УДК 519.6+517.983.54

В.Ф. Савчук, О.В. Матысик

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве предлагается метод итераций решения операторных уравнений I рода с положительным самосопряженным ограниченным оператором. Изучена сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной и энергетической норме гильбертова пространства, получены оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке. Исследована сходимость метода в случае неединственного решения уравнения.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяется метод итераций с переменным шагом

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\dots. \end{gathered} \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо метода (2) приходится рассматривать приближения

$$\begin{gathered} x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\dots. \end{gathered} \tag{3}$$

Для упрощения будем считать, что $\|A\| = 1$.

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.1 Сходимость при точной правой части уравнения

Воспользовавшись интегральным представлением положительного самосопряженного оператора A и формулой (2), по индукции получим

$x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1} (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y$, где E_λ – спектральная функция оператора A. Разобьем полученный интеграл на два:

$$x - x_n = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y + \int_\varepsilon^1 \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y.$$

Здесь k, l, m – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} &|1-\alpha\lambda| < 1, \ (\text{т.е. } 0 < \alpha < 2), \\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1, \\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Считая $k = l = m = \dfrac{n}{3}$ $\left(n = 3p, \ p \in N\right)$, при условиях (4) получим

$$\left\| \int_\varepsilon^1 \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y \right\| \le q^{n/3} \left\| \int_\varepsilon^1 dE_\lambda x \right\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Здесь $q = \max\limits_{\lambda \in [\varepsilon,1]} \left| (1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda) \right| < 1$. Кроме этого,

$$\left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y \right\| \le \left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \, dE_\lambda y \right\| = \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| = \left\| E_\varepsilon x \right\| \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

в силу свойств спектральной функции [1, с. 302]. Таким образом, $\|x - x_n\| \to 0, \ n \to \infty$.

Тем самым доказана сходимость метода (2) к точному решению операторного уравнения (1) при точной правой части y.

Замечание 1. *Условие* $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta < \alpha + \beta$ *и* $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$ (*см.* [2]). *Отсюда* $\alpha + \beta < 8$.

2.2 Сходимость при приближенной правой части уравнения

Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 1. *Итеративный процесс* (3) *сходится при условиях* (4), *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0, \ n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в подразделе 2.1 $x - x_n \to 0, \ n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, имеем $x_n - x_{n,\delta} = \int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\right]dE_\lambda(y-y_\delta)$. Считая $k=l=m=\frac{n}{3}$ $(n=3p,\ p\in N)$, оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]$. По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda)\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$. Тогда справедлива оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta$. Поскольку $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta$ и, как показано в подразделе 2.1, $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости метода (3) достаточно, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty, \delta\to 0$. Теорема 1 доказана.

2.3. Оценка погрешности

Оценить скорость сходимости приближений (3) без дополнительных предположений невозможно, так как неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x-x_n\|$. Поэтому для оценки скорости сходимости метода будем использовать дополнительную априорную информацию на гладкость точного решения x уравнения (1) – возможность его истокообразного представления, т. е. что $x=A^s z,\ s>0$. Тогда имеем $y=A^{s+1}z$ и, следовательно, получим $x-x_n = \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\lambda^s\, dE_\lambda z$. Для оценки $\|x-x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $\phi(\lambda)=(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\lambda^s$. Нетрудно показать, что при условиях (4) для достаточно больших n справедлива оценка $\max\limits_{[0,1]}|\phi(\lambda)|\le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}$ и, следовательно, получим $\|x-x_n\|\le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\|z\|$.

Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\|z\|+\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta$. Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оптимальную оценку $\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\le(1+s)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}}=s\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$. Порядок последней оценки оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями [5].

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α, β и γ, но от них зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α, β и γ по возможности большими, удовлетворяющими условиям (4) и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in N$.

Метод (3) не дает преимущества в мажорантных оценках погрешности по сравнению с известным методом простых итераций с постоянным шагом $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [3–5, 7–8]. Но он дает выигрыш в следующем. В методе простых итераций с постоянным шагом требуется условие $0 < \alpha \le 1{,}25$, а в методе (3) $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, а γ выбирается из условия $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. Итак, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для метода простых итераций с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (3), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций с постоянным шагом.

3. Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость приближений (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$.

С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int_0^1 \lambda(1-\alpha\lambda)^{2n/3}(1-\beta\lambda)^{2n/3}(1-\gamma\lambda)^{2n/3}\, d(E_\lambda x, x)$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta)$. Оценив подынтегральные функции, получим при условиях (4) оценку погрешности для итерационной процедуры (3) в энергетической норме $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta$, $n \ge 1$. Следовательно, если в процессе (3) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме. Оптимальная оценка погрешности для приближений (3) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2e^{-1/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и достигается при $n_{\text{опт}} = 3(\alpha+\beta+\gamma)^{-1} e^{-1/2}(2\delta)^{-1}\|x\|$.

