

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Галоўны рэдактар:*

Г.М. Сендзер

*Намеснік галоўнага рэдактара:*

С.А. Марзан

*Міжнародны савет*

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

*Рэдакцыйная калегія:*

А.Б. Антаневіч

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плеццохоў

А.Ф. Равінскі

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224016, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

**№ 2 / 2018**

У адпаведнасці з Дадаткам да загада  
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь  
ад 01.04.2014 № 94 (у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі  
Рэспублікі Беларусь ад 16.01.2018 № 16) часопіс  
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навук (Фізіка)

# ЗМЕСТ

## ФІЗІКА

|   |    |
|---|----|
| <b>Войнова Я.А., Веко О.В., Овсюк Е.М.</b> Векторная частица с поляризуемостью в кулоновском поле, нерелятивистское приближение.....                  | 5  |
| <b>Ворсин Н.Н., Гладышук А.А., Тарасюк Н.П., Чугунов С.В.</b> Аналитические соотношения для ВАХ ХЕМТ на основе GaN.....                               | 26 |
| <b>Демидчик А.В.</b> Влияние сверхбыстрого охлаждения на распределение компонентов в железоникелевых сплавах пермаллового состава .....               | 32 |
| <b>Левчук М.И., Львов А.И., Невмержицкий М.Н., Шуляковский Р.Г.</b> Комптоновское рассеяние на дейтроне и поляризуемости нейтрона.....                | 38 |
| <b>Лиопо В.А., Лявшук И.А., Овчинников Е.В., Секержицкий С.С.</b> Анализ положений $00l$ – узлов обратной решетки при случайной смене трех слоев..... | 47 |
| <b>Секержицкий В.С.</b> О составе тяжелых атомных ядер равновесного сверхплотного вещества.....   | 55 |

## МАТЭМАТЫКА

|   |    |
|---|----|
| <b>Басик А.И., Грицук Е.В.</b> Задача типа Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^4$ .....   | 60 |
| <b>Боднарчук И.Н.</b> Асимптотика мягкого решения волнового уравнения со стохастической мерой .....   | 70 |
| <b>Грицук Д.В., Трофимук А.А., Бондарук Т.В.</b> Инварианты $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения .....                    | 79 |
| <b>Матысик О.В., Минзер Е.Н.</b> Итерационная регуляризация некорректных уравнений явным двухшаговым методом с правилом останова по малости невязки .....                           | 86 |
| <b>Юдов А.А., Кононюк М.А.</b> Классификация и исследование редутивных однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства ..... | 94 |



# *Vesnik*

*of Brest University*

**Editor-in-chief:**  
G.M. Sender  
**Deputy Editor-in-chief:**  
S.A. Marzan

**International Board:**  
V.A. Glavan (Moldova)  
V.G. Samoilenka (Ukraine)  
V.V. Dzikussar (Russia)

**Editorial Board:**  
A.B. Antanevich  
M.M. Sender  
(managing editor)  
M.I. Lyavchuk  
I.P. Martynov  
V.S. Monakhov  
Y.A. Pletsukhov  
A.F. Ravinski  
Y.V. Radyno  
V.M. Rad'kov  
Y.S. Sekyazhytski  
M.M. Trush  
A.V. Chychuryn

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224016, Brest,  
Boulevard Cosmonauts, 21  
tel.: 21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

**Series 4**

**PHYSICS**

**MATHEMATICS**

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

**Issued two times a year**

**Founder – Educational institution**  
**«Brest state university named after A.S. Pushkin»**

***№ 2 / 2018***

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission  
of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94  
(as revised by the order of Supreme Certification Commission  
of the Republic of Belarus from January 16, 2018 № 16)  
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»  
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus  
for publication of the results of scientific research  
in physics-mathematical sciences (Physics)

# INDEX

## PHYSICS

|  |    |
|--|----|
| <b>Voynova Ya.A., Veko O.V., Ovsyuk E.M.</b> A Vector Particle with Polarizability in the Coulomb Field, Nonrelativistic Approximation.....              | 5  |
| <b>Vorsin N.N., Gladyschuk A.A., Tarasiuk N.P., Chugunov S.V.</b> Analytical Relations for the IVC of HEMT Based on GaN.....                             | 26 |
| <b>Demidchik A.V.</b> The Influence of Ultra-Fast Cooling on the Distribution of Components in Permalloy Iron-Nickel Alloys .....                        | 32 |
| <b>Levchuk M.I., L'vov A.I., Nevmerzhitsky M.N., Shuliakouski R.G.</b> Deuteron Compton Scattering and the Neutron Polarizabilities .....                | 38 |
| <b>Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitski S.S.</b> Analysis of Positions 00l-Nodes of the Lattice with a Random of Three Layers ..... | 47 |
| <b>Sekerzhitsky V.S.</b> On the Composition of Heavy Atomic Nuclei of an Equilibrium Superdense Matter.....  | 55 |

## MATHEMATICS

|   |    |
|---|----|
| <b>Basik A.I., Gritsuk E.V.</b> The Riemann – Hilbert Type Boundary Value Problem for Orthogonal Elliptic Systems in $R^4$ .....  | 60 |
| <b>Bodnarchuk I.M.</b> Asymptotics of the Mild Solution for the Wave Equation with a Stochastic Measure.....  | 70 |
| <b>Gritsuk D.V., Trofimuk A.A., Bondaruk T.V.</b> The Invariants of A $\pi$ -Soluble Group in which Sylow Subgroups of Factors Have Given Restrictions .....                            | 79 |
| <b>Matysik O.V., Minzer E.N.</b> The Iterative Regularization of Non-correct Equations by an Explicit Two-step Method with the Rule of Stop on the Smallness of Non-band.....           | 86 |
| <b>Yudov A.A., Kononyuk M.A.</b> Classification and Study of Reductive Homogeneous Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space..... | 94 |

УДК 539.12

**Я.А. Войнова<sup>1</sup>, О.В. Веко<sup>2</sup>, Е.М. Овсиук<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

<sup>2</sup>учитель физики гимназии г. Калинковичи

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

## **ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ**

*Квантово-механическое уравнение для частицы со спином 1 и дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью исследуется в присутствии внешнего кулоновского поля. Из 15-мерной релятивистской теории в тензорной форме Прока следует соответствующее нерелятивистское уравнение для 3-мерной волновой функции. Задача разделения переменных в присутствии внешнего кулоновского поля решается сначала для 15-мерного релятивистского уравнения. В найденной системе из 15 радиальных уравнений с использованием диагонализации оператора пространственной инверсии проведено расщепление на две подсистемы – по 5 и 10 уравнений соответственно. Релятивистская радиальная система из 5 уравнений сводится к уравнению, известному в теории обычной скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, при этом поляризуемость никак не проявляет себя в спектре энергий. В радиальной подсистеме из 10 уравнений выполнено нерелятивистское приближение, в результате получена система из двух зацепляющихся уравнений 2-го порядка для двух функций, из которой выведено радиальное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Уравнение имеет две нерегулярные особые точки –  $r = 0$  и  $r = \infty$  ранга 3. Отдельно рассмотрен случай минимального значения  $j = 0$  сохраняющегося полного момента, при этом в нерелятивистском приближении система описывается одним уравнением второго порядка с двумя нерегулярными особыми точками  $r = 0$  и  $r = \infty$  ранга 2. Построены формальные решения Фробениуса выведенных радиальных уравнений 2-го и 4-го порядков, указаны те решения, которые могли бы описывать связанные состояния в системе.*

### **Введение**

Известны релятивистские уравнения для скалярных и векторных частиц с дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью [1–9]; для описания таких частиц необходимо использовать 15-компонентные волновые функции. Уравнение для векторной частицы было решено в случае присутствия внешнего однородного магнитного поля [8]. В случае внешнего кулоновского поля анализ для релятивистской векторной частицы оказывается очень сложным, даже в отсутствии поляризуемости задача все еще не решена полностью. При этом известны решения уравнения для обычной векторной частицы в кулоновском поле в нерелятивистском пределе.

В настоящей работе исследуется нерелятивистская задача для частицы со спином 1 и поляризуемостью во внешнем кулоновском поле. Из 15-мерной релятивистской теории в тензорной форме Прока выведено соответствующее нерелятивистское уравнение для 3-мерной волновой функции. Задача разделения переменных в присутствии внешнего кулоновского поля решается для 15-мерного релятивистского уравнения, при этом используется тетрадный формализм и аппарат функций Вигнера. В найденной системе из 15 радиальных уравнений с использованием диагонализации оператора пространственной инверсии проведено расщепление на две подсистемы – по 5 и 10 уравнений соответственно. Система из 5 уравнений сводится к уравнению, известному в теории обычной скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, при этом поляризуемость никак не проявляет себя в спектре энергий. В радиальной системе из 10 уравнений выполнено нерелятивистское приближение, в результате найдена система из двух

зацепляюцца ўраўненняў 2-го парадка для двух функцый, з якой следуюць дыферэнцыяльнае ўраўненне 4-го парадка, гэта ўраўненне мае два нерегулярныя асобныя пункты  $r=0$  і  $r=\infty$  ранга 3. Адрэдкава разгледзена выпадак мінімальнага значэння  $j=0$  захоўваючага поўнага момэнта, пры гэтым у нерэлятывісцкім набліжэнні задача сводзіцца да аднаго ўраўнення другога ўраўнення з двума нерегулярнымі асобнымі пунктамі  $r=0$  і  $r=\infty$  ранга 2. Пастроены формальныя рашэнні Фробеніуса выведзеных ўраўненняў 2-го і 4-го парадкаў, у іх выдзелены тэ, якія маглі б апісваць звязаныя стаяніі сістэмы.

### 1. Нерэлятывісцкі прадзел для частіцы с палярызаванасцю

Будем ісходзіць з абагульненай сістэмы ўраўненняў Прака для векторнай частіцы с палярызаванасцю [10] (іспользуем абазначэнне  $\mu = e\sigma/m^2$ )

$$i\mu D_b \left( \frac{1}{2} F^{kl} \Phi_{kl} \right) + D^a \Phi_{ba} = m \Phi_b, \quad D_a \Phi_b - D_b \Phi_a = m \Phi_{ab}. \quad (1.1)$$

Свершымы ў (1.1) пераход да нерэлятывісцкаму прадзелу. Для гэтага праведзем у ўраўненнях расщепление (3+1):

$$\begin{aligned} i\mu D_0 \left( F^{0l} \Phi_{0l} + \frac{1}{2} F^{lk} \Phi_{lk} \right) + D^l \Phi_{0l} &= m \Phi_0, \\ i\mu D_n \left( F^{0l} \Phi_{0l} + \frac{1}{2} F^{lk} \Phi_{lk} \right) + D_0 \Phi_{n0} + D^l \Phi_{nl} &= m \Phi_n, \\ D_0 \Phi_l - D_l \Phi_0 &= m \Phi_{0l}, \quad D_l \Phi_k - D_k \Phi_l = m \Phi_{lk}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Затем ісключым поля  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{lk}$ :

$$m \Phi_n = -D_0 \Phi_{0n} + \frac{1}{m} \left( -D^l D_l \Phi_n + D^l D_n \Phi_l \right) + i\mu D_n \left( F^{0l} \Phi_{0l} + \frac{1}{m} F^{lk} D_l \Phi_k \right), \quad (1.3a)$$

$$m \Phi_{0n} = D_0 \Phi_n - \frac{1}{m} D_n D^l \Phi_{0l} - i \frac{\mu}{m} D_n D_0 \left( F^{0l} \Phi_{0l} + \frac{1}{m} F^{lk} D_l \Phi_k \right). \quad (1.3b)$$

Вводим большую  $\Psi_n$  и малую  $\psi_n$  компоненты:

$$\Phi_n = \Psi_n + \psi_n, \quad i\Phi_{0n} = \Psi_n - \psi_n,$$

Из (1.3) получаем уравнения для функций  $\Psi_n$ ,  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} 2m\Psi_n &= 2iD_0\Psi_n + \frac{1}{m} \left[ -D^l D_l (\Psi_n + \psi_n) + D^l D_n (\Psi_l + \psi_l) \right] - \frac{1}{m} D_n D^l (\Psi_l - \psi_l) + \\ &+ \mu D_n \left[ F^{0l} (\Psi_l - \psi_l) + \frac{i}{m} F^{lk} D_l (\Psi_k + \psi_k) \right] - \\ &- i \frac{\mu}{m} D_n D_0 \left[ F^{0l} (\Psi_l - \psi_l) + \frac{i}{m} F^{lk} D_l (\Psi_k + \psi_k) \right], \end{aligned} \quad (1.4a)$$

$$2m\psi_n = -2iD_0\psi_n + \frac{1}{m} \left[ -D^l D_l (\Psi_n + \psi_n) + D^l D_n (\Psi_l + \psi_l) \right] + \frac{1}{m} D_n D^l (\Psi_l - \psi_l) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu D_n \left[ F^{0l} (\Psi_l - \psi_l) + \frac{i}{m} F^{lk} D_l (\Psi_k + \psi_k) \right] + \\
 & + i \frac{\mu}{m} D_n D_0 \left[ F^{0l} (\Psi_l - \psi_l) + \frac{i}{m} F^{lk} D_l (\Psi_k + \psi_k) \right]. \quad (1.4b)
 \end{aligned}$$

В уравнениях (1.4) совершим формальную замену  $iD_0 \Rightarrow (iD_0 + m)$ , отвечающую выделению энергии покоя; одновременно будем пренебрегать малой компонентой  $\psi_n(x)$  в сравнении с большой  $\Psi_n(x)$ ; кроме того, пренебрежем членом  $iD_0 \psi_n(x)$  по сравнению с  $m\Psi_n$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
 0 = 2iD_0 \Psi_n + \frac{1}{m} \left[ -D^l D_l \Psi_n + (D^l D_n - D_n D^l) \Psi_l \right] - \\
 - \frac{\mu}{m} D_n iD_0 \left( F^{0l} \Psi_l + \frac{i}{m} F^{lk} D_l \Psi_k \right), \quad (1.5a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4m\psi_n = + \frac{1}{m} \left[ -D^l D_l \Psi_n + (D^l D_n + D_n D^l) \Psi_l \right] + \\
 + 2\mu D_n \left( F^{0l} \Psi_l + \frac{i}{m} F^{lk} D_l \Psi_k \right) + i \frac{\mu}{m} D_n D_0 \left( F^{0l} \Psi_l + \frac{i}{m} F^{lk} D_l \Psi_k \right). \quad (1.5b)
 \end{aligned}$$

Уравнение (1.5a) представляет собой уравнение для большой компоненты  $\Psi_k(x)$  векторной частицы с поляризуемостью; уравнение (1.5b) позволяет вычислить малую компоненту  $\psi_k(x)$  по известной большой. Таким образом, нерелятивистское уравнение для частицы с поляризуемостью имеет вид

$$iD_0 \Psi_n = \frac{1}{2m} (D^l D_l \Psi_n - [D_l, D_n]_- \Psi^l) + \frac{\mu}{2m} D_n iD_0 \left( F^{0l} \Psi_l + \frac{i}{m} F^{lk} D_l \Psi_k \right). \quad (1.6)$$

В отсутствие магнитного поля уравнения уравнение (1.6) упрощается

$$iD_0 \Psi_n = \frac{1}{2m} \partial^l \partial_l \Psi_n + \frac{\mu}{2m} \partial_n iD_0 (F^{0l} \Psi_l). \quad (1.7)$$

## 2. Матричное представление релятивистского уравнения, тетрадный формализм

Разделение переменных удобно выполнить в релятивистском матричном волновом уравнении. Для простоты сначала рассматриваем свободный случай, внешнее кулоновское поле учтем в радиальной системе уравнений. Исходное уравнение для 15-компонентной волновой функции частицы в матричном представлении имеет вид [10]

$$(\Gamma^a \partial_a - m) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} C \\ C_l \\ \Phi_l \\ \Phi_{mn} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & G^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^a \\ \sigma \Delta^a & 0 & 0 & K^a \\ 0 & 0 & \Lambda^a & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где используются блочные матрицы размерностью  $1 \times 4$ ,  $4 \times 1$ ,  $4 \times 6$  и  $6 \times 4$  соответственно:

$$(G^a)_{(0)}^k = g^{ak}, \quad (\Delta^a)^{(0)}_n = \delta_n^a,$$

$$(K_a)_n^{kl} = -g^{ak} \delta_n^l + g^{al} \delta_n^k, \quad (\Lambda^a)^k_{nb} = \delta_n^a \delta_b^k - \delta_n^k \delta_b^a; \quad (2.2)$$

$\sigma$  – вещественный параметр.

