УДК 519.61, 517.9

И.Г Кожух, Ю.А. Касперович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ

Рассматривается динамическая система второго порядка с полиномами третьей степени в правых частях и соответствующее ей дифференциальное уравнение первого порядка, правая часть которого – отношение вышеуказанных полиномов. Найдены необходимые и достаточные условия существования у такой системы частного алгебраического интеграла, который определяется уравнением замкнутой кривой второго порядка, в частности каноническим уравнением окружности. Определен вид системы в случае наличия двух частных алгебраических интегралов в виде замкнутых кривых второго порядка и доказано, что в случае окружности и эллипса исходная система не может иметь предельных циклов. Установлено, что если такая система имеет предельные циклы, то они задаются уравнениями двух окружностей, центр одной из них совпадает с началом координат. Поскольку рассматриваемые окружности не являются концентрическими, то указаны условия, при которых они не пересекаются. Построен целый класс систем, обладающих двумя предельными циклами в виде окружностей в действительной области изменения переменных.

Имеется ряд работ, в которых динамические системы изучались в предположении, что их частными интегралами являются алгебраические кривые. Установлено, что наличие у уравнения алгебраических интегралов существенно упрощает решение задачи нахождения общего интеграла или качественного исследования такого уравнения в целом.

Знаменитая задача небесной механики о движении трех тел описывается, как известно, восемнадцатью уравнениями Гамильтона. Трудами многих выдающихся ученых удалось понизить порядок этой системы до восьми, сохранив Гамильтонову форму. Этот фундаментальный результат в проблеме трех тел получен благодаря тому, что все промежуточные интегралы, использованные для понижения порядка системы, оказались алгебраическими.

В XVII веке Л. Эйлер и Ж. Лагранж, изучая задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, в двух частных случаях свели решение к квадратурам. Долгое время эти случаи, ставшие классическими, считались единственными, в которых решение задачи доводится до конца. Позже С.В. Ковалевская приводит еще один интегрируемый случай: задача была решена с помощью найденных в достаточном числе алгебраических интегралов [1].

Имеется немало и других задач, полное или частичное решение которых оказалось возможным во многом благодаря тому, что известны алгебраические интегральные кривые у соответствующего дифференциального уравнения. Поэтому построение систем дифференциальных уравнений, имеющих частные интегралы, заданные алгебраическими кривыми, а также исследование полученных систем представляет определенный интерес.

Способ построения таких систем дал Н.П. Еругин в [2]. Также Н.П. Еругиным рассмотрены задачи о построении множества уравнений по заданному интегральному многообразию. Т. Булатской в [3] строится множество систем дифференциальных уравнений, для которых заданные замкнутые кривые являются предельными циклами. По трем известным первым интегралам и по условно заданному четвертому А.С. Галиуллин [4] строит динамические уравнения движения твердого тела с одной закрепленной точкой.

Установлено также, что наличие хотя бы одной алгебраической кривой у системы вида (1) позволяет значительно продвинуть решение задачи о полном качественном исследовании такой системы.

Устойчивые предельные циклы описывают установившиеся периодические колебания системы, находящейся в стационарных внешних условиях. Колебания, описываемые устойчивыми циклами, называются автоколебаниями в отличие от вынужденных колебаний, вызванных периодическими внешними воздействиями, и от колебаний типа свободных колебаний маятника. Автоколебания встречаются, например, в таких системах, как часы, паровая машина, электрический звонок, сердце, радиопередатчик; работа каждого из этих устройств описывается предельным циклом в соответствующем фазовом пространстве.

Рассмотрим динамическую систему вида:

$$\frac{dx}{dt} = X_3(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = Y_3(x,y), \tag{1}$$

правые части которой являются полиномами третьей степени с действительными коэффициентами. Наряду с системой (1) будем рассматривать соответствующее ей дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum\limits_{0\le i+j\le 3} a_{ij}x^i y^j}{\sum\limits_{0\le i+j\le 3} b_{ij}x^i y^j} = \frac{Y_3(x,y)}{X_3(x,y)} \tag{2}$$

Будем считать, что система (1) или, что то же самое, уравнение (2) обладает двумя частными решениями, заданными уравнениями замкнутых кривых второго порядка. С помощью невырожденных топологических преобразований такие кривые можно свести к эллипсу и окружности или к двум окружностям.

