1^r, ψ_2^r) и чисто мнимые (ψ_1^i, ψ_2^i) компоненты волновой функции в последовательности

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{ – столбец,} \quad (1.44)$$

матрицы Γ_μ трансформируются к виду

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4, \quad (1.45)$$

где $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Для матрицы η сохраняется выражение (1.42).

Переведем матрицы (1.45) в фермионный базис, в котором

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu . \quad (1.46)$$

Переход из базиса (1.44), (1.45) в фермионный осуществляется посредством унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$
$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (1.47)$$

Группа внутренней симметрии 16-компонентного вещественного дираковского поля может быть задана с помощью генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu, \Gamma'_5, \Gamma'_\mu\Gamma'_5, \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu), \Gamma'_5 = \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4, \qquad (1.48)$$

определяющем внутреннюю SU(4)-симметрию 16-компонентного комплексного поля Дирака. Здесь Γ'_μ – квадратные матрицы размерности 16х16, удовлетворяющие, как и Γ_μ, алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующие с Γ_μ и имеющие в фермионном базисе вид $\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4$.

Для того чтобы выделить в (1.48) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (1.38), записанной в вещественной форме, поступим следующим образом. С помощью преобразования A^{-1} (1.47) переведем генераторы (1.48) из фермионного базиса в базис (1.44), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. В результате получим:

$$\begin{aligned}
&J^1 = \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^2 = \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2,\\
&J^3 = \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^4 = \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2,\\
&J^5 = \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4,\ J^6 = \Gamma'_1\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2,\\
&J^7 = \Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2,\ J^8 = \Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2,\\
&J^9 = \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2,\ J^{10} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4,\\
&J^{11} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = i\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4,\ J^{12} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4,\\
&J^{13} = \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = i\gamma_1\gamma_4 \otimes I_4,\ J^{14} = \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4,\\
&J^{15} = \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4.
\end{aligned} \qquad (1.49)$$

Условие вещественности налагает на соответствующие параметры $\omega_N \leftrightarrow J^N$ следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]}, \omega_{25} - \text{вещественные};\\
&\omega_2, \omega_5, \omega_{[23]}, \omega_{[12]}, \omega_{[24]}, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45} - \text{мнимые}.
\end{aligned} \qquad (1.50)$$

Теперь, с учетом (1.50), проверяем, для каких однопараметрических преобразований (1.25) с генераторами (1.49) выполняется условие (1.26). В результате получаем 10-параметрическую группу матричных преобразований, задаваемую следующими генераторами

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, \Gamma'_1\Gamma'_5, \Gamma'_3\Gamma'_5, \Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \qquad (1.51)$$

которым соответствуют 6 вещественных $(\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]})$ и 4 мнимых $(\omega_5, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45})$ параметра. Все генераторы (1.51) являются эрмитовскими. Нетрудно убедиться, что эти генераторы удовлетворяют алгебре генераторов группы SO(3,2).

Обнаруженное в данном подходе расширение симметрии по сравнению с ожидаемой группой SU(2) (или SO(3) в присоединенном представлении) в рамках релятивистской квантовой механики соответствует перемешиванию состояний с противоположными значениями энергии, в том числе и для решений из двух различных уравнений Дирака. Группа SO(3), ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний из различных уравнений, содержится в SO(3,2) в качестве подгруппы и задается генераторами

$$\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]},\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]},\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}. \tag{1.52}$$

Проверим, сохраняется ли установленная выше SO(3,2)-симметрия 16-компонентного вещественного дираковского поля на квантовом уровне. Переведем генераторы (1.51) из базиса, в котором они имеют вид (1.49), в базис

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) \ -\text{столбец}, \tag{1.53}$$

где $\overline{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4 (i = 1, 2)$. В результате получим выражения:

$$\begin{gathered}
\Gamma'_1 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_3 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\
\Gamma'_4 = -i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_5 = -i\gamma_4 \otimes I_4, \\
\Gamma'_1\Gamma'_5 = -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_3\Gamma'_5 = -\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\
\Gamma'_4\Gamma'_5 = -\gamma_5\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \\
\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_5 \otimes I_4,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_5 \otimes I_4.
\end{gathered} \tag{1.54}$$

Разложим ψ и $\overline{\psi}$ по «чистым» состояниям:

$$\begin{gathered}
\psi_i = \sum_s a_{is}\psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+\psi_{is}^{(-)}, \\
\overline{\psi}_i = \sum_s a_{is}^+\overline{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}\overline{\psi}_{is}^{(-)}.
\end{gathered} \tag{1.55}$$

Для коэффициентов разложения a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is} постулируются антикоммутационные соотношения

$$[a_{is}, a_{i's'}^+]_+ = [b_{is}, b_{i's'}^+]_+ = \delta_{ii'}\delta_{ss'}, \tag{1.56}$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

В данном случае в качестве операторов полного набора выступают операторы знака энергии $\widehat{\Gamma}_4$, проекции спина $\widehat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\widehat{\Pi} = I_2 \otimes (\widehat{\sigma}_3 \otimes I_4)$, которые в базисе (1.53) имеют вид:

$$\begin{gathered}
\widehat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1), \\
\widehat{S}_3 = \frac{1}{2}diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1), \\
\widehat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).
\end{gathered} \tag{1.57}$$

Далее, по аналогии с параграфом 1.1, устанавливаем трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения относительно преобразований, задаваемых генераторами (1.54).

