



УДК 022.532

Ю.Г. Тарасевич, А.В. Белко, С.И. Саросек, Ю.Ю. Юркевич

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Проведен анализ некоторых особенностей поведения нелинейных механических систем на примере одномерной цепочки точечных масс, соединённых упругими связями, имеющими нелинейные свойства. Анализ произведен по результатам численных расчётов при различных начальных и краевых условиях («закреплённые концы», «свободные концы», «периодические концы»). Получены спектры собственных частот указанной нелинейной системы.

Считается, что впервые особый характер поведения энергии в системе с нелинейными колебательными характеристиками был численно описан в статье Ферми-Пасты-Улама (1954) [1]; явление получило название «задача Ферми-Пасты-Улама» (или «проблема ФПУ»). Несколько позднее Забуски и Крускал произвели математический анализ задачи ФПУ, получив при этом аналитическое решение для уравнений Кортевега-де Фриза (солитон) (1965). Анализ нелинейных явлений составляет существенную часть математического аппарата современной физики [2].

Нас интересовали возможности использования модели, подобной модели ФПУ, в задачах теоретического исследования физических свойств малых частиц. В качестве первичного объекта изучения взята одномерная цепочка точечных масс, соединённых упругими связями. Упругие характеристики связей нелинейны, т. е., к обыкновенной линейной составляющей добавлена нелинейная, зависящая от квадратов смещений точечных масс. Сила, действующая на массу с i -м индексом («возвращающая сила»), выражается как:

$$F_i = \gamma_{i+1,i}(u_{i+1} - u_i) - \gamma_{i,i-1}(u_i - u_{i-1}) + \alpha_{i+1,i}(u_{i+1} - u_i)^2 - \alpha_{i,i-1}(u_i - u_{i-1})^2$$

где u – отклонения соответствующих масс от их положений равновесия, γ и α – множители («модули упругости») для соответствующих связей при линейных и квадратичных составляющих, соответственно. Направление возрастания индексов масс условно считается за положительное направление координатной оси.

В отличие от традиционной модели ФПУ концы цепочки могут быть незакреплёнными (что должно изображать границу частицы), а также «периодическими» (что должно изображать условия в кристаллической решётке). Для «крайней» массы с максимальным индексом N возвращающая сила, в случае свободных концов, выражается как:

$$F_N = -\gamma_{N,N-1}(u_N - u_{N-1}) - \alpha_{N,N-1}(u_N - u_{N-1})^2,$$

а в случае периодических концов:

$$F_N = \gamma_{1,N}(u_1 - u_N) - \gamma_{N,N-1}(u_N - u_{N-1}) + \alpha_{1,N}(u_1 - u_N)^2 - \alpha_{N,N-1}(u_N - u_{N-1})^2$$

Для «крайней» массы с минимальным индексом данные выражения имеют подобный вид, с очевидными заменами в индексах. В целях упрощения первоначальных расчётов принято следующее: все массы считаются равными единице массы, все расстояния между положениями равновесия масс считаются равными единице длины, все множители при линейных смещениях считаются равными единице. В первоначальных расчётах связи имеют лишь слабую нелинейность, т. е., соотношение γ



и α задано как 10. Размер цепочки – 100 точек; кроме того, производились расчёты и для сокращённого состава цепочки (10, 4, 3 точек). Спектр колебательных мод системы рассчитывается обыкновенным образом, через преобразование Фурье. Потенциальная и кинетическая энергия каждой моды считаются суммой соответствующих значений в точках положений равновесия точечных масс. Для численного расчёта принята схема «счёта вперёд» с единообразной вычислительной сеткой, аналогичная приведенной в [3].