Предположим, такое преобразование выполнено с сохранением при этом прежних обозначений переменных и параметров системы. Найдем условия, при которых указанные выше кривые определяют предельные циклы системы (1), на базе чего проведем полное исследование качественной картины этой системы.

Пусть $F(x,y)$ является квадратичной алгебраической кривой второго по-рядка. Найдем условия, при которых она является решением уравнения(2) (или системы (1)) .

<u>Лемма 1.</u> Для того, чтобы дифференциальное уравнение (2) в качестве решения имело квадратичные алгебраические кривые вида $F(x,y)=0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было преобразовано к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x(x,y)Y_2(x,y) + (Ax+By+C)F(x,y)}{-F_y(x,y)Y_2(x,y) + (A'x+B'y+C')F(x,y)},$$

где $Y_2(x,y)$ – квадратный многочлен от (x,y); A, B, C, A', B', C'– произвольные постоянные.

Доказательство.

<u>Необходимость.</u> Предположим, что $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, тогда выполняются условия

$$\begin{cases} Y_3 = (Ax + By + C)F + Y_3'(x,y), \\ X_3 = (A'x + B'y + C')F + X_3'(x,y), \end{cases}$$

где $Y_3'(x,y)$ – кубический многочлен с постоянной, не содержащий y^3,

$X_3'(x,y)$ - кубический многочлен с постоянной, не содержащий x^3.

Поскольку $F(x,y)=0$ является решением системы (2), то в силу этой системы имеем:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{F(x,y)=0}=0$$

или

$$(F_x \cdot X_3 + F_y Y_3)\Big|_{F(x,y)=0} = 0 \tag{3}$$

и наряду с этим

$$(xX_3' + yY_3')\Big|_{F(x,y)=0} = 0. \tag{3'}$$

Лемма 2.

Для того, чтобы дифференциальное уравнение (2) имело две интегральные замкнутые непересекающиеся квадратичные алгебраические кривые $F(x,y)=0,\quad G(x,y)=0$, из которых $F(x,y)=0$ – окружность, а $G(x,y)=0$ – эллипс, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2) приводилось к нижеследующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_1FxG + k_2GxF}{k_1FyG + k_2GyF},$$

где k_1 и k_2 – ненулевые постоянные.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Приведем доказательство необходимости, для чего предварительно рассмотрим такой частичный случай: предложим, что

$$F(x,y) = x^2 + (y-a)^2 - 1 = 0,$$
$$G(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2 - 1 = 0,$$

где $\lambda > 0,\ \mu > 0,\ \lambda \neq \mu,\ a \neq 0.$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $a > 0$.

Из того, что кривые $F(x,y)=0,\quad G(x,y)=0$ являются решениями уравнения (2), следует

$$\begin{aligned} &\lambda X_3 + \mu y Y_3 \equiv G L_2, \\ &xX_3 + (y-a)Y_3 = FL_2'', \end{aligned} \tag{4}$$

где L_2 и L_2'' – два произвольных многочлена второй степени.

Из условия (4) при $x=0$ следует, что

$$\mu y (Y_3)\big|_{x=0} \equiv (\mu y^2 - 1)(L_2)\big|_{x=0},$$
$$(y-a)(Y_3)\big|_{x=0} = ((y-a)^2 - 1)(L_2')\big|_{x=0}.$$

Кроме того, поскольку $(\mu y^2 - 1)$ не зависит непосредственно от $((y-a)^2 - 1)$, то $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$ должны быть взаимосвязаны, что противоречит первоначальному предположению о непересекающихся кривых $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$.

Отсюда следует, что должно выполняться тождество:

$$Y_3 \equiv xY_2\,. \tag{5}$$

Воспользовавшись тождествами (4) в предположении, что $x=0$, получим:

$$\begin{cases} L_2 = xL_1, \\ L_2' = xL_1', \end{cases} \tag{6}$$

где $L_1 = Ax + By + C$, $L_1' = A'x + B'y + C'$.