В соответствии с тетрадным подходом, матричное 15-мерное уравнение (2.1)–(2.2) обобщается на псевдоримановое пространство-время с метрикой  $g_{\alpha\beta}(x)$  и какой-либо сопутствующей ей тетрадой  $e_{(a)}^\alpha(x)$  следующим образом [10]:

$$[\Gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha(x)) - m] \Psi(x) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\Gamma^\alpha(x) = \Gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b)\beta}). \quad (2.4)$$

Воспользуемся этим представлением уравнения (2.3) в пространстве Минковского в сферических координатах [11]:

$$\left( \Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^3 \partial_r + \frac{\Gamma^1 J^{31} + \Gamma^2 J^{32}}{r} + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi} - m \right) \Psi(x) = 0, \quad (2.5)$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \Gamma^1 \partial_\theta + \Gamma^2 \frac{\partial_\phi + \cos \theta J^{12}}{\sin \theta}.$$

Потребуется явный вид матриц  $\Gamma^a$ . Исходя из определений (2.2), для блочных матриц  $G^a$ ,  $\Delta^a$ ,  $\Lambda^a$ ,  $K^a$  находим

$$G^0 = (+1, 0, 0, 0), \quad G^1 = (0, -1, 0, 0), \quad G^2 = (0, 0, -1, 0), \quad G^3 = (0, 0, 0, -1),$$

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^0 = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 K^0 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & K^1 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 K^2 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & K^3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_1 &= (1 \ 0 \ 0), \quad \bar{e}_2 = (0 \ 1 \ 0), \quad \bar{e}_3 = (0 \ 0 \ 1), \\
 \bar{e}_1^t &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_2^t = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_3^t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \\
 \tau_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Тогда выражения для блочных матриц могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta^0 &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad G^0 = (1, 0, 0, 0), \quad \Lambda^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{vmatrix}, \\
 \Delta^i &= \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{e}_i^t \end{vmatrix}, \quad G^i = |0 \ -\bar{e}_i|, \quad \Lambda^i = \begin{vmatrix} -\bar{e}_i^t & 0 \\ \bar{0}^t & \tau_i \end{vmatrix}, \quad K^i = \begin{vmatrix} \bar{e}_i & \bar{0} \\ 0 & \tau_i \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем потребуется также явный вид генераторов рассматриваемого набора полей и явный вид оператора полного момента в сферической тетраде и циклическом базисе:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= l_1 + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} S_3, \quad J_2 = l_2 + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} S_3, \quad J_3 = l_3, \\
 \vec{J}^2 &= -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{-\partial_\phi^2 + 2i \partial_\phi S_3 \cos \theta + S_3^2}{\sin^2 \theta},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = -i \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

В этом базисе матрица  $S_3$  диагональна. Потребуется также выражения для векторов  $\bar{e}_i$  и  $\bar{e}_i^t$  в циклическом базисе

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & \vec{e}_2 &= \left( -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right), & \vec{e}_3 &= (0, 1, 0), \\ \vec{e}_1^t &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}, & \vec{e}_2^t &= \begin{vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}, & \vec{e}_3^t &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 3. Разделение переменных, радиальные уравнения

Дальше все формулы и соотношения будут относиться к сферической тетраде и циклическому базису. Находим наиболее общий вид 15-компонентной волновой функции с квантовыми числами  $\varepsilon, j, m$ :

$$\Psi(x) = \{C(x), C_0(x), \vec{C}(x), \Phi_0(x), \vec{\Phi}(x), \vec{E}(x), \vec{H}(x)\}. \quad (3.1)$$

Здесь для отдельных компонент волновой функции должны быть взяты подстановки:

$$\begin{aligned} C(x) &= e^{-i\varepsilon t} C(r) D_0, & C_0(x) &= e^{-i\varepsilon t} C_0(r) D_0, & \Phi_0(x) &= e^{-i\varepsilon t} \Phi_0(r) D_0, \\ \vec{C}(x) &= e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} C_1(r) D_{-1} \\ C_2(r) D_0 \\ C_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, & \vec{\Phi}(x) &= e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) D_{-1} \\ \Phi_2(r) D_0 \\ \Phi_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, \\ \vec{E}(x) &= e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} E_1(r) D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ E_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, & \vec{H}(x) &= e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} H_1(r) D_{-1} \\ H_2(r) D_0 \\ H_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Будут использованы известные рекуррентные соотношения для функций Вигнера [11]:

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{-1} &= (1/2)(aD_{-2} - \nu D_0), & \frac{-m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} &= (1/2)(-aD_{-2} - \nu D_0), \\ \partial_\theta D_0 &= (1/2)(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), & \frac{-m}{\sin \theta} D_0 &= (1/2)(-\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), \\ \partial_\theta D_{+1} &= (1/2)(\nu D_0 - aD_{+2}), & \frac{-m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} &= (1/2)(-\nu D_0 - aD_{+2}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\nu = \sqrt{j(j+1)}; \quad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}.$$

Учитывая в уравнении (2.5) блочную структуру всех входящих в него величин, после необходимых вычислений получаем уравнения (используем обозначение  $\nu = \sqrt{j(j+1)}/\sqrt{2}$ ; рядом с радиальными уравнениями приведены также соответствующие тензорные уравнения):

$$\begin{aligned} \underline{\partial^a C_a} &= m C, & -i \varepsilon C_0 - \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) C_2 - \frac{\nu}{r} (C_1 + C_3) &= m C; \\ \underline{\partial^a \Phi_{ba}} &= m C_a, \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1 + E_3) = m C_0, \quad +i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m C_1, \\
 +i\varepsilon E_2 - i\frac{\nu}{r}(H_1 - H_3) = m C_2, \quad +i\varepsilon E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 = m C_3; \quad (3.4b)
 \end{aligned}$$

$$\sigma \partial_a C + \partial^a \Phi_{ba} = m \Phi_a,$$

$$-i\varepsilon \sigma C - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1 + E_3) = m \Phi_0,$$

$$+i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 - \sigma \frac{\nu}{r}C = m \Phi_1,$$

$$+i\varepsilon E_2 + \sigma \frac{d}{dr}C - i\frac{\nu}{r}(H_1 - H_3) = m \Phi_2,$$

$$+i\varepsilon E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 - \sigma \frac{\nu}{r}C = m \Phi_3; \quad (3.4c)$$

$$\partial_a \Phi_b - \partial_b \Phi_a = m \Phi_{ab},$$

$$-i\varepsilon \Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 = m E_1, \quad -i\varepsilon \Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 = m E_2, \quad -i\varepsilon \Phi_3 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 = m E_3,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\Phi_2 = m H_1, \quad +i\frac{\nu}{r}(\Phi_1 - \Phi_3) = m H_2,$$

$$+i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_3 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 = m H_3. \quad (3.4d)$$

Одновременно с операторами  $\vec{J}^2, J_3$  будем диагонализировать оператор пространственной инверсии  $\Pi$ . В представлении декартовой тетрады и декартового базиса матриц  $\Gamma^a$  этот оператор имеет обычный вид

$$\widehat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \widehat{P}, \quad \widehat{P}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}). \quad (3.5)$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц  $\Gamma^a$  получаем

$$\widehat{\Pi}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{pmatrix} \widehat{P}, \quad \Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Уравнение  $\widehat{P}\Psi = P\Psi$  с учетом соотношения  $\widehat{P}D_\sigma = (-1)^j D_{-\sigma}$  дает

$$\begin{aligned} (-1)^j C &= PC, \\ (-1)^j C_0 &= PC_0, \quad (-1)^j C_3 = PC_1, \quad (-1)^j C_2 = PC_2, \quad (-1)^j C_1 = PC_3, \\ (-1)^j \Phi_0 &= P\Phi_0, \quad (-1)^j \Phi_3 = P\Phi_1, \quad (-1)^j \Phi_2 = P\Phi_2, \quad (-1)^j \Phi_1 = P\Phi_3, \\ (-1)^j E_3 &= PE_1, \quad (-1)^j E_2 = PE_2, \quad (-1)^j E_1 = PE_3, \\ (-1)^j H_3 &= -PH_1, \quad (-1)^j H_2 = -PH_2, \quad (-1)^j H_1 = -PH_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

У этой системы уравнений есть два решения:

$$\begin{aligned} \underline{P = (-1)^{j+1}}, \quad C = 0, \quad C_0 = 0, \quad C_3 = -C_1, \quad C_2 = 0, \\ \Phi_0 = 0, \quad \Phi_3 = -\Phi_1, \quad \Phi_2 = 0, \quad E_3 = -E_1, \quad E_2 = 0, \quad H_3 = H_1; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\underline{P = (-1)^j}, \quad C_3 = +C_1, \quad \Phi_3 = +\Phi_1, \quad E_3 = +E_1, \quad H_3 = -H_1, \quad H_2 = 0. \quad (3.9)$$

Легко убеждаемся в том, что эти условия совместимы с радиальными уравнениями. При этом получаем соответственно две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{P = (-1)^{j+1}}, \\ +i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = mC_1, \\ +i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_1, \quad -i\varepsilon\Phi_1 = mE_1, \\ -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 = mH_1, \quad 2i\frac{\nu}{r}\Phi_1 = mH_2; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{P = (-1)^j}, \\ -i\varepsilon C_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)C_2 - 2\frac{\nu}{r}C_1 = mC, \quad -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 = mC_0, \\ +i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 = mC_1, \quad +i\varepsilon E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 = mC_2, \\ -i\varepsilon\sigma C - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 = m\Phi_0, \quad +i\varepsilon E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - \sigma\frac{\nu}{r}C = m\Phi_1, \\ +i\varepsilon E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 + \sigma\frac{d}{dr}C = m\Phi_2, \quad -i\varepsilon\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 = mE_1, \quad -i\varepsilon\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 = mE_2, \\ -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\Phi_2 = mH_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

#### 4. Учет кулоновского поля, нерелятивистские уравнения

Учтем кулоновское поле (используем сокращение  $e^2 = \alpha$ ):

$$\begin{aligned} \underline{P = (-1)^{j+1}}, \\ +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = mC_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_1 + i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 + i \frac{\nu}{r} H_2 = m \Phi_1, \\
 & - i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_1 = m E_1, \quad - i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 = m H_1, \quad 2i \frac{\nu}{r} \Phi_1 = m H_2; \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$P = (-1)^j,$$

$$\begin{aligned}
 & - i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) C_0 - \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) C_2 - 2 \frac{\nu}{r} C_1 = m C, \quad - \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) E_2 - 2 \frac{\nu}{r} E_1 = m C_0, \\
 & + i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_1 + i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 = m C_1, \quad + i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_2 - 2i \frac{\nu}{r} H_1 = m C_2; \\
 & - i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \sigma C - \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) E_2 - 2 \frac{\nu}{r} E_1 = m \Phi_0, \\
 & + i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_1 + i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 - \sigma \frac{\nu}{r} C = m \Phi_1, \\
 & + i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_2 - 2i \frac{\nu}{r} H_1 + \sigma \frac{d}{dr} C = m \Phi_2, \quad - i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_1 + \frac{\nu}{r} \Phi_0 = m E_1, \\
 & - i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_2 - \frac{d}{dr} \Phi_0 = m E_2, \quad - i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 - i \frac{\nu}{r} \Phi_2 = m H_1. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Обратимся к анализу уравнений (4.1). Прежде всего отмечаем, что для решений с четностью  $P = (-1)^{j+1}$  в присутствии внешнего кулоновского поля дополнительная электромагнитная характеристика  $\sigma$  (поляризуемость) не входит в уравнения этой подсистемы. Уравнения (2.1) допускают полное решение. Из (4.1) следует

$$\begin{aligned}
 C_1(x) &= \Phi_1(x), \quad m H_2 = 2i \frac{\nu}{r} \Phi_1, \\
 m E_1 &= -i \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_1, \quad m H_1 = -i \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \Phi_1. \quad (4.3a)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для  $E_1, H_1, H_2$  через  $\Phi_1$ , приходим к уравнению второго порядка для функции  $\Phi_1$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \Phi_1 = 0. \quad (4.3b)$$

Уравнение (4.3b) – это известное уравнение, которое возникает в теории скалярной частицы во внешнем кулоновском поле. Его точное решение и отвечающий ему спектр энергии известны. Таким образом, есть класс решений с четностью  $P = (-1)^{j+1}$ , в которых поляризуемость себя не проявляет; этим решениям отвечают энергетические уровни, имеющиеся в теориях обычных скалярной и векторной частиц.

Теперь обратимся к системе уравнений (4.2), описывающих состояния с четностью  $P = (-1)^j$ . Прежде всего, используя второе, третье и четвертое уравнения в (4.2), находим представление для  $C(x)$ :

$$C = i \frac{\alpha}{m^2 r^2} E_2. \quad (4.4)$$

Подставляя это выражение для  $C(x)$  в оставшиеся шесть уравнений, получаем

$$\begin{aligned}
 & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\sigma i \frac{\alpha}{m^2 r^2} E_2 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) E_2 - 2\frac{\nu}{r} E_1 = m \Phi_0, \\
 & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) H_1 - \sigma \frac{\nu}{r} i \frac{\alpha}{m^2 r^2} E_2 = m \Phi_1, \\
 & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) E_2 - 2i\frac{\nu}{r} H_1 + \sigma \frac{d}{dr} i \frac{\alpha}{m^2 r^2} E_2 = m \Phi_2, \\
 & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \Phi_1 + \frac{\nu}{r} \Phi_0 = m E_1, \quad -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \Phi_2 - \frac{d}{dr} \Phi_0 = m E_2, \\
 & \quad -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \Phi_1 - \frac{i\nu}{r} \Phi_2 = m H_1.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Исключим нединамические переменные – функции  $\Phi_0$  и  $H_1$ :

$$\begin{aligned}
 & \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) iE_1 + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)^2 \Phi_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{\nu}{mr} \Phi_2 = m \Phi_1 + \frac{\sigma\nu\alpha}{m^2 r^3} iE_2, \\
 & \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \Phi_1 - \frac{\nu}{mr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) iE_2 - \frac{2\nu^2}{mr^2} iE_1 = m iE_1 - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\sigma\alpha\nu}{m^3 r^3} iE_2;
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) iE_2 - \frac{2\nu}{mr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \Phi_1 - \frac{2\nu^2}{mr^2} \Phi_2 = m \Phi_2 - \frac{d}{dr} \frac{\sigma\alpha}{m^2 r^2} iE_2, \\
 & \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \Phi_2 + \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) iE_2 + \frac{d}{dr} \frac{2\nu}{mr} iE_1 = m iE_2 + \frac{d}{dr} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\sigma\alpha}{m^3 r^2} iE_2.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Вводим большие  $B_{1,2}(r)$  и малые  $M_{1,2}(r)$  компоненты:

$$\Phi_1 = (B_1 + M_1), \quad \Phi_2 = (B_2 + M_2), \quad iE_1 = (B_1 - M_1), \quad iE_2 = (B_2 - M_2); \tag{4.8}$$

также выделяем энергию покоя с помощью формальной замены  $\varepsilon = m + E$ , в результате находим более простые уравнения (пренебрежем малыми функциями  $M_i$  в сравнении с большими  $B_i$ ):

$$\begin{aligned}
 & \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B_1 + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)^2 B_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \frac{\nu}{mr} B_2 = 2m M_1 + \frac{\sigma\nu\alpha}{m^2 r^3} B_2, \\
 & \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B_1 - \frac{\nu}{mr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) B_2 - \frac{2\nu^2}{mr^2} B_1 = -2m M_1 - \left(m + E + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\sigma\alpha\nu}{m^3 r^3} B_2; \\
 & \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B_2 - \frac{2\nu}{mr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) B_1 - \frac{2\nu^2}{mr^2} B_2 = 2m M_2 - \frac{d}{dr} \frac{\sigma\alpha}{m^2 r^2} B_2, \\
 & \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B_2 + \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) B_2 + \frac{d}{dr} \frac{2\nu}{mr} B_1 = -2m M_2 + \frac{d}{dr} \left(m + E + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\sigma\alpha}{m^3 r^2} B_2.
 \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения, содержащие только большие компоненты, сложим уравнения в каждой паре

$$2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)B_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)^2 B_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{\nu}{r}B_2 - \frac{\nu}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)B_2 - \frac{2\nu^2}{r^2}B_1 = -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha\nu}{m^2r^3}B_2,$$

$$2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)B_2 - \frac{2\nu}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)B_1 - \frac{2\nu^2}{r^2}B_2 + \frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)B_2 + \frac{d}{dr}\frac{2\nu}{r}B_1 = +\frac{d}{dr}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha}{m^2r^2}B_2.$$

Их можно переписать так:

$$\Delta B_1 = \frac{2\nu}{r^2}B_2 - e\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\nu}{r^3}B_2, \quad (4.9)$$

$$\Delta B_2 = +\frac{3\nu}{r^2}B_1 + \frac{2}{r^2}B_2 + e\mu\frac{d}{dr}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2, \quad (4.10)$$

где использованы обозначения

$$e^2 = \alpha, \quad \frac{e\sigma}{m^2} = \mu, \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2\nu^2}{r^2}. \quad (4.11)$$

Отметим, что система уравнений (4.9) – (4.10) для ситуации  $\mu = 0$  исследовалась при рассмотрении нерелятивистского предела для векторной частицы без поляризуемости. Здесь также применим аналогичное преобразование (напоминаем, что  $\nu = \sqrt{j(j+1)/2}$ )

$$F_1 = 2\nu B_1 + \lambda_1 B_2, \quad f_2 = 2\nu B_1 + \lambda_2 B_2, \quad (4.12)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – это корни уравнения

$$\lambda^2 - \lambda - j(j+1) = 0, \quad \lambda_1 = j+1, \quad \lambda_2 = -j. \quad (4.13)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$B_1 = \frac{1}{2\nu}\left(\frac{j}{2j+1}F_1 + \frac{j+1}{2j+1}F_2\right), \quad B_2 = \frac{1}{2j+1}F_1 - \frac{1}{2j+1}F_2. \quad (4.14)$$

Уравнения (4.9) – (4.10) преобразовываем к переменным  $F_1, F_2$ :

$$F_1 = 2\nu B_1 + (j+1)B_2, \quad F_2 = 2\nu B_1 - jB_2,$$

находим

$$\Delta F_1 = \frac{4\nu^2}{r^2}B_2 - e\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2\nu^2}{r^3}B_2 + \frac{4\nu(j+1)}{r^2}B_1 + \frac{2(j+1)}{r^2}B_2 + e\mu(j+1)\frac{d}{dr}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2, \quad (4.15)$$

$$\Delta F_2 = \frac{4\nu^2}{r^2}B_2 - e\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2\nu^2}{r^3}B_2 - \frac{4\nu j}{r^2}B_1 - \frac{2j}{r^2}B_2 - e\mu j\frac{d}{dr}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2. \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) получим уравнения для функций  $F_1, F_2$ :

$$\Delta F_1 = 2(j+1)F_1 + e\mu(j+1)\left\{-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j+2}{r}\right)\right\}\frac{F_1 - F_2}{2j+1}, \quad (4.17)$$

$$\Delta F_2 = -2jF_2 - e\mu j \left\{ -\frac{\alpha}{r^4} + \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{j-1}{r} \right) \right\} \frac{F_1 - F_2}{2j+1}. \quad (4.18)$$

Пусть

$$G = F_1 - F_2, \quad H = F_1 + F_2, \quad (4.19)$$

из уравнений (4.17) – (4.18) получаем

$$\begin{aligned} \Delta G &= 2jH + G + H + e\mu \left\{ -\frac{\alpha}{r^4} + \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{2}{r} \right\} G, \\ \Delta H &= 2jG + G + H + e\mu \left\{ -\frac{\alpha}{r^4} + \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{2(j^2 + j + 1)}{r} \right\} \frac{G}{2j+1}. \end{aligned}$$

Последние уравнения переписываются окончательно так:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta - 1 + e\mu \left[ -\frac{\alpha}{r^4} + \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{2}{r} \right] \right\} G &= (2j+1)H, \\ (\Delta - 1)(2j+1)H &= \left\{ (2j+1)^2 + e\mu \left[ -\frac{\alpha}{r^4} + \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{2(j^2 + j + 1)}{r} \right] \right\} G. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Радиальные уравнения (4.20) могут быть сопоставлены с общей записью нерелятивистского уравнения Паули (1.7) для векторной частицы с поляризуемостью в электрическом поле:

$$2m \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \psi_n = -\nabla^2 \psi_n + e\mu \hat{\partial}_n \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) (F^{0k} \psi_k), \quad \mu = \frac{e\sigma}{m^2}.$$

Уравнения (4.20) позволяют после исключения функции  $H(r)$  получить уравнение 4-го порядка для функции  $G(r)$ . Информация о радиальных волновых функциях векторной частицы с поляризуемостью в кулоновском поле содержится именно в этом уравнении 4-го порядка.