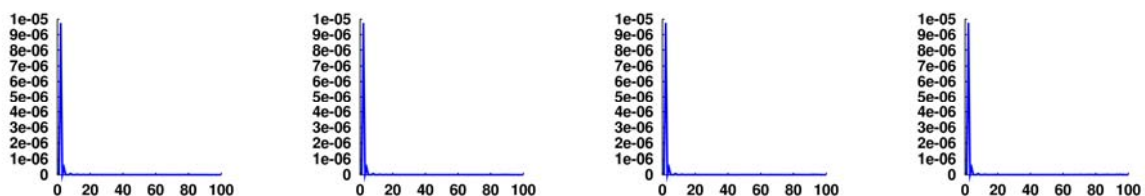
Произведены расчёты для следующих начальных условий («воздействий»): 1) «периодическое», при котором начальные смещения точек, отложенные на оси ординат в двумерной системе координат, лежат на синусоидальной кривой (ось абсцисс соответствует оси цепочки); 2) «импульсное», при котором начальные смещения точек «формируют» прямоугольный импульс. Во всех случаях векторы смещений коллинеарны оси цепочки. Краевые условия в данных расчётах, как указано, имеют вид: 1) «закреплённых концов», т.е., смещения и скорости крайних точек всегда равны нулю; 2) «свободных концов», т.е., в крайних точках действуют лишь по одной упругой связи; 3) «периодических концов», т.е., в крайних точках «следующая за краем» упругая связь присутствует и считается «соединённой» с другой крайней точкой, т.е., рассчитывается так, как если бы цепочка продолжалась периодически.

Все расчёты данного цикла произведены для 100 000 временных шагов со сравнительно малым значением прироста по времени (0,005 единицы), из соображений фиксации возможных быстрых процессов в системе.

Для линейной системы ($\alpha=0$) результаты расчётов согласуются с ожидаемыми. Периодическое начальное возбуждение приводит к появлению в спектре единственной колебательной моды. Импульсное начальное возбуждение приводит к появлению множества мод, огибающая амплитуд которых примерно соответствует кривой нормального распределения.

Для слабо нелинейной системы ($\gamma=1$; $\alpha=0,1$) результаты несколько иные. В случае периодического возбуждения и закреплённых концов появляется единственная мода, энергия которой периодически колеблется в пределах $250 \cdot 10^{-5} \div 1 \cdot 10^{-5}$ (в единицах, соответствующих данным параметрам системы).

В случае периодического возбуждения и периодических концов картина подобная, но в каждом периоде уменьшения энергии главной моды происходит небольшой «выброс» энергии в моды более высоких порядков (вплоть до максимально возможного). Энергия выброса, однако, заключена, в основном, в порядках мод до 10-го. Соотношение энергий главной моды и выброса имеет примерный порядок $1 \cdot 10^{-5} : 0,05 \cdot 10^{-5}$.



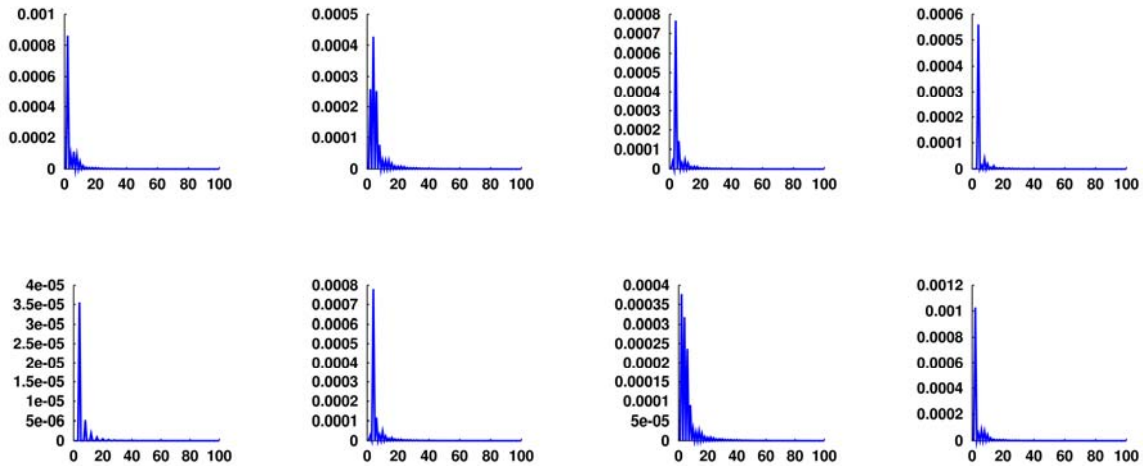
Частотный спектр после 5, 15, 15, 35 тысяч циклов