Подставив (5) и (6) в выражения (4), будем иметь

$$\lambda X_3 + \mu y Y_2 \equiv GL_1,$$

$$X_3 + (y-a)Y_2 = FL_1',$$

откуда значения X_3 и Y_2 можно выразить следующим образом, например, по правилу Крамера:

$$X_3 = \frac{(y-a)L_1G - \mu yFL_1}{(\lambda-\mu)y - a\lambda},$$

$$Y_2 = \frac{\lambda FL_1' - GL_1}{(\lambda-\mu)y - a\lambda} \equiv K_1\lambda F - K_2G + \frac{\lambda F\overline{L_1'} - G\overline{L_1}}{(\lambda-\mu)y - a\lambda}, \tag{7}$$

где $\overline{L_1} = Ax + D$, $\overline{L_1'} = A'x + D'$, $k_1 = \dfrac{B'}{\lambda-\mu}$, $k_2 = \dfrac{B}{\lambda-\mu}$, $D = k_2a\lambda + C$, $D' = k_1a\lambda + C'$.

Из условия (5) следует, что $\left.(\lambda F\overline{L_1'} - G\overline{L_1})\right|_{y=\frac{a\lambda}{\lambda-\mu}} \equiv 0.$

Сравнивая коэффициенты, замечаем, что $A = A'$ $D = D'$.

$$A(\lambda^2 + (a^2-1)\lambda\mu - \lambda + \mu) = 0,$$

$$D(\lambda^2 + (a^2-1)\lambda\mu - \lambda + \mu) = 0.$$

Поскольку кривые $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$ не пересекаются, то необходимо, чтобы $\lambda^2 + (a^2-1)\lambda\mu - \lambda + \mu \neq 0$, отсюда $A = A' = D = D' = 0$, а, значит, $\overline{L_1} \equiv \overline{L_1'} \equiv 0$.

Из выражения (5) и (7) можно непосредственно получить необходимость условий теоремы в рассматриваемом частном случае. Перейдем к доказательству в общем случае. Пусть $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$ являются решениями уравнения (2).

Из леммы (1) следует, что

$$Y_3 \equiv L_1 F + F_X Y_2 \equiv L_1' G + G_x Y_2', \tag{8}$$

$$X_3 \equiv \overline{L}_1 F - F_y Y_2 \equiv \overline{L}_1' G - G_y Y_2'. \tag{8'}$$

Умножим (8) на G_y, а (8′) на G_x и полученные произведения сложим, тогда

$$(G_y L_1 + G_x \overline{L}_1)F + Y_2(F_x G_y - F_y G_y) - (G_y L_{1_1}' - G_x \overline{L_1'})G \equiv 0. \tag{9}$$

Будем проводить далее исследование в комплексной области, используя метод неопределенных коэффициентов.

Прежде всего рассмотрим равенства

$$\begin{cases} G(x, y) = 0, \\ F(x, y) = 0 \\ FxGy - FyGx = 0, \end{cases}$$

не имеющие общих решений.

Поскольку в комплексной области квадратные алгебраические кривые $F(x, y) = 0,\quad G(x, y) = 0$ имеют четыре точки пересечения (включая бесконечно удаленную точку), то из тождества (9) видно, что $Y_2 = 0$ есть квадратичная кривая, имеющая четыре общих точки с кривыми $F(x, y) = 0,\quad G(x, y) = 0$, что можно записать в следующем виде:

$$Y_2 = c_1 G + c_2 F, \tag{10}$$

(c_1, c_2 – комплексные числа)

$$Y_2' = c_1' G + c_2' F, \tag{10'}$$

(c_1', c_2' – комплексные числа).

Подставим (10) и (10') в тождество (8), получим:

$$Y_3 \equiv (L_1 + c_2 F_x)F + c_1 F_x G \equiv (L_1' + c_1' G_x - c_1 F_x)G \tag{11}$$

или $\left(L_1 + C_2 Fx - C_2 G_2\right)F = \left(L_1 + C_1 G_2 - G_1 F_X\right)G.$

Т.к. $F\left(x, ó\right)$ и $G\left(x, ó\right)$, представляют собой независимые многочлены с действительными коэффициентами, то $L_1 + C_2 F_x = C_2 G_x$;

$$L_1' + C_1' F_x = C^1 F_x.$$

Из тождества имеем: $Y_3 = C_2' G_x F + C_1 F_x G$, а также $X_3 = -C_2' G_Y F + C_1 F_Y G.$

Таким образом, необходимость полностью доказана.