В следующем разделе рассмотрим самый простой случай, когда квантовое число  $j$  принимает нулевое значение.

### 5. Случай минимального значения $j = 0$

Отдельно должен быть рассмотрен случай минимального значения  $j = 0$ . При этом нужно использовать более простую подстановку для волновой функции:

$$\begin{aligned} C(x) &= e^{-i\epsilon t} C(r) D_0, \quad C_0(x) = e^{-i\epsilon t} C_0(r) D_0, \quad \Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t} \Phi_0(r) D_0, \\ \vec{C}(x) &= e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \cdot D_{-1} \\ C_2(r) D_0 \\ 0 \cdot D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \cdot D_{-1} \\ \Phi_2(r) D_0 \\ 0 \cdot D_{+1} \end{vmatrix}, \\ \vec{E}(x) &= e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \cdot D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ 0 \cdot D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \cdot D_{-1} \\ H_2(r) D_0 \\ 0 \cdot D_{+1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$



Эта волновая функция имеет четность  $\Pi = (-1)^j = (-1)^0 = +1$ ; соответственно, имеем только одну систему уравнений для состояний с этой четностью – ее легко получить из (4.2). Так, находим

$$\begin{aligned} -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)C_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)C_2 &= mC, & -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 &= mC_0, & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 &= mC_2, \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\sigma C - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 &= m\Phi_0, & i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 + \sigma \frac{d}{dr}C &= m\Phi_2, \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 &= mE_2, & H_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Первые три уравнения дают возможность найти выражение  $C(r)$

$$C(r) = \frac{i}{m^2} \left[ \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \right] E_2(r) = \frac{i\alpha}{m^2 r^2} E_2(r), \quad (5.3)$$

а затем исключить вспомогательную функцию из трех оставшихся уравнений:

$$\begin{aligned} -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\sigma \frac{i\alpha}{m^2 r^2} E_2(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2(r) &= m\Phi_0(r), \\ i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2(r) + \sigma \frac{d}{dr} \frac{i\alpha}{m^2 r^2} E_2(r) &= m\Phi_2(r), \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2(r) - \frac{d}{dr}\Phi_0 &= mE_2(r). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Осуществим в этой системе предельный переход к нерелятивистскому случаю. Для этого сначала исключим нединамическую переменную  $\Phi_0$ :

$$\Phi_0 = \frac{1}{m} \left[ \frac{\sigma\alpha}{m^2} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{1}{r^2} - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \right] E_2,$$

после чего получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)iE_2 + \frac{\sigma\alpha}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} iE_2 &= m\Phi_2, \\ \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr} \frac{\sigma\alpha}{m^2} \frac{1}{m} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{1}{r^2} iE_2 + \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) iE_2 &= m iE_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вводим большие и малые компоненты:

$$\Phi_2 = (B_2 + M_2), \quad iE_2 = (B_2 - M_2); \quad (5.6)$$

выделяем энергию покоя формальной заменой  $\varepsilon \Rightarrow M + \varepsilon$ . Получим

$$\begin{aligned} \left(m + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 - M_2) + \frac{\sigma\alpha}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} (B_2 - M_2) &= m(B_2 + M_2), \\ \left(m + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 + M_2) - \frac{d}{dr} \frac{\sigma\alpha}{m^2} \frac{1}{m} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{1}{r^2} (B_2 - M_2) + \end{aligned}$$

$$+\frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) (B_2 - M_2) = m (B_2 - M_2), \quad (5.7)$$

откуда следует

$$\left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) (B_2 - M_2) + \frac{\sigma \alpha}{m^2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} (B_2 - M_2) = 2m M_2,$$

$$\left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) (B_2 + M_2) - \frac{d}{dr} \frac{\sigma \alpha}{m^2} \frac{1}{m} \frac{1}{r} \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} (B_2 - M_2) + \frac{d}{dr} \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) (B_2 - M_2) = -2m M_2.$$

Чтобы найти уравнение для большой компоненты  $B_2$ , сложим последние два уравнения:

$$\left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) + 2m \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) + \frac{\sigma \alpha}{m} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} - \frac{d}{dr} \frac{\sigma \alpha}{m} \frac{1}{m} \left( \varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{r^2} \right] B_2 = 0;$$

это радиальное уравнение в приближении Паули для состояний с  $j=0$ . Его можно представить в явном виде так (пусть  $B_2(r) = F(r)$ ):

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{2}{r} + \frac{-\sigma \alpha \varepsilon / m^2 + \sigma \alpha / m - \alpha^2 \sigma / m^2}{r^2} \right) \frac{d}{dr} + \right.$$

$$\left. + \left( 2m \varepsilon + \frac{2m \alpha}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{-2\sigma \alpha / m + 2\sigma \alpha \varepsilon / m^2}{r^3} + \frac{3\sigma \alpha^2 / m^2}{r^4} \right) \right\} F = 0. \quad (5.8)$$

Это уравнение второго порядка с двумя особыми нерегулярными точками 0 и  $\infty$  ранга 3. Это сложная для анализа задача. В настоящее время можно описать лишь ее формальные решения, при этом нет алгоритма для квантования значений энергии. При обращении параметра поляризуемости  $\sigma$  в ноль из (5.8) следует простое уравнение, решаемое в вырожденных гипергеометрических функциях.

Из (5.8), совершив с помощью замен

$$\alpha = e^2 \longrightarrow 0, \quad \frac{(e^2 \sigma)}{m^2} \Rightarrow \Sigma \quad (\sigma \longrightarrow \infty) \quad (5.9)$$

формальный переход к случаю электрически нейтральной частицы, получим уравнение

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{2}{r} + \frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^2} - \frac{\Sigma}{r^3} \right) \frac{d}{dr} + \left( 2m \varepsilon - \frac{2}{r^2} - 2 \frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^3} + \frac{3\Sigma}{r^4} \right) \right\} F = 0. \quad (5.10)$$

Эффективная потенциальная энергия задается равенством

$$U = \frac{2}{r^2} + 2 \frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^3} - \frac{3\Sigma}{r^4}; \quad (5.11)$$

около особых точек она ведет себя так (пусть  $\varepsilon, m, \Sigma > 0$ ):

$$r \rightarrow 0, \quad U \rightarrow -\frac{3\Sigma}{r^4} = -\infty, \quad r \rightarrow \infty, \quad U \rightarrow \frac{2}{r^2} = 0.$$

Из двух точек обращения в ноль потенциала одна положительная, другая отрицательная:

$$r_{1,2} = -\Sigma \frac{m-\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\Sigma^2 \left(\frac{m-\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{3\Sigma}{2}}. \quad (5.12)$$

Таким образом, и для нейтральной частицы с поляризуемостью  $\Sigma > 0$  существуют условия, при которых могут возникнуть связанные состояния частицы во внешнем кулоновском поле. Качественный анализ может быть выполнен и для случая заряженной частицы:

$$U = -\frac{2m\alpha}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{2\sigma\alpha/m - 2\sigma\alpha\varepsilon/m^2}{r^3} - \frac{3\sigma\alpha^2/m^2}{r^4}. \quad (5.13)$$

Поведение этого более сложного потенциала около особых точек аналогичное. Анализ точек  $U(r) = 0$  сводится к исследованию уравнения третьей степени. Связанным состояниям отвечает случай трех вещественных корней: двух положительных и одного отрицательного.

Возвращаясь к случаю заряженной частицы в состояниях с  $j = 0$ , исследуем локальные решения Фробениуса [12] уравнения (5.8) около точки  $r = 0$ . В соответствии с рангом 3 особой точки ищем решения в виде [12]

$$F(r) = r^A e^{\frac{B}{r}} e^{\frac{C}{r^2}} f(r); \quad (5.14)$$

получим следующее уравнение для функции  $f(r)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dr^2} + \left[ \frac{2A+2}{r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\sigma\alpha}{m} - \frac{\sigma\alpha\varepsilon}{m^2} - 2B \right) - \frac{\sigma\alpha^2/m^2 + 4C}{r^3} \right] \frac{df}{dr} + \\ & + \left[ 2m\varepsilon + 2\frac{m\alpha}{r} + \frac{A^2 + A - 2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \left( -2\frac{\sigma\alpha}{m} - \frac{\sigma\alpha\varepsilon A}{m^2} - 2AB + \frac{\sigma\alpha A}{m} + 2\frac{\sigma\alpha\varepsilon}{m^2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^4} \left( 2C - 4AC - \frac{\alpha^2\sigma A}{m^2} - \frac{\sigma\alpha B}{m} + B^2 + \frac{\sigma\alpha\varepsilon B}{m^2} + 3\frac{\sigma\alpha^2}{m^2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4BC + \alpha^2\sigma B/m^2 - 2\sigma\alpha C/m + 2\sigma\alpha\varepsilon C/m^2}{r^5} + \frac{4C^2 + 2\alpha^2\sigma C/m^2}{r^6} \right] f = 0. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Занулим коэффициент при  $\frac{1}{r^6}$ :

$$4C^2 + 2\alpha^2\sigma C/m^2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\alpha^2\sigma}{2m^2}, \quad (5.16)$$

а также коэффициент при  $\frac{1}{r^5}$ :

$$B = \frac{2\alpha\sigma C(m-\varepsilon)}{4Cm^2 + \alpha^2\sigma} = 0 \Rightarrow B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{\alpha\sigma(m-\varepsilon)}{m^2}. \quad (5.17)$$

Занулив коэффициент при  $\frac{1}{r^4}$ , получим

$$A = \frac{B^2 m^2 - Bm\alpha\sigma + B\alpha\varepsilon\sigma + 2Cm^2 + 3\alpha^2\sigma}{4Cm^2 + \alpha^2\sigma} \Rightarrow A_1 = 3, \quad A_2 = -2. \quad (5.18)$$

Таким образом, имеем два типа решений. Найдем явный вид уравнений для соответствующих функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ .

Для случая

$$A_1 = 3, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0 \quad (5.19a)$$

имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dr^2} + \left( \frac{8}{r} + \frac{\sigma \alpha / m - \sigma \alpha \varepsilon / m^2}{r^2} - \frac{\sigma \alpha^2 / m^2}{r^3} \right) \frac{df}{dr} + \\ + \left( 2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} + \frac{10}{r^2} + \frac{\sigma \alpha / m - \sigma \alpha \varepsilon / m^2}{r^3} \right) f = 0. \end{aligned} \quad (5.19b)$$

Для случая

$$A_2 = -2, \quad B_2 = \frac{\alpha \sigma (m - \varepsilon)}{m^2}, \quad C_2 = -\frac{\alpha^2 \sigma}{2m^2} \quad (5.20a)$$

имеем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left( -\frac{2}{r} - \frac{\sigma \alpha (m - \varepsilon) / m^2}{r^2} + \frac{\sigma \alpha^2 / m^2}{r^3} \right) \frac{df}{dr} + \left( 2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} \right) f = 0. \quad (5.20b)$$

Эти два уравнения имеют похожую общую структуру. Будем следить за обоими уравнениями, пользуясь следующими краткими символическими обозначениями:

$$f'' + \left( \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} \right) f' + \left( b + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} \right) f = 0. \quad (5.21)$$

Строим решения в виде степенного ряда:  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ , в результате получим 5-членные рекуррентные соотношения

$$bc_{n-3} + b_1 c_{n-2} + [(n-1)(n-2) + a_1(n-1) + b_2] c_{n-1} + [a_2 n + b_3] c_n + [a_3(n+1)] c_{n+1} = 0.$$

Делим последнее соотношение на  $c_{n-3}$ :

$$\begin{aligned} b + b_1 \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + [(n-1)(n-2) + a_1(n-1) + b_2] \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + \\ + [a_2 n + b_3] \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + [a_3(n+1)] \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} = 0. \end{aligned}$$

Домножив на  $n^{-2}$  и устремив  $n \rightarrow \infty$ , находим алгебраическое уравнение для величины  $R$ , определяющей возможные радиусы сходимости  $R_{conv}$  степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n-1}}, \quad R^2 = 0, \quad R_{conv} = \frac{1}{|R|} = \infty.$$

Таким образом, возникают два линейно независимых решения:

$$F_1(r) = r^3 f(r), \quad F_2(r) = \frac{1}{r^2} \exp\left(+\frac{\alpha\sigma(m-\varepsilon)}{m^2 r}\right) \exp\left(-\frac{\sigma\alpha^2/2}{m^2 r^2}\right) f_2(r). \quad (5.22)$$

Отмечаем, что знак параметра поляризуемости  $\sigma$  существенно влияет на поведение экспоненциальных множителей в окрестности точки  $r = 0$ . Наиболее вероятным представляется возможность на основе функций  $F_2(r)$  строить решения, сопоставляемые связанным состояниям при  $\sigma > 0$ .

### 6. Структура решений Фробениуса уравнения 4-го порядка

Обратимся к системе уравнений (4.20), описывающей заряженную частицу. Исключая функцию  $H(r)$ , находим уравнение 4-го порядка для функции  $G(r)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 G}{dr^4} + \left[ \frac{4}{r} + \frac{\mu E}{r^2} + \frac{\mu \alpha}{r^3} \right] \frac{d^3 G}{dr^3} + \\ & + \left[ \frac{-2\mu E + 4m\alpha}{r} + \frac{-2\mu\alpha - 2j(j+1)}{r^2} - \frac{2\mu E}{r^3} - \frac{5\mu\alpha}{r^4} + 4mE - 2 \right] \frac{d^2 G}{dr^2} + \\ & + \left[ \frac{-4 + 8mE}{r} + \frac{2mE^2\mu - 2\mu E + 4m\alpha}{r^2} + \frac{2(2mE+1)\mu\alpha}{r^3} - \right. \\ & \left. - \frac{(Ej(j+1) - 2m\alpha^2 - 2E)\mu}{r^4} - \frac{(j^2 + j - 12)\mu\alpha}{r^5} \right] \frac{dG}{dr} + \\ & + \left[ \frac{2j^2\mu E + 2j\mu E - 4mE^2\mu + 4\mu E + 8m^2E\alpha - 4m\alpha}{r} + \right. \\ & + \frac{j(j+1)(-4mE + 2 + 2\mu\alpha) + 4m^2\alpha^2 + (-8mE + 4)\mu\alpha}{r^2} + \\ & + \frac{2j^2\mu E - 4m\alpha j^2 - 4jm\alpha + 2j\mu E - 4m\mu\alpha^2}{r^3} + \\ & + \frac{j^4 + 2j^3 - j^2 - 2j + 2j\mu\alpha(j+1) - 2\mu\alpha(mE+1)}{r^4} - \\ & \left. - \frac{2m\mu\alpha^2}{r^5} + \frac{(j^2 + j - 12)\mu\alpha}{r^6} - 4j(j+1) - 4mE + 4m^2E^2 \right] G = 0. \quad (6.1) \end{aligned}$$