В результате получим:

$$\begin{gathered}
a'_{1s} = a_{1s} + \omega a_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} - \omega a_{1s}, \\
(a_{1s}^+)' = a_{1s}^+ + \omega a_{2s}^+,\ (a_{2s}^+)' = a_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+, \\
b'_{1s} = b_{1s} + \omega b_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega b_{1s}, \\
(b_{1s}^+)' = b_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+,\ (b_{2s}^+)' = b_{2s}^+ - \omega b_{1s}^+.
\end{gathered} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1s} = a_{1s} + \omega b_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} + \omega b_{1s},\\
&(a^+_{1s})' = a^+_{1s} + \omega b^+_{2s},\ (a^+_{2s})' = a^+_{2s} + \omega b^+_{1s},\\
&b'_{1s} = b_{1s} - \omega a_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega a_{1s},\\
&(b^+_{1s})' = b^+_{1s} - \omega a^+_{2s},\ (b^+_{2s})' = b^+_{2s} - \omega a^+_{1s}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1s} = a_{1s} + \omega b_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} + \omega b_{1s},\\
&(a^+_{1s})' = a^+_{1s} + \omega b^+_{2s},\ (a^+_{2s})' = a^+_{2s} + \omega b^+_{1s},\\
&b'_{1s} = b_{1s} - \omega a_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega a_{1s},\\
&(b^+_{1s})' = b^+_{1s} - \omega a^+_{2s},\ (b^+_{2s})' = b^+_{2s} - \omega a^+_{1s}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1s} = a_{1s} + \omega b_{2s},\ a'_{2s} = a_{2s} + \omega b_{1s},\\
&(a^+_{1s})' = a^+_{1s} + \omega b^+_{2s},\ (a^+_{2s})' = a^+_{2s} + \omega b^+_{1s},\\
&b'_{1s} = b_{1s} - \omega a_{2s},\ b'_{2s} = b_{2s} - \omega a_{1s},\\
&(b^+_{1s})' = b^+_{1s} - \omega a^+_{2s},\ (b^+_{2s})' = b^+_{2s} - \omega a^+_{1s}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Непосредственная проверка показывает, что антикоммутационные соотношения (1.56) инвариантны относительно преобразований (1.58) – (1.61), соответствующих генераторам $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$, $\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}$, $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, Γ'_5. Первые три из них образуют совпадающий с (1.52) набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности SU(2) (SO(3)) классического 8-компонентного дираковского поля в обычном подходе. Генератор Γ'_5 соответствует фазовому преобразованию, при котором $\psi_1 \to \psi_1 e^{i\omega_5}$, $\psi_2 \to \psi_2 e^{-i\omega_5}$.

1.3 Вещественное поле Дирака-Кэлера

Уравнение Дирака-Кэлера (Д-К) представляет собой максимально общее линейное дифференциальное уравнение первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Его тензорная формулировка имеет, как известно, вид (см., напр., [4] и цитированную здесь литературу):

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0,\\
&\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\psi}_0 = 0,\\
&\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0,\\
&\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu = 0,\\
&-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} = 0,
\end{aligned} \tag{1.62}$$

где $\tilde{\psi}_\mu = \dfrac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – аксиальный вектор, $\tilde{\psi}_0 = \dfrac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$).

Система (1.62) может быть записана в стандартной матричной форме (1). При выборе волновой функции в виде

$$\Psi = (\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}) \text{ – столбец,} \tag{1.63}$$

вводя собирательный индекс $A = o, \tilde{o}, \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$, пробегающий значения от 1 до 16, матрицы Γ_μ можно выразить через элементы e^{AB} полной матричной алгебры [5, с. 181] следующим образом:

$$\begin{gathered} \Gamma_\mu = \beta_\mu^{(+)} + \beta_\mu^{(-)}, \\ \beta_\mu^{(+)} = e^{\tilde{o}\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}\tilde{o}} + e^{\lambda[\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu]\lambda}, \\ \beta_\mu^{(-)} = e^{o\mu} + e^{\mu o} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(e^{\tilde{\lambda}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\lambda}}). \end{gathered} \tag{1.64}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы Γ_μ (1.64) удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака.

С точки зрения теории релятивистских волновых уравнений, система Д-К описывает частицу с набором спинов 0, 1 и двукратным вырождением состояний по пространственной четности. Лагранжева формулировка теории Д-К инвариантна относительно преобразований группы внутренней (диальной) симметрии SO(4,2) [6], генераторами которой являются матрицы

$$\Gamma'_\mu, \ \Gamma'_5, \Gamma'_\mu\Gamma'_5, \ \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu). \tag{1.65}$$

Здесь Γ'_μ – второй набор матриц размерности 16x16, удовлетворяющих, как и Γ_μ, алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующих с матрицами Γ_μ и имеющих в базисе (1.63) вид

$$\Gamma'_\mu = \beta_\mu^{(+)} - \beta_\mu^{(-)}. \tag{1.66}$$

Диальная симметрия позволяет сопоставить полю Д-К набор из четырех дираковских полей с некомпактной группой внутренней симметрии SU(2,2) [7, 6, 8], то есть описывать на его основе (причем как на классическом, так и на квантовом уровне) дираковскую частицу с дополнительными (помимо спина) внутренними степенями свободы.

Рассмотрим возможность описания частиц со спином 1/2 и дополнительными внутренними степенями свободы на основе вещественного поля Д-К. Вещественным полем Д-К [9] называется такой выбор полевых функций в (1.63), при котором система исходных тензорных уравнений (1.62) становится вещественной. Это возможно, например, если выбрать компоненты $\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_i, \tilde{\psi}_i, \psi_{[ij]}$ вещественными, а $\psi_4, \tilde{\psi}_4, \psi_{[i4]}$ – чисто мнимыми (либо наоборот, что посуществу одно и то же). Поскольку число независимых компонент (степеней свободы) у такого поля в два раза меньше, чем у комплексного поля Д-К, то очевидно, что речь в данном случае может идти о сопоставлении вещественному полю Д-К набора из двух дираковских полей. Необходимым условием эквивалентности этих теорий является соответствие их свойств внутренней симметрии. Покажем, что такое соответствие существует.

