

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.Б. Антаневіч

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плеццохоў

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2019

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 (у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь ад 21.01.2019 № 24) часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Голуб А.А., Давыдовская В.В.

Сравнение результатов взаимодействия (1+1)D и (1+2)D световых пучков с различными профилями и ортогональными поляризациями в фоторефрактивном оптически активном кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ 5

Курочкин Ю.А.

Системы когерентных состояний, связанных с уравнением Клейна – Фока 13

Лиопо В.А., Лявшук И.А., Овчинников Е.В., Сабуть А.В., Секержицкий С.С.

«Вес» узла обратной решетки в описании свойств кристаллов 19

Овсюк Е.М., Войнова Я.А., Веко О.В., Редьков В.М.

К анализу туннельного эффекта для массивной частицы со спином $1/2$ в поле Шварцшильда 32

Сендер Н.Н.

Распространение света в гиротропных кристаллах 50

МАТЭМАТЫКА

Грицук Д.В., Трофимук А.А.

Инварианты частично разрешимых групп с ограничениями на классические подгруппы 57

Марзан С.А.

Существование и единственность решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения комплексного порядка в весовом пространстве непрерывных функций 63

Матысик О.В.

Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений 72

Мельникова И.Н., Войтович В.В.

Использование системы Mathematica при решении систем хемостата с двумя микроорганизмами 79

Мазурик С.С., Кульгун Е.И., Худяков А.П.

Матричное обобщенное интерполирование Эрмита – Биркгофа с одним специальным узлом по общей чебышевской системе функций 86

Юдов А.А., Сирисько Е.А.

Классификация однородных редуктивных пространств со структурной группой – группой Ли движений шестимерного евклидова пространства \mathbb{R}_6 98



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
A.M. Sender
Deputy Editor-in-chief:
S.A. Marzan

International Board:
V.A. Glavan (Moldova)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.B. Antanevich
M.M. Sender
(managing editor)
M.I. Lyavchuk
I.P. Martynov
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
Y.V. Radyno
V.M. Rad'kov
Y.S. Sekyazhytski
M.M. Trush
A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2019

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94
(as revised by the order of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus from January 21, 2019 № 24)
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

Holub A.A., Davydouskaya V.V.

Comparison of the Results of Interaction (1 + 1)D and (1 + 2)D Light Beams with Different Profiles and Orthogonal Polarizations in Photorefractive Optically Active $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ Crystal..... 5

Kurochkin Yu.A.

The Coherent States which Connected with Klein – Fock Equation 13

Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnika Y.V., Sabutz A.V., Sekerzhitski S.S.

The «Weight» of the Reverse Lattice Node in the Description of the Properties of Crystals 19

Ovsiyuk E.M., Voynova Ya.A., Veko O.V., Red'kov V.M.

To Description of the Tunneling Effect for Dirac Massive Particles Through the Schwarzschild Gravitational Barrier 32

Sender N.N. Propagation of Light in Gyrotropic Crystals 50

MATHEMATICS

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A.

Invariants of Partially Soluble Groups with Restrictions on Classical Subgroups..... 57

Marzan S.A.

The Existence and Uniqueness of the Cauchy-Type Problem Solution for a Differential Equation of Complex Order in the Weighted Spaces of N-Time Differentiable Functions 63

Matysik O.V.

The a Priori Choice of Parameter of Regularization in the Non-Evident Iteration Method of the Decision of the Linear Non-Correct Equations..... 72

Melnikova I.N., Voytovich V.V.

Using the Mathematica System for Solving Chemostatic Systems with Two Microorganisms 79

Mazurik S.S., Kulgun E.I., Hudyakov A.P.

Matrix Generalized Interpolation of Hermite – Birkhoff Type with One Special Node on the General Chebyshev System of Functions..... 86

Yudov A.A., Sirisko E.A.

Classification of Homogeneous Reductive Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of the Six-Dimensional Euclidean Space \mathbb{R}_6 98

А.А. Голуб¹, В.В. Давыдовская²

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

e-mail: agolub@tut.by

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (1+1)D И (1+2)D СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОФИЛЯМИ И ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛЯРИЗАЦИЯМИ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$

С помощью численного моделирования выполнено теоретическое сравнение результатов взаимодействия (1+1)D и (1+2)D супергауссовых и гауссовых световых пучков, имеющих ортогональные друг другу линейные поляризации и распространяющихся в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле. Показана возможность наблюдения отклонения взаимодействующих световых пучков, рассмотрена также возможность использования наблюдаемых эффектов в реализации оптических логических устройств.

Введение

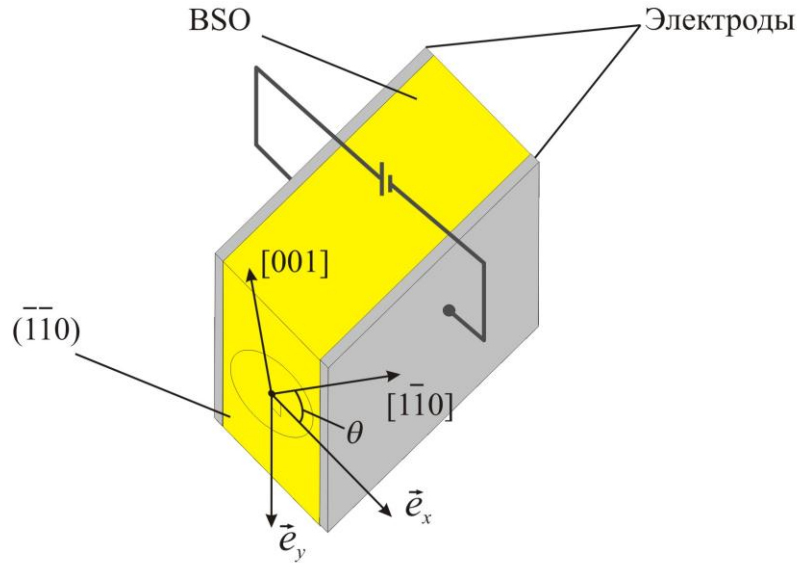
При исследовании распространения и взаимодействия световых пучков часто используют фоторефрактивные материалы, так как они обладают подходящими для этого электрооптическими свойствами.

Существует ряд задач, связанных с необходимостью управлять положением светового пучка на выходе из того или иного устройства. В работах [1–3] на примере одномерных гауссовых световых пучков было показано, что в этих целях могут быть использованы закономерности взаимодействия ортогонально поляризованных световых пучков в кубических фоторефрактивных кристаллах $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO) и $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO). В [4] показано, что взаимодействие ортогонально линейно поляризованных двумерных световых пучков в фоторефрактивном кристалле SBN может быть использовано для управления световым пучком, который при таком взаимодействии распространяется в квазисолитонном режиме и отклоняется под действием другого пучка, который сильно дефокусирован и является управляющим пучком.

В данной статье представлены результаты исследования принципиальной возможности использования оптически активного кристалла BSO для осуществления управляемой адресной локализации одномерных и двумерных световых пучков с гауссовым и супергауссовым распределениями интенсивностей.

Теоретическая модель

Пусть в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле BSO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле, взаимодействуют два одномерных световых пучка (рисунок 1). Ось Ox совпадает с вектором напряженности внешнего электрического поля \vec{E}_0 и расположена под ориентационным углом θ относительно кристаллографического направления $[1\bar{1}0]$.



Рисунек 1. – Ориентация рабочей системы координат (\vec{e}_x, \vec{e}_y) и вектора напряженности внешнего электрического поля относительно кристаллографических осей $[001]$ и $[1\bar{1}0]$ кристалла

Для исследования распространения и взаимодействия одномерных световых пучков в кубических фоторефрактивных оптически активных кристаллах среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ была использована следующая система скалярных дифференциальных уравнений в частных производных [5]:

$$i \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{1}{2} k_0 n_0^3 E_0 r_{41} (\mu_1 A_x + \mu_2 A_y) \frac{2\eta I_d}{2\eta I_d + |A_x|^2 + |A_y|^2} - i\rho A_y = 0;$$

$$i \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} k_0 n_0^3 E_0 r_{41} (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) \frac{2\eta I_d}{2\eta I_d + |A_x|^2 + |A_y|^2} + i\rho A_x = 0,$$
(1)

где r_{41} – электрооптический коэффициент, k_0 – модуль волнового вектора в вакууме, n_0 – показатель преломления невозмущенного кристалла, I_d – темновая интенсивность (в общем случае в ней учтена также интенсивность подсветки),

$$\mu_1 = 3 \sin \theta \cos^2 \theta, \quad \mu_2 = \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta), \quad \mu_3 = \sin \theta (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (2)$$

ρ – удельное вращение плоскости поляризации в кристалле, $\eta = n_0 \cdot \eta_0$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$, μ_0 – магнитная постоянная, ε_0 – диэлектрическая постоянная, ось OZ совпадает с направлением распространения светового пучка, A_x и A_y – x - и y -составляющие комплексного вектора \vec{A} , характеризующего медленно изменяющуюся вдоль направления оси OZ векторную амплитуду напряженности электрического поля светового пучка.

Система (1) получена в паракиальном приближении на основе уравнений Максвелла и ковариантных выражений для электрооптического тензора, заимствованных в [6]; при этом направление вектора \vec{E}_0 предполагалось произвольным.

Уравнения, посредством которых описывается распространение и взаимодействие двумерных световых пучков в фоторефрактивных кристаллах, имеют более сложный вид, чем уравнения (1). Это обусловлено тем, что в этой ситуации распределение потенциала внутреннего электрического поля уже нельзя описать простой аналитической формулой и аксиальная симметрия, характерная для светового пучка на входе в кристалл, разрушается при его распространении в кристалле вследствие оптической анизотропии, которая индуцируется внешним электрическим полем, частично экранированным световым пучком.

Для исследования двумерных световых пучков использовалась система скалярных дифференциальных уравнений в частных производных, полученная аналогично (1) [7]:

$$\begin{aligned}
 & i \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} \right) - \\
 & - \frac{k_0 n_0^3}{2} \left[r_{41} \left(\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\mu_1 A_x + \mu_2 A_y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) \right) \right] - i \rho A_y = 0; \\
 & i \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) - \\
 & - \frac{k_0 n_0^3}{2} \left[r_{41} \left(\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mu_3 A_x + \mu_4 A_y) \right) \right] + i \rho A_x = 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $I = (n_0/2\eta_0)(|A_x|^2 + |A_y|^2)/I_d$ – относительная интенсивность светового пучка, φ – переопределенный электростатический потенциал, связанный с потенциалом поля пространственного заряда ϕ соотношением [8]:

$$\varphi = \phi + E_0 x, \tag{4}$$

Уравнение для переопределенного электростатического потенциала φ можно записать в виде [8–9]:

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \ln(1 + I) \cdot \nabla \varphi = E_0 \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + I). \tag{5}$$

Применительно к одномерным световым пучкам данное уравнение решается аналитически.

Для двумерных световых пучков при определении потенциала φ необходимо решать эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных. Обычно его решают численно с использованием различных методов [10]. Коэффициенты μ_1 , μ_2 , μ_3 , содержащиеся в уравнениях (3), определены выражениями (2):

$$\mu_4 = 3 \cos \theta \sin^2 \theta. \tag{6}$$

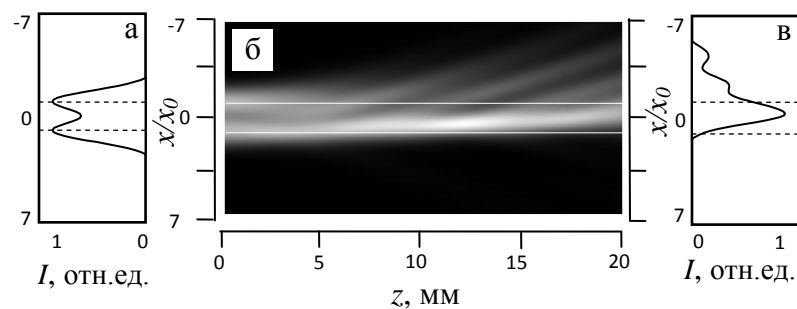
При распространении в кристалле одномерных световых пучков функция μ_1 ответственна за самофокусировку пучка, поляризованного вдоль оси OX ; функция μ_3 ответственна за самофокусировку пучка, поляризованного вдоль оси OY и достигает максимального значения при $\theta \approx 90^\circ$; посредством величины μ_2 осуществляется кросс-нелинейная связь между пучками, поляризованными вдоль осей OX и OY [5]. Для двумерных пучков за связь между пучками x - и y -поляризации ответственны две функции – μ_2 и μ_4 [7].

Численное моделирование

Так как поиск аналитического решения систем уравнений (1; 3) затруднителен, то дальнейшие теоретические исследования проводились методом численного моделирования с использованием схемы Дугласа [13]. При моделировании использовались следующие параметры одномерных световых пучков: длина волны $\lambda = 0.6328$ мкм, полуширина $x_0 = 15$ мкм, расстояние между центрами световых пучков принималось равным 30 мкм. Параметры кристалла BSO выбирались в соответствии с [14]: $n_0 = 2.54$, $\rho = 22$ °/мм, $r_{41} = 5 \times 10^{-12}$ м/В, длина кристалла $d = 20$ мм. Ориентационный угол $\theta = 35.3^\circ$ ($\vec{E}_0 \parallel [1\bar{1}\bar{1}]$). Как показано в работах [5; 14], явления самофокусировки и отклонения световых пучков при такой ориентации вектора напряженности внешнего электрического поля проявляются наиболее существенно.

С помощью теоретического моделирования установлено, что под воздействием внешнего постоянного электрического поля $E_0 = 20$ кВ/см одномерный гауссов световой пучок в кристалле BSO толщиной 20 мм распространяется в солитоноподобном режиме, испытывая небольшие пульсации интенсивности. При данном значении внешнего электрического поля ($E_0 = 20$ кВ/см) проведено дальнейшее исследование взаимодействия двух одномерных световых пучков с гауссовым и супергауссовым распределениями интенсивностей, один из которых линейно поляризован в плоскости входной грани кристалла параллельно вектору напряженности внешнего электрического поля \vec{E}_0 , а другой – линейно поляризован ортогонально ему. В этом случае первый световой пучок находится в условиях, когда воздействие внешнего электрического поля на самофокусировку светового пучка максимально, а второй в условиях минимального воздействия [14].

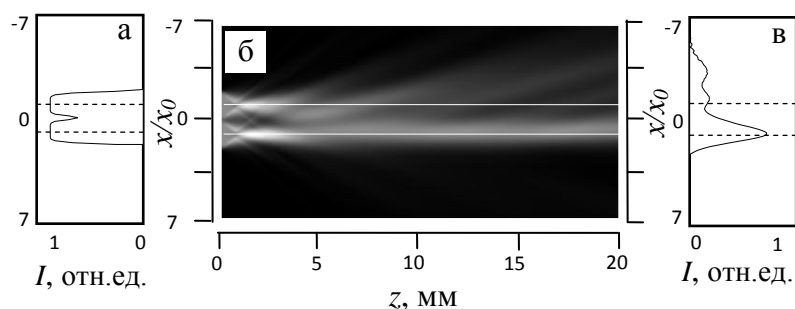
На рисунке 2 показано взаимодействие (1+1)D гауссовых световых пучков с взаимно ортогональными линейными поляризациями. Нижний световой пучок распространяется в солитоноподобном режиме. Верхний световой пучок, линейно поляризованный ортогонально нижнему, выполняет роль управляющего пучка. Из-за невыгодных условий самофокусировки он рассеивается, но при этом приводит к отклонению нижнего пучка приблизительно на 15 мкм.



- а – одномерные гауссовы пучки на входе в кристалл;
- б – распределение светового поля по толщине кристалла;
- в – положение квазисолитонного пучка на выходе из кристалла

Рисунок 2. – Взаимодействие одномерных гауссовых световых пучков в кристалле BSO, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле $E_0 = 20$ кВ/см: верхний пучок линейно поляризован ортогонально оси Ox , нижний – параллельно оси Ox

Взаимодействие супергауссовых световых пучков с взаимно ортогональными линейными поляризациями представлено на рисунке 3. Из-за особой формы профиля супергауссова светового пучка даже при минимальном влиянии внешнего электрического поля нижний световой пучок при прохождении первых 2 мм испытывает самофокусировку за счет сильного изменения прямоугольного профиля пучка. В отличие от нижнего светового пучка с гауссовым профилем на рисунке 2 нижний пучок на рисунке 3 при дальнейшем распространении в кристалле практически не отклоняется.



а – одномерные супергауссовы пучки на входе в кристалл;
 б – распределение светового поля по толщине кристалла;
 в – положение квазисолитонного пучка на выходе из кристалла

Рисунок 3 – Взаимодействие одномерных супергауссовых световых пучков в кристалле BSO, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле $E_0 = 20$ кВ/см: верхний пучок линейно поляризован ортогонально оси Ox , нижний – параллельно оси Ox

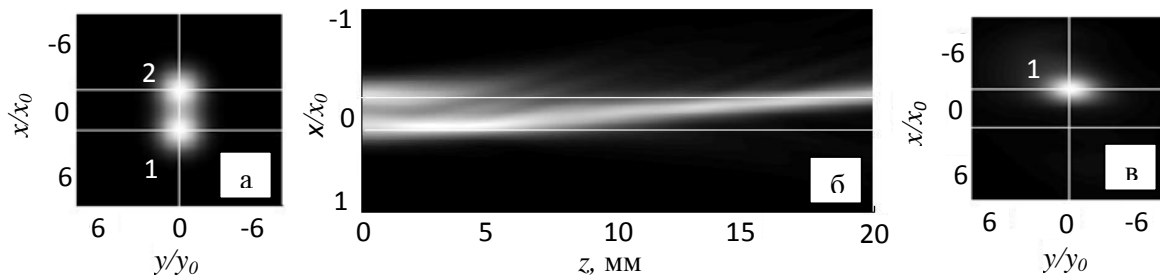
Из сравнения рисунков 2 и 3 можно сделать вывод о том, что для наблюдения самоотклонения при взаимодействии световых пучков при данных условиях использование супергауссовых пучков невыгодно.

Однако этот недостаток устраняется, если в качестве управляющего используется гауссов пучок, а в качестве ведомого – супергауссов.

Наличием оптической активности в кристалле BSO обусловлен отток световой энергии из нижнего пучка, однако на величину смещения нижнего светового пучка оптическая активность практически не влияет.

В [15] было показано, что двумерные световые пучки в фоторефрактивном кристалле BSO обладают большей расходимостью по сравнению с одномерными световыми пучками, поэтому для достижения квазисолитонного режима распространения двумерного гауссова светового пучка требуется большее значение напряженности внешнего электрического поля. Для рассматриваемого в данной статье случая это значение составляет $E_0 = 27$ кВ/см, в то время как для супергауссовых пучков квазисолитонный режим распространения достигается при $E_0 = 31$ кВ/см.

По аналогии с одномерным случаем исследование взаимодействия двумерных световых пучков с линейными ортогональными поляризациями будем проводить при $E_0 = 27$ кВ/см, т.е. при значении внешнего электрического поля, для которого наблюдается квазисолитонный режим распространения двумерного гауссова светового пучка в кристалле BSO толщиной 20 мм.

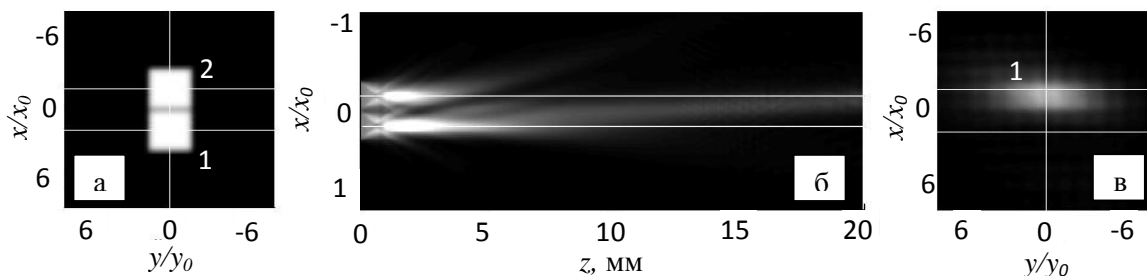


а – двумерные гауссовы пучки на входе в кристалл;
 б – распределение светового поля по толщине кристалла;
 в – положение квазисолитонного пучка 1 на выходе из кристалла

Рисунок 4. – Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных гауссовых световых пучков в кристалле BSO, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле $E_0 = 20$ кВ/см: верхний пучок линейно поляризован ортогонально оси OX , нижний – параллельно оси OX

Для удобства обозначим нижний пучок, который распространяется в квазисолитонном режиме, цифрой 1; управляющий пучок, находящийся в невыгодных условиях, цифрой 2 (рисунок 4а). Из рисунка 4б видно, что пучок 1 отклоняется в сторону пучка 2 и занимает на выходе из кристалла положение, близкое к положению, которое имел на входе в кристалл пучок 2. Так как в кристалле BSO за счет оптической активности наблюдается отток энергии, то на выходе из кристалла для пучка 1 $I/I_d=0.8$.

Проведем аналогичное исследование для двумерных супергауссовых световых пучков (рисунок 5). Распределение интенсивности светового поля на входе в кристалл представлено на рисунке 5а.



а – двумерные супергауссовы пучки на входе в кристалл;
 б – распределение светового поля по толщине кристалла;
 в – положение квазисолитонного пучка 1 на выходе из кристалла

Рисунок 5. – Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в кристалле BSO, помещенном во внешнее постоянное электрическое поле $E_0 = 20$ кВ/см: верхний пучок линейно поляризован ортогонально оси OX , нижний – параллельно оси OX

Из рисунка 5б видно, что аналогично случаю двумерных гауссовых световых пучков происходит отклонение пучка 1 в сторону управляющего пучка 2, но при заданных одинаковых параметрах супергауссов пучок отклоняется меньше, а рассеивается больше $I/I_d=0.4$. Однако нужно иметь в виду, что моделирование проводилось при $E_0 = 27$ кВ/см, а квазисолитонный режим распространения одного супергауссова пучка наблюдается при $E_0 = 31$ кВ/см. Поэтому если увеличить значение внешнего

электрического поля, то возможно улучшение фокусировки пучков, а также увеличение сдвига квазисолитонного пучка 1 (рисунок б).

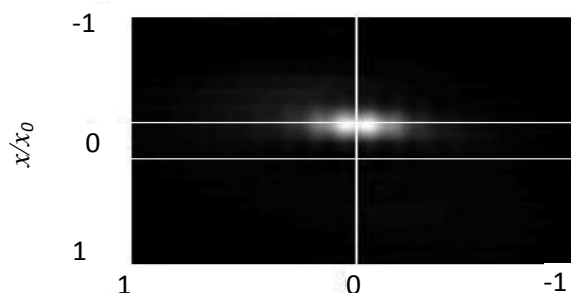


Рисунок б. – Положение квазисолитонного пучка на выходе из кристалла при взаимодействии двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в кристалле BSO и внешнем электрическом поле $E_0 = 31$ кВ/см

Сравнивая результаты взаимодействия двумерных ортогонально поляризованных гауссовых и супергауссовых световых пучков можно сделать вывод, что при заданных параметрах для осуществления управляемой адресной локализации можно использовать оба вида пучков, однако из-за того, что форма супергауссовых пучков значительно изменяется при распространении в кристалле, они больше пульсируют.

Выше было отмечено, что для одномерных световых пучков можно увеличить сдвиг квазисолитонного пучка, если в качестве управляющего используется гауссов, а в качестве ведомого супергауссов световой пучок. Для двумерных световых пучков такое увеличение сдвига квазисолитонного пучка также возможно, но при длине кристалла 20 мм пульсации интенсивности супергауссова светового пучка наблюдаются в большей степени, чем гауссова, поэтому использование таких пучков является преимущественным только при малых значениях толщины кристалла.

Заключение

Установлено, что кубический гиротропный фоторефрактивный кристалл BSO может быть использован для осуществления адресной управляемой локализации как одномерных, так и двумерных световых пучков. Такая локализация может быть использована при проектировании оптических логических устройств и оптических переключателей. Выявлено, что наблюдающийся при таком взаимодействии «breathing effect» не оказывает значительного влияния на величину отклонения световых пучков и проявляется сильнее для случая взаимодействия как одномерных, так и двумерных гауссовых световых пучков, чем при взаимодействии аналогичных супергауссовых световых пучков. Показано, что при заданных параметрах для осуществления управления световыми пучками предпочтительней использовать световые пучки с гауссовым распределением интенсивности. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при проведении экспериментов по наблюдению управляемого отклонения световых пучков.

Выражаем благодарность В.В. Шепелевичу за полезные советы в подготовке статьи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vector photorefractive spatial solitons / M. Segev [et al.] // Opt. Lett. – 1995. – Vol. 20. – P. 1764–1766.

2. Взаимодействие экранирующих солитонов в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2005. – Т. 35, № 4. – С. 351–355.
3. Нелинейное взаимодействие и отражение некогерентных световых пучков / Д. В. Горбач [и др.] // Изв. РАН. Сер. физ. – 2010. – Т. 74, № 12. – С. 1706–1710.
4. Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле / В. В. Давыдовская [и др.] // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 10. – С. 899–906.
5. Влияние оптической активности на самофокусировку световых пучков в кубических фоторефрактивных кристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 5. – С. 446–450.
6. Барковский, Л. М. Ковариантная форма диэлектрического тензора в кристаллах высшей и средней сингоний при векторном взаимодействии / Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров // Кристаллография. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 174–180.
7. Влияние оптической активности на распространение двумерных пространственных солитонов в кубических фоторефрактивных кристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37, № 4. – С. 353–357.
8. Królikowski, W. Photorefractive Solitons / W. Królikowski, B. Luther-Davies, C. Denz // IEEE Journal of Quantum Electron. – 2003. – Vol. 39, № 1. – P. 3–12.
9. Królikowski, W. Photorefractive materials and solitons, Opto-electronics Review / W. Królikowski, B. Luther-Davies, Y. Kivshar // Opt. Electron. Rev. – 2001. – Vol. 9, № 3. – P. 287–292.
10. Mitchel, A. R. Computational Methods in Partial Differential Equations / A. R. Mitchel. – New York : Wiley, 1969. – 255 p.
11. Interaction of two-dimensional spatial incoherent solitons in photorefractive medium / W. Królikowski [et al.] // Appl. Phys. B. – 1999. – Vol. 68. – P. 975–982.
12. Dipole-mode vector solitons in anisotropic photorefractive media / K. Motzek [et al.] // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 197. – P. 161–167.
13. Sun, L. Modified finite-difference beam-propagation method based on the Douglas scheme / L. San, G. L. Yip // Opt. Lett. – 1993. – Vol. 18, № 15. – P. 1229–1231.
14. Incoherent interaction of Gaussian beams in photorefractive optically active crystals / V. V. Shepelevich [et al.] // Appl. Phys. B: Lasers and Optics. – 2008. – Vol. 90, № 1. – P. 149–153.
15. Давыдовская, В. В. Распространение одномерных и двумерных световых пучков различных профилей в фоторефрактивном оптически активном кристалле / В. В. Давыдовская, Ж. В. Колядко, В. В. Шепелевич // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6. – С. 46–51.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.05.2018

Holub A.A., Davydouskaya V.V. Comparison of the Results of Interaction (1 + 1) D and (1 + 2) D Light Beams with Different Profiles and Orthogonal Polarizations in Photorefractive Optically Active Bi₁₂SiO₂₀ Crystal

Using numerical simulation, a theoretical comparison was made of the results of (1 + 1) D and (1 + 2) D Super-Gaussian and Gaussian light beams having linear polarizations orthogonal to each other and propagating in a cubic optically active photorefractive Bi₁₂SiO₂₀ crystal. The possibility of observing the deviations of the interacting light beams is shown. The possibility of using the observed effects in the implementation of optical logic devices is considered.

УДК 530.12,524.6,531

Ю.А. Курочкин

*д-р физ.-мат. наук, доц., зав. центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика»
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by*

**СИСТЕМЫ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ,
СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА – ФОКА***

Показано, что, совершая преобразования типа Леви-Чивита в уравнении Клейна – Фока и разделяя переменные на «поперечные» и «продольные», возможно определение когерентных состояний стандартным образом. Найдены решения преобразованного четырехмерного уравнения в виде координатных и импульсных представлений данных когерентных состояний. «Поперечные» переменные интерпретируются как партонные степени свободы адрона, описываемого скалярным уравнением Клейна – Фока.

Введение

В работе [1] построена феноменологическая модель адрона как когерентного состояния поперечных возбуждений на орисфере релятивистского импульсного пространства Лобачевского, интерпретируемых как партонны. В работе [2] продемонстрирована принципиальная возможность возникновения величин, характеризующих размеры адрона, которые были введены в модели «руками» в рамках теоретико-полевого подхода, – описание движения цветного кварка в постоянном глюонном поле.

Задачи данной работы:

- 1) развитие теоретико-полевых моделей для описания адронов как когерентных состояний поперечных возбуждений, рассматриваемых как партонны;
- 2) установление ограничений, которые накладывает теоретико-полевая модель на исходную феноменологическую модель.

В работе рассмотрим случай уравнения Клейна – Фока, которое используется для описания скалярных релятивистских частиц-мезонов. Как известно, существуют проблемы с введением обычных (не обобщенных в [3]) когерентных состояний в релятивистском случае [4]. Покажем ниже, что применение квадратичных конформных преобразований в комплексной области и их аналога для функций двойного переменного (в литературе такие преобразования часто называют преобразованиями Леви-Чивита [5]) к уравнению Клейна – Фока позволяет ввести когерентные состояния свободной релятивистской частицы и интерпретировать поперечные возбуждения как партонны.

Разделение переменных в уравнении Клейна – Фока на продольные и поперечные и преобразования Леви-Чивита

Будем рассматривать адрон как скалярную частицу, описываемую уравнением Клейна – Фока – Гордона:

$$\partial_{\mu}^2 \varphi(\underline{x}, x_0) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(\underline{x}, x_0). \tag{1}$$

Здесь $\mu = 1, 2, 3, 0$; $x_0 = ct$. В дальнейшем в уравнении (1) полагаем $\hbar = c = 1$, тогда оператор Даламбера

$$\partial_{\mu}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф16Д-003.

Будем искать решение уравнения (1), разделив в нем переменные на «поперечные» x, y и «продольные» z, t . Очевидно, что до введения взаимодействия, выделяющего направление в пространстве, разделение переменных x, y, z на «поперечные» и «продольные» части условно. Тогда решение уравнения (1) представим в виде

$$\varphi(x, x_0) = \varphi_1(x, y)\varphi_2(z, t). \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1) и разделив переменные, получим для «поперечной» части

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial y^2} = k_{\perp}^2 \varphi_1(x, y) \quad (4)$$

и, соответственно, для «продольной» части

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2(z, t)}{\partial t^2} = k_{\parallel}^2 \varphi_2(z, t) = (m^2 - k_{\perp}^2) \varphi_2(z, t). \quad (5)$$

Осуществим следующие замены переменных в (4): $\varphi_1(x, y) \rightarrow \Phi_1(\eta, \xi)$ – и проведем комплексификацию $x + iy = (\eta + i\xi)^2 = \eta^2 - \xi^2 + 2i\eta\xi$. Тогда это уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(\eta, \xi)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1(\eta, \xi)}{\partial \xi^2} = 4k_{\perp}^2 (\eta^2 + \xi^2) \Phi_1(\eta, \xi). \quad (6)$$

В уравнении (5) сделаем замены: $(jz + t) = (\chi + j\zeta)^2 = j(\chi^2 + \zeta^2) + 2\chi\zeta$ и $\varphi_2(z, t) \rightarrow \Phi_2(\chi, \zeta)$.