В уравнении для функции  $G(r)$  выполним подстановку [12]

$$G = r^A e^{B/r} e^{L/r^2} f(r); \quad (6.2)$$

в результате получим следующее уравнение для  $G(r)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 f}{dr^4} + \left( \frac{E\mu - 4B}{r^2} + \frac{\mu\alpha - 8L}{r^3} + \frac{4A+4}{r} \right) \frac{d^3 f}{dr^3} + \\ & \left( -2 + 4mE + \frac{-2E\mu + 4m\alpha}{r} + \frac{6A^2 - 2j^2 - 2\mu\alpha + 6A - 2j}{r^2} + \frac{3\mu EA - 12AB - 2E\mu}{r^3} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3A\mu\alpha - 3BE\mu - 24AL + 6B^2 - 5\mu\alpha + 12L}{r^4} + \frac{-3\mu\alpha B - 6EL\mu + 24BL}{r^5} + \frac{-6L\mu\alpha + 24L^2}{r^6} \Big) \frac{d^2 f}{dr^2} + \\
& + \left( \frac{8AEm + 8mE - 4A - 4}{r} + \frac{2E^2m\mu - 4\mu EA + 8Am\alpha - 8BE\mu - 2E\mu + 4m\alpha + 4B}{r^2} + \right. \\
& + \frac{4Em\mu\alpha + 4A^3 - 4Aj^2 - 4A\mu\alpha + 4BE\mu - 8Bm\alpha - 16ELm - 4Aj + 2\mu\alpha - 4A + 8L}{r^3} + \\
& + \frac{1}{r^4} [3\mu EA^2 - Ej^2\mu + 2m\mu\alpha^2 - 12A^2B - 7\mu EA + 4j^2B + 4\mu\alpha B + 8EL\mu - Ej\mu - 16m\alpha L + \\
& \quad + 12AB + 4jB + 2E\mu] + \\
& + \frac{1}{r^5} [3\mu\alpha An^2 - 6ABE\mu - j^2\mu\alpha - 24A^2L + 12AB^2 - 13A\mu\alpha + 10BE\mu + 8Lj^2 + 8L\mu\alpha - j\mu\alpha + \\
& \quad + 48AL - 12B^2 + 8Lj + 12\mu\alpha - 24L] + \\
& \quad + \frac{-6AB\mu\alpha - 12AEL\mu + 3B^2E\mu + 48ABL - 4B^3 + 16\mu\alpha B + 26EL\mu - 72BL}{r^6} + \\
& \quad + \frac{-12AL\mu\alpha + 3B^2\mu\alpha + 12BEL\mu + 48AL^2 - 24B^2L + 38L\mu\alpha - 96L^2}{r^7} + \\
& \quad \left. + \frac{12BL\mu\alpha + 12EL^2\mu - 48BL^2}{r^8} + \frac{12L^2\mu\alpha - 32L^3}{r^9} \right) \frac{df}{dr} \\
& + \left( -4mE + 4m^2E^2 - 4j - 4j^2 + \frac{-4E^2m\mu + 2Ej^2\mu + 8Em^2\alpha + 2Ej\mu + 4E\mu - 4m\alpha}{r} + \right. \\
& + \frac{4A^2Em - 4Ej^2m - 8Em\mu\alpha + 2j^2\mu\alpha + 4m^2\alpha^2 + 4AEm - 4Ejm + 2j\mu\alpha - 2A^2 + 2j^2 + 4\mu\alpha - 2A + 2j}{r^2} + \\
& + \frac{2E^2m\mu A - 2\mu EA^2 + 4m\alpha A^2 - 8mEAB + 2Ej^2\mu - 4j^2m\alpha - 4m\mu\alpha^2 + 2Ej\mu - 4jm\alpha + 4AB}{r^3} + \\
& + \frac{1}{r^4} [4AEm\mu\alpha - 2E^2m\mu B + A^4 - 2A^2j^2 - 2\mu\alpha A^2 + 4ABE\mu - 8m\alpha AB - 16mEAL + 4B^2Em - \\
& - 2Em\mu\alpha + j^4 + 2j^2\mu\alpha - 2A^3 - 2A^2j + 2Aj^2 + 4A\mu\alpha - 2BE\mu + 4Bm\alpha + 8ELm + 2j^3 + 2j\mu\alpha - \\
& \quad - A^2 + 8AL + 2Aj - 2B^2 - j^2 - 2\mu\alpha + 2A - 4L - 2j] + \\
& + \frac{1}{r^5} [A^3E\mu - AEj^2\mu + 2Am\mu\alpha^2 - 4BE\mu\mu\alpha - 4E^2Lm\mu - 4A^3B - 5\mu EA^2 + 4ABj^2 + 4AB\mu\alpha + \\
& \quad + 8AEL\mu - AEj\mu - 16ALm\alpha - 2B^2E\mu + 4B^2m\alpha + 16BELm - 2m\mu\alpha^2 + 12A^2B + 4ABj + \\
& \quad + 6\mu EA - 4j^2B - 6\mu\alpha B - 8EL\mu + 16m\alpha L - 8AB - 8BL - 4jB] + \\
& + \frac{1}{r^6} [A^3\mu\alpha - 3A^2BE\mu - Aj^2\mu\alpha + BEj^2\mu - 2Bm\mu\alpha^2 - 8ELm\mu\alpha - 8A^3L + 6A^2B^2 - 8\mu\alpha A^2 + \\
& + 13ABE\mu + 8ALj^2 + 8AL\mu\alpha - Aj\mu\alpha - 2B^2j^2 - 2B^2\mu\alpha - 8BEL\mu + BEj\mu + 16BLm\alpha + 16EL^2m + \\
& + j^2\mu\alpha + 36A^2L - 18AB^2 + 8ALj + 19A\mu\alpha - 2B^2j - 12BE\mu - 12Lj^2 - 16L\mu\alpha + j\mu\alpha - 52AL + \\
& \quad + 12B^2 - 8L^2 - 12Lj - 12\mu\alpha + 24L] + \\
& + \frac{1}{r^7} [-3A^2B\mu\alpha - 6A^2EL\mu + 3AB^2E\mu + Bj^2\mu\alpha + 2ELj^2\mu - 4Lm\mu\alpha^2 + 24A^2BL - 4AB^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 19AB\mu\alpha + 32AEL\mu - 8B^2E\mu - 8BLj^2 - 8BL\mu\alpha + Bj\mu\alpha - 8EL^2\mu + 2ELj\mu + 16L^2m\alpha - 96ABL + \\
 &\quad + 8B^3 - 8BLj - 28\mu\alpha B - 40EL\mu + 96BL] + \\
 &+ \frac{1}{r^8}[-6A^2L\mu\alpha + 3AB^2\mu\alpha + 12ABEL\mu - B^3E\mu + 2Lj^2\mu\alpha + 24A^2L^2 - 24AB^2L + 44AL\mu\alpha + \\
 &\quad + B^4 - 11B^2\mu\alpha - 38BEL\mu - 8L^2j^2 - 8L^2\mu\alpha + \\
 &\quad + 2Lj\mu\alpha - 120AL^2 + 60B^2L - 8L^2j - 78L\mu\alpha + 156L^2] + \\
 &+ \frac{12ABL\mu\alpha + 12AEL^2\mu - B^3\mu\alpha - 6B^2EL\mu - 48ABL^2 + 8B^3L - 50BL\mu\alpha - 44EL^2\mu + 144BL^2}{r^9} + \\
 &\quad + \frac{12AL^2\mu\alpha - 6B^2L\mu\alpha - 12BEL^2\mu - 32AL^3 + 24B^2L^2 - 56L^2\mu\alpha + 112L^3}{r^{10}} + \\
 &\quad + \left. \frac{-12BL^2\mu\alpha - 8EL^3\mu + 32BL^3}{r^{11}} + \frac{-8L^3\mu\alpha + 16L^4}{r^{12}} \right) f = 0. \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

Коэффициент при  $r^{-12}$  приравняем к нулю, в результате находим 4 значения для  $L$  :

$$-8L^3\mu\alpha + 16L^4 = 0 \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2}\mu\alpha, \quad L_{2,3,4} = 0. \tag{6.4}$$

Пусть  $L_1 = \frac{1}{2}\mu\alpha$ , тогда, приравнявая к нулю коэффициент при  $r^{-11}$ , находим

$$-12BL^2\mu\alpha - 8EL^3\mu + 32BL^3 = 0 \Rightarrow B_1 = E\mu. \tag{6.5a}$$

Пусть

$$L_1 = \frac{1}{2}\mu\alpha, \quad B_1 = E\mu,$$

тогда, приравнявая к нулю коэффициент при  $r^{-10}$ , находим

$$-A\mu^3\alpha^3 = 0 \Rightarrow A_1 = 0. \tag{6.5b}$$

Для варианта  $L_1, B_1, A_1$  уравнение (6.3) примет вид (для краткости приводим только его общую структуру)

$$\begin{aligned}
 &f^{(4)} + \left( \frac{a_1}{r} + \dots + \frac{a_3}{r^3} \right) f''' + \left( b + \frac{b_1}{r} + \dots + \frac{b_6}{r^6} \right) f'' + \\
 &\quad + \left( \frac{c_1}{r} + \dots + \frac{c_8}{r^9} \right) f' + \left( d + \frac{d_1}{r} + \dots + \frac{d_8}{r^8} \right) f = 0. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Пусть

$$L_{2,3,4} = 0, \tag{6.7a}$$

тогда убеждаемся, что коэффициенты при  $r^{-11}$ ,  $r^{-10}$  также равны нулю. Приравняв к нулю коэффициент при  $r^{-9}$ , находим

$$-B^3\mu\alpha = 0 \Rightarrow B_{2,3,4} = 0. \tag{6.7b}$$

Коефіцієнты при  $r^{-8}$ ,  $r^{-7}$  такжэ абрацаюцца в ноль. Прыравняв коефіцієнт при степені  $r^{-6}$  к нулю

$$A^3 \mu \alpha - A j^2 \mu \alpha - 8 A^2 \mu \alpha - A j \mu \alpha + j^2 \mu \alpha + 19 A \mu \alpha + j \mu \alpha - 12 \mu \alpha = 0,$$

найдем три значения для  $A_{2,3,4}$ :

$$A_2 = 1, \quad A_3 = 3 - j, \quad A_4 = 4 + j. \quad (6.7c)$$

Для описания связанных состояний (их должно быть два типа) подходят случаи  $A_2 = 1$ ,  $A_4 = 4 + j$ , поскольку соответствующие решения стремятся к нулю при  $r \rightarrow 0$ . Все три последних уравнения для  $A = A_1, A_2, A_3$  имеют одну и ту же общую структуру

$$g'''' + \left( \frac{a_1}{r} + \dots + \frac{a_3}{r^3} \right) g''' + \left( b + \frac{b_1}{r} + \dots + \frac{b_4}{r^4} \right) g'' + \\ + \left( \frac{c_1}{r} + \dots + \frac{c_5}{r^5} \right) g' + \left( d + \frac{d_1}{r} + \dots + \frac{d_5}{r^5} \right) g = 0; \quad (6.7)$$

их решения строятся в виде степенных рядов 7-членными рекуррентными соотношениями.

Анализ задачи нельзя считать законченным. Построенные решения Фробениуса являются хотя и точными, но формальными. Пока неизвестны правила, позволяющие выделить из них те, которые могли бы описывать связанные состояния в этой системе. Также представляет интерес более детальный анализ случая нейтральной частицы с поляризуемостью.

*Авторы признательны В.М. Редькову за интерес к работе, полезные советы и помощь.*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88.
2. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
3. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.
4. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
5. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теории относительности. – Минск : Ин-т физики АН БССР, 1981. – С. 81–90.
6. Кисель, В. В. Электрическая поляризуемость частиц со спином 1 в теории релятивистских волновых уравнений / В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 3. – С. 73–78.



7. О теории скалярной частицы в пространствах с расширенным набором представлений группы Лоренца / А. А. Богуш [и др.] // Вест. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 65–71.

8. Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / V. V. Kisel [et al] // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, № 11. – P. 2347–2363.

9. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. наука, 2015. – 328 с.

10. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. наука, 2009. – 495 с.

11. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. наука, 2011. – 328 с.

12. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford University Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.04.2018

**Voynova Ya.A., Veko O.V., Ovsyuk E.M. A Vector Particle with Polarizability in the Coulomb Field, Nonrelativistic Approximation**

*The quantum mechanical equation for a particle of spin 1 and with an additional electromagnetic characteristic – polarizability is investigated in presence of the external Coulomb field. From the 15-dimensional relativistic Proca-like tensor system, a corresponding nonrelativistic equation is derived for a 3-dimensional wave function. First, the problem of separation of the variables in the presence of an external Coulomb field is solved for a 15-dimensional equation. In the system of 15 radial equations, by using diagonalization of the spatial inversion operator, two subsystems are derived: of 5 and 10 equations, respectively. The system of 5 equations reduces to an equation known in the theory of the ordinary scalar particle in an external Coulomb field. In this case, the polarizability does not manifest itself in the energy spectrum. In the system of 10 equations, the non-relativistic approximation is performed. A system of two 2-nd order equations for two functions is derived, from which it follows a radial 4-th order equation. The equation has two irregular singular points  $r=0$  and  $r=\infty$  of the rank 3. The case of the minimum value  $j=0$  of the conserved total angular momentum is considered separately. In the nonrelativistic approximation, the problem reduces to a single equation of 2-nd order with two irregular singular points  $r=0$  and  $r=\infty$  of the rank 2. Frobenius solutions of the 2-nd and 4-th order radial equations are constructed. The solutions that would describe the bound states in the system are indicated.*

УДК 621.382

**Н.Н. Ворсин<sup>1</sup>, А.А. Гладышук<sup>2</sup>, Н.П. Тарасюк<sup>3</sup>, С.В. Чугунов<sup>4</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, проф. каф. физики

Брестского государственного технического университета

<sup>3</sup>ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

<sup>4</sup>ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

e-mail: [vorsin@hotmail.com](mailto:vorsin@hotmail.com)**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВАХ ХЕМТ НА ОСНОВЕ GaN**

*Получены аналитические соотношения для вольтамперных характеристик гетеропереходных транзисторов на основе нитрида кремния. Формулы отражают зависимость ВАХ от толщины барьерного слоя AlGaIn и мольной доли алюминия в нем. Проведено сравнение формульных ВАХ с полученными на основе численного моделирования.*

В последние десятилетия активно разрабатываются гетероструктурные полевые транзисторы AlGaIn/GaN, позволяющие получить высокие значения выходной мощности, рабочей частоты и температурного диапазона функционирования. Для их анализа разработаны программные пакеты численного моделирования, такие как «Synopsys», «Silvaco», «FETIS» и др.

Использование данных средств в принципе позволяет решить любую задачу вычисления характеристик прибора, однако при этом теряется параметрическая общность решения. При наличии нескольких параметров необходим многократный пересчет для различного их сочетания [1], что затрудняет понимание физической сути результатов. В этой связи, на наш взгляд, не утратил актуальности классический подход к анализу процессов, основанный на допустимых упрощениях и аппроксимациях.

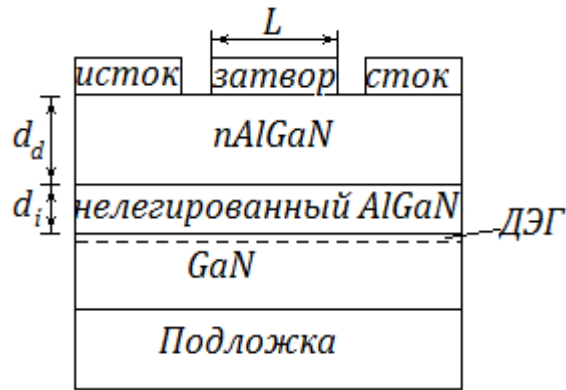
Ниже приводятся результаты такого анализа, проведенного в ходе исследований ХЕМТ на основе GaN. Численное моделирование с помощью программного комплекса FETIS подтверждают допустимость сделанных упрощений, относительные погрешности формульных расчетов не превышают нескольких процентов.

На рисунке 1 показана использованная модель транзистора с минимальным количеством выделенных слоев, которые представляют собой (сверху – вниз) металл, n-AlGaIn, нелегированный AlGaIn, нелегированный GaN с двумерным электронным газом (ДЭГ), который образуется в гетеропереходе AlGaIn-GaN.

Такая упрощенная модель не содержит барьера AlN между канальным GaN и барьерным AlGaIn-слоями, не учитывает влияние множества переходных слоев реальных ХЕМТ. Однако для качественного рассмотрения данными тонкостями пока пренебрегаем.

Плотность связанных состояний электронов в квантовой яме, содержащей ДЭГ, согласно [1], определяется выражением

$$n_{bound}(z) = \frac{m_e kT}{\pi \hbar^2} \sum_v |\psi_v(z)|^2 \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{F_n - E_v}{kT} \right) \right]. \quad (1)$$



**Рисунок 1. – Модель транзистора с минимальным количеством выделенных слоев**

В нем  $k$ ,  $h$ ,  $m_e$  – постоянная Больцмана, Планка, эффективная масса электрона,  $\psi_v(z)$  – волновая функция электронов в яме, определяемая при решении уравнения Шредингера,  $F_n$  – энергия Ферми. В нормальных условиях, при температуре около 300 К можно полагать, что только два нижних уровня находятся в зоне проводимости GaN, поэтому концентрация электронов ДЭГ выразится из (1) в следующем виде:

$$n_s = DkT \cdot \ln \left( \left( 1 + \exp \left( \frac{E_F - E_1}{kT} \right) \right) \cdot \left( 1 + \exp \left( \frac{E_F - E_2}{kT} \right) \right) \right), \quad (2)$$

где  $D$  – постоянный коэффициент,  $E_F$  – уровень Ферми GaN относительно дна зоны проводимости.

Влияние затвора на концентрацию электронов можно описать с использованием такого параметра, как пороговое напряжение:

$$n_s(m) = \frac{\varepsilon(m)}{q(d_d + d_i)} \left( U_g - U_{пор} - \frac{E_F}{q} \right). \quad (3)$$

Здесь  $q$  – заряд электрона,  $\varepsilon$  и  $d = d_d + d_i$  – диэлектрическая проницаемость и полная толщина слоя AlGaN соответственно;  $U_{пор}$  – пороговое напряжение НЕМТ, которое определяется формулой:

$$U_{пор} = \varphi_b - \Delta E_c - \frac{qN_s d_{nAlGaN}^2}{2\varepsilon_{nAlGaN}} - \sigma \frac{d_{AlGaN}}{\varepsilon_{AlGaN}}, \quad (4)$$

в которой  $\varphi_b$  – эффективная высота барьера Шоттки на переходе металл – nAlGaN,  $\Delta E_c$  – величина разрыва зоны проводимости на границе раздела между AlGaN и слоями GaN. Слагаемое  $\frac{qN_s d_{AlGaN}^2}{2\varepsilon_{AlGaN}}$  представляет собой концентрацию легирования в слое n –

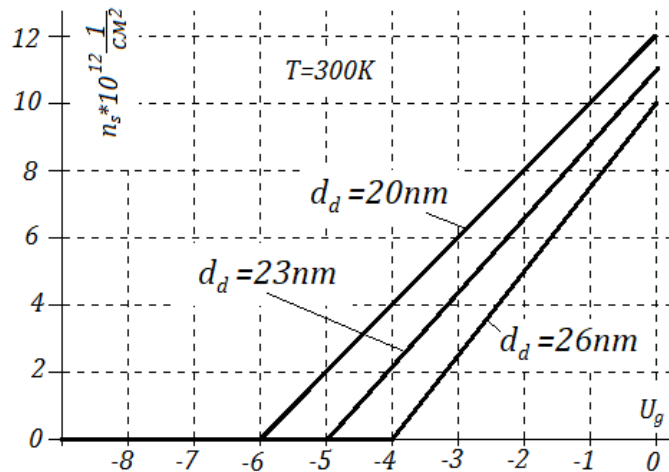
AlGaN, а  $\sigma$  – плотность зарядов поляризации на границе раздела слоев.