Для удобства выберем базис, в котором волновая функция Ψ имеет структуру

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1, \psi_{[23]}, \psi_2, \psi_{[31]}, \psi_3, \psi_{[12]}, i\tilde{\psi}_4, \psi_0, \\ i\tilde{\psi}_1, \psi_{[14]}, i\tilde{\psi}_2, \psi_{[24]}, i\tilde{\psi}_3, \psi_{[34]}, \psi_4, i\tilde{\psi}_0 \end{pmatrix} \text{ – столбец,} \tag{1.67}$$

где первые восемь компонент являются вещественными, а последние восемь – чисто мнимыми. В базисе (1.67) генераторы (1.65) и матрица билинейной формы $\eta = \Gamma_4\Gamma'_4$

принимают соответственно вид:

$$\Gamma_1' = -\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma_2' = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma_3' = \gamma_4 \otimes \gamma_2,$$

$$\Gamma_4' = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ \Gamma_5' = \gamma_5 \otimes I_4,\ \Gamma_{[1}'\Gamma_{5]}' = -\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_4,$$

$$\Gamma_{[2}'\Gamma_{5]}' = \gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma_{[3}'\Gamma_{5]}' = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_{[4}'\Gamma_{5]}' = \gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3, \tag{1.68}$$

$$\Gamma_{[2}'\Gamma_{3]}' = \gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5,\ \Gamma_{[3}'\Gamma_{1]} = \gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_4,\ \Gamma_{[1}'\Gamma_{2]}' = I_4 \otimes \gamma_5\gamma_4,$$

$$\Gamma_{[1}'\Gamma_{4]}' = -\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ \Gamma_{[2}'\Gamma_{4]}' = -\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_4,\ \Gamma_{[3}'\Gamma_{4]}' = \gamma_5 \otimes \gamma_4\gamma_5,$$

$$\eta = -i\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_2\ . \tag{1.69}$$

Принимая во внимание блочную структуру генераторов (1.68), записанных в явном виде, структуру (1.67) волновой функции и, исходя из (3), (1.24) и условия вещественности, устанавливаем, какие из параметров в (3) должны быть вещественными, а какие – мнимыми. Далее, с учетом этого, находим однопараметрические преобразования, которые удовлетворяют условию (1.24). Тем самым выделяем искомую группу внутренней симметрии лагранжиана вещественного поля Д-К с одновременной её явной параметризацией.

Проделав данный анализ, находим, что «хорошими» являются генераторы

$$\Gamma_\mu',\ \Gamma_{[\mu}'\Gamma_{\nu]}', \tag{1.70}$$

при этом шесть параметров ω_i, $\omega_{[ij]}$ – вещественные, а четыре ω_4, $\omega_{[i4]}$ – мнимые. Таким образом, устанавливаем группу инвариантности SO(3,2) внутренней симметрии лагранжевой формулировки вещественного поля Д-К (см. также [10], где указанная симметрия рассмотрена в рамках кватернионного подхода).

Теперь рассмотрим систему двух уравнений Дирака (1.38) с лагранжианом

$$L = L_1 - L_2, \tag{1.71}$$

который соответствует выбору

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4 \tag{1.72}$$

матрицы билинейной формы.

Размерность вещественного поля Дирака, соответствующего системе (1.38), совпадает с размерностью вещественного поля Д-К. Волновые функции (1.44) и (1.66) имеют одинаковое число вещественных и мнимых компонент, и оба поля являются диракоподобными в смысле алгебры матриц Γ_μ. Установив группу внутренней симметрии рассматриваемого 16-компонентного поля Дирака с лагранжианом (1.71), получим, что искомая группа задается в данном случае десятью генераторами

$$\Gamma_2',\ \Gamma_3',\ \Gamma_4',\ \Gamma_5',\ \Gamma_2'\Gamma_5',\ \Gamma_3'\Gamma_5',\ \Gamma_4'\Gamma_5',\ \Gamma_{[2}'\Gamma_{3]}',\ \Gamma_{[2}'\Gamma_{4]}',\ \Gamma_{[3}'\Gamma_{4]}', \tag{1.73}$$

которым соответствует шесть мнимых и четыре вещественных параметра.

И хотя набор генераторов (1.73) отличается от набора (1.68), данное отличие не имеет принципиального значения, поскольку с помощью унитарного преобразования базиса

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i & & \\ -i & 1 & & \\ & & -1 & -i \\ & & -i & -1 \end{pmatrix},\ U^{-1} = U^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & & \\ i & 1 & & \\ & & -1 & i \\ & & i & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.74}$$

матрицу γ_5 можно перевести в γ_1, не изменяя при этом вида матриц $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Это означает, что система двух дираковских полей с лагранжианом (1.71), как и вещественное поле Д-К, обладает внутренней симметрией SO(3,2).

Итак, вещественному полю Д-К может быть поставлена в соответствие система двух дираковских полей. С теоретико-групповой точки зрения данная возможность объясняется тем, что рассмотренная выше группа преобразований SO(3,2) образует для случая поля Д-К полупрямое произведение с преобразованиями Лоренца. При переходе от полупрямого произведения этих групп к прямому, что достигается соответствующим переопределением лоренцевских трансформационных свойств волновой функции, получаем уже систему дираковских полей [7]. В работах [11, 12] было показано, что обе полевые системы допускают непротиворечивое квантование (с использованием индефинитной метрики) как по статистике Ферми–Дирака, так и Бозе–Эйнштейна.