Здесь нами использовались аналитические функции, определенные над двойными числами, для которых $j^2 = 1$. При этом вместо (6) получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial \zeta^2} = 4(m^2 - k_{\perp}^2)(\chi^2 - \zeta^2) \Phi_2(\chi, \zeta). \quad (7)$$

Отметим, что в случае комплексных чисел и замены переменных $(x, y) \rightleftharpoons (\eta, \xi)$ якобиан преобразования не имеет особенностей и следовательно взаимно однозначное соответствие переменных обеспечено. Условием взаимно однозначности переменных при преобразовании $(z, t) \rightleftharpoons (\chi, \zeta)$ является условие неравенства нулю якобиана преобразования, т.е. $\chi^2 - \zeta^2$.

Данное условие не тривиально из-за отсутствия делимости в системе двойных чисел. Однако оно выполняется на плоскости переменных (χ, ζ) , за исключением биссектрис.

Так отображаются особенности светового конуса, которые, очевидно, проявляются и у исходных переменных. Условие $\chi^2 - \zeta^2 \neq 0$ необходимое, но недостаточное. Требуется, чтобы данное условие удовлетворяло требованию времениподобности, накладываемому на исходные координаты, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 < t^2$. В новых переменных η, ξ, χ, ζ данное условие выглядит так $(\chi^2 - \zeta^2)^2 > (\eta^2 + \xi^2)^2$, или $\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 < \chi^2$. Оно непротиворечиво и всегда может быть реализовано.

Определение когерентных состояний

Теперь обратимся к уравнению (6), учитывая, что именно поперечные возбуждения интерпретировались в [1] как партоны (составляющие адронов) и именно для та-

ких состояний во внешнем поле в релятивистском случае еще возможно введение когерентных состояний. Данное уравнение является уравнением осцилляторного типа. Сформулируем его в терминах когерентных состояний. Для этого перепишем как

$$L_1 \Phi_1(\eta', \xi') = \frac{\partial^2 \Phi_1(\eta', \xi')}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1(\eta', \xi')}{\partial \xi'^2} - (\eta'^2 + \xi'^2) \Phi_1(\eta', \xi') = 0, \quad (8)$$

где $\eta' = 2\sqrt{k_\perp} \eta$, $\xi' = 2\sqrt{k_\perp} \xi$, и введем операторы рождения и уничтожения

$$a_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi' \mp \frac{\partial}{\partial \xi'}), \quad a_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta' \mp \frac{\partial}{\partial \eta'}). \quad (9)$$

При этом оператор уравнения (8) может быть выражен через операторы (9) как

$$L_1 = -2(a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + 2). \quad (10)$$

В уравнении (6) введем новые переменные $\chi' = 2\sqrt{m^2 - k_\perp^2} \chi$, $\zeta' = 2\sqrt{m^2 - k_\perp^2} \zeta$. Тогда оно примет вид:

$$L_2 \Phi_2(\chi', \zeta') = \frac{\partial^2 \Phi_2(\chi', \zeta')}{\partial \chi'^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2(\chi', \zeta')}{\partial \zeta'^2} - (\chi'^2 - \zeta'^2) \Phi_2(\chi', \zeta') = 0. \quad (11)$$

Введем операторы рождения и уничтожения связанные с уравнением (11):

$$b_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \mp \frac{\partial}{\partial \chi'}), \quad b_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta' \mp \frac{\partial}{\partial \zeta'}). \quad (12)$$

Оператор L_3 выражается через операторы (12) следующим образом:

$$L_1 = -2(b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^-). \quad (13)$$

Для каждой пары операторов рождения и уничтожения (9), (13) справедливы соотношения:

$$[a_k^-, a_l^+] = \delta_{kl} I, [a_k^+, a_l^+] = [a_k^-, a_l^-] = [a_k^-, I] = [a_k^+, I] = 0, \quad (14)$$

где $k, l=1, 2$ соответствуют η' или ξ' ,

$$[b_k^-, b_l^+] = \delta_{kl} I, [b_k^+, b_l^+] = [b_k^-, b_l^-] = [b_k^-, I] = [b_k^+, I] = 0. \quad (15)$$

Когерентные состояния, как известно, определяются как собственные состояния операторов уничтожения с комплексными собственными значениями:

$$a_1^- |\alpha_1\rangle = \alpha_1 |\alpha_1\rangle, \quad a_2^- |\alpha_2\rangle = \alpha_2 |\alpha_2\rangle. \quad (16)$$

Соответственно, для b_k^\mp :

$$b_1^- |\beta_1\rangle = \beta_1 |\beta_1\rangle, \quad b_2^- |\beta_2\rangle = \beta_2 |\beta_2\rangle. \quad (17)$$

В модели адрона, предложенной в работе [1], партоны, составляющие адрона, рассматривались как поперечные возбуждения (когерентные возбуждения на орисфере релятивистского импульсного пространства).

Орисфера выбиралась ортогональной оси z , которая совпадала с направлением распространения налетающей частицы и осью пучка параллельных прямых в импульсном пространстве Лобачевского, т.е. перпендикулярной орисфере.

Модель носила фе-номенологический характер и не была подчинена каким-либо уравнениям типа (1), (8) и (11). Квадрат модуля собственных значений операторов уничтожения на орисфере, определяемый выражениями типа (16) и (17), отождествлялся с числом партонов.

Проанализируем, могут ли поперечные возбуждения как когерентные состояния, определяемые формулами (8), (9), (14), (16), возникать у скалярной частицы, описываемой релятивистским волновым уравнением (1).

Диагональный матричный элемент от оператора (10) в обкладках когерентных состояний (16) дает

$$-2(n_1 + n_2 + 2) = 0, \quad (18)$$

т.е. ведет к противоречию, выражение (18) нереализуемо.

Для выражений (11), (12) и (17) соответствующий матричный элемент равен

$$-2(n_3 - n_4) = 0, \quad (19)$$

не противоречив. Выражение (19) способствует разрешению противоречия, возникающего в связи с (18).

Умножим уравнение (8) на $\Phi_2(\chi', \zeta')$, а уравнение (11) на $\Phi_1(\eta', \xi')$ и сложим. В результате получим уравнение:

$$(L_1 + L_2)\Phi_1(\eta', \xi')\Phi_2(\chi', \zeta') = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta'^2} \Phi_2 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi'^2} \Phi_2 + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \chi'^2} \Phi_1 - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \zeta'^2} \Phi_1 - \\ - (\eta'^2 + \xi'^2 + \chi'^2 - \zeta'^2)\Phi_1\Phi_2 = 0. \quad (20)$$

или

$$(L_1 + L_2)\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi'^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta'^2} - (\eta'^2 + \xi'^2 + \chi'^2 - \zeta'^2)\Phi = 0, \quad (21)$$

где $\Phi = \Phi_1\Phi_2$.

В результате мы получили инвариантное относительно преобразований SO(3.1) группы уравнение, очевидным образом связанное с уравнением (1).

Для него, записанного в терминах операторов рождения и уничтожения и чисел заполнения, справедливо

$$a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^- + 2 = n_1 + n_2 + n_3 - n_4 + 2 = 0. \quad (22)$$

Указанное условие аналогично условию того, что частица, описываемая уравнением (1), лежит на массовой оболочке, и очевидно, что данное выражение не противоречиво.

Координатные и импульсные представления когерентных состояний в новых переменных

Решение уравнения (21) в координатном $(\eta', \xi', \chi', \zeta')$ представлении при условии (22) дается выражением:

$$\langle \eta', \xi', \chi', \zeta' | | \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle = \Phi(\eta', \xi', \chi', \zeta') = \frac{1}{\pi} e^{i(\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_2 \alpha''_2 + \beta'_1 \beta''_1 - \beta'_2 \beta''_2)} \times \times e^{i\sqrt{2}(\alpha''_1 \eta' + \alpha''_2 \xi' + \beta''_1 \chi' - \beta''_2 \zeta')} \times e^{-\frac{1}{2}[(\eta' - \sqrt{2}\alpha''_1)^2 + (\xi' - \sqrt{2}\alpha''_2)^2 + (\chi' - \sqrt{2}\beta''_1)^2 - (\zeta' - \sqrt{2}\beta''_2)^2]} \quad (23)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha'_1 + i\alpha''_1, \alpha_2 = \alpha'_2 + i\alpha''_2, \beta_1 = \beta'_1 + i\beta''_1, \beta_2 = \beta'_2 + i\beta''_2$.

Импульсное представление в смысле операторов $i\partial/\partial\eta', i\partial/\partial\xi', i\partial/\partial\chi', i\partial/\partial\zeta'$ с собственными значениями $p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'}$ имеет вид:

$$\langle p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'} | | \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle = \Phi(p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'}) = \frac{1}{\pi} e^{-i(\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_2 \alpha''_2 + \beta'_1 \beta''_1 - \beta'_2 \beta''_2)} \times \times e^{-i\sqrt{2}(\alpha'_1 p_{\eta'} + \alpha'_2 p_{\xi'} + \beta'_1 p_{\chi'} - \beta'_2 p_{\zeta'})} \times e^{-\frac{1}{2}[(p_{\eta'} - \sqrt{2}\alpha''_1)^2 + (p_{\xi'} - \sqrt{2}\alpha''_2)^2 + (p_{\chi'} - \sqrt{2}\beta''_1)^2 - (p_{\zeta'} - \sqrt{2}\beta''_2)^2]} \quad (24)$$

Следует отметить, что большими поперечные возбуждения (большие n_1, n_2) могут быть только при большом n_4 . Такая картина находится в соответствии с тем, что значительное количество поперечных возбуждений, отождествляемых с партонами, может возникнуть только при больших энергиях.

Заклучение

В работе показано, что, совершая преобразования типа Леви-Чивита в уравнении Клейна – Фока и разделяя переменные на «поперечные» и «продольные», как это диктуется новыми введенными переменными, возможно определение когерентных состояний стандартным образом.

Найдены решения уравнения Клейна – Фока в виде координатных и импульсных представлений данных когерентных состояний во введенных переменных. «Поперечные» переменные интерпретируются как партонные степени свободы адрона, описываемого скалярным уравнением Клейна – Фока.

Установлено, что в данном подходе число партонов зависит от энергии и продольных степеней свободы.

Важно отметить, что уравнение (21) взаимноинвариантно, или, как следует из выражения (22), система инвариантна относительно преобразований группы SU(3.1) [6].

Автор благодарит участников семинара лаборатории теоретической физики за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. On describing quark in external gluon field of magnetic type / Y. A. Kurochkin [et al.] // Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2017. – № 4. – P. 39–43.
2. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] // Письма в ЭЧАЯ. – 2016. – Т. 13, № 3 (201). – С. 454–460.
3. Переломов, А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. – М. : Наука, 1987. – 268 с.
4. Точные решения релятивистских волновых уравнений / В. Г. Богров [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1982. – 143 с.
5. Coulomb-Oscillator duality in space of constant curvature / E. G. Kalnins [et al.] // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41, № 5. – P. 2629–2657.

6. Курочкин, Ю. А. О параметризации преобразований комплексной группы Лоренца для пространств с вещественной метрикой / Ю. А. Курочкин, Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 159–163.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.02.2019

Kurochkin Yu.A. The Coherent States which Connected with Klein – Fock Equation

In this paper it is shown that by performing Lévy-Civita transformations in the Klein – Fock equation and dividing the variables into «transverse» and «longitudinal» variables, it is possible to define coherent states in a standard way. Solutions of the transformed four-dimensional equation are found in the form of coordinate and momentum representations of these coherent states. The «transverse» variables are interpreted as the parton degrees of freedom of the hadron described by the scalar Klein – Fock equation. It is established that in this approach the number of partons depends on the energy and longitudinal degrees of freedom.

УДК 538.9

**В.А. Лиопо¹, И.А. Лявшук², Е.В. Овчинников³,
А.В. Сабуть⁴, С.С. Секержицкий⁵**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

²ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

³д-р техн. наук, доц., зам. декана по научной работе

факультета инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

⁴канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

⁵канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: Sekerzhitsky@rambler.ru

«ВЕС» УЗЛА ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ В ОПИСАНИИ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛОВ

Рассмотрена связь между прямой и обратной решетками кристаллов с учетом «веса» узла обратной решетки. «Вес» численно равен структурной амплитуде кристаллической плоскости, которую отображает узел обратной решетки. Для кристаллов с непримитивной ячейкой можно рассчитать положение всех узлов обратной решетки, но некоторые из них имеют нулевой «вес». Такие узлы тождественны любой точке обратной решетки, не совпадающей с каким-либо узлом. Для таких решеток необходим переход от ячейки к суперъячейке обратной решетки. Приведены примеры из квантовой теории кристаллов, когда необходимо переходить от ячейки к суперъячейке.

Введение

Кристаллы – решеточные атомно-молекулярные системы. Это означает, что для любого направления, проходящего через произвольный и через ближайший, гомологичный ему, атом на расстоянии \vec{a} , можно определить положение на этой линии любого атома $\vec{r}_n = n\vec{a}$ ($n = 1, 2, \dots$). Вектор \vec{a} определяет параметр описанной цепочки атомов, называемой одномерной решеткой. Три разных некопланарных направления формируют пространственную решетку, в которой выделяют параметры $\vec{a}_j = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, а построенный на их основе параллелепипед является ячейкой этой решетки. Эта ячейка кристалла позволяет построить решетки с параметрами $\vec{a}_j^* = (\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$, которые связаны с параметрами ячейки прямой решетки условием $(\vec{a}_k \cdot \vec{a}_j^*) = (\vec{a}_j \cdot \vec{a}_k^*) = \delta_{jk}$, где $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$ и $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$. Так как размерность \vec{a}_j^* обратна линейной, то эта решетка называется обратной. Термин «обратная решетка» широко используется в современной теории кристаллов. Однако в большинстве случаев не учитывается, что узлы обратной решетки соответствуют только геометрическому распределению, но отличаются друг от друга по их «вкладу» в свойства кристалла. Таким образом, наряду с положением узла обратной решетки, необходимо учитывать его «вес».

Положение и «вес» узла обратной решетки

В кристалле с его решеточной структурой в идеальном случае все ячейки абсолютно одинаковы (гомологичны). Другими словами, то, что приведено в произвольной ячейке кристаллической решетки, обязательно есть и в исходной ячейке. Ячейка кристалла является своеобразным атомом структуры. Ориентацию любой плоскости из па-

кета гомологичных плоскостей можно описать через ориентацию одной из них. Выбирается та, которая находится ближе всего к началу координат. Система координат в кристалле в общем случае косоугольная. Оси идут вдоль ребер ячейки. За единицу измерения расстояния выбирают ребро ячейки. Если выбранная плоскость отсекает от координатных осей отрезки x, y, z (в единицах a, b, c соответственно), то $x, y, z \leq 1$ и $h = \frac{1}{x}, k = \frac{1}{y}, l = \frac{1}{z}$ – целые числа (hkl) .

Эти три целых числа (hkl) называются кристаллографическими индексами плоскости $d(hkl)$ вследствие того, что одна из плоскостей пакета трансляционно-тождественных плоскостей с межплоскостным расстоянием d проходит через точку $[0,0,0]$. Величина d имеет векторный смысл. Каждая плоскость (весь пакет тождественных плоскостей) в обратной решетке отображается точкой $[1; 2]$.

На рисунке 1 приведен аксиальный вектор \vec{d} в пространстве кристалла и узел $(*)$, отображающий плоскость $d(hkl)$.

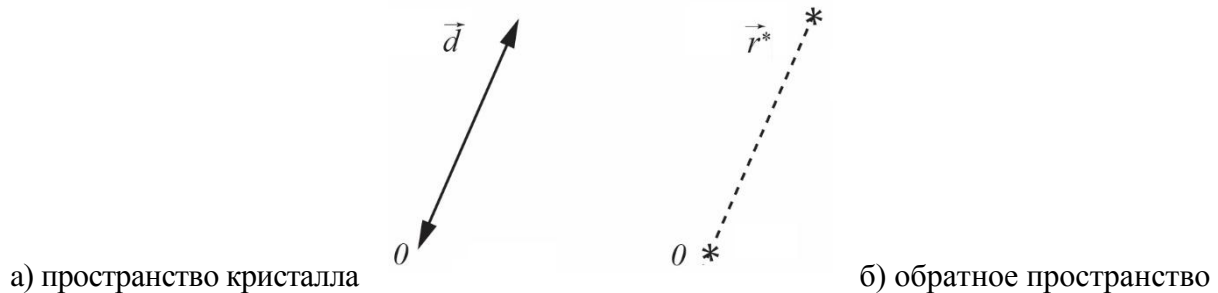


Рисунок 1. – Аксиальный вектор и узел

При этом

$$\vec{d} \parallel \vec{r}^*, (\vec{r}^* \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{r}^*) = 1. \quad (1)$$

В обратной решетке все узлы имеют целочисленные координаты (в единицах a^*, b^*, c^*). Эти целые числа и являются индексами (hkl) , (x, y, z) – в прямом пространстве. При известных базисах \vec{a}_j и \vec{a}_j^* , $(j=1,2,3)$ переходим к декартовым координатам (X, Y, Z) :

$$\begin{cases} (X, Y, Z) = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \\ (X^*, Y^*, Z^*) = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^* \end{cases} \quad (2)$$

Межплоскостное расстояние d определяется по формуле Вульфа – Брэгга:

$$2d \sin \theta = n\lambda. \quad (3)$$

Здесь $\frac{d}{n} \equiv d(hkl)$, λ – длина волны излучения (рентгеновского, электронного, нейтронного), θ – угол скольжения.

Отсюда:

$$S = \frac{2 \sin \theta}{\lambda}, \quad (4)$$

для кристалла $S = r^*$, при этом S можно определить для объекта с произвольной структурой при использовании понятия обратного пространства.

Рассмотрим результат взаимодействия рентгеновских лучей, рассеянных на двух рассеивающих центрах (рисунок 2):

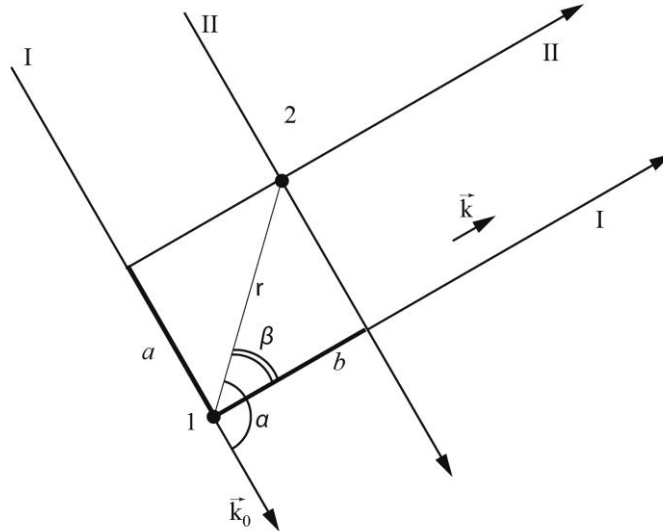


Рисунок 2. – Рассеяние рентгеновских лучей на двух рассеивающих центрах

На два рассеивающих центра падают два луча (1, 2) соответственно. Амплитуды рассеянных лучей равны A_1 и A_2 . Результирующая амплитуда равна:

$$A_{1,2} = A_1 + A_2 \exp\{i\varphi_2\}, \quad (5)$$

т.е. фаза φ_1 принята за начальную ($\varphi_1 = 0$).

Фаза φ_2 зависит от разности хода лучей 1 и 2 до и после рассеяния. Как видно из рисунка 2, $a = -(\vec{r} \cdot \vec{k}_0)$, $b = (\vec{r} \cdot \vec{k})$.

Следовательно, φ_2 как разность фаз между A_1 и A_2 равна (Δ – разность хода):

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}}{\lambda} = 2\pi rS, \quad (6)$$

т.е. (5) примет вид:

$$A_{1,2}(S) = \sum_{j=1}^2 A_j \exp\{2\pi i r_j S\}, \quad (7)$$

в рассматриваемом случае $n = 2$.

Если пару (1, 2) (рисунок 2) рассматривать как единый рассеивающий центр с рассеивающей способностью (7), то амплитуда луча на n центрах равна:

$$A_{1,\dots,n}(S) = \sum_{i=1}^n f_i \exp\{2\pi i r_i S\}. \quad (8)$$

Заметим, что эта формула применима для объекта с произвольной структурой.

Для определения смысла вектора \vec{S} рассмотрим известную схему [6]. Вокруг образца в точке O построим сферу, радиус которой $\frac{1}{\lambda}$, как и на рисунке 2; \vec{k}_0 и \vec{k} – единичные векторы направления падающего и рассеянного лучей.

Образец является кристаллом, и пусть для направления \vec{k} выполняется условие Вульфа – Брэгга $\frac{2d \sin \varphi}{2} = \lambda$, где φ – угол дифракции между векторами \vec{k}_0 и \vec{k} , причем $\varphi = 2\theta$. Из схемы на рисунке 3 следует, что $O'R = 2OR \cdot \sin \theta$.

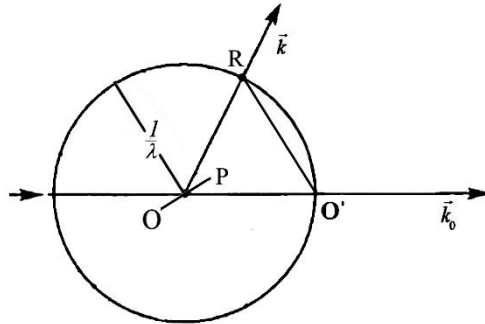


Рисунок 3. – Определение вектора $\vec{S} = \frac{\vec{k} - \vec{k}_0}{\lambda}$

$$\text{Вектор } \vec{O'R} = \frac{\vec{k}}{\lambda} - \frac{\vec{k}_0}{\lambda} = \frac{\vec{k} - \vec{k}_0}{\lambda} = \vec{S},$$

то есть:

$$\vec{S} = \frac{2 \sin \theta}{\lambda} = \frac{1}{d}. \quad (9)$$

$$(\vec{S} \cdot \vec{d}) = 1$$

Вектор \vec{S} как и вектор \vec{d} перпендикулярны плоскости рассеяния P .

Формула (7) основана на представлении рассеивающего объекта как дискретной системы, состоящей из отдельных рассеивающих центров (атомов, ионов) с радиус-вектором (\vec{r}) и с рассеивающей способностью f .

В теории твердого тела в качестве рассеивающего центра берется электрон (рентгеновский анализ), либо электростатический потенциал (электронография), либо дельтаобразная ядерная функция (Δ -функция).

При изучении структурно-энергетических свойств веществ основное внимание уделяется распределению электронов, так как они играют решающую роль в межатомном взаимодействии. Рассеивающая способность свободного электрона принимается за единицу. Следовательно, точка с радиус-вектором \vec{r} , имеющая электронную плотность $\rho(r)$, характеризуется именно такой рассеивающей способностью $\rho(r)$ [3].

Формула (7) при учете функции $\rho(r)$ примет вид:

$$A(S) = \int_V \rho(\vec{r}) \exp\{2\pi i(\vec{S} \cdot \vec{r})\} dV. \quad (10)$$

Интегрирование проводится по всему рассеивающему объему образца.

Формулы (7), (10) справедливы для объекта с произвольной структурой. Следовательно, они применимы и для описания рассеяния рентгеновского излучения для кристаллов [4; 5]. Функции S и ρ приведены выражениями (2) с учетом (9) получим:

$$A(S) \Rightarrow F(hkl) = \sum_{j=1}^N f_j \exp\{2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)\}, \quad (11)$$

или в интегральной форме:

$$A(S) \Rightarrow F(hkl) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho(x, y, z) \exp\{2\pi i (hx + ky + lz)\} dx dy dz. \quad (12)$$

Введенная функция $F(hkl)$ называется структурной амплитудой, которая имеет следующие свойства:

- 1) функция $F(hkl)$ определяет интенсивность рентгеновского рефлекса «отраженного» от плоскости (hkl) ;
- 2) эта функция для идеального кристалла определяет «вес» узла обратной решетки с индексами (hkl) ;
- 4) «вес» любой точки обратной решетки вне ее узлов равен нулю;
- 5) дискретная функция $F(hkl)$ и непрерывная функция $\rho(x, y, z)$ являются трансформантами Фурье, т.е.:

$$\rho(xyz) = \sum_h \sum_k \sum_l F(hkl) \exp\{2\pi i (hx + ky + lz)\}. \quad (13)$$

Выражения (11–13) – это различные формы записи второй основной формулы структурного анализа.

«Вес» узлов обратной решетки кристаллов с непримитивными ячейками Бравэ

Базис ячеек Бравэ описывается координатами узлов, принадлежащих данной ячейке, и имеют вид:

примитивная (P -решетка) (000) ;

объемноцентрированная (I -решетка) (000) , $\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$;

гранецентрированная (F -решетка) (000) , $\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0\right)$, $\left(\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}\right)$, $\left(0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$;

базоцентрированная (C -решетка) (000) , $\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0\right)$.

Если центрированы грани b, c или a, c , то такие решетки относят к A - или B -типу. Решетки A, B -типов тождественны C -решетке при изменении обозначений координатных осей. Рассмотрим $F(hkl)$ для различных решеток Бравэ из условия (11):

P -решетка:

$$F(hkl) = \sum_{j=1}^N f_j \exp\{2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)\}; \quad (14)$$

I -решетка:

$$F(hkl) = [1 + \exp\{\pi i(h+k+l)\}] \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} f_j \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)\}; \quad (15)$$

F -решетка:

$$F(hkl) = [1 + \exp\{\pi i(h+k)\} + \exp\{\pi i(k+l)\} + \exp\{\pi i(l+h)\}] \sum_{j=1}^{\frac{N}{4}} f_j \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)\}; \quad (16)$$

C -решетка:

$$F(hkl) = [1 + \exp\{\pi i(h+k)\}] \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} f_j \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)\}. \quad (17)$$

Суммирование в формулах (15–17) проводится по атомам, не связанным друг с другом репером Бравэ. Как видно из формулы (14), на значения $F(hkl)$ для решеток *P*-типа никаких ограничений на индексы не накладывает. «Вес» узлов обратной решетки для кристаллов *I*-типа имеют ненулевые значения только при $h+k+l=2n$ (n – целое число). Для решетки *F*-типа $F(hkl) \neq 0$ только при одинаковой четности индексов (hkl). Для *C*-типа решетки сумма ($h+k$) должна быть четной.

Ячейка обратной решетки кристалла зависит от $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ решетки кристалла. Базисные векторы $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ являются радиус-векторами узлов обратной решетки (100), (010), (001) соответственно. На векторах $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ строится параллелепипед, внутри которого не может быть никаких узлов обратной решетки, так как координаты таких узлов будут иметь значения $h_j < 1$, что невозможно [6; 7]. Кроме этого узел (100) должен иметь ненулевой «вес». В противном случае физический смысл этих вершин ячейки будет такой же, как и у любой точки обратного пространства, не совпадающей с узлом обратной решетки.

Следовательно, радиус-векторы узлов на координатных осях обратной решетки с наименьшими модулями имеют значения:

P -решетка: (100), (010), (001);

F - и *I* -решетки: (200), (020), (002);

C -решетка: (200), (020), (001).

Поэтому следует говорить о суперъячейках для решеток кристаллов *F, I, C*-типов. В суперъячейке обратной решетки *F*-типа находится узел с ненулевым «весом» (111). В обратной суперъячейке кристалла с решеткой *I*-типа ненулевыми $F(hkl)$ будут узлы (110), (101), (011), (112), (121), (211), т.е. суперъячейка будет гранецентрированной.

Для кристаллов с *F*-решеткой суперъячейка их обратной решетки будет объемно-центрированной.

Обратная решетка в квантовой кристаллофизике

Обратная решетка в теории дифракции играет основную роль, так как сама дифракционная картина определяется сечением этой решетки сферой Эвальда. «Вес» узла решетки и его координаты $F(hkl)$ являются основными параметрами для расчета элек-

тронной плотности, как структурной функции [5]. Но и при изучении квантовых свойств кристаллов обратная решетка играет важную роль.

Теорема Блоха

Волновая функция электрона в общем случае имеет вид

$$\psi(\vec{r}t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(Et - (\vec{k} \cdot \vec{r}))\right\} \quad (18)$$

и является собственной функцией оператора Гамильтона \hat{H} в уравнении Шредингера (стационарное состояние):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) + U(\vec{r})\right]\psi = \hat{H}\psi = E\psi. \quad (19)$$

Здесь E , как собственное значение оператора, зависит от функции потенциала $U(\vec{r})$. Для свободного электрона собственное значение – величина постоянная и принимается за единицу.

Электрон в кристалле находится в поле периодического потенциала, так как в кристалле имеется такой элемент симметрии, как трансляция. Оператор трансляции \hat{T} действует на функцию $\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z)$ следующим образом:

$$\hat{T}\psi(x, y, z) = \psi(x + m, y + n, z + p). \quad (20)$$

Поскольку координаты x, y, z – кристаллографические, то m, n, p – целые числа. Для изучения действия оператора \hat{T} на функцию $\psi(x, y, z)$ следует проанализировать, является ли эта функция собственной функцией этого оператора, которая имеет такой же смысл для оператора \hat{H} . Если операторы \hat{H} и \hat{T} коммутируют, то $\psi(x, y, z)$ – это собственная функция и оператора \hat{T} .

С учетом (19) и (20) рассмотрим следующую последовательность действий:

$$\begin{aligned} \hat{T}\hat{H}\psi(x, y, z) &= \hat{T}E\psi(x, y, z) = E\hat{T}\psi(x, y, z) = E\psi(x + m, y + n, z + p) = \\ &= \hat{H}\psi(x + m, y + n, z + p) = \hat{H}\hat{T}\psi. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, волновая функция как собственная функция оператора \hat{H} является собственной функцией и коммутирующего с \hat{H} оператора \hat{T} :

$$\hat{T}\psi(x) = C\psi(x) = \psi(x + m). \quad (22)$$

При любой трансляции собственное значение оператора \hat{T} сохраняется:

$$\hat{T}_{(-m)}\psi(x - m) = C\psi(x) \equiv \psi(x). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует:

$$\begin{aligned} \hat{T}\hat{T}\psi(x) &= C^2\psi(x) = \psi(x) \\ C^2 &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Так как оператор \hat{T} действует на периодическую функцию, то и его собственное значение должно быть записано в виде волновой функции:

$$C = \exp\{ikm\}, \quad (25)$$

или в трехмерном случае:

$$C = \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{t})\}, \quad (26)$$

где \vec{k} – волновой вектор, \vec{t} – вектор трансляции.

Выражения (25) и (26) определяют соответственно одно- и трехмерную волну Блоха (блоховскую волну). Функции $\exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{t})\}$, ($k = 1, 2, \dots, \infty$) образуют мультипликативную группу, гомологичную аддитивной группе трансляций [8]. Таким образом, волновая функция электрона в поле периодического потенциала имеет тот же вид $\psi(x)$, что и для свободного электрона, но амплитуда не является постоянной величиной, а описывается волновой блоховской функцией, имеющей вид (25) в единицах базисных векторов или в абсолютных единицах:

$$C_m(x) = \exp\{2\pi i(m\vec{k} \cdot \vec{a})\}. \quad (27)$$

То же для y и z -осей. Значение m меняется от единицы до $m_{\max} = M = \frac{L_x}{a}$, где L_x – размер кристалла вдоль оси x .

Суперпозиция блоховских волн для кристалла определяется условием:

$$C_M = \sum_{m=1}^M \exp\{i(m\vec{k} \cdot \vec{a})\}. \quad (28)$$

Следовательно, результирующая волна Блоха определяется суммой членов геометрической прогрессии, первый элемент и знаменатель которой равен $\exp\{\pi i k a\}$.