Замечание: если $F\left(x, ó\right) = 0$, $G\left(x, ó\right) = 0$ имеют парные точки пересечения, то можно предположить, что

$$F\left(x, ó\right) = x_2 + y_2 - 1 \tag{12}$$

$$G\left(x, ó\right) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c \tag{13}$$

Поскольку мы предполагаем, что $G\left(x, ó\right) = 0 -$ эллипс, то кривые $F\left(x, ó\right) = 0$ $G\left(x, ó\right) = 0$ не могут иметь нескольких бесконечных удаленных точек пересечения, ибо в противном случае кривая $G\left(x, ó\right) = 0$ была бы окружностью.

Следовательно, можно считать, что они имеют конечные точки пересечения, но так как по предположению уравнения с действительными коэффициентами $F(x,ó)=0$ и $G(x,ó)=0$ на плоскости не могут пересекаться, то их точки пересечения являются взаимосопряженными комплексными числами.

Пусть $x=\alpha\pm\beta i$, $y=\gamma\pm\delta$. Преобразованием коэффициентов всегда можно привести к случаю $\beta=0$, поэтому двойные точки пересечения имеют комплексные координаты

$$\begin{cases} x_0 = \cosh\varphi = 1, \\ y_0 = \pm\sinh\varphi \neq 0. \end{cases}$$

Подставив в выражение (13), получим

$$\begin{cases} ax_0^2 + by_0^2 + 2fx_0 + c = 0, & (14) \\ hx_0y_0 + gy_0 = 0. & (15) \end{cases}$$

А поскольку

$$\frac{1}{4}\left(F_xG_y - G_xF_y\right) = h\left(x^2-y^2\right) + \left(b-a\right)xy + gx + fy, \qquad (16)$$

то, вторично вводя точки пересечения в выражение (13), получим:

$$h\left(x_0^2-y_0^2\right)+gx_0=0 \qquad (17)$$

$$\left(b-a\right)x_0y_0 - fy_0 = 0 \qquad (18)$$

а поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} x_0y_0 & y_0 \\ x_0^2-y_0^2 & x_0 \end{vmatrix} = y_0^3 \neq 0$$

(т.к. $y_0 \neq 0$)

то из (15) и (17) следует, что $h=g=0$.

На основании выше изложенного кривая $G(x,ó)=0$ является эллипсом. Лемма доказана.

Следствие. Если дифференциальное уравнение (2) имеет две квадратичных замкнутых кривых в качестве решения и одна из них – окружность, а другая – эллипс, то обе они не могут быть предельными циклами.

В самом деле, рассматриваемое уравнение имеет интеграл $F^{k_1}G^{k_2}=C$ при $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$. Из теоремы Ляпунова известно, что при $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$ особой точкой уравнения является не фокус, а центр.

Теорема 1 (существование).

Для того, чтобы уравнение (2) обладало двумя квадратичными алгебраическими предельными циклами, необходимо и достаточно, чтобы с помощью не вырожденного линейного преобразования

$$\begin{matrix} X_1=\lambda x+\beta y+\varepsilon \\ Y_1=\gamma x+\delta y+\eta \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

её можно привести к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+y^2-1)(Ax+By+C) - x(x^2+(y-a)^2-R^2)(Ax+By+C')}{(y-a)(x^2+y^2-1)(Ax+By+C) - y(x^2+(y-a)^2-R^2)(Ax+By+C')} \qquad (20)$$

где величины $A, \quad B, \quad C, \quad \tilde{N}', \quad a, \quad R$ удовлетворяют следующим условиям:

1) при $a \neq 0, |a - R > 1,$ т.е $|a \quad \| > 1, |a + R < 1,$ т.е $|a \quad | < 1$;

2) $(C')^2 > A^2 + B^2, \left|\dfrac{Ba + C}{\sqrt{A^2} + B^2}\right| > R$;

3) $A \neq 0, C \neq C'$.