1.4 Система двух дираковских полей разных типов

Рассмотрим систему, состоящую из двух различных типов уравнений Дирака

$$\begin{aligned}&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0,\\ &(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2 = 0,\end{aligned} \tag{1.75}$$

лагранжиан которой выберем в виде

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 - \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2\,. \tag{1.76}$$

Для удобства исследования перепишем систему (1.75) следующим образом:

$$\begin{aligned}&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0,\\ &(-\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0.\end{aligned} \tag{1.77}$$

Приведем систему (1.77) к 16-компонентной вещественной форме. В базисе (1.44) для матриц Γ_μ получим

$$\Gamma_1 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_1,\ \ \Gamma_2 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_4\,. \tag{1.78}$$

Матрица билинейной формы η в данном случае имеет вид

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4\,. \tag{1.79}$$

Переход в фермионный базис осуществляется здесь с помощью преобразования $C = AB$,

$$\begin{aligned}&A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],\\ &A^{-1} = A^{+} = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)],\\ &B = B^{+} = B^{-1} = \frac{1}{2}[(I_4 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes I_4 + (I_4 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes \gamma_5].\end{aligned} \tag{1.80}$$

Генераторы (1.48) унитарной группы преобразований внутренней симметрии, переводятся в базис (1.44) посредством матрицы $C^{-1} = BA^{-1}$ и имеют в этом базисе вид:

$$\begin{aligned}&\Gamma'_1 = -\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_2 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_3 = -\gamma_4 \otimes \gamma_2,\\ &\Gamma'_4 = \gamma_3 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4,\ \Gamma'_1\Gamma'_5 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5,\\ &\Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_3\Gamma'_5 = -i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\\ &\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = i\gamma_3\gamma_1 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4,\\ &\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = i\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4.\end{aligned} \tag{1.81}$$

Условие вещественности поля приводит здесь к вещественности параметров $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45}, \omega_{[23]}, \omega_{[12]}, \omega_{[24]}$ и мнимости параметров $\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[31]}$, $\omega_{[14]}, \omega_{[34]}$. С учетом данного обстоятельства нетрудно убедиться, что условию (1.26) удовлетворяют генераторы (1.73), которым по-прежнему соответствуют шесть вещественных и четыре мнимых параметра.

Таким образом, группа внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака разных типов с лагранжианом (1.76) совпадает с группой внутренней симметрии системы (1.38) с лагранжианом (1.71).

Исследуем внутреннюю симметрию системы (1.75) с лагранжианом (1.76) на квантовом уровне. Генераторы (1.73) для системы (1.75) в базисе (1.53) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_2 = -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3, \ \ \Gamma'_3 = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\
&\Gamma'_4 = \gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \ \ \Gamma'_5 = -\gamma_4 \otimes I_4, \\
&i\Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3, \ \ i\Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\
&i\Gamma'_4\Gamma'_5 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \ \ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_5, \\
&i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5, \ \ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Квантовая формулировка дираковского поля, описываемого системой (1.75), базируется на антикоммутационных соотношениях

$$\begin{aligned}
&[a_{1s}(p), a^{(+)}_{1s'}(p')]_+ = [b_{1s}(p), b^{(+)}_{1s'}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p-p'), \\
&[a_{2s}(p), a^{(+)}_{2s'}(p')]_+ = [b_{2s}(p), b^{(+)}_{2s'}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p-p').
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина $\hat{S}_3$ и внутренней четности $\hat{\Pi}$ в рассматриваемом случае принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,), \\
&\hat{S}_3 = \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1), \\
&\hat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Проверка инвариантности перестановочных соотношений (1.83) относительно однопараметрических преобразований (1.25) с генераторами (1.82) показывает, что условия квантования инвариантны относительно преобразований с генераторами $\Gamma'_2, \Gamma'_5, i\Gamma'_2\Gamma'_5$, перемешивающих состояния частицы и античастицы из различных уравнений Дирака и образующих группу SO(3), а также преобразования $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, соответствующего в данном случае фазовому преобразованию $\psi_1 \to \psi_1 e^{i\varphi}$, $\psi_2 \to \psi_2 e^{-i\varphi}$.

1.5 Система трех уравнений Дирака

Найдем внутреннюю симметрию системы трех уравнений Дирака с $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \\
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Для сопряженных функций $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}
&(-\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2-\gamma_3\partial_3-\gamma_4\partial_4+m)\psi_1^*=0,\\
&(-\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2-\gamma_3\partial_3-\gamma_4\partial_4+m)\psi_2^*=0,\\
&(-\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2-\gamma_3\partial_3-\gamma_4\partial_4+m)\psi_3^*=0.
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Рассматривая системы (1.85) и (1.86) совместно, придем к 24-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме (1).

При выборе волновой функции Ψ в (1) в виде

$$\Psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_1^*,\psi_2^*,\psi_3^*)-\text{столбец} \tag{1.87}$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1=\sigma_3\otimes I_3\otimes\gamma_1,\quad \Gamma_2=I_6\otimes\gamma_2,\\
&\Gamma_3=\sigma_3\otimes I_3\otimes\gamma_3,\ \ \Gamma_4=\sigma_3\otimes I_3\otimes\gamma_4.
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Для дальнейшего, как и ранее, удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned}
&\Psi=(\psi_1^r,\psi_2^r,\psi_3^r,\psi_1^i,\psi_2^i,\psi_3^i)-\text{столбец},\\
&\psi_{1,2,3}^r=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3}+\psi_{1,2,3}^*),\ \psi_{1,2,3}^i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3}-\psi_{1,2,3}^*).
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Указанный переход от представления (1.87) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции Ψ:

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{12} & I_{12}\\ I_{12} & -I_{12}\end{pmatrix},\ u^{-1}=u^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{12} & I_{12}\\ I_{12} & -I_{12}\end{pmatrix} \tag{1.90}$$

Матрицы Γ_μ и η при этом принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1=\sigma_1\otimes I_3\otimes\gamma_1,\quad \Gamma_2=I_6\otimes\gamma_2,\\
&\Gamma_3=\sigma_1\otimes I_3\otimes\gamma_3,\ \ \Gamma_4=\sigma_1\otimes I_3\otimes\gamma_4,
\end{aligned} \tag{1.91}$$

$$\eta=I_6\otimes\gamma_4. \tag{1.92}$$

Инвариантность уравнения (1) с матрицами Γ_μ (1.91) относительно преобразований (2) в фермионном базисе, в котором Γ_μ по определению имеют форму $\Gamma_\mu=I_6\otimes\gamma_\mu$, обеспечивается матрицей вида:

$$Q=q\otimes I_4, \tag{1.93}$$

где q – комплексная матрица 6x6, на которую накладываются ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (1). При этом матрицы Q и Γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3).