Отсюда,

$$C_M = \frac{\exp\{i(M+1)(\vec{k} \cdot \vec{a})\} - \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{a})\}}{\exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{a})\} - 1} = \frac{\exp\{iM(\vec{k} \cdot \vec{a})\} - 1}{1 - \exp\{-i(\vec{k} \cdot \vec{a})\}}. \quad (29)$$

Из условия $C_M \cdot C_M^* = 1$ (24) следует $\frac{1 - \cos(M(\vec{k} \cdot \vec{a}))}{1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{a})} = 1$, отсюда $\cos(M(\vec{k} \cdot \vec{a})) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{a})$,

то есть:

$$M(\vec{k} \cdot \vec{a}) = (\vec{k} \cdot \vec{a}) + 2\pi n. \quad (30)$$

Так как, $Ma = L_x$, то:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n. \quad (31)$$

Учитывая, что $L_x \gg a$, и переходя к трехмерному случаю, можно записать:

$$\vec{k} = k_x \vec{n}_x + k_y \vec{n}_y + k_z \vec{n}_z = \frac{2\pi}{L_x} \vec{n}_x + \frac{2\pi}{L_y} \vec{n}_y + \frac{2\pi}{L_z} \vec{n}_z.$$

Поскольку значения $k_i, L_i, (i = 1, 2, 3)$ даны в абсолютных координатах (27), то:

$$k = \frac{(2\pi)^3}{V} n_x n_y n_z, \quad (32)$$

т.е. волновой вектор $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ занимает объем в пространстве волнового вектора:

$$k = \frac{(2\pi)^3}{V} = \frac{(2\pi)^3}{M V_1} = \frac{(2\pi)^3 V_1^*}{M} n_x n_y n_z. \quad (33)$$

Волновой вектор занимает объем, зависящий от объема ячейки обратной решетки кристалла, и величина этого объема является квантованной, причем размер этого объема минимален при $n_x n_y n_z = 1$. При геометрическом описании формула (33) для k_{min} примет вид:

$$k_{min} = \frac{(2\pi)^3}{V}, \quad (34)$$

который называется граничными условиями Борна – Кармана [9], являющимися следствием теоремы Блоха. Учитывая, что объем кристалла

$$V = N V_1 = \frac{N}{V_1^*}, \quad (35)$$

где V_1, V_1^* – соответственно объемы ячеек прямой и обратной решеток, необходимо переходить от ячейки обратной решетки к суперъячейке, т.е. при анализе функции Блоха на значение k никаких ограничений не накладывается. Рассматривается только трансляция в прямом пространстве. Поскольку вектор \vec{k} квантован, то волновые состояния должны учитывать суперъячейку в соответствии с условием:

$$k = \frac{(2\pi)^3 V_s^*}{M} = \frac{(2\pi)^3 V_s^* \omega}{M}, \quad (36)$$

где ω равно отношению объемов суперъячейки и ячейки обратного пространства. Причем $\omega = n_x n_y n_z$, где n_j – квантовые числа в (32) и (33).

Оператор конгруэнтного преобразования

Наряду с трансляционными преобразованиями, кристаллы описываются группами точечной симметрии. Эти группы соответствуют такому пространственному движению объекта, при котором, по крайней мере, одна точка остается неподвижной. С этой точкой совмещается начало координатной системы (x, y, z) .

При выполнении операции точечной симметрии оси (x, y, z) перейдут в положение (x', y', z') . Координатные системы (x, y, z) и (x', y', z') являются ортогональными, т.е. в этом случае необходимо переходить от кристаллографической системы к кристаллофизической системе [6]. Такое точечное преобразование описывается нормальной матрицей вида:

$$M = \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{vmatrix} = |Cx_i^j x_j|_{i,j=1,2,3} = |C_{ij}|_{i,j=1,2,3}. \quad (37)$$

Поворот на угол $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ вокруг оси z описывается матрицей:

$$R^k(n) = \begin{vmatrix} \cos\left(k \frac{360^\circ}{n}\right) & -\sin\left(k \frac{360^\circ}{n}\right) & 0 \\ \sin\left(k \frac{360^\circ}{n}\right) & \cos\left(k \frac{360^\circ}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_n^k & -S_n^k & 0 \\ S_n^k & C_n^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |C_{ij}|_{i,j=1,2,3}. \quad (38)$$

Здесь R_n^1 является матрицей-генератором циклической группы $R_n^k (k=1, \dots, n)$.

При этом

$$R_n^{k=n} = I, R_n^k \cdot R_n^{n-k} = I. \quad (39)$$

При действии R_n^k на точку с координатами (x, y, z) (в исходной системе) точка проходит в гомологичное положение по обычным правилам.

Множество матриц (38) при $k=1, 2, \dots, n$ образуют циклическую мультипликативную группу, описывающую симметричные повороты объекта вокруг оси z на угол $\alpha = \frac{2\pi k}{n}, (k=1, 2, \dots, n)$.

Рассмотрим оператор вращения \hat{R} , действие которого на функцию $\Psi(x, y, z)$ определяется условием:

$$\hat{R}\Psi(x, y, z) = \Psi(x, y, z | |C_{ij}|), \quad (40)$$

где $|C_{ij}|$ – любой элемент группы поворота, одна из 3×3 матриц где $|x, y, z|$ – матрица-строка исходной точки.

Так как

$$\begin{cases} \hat{R}\Psi(x, y, z) = \Psi(x, y, z | |C_{ij}|)_{i,j=1,2,3}, \\ \hat{H}\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z) \end{cases}, \quad (41)$$

то

$$\hat{R}\hat{H}\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z | |C_{ij}|) = \hat{H}\Psi(x, y, z | |C_{ij}|) = \hat{H}\hat{R}\Psi(x, y, z).$$

Следовательно, волновая функция электрона в кристалле является собственной функцией оператора симметричного вращения.

В этом случае можно записать:

$$\hat{R}\Psi(x, y, z) = C\Psi(x, y, z),$$

отсюда:

$$\hat{R}[C\Psi(x, y, z)] = C^2\Psi(x, y, z).$$

Пусть последовательность поворотов определяется $C_1 \Leftrightarrow |C_{ij}|^k$, $C_2 \Leftrightarrow |C_{ij}|^{n-k}$, т.е. $C^2 = 1$. Собственное значение C можно представить в виде:

$$C = \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}k\right\}.$$

Функция $\exp\left\{\frac{2\pi i}{n}k\right\}$ при $k=1$ является генератором циклической группы изоморфной точечной группы вращения. Трансляция в собственном значении оператора вращения отсутствует. Это же можно показать и для других точечных симметрий: центр симметрии, плоскость симметрии и инверсионное вращение.

Точечная симметрия позволяет определить симметрию параметров физических свойств кристаллов как континуальных объектов, что соответствует приведенному выводу, относящемуся к собственному значению операторов точечных преобразований.

Суперъячейка обратной решетки и зоны Бриллюэна

Необходимость введения понятия суперъячейки обратной решетки особенно наглядно проявляется в зонной теории [9].

В начале XX в. была разработана схема геометрического описания атомных структур объектов (некристаллического типа). Речь идет о полиэдрах Вороного, которые строятся следующим образом.

Каждый атом соединяется отрезками с ближайшими к нему атомами. Через середины этих отрезков строится плоскость. Совокупность таких плоскостей формирует полиэдр, который и называется полиэдром Вороного.

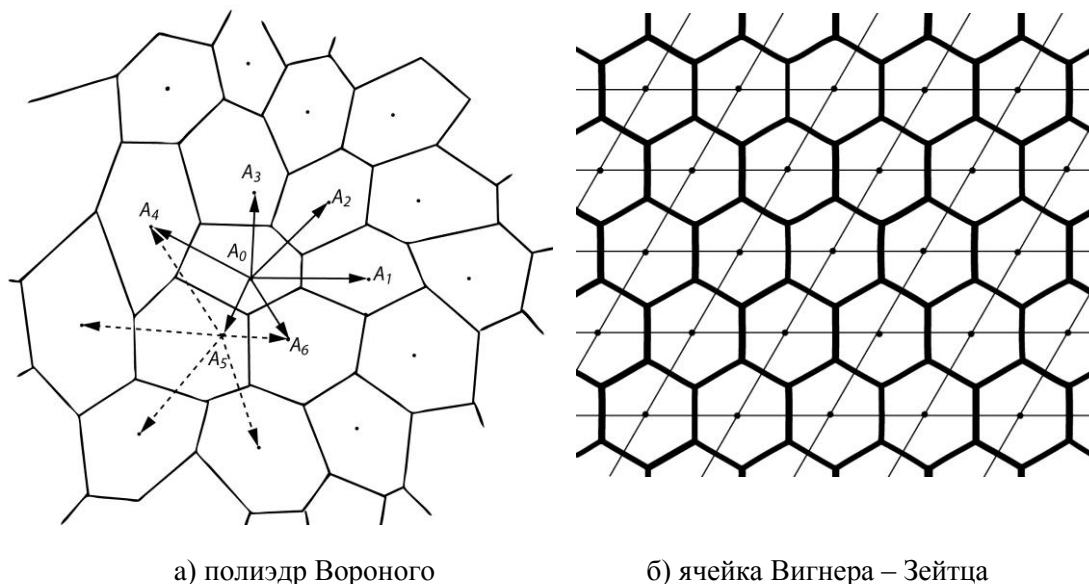


Рисунок 4. – Выполнение плоскости полиэдрами

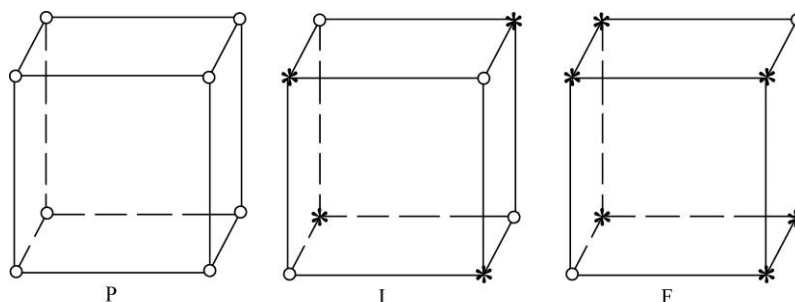
Двухмерная иллюстрация этих ячеек приведена на рисунке 4а, из которого видно, что полиэдры Вороного, во-первых, выполняют пространство, а во-вторых, в общем случае не обладают точечной симметрией. Полиэдры Вороного, построенные для кристаллов, образуют периодическую структуру, и их симметрия зависит от точечной сим-

метрии кристалла. В этом случае такие полиэдры называются ячейками Вигнера – Зейтца (рисунок 4б).

В обратной решетке по аналогичному принципу строятся полиэдры только для одного из узлов, например, для начала координат или для узла, ближайшего к началу координат.

На рисунке 5 приведены ячейки обратной решетки кубических кристаллов P, I, F -типов.

Если не учитывается «вес» узлов, то для всех типов ячеек первая (и последующие) зоны Бриллюэна будут совершенно одинаковые, а именно, будут кубами, сдвинутыми на половину телесной диагонали к началу координат. Если учитывается «вес», то суперъячейки кубических кристаллов с решетками Бравэ I - и F -типа в обратной решетке имеют суперъячейки I -типа и F -типа описываются базисами $000,110,101,011$ (I -типа) и $000,111$ (F -типа). Другими словами, кристаллы I -типа в обратной решетке имеют суперъячейку F -типа, а F -типа в обратной решетке описывается суперъячейкой I -типа. Естественно, первые зоны Бриллюэна у этих кристаллов различны.



(o) – узлы с ненулевыми «весами», (*) – узлы с нулевыми «весами»

Рисунок 5. – Ячейки обратной решетки кристаллов P, I, F -типов

Для кристаллов с более сложной структурой первая зона Бриллюэна может существенно отличаться от зон для I - и F -типа решеток, например, обратная суперъячейка обратной решетки алмаза имеет вид октаэдра, как и для P -типа кубических кристаллов [10]. Ближайшие к началу координат узлы имеют индексы (111) , которые служат вершинами полиэдра первой зоны.

При анализе одномерных регулярных сеток $a^* = \frac{1}{a}$. Однако уже для двумерных сеток, как это следует из анализа кристаллов с ячейками C -типа, необходимо учитывать, что $a_s^* = 2a^* = \frac{2}{a}$. Для трехмерных кристаллов учет «веса» узлов обратной решетки может привести к необходимости перехода от геометрической ячейки обратной решетки с периодами \vec{a}_i^* к суперъячейкам, ребра которых будут в целое число раз превышать \vec{a}_i^* , связанных с \vec{a}_k условием $a_s^* = na^* = \frac{n}{a}$.

Понятие суперъячейки обратной решетки необходимо учитывать при анализе дисперсионных соотношений, а также для объяснения появления рентгеновских рефлексов кристаллов I - и F -типа при наличии в них дефектов замещения, в том числе и вакансий.

Заклучение

Структурная амплитуда, соответствующая рассеивающей способности плоскости (hkl) , определяет «вес» узла обратной решетки. Для кристаллов I -типа ненулевой «вес» может быть только для узлов с ненулевой суммой индексов, для гранецентрированной – только для узлов с индексами одинаковой четности. Следовательно, геометрическая ячейка с вершинами (100) отсутствует, так как их «вес» равен нулю. Необходим переход к суперъячейке с объемом в восемь раз больше объема ячейки, построенной на базисе, обратном базису ячейки кристалла. Показано, что зоны Бриллюэна для указанных кристаллов строятся именно для суперъячеек, так как последние не могут содержать никаких узлов обратной решетки. В качестве примера мы привели теорему Блоха и условие Борна – Кармана, в которых учтены представления о суперъячейке. Показано, что операторы точечных преобразований симметрии не зависят от трансляции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаскольская, М. П. Кристаллография : учеб. пособие для вузов / М. П. Шаскольская. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1984. – 376 с.
2. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография : в 4 т. / В. Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 384 с.
3. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография : в 4 т. / В. Б. Вайнштейн, Л. М. Инденбом. – М. : Наука, 1979. – Т. 2. – 359 с.
4. Mitin, V. Quantum Mechanics for Nanostructures / V. Mitin, D. Sementsov, N. Vagidov ; ed. by V. Mitin. – Cambridge : University Press, 2010. – 431 p.
5. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.
6. Лиопо, В. А. Матричная кристаллография / В. А. Лиопо. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 1998. – 78 с.
7. Кацнельсон, М. И. Динамика и термодинамика кристаллической решетки / М. И. Кацнельсон, А. В. Трефилов. – М. : ИздАТ, 2002. – 384 с.
8. Чупрунов, Е. В. Основы кристаллографии / Е. В. Чупрунов, А. Ф. Хохлов. – М. : Физматлит, 2004. – 501 с.
9. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела : в 2 т. / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. – М. : Мир, 1979. – Т. 1. – 458 с.
10. Суперъячейка обратной решетки кристаллов / В. А. Лиопо [и др.] // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. 2017. – № 2. – С. 47–57.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.12.2018

Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnikau Y.V., Sabutz A.V., Sekerzhitski S.S. The «Weight» of the Reverse Lattice Node in the Description of the Properties of Crystals

The relationship between the direct and inverse lattices of crystals is considered taking into account the «weight» of the node of the reciprocal lattice. The «weight» is numerically equal to the structural amplitude of the crystal plane, which the reciprocal lattice node represents. For crystals with a non-primitive cell, the position of all nodes of the reciprocal lattice can be calculated, but some of them have zero «weight». Such nodes are identical to any point of the reciprocal lattice that does not coincide with any node. For such lattices, a transition from the cell to the super lattice of the reciprocal lattice is necessary. Examples are given from the quantum theory of crystals when it is necessary to move from cell to supercell.

УДК 539.12

Е.М. Овсюк¹, Я.А. Войнова², О.В. Веко³, В.М. Редьков⁴¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики
Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина²учитель физики Качищанской средней школы Ельского района³учитель физики гимназии г. Калинковичи⁴д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

**К АНАЛИЗУ ТУННЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА
ДЛЯ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА**

Исследуется явление туннелирования массивных частиц со спином 1/2 через эффективный потенциальный барьер, создаваемый статической геометрией черной дыры Шварцшильда. Анализ основан на использовании 8 точных решений фробениусовского типа радиального уравнения 2-го порядка с двумя регулярными особыми точками и двумя нерегулярными точками ранга 2. Эти решения построены в явном виде, на основе использования метода Пуанкаре – Перрона доказана сходимости входящих в эти решения степенных рядов во всей физической области изменения радиальной переменной. Результаты эффекта туннелирования зависят от того, откуда частицы падают на барьер: извне или изнутри черной дыры. Структура выведенных выражений для коэффициентов прохождения и отражения является математически точной, однако аналитические выражения для сумм сходящихся рядов неизвестны, эта часть исследования должна базироваться на численном анализе.

Введение

В работе [1] исследовалась безмассовая частица со спином 1/2 в статическом пространстве-времени Шварцшильда; в частности, был изучен процесс туннелирования такой частицы через эффективный потенциальный барьер на основе построения решений Фробениуса возникающего дифференциального уравнения второго порядка [2–13] (хотя опубликованных работ по этой тематике намного больше). В настоящей работе анализ распространен на случай массивной спиновой частицы.

Кратко содержание настоящей работы сводится к следующему. После разделения переменных в уравнении Дирака в статической метрике Шварцшильда выведена система двух радиальных дифференциальных уравнений первого порядка. Из этой системы получено дифференциальное уравнение второго порядка. В системе координат r_*

$$r_* = r + \ln(r-1), \quad r \in (1, +\infty), \quad r_* \in (-\infty, +\infty)$$

уравнение приводится к виду:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + P^2(r; \varepsilon, M, j) \right] f = 0,$$

где ε, j – квантовые числа энергии и полного момента частицы, M – масса частицы.

Вид уравнения в областях около радиуса Шварцшильда и на бесконечности ($r \rightarrow 1, +\infty$) допускает решения с асимптотиками, характерными для плоских волн:

$$r \rightarrow +1 (r_* \rightarrow -\infty), \quad f = e^{\pm i\varepsilon r_*}, \quad r \rightarrow \infty (r_* \rightarrow +\infty), \quad f = e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} r_*};$$

в области радиуса Шварцшильда масса M частицы эффективно себя не проявляет.

Графики, описывающие поведение кривых эффективного импульса $P^2(r; \varepsilon, M, j)$, указывают на то, что имеем ситуацию возможного туннелирования частиц через запрещенную для классического движения область, двигаясь на этот барьер слева или справа (другими словами, изнутри или извне черной дыры).

Анализ возникающего дифференциального уравнения проводится в переменной $\sqrt{1-1/r} = x, x \in (0,1)$. Учет ненулевой массы приводит к усложнению структуры сингулярных точек [14; 15], добавляется одна регулярная особенность в точке $x = \varepsilon/M$:

$$[0, (+1)_2, (-1)_2, \infty_1] \Rightarrow [0, (+1)_2, (-1)_2, \infty_1; c_1].$$

Для найденного уравнения построены 16 типов решений фробениусовского типа, показано, что вовлеченные в них степенные ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x \in (0,1)$. На основе использования этих решений возможен анализ прохождения частиц, падающих на барьер слева или справа. Использованная в [1] методика претерпевает некоторые изменения, оставаясь в главных чертах той же.

1. Основные дифференциальные уравнения

Исходим из системы радиальных уравнений, полученной после разделения переменных в уравнении Дирака в пространстве-времени со статической метрикой Шварцшильда [2]:

$$dS^2 = \Phi dt^2 - \Phi^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad \Phi = (1 - \frac{1}{r});$$

имеем уравнения [1]:

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) g, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) f.$$

Введем новую переменную, позволяющую избавиться от квадратного корня:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Phi} = \sqrt{1-1/r} = x, \quad \frac{1}{r} = 1-x^2, \quad 2x \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r^2} = (1-x^2)^2, \\ \Phi \frac{d}{dr} = x^2 \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = \frac{1}{2} x(1-x^2)^2 \frac{d}{dx}, \quad \frac{\sqrt{\Phi}}{r} = x(1-x^2), \\ r \rightarrow 1, x \rightarrow 0; \quad r \rightarrow +\infty, x \rightarrow \pm 1; \quad r \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm i\infty. \end{aligned}$$

Физической областью изменения переменной x является интервал $x \in (0,1)$. В этой переменной система уравнений первого порядка примет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(1-x^2)^2}{2} \frac{d}{dx} + vx(1-x^2) \right) f = -(\varepsilon - Mx)g, \\ \left(\frac{x(1-x^2)^2}{2} \frac{d}{dx} - vx(1-x^2) \right) g = +(\varepsilon + Mx)g, \end{aligned}$$

или кратко:

$$\left(F \frac{d}{dx} + vG \right) f = -(\varepsilon - Mx)g, \quad \left(F \frac{d}{dx} - vG \right) g = +(\varepsilon + Mx)g.$$

Отсюда следуют уравнения второго порядка (отмечаем симметрию относительно замен: $\nu \Rightarrow -\nu, M \Rightarrow -M, f \Rightarrow g$)

$$\left[(\varepsilon + Mx) \left(F \frac{d}{dx} + \nu G \right) \frac{1}{\varepsilon + Mx} \left(F \frac{d}{dx} - \nu G \right) + (\varepsilon^2 - M^2 x^2) \right] f = 0,$$

$$\left[(\varepsilon - Mx) \left(F \frac{d}{dx} - \nu G \right) \frac{1}{\varepsilon - Mx} \left(F \frac{d}{dx} + \nu G \right) + (\varepsilon^2 - M^2 x^2) \right] g = 0.$$

Учтем сначала равенства

$$(\varepsilon - Mx) \left(F \frac{d}{dx} - \nu G \right) \frac{1}{\varepsilon - Mx} = F \frac{d}{dx} + \frac{M}{\varepsilon - Mx} F - \nu G,$$

$$(\varepsilon + Mx) \left(F \frac{d}{dx} + \nu G \right) \frac{1}{\varepsilon + Mx} = F \frac{d}{dx} - \frac{M}{\varepsilon + Mx} F + \nu G,$$

затем равенства

$$\left(F \frac{d}{dx} + \frac{M}{\varepsilon - Mx} F - \nu G \right) \left(F \frac{d}{dx} + \nu G \right) =$$

$$= F^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{F'}{F} + \frac{M}{\varepsilon - Mx} \right) \frac{d}{dx} + \nu \frac{G'}{F} - \nu^2 \frac{G^2}{F^2} + \nu \frac{M}{\varepsilon - Mx} \frac{G}{F} \right],$$

$$\left(F \frac{d}{dx} - \frac{M}{\varepsilon + Mx} F + \nu G \right) \left(F \frac{d}{dx} - \nu G \right) =$$

$$= F^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{F'}{F} - \frac{M}{\varepsilon + Mx} \right) \frac{d}{dx} - \nu \frac{G'}{F} - \nu^2 \frac{G^2}{F^2} + \nu \frac{M}{\varepsilon + Mx} \frac{G}{F} \right].$$

Затем находим

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}, \quad -\nu \frac{G'}{F} = -\nu \frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2},$$

$$-\nu^2 \frac{G^2}{F^2} = -\frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2}, \quad \nu \frac{M}{\varepsilon + Mx} \frac{G}{F} = \frac{M}{\varepsilon + Mx} \frac{2\nu}{1-x^2}.$$

Уравнение для $f(x)$ примет вид (пусть $c = \varepsilon/M$):

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{d}{dx} - \right.$$

$$\left. -\nu \frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x+c} \frac{2\nu}{1-x^2} + (\varepsilon^2 - M^2 x^2) \frac{4}{x^2(1-x^2)^4} \right\} f(x) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение для функции $g(x)$ записывается аналогично

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-c} \right) \frac{d}{dx} + \right.$$

$$\left. +\nu \frac{2(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{x-c} \frac{2\nu}{1-x^2} + (\varepsilon^2 - M^2 x^2) \frac{4}{x^2(1-x^2)^4} \right\} g(x) = 0. \quad (1.2)$$

Эти уравнения симметричны относительно замен $f \Rightarrow g, v \Rightarrow -v, c \Rightarrow -c$.

Для дальнейшего удобно иметь все дроби, разложенными на простые. Тогда последние два уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{d}{dx} f + \right. \\ & + \left\{ \frac{-8v^2 + 35\varepsilon^2 + 8v - 5M^2 + 8v/(c-1)}{8(x+1)} + \frac{+8v^2 - 35\varepsilon^2 + 8v + 5M^2 - 8v/(c+1)}{8(x-1)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 - 8v - 5M^2}{8(x+1)^2} + \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 + 8v - 5M^2}{8(x-1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{-\varepsilon^2 + M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} - \frac{2v}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} - \frac{2v}{c^2-1} \cdot \frac{1}{x+c} \right\} f = 0, \\ & \left\{ \frac{d^2}{dx^2} g + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-c} \right) \frac{d}{dx} g - \right. \\ & + \left\{ \frac{-8v^2 + 35\varepsilon^2 - 8v - 5M^2 + 8v/(c+1)}{8(x+1)} + \frac{+8v^2 - 35\varepsilon^2 - 8v + 5M^2 - 8v/(c-1)}{8(x-1)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 + 8v - 5M^2}{8(x+1)^2} + \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 - 8v - 5M^2}{8(x-1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{-\varepsilon^2 + M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} + \frac{2v}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{2v}{c^2-1} \cdot \frac{1}{x-c} \right\} g = 0. \end{aligned}$$

2. Качественный анализ уравнений

Исходим из уравнений (напоминаем, что $\Phi\sqrt{1-1/r}$)

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})g, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})f.$$

Преобразуем уравнения к другой переменной r_* , определяемой так:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{d}{dr} &= \frac{d}{dr_*}, \quad dr_* = \frac{dr}{1-1/r}, \quad r_* = r + \ln(r-1), \\ r_* &\in (-\infty, +\infty), \quad r \rightarrow 1, \quad r_* \rightarrow -\infty; \quad r \rightarrow \infty, \quad r_* \rightarrow +\infty; \end{aligned}$$

функция $r_*(r)$ монотонная, и ее первая производная положительна:

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} > 0.$$

В новой переменной уравнения записываются таким образом:

$$\left[\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) \right] f = -(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})g, \quad \left[\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) \right] g = +(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})f,$$

где

$$\varphi(r_*) = \frac{\sqrt{\Phi}}{r} = \frac{\sqrt{1-1/r}}{r},$$

$$r_* \rightarrow -\infty (r \rightarrow 1), \quad \varphi(r_*) \rightarrow 0, \quad r_* \rightarrow +\infty, (r \rightarrow \infty), \quad \varphi(r_*) \rightarrow 0.$$

Можем получить уравнения второго порядка для отдельных функций:

$$\left\{ (\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) \left(\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) \right) \frac{1}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})} \right\} \left(\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) \right) g + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) g = 0,$$

$$\left\{ (\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) \left(\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) \right) \frac{1}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})} \right\} \left(\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) \right) f + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) f = 0.$$

Эти уравнения симметричны, достаточно выполнять вычисления с одним из них. Рассмотрим члены (штрих обозначает производную d/dr_*)

$$(\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) \left(\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) \right) \frac{1}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})} = \frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) - \frac{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})'}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})},$$

$$(\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) \left(\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) \right) \frac{1}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})} = \frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) - \frac{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})'}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})}.$$

Ведём промежуточные обозначения:

$$A = \frac{1}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})} \frac{d}{dr_*} (\varepsilon - M\sqrt{\Phi}), \quad B = \frac{1}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})} \frac{d}{dr_*} (\varepsilon + M\sqrt{\Phi}),$$

Тогда уравнения второго порядка запишутся так:

$$\left(\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) - A \right) \left(\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) \right) g + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr_*} - v\varphi(r_*) - B \right) \left(\frac{d}{dr_*} + v\varphi(r_*) \right) f + (\varepsilon^2 - M^2\Phi) f = 0,$$

или

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} - A \frac{d}{dr_*} + \varepsilon^2 - v^2\varphi^2 - v \frac{d\varphi}{dr_*} + vA\varphi - M^2\Phi \right] g = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} - B \frac{d}{dr_*} + \varepsilon^2 - v^2\varphi^2 + v \frac{d\varphi}{dr_*} - vB\varphi - M^2\Phi \right] f = 0. \quad (2.1)$$

В этих уравнениях можно исключить члены с первой производной. Для определенности следим за уравнением для f . Совершив подстановку

$$f(r_*) = \beta(r_*)F(r_*),$$

получаем (штрих обозначает производную по переменной r_*)

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \left(2 \frac{\beta'}{\beta} - B \right) \frac{d}{dr_*} + \left(\frac{\beta''}{\beta} - A \frac{\alpha'}{\beta} + \varepsilon^2 - v^2\varphi^2 + v \frac{d\varphi}{dr_*} - vB\varphi - M^2\Phi \right) \right] F = 0.$$

Фиксируем функцию α :

$$2 \frac{\beta'}{\beta} = B = \frac{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})'}{\varepsilon + M\sqrt{\Phi}} \Rightarrow \beta(r_*) = \sqrt{\varepsilon + M\sqrt{\Phi}}.$$

Находим

$$\beta' = \frac{B}{2} \beta, \quad \beta'' = \frac{B'}{2} \beta + \frac{B}{2} \cdot \frac{B}{2} \beta \Rightarrow \frac{\beta''}{\beta} = \frac{B'}{2} + \frac{B^2}{4};$$

следовательно, уравнение примет вид:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{dB}{dr_*} + \frac{B^2}{4} - \frac{AB}{2} + \varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 + \nu \frac{d\varphi}{dr_*} - \nu B\varphi - M^2 \Phi \right) \right] F = 0.$$

Аналогично для функции G :

$$g(r_*) = \alpha(r_*)G(r_*), \quad \alpha(r_*) = \sqrt{\varepsilon - M\sqrt{\Phi}},$$

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{dA}{dr_*} + \frac{A^2}{4} - \frac{AB}{2} + \varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 - \nu \frac{d\varphi}{dr_*} + \nu A\varphi - M^2 \Phi \right) \right] G = 0.$$

Учтем определения

$$\varphi = \frac{1}{r} \sqrt{1-1/r}, \quad \varphi^2 = \frac{1}{r^2} (1-1/r),$$

$$\frac{d}{dr_*} = (1-1/r) \frac{d}{dr}, \quad \frac{d}{dr_*} \varphi = \frac{1/2r - (1-1/r)}{r^2} \sqrt{1-1/r},$$

тогда можно получить равенства:

$$\varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 - \nu \frac{d\varphi}{dr_*} = \varepsilon^2 - \nu^2 \frac{1-1/r}{r^2} - \nu \frac{1/2r - (1-1/r)}{r^2} \sqrt{1-1/r},$$

$$\varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 + \nu \frac{d\varphi}{dr_*} = \varepsilon^2 - \nu^2 \frac{1-1/r}{r^2} + \nu \frac{1/2r - (1-1/r)}{r^2} \sqrt{1-1/r};$$

$$A = \frac{1}{(\varepsilon - M\sqrt{\Phi})} \frac{d}{dr_*} (\varepsilon - M\sqrt{\Phi}) = - \frac{M \sqrt{1-1/r}}{2r^2 (\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})},$$

$$B = \frac{1}{(\varepsilon + M\sqrt{\Phi})} \frac{d}{dr_*} (\varepsilon + M\sqrt{\Phi}) = + \frac{M \sqrt{1-1/r}}{2r^2 (\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})},$$

отмечаем, что

$$A|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad B|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad A|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad B|_{r \rightarrow \infty} = 0;$$

$$A \cdot \varphi = - \frac{M(1-1/r)}{2r^3 (\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})}, \quad B \cdot \varphi = + \frac{M(1-1/r)}{2r^3 (\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})},$$

отмечаем, что

$$A\varphi|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad B\varphi|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad A\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad B\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dA}{dr_*} &= -\frac{M}{4}(1-1/r) \frac{d}{dr} \left\{ \sqrt{1-1/r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}} \right\} = \\ &= -\frac{M}{4}(1-1/r) \left\{ \frac{1}{2r^2\sqrt{1-1/r}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}} - \right. \\ &\left. -\sqrt{1-1/r} \cdot \frac{2}{r^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon - M\sqrt{1-1/r}} + \sqrt{1-1/r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})^2} \frac{M}{2\sqrt{1-1/r}} \frac{1}{r^2} \right\}, \end{aligned}$$