Уравнения (2) и (3) образуют систему уравнений, решение которой дает концентрацию ДЭГ, образующего канал транзистора:

$$n_s(m) = \frac{2e^2 m_e d}{2e^2 m_e d + \varepsilon_m \pi \hbar^2} \left[ (U_g - U_{\text{пор}}) \frac{\varepsilon_m}{ed} + \frac{m_e}{\pi \hbar^2} (E_1 + E_2) \right] - \frac{m_e}{\pi \hbar^2} (E_1 + E_2), \quad (5)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – энергии уровней.

Формулы (4), (5) позволяют оценить величину  $U_{\text{пор}}$  и концентрацию электронов в канале транзистора при  $U_g > U_{\text{пор}}$  при различных значениях толщины слоев AlGaN. Если  $U_g < U_{\text{пор}}$ , концентрация свободных электронов считается нулевой. На рисунке 2 показаны графики зависимости  $n_s$  от  $U_g$  для различных значений толщины легированного слоя AlGaN.



**Рисунок 2.** – Графики зависимости  $n_s$  от  $U_g$  для различных значений толщины легированного слоя AlGaN

Видно, что при уменьшении толщины  $d_d$  – легированного слоя AlGaN – концентрация носителей в ДЭГ возрастает. Пороговое напряжение транзистора смещается в сторону увеличения в абсолютном значении с уменьшением  $d_d$ . Увеличение электронной плотности связано с усилением эффекта пьезоэлектрической и спонтанной поляризации.

Наклон графиков  $n_s$ - $U_g$  выражает электроемкость между затвором и каналом, которая непосредственно связана с распределением потенциала между затвором и 2-DEG. Для  $d_d = 20$  нм наклон составляет  $2,1 \times 10^{12} \text{ см}^{-2} \text{ В}^{-1}$ , тогда как для  $d_d = 26$  нм наклон составляет  $1,4 \times 10^{12} \text{ см}^{-2} \text{ В}^{-1}$ . Это показывает, что высокие значения ширины барьера благоприятны для достижения большей электронной плотности и получения меньших значений емкости затвора.

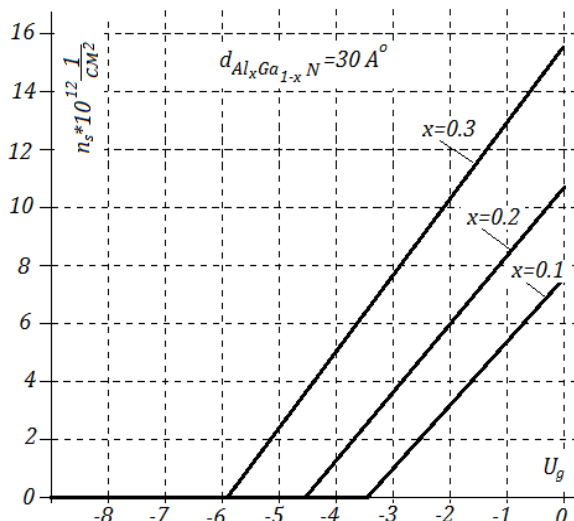
Другим варьируемым параметром гетероструктуры типа AlGaN/GaN является содержание в ней Al. Диапазон возможных вариаций не особенно широк. Обычно мольная доля Al изменяется от 0,15 до 0,35, и влияет на положение энергетических уровней  $E_1$ ,  $E_2$ , входящих в уравнения (2, 5).

На рисунке 3 показаны графики зависимости концентрации ДЭГ от напряжения на затворе при различных величинах доли Al.

Из графиков видно, что увеличение молей Al в AlGaN/GaN HEMT увеличивает плотность электронов, а также влияет на величину порогового напряжения, которое увеличивается по абсолютной величине. Однако наклон характеристик  $n_s$ - $U_g$  и, как следствие – затворная электроемкость, при этом почти не изменяются.

**Вольтамперные характеристики.**

При численном моделировании как правило имеется возможность выбора полевой зависимости подвижности электронов в канале. Для короткого GaN-канала, имеющего высокую скорость насыщения, такая возможность является излишней.



**Рисунок 3. – Графики зависимости концентрации ДЭГ от напряжения на затворе при различных величинах доли Al**

Полагая подвижность  $\mu$  константой, можно записать для плотности тока в сечении  $x$ -канала очевидную формулу

$$j = qn_s(x)\mu \frac{dU}{dx}, \tag{6}$$

в которой ось  $X$  направлена вдоль канала от истока к стоку. Плотность тока должна быть одинаковой во всех сечениях канала (не зависит от  $x$ ), а концентрация носителей управляется напряжением затвора согласно формуле (5), в которую вместо  $U_g$  необходимо подставить  $U_g - U(x)$ . На границах канала, примыкающих к истоку и стоку, координата  $x$  равна соответственно 0 и  $L$ , где  $L$  – длина канала согласно рисунку 1. При этом  $U(0) = 0$ ,  $U(L) = U_d$ .

Вычисление тока стока приходится делать отдельно для двух участков ВАХ. На первом участке концентрация носителей на протяжении всего канала не равна нулю, т.е.  $U_g - U_d > U_{пор}$ . При этом плотность тока увеличивается с ростом стокового напряжения и выражается следующей формулой:

$$j_d = \frac{\mu\beta e}{L} \left( U_g - U_{пор} - \frac{U_d}{2} \right) U_d. \tag{7}$$

Согласно этому выражению, плотность тока в канале достигает максимума при  $U_d = U_g - U_{пор}$ . Для дальнейшего увеличения стокового напряжения формула (7) будет неверна, поскольку ток канала достиг насыщения и далее не зависит от напряжения стока.

Величина стокового напряжения, при котором достигается насыщение стокового тока, можно оценить по исключительно простой формуле

$$U_{днас} = U_g - U_{пор}. \tag{8}$$

Не менее простая формула получается для плотности тока насыщения:

$$j_{нас} = \frac{\mu\beta e(U_g - U_{пор})}{2L}. \quad (9)$$

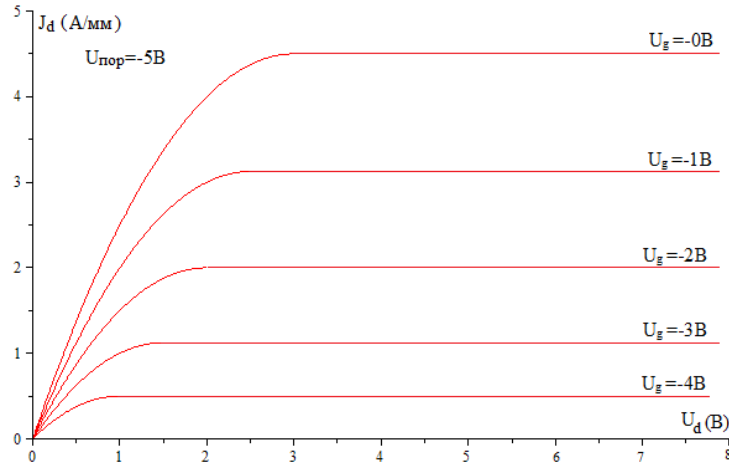


Рисунок 4. – ВАХ идеализированного транзистора

На рисунке 4 приведены ВАХ идеализированного транзистора, построенные по формулам (3–9) для следующих параметров: толщина барьерного слоя  $d_d = 23$  нм, мольная доля алюминия  $x = 0.2$ . Величина порогового напряжения при таких параметрах составляет  $-5$  В.

Для сравнения на рисунке 5 приведено семейство ВАХ транзистора с такими же исходными параметрами, рассчитанное с помощью программного комплекса численного моделирования GaN транзисторов «Фетис» [3]. Видно, что различие формы и размеров ВАХ, рассчитанных аналитическим и численным методами, невелико. Главным образом заметные различия наблюдаются только в области, близкой к запирающему транзистора, где упрощенная аналитическая модель не учитывает такие эффекты, как вклад в концентрацию несвязанных состояний, наличие свободной поверхности пленки и др. Тем не менее простота аналитической модели и возможность быстрой оценки параметров GaN транзисторов делают ее безынтересной.

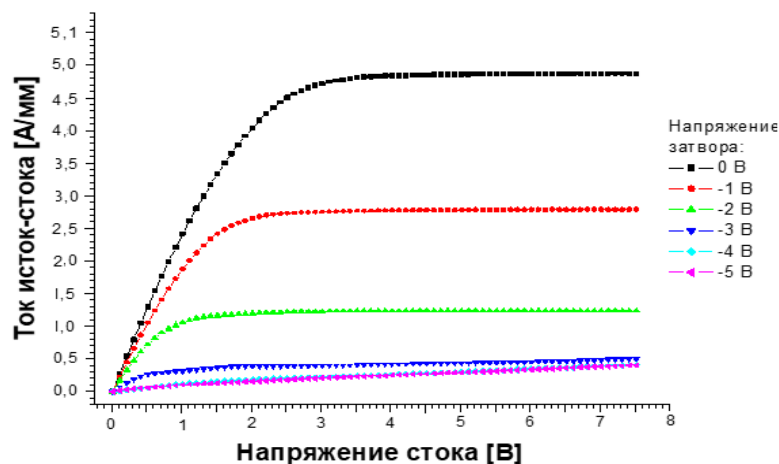


Рисунок 5. – Семейство ВАХ транзистора, рассчитанное с помощью программного комплекса численного моделирования GaN транзисторов «Фетис»

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оптимизация параметров НЕМТ-гетероструктур GaN/AlN/AlGaN для СВЧ транзисторов с помощью численного моделирования / В. Г. Тихомиров [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2016. – Т. 50, вып. 2. – С. 245–249.
2. Polarization effects, surface states, and the source of electrons in AlGaN/GaN heterostructure field effect transistors / J. P. Ibbetson [et al.] // Applied Physics Letters. – 10 July 2000. – Vol. 77, № 2. – P. 250–253.
3. STR Group – Modeling of crystal growth and devices [Электронный ресурс] // SimuLED software for LED and laser diode design and optimization, Field Effect Transistor Integrated Simulator (FETIS)-package for simulation of group-III nitride based high electron mobility transistors (HEMTs).

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.04.2018

***Vorsin N.N., Gladyschuk A.A., Tarasiuk N.P., Chugunov S.V. Analytical Relations for the IVC of HEMT Based on Gan***

*Analytic relationships are obtained for the current-voltage characteristics of heterojunction transistors based on silicon nitride. The formulas reflect the dependence of the I-V characteristic on the thickness of the barrier layer of Al-GaN and the molar fraction of aluminum in it. A comparison of the formula I-V characteristics with those obtained on the basis of numerical simulation is made.*

УДК 538.9

**А.В. Демидчик**

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
e-mail: [otf@brsu.brest.by](mailto:otf@brsu.brest.by)

## **ВЛИЯНИЕ СВЕРХБЫСТРОГО ОХЛАЖДЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ В ЖЕЛЕЗНИКЕЛЕВЫХ СПЛАВАХ ПЕРМАЛЛОЕВОГО СОСТАВА**

*С помощью растровой электронной микроскопии проведено исследование распределения железа и никеля в фольгах быстрозатвердевших сплавов пермаллового состава, полученных двухсторонним охлаждением. Установлено однородное распределение компонентов как по обеим поверхностям фольги, так и внутри её. Термическая обработка фольг при температурах 50 °С и 100 °С не оказывает заметного влияния на распределение компонент.*

### **Введение**

Тонкие железоникелевые сплавы широко распространены в электронике [1; 2]. Высокие температуры плавления (свыше 1 000 °С) способствуют «неуязвимости» сплавов по отношению к температурному воздействию в достаточно широком интервале. Потребности в материалах с заранее заданными физико-техническими свойствами увеличиваются. Устанавливаются пути повышения характеристик сплавов путём целенаправленного формирования их структуры. Исследования проводятся как над сплавами, полученными традиционными способами (малые скорости охлаждения жидкой фазы), так и путем сверхбыстрой закалки (скорость охлаждения жидкой фазы порядка  $10^6$  К/с). Высокоскоростное затвердевание расплава позволяет получать высокопрочные материалы с хорошей антикоррозионной стойкостью [3–6]. Одно из требований, предъявляемых к современным материалам, – однородность распределения компонентов в сплаве. Сверхбыстрое охлаждение по-разному влияет на указанное распределение [7].

Цель настоящей работы – исследовать распределение компонентов в железоникелевой фольге, ограничившись рассмотрением сплавов с повышенным содержанием никеля (70...80 ат. %), что было предпринято ранее в работах [7–8] для узкого интервала (65...68 ат. % Ni).

### **Методика получения и измерения**

Объекты исследования – фольги железоникелевых сплавов с содержанием никеля 70...80 ат. %, полученные двухсторонним охлаждением – двухвалковым методом. Достоинства данного метода – непрерывность технологического процесса и получение материала с зеркальными (гладкими) обеими поверхностями, что в будущем позволяет сделать предположение об одинаковости на них физико-механических параметров и характеристик. Толщина фольг 10...30 мкм.

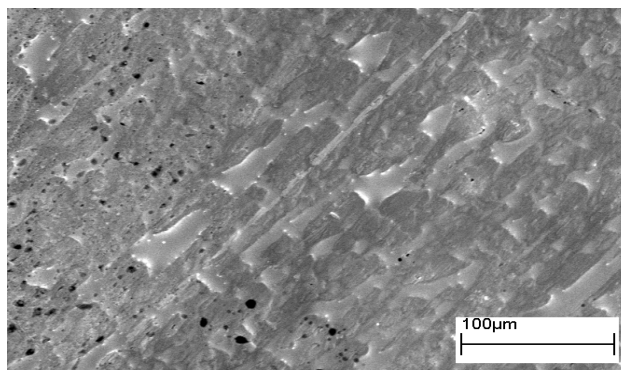
Исследование структуры фольг проводилось на растровом электронном микроскопе, микроанализ – при помощи рентгеновского микроанализатора. Исследование морфологии поверхности сплавов осуществлялось с обеих сторон фольги. Компонентный анализ по глубине осуществлялся на изломе фольги.

Термическая обработка проводилась при температурах 50 °С и 100 °С следующим образом: образцы помещались в печь, нагревались вместе с ней до необходимой температуры, отжигались 15 мин. при этой температуре. Затем печь выключалась, и образцы охлаждались вместе с ней до комнатной температуры. После этого проводилось исследование сплавов.

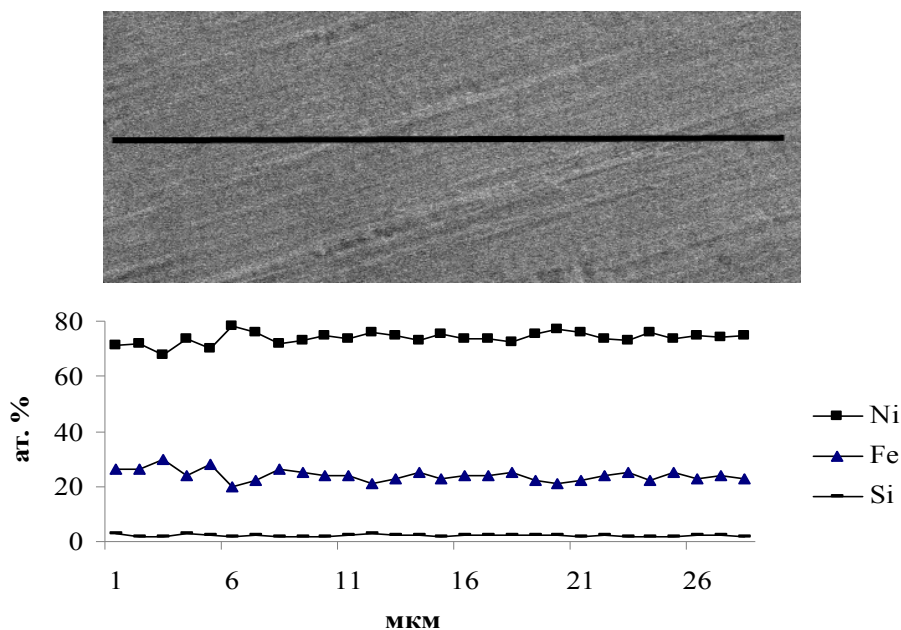


**Результаты. Морфология поверхности исходных образцов**

Быстрозатвердевшие фольги исследуемых сплавов имеют с обеих сторон гладкую поверхность. На ней могут присутствовать впадины (рисунок 1), образование которых объясняется наличием воздуха, попавшего между диском-кристаллизатором и расплавом, что, несомненно, приводит к нежелательному уменьшению скорости затвердевания жидкой фазы, а также локализованные черные скопления в виде грязи из-за недостаточно качественной полировки (обработки) вращающегося кристаллизатора, которые также могут оказать существенное влияние на обработку экспериментальных данных. Образцы с подобного рода дефектами исключались из рассмотрения, и исследования с ними не проводились.