Преобразования, задаваемые матрицей (1.93), можно параметризовать посредством 36-ти базисных операторов

$$\begin{aligned}
&J_{00}=I_{24},\ \ J_{i0}=(\sigma_i\otimes I_3)\otimes I_4,\\
&J_{0A}=(I_2\otimes\alpha_A)\otimes I_4,\ \ J_{iA}=(\sigma_i\otimes\alpha_A)\otimes I_4,
\end{aligned} \tag{1.94}$$

где α_A $(A=1\div 8)$ – генераторы группы SU(3), которые выберем в виде:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = e^{11} - e^{33},\ \alpha_2 = e^{22} - e^{33},\ \alpha_3 = e^{23} + e^{32},\\
&\alpha_4 = e^{13} + e^{31},\ \alpha_5 = e^{12} + e^{21},\ \alpha_6 = -i(e^{23} - e^{32}),\\
&\alpha_7 = -i(e^{31} - e^{13}),\ \alpha_8 = -i(e^{12} - e^{21}).
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Здесь e^{ij} – элементы полной матричной алгебры.

С помощью преобразования

$$\begin{aligned}
&A = \frac{1}{2}[I_6 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 - i\gamma_2)],\\
&A^{-1} = [I_6 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 + i\gamma_2)]
\end{aligned} \tag{1.96}$$

переведем операторы (1.94) в базис (1.89). В результате получим:

$$\begin{aligned}
&J_{00} = I_{24},\ J_{10} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4,\ J_{20} = -(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2,\\
&J_{30} = (\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2,\ J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2,\ J_{1A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes I_4,\\
&J_{2A} = -(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2,\ J_{3A} = (\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Условие вещественности налагает на соответствующие параметры $\omega_N \leftrightarrow J^N$ следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&\omega_{00}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{01}, ..., \omega_{05}, \omega_{16}, \omega_{17},\\
&\omega_{18}, \omega_{21}, ..., \omega_{25}, \omega_{31}, ..., \omega_{35} \text{ – вещественные;}\\
&\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, ..., \omega_{15}, \omega_{26},\\
&\omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{36}, \omega_{37}, \omega_{38} \text{ – мнимые.}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Требование инвариантности лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии (2), которое для матрицы Q принимает вид (1.24), накладывает 15 связей на параметры этих преобразований. В результате получаем 21-параметрическую группу матричных преобразований, задаваемую следующими генераторами (за исключением единичного J_{00}):

$$J_{10}, J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11} ..., J_{15}, J_{20}, J_{30}, J_{21}, ..., J_{25}, , J_{31}, ..., , J_{35}. \tag{1.99}$$

Генераторы (1.99) образуют унитарную группу с 12 вещественными ($\omega_{21}, ..., \omega_{25}, \omega_{31}, ..., \omega_{35}$) и 9 мнимыми ($\omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, ..., \omega_{15}$) параметрами, изоморфную группе SO(4,3) и являющуюся группой внутренней симметрии лагранжиана системы трех массивных уравнений Дирака [13].

Выясним, какая группа внутренней симметрии системы (1.85) «выживает» на квантовом уровне.

При проведении процедуры вторичного квантования наряду с волновой функцией $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, вводится, как и в случае одного уравнения Дирака, функция $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3)$, где $\bar{\psi}_k = \psi_k^+ \gamma_4$. Другими словами, фактически используется 24-компонентная волновая функция

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi}) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3) \text{ – столбец.} \tag{1.100}$$

Функции Ψ (1.89) и $\bar{\Psi}$ (1.100) заданы в одном и том же пространстве. Унитарное преобразование базиса в этом пространстве, осуществляющее переход от Ψ (1.89) к $\bar{\Psi}$ (1.100), имеет вид:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_6 & I_6 \\ I_3 \otimes \gamma_4 & -I_3 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix}. \qquad (1.101)$$

Для генераторов (1.97) в базисе (1.100) получим выражения:

$$\begin{aligned} &J_{10} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4,\ J_{20} = -(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, \\ &J_{30} = (\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2,\ J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \\ &J_{1A} = (\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes I_4,\ J_{2A} = -i(\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ &J_{3A} = i(\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2\gamma_4,\ J_{00} = I_{24}, . \end{aligned} \qquad (1.102)$$

В разложении

$$\begin{aligned} &\psi = \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=-1/2}^{1/2} a_{ks}\psi_{ks}^{(+)} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=-1/2}^{1/2} b_{ks}^{+}\psi_{ks}^{(-)}, \\ &\bar\psi = \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=-1/2}^{1/2} a^{+}{}_{ks}\bar\psi_{ks}^{(+)} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{s=-1/2}^{1/2} b_{ks}\bar\psi_{ks}^{(-)}, \end{aligned} \qquad (1.103)$$

функций ψ и $\bar\psi$ по плоским волнам, квантовое число k соответствует оператору, различающему трехкратное вырождение состояний рассматриваемой полевой системы (обозначим его $\hat\Pi$, собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). При квантовании коэффициенты разложения a_{ks}^{+}, b_{ks}^{+}, a_{ks}, b_{ks} принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутационные соотношения

$$[a_{ks}, a_{k's'}^{+}]_{+} = [b_{ks}, b_{k's'}^{+}]_{+} = \delta_{kk'}\delta_{ss'}, \qquad (1.104)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

В базисе (1.100) операторы знака энергии $\hat\Gamma_4$, проекции спина $\hat S_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и оператор $\hat\Pi$, выступающие в качестве операторов полного набора, имеют вид

$$\begin{aligned} &\hat\Gamma_4 = d\ a\ \ (I_2 g - I_2,\ I_2,\ -I_2,\ I_2,\ -I_2,\ -I_2,\ I_2,\ -I_2,\ I_2,\ -I_2,\ I_2), \\ &\hat S_3 = \frac{1}{2} diag(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \\ &\qquad -1,\ 1, -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ ), \\ &\hat\Pi = diag(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \\ &\qquad \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3,). \end{aligned} \qquad (1.105)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (1.105), и проводя над ним преобразования (1.25), где в качестве J берутся по очереди генераторы (1.99), устанавливаем трансформационные свойства этих операторов.