Доказательство.

<u>Достаточность:</u>

Поскольку преобразование (19) не изменяет характера квадратичных алгебраических кривых и предельных циклов, то необходимо исследовать уравнение (20).

Пусть $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1, F(x, y) = x^2 + (y - a)^2 - R^2$.

Очевидно, что $F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$ являются решениями уравнения (20), однако из условия 1 следует, что эти кривые – две окружности, причём непересекающиеся, а из условия 2 следует, что прямая $Ax + By + C_1 = 0$ и окружность $G(x, y) = 0$, а также прямая $Ax + By + \tilde{N}$ и окружность $F(x, y) = 0$ не пересекаются. Значит, $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$ – периодические решения уравнения (2).

Покажем, что эти окружности являются двумя предельными алгебраическими циклами системы (1). Запишем уравнение (20) в виде

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F_y G(Ax + By + C) - G_y F(Ax + By + C') = X_3'(x, y), \tag{21}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -F_x G(Ax + By + C) + G_x F(Ax + By + C') = Y_3'(x, y),$$

Затем воспользуемся вспомогательным уравнением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2 + y^2 - 1)(By + c) - x(x^2 + (y - a)^2 - R^2)(By + \tilde{N}')}{(y - a)(x^2 + y^2 - 1)(By + c) - y(x^2 + (y - a)^2 - R^2)(By + \tilde{N}')} \tag{22}$$

которое запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_y G(By + c) - G_y F(By + c') = X_3''(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -F_x G(By + c) + G_x F(By + c') = Y_3''(x, y), \end{aligned} \tag{23}$$

Очевидно, $Y_3''(-x, y) = -Y_3''(x, y), X_3''(-x, y) = X_3''(x, y)$

Из соображений симметрии следует, что интегральные кривые уравнения (22) симметричны относительно оси OY. Так как $G(x, y) = 0$ и $F(x, y) = 0$ – периодические решения уравнения (22), то в области этих окружностей существуют периодические решения одного семейства.

Изучим далее характер взаимосвязи уравнений (20) и (22), а именно, рассмотрим:

$$0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{(23)} \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(21)} - \left.\frac{dx}{dt}\right|_{(21)} \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(23)} =$$
$$= X_3''(x, y) Y_3'(x, y) - X_3''(x, y) Y_3''(x, y) = 4d(C' - C) A x^2 GF. \tag{24}$$

Поскольку $A \neq 0$, $a \neq 0$, $C' \neq C$, то характер взаимосвязи этих уравнений лежит в не области общих решений $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$. Такая взаимосвязь может быть только при x=0, однако уравнение (24) содержит x^2, поэтому при $x=0$ точки взаимосвязи лежат на интегральных кривых уравнений (20) и (22). Известно, что периодические решения, находились в области кривых $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$, являются независимыми циклами уравнения (20), а следовательно, $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$ – предельные циклы этого уравнения. Достаточность доказана.

Необходимость.

На основании леммы 2 заключаем, что если уравнение (2) имеет в качестве предельных циклов алгебраические кривые второго порядка, то преобразование (19) одну из них переводит в окружность, после чего другая также становиться окружностью. При этом предполагается, что их форма однотипна.

Пусть (2) имеет две алгебраические кривые:

$$G(x,y)=x^2+y^2-1=0,$$
$$F(x,y)=x^2+(y-a)^2-R^2=0.$$

Откуда следует, что

$$\begin{gathered}2xX_3+2yY_3=(x^2+y^2-1)L_2,\\ 2xX_3-2(y-a)Y_3=(x^2+(y-a)^2-R^2)L_2,\end{gathered}\qquad(25)$$

где $L_2, L_2^{'}$ – квадратичные многочлены.

Пусть $x=0$, тогда из равенств (25) получим

$$2yX_3\big|_{x=0}=(y^2-1)L_2,$$
$$2(y-a)X_3\big|_{x=3}=((y-a)^2-R^2)L'_2,$$

следовательно $Y_3\Big|_{x=0,\ (y^2-1)\left[(y-a)^2-R^2\right]=0}\equiv 0$.