**Рисунок 1. – Поверхность фольги сплава Fe<sub>28</sub>Ni<sub>70</sub>Si<sub>2</sub>**



**Рисунок 2. – Линия сканирования по поверхности фольги Fe<sub>24</sub>Ni<sub>74</sub>Si<sub>2</sub> и распределение компонентов вдоль этой линии**

**Результаты. Химический состав и распределение компонентов исходных образцов**

На рисунке 2 представлены результаты сканирования покомпонентного химического состава по линии на поверхности образца. Линия сканирования выбиралась произвольным образом: как по ходу течения расплава и последующего его охлаждения, так и поперек или под произвольным углом. Анализ показал, что все подвергнутые исследованию образцы имеют стабильный химический состав, что подтверждается равномерным распределением компонентов по длине сканирующей линии.

дованию составы имеют однородное распределение компонентов. При этом указанный вывод справедлив для обеих поверхностей фольги.

Помимо поверхностного распределения компонентов ставился вопрос о распределении компонентов по глубине фольги. Для этого производился излом образца и изучалось его поперечное сечение. Важно отметить, что если поперечное сечение фольги получено срезом, то результаты могут быть недостоверными, так как в процессе среза режущий предмет (например, лезвие) может загнуть верхние слои фольги и прикрыть ими внутренние, как показано на рисунке 3.

Результаты анализа распределения компонентов по глубине для сплава  $\text{Fe}_{26}\text{Ni}_{72}\text{Si}_2$  представлены в таблице 1 (вместе с рисунком 4), для сплавов  $\text{Fe}_{22}\text{Ni}_{77}\text{Si}_1$ ,  $\text{Fe}_{24}\text{Ni}_{74}\text{Si}_2$ ,  $\text{Fe}_{28}\text{Ni}_{71}\text{Si}_1$  – в таблице 2 (для пяти разных точек на изломе).

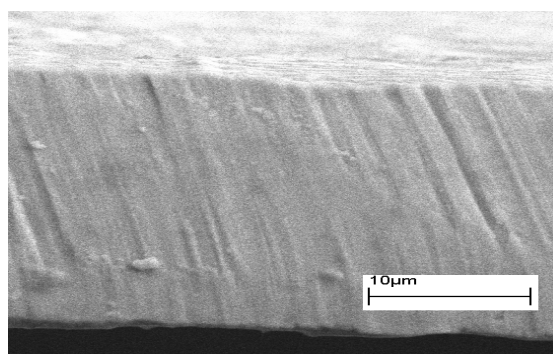
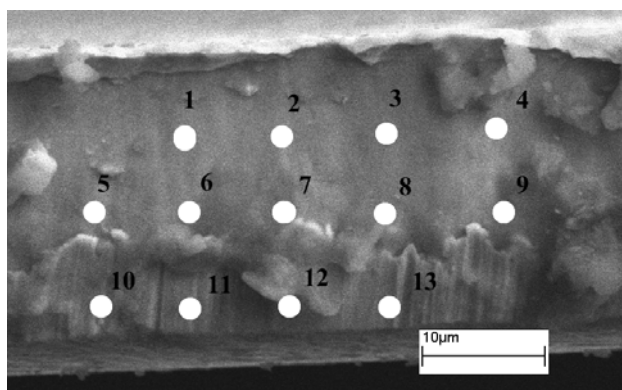


Рисунок 3. – Поперечное сечение (срез) фольги сплава  $\text{Fe}_{26}\text{Ni}_{72}\text{Si}_2$

Таблица 1. – Распределение компонентов по глубине фольги сплава  $\text{Fe}_{26}\text{Ni}_{72}\text{Si}_2$  (нумерация точек внутри фольги соответствует рисунку 4)

| Точка | Процентное содержание элемента, ат. % |      |
|-------|---------------------------------------|------|
|       | Fe                                    | Ni   |
| 1     | 27,4                                  | 72,4 |
| 2     | 23,9                                  | 74,2 |
| 3     | 27,3                                  | 71,9 |
| 4     | 26,2                                  | 71,8 |
| 5     | 27,3                                  | 71,1 |
| 6     | 29,1                                  | 70,4 |
| 7     | 27,7                                  | 70,3 |
| 8     | 26,3                                  | 71,9 |
| 9     | 29,4                                  | 70,5 |
| 10    | 25,8                                  | 72,9 |
| 11    | 24,2                                  | 73,8 |
| 12    | 22,8                                  | 75,3 |
| 13    | 27,2                                  | 71,8 |



**Рисунок 4. – Поперечное сечение (излом) фольги сплава Fe<sub>26</sub>Ni<sub>72</sub>Si<sub>2</sub> (на фотографии отмечены исследуемые точки)**

**Таблица 2. – Распределение компонентов по глубине исходных фольг**

| Сплав   | Процентное содержание Fe/Ni на изломе, ат. % |           |           |           |           |
|---|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Fe <sub>22</sub> Ni <sub>77</sub> Si <sub>1</sub> | 21,4/77,4                                    | 21,9/77,2 | 22,3/76,9 | 21,2/78,6 | 24,5/75,1 |
| Fe <sub>24</sub> Ni <sub>74</sub> Si <sub>2</sub> | 25,4/74,4                                    | 23,9/75,3 | 24,3/75,1 | 23,2/75,6 | 23,5/76,1 |
| Fe <sub>28</sub> Ni <sub>71</sub> Si <sub>1</sub> | 28,3/71,4                                    | 26,8/72,3 | 27,2/72,1 | 27,8/71,8 | 29,1/70,6 |

Наличие на поверхности фольги однородно распределённого кремния, возможно, объясняется тем, что диски-кристаллизаторы перед осуществлением процесса закалки расплава обрабатывались абразивным материалом, который и внес свой «вклад» в итоговое распределение компонентов.

На изломе фольги концентрация кремния была зафиксирована в пределах статистической погрешности (в таблице 1 не указывалась).

**Результаты. Химический состав и распределение компонентов образцов, подвергнутых термической обработке**

Исследуемые сплавы в виде тонких лент (фольг) находят применение, в частности в акустомагнитных датчиках или иных технических устройствах (индикаторах, детекторах и т.п.). Работа этих устройств может быть связана с перепадом температур. В данной работе температуры отжига были выбраны «бытовые», для создания которых не требуется специальных условий или высокотемпературных термошкафов.

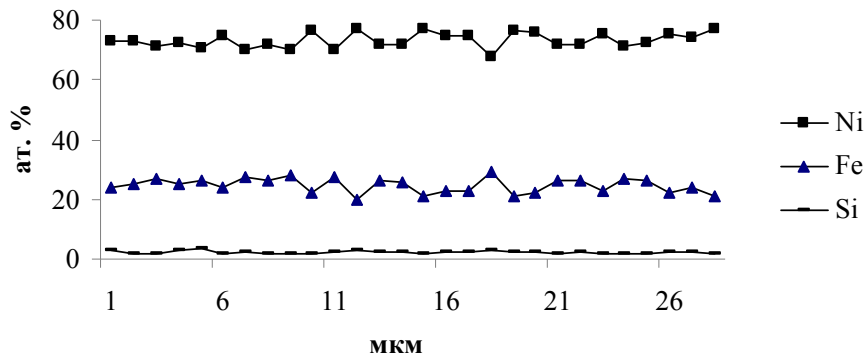
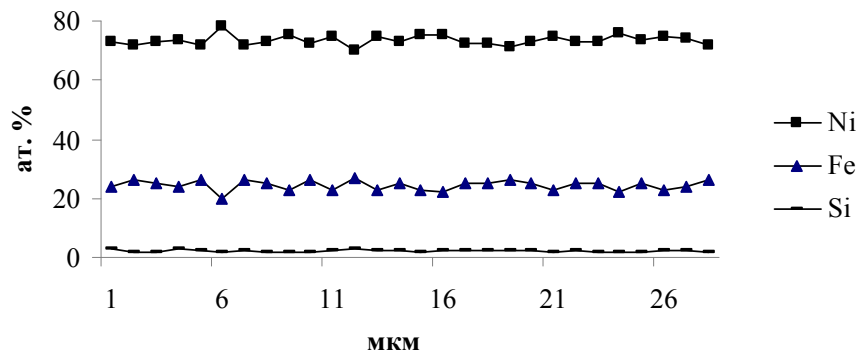
Результаты анализа распределения компонентов по глубине для сплавов Fe<sub>22</sub>Ni<sub>77</sub>Si<sub>1</sub>, Fe<sub>24</sub>Ni<sub>74</sub>Si<sub>2</sub>, Fe<sub>28</sub>Ni<sub>71</sub>Si<sub>1</sub> представлены в таблицах 3 и 4 (для пяти разных точек на изломе). Различие в концентрациях элементов между таблицами вызвано тем, что сканированию каждый раз подвергались разные точки излома фольги, так как зафиксировать одну точку на изломе и проводить исследования в ней не представляется возможным.

**Таблица 3. – Распределение компонентов по глубине фольг, подвергнутых термообработке при 50 °С**

| Сплав   | Процентное содержание Fe/Ni на изломе, ат. % |           |           |           |           |
|---|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Fe <sub>22</sub> Ni <sub>77</sub> Si <sub>1</sub> | 21,6/77,5                                    | 21,8/77,4 | 22,4/77,0 | 21,9/77,3 | 22,6/76,6 |
| Fe <sub>24</sub> Ni <sub>74</sub> Si <sub>2</sub> | 23,2/75,9                                    | 23,0/76,3 | 24,4/74,7 | 24,1/74,6 | 24,5/74,9 |
| Fe <sub>28</sub> Ni <sub>71</sub> Si <sub>1</sub> | 28,2/70,6                                    | 27,6/71,2 | 28,8/69,7 | 27,2/71,5 | 28,5/70,3 |

Таблица 4. – Распределение компонентов по глубине фольг, подвергнутых термообработке при 100 °С

| Сплав   | Процентное содержание Fe/Ni на изломе, ат. % |           |           |           |           |
|---|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Fe <sub>22</sub> Ni <sub>77</sub> Si <sub>1</sub> | 21,3/77,9                                    | 21,7/77,4 | 22,4/76,3 | 22,8/76,4 | 22,6/76,1 |
| Fe <sub>24</sub> Ni <sub>74</sub> Si <sub>2</sub> | 23,9/74,9                                    | 24,9/74,3 | 24,6/73,7 | 24,7/73,9 | 23,5/74,9 |
| Fe <sub>28</sub> Ni <sub>71</sub> Si <sub>1</sub> | 28,6/70,1                                    | 28,5/70,0 | 26,9/71,5 | 27,6/71,2 | 27,2/70,8 |

Рисунок 5. – Распределение компонентов по поверхности фольги Fe<sub>24</sub>Ni<sub>74</sub>Si<sub>2</sub>, подвергнутой термообработке при 50 °СРисунок 6. – Распределение компонентов по поверхности фольги Fe<sub>24</sub>Ni<sub>74</sub>Si<sub>2</sub>, подвергнутой термообработке при 100 °С

Как видно из рисунков 5 и 6, на которых представлены результаты сканирования химического состава вдоль линии поверхности фольги Fe<sub>24</sub>Ni<sub>74</sub>Si<sub>2</sub>, подвергнутой термообработке, однородное распределение компонентов сохраняется в исследуемом интервале температур.

### Выводы

Таким образом, полученные сверхбыстрым двухсторонним охлаждением фольги железоникелевых сплавов с содержанием никеля 70...80 ат. % имеют химически однородное по всему объему распределение компонентов.

Отжиг фольг указанного состава при температурах 50 °С и 100 °С сохраняет однородное распределение.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ульянов, Е. А. Высоколегированные сплавы на основе железа и никеля / Е. А. Ульянов, Т. В. Свистунова. – М. : Metallurgia, 1986. – 350 с.
2. Твердотельный синтез железоникелевых плёнок пермаллового и инварного составов / В. С. Жигалов [и др.] // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 2005. – № 4. – С. 54–62.
3. Мирошниченко, И. С. Закалка из жидкого состояния / И. С. Мирошниченко. – М. : Metallurgia, 1982. – 168 с.
4. Герман, Г. Сверхбыстрая закалка жидких сплавов / Г. Герман. – М. : Metallurgia, 1986. – 375 с.
5. Высокоскоростное затвердевание расплава / В. А. Васильев [и др.] ; под науч. ред. Б. С. Митина. – М. : Интернет Инжиниринг, 1998. – 400 с.
6. Глазов, В. М. Получение полупроводниковых материалов методом сверхбыстрого охлаждения расплава / В. М. Глазов // Изв. АН СССР. Неорганич. материалы. – 1984. – Т. 20, № 7. – С. 1238–1243.
7. Демидчик, А. В. Структура и микротвердость железоникелевых сплавов, полученных высокоскоростным затвердеванием / А. В. Демидчик // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1. – С. 46–50.
8. Демидчик, А. В. Термическая стабильность структуры и микротвердости тонких фольг железоникелевых сплавов / А. В. Демидчик // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1. – С. 42–49.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.05.2018

***Demidchik A.V. The Influence of Ultra-Fast Cooling on the Distribution of Components in Permalloy Iron-Nickel Alloys***

*With the help of scanning electron microscopy, a study was made of the distribution of iron and nickel in foils of fast-solid alloys of permalloy composition, obtained by double-sided cooling. A uniform distribution of components is established both on both foil surfaces and inside it. Thermal treatment of foils at temperatures of 50 °C and 100 °C does not have a significant effect on the distribution of components.*

УДК 539.122, 539.125, 539.128.2

**М.И. Левчук<sup>1</sup>, А.И. Львов<sup>2</sup>, М.Н. Невмержицкий<sup>3</sup>, Р.Г. Шуляковский<sup>4</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник Института физики НАН Беларуси<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, зав. отделом физики высоких энергий

Физического Института РАН (Россия)

<sup>3</sup>науч. сотрудник Института прикладной физики НАН Беларуси<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, директор Института прикладной физики НАН Беларуси

e-mail: levchuk@dragon.bas-net.by

**КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ НА ДЕЙТРОНЕ  
И ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ НЕЙТРОНА\***

Дано краткое описание явления поляризуемости нуклона. Обсуждены теоретические подходы к расчету поляризуемостей. Приведены результаты измерений поляризуемостей протона и нейтрона. Сделан детальный анализ данных по комптоновскому рассеянию на дейтроне в рамках потенциальной модели. Результаты фита дали значения  $13.7 \pm 1.8$  и  $1.9 \pm 1.6$  в единицах  $10^{-4}$  Фм<sup>3</sup> для электрической  $\alpha_n$  и магнитной  $\beta_n$  поляризуемостей нейтрона.

**Введение**

В последнее время значительный интерес проявляется к изучению комптоновского рассеяния на протоне и нейтроне в области низких и средних энергий. Это связано с тем, что в указанных процессах могут быть определены фундаментальные структурные постоянные нуклонов – их электрическая ( $\alpha$ ) и магнитная ( $\beta$ ) поляризуемости. Они содержат важную информацию о структуре нуклонов на средних и больших расстояниях, в частности о радиусе кваркового кора, о мезонной шубе, о вкладе в мезонную шубу коррелированных  $\pi\pi$ -пар или  $\sigma$ -мезона и т.д. Соответствующие вопросы подробно обсуждаются в обзорах [1; 2]. Знание амплитуд  $\gamma p$ - и  $\gamma n$ -рассеяния необходимо также для интерпретации данных по рассеянию фотонов на ядрах. Такого рода исследования могут, например, дать ответ на вопрос о том, насколько различаются электромагнитные свойства свободных и связанных нуклонов. Ниже мы обсудим современный статус поляризуемостей нуклона. Вследствие того, что нуклон имеет внутреннюю структуру, он может деформироваться во внешнем электромагнитном поле, приобретая в результате дополнительную энергию

$$V_{pol}(r) = -\frac{1}{2} 4\pi [\alpha \mathbf{E}^2(r) + \beta \mathbf{H}^2(r)], \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – напряженности электрического и магнитного полей соответственно. Отметим здесь, что появление фактора  $4\pi$  в (1) связано с тем, что мы в дальнейшем будем использовать систему единиц Хевисайда для зарядов и полей, в которой, например,  $e^2 = 4\pi / 137$ , но, по историческим причинам, используем систему Гаусса для поляризуемостей. Поляризационное взаимодействие (1) приводит к дополнительному вкладу в амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне

$$T_{pol} = 4\pi \left[ \omega^2 \alpha \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'^* + \beta (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e}'^* \times \mathbf{k}') \right], \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}$  ( $\mathbf{e}'$ ) и  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}'$ ) – векторы поляризации и импульса начального (конечного) фотонов,  $\omega$  – энергия фотона.

\*Работа поддержана грантами Ф17Д–001 и Ф18Д–010 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Существует различие в ситуациях, связанных с определением поляризуемостей протона и нейтрона. Можно показать, что разложение дифференциального сечения комптоновского рассеяния на протоне в лабораторной системе с учетом поляризуемостей имеет вид [2]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{po}} - \frac{e^2}{4\pi m} \omega^2 \left[ \frac{\alpha + \beta}{2} (1 + \cos \Theta)^2 + \frac{\alpha - \beta}{2} (1 - \cos \Theta)^2 \right] + O(\omega^4), \quad (3)$$

где  $e$  и  $m$  – заряд нуклона и его масса. Первый член в правой части – это т.н. сечение Поуэлла [3] для рассеяния фотона на точечной заряженной частице спина  $\frac{1}{2}$ , имеющей также аномальный магнитный момент. Второй член обусловлен интерференцией томсоновской амплитуды и членов с поляризуемостями (2). Анализ выражения (3) показывает, что в случае протона этот член становится измеримым при достаточно малых энергиях фотона (начиная примерно с 50 МэВ). Поляризуемости же нейтрона проявляют себя только в члене порядка  $\omega^4$  [4–6]. Следовательно, соответствующее сечение может быть измерено только при бóльших энергиях (мы не приводим здесь выражения для дифференциального сечения в этом порядке ввиду его громоздкости).

