



УДК 519.6 + 517.983.54

В.Ф. Савчук, О.В. Матысик

К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$(E + \alpha A^k)x_{n+1} = (E - \alpha A^k)x_n + 2\alpha A^{k-1}y, x_0 = 0, k \in N. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$(E + \alpha A^k)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k)x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1}y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0.$$

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта априорная оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить



оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [2–4].

Правило останова по невязке

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями:

$$\begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^n}{(1 + \alpha\lambda^k)^n} \right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2k(n\alpha)^{1/k}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \left(\frac{s}{kn\alpha e} \right)^{s/k}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим:



$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \left(\frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n$ и $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$, то

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из (6) имеем $\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{\frac{s}{k}} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Доказательство.

Так как верно неравенство (8), то получим

$$n^{\frac{s}{k}} \|A^s (E - Ag_n(A))\| \leq n^{\frac{s}{k}} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{\frac{s}{k}} \gamma_s n^{-\frac{s}{k}} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e} \right)^{\frac{s}{k}}$. Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [5, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$, ограничены независимой от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{k}} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| = n^{\frac{s}{k}} \|A^{s+1} (E - Ag_n(A))\omega\| \leq n^{\frac{s}{k}} \left(\frac{s+1}{k\alpha e} \right)^{\frac{s+1}{k}} n^{-\frac{(s+1)}{k}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{-\frac{1}{k}} \|\omega\| \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива



Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \gamma_0 \|v_0\|$, $\gamma_0 = 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \rightharpoonup v$, ($p \in N' \subseteq N$), тогда $Av_p \rightharpoonup Av$, ($p \in N'$). Но по условию $\omega_p = Av_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0) = (v_p, v_0) - (v_p, Ag_{n_p}(A)v_0) = \\ &= (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_n(A)v_0) \rightarrow (v, v_0), \end{aligned}$$

так как $\omega_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $v = 0$ и по условию (5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 2k(n_p \alpha)^{1/k} < 2k(\bar{n} \alpha)^{1/k}$. Следовательно, $\|v_p\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

По индукции легко показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A^k)^n (E + \alpha A^k)^{-n} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{9}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \tag{10}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \tag{11}$$



$$\sigma_n = n^{1/k} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$ или

$(m-1)^{1/k} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ (так как из (12) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$ то, используя (9), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2k(m\alpha)^{1/k} \delta \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2k(m(\delta_n)\alpha)^{1/k} \delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.



Оценка погрешности

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда

справедливы оценки $m \leq 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{k}{s+1}}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2k\alpha^{\frac{1}{k}} \left\{ 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{\frac{1}{k}} \delta. \quad (17)$$

Доказательство.

Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} \left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k} \right)^{m-1} dE_\lambda z \right\| \leq \\ &\leq (s+1)^{\frac{s+1}{k}} (k(m-1)\alpha e)^{-\frac{(s+1)}{k}} \|z\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{\frac{s+1}{k}} [k(m-1)\alpha e]^{-\frac{(s+1)}{k}} \|z\|$, отсюда

$m \leq 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{k}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (\text{см. (15)}). \end{aligned}$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \\ &+ 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O\left(\frac{s}{\delta^{s+1}}\right)$ и, как следует из [6], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.



Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка $s > 0$ истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже, если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 1(30). – С. 15–21.
2. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.
5. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
6. Вайникко, Г.М. Оценки погрешностей метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

V.F. Savchuk, O.V. Matysik. On the Regularization of Operator Equations by Implicit Iteration Method

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self-conjugate operator an implicit iteration method is proposed. The application of the residual stop rule for the offered method has been proved, which makes the given iteration method quite effective even when there are no data about source representability of the exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of the error of this method and the estimation for the moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.01.2010