отмечаем, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{dA}{dr_*} \right|_{r \rightarrow 1} &= 0, \quad \left. \frac{1}{2} \frac{dA}{dr_*} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{1}{2} \frac{dB}{dr_*} \right|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad \left. \frac{1}{2} \frac{dB}{dr_*} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{dB}{dr_*} &= +\frac{1}{2}(1-1/r) \frac{d}{dr} \frac{M\sqrt{1-1/r}}{2r^2(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})} = \dots \\ \frac{1}{4} B^2 &= \frac{1}{4} \frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})^2}, \quad \frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} \frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})^2} \\ -\frac{AB}{2} &= \frac{1}{2} \frac{M^2(1-1/r)}{4r^4(\varepsilon + M\sqrt{1-1/r})(\varepsilon - M\sqrt{1-1/r})}, \\ M^2\Phi &= M^2(1-1/r), \quad M^2\Phi|_{r \rightarrow 1} = 0, \quad M^2\Phi|_{r \rightarrow \infty} = M^2. \end{aligned}$$

Из вышеприведенного следует асимптотический вид уравнений второго порядка в областях $r \rightarrow 1, +\infty$:

$$\begin{aligned} r \rightarrow +1, \quad & \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 \right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 \right) g = 0; \\ r \rightarrow \infty, \quad & \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) g = 0. \end{aligned}$$

3. Анализ дифференциальных уравнений

Введем новую переменную, позволяющую избавиться от квадратного корня:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Phi} = \sqrt{1-1/r} = x, \quad \frac{1}{r} &= 1-x^2, \quad 2x \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r^2} = (1-x^2)^2, \\ \frac{d}{dr_*} &= \Phi \frac{d}{dr} = x^2 \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = \frac{1}{2} x(1-x^2)^2 \frac{d}{dx}, \\ \frac{d^2}{dr_*^2} &= \frac{x^2}{4} (1-x^2)^4 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) \frac{d}{dx} \right), \\ r \rightarrow 1, x &\rightarrow 0; \quad r \rightarrow +\infty, x \rightarrow \pm 1; \quad r \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm i\infty. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые из (2.1) к новой переменной:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 - \nu \frac{d\varphi}{dr_*} &= \varepsilon^2 - \nu^2 x^2 (1-x^2)^2 - \nu \left(\frac{1}{2} x(1-x^2)^3 - x^3(1-x^2)^2 \right), \\ \varepsilon^2 - \nu^2 \varphi^2 + \nu \frac{d\varphi}{dr_*} &= \varepsilon^2 - \nu^2 x^2 (1-x^2)^2 + \nu \left(\frac{1}{2} x(1-x^2)^3 - x^3(1-x^2)^2 \right), \end{aligned}$$

$$A = \frac{x(1-x^2)^2}{2(x-\varepsilon/M)}, \quad B = +\frac{x(1-x^2)^2}{2(x+\varepsilon/M)}, \quad A \cdot \varphi = \frac{x^2(1-x^2)^3}{2(x-\varepsilon/M)}, \quad B \cdot \varphi = \frac{x^2(1-x^2)^3}{2(x+\varepsilon/M)},$$

$$M^2 \Phi = M^2 x^2, \quad \frac{d}{dr_*} = \frac{1}{2} x(1-x^2)^2 \frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dr_*^2} = \frac{x^2}{4} (1-x^2)^4 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) \frac{d}{dx} \right)$$

$$-A \frac{d}{dr_*} = -\frac{x^2(1-x^2)^4}{4(x-\varepsilon/M)} \frac{d}{dx}, \quad -B \frac{d}{dr_*} = -\frac{x^2(1-x^2)^4}{4(x+\varepsilon/M)} \frac{d}{dx},$$

Учитываем эти соотношения в уравнениях (2.1), в результате получаем (пусть $\varepsilon/M = c$):

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{d}{dx} + \frac{4(\varepsilon^2 - M^2 x^2)}{x^2(1-x^2)^4} - \frac{2\nu(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x+c} \frac{2\nu}{1-x^2} \right\} f(x) = 0, \quad (3.1)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-c} \right) \frac{d}{dx} + \frac{4(\varepsilon^2 - M^2 x^2)}{x^2(1-x^2)^4} + \frac{2\nu(1-3x^2)}{x(1-x^2)^2} - \frac{4\nu^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x-c} \frac{2\nu}{1-x^2} \right\} g(x) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) – (3.2) совпадают с полученными ранее (1.1) – (1.2). Достаточно исследовать только одно из них, пусть для функции $f(x)$; запишем это уравнение в краткой форме так:

$$\frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{df}{dx} + \left\{ -\frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{D}{x+c} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{A'}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} \right\} f = 0, \quad (3.3)$$

где

$$A = \frac{-8\nu^2 + 35\varepsilon^2 + 8\nu - 5M^2 + 8\nu(c-1)}{8}, \quad A' = \frac{+8\nu^2 - 35\varepsilon^2 + 8\nu + 5M^2 - 8\nu(c+1)}{8},$$

$$B = \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 - 8\nu - 5M^2}{8}, \quad B' = \frac{-8\nu^2 + 19\varepsilon^2 + 8\nu - 5M^2}{8}, \quad D = -\frac{2\nu}{c^2 - 1}.$$

В окрестности $x = 0$ решения ведут себя так:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} f = 0, \quad f \sim x^\gamma, \quad \gamma = \pm 2i\varepsilon.$$

В окрестности $x = 1$ уравнение (3.3) упрощается:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x-1} \frac{d}{dx} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} \right\} f = 0;$$

в соответствии с тем, что точка $x=1$ – нерегулярная особенность ранга 2, решения должны вести себя соответственно следующей подстановке [14; 15]:

$$f(x) = (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right), \quad f' = (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right) \left(\frac{\alpha}{x-1} - \frac{\beta}{(x-1)^2} \right),$$

$$f'' = (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right) \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2} + \frac{2\beta-2\alpha\beta}{(x-1)^3} + \frac{\beta^2}{(x-1)^4} \right),$$

с учетом чего уравнение примет вид (сохраняем главные сингулярные члены $(x-1)^{-3}, (x-1)^{-4}$):

$$+ \frac{2\beta-2\alpha\beta}{(x-1)^3} + \frac{\beta^2}{(x-1)^4} - \frac{2\beta}{(x-1)^3} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x-1)^4} = 0;$$

отсюда получаем уравнения для параметров α, β :

$$\beta^2 = -\frac{(\varepsilon^2 - M^2)}{4}, \quad 2\alpha\beta = -(\varepsilon^2 - M^2/2),$$

т.е. имеем две возможности:

$$\beta = \pm i \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \alpha = \pm i \cdot \frac{(\varepsilon^2 - M^2) + M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}.$$

Рассмотрим аналогично точку $x=-1$:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x+1} \frac{d}{dx} + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} \right\} f = 0,$$

решения должны вести себя в соответствии с подстановкой [14; 15]:

$$f(x) = (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right), \quad f' = (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \left(\frac{\alpha'}{x+1} - \frac{\beta'}{(x+1)^2} \right),$$

$$f'' = (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \left(\frac{\alpha'(\alpha'-1)}{(x+1)^2} + \frac{2\beta'-2\alpha'\beta'}{(x+1)^3} + \frac{\beta'^2}{(x+1)^4} \right);$$

уравнение принимает вид:

$$+ \frac{2\beta'-2\alpha'\beta'}{(x+1)^3} + \frac{\beta'^2}{(x+1)^4} - \frac{2\beta'}{(x+1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(x+1)^3} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(x+1)^4} = 0;$$

отсюда получаем уравнения для параметров α', β' :

$$\beta'^2 = -\frac{(\varepsilon^2 - M^2)}{4}, \quad 2\alpha'\beta' = \varepsilon^2 - M^2/2,$$

т.е.

$$\beta' = \pm i \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \alpha' = \mp i \cdot \frac{(\varepsilon^2 - M^2) + M^2/2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}.$$

Около регулярной особой точки $x = -c$ (она лежит вне физической области переменной $x: x \in (1, \infty)$) имеем приближенное уравнение с простыми решениями:

$$f'' - \frac{1}{x+c} f' + \frac{D}{x+c} f = 0, \quad f = (x+c)^\rho, \quad \rho = 0, 2.$$

Иследуем точку $x = \infty$, для этого перейдем в уравнении для $f(x)$ к новой переменной $y = x^{-1}$; после преобразования имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{df}{dy} + \left(-\frac{1}{y} + \frac{2}{y+1} - \frac{2}{y} - \frac{2}{(1-y)} - \frac{2}{y} - \frac{c}{1+cy} + \frac{1}{y} \right) \frac{df}{dy} + \\ & + \left\{ -\frac{2\nu}{y^3} + \frac{4\varepsilon^2}{y^2} + \frac{D}{y^3} - \frac{Dc^3}{1+cy} + \frac{Dc^2}{y} - \frac{Dc}{y^2} - \frac{A}{1+y} + \frac{A}{y^3} + \frac{A}{y} - \frac{A}{y^2} + \right. \\ & + \frac{A'}{1-y} + \frac{A'}{y} + \frac{A'}{y^2} + \frac{A'}{y^3} + \frac{2B}{1+y} + \frac{B}{(1+y)^2} - \frac{2B}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{B'}{(1-y)^2} + \frac{2B'}{1-y} + \frac{2B'}{y} + \frac{B'}{y^2} - \\ & - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(1+y)^3} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{1+y} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(1+y)^2} + \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{y} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(1-y)^2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{y} - \\ & \left. - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{(1-y)^3} - \frac{\varepsilon^2 - M^2/2}{1-y} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(1+y)^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{4(1-y)^4} \right\} f = 0. \end{aligned}$$

Около $y = 0$ уравнение упрощается:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{df}{dy} + \\ & + \left\{ -\frac{2\nu}{y^3} + \frac{4\varepsilon^2}{y^2} + \frac{D}{y^3} + \frac{Dc^2}{y} - \frac{Dc}{y^2} + \frac{A}{y^3} + \frac{A}{y} - \frac{A}{y^2} + \frac{A'}{y} + \frac{A'}{y^2} + \frac{A'}{y^3} - \frac{2B}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{2B'}{y} + \frac{B'}{y^2} + \right\} f = 0. \end{aligned}$$

Суммарный коэффициент при y^3 равен нулю, т.е. точка $y = 0$ ($x = \infty$) – регулярная. Найдем суммарный коэффициент при y^2 :

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{df}{dy} + \frac{1}{y^2} \{4\varepsilon^2 - Dc - A + A' + B + B'\} f = 0,$$

с учетом выше введенных замен убеждаемся, что коэффициент тоже равен нулю:

$$\begin{aligned} & 4\varepsilon^2 + \frac{2\nu c}{c^2-1} + \nu^2 - \frac{35\varepsilon^2}{8} - \nu + \frac{5M^2}{8} - \frac{\nu}{c-1} + \nu^2 - \frac{35\varepsilon^2}{8} + \nu + \\ & + \frac{5M^2}{8} - \frac{\nu}{c+1} - \nu^2 + \frac{19\varepsilon^2}{8} - \nu - \frac{5M^2}{8} - \nu^2 + \frac{19\varepsilon^2}{8} + \nu - \frac{5M^2}{8} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, около точки $y = 0$ имеем приближенное уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{df}{dy} + \frac{1}{y} (Dc^2 + A + A' - 2B + 2B') f = 0;$$

отсюда заключаем, что в точке $y = 0$ имеем регулярную особенность [14; 15], поведение решений следующее:

$$x \rightarrow \infty (y \rightarrow 0), \quad f(y) \sim y^\sigma = \frac{1}{x^\sigma}, \quad \sigma = 0, 3.$$

Теперь возвращаемся к общему уравнению (3.3); удобно ввести обозначения:

$$(\varepsilon^2 - M^2)/4 = E, \quad \varepsilon^2 - M^2/2 = E',$$

тогда для (3.3) имеем представление:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{df}{dx} + \left\{ -\frac{2\nu}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{D}{x+c} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{A'}{(x-1)} + \right. \\ \left. + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \frac{E'}{(x+1)^3} - \frac{E'}{(x-1)^3} + \frac{E}{(x+1)^4} + \frac{E}{(x-1)^4} \right\} f = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ищем решения Фробениуса уравнения (3.4) в следующем виде [14; 15]:

$$f(x) = x^\gamma \cdot (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \cdot F(x).$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^\gamma \cdot (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \cdot \times \\ &\times \left[F' + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha'}{x+1} + \frac{\alpha}{x-1} - \frac{\beta'}{(x+1)^2} - \frac{\beta}{(x-1)^2} \right) F \right], \\ f''(x) &= x^\gamma \cdot (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \times \\ &\times \left[F'' + \left(\frac{2\gamma}{x} + \frac{2\alpha'}{x+1} + \frac{2\alpha}{x-1} - \frac{2\beta'}{(x+1)^2} - \frac{2\beta}{(x-1)^2} \right) F' + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-\gamma + \gamma^2}{x^2} + \frac{2\gamma\alpha' - 2\gamma\alpha - 2\gamma\beta' - 2\gamma\beta}{x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-2\alpha'\gamma + 2\beta'\gamma - \alpha\alpha' - \frac{1}{2}\alpha'\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta' + \frac{1}{2}\beta\beta'}{x+1} + \frac{-\alpha' + 2\gamma\beta' + \alpha\beta' + \frac{1}{2}\beta\beta' + \alpha^2}{(x+1)^2} + \frac{-2\alpha'\beta' + 2\beta'}{(x+1)^3} + \frac{\beta'^2}{(x+1)^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta' - \frac{1}{2}\beta\beta'}{x-1} + \frac{-\alpha - 2\gamma\beta - \alpha'\beta + \frac{1}{2}\beta\beta' + \alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{-2\alpha\beta + 2\beta}{(x-1)^3} + \frac{\beta^2}{(x-1)^4} \right) F \right] \end{aligned}$$

приходим к уравнению для функции $F(x)$.

Учитывая в нем уже известные ограничения (здесь имеем 8 возможностей):

$$\begin{aligned} \gamma^2 + 4\varepsilon^2 = 0, & \Rightarrow \gamma = \pm 2i\varepsilon; \\ -2\alpha\beta - E' = 0, & \quad \beta^2 + E = 0 \Rightarrow \beta = \pm i\sqrt{E}, \quad \alpha = \pm i\frac{E'}{2\sqrt{E}}, \\ -2\alpha'\beta' + E' = 0, & \quad \beta'^2 + E = 0 \Rightarrow \beta' = \pm i\sqrt{E}, \quad \alpha' = \mp i\frac{E'}{2\sqrt{E}}, - \end{aligned}$$

получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F}{dx^2} + \left(\frac{2\gamma+1}{x} + \frac{2\alpha'+2}{x+1} + \frac{2\alpha+2}{x-1} - \frac{2\beta'}{(x+1)^2} - \frac{2\beta}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+c} \right) \frac{dF}{dx} \\ & + \left\{ \frac{2\gamma\alpha' - 2\gamma\alpha - 2\gamma\beta' - 2\gamma\beta + \alpha' - \alpha - \beta' - \beta - 2\nu - \frac{\gamma}{c}}{x} + \right. \\ & + \frac{4\alpha\gamma + 4\beta\gamma + 2\alpha\alpha' + \alpha'\beta - \alpha\beta' - \beta\beta' + 4\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\alpha' - \beta' + 2A' - \frac{2\alpha}{c+1} - \frac{2\beta}{(c+1)^2}}{2(x-1)} + \\ & + \frac{-4\gamma\beta + 2\alpha^2 - 2\alpha'\beta + \beta\beta' - 4\beta + 2\alpha + 2B' + \frac{2\beta}{c+1}}{2(x-1)^2} + \\ & + \frac{-4\alpha'\gamma + 4\beta'\gamma - 2\alpha\alpha' - \alpha'\beta + \alpha\beta' + \beta\beta' - 4\alpha' + 3\beta' - 4\gamma - 2\alpha - \beta + 2A - \frac{2\alpha'}{c-1} - \frac{2\beta'}{(c-1)^2}}{2(x+1)} + \\ & + \frac{4\gamma\beta' + 2\alpha'^2 + 2\alpha\beta' + \beta\beta' + 4\beta' + 2\alpha' + 2B + \frac{2\beta'}{c-1}}{2(x+1)^2} + \\ & \left. + \left(\frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha'}{c-1} + \frac{\alpha}{c+1} + \frac{\beta'}{(c-1)^2} + \frac{\beta}{(c+1)^2} + D \right) \frac{1}{x+c} \right\} F = 0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего достаточно использовать его краткую запись:

$$\begin{aligned} & F'' + \left(\frac{n}{x} + \frac{n_1}{x-1} + \frac{n_2}{(x-1)^2} + \frac{n_3}{x+1} + \frac{n_4}{(x+1)^2} + \frac{n_5}{x+c} \right) F' + \\ & + \left(\frac{m}{x} + \frac{m_1}{x-1} + \frac{m_2}{(x-1)^2} + \frac{m_3}{x+1} + \frac{m_4}{(x+1)^2} + \frac{m_5}{x+c} \right) F = 0. \end{aligned}$$

Умножая его на $x(x+c)(x-1)^2(x+1)^2$, получим уравнение со структурой

$$\begin{aligned} & \left[x^6 + cx^5 - 2x^4 - 2cx^3 + x^2 + cx \right] F'' + \\ & + \left[(n+n_1+n_3+n_5)x^5 + ((n+n_1+n_3)c+n_1+n_2-n_3+n_4)x^4 + \right. \\ & + ((n_1+n_2-n_3+n_4)c-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5)x^3 + \\ & + ((-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c-n_1+n_2+n_3+n_4)x^2 + \\ & \left. + ((-n_1+n_2+n_3+n_4)c+n+n_5)x+nc \right] F' + \\ & + \left[(m+m_1+m_3+m_5)x^5 + ((m+m_1+m_3)c+m_1+m_2-m_3+m_4)x^4 + \right. \\ & + ((m_1+m_2-m_3+m_4)c-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5)x^3 + \\ & + ((-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c-m_1+m_2+m_3+m_4)x^2 + \\ & \left. + ((-m_1+m_2+m_3+m_4)c+m+m_5)x+mc \right] F = 0. \end{aligned}$$

Строим решения в виде степенного ряда

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad F' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}, \quad F'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k x^{k-2},$$

учитывая эти равенства в уравнении и изменяя необходимым образом индексы суммирования, получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=6}^{\infty} (i-4)(i-5)b_{i-4}x^i + c \sum_{i=5}^{\infty} (i-3)(i-4)b_{i-3}x^i - 2 \sum_{i=4}^{\infty} (i-2)(i-3)b_{i-2}x^i - \\
& - 2c \sum_{i=3}^{\infty} (i-1)(i-2)b_{i-1}x^i + \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)b_i x^i + c \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)b_{i+1}x^i + (n+n_1+n_3+n_5) \sum_{i=5}^{\infty} (i-4)b_{i-4}x^i + \\
& + [(n+n_1+n_3)c + n_1+n_2-n_3+n_4] \sum_{i=4}^{\infty} (i-3)b_{i-3}x^i + \\
& + [(n_1+n_2-n_3+n_4)c - 2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5] \sum_{i=3}^{\infty} (i-2)b_{i-2}x^i + \\
& + [(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c - n_1+n_2+n_3+n_4] \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)b_{i-1}x^i + \\
& + [(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5] \sum_{i=1}^{\infty} ib_i x^i + nc \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)b_{i+1}x^i + \\
& + (m+m_1+m_3+m_5) \sum_{i=5}^{\infty} b_{i-5}x^i + [(m+m_1+m_3)c + m_1+m_2-m_3+m_4] \sum_{i=4}^{\infty} b_{i-4}x^i + \\
& + [(m_1+m_2-m_3+m_4)c - 2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5] \sum_{i=3}^{\infty} b_{i-3}x^i + \\
& + [(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c - m_1+m_2+m_3+m_4] \sum_{i=2}^{\infty} b_{i-2}x^i + \\
& + [(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5] \sum_{i=1}^{\infty} b_{i-1}x^i + mc \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, находим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
& i=0, \quad nb_1 + mb_0 = 0, \\
& i=1, \quad 2cb_2 + 2ncb_2 + [(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5]b_1 + mcb_1 + \\
& \quad + [(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5]b_0 = 0, \\
& i=2, \quad + 3ncb_3 + 6cb_3 + 2b_2 + 2[(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5]b_2 + mcb_2 + \\
& + [(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c - n_1+n_2+n_3+n_4]b_1 + [(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5]b_1 + \\
& \quad + [(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c - m_1+m_2+m_3+m_4]b_0 = 0, \\
& i=3, \quad 12cb_4 + 4ncb_4 + 6b_3 + 3[(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5]b_3 + mcb_3 - \\
& - 4cb_2 + 2[(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c - n_1+n_2+n_3+n_4]b_2 + \\
& \quad + [(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5]b_2 + \\
& \quad + [(n_1+n_2-n_3+n_4)c - 2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5]b_1 + \\
& \quad + [(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c - m_1+m_2+m_3+m_4]b_1 + \\
& \quad + [(m_1+m_2-m_3+m_4)c - 2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5]b_0 = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& i=6,7,8\dots \quad (m+m_1+m_3+m_5)b_{i-5} + \\
& + [(i-4)(i-5) + (n+n_1+n_3+n_5)(i-4) + (m+m_1+m_3)c + m_1+m_2-m_3+m_4]b_{i-4} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ c(i-3)(i-4) + \left[(n+n_1+n_3)c + n_1+n_2-n_3+n_4 \right] (i-3) + \right. \\
 & + \left. \left[(m_1+m_2-m_3+m_4)c - 2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5 \right] \right\} b_{i-3} + \\
 & + \left\{ -2(i-2)(i-3) + \left[(n_1+n_2-n_3+n_4)c - 2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5 \right] (i-2) + \right. \\
 & + \left. \left[(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c - m_1+m_2+m_3+m_4 \right] \right\} b_{i-2} + \\
 & + \left\{ -2c(i-1)(i-2) + \left[(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c - n_1+n_2+n_3+n_4 \right] (i-1) + \right. \\
 & + \left. \left[(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5 \right] \right\} b_{i-1} + \\
 & + \left\{ i(i-1) + \left[(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5 \right] i + mc \right\} b_i + \left[ci(i+1) + nc(i+1) \right] b_{i+1} = 0.
 \end{aligned}$$

Для анализа вопроса о сходимости ряда используем метод Пуанкаре – Перрона. Соответственно, делим уравнение на b_{i-5} :

$$\begin{aligned}
 & (m+m_1+m_3+m_5) + \\
 & + \left[(i-4)(i-5) + (n+n_1+n_3+n_5)(i-4) + (m+m_1+m_3)c + m_1+m_2-m_3+m_4 \right] \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} + \\
 & + \left\{ c(i-3)(i-4) + \left[(n+n_1+n_3)c + n_1+n_2-n_3+n_4 \right] (i-3) + \right. \\
 & + \left. \left[(m_1+m_2-m_3+m_4)c - 2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4-2m_5 \right] \right\} \frac{b_{i-3}}{b_{i-4}} \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} + \\
 & + \left\{ -2(i-2)(i-3) + \left[(n_1+n_2-n_3+n_4)c - 2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4-2n_5 \right] (i-2) + \right. \\
 & + \left. \left[(-2m-m_1+2m_2-m_3-2m_4)c - m_1+m_2+m_3+m_4 \right] \right\} \frac{b_{i-2}}{b_{i-3}} \frac{b_{i-3}}{b_{i-4}} \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} + \\
 & + \left\{ -2c(i-1)(i-2) + \left[(-2n-n_1+2n_2-n_3-2n_4)c - n_1+n_2+n_3+n_4 \right] (i-1) + \right. \\
 & + \left. \left[(-m_1+m_2+m_3+m_4)c + m+m_5 \right] \right\} \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} \frac{b_{i-2}}{b_{i-3}} \frac{b_{i-3}}{b_{i-4}} \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} + \\
 & + \left\{ i(i-1) + \left[(-n_1+n_2+n_3+n_4)c + n+n_5 \right] i + mc \right\} \frac{b_i}{b_{i-1}} \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} \frac{b_{i-2}}{b_{i-3}} \frac{b_{i-3}}{b_{i-4}} \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} + \\
 & + \left[ci(i+1) + nc(i+1) \right] \frac{b_{i+1}}{b_i} \frac{b_i}{b_{i-1}} \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} \frac{b_{i-2}}{b_{i-3}} \frac{b_{i-3}}{b_{i-4}} \frac{b_{i-4}}{b_{i-5}} = 0.
 \end{aligned}$$

Домножив полученное соотношение на i^{-2} и устремив $i \rightarrow \infty$, находим алгебраическое уравнение для величины R , определяющей возможные радиусы сходимости R_{conv} степенного ряда:

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_i}{b_{i-1}}, \quad R_{conv} = \frac{1}{|R|},$$

$$R + cR^2 - Rr^3 - 2cR^4 + R^5 + cR^6 = 0 \Rightarrow (1+cR)R(R^2-1)^2 = 0.$$

Его решения такие:

$$R = 0, \quad R = \pm 1, \quad R = -\frac{1}{c},$$

т.е. возможные радиусы сходимости равны $1, c, \infty$. Минимальный из возможных радиусов сходимости равен $R_{conv} = 1$, он покрывает всю физическую область изменения переменной $x \in (0, 1)$. В соответствии с симметрией между уравнениями (3.1) и (3.2) решения уравнения для функции $g(x)$ строятся аналогично; фактически достаточно выполнить формальную замену:

$$v \Rightarrow -v, \quad c \Rightarrow -c.$$

4. Анализ туннельного эффекта

На основе использованной подстановки

$$f(x) = x^\gamma \cdot (x-1)^\alpha \exp\left(-\frac{\beta}{x-1}\right) \cdot (x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) \cdot F(x),$$

где

$$\begin{aligned} \beta = \pm i\Gamma, \quad \alpha = \pm i\Sigma, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \Sigma = \frac{\varepsilon^2 - M^2 / 2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}, \\ \beta' = \pm i\Gamma, \quad \alpha' = \pm i\Sigma, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{2}, \quad \Sigma = \frac{\varepsilon^2 - M^2 / 2}{\sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}, \\ \gamma = \pm 2i\varepsilon. \end{aligned}$$

можно построить 8 решений (здесь буквами $R(x), I(x)$ обозначены вещественные и мнимые части сходящихся степенных рядов):

$$\begin{aligned} g_1(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x-1}} e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x+1}} (R_1(x) + iI_1(x)), \\ g_2(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x-1}} e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x+1}} (R_1(x) - iI_1(x)); \\ g_3(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x-1}} e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x+1}} (R_3(x) + iI_3(x)), \\ g_4(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x-1}} e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x+1}} (R_3(x) - iI_3(x)); \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} g_5(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x-1}} e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x+1}} (R_5(x) + iI_5(x)), \\ g_6(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\mp i\Gamma/2}{x-1}} e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\pm i\Gamma/2}{x+1}} (R_5(x) - iI_5(x)); \\ g_7(x) &= e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\mp i\Gamma/2}{x-1}} e^{-i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\pm i\Gamma/2}{x+1}} (R_7(x) + iI_7(x)), \\ g_8(x) &= e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\Sigma \ln(x-1)} e^{\frac{\pm i\Gamma}{x-1}} e^{+i\Sigma \ln(x+1)} e^{\frac{\mp i\Gamma}{x+1}} (R_7(x) - iI_7(x)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что множитель $e^{+i\Sigma \ln(x-1)}$, $x \in (0, 1)$ зависит от логарифма отрицательной переменной, что дает многозначную функцию

$$e^{\pm i\Sigma \ln(x-1)} = e^{\pm i\Sigma [\ln|x-1| + i(\pi + 2\pi n)]} = e^{\mp \Sigma(\pi + 2\pi n)} e^{\pm i\Sigma \ln|x-1|}.$$

Использование той или иной ветви многозначной функции влияет только на выбор вещественного множителя перед решением; для определенности пусть $n = 0$.

Соотношения (4.1), (4.2) задают точные и везде определенные решения, поскольку ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x \in (0, +1)$. Отметим, что перечисленные решения разбиты на пары комплексно сопряженных. Применяя численный анализ, легко убедиться, что вещественные и мнимые части функций $G(x)$, определяемых степенными рядами, ведут себя как монотонно растущие

функції с явно вираженим асимптотическим стремлением к постоянным значениям, зависящим от квантовых чисел ε , $\nu = j + 1/2$.

Найдем асимптотики решений g_1, g_3 и g_2, g_4 (учитывая сходимость рядов):

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 (r_* \rightarrow -\infty), \\ g_1 = e^{-\Sigma\pi} e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i\varepsilon r_*}, \\ g_3 = e^{+\Sigma\pi} e^{+i\Sigma r_*}, \quad g_4 = e^{-\Sigma\pi} e^{-i\varepsilon r_*}; \\ x \rightarrow +1 (r_* \rightarrow +\infty), \\ g_1 = [e^{-i\Sigma\ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_1 + iI_1)] e^{-i2\Gamma r_*}, \\ g_2 = [e^{+i\Sigma\ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_1 - iI_1)] e^{+i2\Gamma r_*}, \\ g_3 = [e^{+i\Sigma\ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_3 + iI_3)] e^{+i2\Gamma r_*}, \\ g_4 = [e^{-i\Sigma\ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_3 - iI_3)] e^{-i2\Gamma r_*}. \end{aligned}$$

Образуем линейные комбинации из этих четырех функций:

$$H_+ = \frac{g_3 + g_1}{2}, H_- = \frac{g_3 - g_1}{2}, \quad F_+ = \frac{g_2 + g_4}{2}, F_- = \frac{g_2 - g_4}{2}.$$

Их асимптотики слева задаются равенствами:

$$\begin{aligned} r_* \rightarrow -\infty, \quad H_+ = \cosh \Sigma\pi e^{+i\varepsilon r_*}, \quad H_- = \sinh \Sigma\pi e^{+i\varepsilon r_*}; \\ r_* \rightarrow -\infty, \quad F_+ = \cosh \Sigma\pi e^{-i\varepsilon r_*}, \quad F_- = \sinh \Sigma\pi e^{-i\varepsilon r_*}; \end{aligned}$$

асимптотики справа задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} r_* \rightarrow +\infty, \\ H_{\pm} = \frac{1}{2} [e^{+i\Sigma\ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_3 + iI_3)] e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2} [e^{-i\Sigma\ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_1 + iI_1)] e^{-i2\Gamma r_*}, \\ F_{\pm} = \frac{1}{2} [e^{+i\Sigma\ln 2} e^{-i\Gamma/2} (R_1 - iI_1)] e^{+i2\Gamma r_*} \pm \frac{1}{2} [e^{-i\Sigma\ln 2} e^{+i\Gamma/2} (R_3 - iI_3)] e^{-i2\Gamma r_*}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем две пары решений с асимптотиками (слева \leftrightarrow справа) следующего вида:

$$\begin{aligned} H_+, \quad \cosh \Sigma\pi e^{+i\varepsilon r_*} &< \longrightarrow & A e^{+i2\Gamma r_*} + B e^{-i2\Gamma r_*}, \\ H_-, \quad \sinh \Sigma\pi e^{+i2\Gamma r_*} &< \longrightarrow & A e^{+i2\Gamma r_*} - B e^{-i2\Gamma r_*}; \\ F_+, \quad \cosh \Sigma\pi e^{-i2\Gamma r_*} &< \longrightarrow & A^* e^{-i2\Gamma r_*} + B^* e^{+i2\Gamma r_*}, \\ F_-, \quad \sinh \Sigma\pi e^{-i2\Gamma r_*} &< \longrightarrow & A^* e^{-i2\Gamma r_*} - B^* e^{+i2\Gamma r_*}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пара (4.3) более проста для интерпретации: ее можно сопоставить ситуации, когда частица падает справа на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него. Два варианта соответствуют разным сдвигам фаз. Если комбинировать функции в пределах пар $H_+ -- H_-$ и $F_+ -- F_-$, то можно получить решения, нужные для описания явления туннелирования майорановских частиц, падающих на барьер извне.