Проверка показывает, что инвариантность условий квантования выполняется для следующих 9 генераторов $J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{06}, J_{07}, J_{08}$, с мнимыми параметрами ω. Таким образом, получаем (исключая генератор J_{00}, который соответствует фазовому преобразованию) группу SU(3).

1.6 Система четырех уравнений Дирака

Исследуем, наконец, систему из четырех уравнений Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0,\\
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_3 = 0, \qquad (1.106)\\
&(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_4 = 0.
\end{aligned}
$$

(ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 – биспиноры первого ранга, γ_μ – матрицы Дирака), с лагранжианом

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \qquad (1.107)$$

и матрицей билинейной формы

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4 . \qquad (1.108)$$

При переходе к эквивалентной (1.106) 32-компонентной вещественной системе уравнений, записанной в виде (1), в базисе

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_3^r, \psi_4^r, \psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i, \psi_4^i) - \text{столбец},$$

$$
\begin{aligned}
&\psi_{1,2,3,4}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3,4} + \psi_{1,2,3,4}^*), \qquad (1.109)\\
&\psi_{1,2,3,4}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3,4} - \psi_{1,2,3,4}^*).
\end{aligned}
$$

для матриц Γ_μ и η получим выражения:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_1), \Gamma_2 = I_8 \otimes \gamma_2,\\
&\Gamma_3 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_3), \Gamma_4 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_4),
\end{aligned}
\qquad (1.110)
$$

$$\eta = I_2 \otimes (I_4 \otimes \gamma_4) = I_8 \otimes \gamma_4 . \qquad (1.111)$$

В фермионном базисе, в котором матрицы Γ_μ (1.110) принимают вид $\Gamma_\mu = I_8 \otimes \gamma_\mu$, наиболее общий вид преобразований, коммутирующих со всеми матрицами Γ_μ, таков:

$$Q = q \otimes I_4 \qquad (1.112)$$

(q – произвольная комплексная матрица размерности 8x8).

В качестве генераторов преобразования q можно взять матрицы:

$$\gamma_\mu \otimes \sigma_i, \gamma_\mu \otimes I_2, \gamma_5 \otimes \sigma_i, \gamma_5 \otimes I_2, \gamma_\mu\gamma_\nu \otimes \sigma_i, \gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_2, I_4 \otimes \sigma_i, I_8 . \qquad (1.113)$$

Тогда генераторы преобразования Q (1.112) в фермионном базисе примут вид:

$$
\begin{aligned}
&J_{\mu i} = (\gamma_\mu \otimes \sigma_i) \otimes I_4,\ J_{\mu 4} = (\gamma_\mu \otimes I_2) \otimes I_4,\\
&J_{5i} = (\gamma_5 \otimes \sigma_i) \otimes I_4,\ J_{54} = (\gamma_5 \otimes I_2) \otimes I_4,\\
&J_{[\mu\nu]i} = (\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes \sigma_i) \otimes I_4,\ J_{[\mu\nu]4} = (\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_2) \otimes I_4, \qquad (1.114)\\
&J_{\mu 5i} = (\gamma_\mu\gamma_5 \otimes \sigma_i) \otimes I_4,\ J_{\mu 54} = (\gamma_\mu\gamma_5 \otimes I_2) \otimes I_4,\\
&J_i = (I_4 \otimes \sigma_i) \otimes I_4.
\end{aligned}
$$

Для того чтобы выделить в (1.114) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (1.106), записанной в вещественной форме, приведем все генераторы к эрмитовскому виду. Далее с помощью преобразования

$$A^{-1}=A^{+}=\frac{1}{2}[I_8\otimes(I_4+i\gamma_2)-(\gamma_5\otimes I_2)\otimes(I_4-i\gamma_2)],$$
$$A=\frac{1}{2}[I_8\otimes(I_4-i\gamma_2)-(\gamma_5\otimes I_2)\otimes(I_4+i\gamma_2)], \tag{1.115}$$

переводим генераторы (1.114) в базис (1.109), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. Получим:

$$J_{\mu i}=-i(\gamma_\mu\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes\gamma_2,\;\; J_{\mu 4}=-i(\gamma_\mu\gamma_5\otimes I_2)\otimes\gamma_2,$$
$$J_{5i}=(\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\;\; J_{54}=(\gamma_5\otimes I_2)\otimes I_4,$$
$$J_{[\mu\nu]i}=i(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\;\; J_{[\mu\nu]4}=i(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes I_2)\otimes I_4, \tag{1.116}$$
$$J_{\mu 5i}=(\gamma_\mu\otimes\sigma_i)\otimes\gamma_2,\;\; J_{\mu 54}=(\gamma_\mu\otimes I_2)\otimes\gamma_2,$$
$$J_i=(I_4\otimes\sigma_i)\otimes I_4.$$

Затем устанавливаем, какие из параметров ω являются вещественными, а какие – мнимыми, проверяем, для каких однопараметрических преобразований с генераторами (1.116) выполняется условие (1.26), и, таким образом, находим группу внутренней симметрии лагранжиана рассматриваемого дираковского поля с одновременной ее явной параметризацией.