Существенно, что использование энергетической нормы позволило получить оптимальный шаг итераций $n_{\text{опт}}$ и априорную оценку погрешности для метода (3) без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения. Заметим, что использование энергетической нормы как бы заменяет истокообразную представимость точного решения порядка $s = \frac{1}{2}$ (см. подраздел 2.3).

4. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n в исходной норме гильбертова пространства получен в предположении, что имеется дополнительная информация на гладкость точного решения x уравнения (1) – его истокообразная представимость. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в разделе 2 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [5–6; 9]. Зададим $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного процесса (3) определим условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m), \quad \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{5}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (5) к методу (3). Ниже метод итераций (3) с остановом (5) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Рассмотрим при $n = 3p,\ p = 1,2,\ldots$ семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]$. В разделе 2 было показано, что при (4) для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} |g_n(\lambda)| \le \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3}, \tag{6}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0\le\lambda\le 1}\left|(1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}}\right| \le 1, \tag{7}$$

$$1 - \lambda\, g_n(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \to 0, \quad n\to\infty, \ \forall\lambda\in(0,1], \tag{8}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le s^s\left[\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-s}, \ n > 0,\ 0 \le s < \infty. \tag{9}$$

Справедливы следующие леммы.

Л е м м а 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. *Тогда для* $\forall w\in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0,\ n\to\infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим

$$\left\|(E - Ag_n(A))w\right\| = \left\|\int_0^1 (1-\lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w\right\| = \left\|\int_0^1 (1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\, dE_\lambda w\right\| \le$$

$$\le \left\| \int_0^{\varepsilon} (1-\alpha\lambda)^{n/3} (1-\beta\lambda)^{n/3} (1-\gamma\lambda)^{n/3} \, dE_\lambda w \right\| + \left\| \int_{\varepsilon}^{1} (1-\alpha\lambda)^{n/3} (1-\beta\lambda)^{n/3} (1-\gamma\lambda)^{n/3} \, dE_\lambda w \right\| = \|I_1\| + \|I_2\|.$$

Аналогично, как в подразделе 2.1, показывается, что $\|I_1\| \to 0$ и $\|I_2\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) v \right\| \to 0, n \to \infty, \quad 0 \le s < \infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как (9) верно, то выполняется $n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) \right\| \le$ $\le n^s \sup\limits_{0 \le \lambda \le 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le s^s \left[\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3} \right]^{-s} = \gamma_s,\ n \ge 1$. Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [10, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|,\ n = 1, 2, \ldots$ ограничены независящей от n постоянной. Имеем $\|B_n\| = n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) \right\| \le \gamma_s$, т. е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмем множество $R(A)$ и положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ получим

$$n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) v \right\| = n^s \left\| A^{s+1} (E - Ag_n(A)) w \right\| \le n^s \sup_{0 \le \lambda \le 1} \lambda^{s+1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \, \|w\| \le$$

$$\le n^s (s+1)^{(s+1)} \left[\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)e}{3} \right]^{-(s+1)} \|w\| = n^{-1} \gamma_{s_1} \|w\| \to 0,\ n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$. *Если для некоторых* $n_k < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A)) v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A)) v_0 \to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7) справедливо неравенство $\|v_k\| = \left\| (E - Ag_{n_k}(A)) v_0 \right\| \le \|v_0\|,\ k \in N$. Следовательно, последовательность v_k ограничена. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_k \dashrightarrow v\ \left(k \in N' \subseteq N\right)$, тогда $Av_k \dashrightarrow Av\ \left(k \in N'\right)$. Но по условию имеем $w_k = Av_k \to 0,\ k \to \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку 0 не является собственным значением оператора A, то $v = 0$. Тогда

$$\|v_k\|^2 = \left(v_k, \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0\right) = \left(v_k, v_0\right) - \left(v_k, Ag_{n_k}(A)v_0\right) =$$
$$= \left(v_k, v_0\right) - \left(Av_k, g_{n_k}(A)v_0\right) = \left(v_k, v_0\right) - \left(w_k, g_{n_k}(A)v_0\right) \to 0, k \to \infty,$$

так как $w_k \to 0$, $v = 0$ и по условию (6) $\left\|g_{n_k}(A)\right\| \le \frac{n_k}{3}(\alpha + \beta + \gamma) < \frac{\bar{n}}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$. Следовательно, $\|v_k\| \to 0$, $k \to \infty$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_k \to 0$, $k \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (5). *Тогда метод* (3) *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{n/3}(E - \beta A)^{n/3}(E - \gamma A)^{n/3}\right]y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{10}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{11}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{12}$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Кроме того, из (6) и (7) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta, \tag{14}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{15}$$