Рисунок 1 – Периодическое начальное возбуждение и периодические концы

В случае периодического возбуждения и свободных концов периодически происходит полная «перекачка» энергии из «главной» моды в набор мод более высоких порядков (существенные значения энергий приблизительно до 40–50-х порядков),



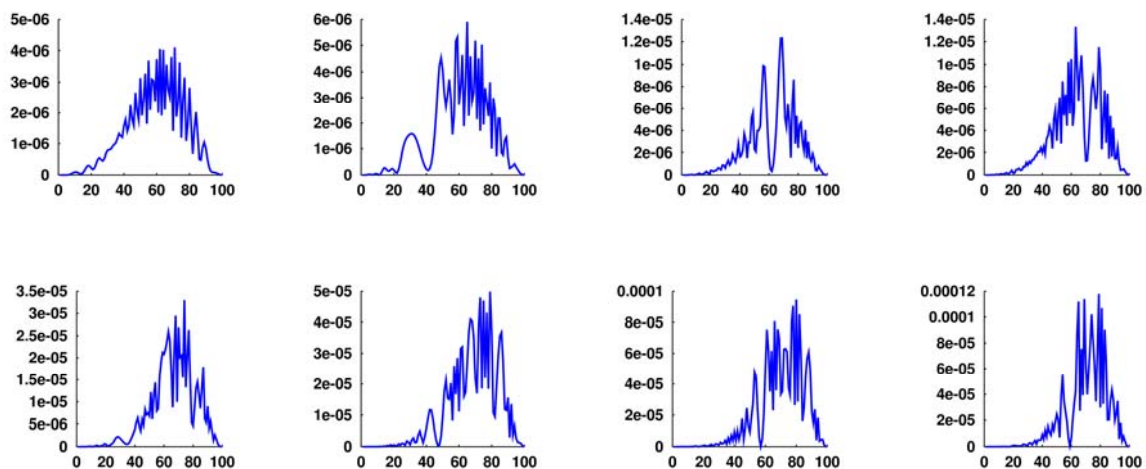
с далейшым перераспределением энергий между этими «новыми» модами, после чего энергия «возвращается» в главную моду. Картина внутреннего перераспределения энергии между «новыми» модами также повторяется из периода в период.



Пример цикла перераспределения энергии: частотный спектр после 3,4, 4,9, 6,4, 7,9 (первый ряд) и 10,4, 13,4, 15,5, 16,9 тысяч циклов

Рисунок 2 – Периодическое начальное возбуждение и свободные концы

В случае импульсного возбуждения и закреплённых концов поведение множества мод, составляющих спектр, в основном отличается от линейного случая периодическим появлением своеобразного «провала» в спектре. Такой «провал» постепенно перемещается в сторону мод высоких порядков и размывается. Вообще в данном случае происходит постоянное перераспределение энергии между модами, однако без равномерного распределения энергии по модам колебаний; огибающая амплитуд мод примерно соответствует кривой нормального распределения, сдвинутой в сторону более высоких порядков.



Частотный спектр после 18, 24,1, 36,4, 46,7 (первый ряд) и 68,5, 80,3, 96,1, 99,9 тысяч циклов

Рисунок 3 – Импульсное начальное возбуждение и закреплённые концы



В случае импульсного возбуждения и свободных концов общая картина подобна иным случаям при импульсном возбуждении – имеется множество мод с постоянным перераспределением энергии между ними, с достаточно устойчивой огибающей амплитуд. Однако спектр в данном случае подразделяется на две выраженные группы мод, размещённые в низших и высших порядках мод, и огибающая амплитуд имеет два максимума. При этом группа мод низших порядков (примерно до 30–35-го) содержит существенно меньшую часть общей энергии и периодически «исчезает», а именно, перераспределяется в группу мод высших порядков). Кроме того, при каждом новом появлении группы мод низших порядков в ней содержится всё меньшая доля общей энергии.