Из выражения (3) следует, что при передних углах сечение чувствительно к сумме  $\alpha$  и  $\beta$ , при задних углах – к разности поляризуемостей, а при угле  $90^\circ$  только к  $\alpha$ . Отметим, что эти выводы остаются в силе и в случае комптоновского рассеяния на нейтроне [4–6]. Сумма поляризуемостей может быть рассчитана с помощью известного правила сумм Балдина [7], связывающего  $\alpha_N + \beta_N$  с интегралом от полного сечения адронного фотопоглощения на нуклоне  $\sigma_N(\omega)$ :

$$\alpha_N + \beta_N = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sigma_N(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (4)$$

В выражении (4)  $\omega_0$  – это порог фотопоглощения на нуклоне ( $\omega_0 \approx 150$  МэВ). Вследствие фактора  $\omega^{-2}$  в подынтегральном выражении интеграл в правой части (4) быстро сходится и может быть вычислен весьма надежно [8]

$$\alpha_p + \beta_p = 14.0 \pm 0.5, \quad \alpha_n + \beta_n = 15.2 \pm 0.5 \quad (5)$$

в единицах  $10^{-4}$  Фм<sup>3</sup>, которые мы будем использовать в дальнейшем для поляризуемостей. Разница же поляризуемостей  $\alpha_N - \beta_N$  не может быть рассчитана с достаточной точностью и обычно считается свободным параметром.

### Теоретические подходы к вычислению поляризуемостей нуклонов

Следует сказать, что все модели, претендующие на описание низкоэнергетической физики адронов, обязательно проходят тест на их способность описать поляризуемости нуклонов. Мы упомянем здесь только некоторые из расчетов. Например, в дисперсионном подходе [9] получены следующие значения для поляризуемостей протона и нейтрона:

$$\alpha_p = 9.0 \pm 2.0, \quad \beta_p = 5.2 \pm 2.0, \quad (6)$$

$$\alpha_n = 11.1 \pm 2.0, \quad \beta_n = 4.7 \pm 2.0, \quad (7)$$

где приведенные ошибки характеризуют неопределенности, возникающие при учете двухпионных вкладов в дисперсионные интегралы.

В настоящее время одним из наиболее обещающих методов низкоэнергетической физики адронов является киральная теория возмущений (ChPT). Первый расчет

нуклонных поляризуемостей в ChPT с учетом однопетлевых вкладов [10] дал следующие результаты:

$$\alpha_p = 7.4, \quad \beta_p = -2.0, \quad (8)$$

$$\alpha_n = 10.1, \quad \beta_n = -1.2. \quad (9)$$

Электрические поляризуемости протона находятся в удовлетворительном согласии с данными, тогда как значение для магнитной поляризуемости протона находится в явном противоречии с экспериментальным значением (15). Возможная причина может быть обусловлена тем, что в работе [10] не учитывался вклад  $\Delta$ -изобары. В последующей публикации той же группы, где был учтен вклад от  $\Delta$ , получены результаты

$$\alpha_p = 10.5 \pm 2.0, \quad \beta_p = 3.5 \pm 3.6, \quad (10)$$

$$\alpha_n = 13.4 \pm 1.5, \quad \beta_n = 7.8 \pm 3.6, \quad (11)$$

которые в случае протона находятся в удовлетворительном согласии с предсказанием (5) правила сумм Балдина (4), но которые исключаются этим правилом для нейтрона.

Еще один расчет поляризуемостей нуклона в рамках ChPT [11] дал результат

$$\alpha_{p,n} = 20.8, \quad \beta_{p,n} = 14.7, \quad (12)$$

который не зависит от изоспина. Приведенные значения для поляризуемостей протона находятся в очень серьезном расхождении с правилом сумм Балдина (5). В последнее время было выполнено много расчетов с использованием киральной теории. Их очень детальное описание можно найти в обзоре [12]. Самый последний расчет в рамках эффективных полевых теорий [13] дал такие значения поляризуемостей нуклонов:

$$\alpha_p = 11.2 \pm 0.7, \quad \beta_p = 3.9 \pm 0.7, \quad (13)$$

$$\alpha_n = 13.7 \pm 3.1, \quad \beta_n = 4.6 \pm 2.7. \quad (14)$$

### Результаты измерений поляризуемостей протона

Эксперименты по рассеянию фотонов на протонах, выполненные при энергиях ниже порога фоторождения пионов с использованием как тормозных, так и моноэнергетических фотонов, дали следующий результат для поляризуемостей протона [14–18]:

$$\alpha_p = 12.1 \pm 0.8(\text{стат.}) \pm 0.5(\text{сист.}), \quad \beta_p = 2.1 \mp 0.8(\text{стат.}) \mp 0.5(\text{сист.}). \quad (15)$$

Таким образом, электрическая поляризуемость протона измерена с точностью 10 %, а магнитная – с точностью около 50 %. Отметим, что при извлечении поляризуемостей протона из данных по сечению комптоновского рассеяния как правило используется выражение (3), а сумма поляризуемостей протона фиксируется согласно (5). Именно поэтому ошибки в значениях для  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  в (6) антикоррелированы.

Есть, однако, указания на то, что и фит данных, в котором сумма поляризуемостей рассматривается в качестве подгоночного параметра (наряду с разницей поляризуемостей), приводит к близкому значению для  $\alpha_p + \beta_p$ :  $13.36 \pm 0.86_{-0.49}^{+0.20}$  [18]. Выполненный недавно наиболее полный анализ всех экспериментальных данных по дифференциальному сечению упругого  $\gamma p$ -рассеяния при энергиях  $\omega < 150$  МэВ [19] дал значения  $\alpha_p = 11.7 \pm 0.8(\text{эксп.}) \pm 0.7(\text{теор.})$  и  $\beta_p = 2.3 \pm 0.9(\text{эксп.}) \pm 0.7(\text{теор.})$ , которые находятся в хорошем согласии с (6).

### Результаты измерений поляризуемостей нейтрона

Что касается поляризуемостей нейтрона, то здесь ситуация гораздо хуже, несмотря на то, что эксперименты по определению  $\alpha_n$  начались раньше, чем для протона.



Основные трудности при измерении поляризуемостей нейтрона связаны с отсутствием плотной, стабильной нейтронной мишени и с малостью дифференциального сечения комптоновского рассеяния на нейтроне. Первые измерения  $\alpha_n$  проводились в экспериментах по рассеянию медленных нейтронов в кулоновском поле тяжелых ядер. После того, как Шмидмайер [20] опубликовал свое значение

$$\alpha_n = 12.0 \pm 1.5(\text{стат.}) \pm 2.0(\text{сист.}), \quad (16)$$

Николенко и Попов [21] выразили серьезные сомнения в малости приведенных ошибок. Значение (7) было получено из полного нейтрон-ядерного сечения на  $^{208}\text{Pb}$ . Принимая во внимание резонансные вклады, нейтрон-электронное и швингеровское рассеяние, Шмидмайер получил для полного сечения в интервале энергий от 50 эВ до 50 кэВ следующее выражение:

$$\sigma_s(k) = 11.508(5) + 0.69(9)k - 448(3)k^2 + 9500(400)k^4. \quad (17)$$

Здесь  $\sigma_s(k)$  в барнах, а  $k = 2.1968 \times 10^{-4} \sqrt{EA}/(A+1)$  ( $k$  в  $\text{Фм}^{-1}$  и  $E$  в эВ,  $A$  есть масса ядра) есть нейтронное волновое число. Член, линейный по  $k$ , как раз и соответствует рассеянию вследствие эффекта поляризуемости нейтрона. Николенко и Попов показали, что этот член имеет гораздо большие ошибки 0.69(56). Они пришли к выводу о том, что из эксперимента [20] может быть получено только верхнее ограничение на величину поляризуемости нейтрона:  $\alpha_n < 20$ .

В 1995 г. Коестер и др. [21] опубликовали значение, тоже полученное в нейтрон-ядерных экспериментах, которое оказалось близким к нулю:

$$\alpha_n = 0 \pm 5. \quad (18)$$

Снова началась дискуссия относительно надежности такого метода измерения поляризуемости. Александров заметил, что определение  $\alpha_n$  требует статистической точности в измерении полного сечения около  $\Delta\sigma/\sigma \approx 10^{-3}$ . При таком высоком уровне точности очень трудно учесть все возможные фоновые вклады. Он также сфокусировал внимание на проблемах, возникающих из-за рассеяния на малые углы, на надежном учете  $p$ -волнового рассеяния, а также на необходимости включения члена, пропорционального  $k^3$ , который отсутствует в (17).

В 1997 г. Еник и др. [22] продолжили дискуссию об экспериментах по нейтрон-ядерному рассеянию. Они исследовали физическую интерпретацию коэффициентов в разложении (8) и пришли к выводу, что возможны неопределенности в сечении, измеренном Шмидмайером, из-за того, что он не учел ряд фоновых вкладов. Было показано, что член, пропорциональный  $k^3$ , должен быть учтен. Вывод работы [22] состоит в том, что систематическая ошибка в величине  $\alpha_n$  в (7) занижена на фактор 3–4, и результатом работы [20] следует считать значение

$$\alpha_n \sim 7 - 19. \quad (19)$$

Таким образом, ситуация с измерением электрической поляризуемости нейтрона в указанных экспериментах весьма неудовлетворительная, и следует искать альтернативные методы для измерения  $\alpha_n$ . Что касается магнитной поляризуемости нейтрона  $\beta_n$ , то до 90-х гг. прошлого столетия не было никакой экспериментальной информации о ее величине, кроме той, которая может быть получена при совместном использовании «измеренной» электрической поляризуемости и предсказаний правила сумм Балдина (4) для нейтрона (5). Стандартный метод для получения информации об элементарных ам-

плитудах различных реакций на нейтроне состоит в использовании ядерных мишеней. Естественно, лучше всего использовать дейтрон в качестве источника нейтронов, поскольку дейтрон – простейшее ядро, хорошо изученное как теоретически, так и экспериментально. В работе [23] предложен и разработан метод изучения комптоновского рассеяния на нейтроне в реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' n p$  в области нейтронного квазиупругого пика, т.е. в области малых импульсов протона. Этот метод использован в эксперименте группы Геттинген – Майнца [24]. Было измерено дифференциальное сечение указанной реакции при угле рассеяния фотона  $136^\circ$  в области энергий фотона от 200 до 400 МэВ. Фиксируя сумму поляризуемостей нейтрона согласно (5), авторы получили значения

$$\alpha_n = 12.5 \pm 1.8(stat)_{-0.6}^{+1.1}(syst) \pm 1.1(model), \quad \beta_n = 2.7 \mp 1.8(stat)_{-1.1}^{+0.6}(syst) \mp 1.1(model). \quad (20)$$

### Комптоновское рассеяние на дейтроне

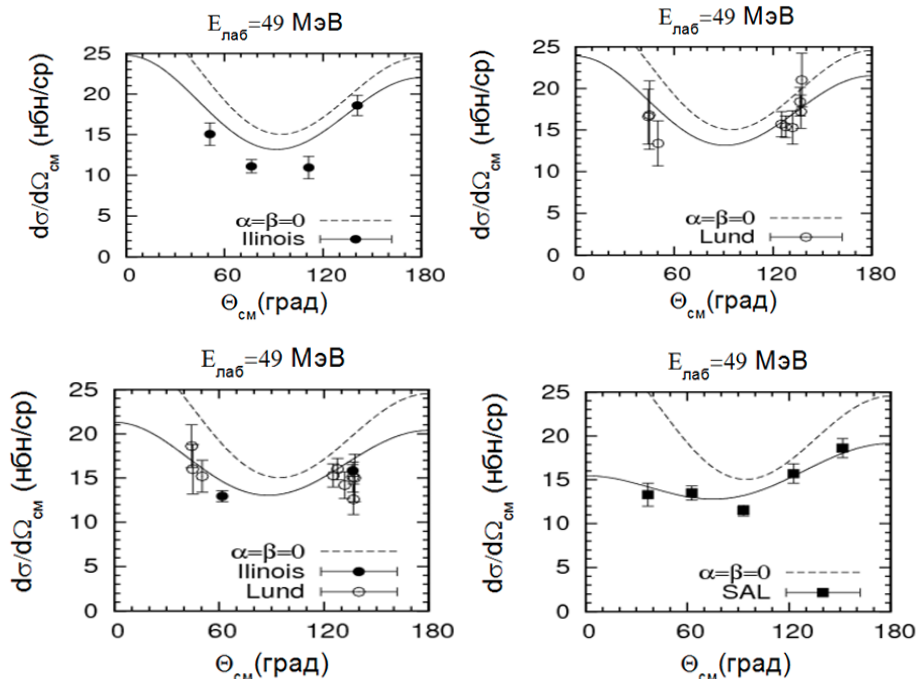
Еще одну возможность для измерения поляризуемостей нейтрона предоставляет изучение комптоновского (упругого) рассеяния на дейтроне  $\gamma d \rightarrow \gamma' d'$ .

Конечно, из данных по этой реакции можно извлечь не сами нейтронные поляризуемости, а только изоскалярные нуклонные поляризуемости

$$\alpha_s = \frac{\alpha_p + \alpha_n}{2}, \quad \beta_s = \frac{\beta_p + \beta_n}{2}. \quad (21)$$

Но этот факт не имеет принципиального значения, поскольку, как было сказано выше, поляризуемости протона определены достаточно надежно.

Было проведено четыре эксперимента по измерению дифференциального сечения реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' d'$  в области энергий 50–110 МэВ: в г. Иллинойсе (США) [25], в лабораториях SAL (г. Саскачеван, Канада) [26] и MAX-lab (г. Лунд, Швеция) [27; 28].



Показаны сечения без поляризуемостей (штрихованные кривые)  
и с учетом поляризуемостей (сплошные кривые).

Приведены данные экспериментов из Иллинойса [25], Саскачевана [26] и Лунда [27]

**Рисунок 1. – Угловая зависимость дифференциального сечения комптоновского рассеяния на дейтроне при энергии фотона в лабораторной системе 49 МэВ**

На рисунке 1 мы демонстрируем чувствительность дифференциального сечения к величине изоскалярных поляризуемостей нуклона, которые были взяты из дисперсионного расчета. Из рисунка 1 видно, что учет поляризуемостей сильно изменяет величину сечения. Поэтому можно ожидать, что измерение этого сечения с хорошей точностью позволит получить надежные значения поляризуемостей нейтрона.

Фитирование данных экспериментов [25–28] проводилось в рамках потенциальной модели [8]. Она подробно описана в указанной работе. Здесь мы приведем только основные детали модели. На рисунке 2(а) показан потенциал однобозонного обмена, в качестве которого использовалась версия ОБЕPR(A) боннского потенциала [29]. На рисунке 2(б) дано диаграммное представление мезонных обменных токов, и, наконец, на диаграммах рисунка 2(в) показаны т.н. сегальные вклады (seagull – чайка). Везде символ  $\alpha$  означает набор мезонов  $\pi, \omega, \rho, \eta$  и  $\sigma$ .

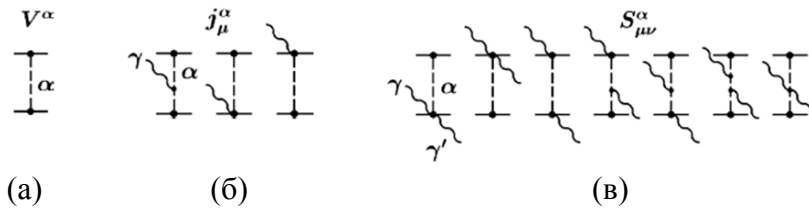


Рисунок 2. – Диаграммные представления потенциала (а), мезонных обменных токов (б) и сегалов (в)

На рисунке 3 показано диаграммное представление амплитуды реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' d'$ . Две верхние диаграммы соответствуют т.н. резонансным вкладам без и с нуклон-нуклонным взаимодействием в промежуточном состоянии.

Амплитуда NN-взаимодействия находилась путем решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера для ОБЕPR(A) потенциала. «Расшифровка» амплитуды реакции  $\gamma d \rightarrow NN$  приведена в квадратных скобках. Наконец, две нижние диаграммы отвечают одночастичной (а) и двухчастичной (б) сегальным амплитудам  $\gamma d$ -рассеяния.

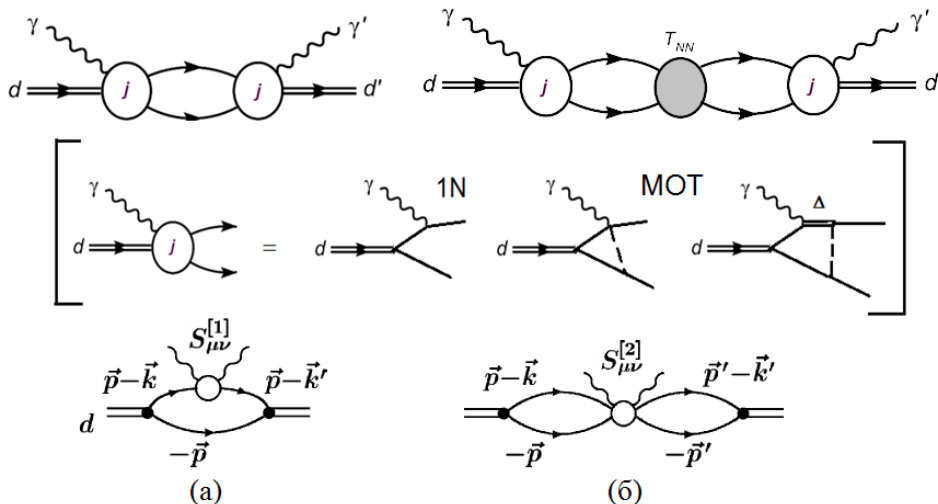


Рисунок 3. – Диаграммное представление амплитуды реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma' d'$

В рамках описанной модели проведено фитирование данных из работ [25–28]. При фитировании данных предполагалось, что сумма изоскалярных поляризуемостей фиксирована правилом сумм Балдина (5):  $\alpha_s + \beta_s = 14.5 \pm 0.5$ .

Отметим также, что при фитировании учитывались как статистические, так и систематические ошибки экспериментов. Это делалось с помощью метода, детально описанного в работе [19]. Результаты фита представлены в таблице.