Физическая информация о процессе туннелирования частиц, падающих на барьер извне:

$$\frac{C_{\pm}}{A^*} e^{-i\epsilon r_*} < \text{---} e^{-i2\Gamma r_*} \pm \frac{B^*}{A^*} e^{+i2\Gamma r_*}$$

определяется коэффициентами прохождения D и отражения R :

$$D = \left| \frac{C_{\pm}}{A^*} \right|^2, \quad R = 1 - D = \left| \frac{B^*}{A^*} \right|^2.$$

Аналогично можно исследовать и туннельный эффект в ситуации, когда частица падает на барьер Шварцшильда слева, при этом нужно комбинировать функции g_5, \dots, g_8 . Имеем асимптотики:

$$\begin{aligned} x \rightarrow +1, \quad g_5 &= e^{+i\Sigma \ln^2} e^{-i\Gamma/2} (R_5 + iI_5) e^{-i2\Gamma r_*}, \\ g_8 &= e^{+i\Sigma \ln^2} e^{-i\Gamma/2} (R_7 - iI_7) e^{-i\epsilon r_*}; \\ x \rightarrow 0, \quad g_5 &= e^{-\Sigma\pi} e^{i\epsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*}; \\ x \rightarrow +1, \quad g_6 &= e^{-i\Sigma \ln^2} e^{+i\Gamma/2} (R_5 - iI_5) e^{+i2\Gamma r_*}, \\ g_7 &= e^{-i\Sigma \ln^2} e^{+i\Gamma/2} (R_7 + iI_7) e^{+i2\Gamma r_*}; \\ x \rightarrow 0, \quad g_6 &= e^{+\Sigma\pi} e^{-i2\Gamma r_*}, \quad g_7 = e^{-\Sigma\pi} e^{+i2\Gamma r_*}. \end{aligned}$$

Введем функции

$$\bar{H}_{\pm} = g_5 \pm g_8, \quad \bar{F}_{\pm} = g_6 \pm g_7;$$

они имеют асимптотики (слева \leftrightarrow справа):

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\pm}, \quad e^{-\Sigma\pi} e^{+i\epsilon r_*} \pm e^{+\Sigma\pi} e^{-i\epsilon r_*} < \text{---} > e^{+i\Sigma \ln^2} e^{-i\Gamma/2} [(R_5 + iI_5) \pm (R_7 - iI_7)] e^{-i2\Gamma r_*}; \\ \bar{F}_{\pm}, \quad e^{-\Sigma\pi} e^{+i\epsilon r_*} \pm e^{+\Sigma\pi} e^{-i\epsilon r_*} < \text{---} > e^{+i\Sigma \ln^2} e^{-i\Gamma/2} [(R_5 - iI_5) \pm (R_7 + iI_7)] e^{+i2\Gamma r_*}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функции (4.4) можно сопоставить ситуации, когда частица падает слева на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него:

$$\bar{A} e^{+i\epsilon r_*} \pm \bar{B} e^{-i\epsilon r_*} \text{---} > \bar{C}_{\pm} e^{+i2\Gamma r_*}.$$

Процесс туннелирования частиц, падающих на барьер изнутри, определяется коэффициентами прохождения \bar{D} и отражения \bar{R} :

$$\bar{D} = \left| \frac{\bar{C}_{\pm}}{\bar{A}} \right|^2, \quad \bar{R} = \left| \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \right|^2.$$

Заклучение

Таким образом, для массивных спинорных частиц в поле Шварцшильда развита математическая схема анализа прохождения частиц через эффективный потенциальный барьер Шварцшильда. Результаты существенно зависят от того, откуда частицы падают на гравитационный барьер: извне или изнутри. Анализ основан на использовании 8 решений Фробениуса для уравнения с двумя регулярными особыми точками и двумя нерегулярными особыми точками ранга 2. Математическая структура полученных выражений для коэффициентов прохождения и отражения является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных. Эта часть исследования должна базироваться на численном суммировании рядов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. To analysis of the Dirac and Majorana particle solutions in Schwarzschild field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // NPCS. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 56–72.
2. Schwarzschild, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. – 1916. – S. 189–196.
3. Regge, T. Stability of a Schwarzschild Singularity / T. Regge, J. A. Wheeler // Physical Review. – 1957. – Vol. 108, № 4. – P. 1063–1069.
4. Brill, D. R. Wheeler. Interaction of neutrinos and gravitational fields / D. R. Brill, A. John // Rev. of Modern Physics. – 1957. – Vol. 29. – P. 465–479.
5. Bardeen, J. M. Radiation fields in the Schwarzschild background / J. M. Bardeen, W. H. Press // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – P. 7–19.
6. Hawking, S. W. Black hole explosions? / S. W. Hawking // Nature. – 1974. – № 5443. – P. 30–31.
7. Hawking, S. W. Particle creation by black holes / S. W. Hawking // Commun. Math. Phys. – 1975. – Vol. 43. – P. 199–220.
8. Page, D. N. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, non-rotating hole / D. N. Page // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13. – P. 198–206.
9. Chandrasekhar, S. The Mathematical Theory of Black Holes / S. Chandrasekhar. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1983.
10. Фролов, В. П. Физические эффекты в гравитационном поле черных дыр / В. П. Фролов // Тр. ФИАН. – 1986. – Т. 169. – С. 3–131.
11. Гальцов, Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр / Д. В. Гальцов. – М. : Изд-во МГУ, 1986. – 288 с.
12. Fiziev, P. [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.research-gate.net/profile/Plamen-Fiziev/publications>.
13. Smoller, J. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry / J. Smoller, Chunjing Xie // Annales Henri Poincare. – 2012. – Vol. 13, № 4. – P. 943–989.
14. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1995.
15. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.11.2018

Ovsiyuk E.M., Voynova Ya.A., Veko O.V., Red'kov V.M. To Description of the Tunneling Effect for Dirac Massive Particles Through the Schwarzschild Gravitational Barrier

For massive spin 1/2 particles, the tunneling process through effective potential barrier generated by the Schwarzschild black hole static geometry is studied. The treatment is based on the use of 8 Frobenius solutions of relevant 2-nd order differential equations with two regular points and two irregular points of the rank 2. These solutions are constructed in explicit form and the convergence of all involved power series for the physical region of the radial variable r from the interval $(1, +\infty)$ is proved by Poincare – Perrone method. Results for tunneling effect significantly differ for two situations: one when the particle falls on the barrier from outside the black hole and another when the particle falls on the barrier from within. Mathematical expressions for transmission and reflection coefficients are mathematically exact, however analytical expressions for involved convergent powers series are not known, and further study assumes numerical calculation.

УДК 535.012

Н.Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: sender@brsu.brest.by

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Рассмотрена задача о распространении света в гиротропных кристаллах с антисимметричной частью тензора гирации. Получено общее решение уравнения $(1 - \tilde{\alpha}\epsilon^{-1}\alpha + \vec{m}^{\times}\epsilon^{-1}\vec{m}^{\times} + i\vec{\Gamma}^{\times})\vec{H} = 0$ для вектора магнитного поля собственных волн \vec{H} , применимое к кристаллам всех сингоний. Рассмотрены кристаллы средних и низших сингоний с тензором гирации $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\vec{c}\vec{c} + \alpha_0\vec{c}^{\times}$. Показано, что для средних сингоний в квазиобыкновенной волне, если \vec{n} и \vec{c} не ортогональны, всегда имеется составляющая магнитного поля вдоль направления распространения, тогда как в квазиобыкновенной волне такая составляющая появляется только при наличии несимметричной части тензора α . В кристаллах низших сингоний поведение векторов поля в волне аналогично их поведению в случае планальных классов одноосных кристаллов. Однако есть и отличие, которое заключается в том, что в кристаллах класса $mm2$ имеется две гирационные постоянные α_0 и α_1 . Наконец, в классе 1 тензор α имеет 9 компонент, а соответствующие соотношения становятся весьма громоздкими, поэтому анализ этого случая возможен с привлечением численных методов.

Как известно, электромагнитное поле в среде без зарядов и токов описывается уравнениями Максвелла [1].

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{B} = 0, \operatorname{div}\vec{D} = 0. \quad (1)$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} – векторы напряженностей электрического и магнитного полей, \vec{D} и \vec{B} – векторы индукции тех же полей. Считаем, что в среде отсутствуют свободные электрические заряды и токи.

Ограничимся далее решением уравнения Максвелла (1) в виде плоских гармонических волн, векторы поля и индукции которых пропорциональны $\exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r})$,

где ω – круговая частота электромагнитного поля в среде; $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$ – волновой вектор; v – фазовая скорость волны в среде; \vec{n} – единичный вектор волновой нормали.

Введем вектор рефракции [2]

$$\vec{m} = N\vec{n} = \frac{c}{\omega}\vec{k}, \quad (2)$$

где N – показатель преломления среды. Тогда уравнения (1) с учетом (2) можно записать в форме [1]:

$$\vec{D} = -[\vec{m}, \vec{H}], \vec{B} = [\vec{m}, \vec{E}], (\vec{m}, \vec{D}) = (\vec{m}, \vec{B}) = 0. \quad (3)$$

Уравнения (3) необходимо дополнить уравнениями связи и граничными условиями. Будем использовать уравнения связи [1]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\alpha \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - i\tilde{\alpha} \vec{E}, \quad (4)$$

где ε, μ тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, α – псевдотензор гирации (для краткости псевдотензор будем называть тензором), $\tilde{\alpha}$ – тензор, полученный транспонированием тензора α .

Выбранная система уравнений связи (4) имеет преимущества по сравнению с другими системами. Так, закон сохранения энергии соблюдается в обычной форме, а также не изменяются выражения для вектора плотности потока энергии и обычные граничные условия, т.е. они имеют вид:

$$\left[\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{q} \right] = 0, \left[\vec{H}_1 - \vec{H}_2, \vec{q} \right] = 0, \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{q} \right) = 0, \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{q} \right) = 0, \quad (5)$$

где \vec{q} – единичный вектор нормали к границе раздела двух сред, направленный из среды 1 в среду 2.

Уравнения Максвелла (3) и материальные уравнения (4) представляют собой полную систему уравнений. Знание одного из векторов поля или индукции позволяет с помощью (3), (4) установить вид трех остальных.

Исключая из (3) и (4) \vec{D} , \vec{B} и \vec{E} (в оптическом диапазоне $\mu = 1$), приходим к уравнению для вектора магнитного поля собственных волн \vec{H} [1]:

$$\left(1 - \tilde{\alpha} \varepsilon^{-1} \alpha + \vec{m}^{\times} \varepsilon^{-1} \vec{m}^{\times} + i \vec{\Gamma}^{\times} \right) \vec{H} = 0, \quad (6)$$

где $\vec{\Gamma}$ – вектор гирации, который имеет вид [1]:

$$\vec{\Gamma} = \left[Sp(\tilde{\alpha} \varepsilon^{-1}) - \varepsilon^{-1} \alpha \right] \vec{m}, \quad (7)$$

где Sp – означает след тензора, \vec{m}^{\times} – антисимметричный тензор, дуальный вектору рефракции \vec{m} [1].

Из уравнения (6) следует уравнение нормалей для определения показателей преломления собственных волн [1]:

$$\left| 1 - \tilde{\alpha} \varepsilon^{-1} \alpha + \vec{m}^{\times} \varepsilon^{-1} \vec{m}^{\times} + i \vec{\Gamma}^{\times} \right| = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего удобно получить общее решение уравнения (6). С этой целью разложим вектор \vec{H} следующим образом:

$$\vec{H} = a_1 \vec{h}_+ + a_2 \vec{h}_- + a_3 \vec{n},$$

где \vec{h}_{\pm} – векторы поляризации собственных волн в кристалле (не обязательно единичные) в отсутствие гиротропии, \vec{n} – единичный вектор волновой нормали. Фактически используемый нами подход представляет собой модификацию метода связанных волн [3],

двух поперечных \vec{h}_+ , \vec{h}_- и продольной волны, распространяющейся вдоль \vec{n} . Умножая (6) слева на \vec{h}_\pm и \vec{n} , получим систему однородных уравнений, из которых найдем поляризации \vec{h}_1 и \vec{h}_2 собственных волн гиротропного кристалла.

Если учесть, что $(\vec{m} \times \varepsilon^{-1} \vec{m} \times) \vec{h}_+ = (n^2/n_\pm^2) (\vec{m}_\pm \varepsilon^{-1} \vec{m}_\pm) \vec{h}_+ = -(n^2/n_\pm^2) \vec{h}_\pm$, n_\pm – показатели преломления для волн \vec{h}_\pm , то решение для $\vec{h}_{1,2}$ удобно представить в виде:

$$\vec{h}_1 = \vec{h}_+ + \kappa_1 \vec{h}_- + p_1 \vec{n}, \quad \kappa_1 = \frac{g_{12} + \Gamma_1 \Gamma_2 - i \Gamma_3}{(1 - g_{33})(1 - n^2/n_-^2) \vec{h}_-^2 - g_{22} - \Gamma_1^2}, \quad (9)$$

$$p_1 = i(\Gamma_2 - \kappa_1 \Gamma_1),$$

$$\vec{h}_2 = \vec{h}_- + \kappa_2 \vec{h}_+ + p_2 \vec{n}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{12} - \Gamma_1 \Gamma_2 + i \Gamma_3}{(1 - g_{33})(1 - n^2/n_+^2) \vec{h}_+^2 - g_{11} - \Gamma_2^2}, \quad (10)$$

$$p_2 = -i(\Gamma_1 - \kappa_2 \Gamma_2).$$

В выражениях (9), (10) отброшены члены с параметрами гиротропии степени выше второй [4] и введены обозначения (отметим, что для изонормальных волн $[\vec{h}_+ \vec{h}_-] \parallel \vec{n}$):

$$g_{ik} = \vec{h}_i (\vec{\alpha} \varepsilon^{-1} \vec{\alpha}) \vec{h}_k, \quad g_{i3} = \vec{h}_i (\vec{\alpha} \varepsilon^{-1} \vec{\alpha}) \vec{n},$$

$$i, k = 1, 2, \quad g_{33} = \vec{n} (\vec{\alpha} \varepsilon^{-1} \vec{\alpha}) \vec{n}, \quad (11)$$

$$\Gamma_1 = -\vec{\Gamma}[\vec{n}, \vec{h}_-], \quad \Gamma_2 = \vec{\Gamma}[\vec{n}, \vec{h}_+], \quad \Gamma_3 = \vec{\Gamma}[\vec{h}_+, \vec{h}_-].$$

Величины $\kappa_{1,2}, p_{1,2}$ представляет собой параметры связи, невозмущенных за счет гиротропии решений уравнений Максвелла для волн \vec{h}_+, \vec{h}_- и продольной волны $\vec{h} \parallel \vec{n}$.

Уравнение нормалей для определения показателей преломления сводится к виду $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 1$.

Векторы электрического поля найдем с помощью уравнений (3), (4)

$$\vec{e}_{1,2} = -\varepsilon^{-1} [\vec{m}, \vec{h}_{1,2}] - i \varepsilon^{-1} \vec{\alpha} \vec{h}_{1,2}. \quad (12)$$

Подставляя сюда выражения (9), (10), получим

$$\vec{e}_1 = (n/n_+) \vec{e}_+ + (n/n_-) \kappa_1 \vec{e}_- - i \varepsilon^{-1} \vec{\alpha} \vec{h}_+, \quad \vec{e}_2 = (n/n_-) \vec{e}_- + (n/n_+) \kappa_2 \vec{e}_+ - i \varepsilon^{-1} \vec{\alpha} \vec{h}_-,$$

$$\vec{e}_\pm = -\varepsilon^{-1} [\vec{m}_\pm, \vec{h}_\pm]. \quad (13)$$

При отсутствии гиротропии ($\alpha = 0$) $\kappa_{1,2} = p_{1,2} = 0$ и $\vec{h}_1 = \vec{h}_+$, $n = n_+$, $\vec{h}_2 = \vec{h}_-$, $n = n_-$. В прозрачных кристаллах (\vec{h}_\pm – линейные векторы) в направлениях, не совпадающих с направлением оптической оси, члены $1 - n^2/n_\pm^2$ пропорциональны величине линейного двулучепреломления, т.е. много больше остальных членов, входящих в выражения (9), (10). Поэтому поляризация изонормальных волн определяется значением «продольной» составляющей Γ_3 вектора гирации ($\sim \pm i \Gamma_3 / (n_+^2 - n_-^2)$). В направлении

оптической оси $1 - n^2/n_{\pm}^2 \sim \Gamma_3$, поэтому в (9), (10) для определения поляризации изонормальных волн следует учитывать члены второго порядка малости [4]. Полученные выражения (9) и (10) общие и применимы к кристаллам всех сингоний.

Перейдем к рассмотрению кристаллов средних сингоний. В классах $3m, 4mm, 6mm$ имеем:

$$\varepsilon^{-1} = 1/\varepsilon_0 + (1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0) \vec{c} \cdot \vec{c}, \alpha = -\tilde{\alpha} = \alpha_0 \vec{c}^{\times}, \quad (14)$$

где \vec{c} – единичный вектор, направленный вдоль оптической оси кристалла, $\varepsilon_0 = n_0^2$, $\varepsilon_e = n_e^2$, n_0, n_e – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Поляризация собственных волн в отсутствии гиротропии ($\alpha = 0$) определяется выражениями [1]:

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 \rightarrow \vec{h}_+ = \vec{h}_e = \varepsilon_0 [\vec{m}_e, \vec{c}], \vec{e}_e = \varepsilon_0 \vec{c} - \vec{m}_e \vec{c} \vec{m}_e, \\ \vec{h}_2 \rightarrow \vec{h}_- = \vec{h}_0 = [\vec{m}_0, [\vec{m}_0, \vec{c}]], \vec{e}_0 = [\vec{m}_0, \vec{c}], \end{aligned} \quad (15)$$

где m_0, m_e – векторы рефракции обыкновенной и необыкновенной волн.

Учитывая далее только члены не выше первого порядка малости, из выражений (9) – (11) найдем:

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 = \varepsilon_0 [\vec{m}_e, \vec{c}], \vec{e}_1 = \varepsilon_0 \vec{c} - \vec{m}_e \vec{c} \vec{m}_e - i\alpha_0 [\vec{c}, [\vec{m}_e, \vec{c}]], \\ \vec{h}_2 = [\vec{m}_0, [\vec{m}_0, \vec{c}]] - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} [\vec{m}_0, \vec{c}]^2 \vec{m}_0, \vec{e}_2 = \left(1 + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \vec{m}_0 \vec{c} \right) [\vec{m}_0, \vec{c}], \end{aligned} \quad (16)$$

причем в линейном по α_0 приближении $n_{1,2} = n_{e,0}$. Таким образом, в волне с индексом «1» (назовем ее квазиобыкновенной) вектор магнитного поля описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению колебаний электрического вектора. Во второй волне, квазиобыкновенной, наоборот, эллипс, перпендикулярный вектору магнитного поля, описывает электрический вектор волны.

В одноосных кристаллах классов 3, 4, 6 тензор α имеет три независимых компоненты [1]:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \vec{c} \vec{c} + \alpha_0 \vec{c}^{\times}.$$

Поскольку в них

$$\Gamma_3 = \varepsilon_0^2 [\vec{m}, \vec{c}]^2 \left(\gamma_1 - \gamma_2 (\vec{n}, \vec{c})^2 \right),$$

где

$$\varepsilon_0 \gamma_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \varepsilon_0 / \varepsilon_e, \gamma_2 = \alpha_2 \varepsilon_e + \alpha_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_e) / \varepsilon_0 \varepsilon_e,$$

то обычное эллиптическое двулучепреломление, обусловленное гиротропией, имеет место для всех направлений распространения, причем

$$\begin{aligned} \kappa_1 = - \frac{i\Gamma_3}{(1 - n_e^2/n_0^2) \vec{h}_e^2}, p_1 = i\varepsilon_0 \gamma_2 n_e^2 (\vec{n}, \vec{c}) [\vec{n}, \vec{c}]^2, \\ \kappa_2 = - \frac{i\Gamma_3}{(1 - n_e^2/n_0^2) \vec{h}_0^2}, p_2 = -i \frac{\alpha_0}{n_0} [\vec{m}_0, \vec{c}]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, в квазиобыкновенной волне, если \vec{n} и \vec{c} не ортогональны, всегда имеется составляющая магнитного поля вдоль направления распространения, тогда как в квазиобыкновенной волне такая составляющая появляется только при наличии несимметричной части тензора α .

Рассмотрим теперь кристаллы низших сингоний. Введем правую тройку ортов $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$, совпадающую с главными осями тензора ε . Считаем, что орт \vec{U}_3 направлен вдоль кристаллографической оси z кристалла. Для кристаллов класса $mm2$ тензор α имеет вид [1]:

$$\alpha = \alpha_1 (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 + \vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1) + \alpha_0 \vec{U}_3^\times.$$

Поскольку $\Gamma_3 \sim \vec{n}\vec{\Gamma} \sim (\vec{n}, \vec{U}_1)(\vec{n}, \vec{U}_2)$, то при распространении света в плоскостях симметрии кристалла, перпендикулярных \vec{U}_1 или \vec{U}_2 , вращение плоскости поляризации невозможно (включая и направления оптических осей).

Известно, что при отсутствии гиротропии собственные волны распространяются в плоскостях, перпендикулярных векторам $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$, полностью аналогичны обыкновенной и необыкновенной волнам в одноосных кристаллах [5]. Так, для \vec{n} , лежащих в плоскости, ортогональной вектору \vec{U}_1 , имеем

$$\vec{h}_+ = \vec{h}_e = \vec{U}_1 \parallel [\vec{m}_e, \vec{U}_3], \quad \vec{h}_- = \vec{h}_o = [\vec{n}, \vec{U}] \parallel [\vec{m}_o, [\vec{m}_o, \vec{U}_3]], \quad (18)$$

$$n_+^2 = n_e^2 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 / \left\{ \varepsilon_2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) (\vec{n}, \vec{U}_3)^2 \right\}, \quad n_-^2 = \varepsilon_1.$$

После несложных вычислений находим

$$\vec{h}_1 = \vec{U}_1, \quad \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\varepsilon_3} \vec{m}\vec{U}_2\vec{U}_3 - \frac{1}{\varepsilon_2} \vec{m}\vec{U}_3\vec{U}_2 \right) - \frac{i(\alpha_0 + \alpha_1)\vec{U}_2}{\varepsilon_2}, \quad (19)$$

$$\vec{h}_2 = [\vec{n}, \vec{U}_1] - i \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\varepsilon_e} \vec{m}\vec{U}_2\vec{n}, \quad \vec{e}_2 = \frac{n}{\varepsilon_1} \left\{ 1 - i(\alpha_0 + \alpha_1) \vec{m}\vec{U}_3 \right\} \vec{U}_1.$$

В случае когда свет распространяется в плоскости, ортогональной вектору \vec{U}_2 ,

$$\vec{h}_1 = \vec{U}_2, \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{m}\vec{U}_1}{\varepsilon_3} \vec{U}_3 - \frac{\vec{m}\vec{U}_3}{\varepsilon_1} \vec{U}_1 + i \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\varepsilon_1} \vec{U}_1, \quad (20)$$

$$\vec{h}_2 = [\vec{n}, \vec{U}_2] - i \frac{(\alpha_1 + \alpha_0) \vec{m}\vec{U}_1}{\varepsilon_1} \vec{n}, \quad \vec{e}_2 = \frac{n}{\varepsilon_2} \left\{ 1 + i(\alpha_0 + \alpha_1) \vec{m}\vec{U}_3 \right\} \vec{U}_2.$$

Следовательно, поведение векторов поля в волне аналогично их поведению в случае планальных классов одноосных кристаллов.

Однако есть и отличие, которое заключается в том, что в кристаллах класса $mm2$ имеется две гиращионные постоянные – α_0 и α_1 .

Поэтому, если $\alpha_0 \sim \alpha_1$, то, как следует из (19), (20), частично происходит компенсация влияния одной и второй постоянных на поляризацию волн в кристалле.

В кристаллах класса m тензор α имеет четыре независимых параметра, которые удобно представить в виде компонент двумерных векторов \vec{a} и \vec{b} [1]:

$$(\vec{a}\vec{U}_3 = \vec{b}\vec{U}_3 = 0): \alpha = \vec{b}\vec{U}_3 + \vec{U}_3\vec{b} + \vec{a}^{\times}.$$

Вычисляя Γ_3 , найдем:

$$\Gamma_3 \sim \vec{n}\vec{\Gamma} = (\vec{n}, \vec{U}_3) (\vec{R}, \vec{n}), \quad (21)$$

где вектор \vec{R} лежит в плоскости, ортогональной \vec{U}_3 , и имеет вид:

$$\begin{aligned} R = & \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \vec{b}\vec{U}_1 - \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \vec{a}\vec{U}_2 \right] \vec{U}_1 + \\ & + \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \vec{b}\vec{U}_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \vec{a}\vec{U}_1 \right] \vec{U}_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, при распространении света в плоскости, ортогональной вектору \vec{R} или вектору \vec{U}_3 , обычное эллиптическое двулучепреломление отсутствует. В последнем случае поляризация векторов поля определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 = \vec{U}_3, \vec{e}_1 = & \frac{\vec{m}_e\vec{U}_1}{\varepsilon_2} \vec{U}_2 - \frac{\vec{m}_e\vec{U}_2}{\varepsilon_1} \vec{U}_1 - i\vec{E}, \\ \vec{h}_2 = [\vec{n}, \vec{U}_3] - i\Gamma_3\vec{n}, \vec{e}_2 = & \frac{1}{n_0} \left\{ 1 - \frac{i}{\varepsilon_3} (\vec{b}[\vec{m}_0, \vec{U}_3] + \vec{a}\vec{m}_0) \right\} \vec{U}_3, \end{aligned} \quad (23)$$

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_3}, n_e^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 / \left[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\vec{n}\vec{U}_2)^2 \right],$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} (-\vec{a}\vec{U}_1 - \vec{b}\vec{U}_2) \vec{m}\vec{U}_2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (\vec{a}\vec{U}_2 + \vec{b}\vec{U}_1) \vec{m}\vec{U}_1, \quad (24)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_1} (\vec{b}\vec{U}_1 - \vec{a}\vec{U}_2) \vec{U}_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} (\vec{b}\vec{U}_2 + \vec{a}\vec{U}_1) \vec{U}_2.$$

Наконец, в классе 1 тензор α имеет 9 компонент, а соответствующие соотношения становятся весьма громоздкими, поэтому анализ этого случая возможен с привлечением численных методов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
2. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.
3. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.

4. Филиппов, В. В. К учету членов второго порядка малости в теории гиротропии / В. В. Филиппов // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 5. – С. 409–411.

5. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.01.2019

Sender N.N. Propagation of Light in Gyrotropic Crystals

The problem of light propagation in gyrotropic crystals with antisymmetric part of the gyration tensor is considered. The general solution of the equation $(1 - \tilde{\alpha}\epsilon^{-1}\alpha + \vec{m}\epsilon^{-1}\vec{m} + i\vec{\Gamma}^{\times})\vec{H} = 0$ for the vector of the magnetic field of its own waves \vec{H} applicable to crystals of all syngonies is obtained. Crystals of the average and lower crystal systems with the tensor of gyration $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\vec{c}\vec{c} + \alpha_0\vec{c}^{\times}$ are considered. It is shown, that for. It is shown that for the average syngonies in a quasi-ordinary wave, if \vec{n} and \vec{c} are not orthogonal, there is always a component the magnet field along the propagation direction, whereas in a quasi-ordinary wave such component appears only in the presence of an asymmetric part of the tensor α . In crystals of lower syngonies, the behavior of the field vectors in the wave is similar to their behavior in the case plannal classes of uniaxial crystals. However, there is a difference, which lies in the fact that in the crystals of class $mm2$ there are two gyration constants α_0 and α_1 . Finally, in class 1, the tensor α has 9 components, and the corresponding relations become very cumbersome, so the analysis of this case is possible with the involvement of numerical methods.

Д.В. Грицук¹, А.А. Трофимук²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., докторант каф. алгебры и геометрии
Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

ИНВАРИАНТЫ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КЛАССИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ*

К инвариантам конечной разрешимой группы относят производную и нильпотентную длины, p -длину, π -длину, нильпотентную π -длину и производную π -длину. В разделе 1 собраны результаты, устанавливающие оценки производной π -длины π -разрешимой группы G , порядок π -холовой подгруппы которой свободен n -ых степеней как в случае произвольного n , так и в случае малых его значений. В разделе 2 перечислены оценки производной π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы G , у которой 2-максимальная подгруппа в π -холовой подгруппе группы G абелева (нильпотентна). В разделе 3 содержится информация о влиянии нормального ранга силовской p -подгруппы p -разрешимой группы на ее производную p -длину.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в [1; 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π' . Группа называется π -группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π , и π' -группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1} . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число m называется длиной ряда.

Производная (нильпотентная) длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми (нильпотентными) факторами. Эти длины обозначаются через $d(G)$ и $n(G)$ соответственно. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы. В [3] были установлены оценки производной длины разрешимой группы, порядок которой не делится на $(n+1)$ -е степени простых чисел.

Пусть p – простое число. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо p -фактором, либо p' -фактором. Наименьшее число p -факторов среди всех таких субнормальных рядов

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

называется p -длиной p -разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн [4] в 1956 г. и установили зависимость p -длины p -разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовой p -подгруппы.

В 1967 г. Л.А. Шеметков [5] распространил понятие p -длины на произвольные группы и доказал, что p -длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовой p -подгруппы. Оценкам p -длины посвящены работы А.Х. Журтова и С.А. Сыскина [6], В.С. Монахова и О.А. Шпырко [7; 8], А.А. Трофимука [9–11]. В частности, в работе [12] была исследована p -длина p -разрешимой группы с силовой p -подгруппой нормального ранга не выше 3.

Аналогом p -длины для π -разрешимой группы является понятие π -длины. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо π -фактором, либо π' -фактором. Наименьшее число π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс [13] ввели понятие нильпотентной π -длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p -длины одновременно. Они доказали, что класс всех разрешимых групп ограниченной нильпотентной π -длины является наследственной насыщенной формацией и описали ее локальный экран.

Для π -разрешимой группы аналогом нильпотентной длины является понятие нильпотентной π -длины. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо нильпотентным π -фактором, либо π' -фактором. Наименьшее число нильпотентных π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что в случае когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^n(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G .

Одной из первых работ по нильпотентной π -длине π -разрешимой группы была статья М. Нумата [14], в которой она ограничена числом классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп, чьи индексы принадлежат π . Оценкам нильпотентной длины посвящены работы В.С. Монахова и О.А. Шпырко [7; 8].

Многими авторами исследовались инварианты частично разрешимых групп в зависимости от максимальных или 2-максимальных подгрупп. В частности, связь между 2-максимальными подгруппами группы и структурой группы G исследовалась в работах Редди [15], Хупперта [16], Судзуки [17], Янко [18] и В.А. Белоногова [19].

В 2006 г. В.С. Монахов [20] предложил аналог производной длины для π -разрешимой группы – понятие производной π -длины π -разрешимой группы. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π -фактором, либо π' -фактором. Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется абелевой π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G . Оценкам производной π -длины π -разрешимой группы посвящены работы [21–25].

Вполне естественно развить отмеченные выше результаты на производную π -длину π -разрешимой группы.

1. Оценки инвариантов π -разрешимых групп с малыми порядками силовских подгрупп

Напомним, что число n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

В.С. Монахов [3] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$ -е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$.

Вполне естественно развить эти результаты на случай π -разрешимой группы. Так, в работе [22, теорема 1] показано, что производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой являются абелевыми для всех $p \in \pi$, не превышает $|\pi(G_\pi)|$, где G_π – π -холлова подгруппа. Таким образом, если у π -разрешимой группы порядок π -холловой подгруппы G_π свободен от кубов, то ее производная π -длина не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе [26] получен ряд теорем, устанавливающих оценки производной π -длины π -разрешимой группы G , порядок π -холловой подгруппы которой свободен n -ых степеней как в случае произвольного n , так и в случае малых его значений.