Проверка показывает, что условию (1.26) удовлетворяют 36 генераторов

$$J_{11},J_{13},J_{14},J_{22},J_{31},J_{33},J_{34},J_{41},J_{43},J_{44},J_{51},J_{53},J_{54},J_{151},$$
$$J_{153},J_{154},J_{252},J_{351},J_{353},J_{354},J_{451},J_{453},J_{454},J_{[12]2},J_{[23]2},J_{[31]1}, \tag{1.117}$$
$$J_{[31]3},J_{[31]4},J_{[14]1},J_{[14]3},J_{[14]4},J_{[24]2},J_{[34]1},J_{[34]3},J_{[34]4},J_2,$$

которым соответствуют 20 вещественных $(\omega_{11},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{22},\omega_{31},\omega_{33}, \omega_{34}, \omega_{41},\omega_{43}, \omega_{44},\omega_{151},\omega_{153}, \omega_{154},\omega_{252},\omega_{351},\omega_{353},\omega_{354},\omega_{451},\omega_{453},\omega_{454},)$ и 16 мнимых $(\omega_{51},\omega_{53}, \omega_{54},\omega_{[12]2},\omega_{[23]2},\omega_{[31]1},\omega_{[31]3}, \omega_{[14]3},\omega_{[14]4},\omega_{[24]2},\omega_{[34]1}, \omega_{[34]3}, \omega_{[34]4},\omega_2)$ параметров.

Таким образом, получаем группу внутренней симметрии, изоморфную группе SO(5,4).

Выясним, сохраняется ли установленная выше симметрия лагранжиана (1.107) системы (1.106) на квантовом уровне. Переведем генераторы (1.117) из базиса (1.109) в базис

$$\Psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\bar\psi_1,\bar\psi_2,\bar\psi_3,\bar\psi_4)\text{ - столбец}, \tag{1.118}$$

где $\bar\psi_k=\psi_k^{+}\gamma_4$ $(k=1,2,3,4)$. Указанный переход осуществляется с помощью матрицы

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{16} & I_{16}\\ I_4\otimes\gamma_4 & -I_4\otimes\gamma_4\end{pmatrix}. \tag{1.119}$$

Разложим ψ_k и ψ_k по «чистым» состояниям:

$$\psi_k=\sum_s a_{ks}\psi_{ks}^{(+)}+\sum_s b_{ks}^{+}\psi_{ks}^{(-)},$$
$$\bar\psi_k=\sum_s a_{ks}^{+}\bar\psi_{ks}^{(+)}+\sum_s b_{ks}\bar\psi_{ks}^{(-)}. \tag{1.120}$$

При квантовании для операторов рождения и уничтожения постулируются антикоммутационные соотношения:

$$[a_{krs}(p),a_{kr's'}^{(+)}(p')]_{+}=[b_{krs}(p),b_{kr's'}^{(+)}(p')]_{+}=\delta_{rr'}\delta_{ss'}\delta(p-p'), \tag{1.121}$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (1.121) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (1.117), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе (1.118) $\widehat{\Gamma}_4$, $\widehat{S}_3$ и операторы внутренней четности $\widehat{\Pi} = I_4 \otimes (\widehat{\sigma}_3 \otimes I_4)$ и $\widehat{\Pi}' = \gamma_4 \otimes (\widehat{\sigma}_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}_4 &= diag(I_2, -I_2, I_2, -I_2, I_2, -I_2, I_2, -I_2,\\
&\qquad -I_2, I_2, -I_2, I_2, -I_2, I_2, -I_2, I_2),\\
\widehat{S}_2 &= \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\\
&\qquad -1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1),\\
\widehat{S}_3 &= \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\\
&\qquad -1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1),\\
\widehat{\Pi} &= diag(I_4, -I_4, I_4, -I_4, -I_4, I_4, -I_4, I_4),\\
\widehat{\Pi}' &= diag(I_4, -I_4, I_4, -I_4, I_4, -I_4, I_4, -I_4).
\end{aligned}
\tag{1.122}
$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (1.122), и проводя над столбцом преобразования (1.23), где в качестве J берутся генераторы (1.117), устанавливаем искомые трансформационные свойства этих операторов. Расчеты показывают, что инвариантность условий квантования (1.121) имеет место для следующих 16 генераторов:

$$
\begin{aligned}
&J_{51} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_2\gamma_3 \otimes I_4),\ J_{53} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4),\\
&J_{54} = -\sigma_3 \otimes I_{16},\ J_{[12]2} = iI_2 \otimes (\gamma_2\gamma_5 \otimes I_4),\\
&J_{[23]2} = iI_2 \otimes (\gamma_2\gamma_4 \otimes I_4),\ J_{[31]1} = -I_2 \otimes (\gamma_1 \otimes I_4),\\
&J_{[31]3} = -I_2 \otimes (\gamma_3 \otimes I_4),\ J_{[31]4} = -iI_2 \otimes (\gamma_4\gamma_5 \otimes I_4),\\
&J_{[14]1} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_1\gamma_4 \otimes I_4),\ J_{[14]3} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4),\\
&J_{[14]4} = \sigma_3 \otimes (\gamma_5 \otimes I_4),\ J_{[24]2} = \sigma_3 \otimes (\gamma_2 \otimes I_4),\\
&J_{[34]1} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_1\gamma_5 \otimes I_4),\ J_{[34]3} = i\sigma_3 \otimes (\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4),\\
&J_{[34]4} = -\sigma_3 \otimes (\gamma_4 \otimes I_4),\ J_2 = -iI_2 \otimes (\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4).
\end{aligned}
\tag{1.123}
$$

Они образуют набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности $SU(4)$.

1.7 Уравнение Дирака-Кэлера

В параграфе 1.3 была изучена внутренняя симметрия вещественного поля Дирака-Кэлера. Теперь исследуем внутреннюю симметрию комплексного уравнения Дирака-Кэлера, записанного в вещественной 32-компонентной форме. Для такого уравнения матрица билинейной формы в фермионном базисе имеет вид

$$\eta = I_2 \otimes (\gamma_4 \otimes \gamma_4). \tag{1.124}$$

Как и в случае системы четырех уравнений Дирака, для генераторов внутренней симметрии в фермионном базисе будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&J_{\mu i}=(\gamma_\mu\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{\mu 4}=(\gamma_\mu\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_{5i}=(\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{54}=(\gamma_5\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_{[\mu\nu]i}=(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{[\mu\nu]4}=(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_{\mu 5i}=(\gamma_\mu\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{\mu 54}=(\gamma_\mu\gamma_5\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_i=(I_4\otimes\sigma_i)\otimes I_4.
\end{aligned}
\tag{1.125}
$$