Применим правило (5). Тогда $\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le b\delta, \quad b > 1$, и из (11) и (15) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \tag{16}$$

Для $\forall n < m$ справедливы неравенства $\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Поэтому $\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta$. Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \tag{17}$$

Из (13) и (17) при $n = m-3$ получаем $\frac{\sigma_{m-3}}{m-3} = \left\| A\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)x \right\| \geq (b-1)\delta$ или, что то же, $(m-3)\delta \leq \frac{\sigma_{m-3}}{b-1} \to 0,\quad \delta \to 0,$ (так как из (13) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя равенство (10), получим

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \leq \left\| \left(E - Ag_m(A)\right)x \right\| + \left\| g_m(A)\left(y_\delta - y\right) \right\| \leq \left\| \left(E - Ag_m(A)\right)x \right\| +$$

$$+ \frac{m}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

так как из (12) вытекает $\left\| \left(E - Ag_m(A)\right)x \right\| \to 0, m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (16) имеем $\left\| A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \right\| \leq (b+1)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0$. Следовательно $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0$, поэтому по лемме 3 получаем, что тогда $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Отсюда

$$\left\| x_{m(\delta_n),\delta_n} - x \right\| \leq \left\| \left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \right\| + \frac{m(\delta_n)}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta_n \to 0,\quad \delta_n \to 0.$$

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\| z \|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \leq \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\| z \|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = m-3$ получим

$$\left\| A\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)x \right\| = \left\| A^{s+1}\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)z \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \lambda^{s+1}\left(1 - \lambda g_{m-3}(\lambda)\right)dE_\lambda z \right\| \leq (s+1)^{s+1} \left[(m-3)\,\frac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)} \|z\|.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (17), получим

$(b-1)\,\delta \leq\ (s+1)^{s+1} \left[(m-3)\,\frac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)} \|z\|$, откуда справедливо $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\| z \|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим:

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \left\|A^s(E - Ag_m(A))z\right\| \le \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (16)).}$$

Теперь, поскольку соотношение (10) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le$$

$$\le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{m(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\delta \le$$

$$\le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta .$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. *Порядок оценки погрешности* (18) *для метода* (3)*, полученной в теореме* 3*, есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$*, и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ \ s > 0$ [5].

Замечание 3. *Хотя формулировка теоремы* 3 *дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (5)*. И тем не менее в теореме* 3 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (5)*, как показывает теорема* 2*, обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

5. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (1) имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $A \ge 0,\ \ y \in H,\ \ 0 < \alpha < 2,\ \ |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1,$ $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. *Тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\ \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$*, где* x^* *– минимальное решение уравнения.*

Доказательство. Применим оператор A к (2), получим $Ax_n = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда

$$Ax_n - \Pi(A)y = A(E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y =$$
$$= A(E-\alpha_n A)x_{n-1} - (E-\alpha_n A)\Pi(A)y = (E-\alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) =$$
$$= (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y).$$

Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \ge 0$, и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$, то, воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A, получим

$$\|\nu_n\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda \nu_0 \right\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\|.$$

Здесь l, m, k – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Считаем, что $k = l = m = \frac{n}{3}$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| \le$$
$$\le \left\| E_{\varepsilon_0}\nu_0 \right\| + q^{n/3}(\varepsilon_0) \left\| \nu_0 - E_{\varepsilon_0}\nu_0 \right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. Здесь $q = \max\limits_{\lambda\in[\varepsilon_0,1]} |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. Следовательно, имеем $\nu_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (по теореме 2.1 из [8]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо. Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод (2) примет вид

$$x_n = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y =$$
$$= (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A(x^* - x_{n-1}).$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A\left(\Pi(A)x^* - \right.$$
$$\left. - \Pi(A)x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$. Отсюда $\Pi(A)x_n - x^* = = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A)...(E - \alpha_1 A)\omega_0$ и, аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n \to 0,\ n \to \infty$. Тогда $\Pi(A)x_n \to x^*$. Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Предложенный метод может быть применен для решения задач спектроскопии, обратных задач гравиметрии и теории потенциала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
2. Лисковец, О.А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9–12.
3. Лаврентьев, М.М. Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
6. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. –1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
7. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal., 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
9. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.
10. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

V.F. Savchuk, O.V. Matysik. **About the Iteration Method with Variable Step for Solution of the Incorrect Problems in the Hilbert Space**

The iteration method for solution of the first–kind operator equations with a self–conjugated positive bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of a method is proved in case of an *apriori* choice of number of iterations in ussual and energy norm of Hilbert space, estimations of an error are received. Use of energy norm allows making a method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution of the equation. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done. The opportunity of the application of a rule residual stop is proved for the offered method. Convergence of a method in the case of nonuniqueness of the solution of the equation is investigated.