Теорема 1.1. Если порядок π -холловой подгруппы π -разрешимой группы G свободен от квадратов, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Теорема 1.2. Пусть G – π -разрешимая группа. Если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то $l_\pi^a(G) \leq 4$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 1.3. Пусть G – π -разрешимая группа. Если небициклические силовские p -подгруппы π -холловой подгруппы группы G , $p \in \pi$ имеют порядки $2^3, 3^3, 2^4, 2^5$, то $l_\pi^a(G) \leq 6$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 1.4. Пусть G – π -разрешимая группа такая, что порядок любой силовской p -подгруппы P , $p \in \pi$ свободен от n -ых степеней. Тогда если $\{2, 3\} \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \frac{n+1}{2}$, и если $\{2, 3\} \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$.

2. Оценки инвариантов π -разрешимых групп с ограниченными n -максимальными подгруппами холловых π -групп

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G .

Связь между 2-максимальными подгруппами группы π и структурой группы G исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редди [15], описавший неразрешимые группы с абелевыми 2-максимальными подгруппами, и Хупперт [16], установивший сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты породили многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [17] и Янко [18] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [19].

В работе [25] были установлены оценки инвариантов π -разрешимых групп с ограниченной максимальной подгруппой π -холловой подгруппы, а в работе [27] получены оценки производной π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы G ,

у которой 2-максимальная подгруппа в π -холловой подгруппе группы G абелева (нильпотентна).

Группой Миллера – Морено называют неабелеву группу, все собственные подгруппы которой абелевы.

Теорема 2.1. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π . Если подгруппа M абелева или является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой nilьпотентны.

Теорема 2.2. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π . Если подгруппа M nilьпотентна или является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)$ и $l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r)(1 + \max_{r \in \pi} l_r(G))$.

Теорема 2.3. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π . Если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$.

Теорема 2.4. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π . Если подгруппа M nilьпотентна, то

$$l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r)(1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)).$$

3. Структура частично разрешимых групп с ограниченным нормальным рангом силовских подгрупп

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p -группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X / \Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P , в том числе и P .

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X . Из теоремы Бернсайда о базисе [2, теорема III.3.15] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p -группы P порождается не более, чем k элементами.

В.С. Монаховым в [12] было установлено, что если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга не выше 3, то p -длина не превышает 2. В частности, если p является нечетным, то p -длина не превышает 1. В работе [24] была исследована производная p -длина p -разрешимой группы в зависимости от строения силовской p -подгруппы. В частности, установлено, что производная p -длина p -разрешимой группы, у которой силовская p -подгруппа абелева, не превышает 1. Если же силовская p -подгруппа является метабелевой и $p > 2$, то производная p -длина не превышает 3. В работе [23] доказано, что если силовская p -подгруппа p -разрешимой группы бициклическая, то $l_p^a(G) \leq 3$. В частности, $l_p^a(G) \leq 2$ для $p > 2$. Возникает вопрос о влиянии нормального ранга силовской p -подгруппы p -разрешимой группы на ее производную p -длину. Ответ на данный вопрос был получен в работе [28].

Теорема 3.1. Если нормальный ранг силовской p -подгруппы p -разрешимой группы G не превышает некоторого натурального числа k , то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+2}{4}$

для $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+4}{4}$ для $p \in \{2,3\}$.

Очевидно, что p -группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [2] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, можно показать, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Из теоремы 3.1. вытекает ряд следствий.

Следствие 3.2. Если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 2 , то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Следствие 3.3. Если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 3 , то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
4. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
5. Шеметков, Л. А. О частично разрешимых конечных группах / Л. А. Шеметков // Мат. сб. – 1967. – Т. 72 (114), № 1. – С. 97–107.
6. Журтов, А. Х. О группах Шмидта / А. Х. Журтов, С. А. Сыскин // Сиб. мат. журн. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.
7. Монахов, В. С. О нильпотентной π -длине конечных π -разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискрет. математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.
8. Монахов, В. С. О нильпотентной π -длине максимальных подгрупп конечных π -разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.
9. Монахов, В. С. Конечные разрешимые группы, силовские P -подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Фундам. и приклад. математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
10. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
11. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
12. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
13. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

14. Numata, M. On the π -nilpotent length of π -solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – V. 8. – P. 447–451.
15. Rédei, L. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.
16. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
17. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
18. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
19. Белоногов, В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В. А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
20. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – P. 573–581.
21. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика и информатика. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
22. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.
23. Грицук, Д. В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
24. Грицук, Д. В. Зависимость производной p -длины p -разрешимой группы от порядка ее силовской p -подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.
25. Монахов, В. С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.
26. Грицук, Д. В. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
27. Грицук, Д. В. Конечные π -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
28. Грицук, Д. В. Производная p -длина p -разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовской p -подгруппы ограничен / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фїзїка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 59–65.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.02.2019

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A. Invariants of Partially Soluble Groups with Restrictions on Classical Subgroups

The invariants of a finite soluble group include the derived and the nilpotent length, p -length, π -length, nilpotent π -length, and derived π -length. In Section 1 results that establish the estimates of the derived π -length of a π -soluble group in which the order of a Hall π -subgroup is n -th degree free for arbitrary n and also for small values of n are compiled. Section 2 lists the estimates of the derived π -length and the nilpotent π -length of a π -solvable group in which 2-maximal subgroup of Hall π -subgroup is abelian (nilpotent). Section 3 contains information about the influence of the normal rank of a Sylow p -subgroup of a p -solvable group on its derived p -length.

УДК 517.927.21

С.А. Марзан

канд. физ.-мат. наук, доц., первый проректор
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[e-mail:marzanserg2@gmail.com](mailto:marzanserg2@gmail.com)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследована задача типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производными Римана – Лиувилля комплексных порядков в весовом пространстве непрерывных функций. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля в весовом пространстве непрерывных функций доказана равносильность рассматриваемой задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также получены условия существования и единственности решения задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

$([\operatorname{Re}(\alpha)] - \text{целая часть } \operatorname{Re}(\alpha))$ [1, § 2.2, 2.4].

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами (см. исторические сведения и обзор методов и результатов в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [2]). Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [3; 4]. С точки зрения приложений одной из наиболее актуальных задач теории дифференциальных уравнений дробного порядка является построение теории их разрешимости в различных функциональных пространствах.

Обозначим через $C_{\gamma}[a, b]$ ($\gamma \in \mathbb{C}$) класс функций $g(x)$, заданных на $[a, b]$ и таких, что $(x-a)^{\gamma}g(x) \in C[a, b]$:

$$C_{\gamma}[a, b] = \left\{ g(x) : \|g\|_{C_{\gamma}} = \left\| (x-a)^{\gamma}g(x) \right\|_C < \infty \right\}, \quad C_0[a, b] = C[a, b]. \quad (3)$$

Для $\gamma \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $C_{\gamma}^n[a, b]$ банахово пространство функций $g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $n-1$ и имеющих производную порядка n такую, что $g^{(n)}(x) \in C_{\gamma}[a, b]$:

$$C_{\gamma}^n[a, b] = \left\{ g : \|g\|_{C_{\gamma}^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|g^{(k)}\|_C + \|g^{(n)}\|_{C_{\gamma}} \right\}, \quad C_{\gamma}^0[a, b] = C_{\gamma}[a, b].$$

Из этого определения вытекает следующее описание пространства $C_\gamma^n[a, b]$.

Лемма 1. Пространству $C_\gamma^n[a, b]$ принадлежат те и только те функции $g(x)$, которые представимы в виде

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (4)$$

где $\varphi(t) \in C_\gamma[a, b]$, а c_k – произвольные постоянные. При этом

$$\varphi(x) = g^{(n)}(x), c_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

В частности, при $\gamma = 0$ $g(x) \in C^n[a, b]$ тогда и только тогда, когда $g(x)$ представляется в виде (4), где $\varphi(x) \in C[a, b]$.

Непосредственные оценки с учетом (3) и [1, (2.44)] дают условия ограниченности оператора I_{a+}^α в пространстве $C_\gamma[a, b]$.

Лемма 2. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$).

Если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha)$, то оператор I_{a+}^α ограниченно действует из $C_\gamma[a, b]$ в $C_{\gamma-\alpha}[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(\alpha)$, то оператор I_{a+}^α ограниченно действует из $C_\gamma[a, b]$ в $C[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_C \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha-\gamma)} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

В частности, оператор I_{a+}^α ограничен в $C_\gamma[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{C_\gamma} \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha)} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\alpha))\Gamma(1-\operatorname{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\operatorname{Re}(\alpha-\gamma))} \|f\|_{C_\gamma}.$$

Следующие три утверждения для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ доказываются аналогично известным результатам для $g(x) \in L(a, b)$ [1, §§ 2.3, 2.5, теорема 2.4] с учетом леммы 1.

Лемма 3. Если $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), то для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ выполняется полугрупповое свойство

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta g)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} g)(x) \quad (\alpha \in C, \operatorname{Re}(\alpha) > 0; \beta \in C, \operatorname{Re}(\beta) > 0).$$

Лемма 4. Если $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), то для функций $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ справедлива формула

$$\left(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha g \right)(x) = g(x).$$

Если дополнительно $\beta \in C$ и $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$, то для $g(x) \in C_\gamma[a, b]$

$$\left(D_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha g \right)(x) = \left(I_{a+}^{\alpha-\beta} g \right)(x).$$

Лемма 5. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) $n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$, $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g \right)(x)$ – дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка $n - \alpha$, и $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$).

Если $g(x) \in C_\gamma[a, b]$ и $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g \right)(x) \in C_\gamma^n[a, b]$, то имеет место формула

$$\left(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha g \right)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}, \quad g_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} g \right)(x). \quad (5)$$

Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для более общего, чем в [5], нелинейного дифференциального уравнения

$$\left(D_{a+}^\alpha y \right)(x) = f \left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y \right)(x), \dots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y \right)(x) \right], \quad n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)], \quad (6)$$

где $\alpha, \alpha_i \in C$ ($i = 1, \dots, n$),

$$0 = \alpha_0 < \operatorname{Re}(\alpha_1) < \dots < \operatorname{Re}(\alpha_{n-1}) < \operatorname{Re}(\alpha), \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y \right)(a+) = b_k, \quad b_k \in C \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

в пространстве $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$:

$$C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b] = \left\{ y \in C_{n-\alpha}[a, b] : D_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a, b] \right\}, \quad C_\gamma^\alpha[a, b] \equiv C_{0, \gamma}^\alpha[a, b].$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \in C$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$), $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ ($n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$) удовлетворяют условию (7), а функция $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] : [a, b] \times R^n \rightarrow R$ такова, что при любых $y_i \in R$ ($i = 1, \dots, n$) $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] \in C_\gamma[a, b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_n) \in [a, b] \times \bar{R}^n} \left| (x-a)^\gamma f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] \right| = M_\gamma < \infty. \quad (9)$$

Для того чтобы функция $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ являлась решением задачи типа Коши (6), (8), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt. \quad (10)$$

Доказательство. Если $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ и выполняется условие (9), то из (6) и (3) следует, что дробная производная $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) \in C_{\gamma}[a, b]$. В соответствии с (2)

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1,$$

и тогда согласно лемме 1 $(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \in C_{\gamma}^n[a, b]$. Это дает возможность воспользоваться леммой 5 с $\gamma = n - \alpha$. Применяя оператор I_{a+}^{α} к обеим частям (6), используя (5) и (8), с учетом (9) и леммы 2, согласно которой

$$(I_{a+}^{\alpha} f)[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(x)] \in C_{n-\alpha}[a, b],$$

мы приходим к интегральному уравнению (10).

Пусть теперь $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ – решение интегрального уравнения (10). Применяя оператор D_{a+}^{α} к обеим частям (10), учитывая равенства

$$(D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta - 1})(x) = 0, \quad \beta = \alpha, \alpha - 1, \dots, \alpha - [\operatorname{Re}(\alpha)]$$

и лемму 4, получим уравнение (6).

Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (8). Пусть $k \in N$, $1 \leq k \leq n - 1$. Применяя оператор $D_{a+}^{\alpha - k}$ к обеим частям уравнения (10) и используя равенство

$$(D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta - 1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \alpha, \beta \in C, \operatorname{Re}(\beta) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

и лемму 4, получим:

$$(D_{a+}^{\alpha - k} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} (x - a)^{k - j} + \frac{1}{(k - 1)!} \int_a^x f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)] (x - t)^{k - 1} dt. \quad (11)$$

Если же $k = n$, то

$$(D_{a+}^{\alpha - n} y)(x) \equiv (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(n - j)!} (x - a)^{n - j} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)] (x-t)^{n-1} dt. \quad (12)$$

Переходя в (11) и (12) к пределу при $x \rightarrow a + 0$, приходим к равенствам (8). Это завершает доказательство теоремы.

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (6), (8) к условиям теоремы 1 добавим дополнительное условие липшицевости функции f относительно n переменных:

$$|f[x, y_1, \dots, y_n] - f[x, y_1', \dots, y_n']| \leq L \sum_{i=1}^n |y_i - y_i'| \quad (13)$$

для любых $x \in [a, b]$ и $(y_1, \dots, y_n), (y_1', \dots, y_n') \in R^n$, где постоянная $L > 0$ не зависит от x .

Теорема 2. Пусть $\alpha \in C, (\operatorname{Re}(\alpha) > 0), \gamma \in C (0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1), n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$. Пусть функция $f[x, y_1, y_2, \dots, y_n]: [a, b] \times R^n \rightarrow R$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и выполняется условие (13). Тогда существует единственное решение задачи типа Коши (6), (8) в пространстве $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать существование единственного решения интегрального уравнения (10), которое имеет смысл на любом отрезке $[a, x_1] \subset [a, b]$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$L \sum_{i=1}^n A_i < 1, \quad (14)$$

где $L > 0$ определяется условием (13), а

$$A_k = (x_1 - a)^{\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})} \frac{\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})] \Gamma[\operatorname{Re}(\alpha) - n + 1]}{|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1})| \Gamma[1 - \operatorname{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n]}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и докажем существование единственного решения интегрального уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Для доказательства применим метод последовательных приближений. Пусть

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j}, \quad (15)$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (16)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Из (15) следует, что $y_0(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. Согласно условиям теоремы и лемме 2, второй член в правой части (16) также принадлежит $C_{n-\alpha}[a, b]$. Действительно, если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha)$, то в силу леммы 2

$$I_{a+}^{\alpha} f \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \in C_{\gamma-\alpha}[a, b],$$

Следовательно, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] \cap C_{\gamma-\alpha}[a, b] = C_{n-\alpha}[a, b]$. Если же $\operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(\alpha)$, то согласно лемме 2 $I_{a+}^{\alpha} f \in C[a, b]$, а значит, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$.

Оценим теперь разность $\|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}}$ при $m \in N$ и $k = 1, \dots, n$. Для этого заметим, что в силу (16), леммы 4, леммы 2 и (9) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} (I_{a+}^{\alpha} f)[x, y_{m-1}(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(x)]\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|(I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} f)[x, y_{m-1}(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1})(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1})(x)]\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq M_{n-\alpha} (x_1 - a)^{\operatorname{Re}(\alpha-\alpha_{k-1})} \frac{\Gamma[\operatorname{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})] \Gamma[\operatorname{Re}(\alpha) - n + 1]}{|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1}) \Gamma[1 - \operatorname{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n]|} = M_{n-\alpha} A_k, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, n$. Отсюда при $m = 1$ получаем оценку

$$\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} \leq M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^n A_i. \quad (16)$$

Используя лемму 2, (13) и принимая во внимание (16), имеем:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & = \|I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} (f[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1] - f[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0])\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k \|f[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1] - f[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0]\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k L \left(\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0\|_{C_{n-\alpha}} \right) \leq A_k L M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^n A_i, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_2 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1\|_{C_{n-\alpha}} \leq M_{n-\alpha} L \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^2.$$

Повторяя m раз такие же оценки, приходим к соотношению

$$\|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}} \leq A_k L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{m-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В частности, при $k = 1$:

$$\|y_m - y_{m-1}\|_{C_{n-\alpha}} \leq A_1 L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{m-1}.$$

Из условия (14) следует, что последовательность $y_m(x)$ сходится к некоторой предельной функции $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m(t) - y(t)\|_{C_{n-\alpha}} = 0, \quad (17)$$

и более того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y\|_{C_{n-\alpha}} = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (18)$$

Согласно лемме 2 и условию (13)

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_1 L \sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y\|_{C_{n-\alpha}}, \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (18)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $y(t)$ есть решение уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Покажем, что это решение единственно. Предположим, что существуют два решения $y(t)$ и $Y(t)$ интегрального уравнения (10). В силу леммы 2 эти решения удовлетворяют уравнениям

$$D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y = D_{a+}^{\alpha_{k-1}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} \right) + \left(I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} f \right) [t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y], \quad (19)$$

где $k = 1, \dots, n$. Подставляя $y(t)$ и $Y(t)$ в (19), вычитая одно из другого и применяя лемму 4 и условие (13), получим:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} Y\|_{C_{n-\alpha}} = \\ & \left\| I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} \left(f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y] - [t, Y, D_{a+}^{\alpha_1} Y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} Y] \right) \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq \\ & \leq A_k L \sum_{i=1}^n \|D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} Y\|_{C_{n-\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq L \sum_{k=1}^n A_k \sum_{i=1}^n \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}}.$$

Следовательно, $L \sum_{k=1}^n A_k \geq 1$, что противоречит условию (14).

Таким образом, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Рассмотрим далее отрезок $[x_1, x_2]$, где $x_2 = x_1 + h$, $h > 0$, $x_2 \leq b$. Уравнение (10) перепишем в виде

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y)(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (20)$$

$x \in [x_1, x_2]$.

Так как на отрезке $[a, x_1]$ функция $y(x)$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (20) равносильно уравнению

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

где

$$y_1(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f[t, y(t), D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

есть известная функция. Повторяем те же рассуждения на отрезке $[x_1, x_2]$ и получаем единственное решение на этом отрезке. Затем берем следующий отрезок и т.д., пока не получим единственное решение на всем отрезке $[a, b]$.

Таким образом, существует единственное решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ уравнения (10), а значит, и задачи типа Коши (6), (8) такое, что равенства (17), (18) выполняются на всем отрезке $[a, b]$.

Теперь покажем, что это решение принадлежит пространству $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$.

Для этого достаточно показать, что $D_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a, b]$.

Если $0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) \leq \operatorname{Re}(n-\alpha)$, то используя (6) и (13), имеем:

$$\left\| D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y \right\|_{C_\gamma} \leq (b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} \left\| D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y \right\|_{C_{n-\alpha}} = (b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} \cdot \left\| f[x, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[x, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y] \right\|_{C_{n-\alpha}} \leq$$

$$(b-a)^{\operatorname{Re}(n-\alpha-\gamma)} L \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}} \quad (D_{a+}^{\alpha_0} y = y).$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(n-\alpha)$, то учитывая (6) и (13), находим:

$$\begin{aligned} & \|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} = \\ & = \|f[x, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m] - f[x, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \dots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y]\|_{C_{\gamma}} \leq \\ & \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{\gamma}} \leq L(b-a)^{\operatorname{Re}(\gamma-n+\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} \leq L_1 \sum_{i=0}^{n-1} \|D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\|_{C_{n-\alpha}},$$

где $L_1 > 0$ – некоторая постоянная, и тогда в силу (17) – (18)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\|_{C_{\gamma}} = 0.$$

Это означает, что $D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a, b]$, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Kilbas, A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // *Applicable Analysis*. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.
3. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. *Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics* / R. Gorenflo, F. Mainardi. – Wien ; New York : Springer. – 1997. – P. 223–276.
4. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.
5. Килбас, А. А. Дробные интегралы и производные, дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / А. А. Килбас, Б. Бонилла, Х. Трухилло // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 6. – С. 18–22.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.03.2019

Marzan S.A. The Existence and Uniqueness of the Cauchy-Type Problem Solution for a Differential Equation of Complex Order in the Weighted Spaces of N-Time Differentiable Functions

The article examines the Cauchy-type problem for a nonlinear differentiable equation with Riemann – Liouville derivatives of complex orders in the weighted spaces of n-time functions. Using the properties of fractional integrals and Riemann – Liouville derivatives in the weighted spaces of continuous functions, the equivalence of the problem in question is proved by the second-kind Volterra integral equation, and the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem are obtained.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru

**АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
В НЕЯВНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для решения линейных некорректных уравнений с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближенной правой части операторного уравнения, погрешность в счете. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

Посвящается выдающемуся белорусскому математику, профессору П.П. Забрейко

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A(y - Ax_{n+1}), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже метод (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \left(\|x - x_{n,\delta}\| \right) \right) = 0$.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Справедлива

Теорема 1. Итерационный метод (2) при условии $\alpha \in (0, \infty)$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y. \quad (4)$$

Действительно, из (2) и из (4) $x_1 = (E + \alpha A^2)^{-1} \alpha A y$, следовательно, при $n = 1$ формула (4) верна. Предположим, что она справедлива при $n = m$, т. е. $x_m = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-m} \right] y$ и докажем, что (4) верна при $n = m + 1$:

$$x_{m+1} = x_m + \alpha A (y - A x_{m+1}) = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-m} \right] y + \alpha A (y - A x_{m+1}) = A^{-1} y + \alpha A y - A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-m} y - \alpha A^2 x_{m+1},$$

отсюда

$$x_{m+1} = A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-1} y - A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-(m+1)} y + \alpha A (E + \alpha A^2)^{-1} y = A^{-1} (E + \alpha A^2) (E + \alpha A^2)^{-1} y - A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-(m+1)} y = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-(m+1)} \right] y.$$

Следовательно, формула (4) справедлива.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1} y - A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y = A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-n} y = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось

$$\alpha \in (0, \infty). \tag{5}$$

Тогда $\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq q < 1$ и, следовательно, $\left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| = q^n \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$

$$\left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda y \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \rightarrow 0,$$

так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции [1].

Таким образом, доказано, что $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, т.е. что метод (2) при условии (5) сходится. Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} dE_\lambda z$.

Найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1 + \alpha \lambda^2)^{-n}$. Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$: $\lambda^{s-1} (1 + \alpha \lambda^2)^{-n-1} [s(1 + \alpha \lambda^2) - 2n\alpha \lambda^2] = 0$.

Отсюда $\lambda_* = \left(\frac{s}{(2n-s)\alpha} \right)^{1/2}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$ при $2n > s$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка максимума для $f(\lambda)$. Найдем его:

$$\begin{aligned} f(\lambda_*) &= \left[\frac{s}{(2n-s)\alpha} \right]^{s/2} \left[1 + \frac{s}{2n-s} \right]^{-n} = s^{s/2} \alpha^{-s/2} (2n-s)^{n-s/2} (2n)^{-n} = \\ &= \left(\frac{s}{2n\alpha} \right)^{s/2} \left(1 + \frac{s}{2n-s} \right)^{\frac{-(2n-s)}{2}} < \left(\frac{s}{2n\alpha} \right)^{s/2} 2^{-s/2} = \left(\frac{s}{4n\alpha} \right)^{s/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что найденный для функции $f(\lambda)$ максимум является глобальным на отрезке $[0, M]$. Таким образом, $\|x - x_n\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\|$.

4. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (5) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части операторного уравнения (1).

Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$.

По доказанному в разделе 2, $x - x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] (y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} \right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} \right] \geq 0$

при условии (5).

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda^2}$. Ее производная равна $g_1'(\lambda) = \frac{\alpha(1-\alpha\lambda^2)}{(1+\alpha\lambda^2)^2}$, следовательно, $\lambda^* = \alpha^{-1/2}$ – стационарная точка для функции $g_1(\lambda)$. Поскольку $g_1''(\lambda^*) < 0$, то λ^* – точка максимума функции $g_1(\lambda)$ и $\max_{[0, M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \leq \alpha^{1/2}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \leq 2n^{1/2} \alpha^{1/2}. \tag{6}$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \geq 2$. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \leq 2m^{1/2} \alpha^{1/2}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \right] = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^2)^m} \right] + \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \right] - \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^2)^m} \right] \leq 2m^{1/2} \alpha^{1/2} + \frac{\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}}.$$

Покажем, что

$$2m^{1/2} \alpha^{1/2} + \frac{\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \leq 2(m+1)^{1/2} \alpha^{1/2}, \tag{7}$$

что равносильно неравенству $\frac{\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \leq 2(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \alpha^{1/2}$. Отсюда

$$\frac{\alpha^{1/2}\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \leq 2(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}). \text{ Имеем } \sqrt{m+1} = \sqrt{m\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{m} \left\{ 1 + \frac{1}{2m} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!m^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!m^3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!m^4} + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot m^{2p-1}} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right] \cdot \left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot 2p \cdot m^{2p}} + \dots \right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}} > \left| \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}} \right|,$$

что равносильно $1 > \frac{\left|\frac{1}{2}-(2p-1)\right|}{2pt}$ или $\frac{2p-3}{2pt} < 1$, а это уже очевидно при $m \geq 1$. Следовательно, $\sqrt{m+1} > \sqrt{m}\left(1 + \frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^2}\right)$.

Вернемся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. раздел 3) $\frac{\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}} \leq [4(m+1)\alpha]^{-1/2}$, то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$[4(m+1)\alpha]^{-1/2} \alpha^{1/2} \leq 2m^{1/2} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^2}\right). \quad (8)$$

Преобразуем его: $(m+1)^{-1/2} 2^{-1} \leq 2m^{1/2} \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{1}{4m}\right)$.

При $m \geq 2$ $2\left(\frac{m+1}{m}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4m}\right) > 1$. Значит, неравенство (8) выполняется, и тем более справедливо неравенство (7). Таким образом, для $n \geq 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda) \leq 2n^{1/2}\alpha^{1/2}$, $n \geq 1$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$, $n \geq 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 2n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/2}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Итак, доказана

Теорема 2. При условии (5) итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/2}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\| + 2(n\alpha)^{1/2} \delta, n \geq 1. \quad (9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии (5) для метода (3) справедлива оценка погрешности (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова (параметр регуляризации)

$$n_{\text{опт}} = 2^{-2} s^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}. \quad (10)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \cdot s^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}. \quad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид (11) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (10).*

Замечание 1. *Оценка погрешности (11) имеет порядок $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [2], она является оптимальным в классе задач с истокорпредставимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$.*

Замечание 2. *Оптимальная оценка (11) не зависит от α , но от параметра α зависит $n_{\text{опт}}$, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α , удовлетворяющую условию (5) и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно выбрать $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-2} s^{(s+2)/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$.*

Сравнение неявного метода (3) с широко известным явным методом простой итерации (методом Ландвебера) [2–8]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (12)$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике

к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Рассмотрим погрешность неявного метода (3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), которую можно преобразовать к виду: $x_{n+1,\delta} = (E + \alpha A^2)^{-1} [x_{n,\delta} + \alpha Ay_\delta]$, $x_{0,\delta} = 0$. Тогда z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} [z_n + \alpha Ay_\delta] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (13)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} \varepsilon_n + \alpha \gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$.

По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-(n-1-i)} \alpha \gamma_i.$$

В силу (5) и потому, что $0 \in Sp A$ справедливо $\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} \right\| \leq 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma$, $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода итераций (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq \left(\frac{s}{4n\alpha} \right)^{s/2} \|z\| + 2(n\alpha)^{1/2} \delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1.$$

Предложенный метод может быть применен для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, сейсмике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
7. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.03.2019

O.V. Matysik. The a Priori Choice of Parameter of Regularization in the Non-Evident Iteration Method of the Decision of the Linear Non-Correct Equations

In the Hilbert space to solve of the linear non-correct equations with limited affirmed self-adjoned operator we investigate the application of the non-evident iteration method. Convergence of the method in its initial norm of Gilbert space is proved. The a priori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.

УДК 517.925

И.Н. Мельникова¹, В.В. Войтович²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: 375298029207@mail.ru**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИКА
ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ХЕМОСТАТА С ДВУМЯ МИКРООРГАНИЗМАМИ**

Проводится исследование биологической модели хемостата, когда присутствует один субстрат и два микроорганизма. Эта модель описывается дифференциальной системой третьего порядка. Проводится компьютерная реализация методов решения этих систем, а также визуализация и анимация получающихся решений.

Введение

Методы искусственного биосинтеза популяций микроорганизмов находят широкое применение в современной биологии и медицинской промышленности. При этом выращивание полезной биомассы микроорганизмов бактерий производится в специальных приборах – хемостатах и биореакторах.

Термин хемостат (впервые был предложен Новиком и Сцилардом) обозначает лабораторное устройство микробиологии, в котором изучают динамику развития популяций микроорганизмов. Хемостат предназначен для непрерывного культивирования микроорганизмов и состоит из трех основных частей: герметичного резервуара, заполненного специальным раствором (субстратом), устройства подачи питающего субстрата и выходного отверстия для выхода приросшей биомассы [1].

В данном проекте будем работать с системой Mathematica. Mathematica – система компьютерной алгебры (обычно называется Математика, программный пакет Математика), широко используемая в научных, инженерных, математических и компьютерных областях. Изначально система была разработана Стивеном Вольфрамом, впоследствии – компанией Wolfram Research.

Основные аналитические возможности: решение систем полиномиальных и тригонометрических уравнений и неравенств, а также трансцендентных уравнений, сводящихся к ним; решение рекуррентных уравнений; упрощение выражений; нахождение пределов; интегрирование и дифференцирование функций; нахождение конечных и бесконечных сумм и произведений; решение дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных; преобразования Фурье и Лапласа, а также Z-преобразование; преобразование функции в ряд Тейлора, операции с рядами Тейлора: сложение, умножение, композиция, получение обратной функции; вейвлетный анализ.

Аналитическое решение хемостат-системы

Хемостат имитирует ситуацию, существующую в природе, в том отношении, что клетки поддерживаются в нем в условиях незначительного, но непрерывного поступления субстрата. Измеряемая концентрация субстрата не дает никакой информации о количестве субстрата, находящемся в обороте; она отражает лишь сродство к субстрату соответствующих микробных систем и его связь со скоростью поступления субстрата. Рост и оборот субстрата не обязательно связаны между собой стабильным соотношением.

ем, но оборот субстрата может быть все менее сопряжен с ростом по мере снижения скорости поступления субстрата [2].

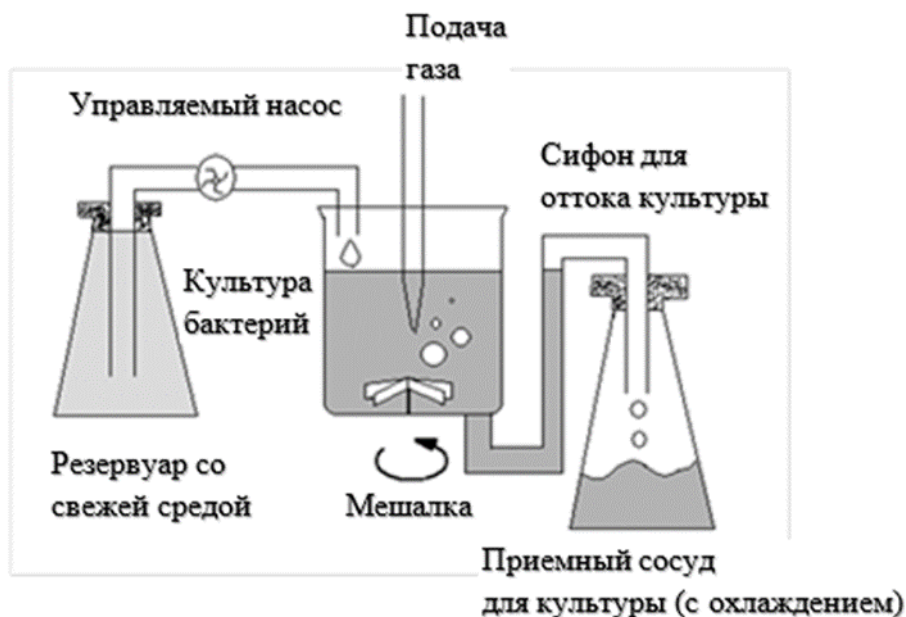


Рисунок 1. – Система для непрерывного культивирования (хемостат)

В микробиологии общепринят эмпирический подход к построению моделей. Из всех факторов, влияющих на рост клетки, выбирают лимитирующий и опытным путем находят зависимость скорости роста от его концентрации. В общем виде кинетика концентрации клеток в непрерывной культуре описывается уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \nu). \quad (1)$$

Здесь x – концентрация клеток в культиваторе; μ – функция, описывающая размножение популяции. Она может зависеть от концентрации клеток x , концентрации субстрата (обычно обозначается S), температуры, pH среды и прочих факторов; ν – скорость вымывания.