Поступим так же, как и в параграфе 1.5. Переводим генераторы (1.125) в базис, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. Получим:

$$
\begin{aligned}
&J_{\mu i}=-i(\gamma_\mu\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes\gamma_2,\ J_{\mu 4}=-i(\gamma_\mu\gamma_5\otimes I_2)\otimes\gamma_2,\\
&J_{5i}=(\gamma_5\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{54}=(\gamma_5\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_{[\mu\nu]i}=i(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes\sigma_i)\otimes I_4,\ J_{[\mu\nu]4}=i(\gamma_\mu\gamma_\nu\otimes I_2)\otimes I_4,\\
&J_{\mu 5i}=(\gamma_\mu\otimes\sigma_i)\otimes\gamma_2,\ J_{\mu 54}=(\gamma_\mu\otimes I_2)\otimes\gamma_2,\\
&J_i=(I_4\otimes\sigma_i)\otimes I_4.
\end{aligned}
\tag{1.126}
$$

Затем по обычной схеме находим, какие из параметров ω являются вещественными, а какие – мнимыми, и проверяем, для каких однопараметрических преобразований с генераторами (1.126) выполняется условие (1.26). В результате придем к группе SO(5,4) с набором генераторов

$$
\begin{aligned}
&J_{12},J_{21},J_{23},J_{24},J_{31},J_{33},J_{34},J_{41},J_{43},J_{44},J_{51},J_{53},J_{54},J_{152},J_{251},\\
&J_{253},J_{254},J_{351},J_{353},J_{354},J_{451},J_{453},J_{454},J_{[12]2},J_{[23]1},J_{[23]3},\\
&J_{[23]4},J_{[31]2},J_{[14]2},J_{[24]1},J_{[24]3},J_{[24]4},J_{[31]1},J_{[34]3},J_{[34]4},J_2,
\end{aligned}
\tag{1.127}
$$

которым соответствуют 20 вещественных $(\omega_{31},\omega_{33},\omega_{34},\omega_{41},\omega_{43},\omega_{44},\omega_{351},\omega_{353},$ $\omega_{354},\omega_{451},\omega_{453},$ $\omega_{454},\omega_{[23]1},\omega_{[23]3},\omega_{[23]4},$ $\omega_{[31]2},\omega_{[14]2},\omega_{[24]1},\omega_{[24]3},\omega_{[24]4},)$ и 16 мнимых $(\omega_{12},\omega_{21},$ $\omega_{23},\omega_{24},\omega_{51},\omega_{53},\omega_{54},$ $\omega_{152},\omega_{251},\omega_{253},\omega_{254},\omega_{[12]2},$ $\omega_{[31]1},\omega_{[34]3},$ $\omega_{[34]4},\omega_2)$ параметров.

Аналогичный результат получается для системы четырех уравнений Дирака (1.106) в случае выбора лагранжиана в виде:

$$L=L_1+L_2-L_3-L_4\,. \tag{1.128}$$

Это означает, что система четырех дираковских полей с лагранжианом (1.128), как и комплексное поле Д-К, обладает внутренней симметрией SO(5,4).

Заключение

Итак, установлено, что в рамках лагранжевой формулировки внутренняя симметрия системы из двух уравнений Дирака для частиц с массой отличной от нуля, описывается группой SO(3,2), для трех уравнений – SO(4,3), для четырех уравнений – SO(5,4). В квантовой теории эти группы редуцируются соответственно к группам SU(2), SU(3), SU(4). Внутренняя симметрия вещественного поля Дирака-Кэлера описывается группой SO(3,2), поля Дирака-Кэлера, записанного в вещественной форме, – группой SO(5,4). Указанные группы существенно шире симметрий, обычно сопоставляемых данным полям в литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Извест. вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.
2. Pursey, D.L. Symmetries of the Dirac equation / D.L. Pursey, J.F. Plebanski // Phys. Rev. – 1984. – V. 29. – P. 1848–1850.
3. Пенроуз, Р. Структура пространства-времени. / Р. Пенроуз. – М. : Мир, 1972. – 182 с.
4. Стражев, В.И. Спиновые степени свободы и калибровочные симметрии : автореф. дисс. … докт. физ.-матем. наук – Минск, 1985. – 25 с.
5. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск, 1968. – 368 с.
6. Плетюхов, В.А. Симметрия безмассовых полей дираковского типа / В.А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 32–38.
7. Нишиджима, К. Фундаментальные частицы / К. Нишиджима. – М. : Мир, 1965. – 462 с.
8. Фущич, В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики / В.И. Фущич // ДАН СССР. – 1979. – Т. 246, № 4. – С. 846–850.
9. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.
10. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца и внутренние степени свободы частиц : автореф. дисс. … докт. физ.-матем. наук – Минск, 1992.
11. Сатиков, О квантовом описании поля Дирака-Кэлера / И.А. Сатиков, В.И. Стражев // ТМФ. – 1987. – Т. 73, № 1. – С. 16–25.
12. Плетюхов, В.А., Стражев В.И. // Acta Phys. Pol. 1988. Vol. B19. № 9. P. 751.
13. Andrusevich, P.P. On Internal symmetry of the system of three Dirac fields / P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev // NPCS'2010 (Nonlinear Phenomena in Complex Systems) / Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of NASB, Minsk, Belarus, 19–21 May, 2010.

***V.A. Pletyukhov, P.P. Andrusevich.* On Internal Symmetries of the Dirac and Dirac-Kähler Fields**

The internal symmetry of the Lagrangian 4n-component Dirac fields (n = 1,2,3,4), and the complex and real field Dirac-Kähler is investigated for the classical and quantum levels. Method based on the reduction of the corresponding equations for the real form is used. It is shown that the symmetry group, which in this case are found, much wider symmetries, usually attributed to this fields. The results obtained can be used in modern gauge theories of fundamental particles and their interactions.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 13.09.2012