Значит, $Y_3(x,y)=xY_2(x,y)$, $Y_2(x,y)$ – квадратный многочлен от (x, y) ввиду того, что $F(x,y)$, $G(x,y)$ не являются взаимозависимыми.

Вводя значение $Y(x,y)$ в (25) получим $L_2=x(Ax+By+C)$, $L_2^{'}=x(A'x+B'+C')$; в результате равенства (25) примут вид:

$$\begin{gathered}2X_3+2Y_2=(x^2+y^2-1)(Ax+By+C),\\ 2X_3+2(y-a)=(x^2+(y-a)^2-R^2)(A'x+B'y+C').\end{gathered}\qquad(26)$$

Сравнивая коэффициенты при x^3 и y^3, находим, что $A'=A$, $B'=B$.

Пусть $a \neq 0$, тогда из тождеств (26) получим

$$X_3=-\frac{1}{4a}\left[(2(y-a)G(Ax+By+C)-2yF(Ax+By+C'))\right],$$

$$Y_3=\frac{x}{4a}\left[(2G(Ax+By+C)-2F(Ax+By+C'))\right],$$

а это представляет собой форму записи правой части уравнения (20). Теорема доказана.

Замечания.

1. Условие $a \neq 0$ является необходимым, ибо если $a = 0$, по аналогии с вышеизложенным имеем $X_3 = yX_2$, а тогда

$$2X_2 + 2Y_2 \equiv (x^2 + y^2 - 1)B,$$
$$2X_3 + 2Y_2 \equiv (x^2 + y^2 - R^2)B'.$$

Отсюда, учитывая, что $B = B'$, видно, что уравнение (2) принимает вид $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} = -\frac{x\mathrm{X}_2}{yX_2} = -\frac{x}{y}$, что противоречит предположению о наличии предельных циклов.

2. Необходимыми являются условия 1 и 2, в противном случае уравнение (2) на кривых $F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$ может иметь особые точки.

3. Необходимым является и условие 3, в противном случае кривые $F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$ не могут служить предельными циклами.

Примечание.

В непрерывной динамической системе положение равновесия (особая точка) – точка в фазовом пространстве, к которой приближается траектория после затухания переходных режимов (при t стремящемся к бесконечности). В механических системах под положением равновесия обычно имеют в виду состояние с нулевым ускорением и нулевой скоростью. В отображениях положениями равновесия могут быть конечные множества: при итерациях отображения или разностного уравнения система последовательно переходит от одной точки такого множества к другой (положение равновесия также называется неподвижной точкой или точкой покоя).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Уиттекер, Е.Г. Аналитическая динамика / Е.Г. Уиттекер. – М–Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1937. – 500 с.
2. Еругин, Н.П. Построение всего множества систем, имеющих заданную интегральную кривую / Н.П. Еругин //Прикладная математика и механика. – 1952. – № 16, Вып.6. – С 659–670.
3. Булатская, Т.Ф. О построении всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих своими предельными цмклами заданные кривые / Т.Ф. Булатская // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1349–1356.
4. Галиуллин, А.С. Обратные задачи динамики тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой / А.С. Галиуллин // Дифференц.уравнения. – 1972. – Т.8, №8. – С. 1357–1362.
5. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1990.
6. http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/dsarch/SP7.html.
7. http://twt.mpei.ac.ru/math/ODE/ODEsys/ODEsysaut_08180000.html.

I.G. Kozhuh, Y.A. Kasperovich. **Differential Equations with Two Quadratic Limit Cycle**

A second-order dynamical system with third-degree polynomial on the right side and at the same time, the corresponding first order differential equations, whose right side is the ratio of the above polynomials, is considered. The necessary and sufficient conditions for the existence of such system of private algebraic integral, which is determined by the equation of the closed curve of the second-order, in particular - the canonical equation of a circle are found. The form of the system in the presence of two particular algebraic integrals in the form of closed curves of the second order is determined and it is proved that in the case of the circle and the ellipse the original system can not have limit cycles. It has been established that if such a system has limit cycles, they are given by the equations of two circles and the centre of one of them coincides with the origin of the coordinate. Since these circles are not concentric, the conditions under which they do not intersect are given. The whole class of systems with two limit cycles in the form of circles in the real domain of the variables is build.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 14.10.2010