При непрерывном перемешивании можно считать весь объем культиватора однородно заполненным, концентрации субстрата и клеток в каждой точке культиватора одинаковыми и описывать поведение этих концентраций во времени с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dx}{dt} &= \mu(S)x - Dx, \\ (b) \quad \frac{dS}{dt} &= DS_0 - \alpha\mu(S)x - DS, \\ (c) \quad \mu(S) &= \frac{\mu_m S}{K_m + S}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь S – концентрация субстрата; x – концентрация клеток в культиваторе; S_0 – концентрация субстрата, поступившего в культиватор; D – скорость протока (разбавления) культуры; α^{-1} – «экономический коэффициент», показывающий, какая часть по-

глощенного субстрата идет на приращение биомассы. Смысл членов, входящих в правые части уравнений: $m(S)x$ – прирост биомассы за счет поглощения субстрата; $-Dx$ – отток биомассы из культиватора; $-am(S)x$ – количество субстрата, поглощенного клетками культуры; DS_0 – приток субстрата в культиватор; $-DS$ – отток неиспользованного субстрата из культиватора. Скорость роста биомассы предполагается зависящей только от концентрации субстрата в соответствии с формулой Моно:

$$R(S) = \frac{\mu_0 S}{K_S + S}. \quad (3)$$

Здесь K_S – константа, равная концентрации субстрата, при которой скорость роста равна половине максимальной, m_0 – максимальная скорость роста.

Рассмотренная модель является упрощенной и для описания реальных процессов требует дополнений. В биологии субстрат – место обитания и развития организмов. Субстраты служат местом прикрепления животного, растения или другого организма и могут выполнять функцию питательной среды. Субстрат может включать в себя как живые, так и неживые материалы, а также животных. При больших концентрациях субстрат может оказывать ингибирующее действие, и тогда формулу для скорости роста следует записывать в виде:

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_m + S + AS^2}. \quad (4)$$

В системе, где существует такая зависимость скорости роста от субстрата, возможны триггерные режимы – наличие двух устойчивых стационарных состояний и зависимость стационарных значений концентраций субстрата и биомассы от начальных условий (от величины затравки и начальной концентрации биомассы).

На скорость роста биомассы может оказывать влияние концентрация продуктов метаболизма в среде, окружающей клетку. Тогда к двум уравнениям, описывающим динамику концентрации биомассы и субстрата в непрерывном процессе культивирования, следует добавить третье уравнение, выражающее динамику концентрации продуктов метаболизма:

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{(K_m + S) + (K_r + P)} \quad (5)$$

Формула (5) известна как формула Моно – Иерусалимского.

В биотехнологии для расчета оптимальных режимов культивирования применяются формулы, учитывающие другие особенности как метаболизма самих микроорганизмов, так и условий их выращивания.

Основной математический результат для модели хемостата Михаэлиса – Ментена может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть коэффициенты системы дифференциальных уравнений (6)

$$\begin{aligned} s'(t) &= f(t) - s(t) - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) &= \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) x_1(t), \\ x_2'(t) &= \left(\frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)} - 1 \right) x_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

здесь искомая функция $s(t)$ обозначает плотность питательного вещества, функции $x_1(t), x_2(t)$ – плотность микроорганизмов в момент времени t , периодическая функция $f(t)$ определяет скорость подачи питательного субстрата в хемостат, параметры $m_i, a_i (i=1,2)$ имеют тот же биологический смысл, что и для модели одномерного хемостата для i -той популяции соответственно) удовлетворяют неравенствам

$$m_i > 1 (i=1,2), 0 < w_1 < w_2 < 1. \quad (7)$$

Тогда для любого решения системы (6) с начальными концентрациями

$$s(0) = s_0 \geq 0, x_1(0) = x_1^0 \geq 0, x_2(0) = x_2^0 \geq 0$$

выполняются предельные соотношения: $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = w_1, \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 1 - w_1, \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0,$

где $w_i = \frac{a_i}{m_i - 1} (i=1,2)$ – безубыточные концентрации.

Таким образом, во время хемостат-процесса обе популяции либо вымирают, либо выживает только одна из них, имеющая наименьшее значение параметра $w_i (i=1,2)$. При выполнении равенства $w_1 = w_2$ теоретически возможно сосуществование обеих популяций, однако этот случай с биологической точки зрения считается сложно реализуемым и обычно не рассматривается.

Для построения аналитических решений динамической модели хемостата Михаэлиса – Ментен, которые описывают процесс непрерывного культивирования бактерий с одним органическим субстратом и двумя видами микроорганизмов, рассмотрим не масштабированную систему (6), которая примет вид [3]

$$\begin{aligned} s'(t) &= (1 - s(t))D - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) &= \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - D \right) x_1(t), \\ x_2'(t) &= \left(\frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)} - D \right) x_2(t). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{sys1} &= \{s'[t] == f[t] - s[t] - (g[s[t], 1]x_1[t]) - (g[s[t], 2]x_2[t]), x_1'[t] == x_1[t](g[s[t], 1] \\ &- 1), x_2'[t] == x_2[t](g[s[t], 2] - 1)\}; \\ \text{tf}[\text{sys1}] \end{aligned}$$

Покажем, что при определенных коэффициентных соотношениях существует аналитическое решение.

$$\text{sys2} = \text{sys1} /. \{a_2 \rightarrow a_1, m_2 \rightarrow \rho m_1\} // \text{sp};$$

Сложим три уравнения системы sys2 . В результате получим ДУ первого порядка относительно функции $\Delta(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t)$.

$$\begin{aligned} eq3 &= Sum[sys2[[i,1]],\{i,1,3\}] == Sum[sys2[[i,2]],\{i,1,3\}] // sp \\ eq0 &= eq3 / .D[fun,t] / .fun // sp \\ sol0 &= DSolve[eq0,\Delta[t],t][[1]] // sp \end{aligned}$$

Исключим из второго и третьего уравнений системы $sys2$ функцию $s(t)$.

$$eq4 = Eliminate[\{sys2[[2]],sys2[[3]]\},s[t]] // sp$$

Проинтегрируем ДУ $eq4$.

$$\begin{aligned} sol2 &= DSolve[eq4,x_2[t],t] /. C[1] \rightarrow C[2] // ft // fs \\ eq4 &/ .D[sol2,t] / .sol2 // sp \end{aligned}$$

где $C[2]$ – произвольная постоянная.

Используя найденные функциональные соотношения fun и $sol2$ между функциями $s(t), x_1(t), x_2(t)$, перепишем первое уравнение системы $sys2$.

$$\begin{aligned} eq5 &= Solve[(sys2[[1]] / .D[fun /. sol0 /. sol2,t] / .fun /. sol0 /. sol2),x_1[t]][[1,1]] \\ &/ .sol3 / .Rule \rightarrow Equal // sp \end{aligned}$$

ДУ $eq5$ является нелинейным уравнением первого порядка, не разрешаемым в квадратурах, поэтому для его интегрирования будем использовать численные методы.

Используя функцию $solx1[a1_,m1_,\rho1_,\alpha1_,w1_,x1_,x2_,s00_,tt_]$, можно найти численное решение для различных значений параметров.

Например, когда $a_1 = 1/3, m_1 = 2, \rho = 0.95, \alpha = 1.5, w = 0.8$, при начальных условиях $x_1^0 = 0.2, x_2^0 = 0.3, s_0 = 0.3$, на интеграле $t \in [0,50]$ решение $x_1(t)$ имеет вид:

$$solx1[1/3,2,.95,1.5,.8,.2,.3,.3,50] // ft$$

Сделаем анимацию графика решения уравнения $eq5$ в зависимости от изменяющихся параметров $a_1, m_2, \rho, \alpha, w, x_1^0, x_2^0, s_0, tt$ (рисунок 2).

$$\begin{aligned} &DynamicModule[\{a1 = \frac{1}{3}, b1 = 1.86, m1 = 2, s00 = 0.3, tt = 50, \\ &x1 = 0.2, x2 = 0.3, \alpha1 = 1.5, \rho1 = 1.1, w1 = 0.8\}, \\ &Plot[Evaluate[x_1[t] / .solx1[a1, m1, \rho1, b1, \alpha1, w1, x1, x2, s00, tt][[1]], \{t, 0, tt\}]] \end{aligned}$$

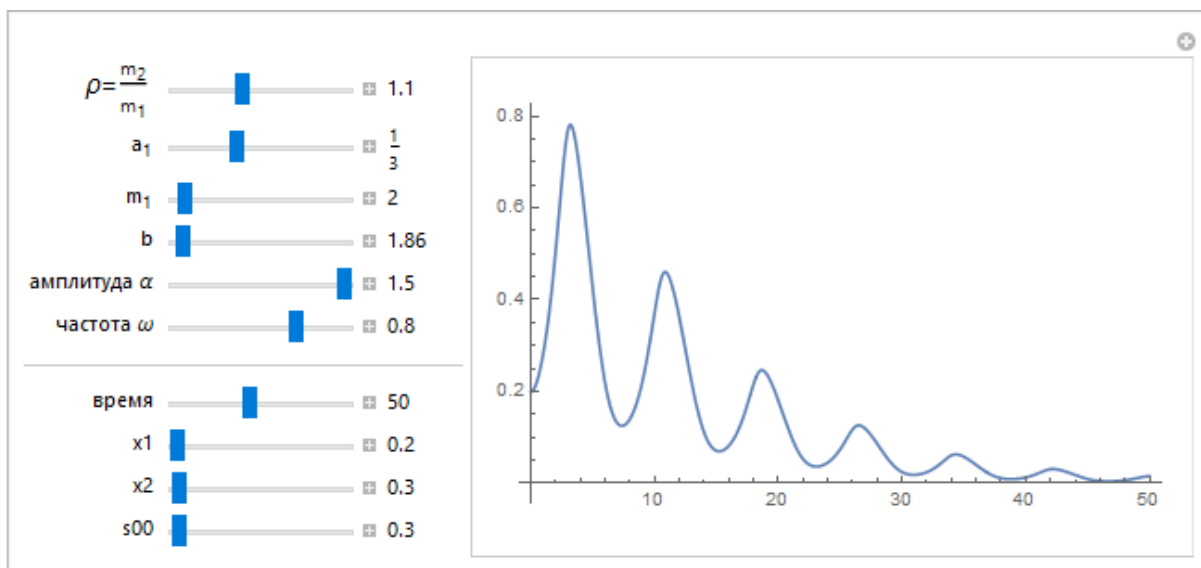


Рисунок 2. – График хемостата для решения уравнения eq5

Теорема 2. Пусть выполняются соотношения $a_1 = a_2$ и $d = m_1$. Тогда решение системы (8) запишется в форме [3]

$$S(t) = c_2 \left(-e^{(m_2 - m_1)t} \right) x_1(t)^{\frac{m_2}{m_1}} - x_1(t) + 1$$

$$x_2(t) = c_2 e^{(m_2 - m_1)t} x_1(t)^{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\frac{1}{(m_1 - m_2)^2} a_1^2 m_1^3 \left(\left(\frac{(m_1 - m_2) x_1(t)}{a_1 m_1} \right)^{\frac{m_2 - m_1}{a_1 m_1}} x_1(t)^{\frac{m_1 - m_2}{a_1 m_1}} \left(-\Gamma \left(\frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{a_1} + 1, \frac{(m_1 - m_2) x_1(t)}{a_1 m_1} \right) \right) \exp \left(\frac{(m_1 - m_2) (a_1 (m_1 t + \log(x_1(t))) - x_1(t) + \log(x_1(t))))}{a_1 m_1} \right) \right) = c_3.$$

Заклучение

Изменением параметров колебаний входного потока субстрата можно осуществлять управление процессами выживания и вымирания различных популяций, находящихся внутри хемостата. В частности, для случая двух популяций: популяция, вымирающая при постоянной концентрации входного потока субстрата, при периодическом входном воздействии может иметь плотность большую, чем стационарная плотность популяции, выживающей при постоянном.

Данный факт приобретает большое практическое значение, поскольку он дает возможность управлять процессами производства полезной биомассы и получать различные выходные продукты, не строя специализированные биореакторы, а просто меняя амплитуду и частоту колебаний концентрации субстрата на входе хемостата [1].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскобойник, О. Н. Математическая модель функционирования хемостата с учетом управляющих воздействий / О. Н. Воскобойник, С. Н. Герасим, Н. А. Матийченко // Сб. науч. работ Харьк. ун-та. – Харьков, 2010. – С. 102–106.

2. Колосов, Г. Е. Исследование установившихся колебательных процессов в хемостате / Г. Е. Колосов, Д. В. Нежеметдинова // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 118–132.

3. Чичурин, А. В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студ. специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» : в 3 ч. / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина. – Минск : БГУ, 2017. – Ч. 3. – С. 39–54.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2019

Melnikova I.N., Voytovich V.V. Using the Mathematica System for Solving Chemostatic Systems with Two Microorganisms

A biological model of the chemostat is being studied when one substrate and two microorganisms are present. This model is described by a third-order differential system. A computer implementation of methods for solving these systems, as well as visualization and animation of the resulting solutions is given.

УДК 517.548.5 + 519.652

С.С. Мазурик¹, Е.И. Кульгун², А.П. Худяков³¹соискатель каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистр физ.-мат. наук, преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина³канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: hudand1985@mail.ru

**МАТРИЧНОЕ ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТА – БИРКГОФА
С ОДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ УЗЛОМ
ПО ОБЩЕЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ**

Для функций матричного аргумента построены обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа с одним специальным узлом по общей чебышевской системе матричных функций. В структуру многочленов входят определители матриц с матричными элементами, при вычислении которых используются процедуры некоммутативного анализа. Получены формулы, которые в общем случае не являются интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Рассмотрены частные случаи интерполирования для небольшого числа узлов и для конкретных чебышевских систем матричных функций.

Введение

При построении обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа требуется совпадение в отдельных узлах значений дифференциальных, интегральных и другого вида операторных интерполяционных многочленов и интерполируемого оператора. Для функций скалярного аргумента такого вида формулы по системам тригонометрических, рациональных и экспоненциальных функций построены и исследованы в [1; 2]. В случае общей чебышевской системы функций такая задача исследована в [3]. В [4–7] получены матричные аналоги интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа по отдельным чебышевским системам матричных функций.

В данной работе исследована задача построения матричных обобщенных интерполяционного вида многочленов Эрмита – Биркгофа по общей чебышевской системе матричных функций. При построении интерполяционных формул использовались процедуры некоммутативного анализа. Получены матричные формулы, в общем случае не являющиеся интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Отдельно рассмотрены частные случаи для конкретных чебышевских систем функций.

1. Явные формулы интерполяционных многочленов

Пусть $C^{n+1}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз на отрезке $T \subseteq \mathbb{R}$ функций. В работе [3] по чебышевской системе $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$), $x \in T$, для функции одного скалярного аргумента получен и исследован обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа вида

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}, \quad (1)$$

где в выражениях

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x) f(x_k),$$

$$\tilde{g}_n = g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x),$$

функции $g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n)$, $g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ задаются посредством определителей

$$g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x) =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_{k-1}) & \varphi_0(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_{k-1}) & \varphi_1(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_1(x_n) & \varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_{k-1}) & \varphi_n(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

$$g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$$g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_{n+1}) & \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \varphi_{n+1}(x_1) & \cdots & \varphi_{n+1}(x_{n+1}) & \varphi_{n+1}(x) \end{vmatrix}.$$

Для многочлена (1) выполняются интерполяционные условия

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j);$$

$D_{n+1}(f; x) \equiv D_{n+1}f(x)$ – дифференциальный оператор вида

$$D_{n+1}f(x) = W_n^{-1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x) W_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f; x),$$

где $W_n(\cdot; x)$ и $W_{n+1}(\cdot; x)$ – вронскианы относительно систем функций, указанных в качестве аргументов; $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j) \neq 0$.

Построим матричный аналог интерполяционной формулы (1). Пусть X – множество квадратных матриц фиксированного размера, $F(x)$ – целая функция, $x \in \mathbb{R}$. Пусть также в узлах A_0, A_1, \dots, A_n из множества X известны значения функции $F(A)$, $A \in X$, и в одном из заданных или в новом узле A_j – значение $D_{n+1}(F; A_j)$ матрично-дифференциального оператора вида

$$D_{n+1}F(A) = (D - b_n(x)) \cdots (D - b_0(x)) F(x) \Big|_{x=A}, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (2)$$

где функции $b_0(x) = \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_k(x) = \frac{(D_k \varphi_k(x))'}{D_k \varphi_k(x)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) аналитические в интервале (a, b) , $\varphi_0(x), D_1 \varphi_1(x), \dots, D_n \varphi_n(x)$, не обращаются в нуль, а функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ образуют чебышевскую систему.

Далее будут использованы процедуры некоммутативного анализа [8] при вычислении определителей матриц с матричными элементами. Определители вычисляются по тем же правилам, как и в случае скалярных элементов, но при этом следует учитывать порядок расположения матриц в матричных произведениях, определенный фейнмановскими номерами, указанными в виде индексов над соответствующими матрицами. Например, для матриц $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ из множества X определители матриц второго порядка в соответствии с фейнмановскими номерами вычисляются по правилу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A_{11} & A_{12} \\ 1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12},$$

т.е. матрицы с большими фейнмановскими номерами должны располагаться в матричных произведениях левее матриц с меньшими фейнмановскими номерами. Очевидно, что при вычислении по таким правилам определителей матриц, элементы которых также являются матрицами, сохраняются следующие свойства:

1. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, а также совпадают соответствующие наборы фейнмановских номеров, то определитель этой матрицы равен нулю.

2. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца с одинаковыми наборами фейнмановских номеров, то определитель изменит знак на противоположный.

$$\text{Пусть } G_n = \begin{vmatrix} & & \\ \varphi_0(A_0) & \cdots & \varphi_0(A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_n) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Если матрицы G_n и $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)$ обратимы, то для матричного многочлена

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A) = L_{n,0}(A) + \Omega_{n+1}(A) [D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)]^{-1} D_{n+1}(F; A_j), \quad (3)$$

где

$$L_{n,0}(A) = -G_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ \varphi_0(A_0) & \cdots & \varphi_0(A_n) & \varphi_0(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_n) & \varphi_n(A) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F(A_0) & \cdots & F(A_n) & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Omega_{n+1}(A) = G_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0(A_0) & \cdots & \varphi_0(A_n) & \varphi_0(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_n) & \varphi_n(A) \\ \varphi_{n+1}(A_0) & \cdots & \varphi_{n+1}(A_n) & \varphi_{n+1}(A) \end{vmatrix},$$

выполняются интерполяционные условия

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1,0}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j). \quad (4)$$

Если матрицы A, A_0, A_1, \dots, A_n попарно перестановочны, то формула (3) точна для матричных многочленов вида

$$P_{n+1,0}(A) = \varphi_0(A)B_0 + \varphi_1(A)B_1 + \dots + \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}, \quad (5)$$

где B_0, B_1, \dots, B_{n+1} – произвольные фиксированные матрицы из X .

Доказательство.

Проверим выполнение первой группы интерполяционных условий (4). Раскладывая определитель в выражении для $L_{n,0}(A)$ по матричным элементам последней строки, при $A = A_k$, будем иметь

$$\begin{aligned} L_{n,0}(A_k) &= -G_n^{-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{n+3+i} \begin{vmatrix} \varphi_0(A_0) & \cdots & \varphi_0(A_{i-1}) & \varphi_0(A_{i+1}) & \cdots & \varphi_0(A_n) & \varphi_0(A_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_{i-1}) & \varphi_n(A_{i+1}) & \cdots & \varphi_n(A_n) & \varphi_n(A_k) \end{vmatrix} F(A_i) = \\ &= -G_n^{-1} (-1)^{n+3+k} (-1)^{n-k} G_n F(A_k) = F(A_k). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $i \neq k$ в определителях (6) есть два одинаковых столбца с матричными элементами, поэтому по свойству 1 такие определители равны нулю. При $i = k$ соответствующий определитель с точностью до знака равен матрице G_n . Поэтому после $n - k$ перестановок соседних столбцов, используя свойство 2, в силу произвольности выбора узла A_k , получим выполнение интерполяционных условий $L_{n,0}(A_k) = F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Аналогично, $\Omega_{n+1}(A_k) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, первая группа интерполяционных условий (4) выполняется.

Проверим выполнение последнего интерполяционного условия в (4). Многочлен $L_{n,0}(A)$ можно представить в виде $L_{n,0}(A) = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{m_k} B_{k,\nu} \varphi_k(A) C_{k,\nu}$, где $B_{k,\nu}$ и $C_{k,\nu}$ – соответствующие фиксированные матрицы из X , а m_k – целые числа. При $k = 0, 1, \dots, n$ выполняются тождества $D_{n+1} \varphi_k(A) \equiv 0$. Это следует из структуры оператора (2) и аналогичных тождеств в скалярном случае [3; 9]. В силу линейности оператора (2), $D_{n+1} L_{n,0}(A) \equiv 0$.

Многочлен $\Omega_{n+1}(A)$ представим в виде $\Omega_{n+1}(A) = \varphi_{n+1}(A) + \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{n_k} \tilde{B}_{k,\nu} \varphi_k(A) \tilde{C}_{k,\nu}$,

где $\tilde{B}_{k,\nu}$ и $\tilde{C}_{k,\nu}$ – фиксированные матрицы из X , а n_k – целые числа.

Соответственно, $D_{n+1}\Omega_{n+1}(A) = D_{n+1}\varphi_{n+1}(A)$, в том числе и при $A = A_j$. Учитывая структуру многочлена (3), получим, что последнее условие в (4) также имеет место.

Покажем, что формула (3) точна для матричных многочленов вида (5). Пусть $F(A) = \varphi_k(A)$, $0 \leq k \leq n$.

При условии попарной перестановочности матриц A, A_0, A_1, \dots, A_n многочлен $L_{n,0}(A)$ представим в виде

$$L_{n,0}(A) = -G_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)} & 0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Раскладывая (7) по элементам последнего столбца, получим

$$L_{n,0}(A) = -G_n^{-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_{i-1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{i-1}(A_n)} \\ \overset{n+1}{\varphi_{i+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{i+1}(A_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)} \end{vmatrix} \varphi_k(A). \quad (8)$$

При $i \neq k$ определители в (8) равны нулю, так как в них содержатся две равных строки с одинаковыми наборами фейнмановских номеров.

При $i = k$ после $n - k$ перестановок соответствующих строк, по свойству 2 определителей с матричными элементами, будем иметь

$$L_{n,0}(A) = -G_n^{-1} (-1)^{n+k-1} (-1)^{n-k} G_n \varphi_k(A) = \varphi_k(A).$$

Очевидно, что если $F(A) = \varphi_k(A) B_k$, то при тех же условиях коммутативности матриц будет выполняться тождество $L_{n,0}(A) \equiv F(A)$.

В силу свойств оператора (2) для функции $F(A)$ выполняется равенство $D_{n+1}(F; A_j) = 0$. Поэтому $\tilde{L}_{n+1,0}(A) \equiv F(A)$.

Пусть далее $F(A) = \varphi_{n+1}(A)$,

тогда

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A) = -G_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{n+1}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_n) & \varphi_n(A) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi_{n+1}(A_0) & \cdots & \varphi_{n+1}(A_n) & 0 \end{vmatrix} + G_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{n+1}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \varphi_n(A_0) & \cdots & \varphi_n(A_n) & \varphi_n(A) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi_{n+1}(A_0) & \cdots & \varphi_{n+1}(A_n) & \varphi_{n+1}(A) \end{vmatrix} \times \\ \times [D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)]^{-1} D_{n+1}(F; A_j).$$

Раскладывая определители по элементам последней строки и учитывая, что $D_{n+1}(F; A_j) = D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)$, будем иметь $\tilde{L}_{n+1,0}(A) = \varphi_{n+1}(A)$.

Аналогично, $\tilde{L}_{n+1,0}(A) = F(A)$ при $F(A) = \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$. Таким образом, формула (3) точна для многочленов вида (5). Теорема 1 доказана.

Имеет место аналогичная (3) интерполяционная формула, точная для матричных многочленов вида

$$P_{0,n+1}(A) = B_0\varphi_0(A) + B_1\varphi_1(A) + \dots + B_{n+1}\varphi_{n+1}(A). \quad (9)$$

В частном случае при $n = 1$ формула (3) примет вид

$$\tilde{L}_{2,0}(A) = L_{1,0}(A) + \Omega_2(A) [D_2(\varphi_2; A_j)]^{-1} D_2(F; A_j), \quad (10)$$

где

$$L_{1,0}(A) = - \begin{vmatrix} \overset{1}{\varphi_0(A_0)} & \overset{1}{\varphi_0(A_1)} \\ \varphi_1(A_0) & \varphi_1(A_1) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \overset{2}{\varphi_0(A_0)} & \overset{2}{\varphi_0(A_1)} & \overset{2}{\varphi_0(A)} \\ \overset{1}{\varphi_1(A_0)} & \overset{1}{\varphi_1(A_1)} & \overset{1}{\varphi_1(A)} \\ \overset{0}{F(A_0)} & \overset{0}{F(A_1)} & 0 \end{vmatrix} = [\varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0) - \varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)]^{-1} \times \\ \times [(\varphi_0(A_1)\varphi_1(A) - \varphi_0(A)\varphi_1(A_1))F(A_0) + (\varphi_0(A)\varphi_1(A_0) - \varphi_0(A_0)\varphi_1(A))F(A_1)],$$

$$\Omega_2(A) = \begin{vmatrix} \overset{1}{\varphi_0(A_0)} & \overset{1}{\varphi_0(A_1)} \\ \varphi_1(A_0) & \varphi_1(A_1) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \overset{2}{\varphi_0(A_0)} & \overset{2}{\varphi_0(A_1)} & \overset{2}{\varphi_0(A)} \\ \overset{1}{\varphi_1(A_0)} & \overset{1}{\varphi_1(A_1)} & \overset{1}{\varphi_1(A)} \\ \overset{0}{\varphi_2(A_0)} & \overset{0}{\varphi_2(A_1)} & \overset{0}{\varphi_2(A)} \end{vmatrix} = [\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)]^{-1} \times \\ \times [\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A) + \varphi_0(A)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A_1) + \varphi_0(A_1)\varphi_1(A)\varphi_2(A_0) - \\ - \varphi_0(A)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A_0) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A) - \varphi_0(A_0)\varphi_1(A)\varphi_2(A_1)],$$

$$D_2(\varphi_2; A_j) = (D - b_1(x))(D - b_0(x))\varphi_2(x)|_{x=A_j},$$

$$D_2(F; A_j) = (D - b_1(x))(D - b_0(x))F(x)|_{x=A_j}, \quad D = \frac{d}{dx},$$

где функции $b_0(x) = \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_1(x) = \frac{(D_1\varphi_1(x))'}{D_1\varphi_1(x)}$, а узел A_j может совпадать с одной из матриц A_0, A_1 . Формула (10) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{2,0}(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1).$$

Многочлен (10) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{2,0}(A) = C_0\varphi_0(A)E_0 + C_1\varphi_1(A)E_1 + C_2\varphi_1(A)E_2 + \varphi_2(A) \left[D_2(\varphi_2; A_j) \right]^{-1} D_2(F; A_j),$$

где $C_0, C_1, C_2, E_0, E_1, E_2$ – соответствующие фиксированные матрицы. Так как

$$D_2(\varphi_0; A_j) = (D - b_1(x))(D - b_0(x))\varphi_0(x) \Big|_{x=A_j} = (D - b_1(x)) \left(\varphi'_0(x) - \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\varphi_0(x) \right) \Big|_{x=A_j} \equiv 0,$$

$$D_2(\varphi_1; A_j) = (D - b_1(x))D_1\varphi_1(x) \Big|_{x=A_j} = (D_1\varphi_1(x))' - b_1(x)D_1\varphi_1(x) \Big|_{x=A_j} \equiv 0,$$

то $D_2(\tilde{L}_{2,0}; A_j) = D_2(F; A_j)$.

В случае попарной перестановочности матриц A, A_0, A_1 формула (10) является точной для матричных обобщенных многочленов вида

$$P_{2,0}(A) = \varphi_0(A)B_0 + \varphi_1(A)B_1 + \varphi_2(A)B_2,$$

где B_0, B_1, B_2 – произвольные фиксированные матрицы из X . В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

Теорема 2. Если существуют матрицы G_n^{-1} и $[D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)]^{-1}$, то интерполяционный матричный многочлен

$$\tilde{L}_{0,n+1}(A) = L_{0,n}(A) + D_{n+1}(F; A_j) \left[D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j) \right]^{-1} \Omega_{n+1}(A), \quad (11)$$

где

$$L_{0,n}(A) = - \begin{vmatrix} 0 & \overset{n+1}{F(A_0)} & \cdots & \overset{n+1}{F(A_n)} \\ \overset{n}{\varphi_0(A)} & \overset{n}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{n}{\varphi_0(A_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{0}{\varphi_n(A)} & \overset{0}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{0}{\varphi_n(A_n)} \end{vmatrix} G_n^{-1},$$

а $\Omega_{n+1}(A)$ определяется так же, как и в теореме 1, удовлетворяет условиям

$$\tilde{L}_{0,n+1}(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{0,n+1}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j).$$

Если матрицы A, A_0, A_1, \dots, A_n образуют множество взаимно перестановочных матриц, то формула (11) инвариантна относительно матричных многочленов вида (9).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Построим далее аналогичную (3) интерполяционную формулу, в которой дифференциальный оператор $D_{n+1}F(A)$ задается посредством дифференциалов Гато. Пусть, как и ранее, X – множество квадратных матриц, в узлах A_0, A_1, \dots, A_n из X известны значения функции $F(A)$, для которой в одном из заданных узлов или в новом узле A_j существует и известно значение $\tilde{D}_{n+1}(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$\tilde{D}_{n+1}F(A) = \tilde{D}_{n+1}F(A; H_{n+1}H_n \cdots H_1) = (D_{H_{n+1}} - b_n(A)) \cdots (D_{H_1} - b_0(A))F(A), \quad (12)$$

где $b_0(A) = \delta\varphi_0[A; H_1]\varphi_0^{-1}(A)$, $b_k(A) = \delta\tilde{D}_k\varphi_k[A; H_{k+1}](\tilde{D}_k\varphi_k(A))^{-1}$, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Здесь $D_{H_k}F(A) = \delta F[A; H_k]$, где $\delta F[A; H_k]$ – дифференциал Гато первого порядка функции $F(A)$ в точке A по направлению H_k . Так как $\tilde{D}_{m+1}F(A) = (D_{H_{m+1}} - b_m(A))\tilde{D}_mF(A)$ при $m = 1, 2, \dots, n$, то нетрудно показать, что $\tilde{D}_{n+1}\varphi_k(A) \equiv 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Справедлива

Теорема 3. Если матрицы G_n и $\tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)$ имеют обратные, то для матричного интерполяционного многочлена

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \Omega_{n+1}(A) [\tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)]^{-1} \tilde{D}_{n+1}(F; A_j), \quad (13)$$

где $L_n(A) = L_{n,0}(A)$, а многочлен $\Omega_{n+1}(A)$ определяется так же, как и в теореме 1, выполняются условия

$$\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad \tilde{D}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; A_j) = \tilde{D}_{n+1}(F; A_j). \quad (14)$$

Если матрицы A, A_0, A_1, \dots, A_n взаимно перестановочны, то полином (13) точен для матричных многочленов вида (5).