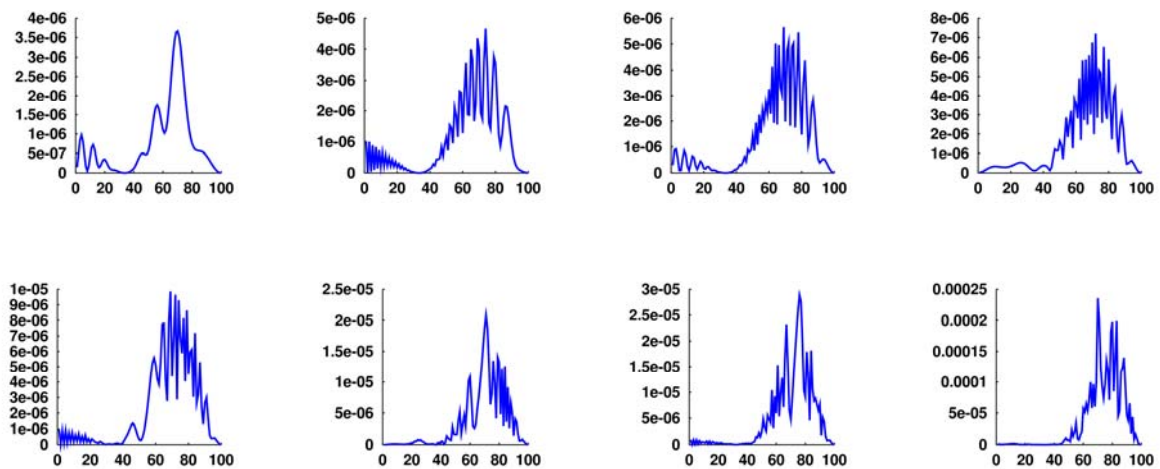


Рисунок 4 – Импульсное начальное возбуждение и свободные концы. Частотный спектр после 2,6, 10,4, 16,5, 20,6 (первый ряд) и 30,3, 40,7, 49,8, 99,9 тысяч циклов

В случае импульсного возбуждения и периодических концов картина также, в общем, аналогична линейному случаю. С течением времени максимум огибающей амплитуд смещается к более высоким порядкам мод, а амплитуды мод низших порядков уменьшаются до практического исчезновения. Равнораспределения энергии по модам колебаний также не происходит.

На основе исследования колебаний достаточно простого физического объекта – одномерной цепочки можно изучить влияние нелинейности на динамику системы. Поскольку долговременное прогнозирование динамического процесса при наличии нелинейности в системе затруднено, а применение аналитических методов практически невозможно, метод моделирования в этом случае является приемлемым. Были изучено влияние на динамику (частотный спектр) граничных и начальных условий. В результате моделирования установлено, что граничные условия в виде закреплённых, свободных и периодических концов существенно не оказывают влияния на распределение частот при одинаковых начальных условиях. Основное влияние на динамику системы оказывают начальные условия (периодическое или импульсное воздействие).



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследование нелинейных задач [Текст] / Э. Ферми, Дж. Паста, С. Улам // Энрико Ферми. Научные труды : в 2 т. Т. II : 1939–1954 США / Энрико Ферми ; под общ. ред. Бруно Понтекорво. – М. : Наука, 1972. – С.645–656.
2. Ньэлл, А. Солитоны в математике и физике [Текст] / А. Ньюэлл ; пер. с англ. [И.Р. Габитов, Е.И. Шульман, А.Ю. Орлов]. – М. : Мир, 1989.
3. Никитин, А.В. Моделирование физических процессов / А.В. Никитин, А.И. Слободенюк, М.И. Шишаков. – М. : Бином, 2011.

Yu.G. Tarasievich, A.V. Belko, S.I. Sarosek., Yu.Yu. Yurkevich. Dynamics of Non-linear Systems under Different Constraining Conditions

Some aspects of non-linear mechanical systems were researched, using the one-dimensional chain of singular-sized balls connected with non-linearly elastic springs as an object. The analysis was done on the results of numeric computations with different initial and border conditions (fixed ends, free ends, periodic ends). Spectra of modal frequencies of these non-linear systems were obtained.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.06.2011 г.