Доказательство

Так как $L_n(A) = L_{n,0}(A)$, то из доказательства теоремы 1 следует, что $L_n(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_{n+1}(A_k) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, первая группа условий в (14) выполняется. В силу соответствующих представлений многочленов $L_n(A)$ и $\Omega_{n+1}(A)$, а также свойств оператора (12) будем иметь $\tilde{D}_{n+1}L_n(A) \equiv 0$ и $\tilde{D}_{n+1}\Omega_{n+1}(A) = \tilde{D}_{n+1}\varphi_{n+1}(A)$. Тогда и последнее условие в (14) имеет место.

Пусть $F(A) = \varphi_k(A)B_k$, $0 \leq k \leq n$. Из доказательства теоремы 1 получаем, что при условии попарной перестановочности матриц A, A_0, A_1, \dots, A_n выполняются соотношения $L_n(A) \equiv F(A)$ и $\tilde{D}_{n+1}(F; A_j) = 0$. Следовательно, $\tilde{L}_{n+1}(A) \equiv F(A)$. Далее, так как $\tilde{D}_{n+1}(F; A_j) = \tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)B_{n+1}$ при $F(A) = \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$, то, также используя доказательство теоремы 1, можно показать, что $\tilde{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$. Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (5). Теорема 3 доказана.

2. Формула, точная для матричных многочленов

Приведем далее формулу, которая в общем случае не является интерполяционной, но она точна для многочленов вида (5). При этом не требуется взаимная перестановочность матричных узлов и аргумента A . Введем матрицу

$$\tilde{G}_n = \begin{vmatrix} \overset{n}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{0}{\varphi_0(A_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{n}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{0}{\varphi_n(A_n)} \end{vmatrix},$$

которая отличается от G_n только расположением фейнмановских номеров. Как и ранее, будем предполагать, что матрицы \tilde{G}_n и $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)$ обратимы. Здесь выражением $D_{n+1}F(A)$ может определяться как оператор (2), так и (12).

Теорема 4. Если матрицы B_0, B_1, \dots, B_{n+1} попарно коммутируют с матрицами A_1, \dots, A_n, A , то формула

$$\hat{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \tilde{\Omega}_{n+1}(A) [D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)]^{-1} D_{n+1}(F; A_j), \quad (15)$$

где

$$L_n(A) = -\tilde{G}_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{F(A_0)} & \cdots & \overset{1}{F(A_n)} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Omega}_{n+1}(A) = \tilde{G}_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}(A_n)} & \overset{0}{\varphi_{n+1}(A)} \end{vmatrix},$$

точна для матричных многочленов вида (5).

Доказательство

Пусть $F(A) = \varphi_k(A)B_k$, $0 \leq k \leq n$. В силу перестановочности матрицы B_k с матрицами A_1, \dots, A_n, A , имеет место представление

$$L_n(A) = -\tilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)B_k} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)B_k} & 0 \end{vmatrix} = -\tilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)B_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)B_k} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)} & 0 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 1, раскладывая определитель в (16) по элементам последнего столбца (равенства (7) и (8)), будем иметь $L_n(A) = \varphi_k(A)B_k$, и так как $D_{n+1}(F; A_j) = 0$ для данной функции $F(A)$, то $\hat{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_k(A)B_k = F(A)$.

Пусть теперь $F(A) = \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$, тогда, аналогично равенству (16), учитывая, что $D_{n+1}(F; A_j) = D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)B_{n+1}$, получим

$$\widehat{L}_{n+1}(A) = -\widetilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)B_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)B_{n+1}} \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}(A_n)} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\widetilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}(A_n)} & \overset{0}{\varphi_{n+1}(A)} \end{vmatrix} B_{n+1}.$$

Раскладывая определители по элементам последнего столбца, будем иметь $\widehat{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_{n+1}(A)B_{n+1} = F(A)$.

Таким образом, формула (15) точна для многочленов вида (5). Теорема 4 доказана.

Нетрудно построить аналогичную (15) формулу, точную для многочленов вида (9). При этом необходимо требовать, чтобы матрицы B_0, B_1, \dots, B_{n+1} попарно коммутировали с матрицами A_0, \dots, A_{n-1}, A .

3. Частные случаи интерполирования

Рассмотрим частные случаи формулы (3) для небольшого числа матричных узлов. При $n = 1$ формула (3) примет вид:

$$\widetilde{L}_{2,0}(A) = L_{1,0}(A) + \Omega_2(A) \left[D_2(\varphi_2; A_j) \right]^{-1} D_2(F; A_j), \tag{17}$$

где

$$L_{1,0}(A) = G_1^{-1} \left[(\varphi_0(A)\varphi_1(A_1) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A))F(A_0) + (\varphi_0(A_0)\varphi_1(A) - \varphi_0(A)\varphi_1(A_0))F(A_1) \right],$$

$$\Omega_2(A) = G_1^{-1} \left[\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A) + \varphi_0(A)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A_1) + \varphi_0(A_1)\varphi_1(A)\varphi_2(A_0) - \right. \\ \left. - \varphi_0(A)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A_0) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A) - \varphi_0(A_0)\varphi_1(A)\varphi_2(A_1) \right],$$

а $G_1 = \varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)$. Дифференциальный оператор $D_2F(A)$ определяется здесь по аналогии со скалярным случаем [3, с. 9], по формуле

$$D_2F(A) = F''(z) - (b_0(z) + b_1(z))F'(z) + (b_0(z)b_1(z) - b'_0(z))F(z) \Big|_{z=A},$$

где

$$b_0(z) + b_1(z) = \frac{\varphi_0(z)\varphi_1''(z) - \varphi_0''(z)\varphi_1(z)}{\varphi_0(z)\varphi_1'(z) - \varphi_0'(z)\varphi_1(z)}, \quad b_0(z)b_1(z) - b'_0(z) = \frac{\varphi_0'(z)\varphi_1''(z) - \varphi_0''(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_0(z)\varphi_1'(z) - \varphi_0'(z)\varphi_1(z)}.$$

Нетрудно убедиться, что в узлах A_0 и A_1 интерполяционный многочлен (17) совпадает с функцией $F(A)$, и он также удовлетворяет условию $D_2(\widetilde{L}_{2,0}; A_j) = D_2(F; A_j)$.

В случае, если дифференциальный оператор определяется формулой (12), то $\widetilde{D}_2F(A)$ примет вид:

$$\tilde{D}_2 F(A) = \delta^2 F[A; H_2 H_1] - b_0(A) \delta F[A; H_2] - b_1(A) \delta F[A; H_1] + (b_1(A) b_0(A) - \delta b_0[A; H_2]) F(A),$$

где

$$b_0(A) = \delta \varphi_0[A; H_1] \varphi_0^{-1}(A), \quad b_1(A) = \delta \tilde{D}_1 \varphi_1[A; H_2] (\tilde{D}_1 \varphi_1(A))^{-1},$$

$$\tilde{D}_1 \varphi_1(A) = \delta \varphi_1[A; H_1] - b_0(A) \varphi_1(A).$$

В [7] рассмотрен частный случай формулы (3) при $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$), где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$. Дифференциальный оператор (2) здесь имеет вид:

$$D_{n+1} F(A) = (D - \lambda_n) \cdots (D - \lambda_1) D F(z) \Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Интерполяционный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A) e^{-\lambda_{n+1} A} D_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (18)$$

где

$$L_n(A) = \tilde{G}_n^{-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i G_n(A, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) F(A_i),$$

$$\Omega_n(A) = (-1)^n \tilde{G}_n^{-1} G_{n+1}(A, A_0, A_1, \dots, A_n), \quad \tilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \dots, A_n),$$

удовлетворяет условиям: $\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$); $D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j)$.

В [7] матричные функции

$$G_n(A, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) \text{ и } G_{n+1}(A, A_0, A_1, \dots, A_n)$$

определяются рекуррентными формулами и удовлетворяют условиям

$$G_n(A_k, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) = (-1)^i \delta_{ki} \tilde{G}_n,$$

где δ_{ki} – символ Кронекера и $G_{n+1}(A_k, A_0, A_1, \dots, A_n) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Аналогичный (18) интерполяционный многочлен построен в [7] для случая, когда дифференциальный оператор задается посредством дифференциалов Гато формулой вида (12). Точность формулы (18) для многочленов по системе матричных экспонент доказана только для случаев двух и трех узлов. Обобщенные матричные интерполяционные многочлены по системам тригонометрических и рациональных функций построены также в [4–7].

Заключение

В данной работе получены следующие новые результаты: для функций матричного аргумента построены обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркзгофа по общей чебышевской системе матричных функций.

В структуру многочленов входят определители матриц с матричными элементами, при вычислении которых используются процедуры некоммутативного анализа.

Получены формулы, которые в общем случае не являются интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Рассмотрены част-

ные случаи интерполирования для небольшого числа узлов и для конкретных чебышевских систем матричных функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
3. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Вес. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 5–14.
4. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
5. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
6. Янович, Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
7. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2014. – 132 с.
8. Назайкинский, В. Е. Методы некоммутативного анализа / В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов. – М. : Техносфера, 2002. – 242 с.
9. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер ; под ред. Л. А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2019

Mazurik S.S., Kulgun E.I., Hudyakov A.P. Matrix Generalized Interpolation of Hermite – Birkhoff Type with One Special Node on the General Chebyshev System of Functions

The problem of construction of matrix generalized interpolation polynomials of Hermite – Birkhoff with one special node on the general Chebyshev system of matrix functions is researched. For the construction of the interpolation formulas the non-commutative analysis procedures are used. The matrix formulas, which in the general case are not interpolation, but which are accurate for matrix polynomials of the special structure are obtained. The special cases for specific Chebyshev systems of functions are considered separately.

УДК 513.82

А.А. Юдов¹, Е.А. Сирисько²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by**КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ
ШЕСТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_6**

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений шестимерного евклидова пространства R_6 , классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли G движений пространства R_6 и исследование свойств подгрупп Ли группы Ли G .

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П.К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений шестимерного евклидова пространства R_6 .

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство R_6 – шестимерное евклидово пространство R_6 .

Выберем в пространстве R_6 репер $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, причем $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства R_6 , в репере ε зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \equiv (X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства R_6 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & & \\ t_2 & & & & & & \\ t_3 & & & & & & \\ t_4 & & & A & & & \\ t_5 & & & & & & \\ t_6 & & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \quad (1)$$

Причем $A^T E_6 A = E_6$, где знак T означает транспонирование, а матрица E_6 является единичной матрицей.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6') = (0', e')$, где $e' = eA$, $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T)_\varepsilon$, а точка M переходит в точку M' , имеющую в репере ε' такие же координаты, какие точка M имеет в репере ε .

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (X)_{\varepsilon'}$, $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (X')_\varepsilon$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) + eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T.$$

Таким образом, в пространстве R_6 действует слева группа Ли G , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_6 по формуле (2). Алгебру Ли \overline{G} этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & & \\ \tau_2 & & & & & & \\ \tau_3 & & & & & & \\ \tau_4 & & & & & & \\ \tau_5 & & & & & & \\ \tau_6 & & & & & & \end{pmatrix} \quad B \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где B удовлетворяет условию: $B^T E_6 + E_6 B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки O и алгебра Ли \overline{H} этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad A \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad B \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки и абелевой группы T_6 параллельных переносов: $G = H \otimes T_6$.

Алгебра Ли \overline{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \overline{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_6 группы Ли T_6 : $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_6$.

Рассмотрим группу Ли G пространства R_6 и ее алгебру Ли \overline{G} . Базис алгебры Ли G выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} i_7 &= E_{12} - E_{21}, i_8 = E_{13} - E_{31}, i_9 = E_{14} - E_{41}, i_{10} = E_{15} - E_{51}, i_{11} = E_{16} - E_{61}, \\ i_{12} &= E_{23} - E_{32}, i_{13} = E_{24} - E_{42}, i_{14} = E_{25} - E_{52}, i_{15} = E_{26} - E_{62}, i_{16} = E_{34} - E_{43}, \\ i_{17} &= E_{35} - E_{53}, i_{18} = E_{36} - E_{63}, i_{19} = E_{45} - E_{54}, i_{20} = E_{46} - E_{64}, i_{21} = E_{56} - E_{65}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – матрица размера (6×6) , у которой в α – ой строке, β – м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули, причем $i_7 \dots i_{21}$ образуют базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H , векторы $i_1 \dots i_6$ образуют базис алгебры τ_6 , а операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA, A, B \in \overline{G}$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем следующие формулы для коммутаторов базисных векторов: $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}$ алгебры Ли группы Ли вращений пространства R_6 .

Согласно формуле для коммутаторов получим $[i_7, i_8] = i_7 i_8 - i_8 i_7 = -i_{12}$.

Аналогично, проводя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} [i_7, i_8] &= -i_{12}, & [i_8, i_{16}] &= i_9, & [i_{10}, i_{14}] &= -i_7, & [i_{12}, i_{16}] &= i_{13}, & [i_{15}, i_{16}] &= 0, \\ [i_7, i_9] &= -i_{13}, & [i_8, i_{17}] &= i_{10}, & [i_{10}, i_{15}] &= 0, & [i_{12}, i_{17}] &= i_{14}, & [i_{15}, i_{17}] &= 0, \\ [i_7, i_{10}] &= -i_{14}, & [i_8, i_{18}] &= i_{11}, & [i_{10}, i_{16}] &= 0, & [i_{12}, i_{18}] &= i_{15}, & [i_{15}, i_{18}] &= -i_{12}, \\ [i_7, i_{11}] &= -i_{15}, & [i_8, i_{19}] &= 0, & [i_{10}, i_{17}] &= -i_8, & [i_{12}, i_{19}] &= 0, & [i_{15}, i_{19}] &= 0, \\ [i_7, i_{12}] &= i_8, & [i_8, i_{20}] &= 0, & [i_{10}, i_{18}] &= 0, & [i_{12}, i_{20}] &= 0, & [i_{15}, i_{20}] &= -i_{13}, \\ [i_7, i_{13}] &= i_9, & [i_8, i_{21}] &= 0, & [i_{10}, i_{19}] &= -i_9, & [i_{12}, i_{21}] &= 0, & [i_{15}, i_{21}] &= -i_{14}, \\ [i_7, i_{14}] &= i_{10}, & [i_9, i_{10}] &= -i_{19}, & [i_{10}, i_{20}] &= 0, & [i_{13}, i_{14}] &= -i_{19}, & [i_{16}, i_{17}] &= -i_{19}, \\ [i_7, i_{15}] &= i_{11}, & [i_9, i_{11}] &= -i_{20}, & [i_{10}, i_{21}] &= i_{11}, & [i_{13}, i_{15}] &= -i_{20}, & [i_{16}, i_{18}] &= -i_{20}, \\ [i_7, i_{16}] &= 0, & [i_9, i_{12}] &= 0, & [i_{11}, i_{12}] &= 0, & [i_{13}, i_{16}] &= -i_{12}, & [i_{16}, i_{19}] &= i_{17}, \\ [i_7, i_{17}] &= 0, & [i_9, i_{13}] &= -i_7, & [i_{11}, i_{13}] &= 0, & [i_{13}, i_{17}] &= 0, & [i_{16}, i_{20}] &= i_{18}, \\ [i_7, i_{18}] &= 0, & [i_9, i_{14}] &= 0, & [i_{11}, i_{14}] &= 0, & [i_{13}, i_{18}] &= 0, & [i_{16}, i_{21}] &= 0, \\ [i_7, i_{19}] &= 0, & [i_9, i_{15}] &= 0, & [i_{11}, i_{15}] &= -i_7, & [i_{13}, i_{19}] &= i_{14}, & [i_{17}, i_{18}] &= -i_{21}, \\ [i_7, i_{20}] &= 0, & [i_9, i_{16}] &= -i_8, & [i_{11}, i_{16}] &= 0, & [i_{13}, i_{20}] &= i_{15}, & [i_{17}, i_{19}] &= -i_{16}, \\ [i_7, i_{21}] &= 0, & [i_9, i_{17}] &= 0, & [i_{11}, i_{17}] &= 0, & [i_{13}, i_{21}] &= 0, & [i_{17}, i_{20}] &= 0, \\ [i_8, i_9] &= -i_{16}, & [i_9, i_{18}] &= 0, & [i_{11}, i_{18}] &= -i_8, & [i_{14}, i_{15}] &= -i_{21}, & [i_{17}, i_{21}] &= i_{18}, \\ [i_8, i_{10}] &= -i_{17}, & [i_9, i_{19}] &= i_{10}, & [i_{11}, i_{19}] &= 0, & [i_{14}, i_{16}] &= 0, & [i_{18}, i_{19}] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i_8, i_{11}] &= -i_{18}, & [i_9, i_{20}] &= i_{11}, & [i_{11}, i_{20}] &= -i_9, & [i_{14}, i_{17}] &= -i_{12}, & [i_{18}, i_{20}] &= -i_{12}, \\
[i_8, i_{12}] &= -i_7, & [i_9, i_{21}] &= 0, & [i_{11}, i_{21}] &= -i_{10}, & [i_{14}, i_{18}] &= 0, & [i_{18}, i_{21}] &= -i_{17}, \\
[i_8, i_{13}] &= 0, & [i_{10}, i_{11}] &= -i_{21}, & [i_{12}, i_{13}] &= -i_{16}, & [i_{14}, i_{19}] &= -i_{13}, & [i_{19}, i_{20}] &= -i_{21}, \\
[i_8, i_{14}] &= 0, & [i_{10}, i_{12}] &= 0, & [i_{12}, i_{14}] &= -i_{17}, & [i_{14}, i_{20}] &= 0, & [i_{19}, i_{21}] &= i_{20}, \\
[i_8, i_{15}] &= 0, & [i_{10}, i_{13}] &= 0, & [i_{12}, i_{15}] &= -i_{18}, & [i_{14}, i_{21}] &= i_{15}, & [i_{20}, i_{21}] &= -i_{19},
\end{aligned}$$

Всего получено 20 подгрупп Ли $G_1 \dots G_{20}$ группы Ли вращений, которые в базисе (1) задаются своими алгебрами Ли $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{20}$ в виде:

$$\begin{aligned}
\overline{G}_1 &= \{i_7\}, \\
\overline{G}_2 &= \{i_{16} + \mu i_7\}, \\
\overline{G}_3 &= \{i_{16} + \mu i_7 + \nu i_{21}\}, \\
\overline{G}_4 &= \{i_7, i_{16}\}, \\
\overline{G}_5 &= \{i_{16} + \mu i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_6 &= \{i_7, i_8, i_{12}\}, \\
\overline{G}_7 &= \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}\}, \\
\overline{G}_8 &= \{i_7 + 2i_{16}, \sqrt{3}i_{14} + i_8 + i_{13}, \sqrt{3}i_{10} - i_9 + i_{12}\}, \\
\overline{G}_9 &= \{i_7, i_{16}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{10} &= \{i_7, i_8, i_{21}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{11} &= \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{12} &= \{i_7, i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{13} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}\}, \\
\overline{G}_{14} &= \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, i_9, i_{12}\}, \\
\overline{G}_{15} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{16} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_{11}, i_{15}, i_{18}\}, \\
\overline{G}_{17} &= \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, i_9, i_{12}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{18} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{19} &= \{i_7, i_8, i_{12}, i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}, \\
\overline{G}_{20} &= \{i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}, i_{10} + i_{11}, i_{14} + i_{15}, i_{17} + i_{18}, i_{10} + i_{20}\}.
\end{aligned}$$

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли G группы Ли вращений шестимерного евклидова пространства R_6 , соответствующая алгебре Ли с оператором

$$i_{16} + \mu i_7 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G одномерные, двумерные, трехмерные, четырехмерные и пятимерные векторные подпространства пространства R_6 , а так же инвариантные прямые и K -плоскости.

Рассмотрим оператор $i_{16} + \mu i_7$.

Найдем одномерные подпространства пространства R_6 , инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ имеет вид:

$$\alpha i_7 = \lambda \alpha, \quad (4)$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2 = \lambda \alpha_1, \alpha_1 = \lambda \alpha_2, 0 = \lambda \alpha_3, 0 = \lambda \alpha_4, 0 = \lambda \alpha_5, 0 = \lambda \alpha_6 \quad (5)$$

Из системы (5) получим: $-\alpha_2 = \lambda^2 \alpha_2$. Отсюда $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$. При $\lambda \neq 0$ ненулевых решений нет. При $\lambda = 0$ получим инвариантные подпространства в виде:

$$\{\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6\}, \forall \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6.$$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом $\{\alpha, b\}, \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ имеет вид:

$$\alpha i_7 = \lambda \alpha + \mu b, b i_7 = \nu \alpha + \delta b, \quad (6)$$

или в координатном виде:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &= \lambda \alpha_1 + \mu b_1 & -b_2 &= \nu \alpha_1 + \delta b_1, \\ -\alpha_1 &= \lambda \alpha_2 + \mu b_2 & -b_1 &= \nu \alpha_2 + \delta b_2, \\ 0 &= \lambda \alpha_3 + \mu b_3 & 0 &= \nu \alpha_3 + \delta b_3, \\ 0 &= \lambda \alpha_4 + \mu b_4 & 0 &= \nu \alpha_4 + \delta b_4, \\ 0 &= \lambda \alpha_5 + \mu b_5 & 0 &= \nu \alpha_5 + \delta b_5, \\ 0 &= \lambda \alpha_6 + \mu b_6 & 0 &= \nu \alpha_6 + \delta b_6. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы можно свести к рассмотрению 15 частных случаев $1^\circ - 15^\circ$:

$$1^\circ. \alpha(1, 0, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), b(0, 1, b_3, b_4, b_5, b_6).$$

В этом случае система (7) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda, 1 = \mu, 0 = \lambda a_3 + \mu b_3, 0 = \lambda a_4 + \mu b_4, 0 = \lambda a_5 + \mu b_5, 0 = \lambda a_6 + \mu b_6, \\ -1 = \nu, 0 = \sigma, 0 = \nu a_3 + \delta b_3, 0 = \nu a_4 + \delta b_4, 0 = \nu a_5 + \delta b_5, 0 = \nu a_6 + \delta b_6. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда следует: $a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 0$. Получаем инвариантное подпространство в виде: $\forall \mu = \{e_1, e_2\} \cdot \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4\}$.

$$2^\circ. \alpha(1, a_2, 0, a_4, a_5, a_6), b(0, 0, 1, b_4, b_5, b_6).$$

$$3^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

$$4^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, a_4, 0, a_6), b(0, 0, 0, 0, 1, b_6).$$

$$5^\circ. \alpha(1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0), b(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

$$6^\circ. \alpha(0, 1, 0, a_4, a_5, a_6), b(0, 0, 1, b_4, b_5, b_6).$$

$$7^\circ. \alpha(0, 1, a_3, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

$$8^\circ. \alpha(0, 1, a_3, a_4, 0, a_6), b(0, 0, 0, 0, 1, b_6).$$

$$9^\circ. \alpha(0, 1, a_3, a_4, a_5, 0), b(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

В случае $2^0 - 9^0, 11^0 - 15^0$ из системы (7) получим: $0 = -1$. Отсюда следует противоречие: $1 = -a_2^2$. Система инвариантности противоречива.

$$10^\circ. \alpha(0, 0, 1, 0, a_5, a_6), b(0, 0, 0, 1, b_5, b_6).$$

Система инвариантности (7) не противоречива. Получаем инвариантное подпространство: $\{e_3, e_4\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора $i_{16} + \mu i_7$ сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Относительно группы $\overline{G_1}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6\}, \forall a_3, a_4, a_5, a_6$. и только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_3 + a_4 e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \\ \{e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\}$$

И следующие трехмерные пространства:

$$\{e_1, e_2, e_3 + c_4 e_4 + c_5 e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_4 + c_5 e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 e_2 e_3 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}.$$

Рассматривая аналогично инвариантные подпространства для группы $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$, получаем теорему:

Теорема 2. Относительно группы $\overline{G_2}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$, двумерные подпространства:

$$\{e_1 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_2 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5, e_6\}, \\ \{e_2 + a_6 e_6, e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6\}, \{e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1, e_2, e_3 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a_3 e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_5 e_5, e_2 + b_5 e_5, e_6\}, \\ \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a_3 e_4 + b_5 e_5, e_6\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \\ \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$$

Теорема 3. Относительно группы $\overline{G_3}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6 :

$$\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}, \{a_1 e_1 + a_2 e_2\}, \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6\},$$

двумерные подпространства:

$$\left\{ e_1 + \frac{1}{\mu} b_4 e_3 \pm \frac{1}{\mu} b_6 e_5 \mp \frac{1}{\mu} b_5 e_6, e_2 + b_4 e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6 \right\}, \left\{ e_1 - \frac{1}{\mu} b_3 e_4, e_2 + b_3 e_3 \right\}, \\ \{e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_5 e_5, e_6\}, \{e_2 + \alpha_5 e_5, e_6\} \\ \{e_3, e_4\}, \{e_3 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1 + e_6 e_6, e_2 + b_6 e_6, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1 + a_6 e_6, e_2 + b_6 e_6, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3 + c_6 e_6\}, \\ \{e_1 + a_5 e_5, e_2 + b_5 e_5, e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}, \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 \mp a_4 e_3 \pm a e_4, e_6\} \\ \{e_1 + a_2 e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2 + a_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_1 + c_5 e_5 + a_6 e_6, e_3, e_4\}, \\ \{e_1, e_3 + b_5 e_5 + b_6 e_6, e_4 \mp b_6 e_5 \pm b_5 e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$$

Теорема 4. Относительно группы $\overline{G_4}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6 : $\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$, двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$ и следующие трехмерные подпространства: $\{e_1, e_2, e_5 + c_6 e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}$.

Теорема 5. Относительно группы $\overline{G_5}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1 + a_2 e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2 e_2, e_5, e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}.$$

Теорема 6. Относительно группы $\overline{G_6}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_4 + a_6 e_6, e_5 + b_6 e_6\}, \{e_4 + a_5 e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1, e_2, e_3\}.$$

Теорема 7. Относительно группы $\overline{G_7}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6 : $\{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$, двумерное подпространство: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 8. Относительно группы $\overline{G_8}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{e_6\}$, двумерное, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 9. Относительно группы $\overline{G_9}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 10. Относительно группы $\overline{G_{10}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4, e_5\}$ и следующие трехмерное подпространство: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 11. Относительно группы $\overline{G_{11}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 12. Относительно группы $\overline{G_{12}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 13. Относительно группы $\overline{G_{13}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4 - e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 14. Относительно группы $\overline{G_{14}}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 15. Относительно группы $\overline{G_{15}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных подпространств, инвариантно только трехмерное пространство: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 16. Относительно группы $\overline{G_{16}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4, e_5\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 17. Относительно группы $\overline{G_{17}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 18. Относительно группы $\overline{G_{18}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Теорема 19. Относительно группы $\overline{G_{19}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Теорема 20. Относительно группы $\overline{G_{20}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_6 .

Цепочки:

$$G_{20} \supset G_7$$

$$G_{20} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{20} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{20} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_7$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{19} \supset G_8$$

$$G_{19} \supset G_7$$

$$G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_7$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{17} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{16} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{15} \supset G_{10} \supset G_1$$

$$G_{15} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{14} \supset G_7$$

$$G_{14} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{14} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{13} \supset G_6 \supset G_1$$

$$G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$$

$$G_{12} \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_{12} \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_{11} \supset G_7$$

$$G_{10} \supset G_1$$

$$G_9 \supset G_4 \supset G_2$$

$$G_9 \supset G_4 \supset G_1$$

$$G_6 \supset G_1$$

$$G_5 \supset G_2$$

$$G_4 \supset G_2$$

$$G_4 \supset G_1.$$

Пусть G группа Ли H_1, H_2 ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$.

Определение 1. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

$$f : G/H_1 \rightarrow G/H_2 : aH_1 \rightarrow aH_2$$

для любого $a \in G$.

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства R_6 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства R_6 .

Определение 2. Однородное пространство H/G_1 называется редуktивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \tag{9}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}_i$, где $ad\overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G}_i .

Рассмотрим однородное пространство H/G_6 , $G_6 = \{i_7, i_8, i_{12}\}$, $a = \{i_7\}$, $\overline{H} = \{i_7 \dots i_{21}\}$ и базис, соответствующий частному случаю 416^0 :

$$416^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7, \\ x_2 &= i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7, \\ x_3 &= i_{11} + p i_{12} + q i_7, \\ x_4 &= i_{13} + \varepsilon i_7, \\ x_5 &= i_{14} + b i_7, \\ x_6 &= i_{15} + e i_7, \\ x_7 &= i_{21}, \\ x_8 &= i_{20}, \\ x_9 &= i_{19}, \\ x_{10} &= i_{18}, \\ x_{11} &= i_{17}, \\ x_{12} &= i_{16}. \end{aligned} \tag{10}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
 [a, X_1] &= -i_{13} + \lambda i_8, \\
 [a, X_2] &= -i_{14} + \sigma i_8, \\
 [a, X_3] &= -i_{15} + p i_8, \\
 [a, X_4] &= i_9, \\
 [a, X_5] &= i_{10}, \\
 [a, X_6] &= i_{11}, \\
 [a, X_7] &= 0, \\
 [a, X_8] &= 0, \\
 [a, X_9] &= 0, \\
 [a, X_{10}] &= 0, \\
 [a, X_{11}] &= 0, \\
 [a, X_{12}] &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем линейную комбинацию векторов X_1, \dots, X_{12} :

$$\begin{aligned}
 &\alpha_1(i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7) + \beta_1(i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7) + \gamma_1(i_{11} + p i_{12} + q i_7) + \delta_1(i_{13} + \varepsilon i_7) + \omega_1(i_{14} + b i_7) + \\
 &+ \varepsilon_1(i_{15} + e i_7) + g_1 i_{21} + t_1 i_{20} + p_1 i_{19} + q_1 i_{18} + s_1 i_{17} + h_1 i_{16} = \\
 &= i_7(\alpha_1 \mu + \beta_1 s + \gamma_1 q + \delta_1 \varepsilon + \omega_1 b + \varepsilon_1 e) + i_9 \alpha_1 + i_{10} \beta_1 + i_{11} \gamma_1 + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \sigma + \gamma_1 p) + i_{13} \delta_1 + \\
 &+ i_{14} \omega_1 + i_{15} \varepsilon_1 + i_{16} h_1 + i_{17} s_1 + i_{18} q_1 + i_{19} p_1 + i_{20} t_1 + i_{21} g_1.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Приравнявая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (11) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (11) и проводя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= -1, \quad \lambda = 0, \quad \varepsilon = 0, \\
 \omega_2 &= -1, \quad \sigma = 0, \quad b = 0, \\
 \varepsilon_3 &= -1, \quad p = 0, \quad e = 0 \\
 \alpha_4 &= 1, \quad \mu = 0, \quad \lambda = 0 \\
 \beta_5 &= 1, \quad s = 0, \quad \sigma = 0, \\
 \gamma_6 &= 1, \quad q = 0, \quad p = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора i_7 инвариантны следующие двенадцатимерные подпространства: $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

Всех случаев, которые необходимо рассмотреть для нахождения инвариантных двенадцатимерных подпространств для оператора i_7 , будет 455, причем в случаях 1–415, 417–455 решения систем инвариантности не дают редутивных дополнений. Это же подпространство $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$, как показывают вычисления, будет инвариантно и относительно операторов i_8, i_{12} . Таким образом, получаем теорему.

Теорема 21. Однородное пространство H / G_6 является редутивным, редутивным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.02.2019

Yudov A.A, Sirisko E.A. Classification of Homogeneous Reductive Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of the Six-Dimensional Euclidean Space R_6

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of six-dimensional Euclidean spaces, classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group G of space motions, and study the properties of Lie subgroups of the G .

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *С.Ф. Бут-Гусаім, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 04.05.2019. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,79. Ул.-выд. арк. 8,62.

Тыраж 100 экз. Заказ № 162.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.