Таблица. – Значения поляризуемостей, выделенные из данных различных экспериментов

| Данные        | $\alpha_c$     | $\beta_c$     | $\alpha_c - \beta_c$ |
|---------------|----------------|---------------|----------------------|
| Иллинойс [25] | $11.8 \pm 1.4$ | $2.9 \mp 1.4$ | $8.9 \pm 2.8$        |
| SAL [26]      | $11.7 \pm 1.2$ | $2.8 \mp 1.2$ | $8.9 \pm 2.4$        |
| MAX-lab [27]  | $13.1 \pm 1.9$ | $1.4 \mp 1.8$ | $11.7 \pm 3.7$       |
| MAX-lab [28]  | $13.2 \pm 0.9$ | $1.4 \mp 0.9$ | $11.8 \pm 1.8$       |
| Среднее       | $12.7 \pm 0.7$ | $2.1 \mp 0.6$ | $10.6 \pm 1.2$       |

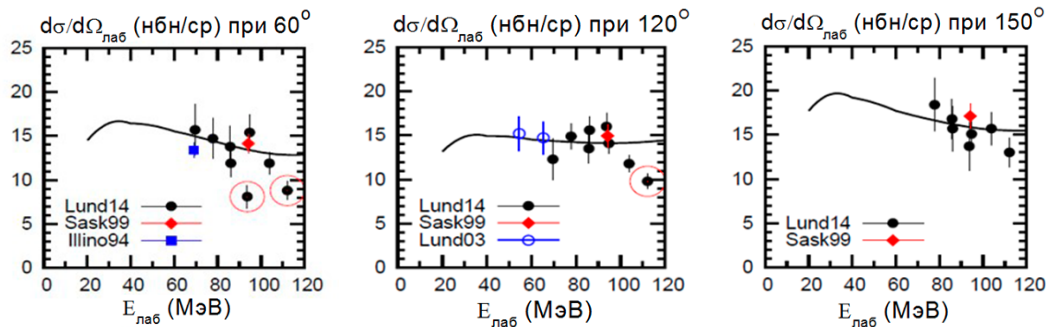
Таким образом, результат обработки данных работ [25–28] в рамках модели [8] дает

$$\alpha_s = 12.7 \pm 0.7, \quad \beta_s = 2.1 \pm 0.6. \quad (22)$$

При этом  $\chi^2/N_{dof} = 49/48$ . В этом фите из анализа были исключены три точки, отмеченные овалами на рисунке 4, так как они явно выпадают из поведения других точек. Если все-таки учитывать эти точки, то получаем такие значения поляризуемостей:

$$\alpha_s = 13.0 \pm 0.7, \quad \beta_s = 2.2 \pm 0.6. \quad (23)$$

Они близки к значениям (22), но с бóльшим  $\chi^2/N_{dof} = 88/51$ .



Показаны данные экспериментов [25], [26] и [27;28].

Кривые – результаты модели [8] со значениями скалярных поляризуемостей (22)

Рисунок 4. – Энергетическая зависимость дифференциального сечения комптоновского рассеяния на дейтроне

Если теперь учесть приведенные выше значения поляризуемостей протона  $\alpha_p = 11.7 \pm 0.8$ (эксп.)  $\pm 0.7$ (теор.) и  $\beta_p = 2.3 \pm 0.9$ (эксп.)  $\pm 0.7$ (теор.), найденные в работе [19], результат (22) дает следующие значения поляризуемостей нейтрона:

$$\alpha_n = 13.7 \pm 1.8, \quad \beta_n = 1.9 \pm 1.6. \quad (24)$$

Ошибки в результатах происходят от ошибок в протонных значениях и значениях (22), взятых в квадратуре. Следует отметить, что поляризуемости (24) находятся в хорошем согласии с результатами (20), полученными из реакции  $\gamma d \rightarrow \gamma'np$ .

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрунькин, В. А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В. А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12, вып. 3. – С. 692–753.
2. L'vov, A. I. Photon scattering as a tool for study of nucleon and nucleus structure / A. I. L'vov, V. A. Petrun'kin // Lect. Notes Phys. – 1990. – Vol. 365. – P. 123–144.
3. Powell, J. L. Note on the bremsstrahlung produced by protons / J. L. Powell // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 75, № 1. – P. 32–34.
4. Guaisu, I. Note on low-energy proton Compton scattering / I. Guaisu, E. E. Radescu // Phys. Rev. – 1978. – Vol. D18, № 3. – P. 651–659.
5. Левчук, М. И. К теории комптоновского рассеяния на нуклоне / М. И. Левчук, Л. Г. Мороз // Вес. АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – Т. 5. – С. 78–84.
6. Львов, А. И. Комптоновское рассеяние и поляризуемость нейтрона / А. И. Львов // Ядер. физика. – 1985. – Т. 42, вып. 4 (10). – С. 919–924.
7. Baldin, A. M. Polarizability of nucleons / A. M. Baldin // Nucl. Phys. – 1960. – Vol. 18, № 2. – P. 310–317.
8. Levchuk, M. I. Deuteron Compton scattering below pion photoproduction threshold / M. I. Levchuk, A. I. L'vov // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. 674, № 3, 4. – P. 449–492.
9. L'vov, A. I. A dispersion look at the chiral perturbation theory. Nucleon electromagnetic polarizabilities / A. I. L'vov // Phys. Lett. – 1993. – Vol. B304, № 1. – P. 29–34.
10. Bernard, V. Nucleon with chiral loops: Electromagnetic polarizabilities / V. Bernard, N. Kaiser, U.-G. Meissner // Nucl. Phys. – 1992. – Vol. B373, № 2. – P. 346–370.
11. Hemmert, T. R.  $\Delta(1232)$  and the polarizabilities of the nucleon / T. R. Hemmert, B. R. Holstein, J. Kambor // Phys. Rev. – 1997. – Vol. D55, № 9. – P. 5598–5612.
12. Using Effective Field Theory to analyse low-energy Compton scattering from proton and light nuclei / H. W. Griesshammer [et al.] // Progr. Part. Nucl. Phys. – 2012. – Vol. 67, № 9. – P. 841–897.
13. Lensky, V. Predictions of covariant chiral perturbation theory for nucleon polarizabilities and polarised Compton scattering / V. Lensky, J. McGovern, H. W. Griesshammer // Eur. Phys. J. – 2015. – Vol. C75, № 12. – P. 604–633.
14. Measurement of the electric and magnetic polarizabilities of the proton / B. E. MacGibbon [et al.] // Phys. Rev. – 1995. – Vol. C52, № 4. – P. 2097–2109.
15. Compton scattering from the proton // E. L. Hallin. [et al.] // Phys. Rev. – 1993. – Vol. C48, № 4. – P. 1497–1507.
16.  $180^\circ$  Compton scattering by the proton below the pion threshold / A. Zieger [et al.] // Phys. Lett. – 1992. – Vol. B278, № 1–2. – P. 34–38.
17. Federspiel, F. J. Proton Compton effect: A measurement of the electric and magnetic polarizabilities of the proton / F. J. Federspiel // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 67, № 12. – P. 1511–1514.
18. First extraction of a spin polarizability of the proton / J. Tonnison [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80, № 20. – P. 4382–4385.
19. Экспериментальный статус электрической и магнитной поляризуемостей протона / П. С. Баранов [и др.] // Физика элементар. частиц и атом. ядра. – 2001. – Т. 32, № 3. – С. 699–733.

20. Schmiedmayer, J. Measurement of the electric polarizability of neutron / J. Schmiedmayer, P. Riehs // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 66, № 9. – P. 1015–1018.
21. Koester, L. Experimental study on electric polarizability of the neutron / L. Koester, W. Waschkowski, J. Meier // Z. Phys. – 1988. – Vol. A329, № 2. – P. 229–234.
22. Specifications for deriving neutron electric polarizability from the total cross sections of  $^{208}\text{Pb}$  / T. L. Enik [et al.] // Ядер. фізика. – 1997. – Т. 60, вып. 4. – С. 648–651.
23. Levchuk, M. I. Photon scattering on quasi-free neutron in the reaction  $\gamma d \rightarrow \gamma' np$  and neutron polarizabilities / M. I. Levchuk, A. I. L'vov, V. A. Petrun'kin // Few-Body Systems. – 1994. – Vol. 16, № 2. – P. 101–125.
24. Neutron polarizabilities investigated by quasifree Compton scattering from the deuteron / K. Kossert [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88, № 16. – P. 162301.
25. Lucas, M. A. Compton scattering from the deuteron at intermediate energies / M. A. Lucas. – Illinois, 1994. – 173 p.
26. Elastic Compton scattering from the Deuteron and Nucleon Polarizabilities / D. I. Hornidge [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, № 11. – P. 2334–2337.
27. Compton scattering from the deuteron and extracted neutron polarizabilities / M. Lundin [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 90, № 19. – P. 192501–192505.
28. Measurement of Compton Scattering from the Deuteron and an Improved Extraction of the Neutron Electromagnetic Polarizabilities / L. S. Myers [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2014. – Vol. 113, № 26. – P. 262596.
29. Machleidt, R. The Bonn meson–exchange model for the nucleon-nucleon interaction // R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster // Phys. Rep. – 1987. – Vol. 149, № 1. – P. 1–89.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.10.2018

**Levchuk M.I., L'vov A.I., Nevmerzhitsky M.N., Shuliakouski R.G. Deuteron Compton Scattering and the Neutron Polarizabilities**

*A short description of the phenomena of the nucleon polarizability is given. Theoretical approaches to calculate the polarizabilities are discussed. Results of measurements of the polarizabilities of the proton and the neutron are given. A detailed analysis of data on deuteron Compton scattering is carried out within the framework of the potential model. The results of the fit have yielded values of  $13.7 \pm 1.8$  and  $1.9 \pm 1.6$  in units of  $10^{-4} \text{Fm}^3$  for the electric  $\alpha_n$  and magnetic  $\beta_n$  polarizabilities of the neutron.*

УДК 538.9

**В.А. Лиопо<sup>1</sup>, И.А. Лявшук<sup>2</sup> Е.В. Овчинников<sup>3</sup>, С.С. Секержицкий<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>2</sup>ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>3</sup>д-р техн. наук, доц., зам. декана по научной работе

факультета инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: [Sekerzhitsky@rambler.ru](mailto:Sekerzhitsky@rambler.ru)

### АНАЛИЗ ПОЛОЖЕНИЙ 00l – УЗЛОВ ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ СМЕНЕ ТРЕХ СЛОЕВ

*Исследовано влияние гидратации слюды на положение узлов обратной решетки при различной концентрации слоев трех возможных типов. Объектом исследования является некоторая функция вектора обратного пространства, определяющая положение узлов серии 00l в нем. Дано объяснение того экспериментального факта, что у гидратированных слюд  $d(00l) \times l \neq \text{const}$ , а также почему у некоторых гидратированных слюд обнаруживается наличие рефлексов, например, для  $d(00l) \times l \approx 10 \text{ \AA}$  и  $d(00l) \times 3 \approx 14 \text{ \AA}$ .*

#### Введение

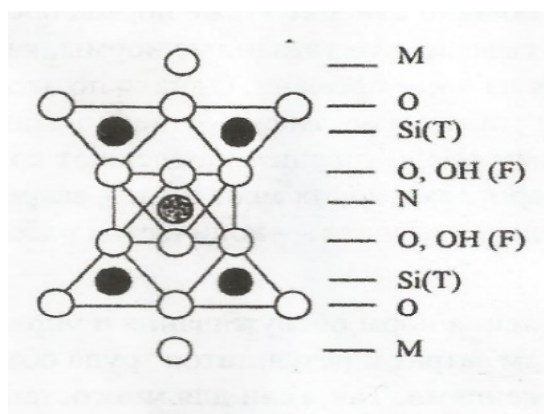
Природные слоистые силикаты, являющиеся основным компонентом глинистых минералов, являются не только сырьем для строительной индустрии, но и начинают использоваться при создании композиционных материалов для машиностроения [1]. Слоистые силикаты весьма склонны к изоморфизму. Наличие в них вандерваальсовых связей между основными структурными блоками объясняет изменение степени их гидратации. Количество воды в этих минералах влияет на их технологические характеристики и может быть определено экспериментально. Эффективным методом измерения степени гидратации до сих пор является разработанная профессором М.С. Мециком методика, основанная на изучении потери веса при прокаливании [2]. Типичным представителем слоистых силикатов является слюда, элементарный структурный блок которых представляет собой два кислородных слоя, формирующих октаэдрическую сетку, к которой примыкают две тетраэдрические. Блоки, связанные силами Ван-дер-Ваальса, образуют межслоевой промежуток, в который внедряются молекулы воды. Из эксперимента известно, что при изменении степени гидратации  $d(00l)$  меняется не монотонно.

В слюдах возможно существование блоков трех типов: негидратированные  $d(00l) \times l \approx 10 \text{ \AA}$ , с монослоем воды в межслоевом промежутке  $d(00l) \times l \approx 12 \text{ \AA}$  и с би-слоем молекул воды в этом промежутке  $d(00l) \times l \approx 14 \text{ \AA}$ . Эксперименты показали, что при высокой степени гидратации на рентгенограммах обнаруживаются рефлексy, например, фаз  $10 \text{ \AA}$  и  $14 \text{ \AA}$  [3]. Для объяснения указанных экспериментальных фактов необходимо выполнить дополнительный анализ, что и явилось целью данной работы. Кроме этого надо учитывать, что слюды используются для создания нанокomпозитных материалов в качестве одно-наноразмерных наполнителей (наночешуйки). Гидратиро-

ваные разновидности слюд при их технической обработке легко распадаются при механических воздействиях на такие нанокристаллы [4]. Следовательно, изучение связей между степенью гидратации и, например, рентгеновскими дифракционными параметрами может стать полезным и для решения практических задач.

### Объект исследования

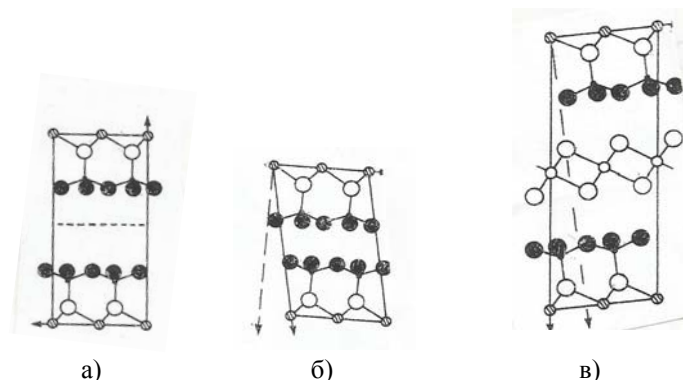
Слюды (слоистые силикаты) в структурно-химическом отношении представляют собой смешанно-слоистые системы. Эти системы состоят из слоев различного типа. В их основе лежит слюдяной блок, приведенный на рисунке 1.



*M* – межслоевой катион; *O* – кислород;  
*Si(T)* – кремний, тетраэдрический катион;  
*O, OH(F)* – кислород, часть которого замещена группой *OH* и небольшим количеством фтора;  
*N* – октаэдрический катион

**Рисунок 1.** – Схема последовательности атомных слоев в слюдах

Такие блоки формируют слой с сильными валентными межатомными связями. При наложении этих слоев друг на друга возникает слабое вандерваальсовое взаимодействие. Это, во-первых, объясняет возможность легкого расщепления кристаллов слюды на тонкие, гибкие пластины, а во-вторых, создает условия проникновения молекул воды, приводящее к появлению (кроме  $10 \text{ \AA}$ ) межслоевых расстояний  $12 \text{ \AA}$  и  $14 \text{ \AA}$ .



*а)* негидратированный  $10 \text{ \AA}$ ; *б)* с монослоем воды в межслоевом промежутке  $12 \text{ \AA}$ ;

*в)* с бислоем воды в межслоевом промежутке  $14 \text{ \AA}$

**Рисунок 2.** – Три типа слюдяных блоков [5]



В качестве модели рассмотрим следующее приближение. Структуры, приведенные на рисунке 2, включают одинаковые окта-тетрагональные сетки, рассеивающая способность которых одинакова и равна  $f(S)$ , где  $S$  – вектор обратного пространства.

Так как в структурах  $d \approx 12 \text{ \AA}$  и  $d \approx 14 \text{ \AA}$  в межслоевом промежутке находятся молекулы воды, которые являются одними из самых легких, т.е. имеющих очень маленькую рассеивающую способность, то можно принять условие  $f_1 = f_2 = f_3$ .

Амплитуда рассеянного рентгеновского излучения на  $j$ -той структуре ( $j = 1, 2, 3$ ) определяется условием:

$$A_j(S) = f_j P_j \exp\{2\pi i S d_j\}, \quad (1)$$

где  $P_j$  – концентрация  $j$ -фазы в смене слоев.

Результирующую амплитуду представим в виде суперпозиции волн, рассеянных на слоях 1, 2, 3 типа:

$$A(S) = f_j \sum_{j=1}^3 P_j \exp\{2\pi i S d_j\}. \quad (2)$$

Так как сетки на рисунке 2 описываются точечной группой  $2/m$ , то  $A(S)$  является действительным числом:

$$A(S) = f_j \sum_{j=1}^3 P_j \cos\{2\pi S d_j\}. \quad (3)$$

Очевидно, что  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ , и для всех трех фаз при  $\sum P_j = 1$  на основании формулы (3) получим, что  $A(S)$  имеет максимальное значение для узлов обратной решетки  $00l$ . Для слоев одного типа распределение этих узлов строго периодичное с периодом  $S_j = d_j^{-1}$ . Если имеется смесь этих слоев, то максимальное значение  $A(S)$  определяется условием:

$$A_{max}(S) = \frac{dA(S)}{dS} = 2\pi \sum_{j=1}^3 P_j d_j \sin\{2\pi S d_j\} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию:

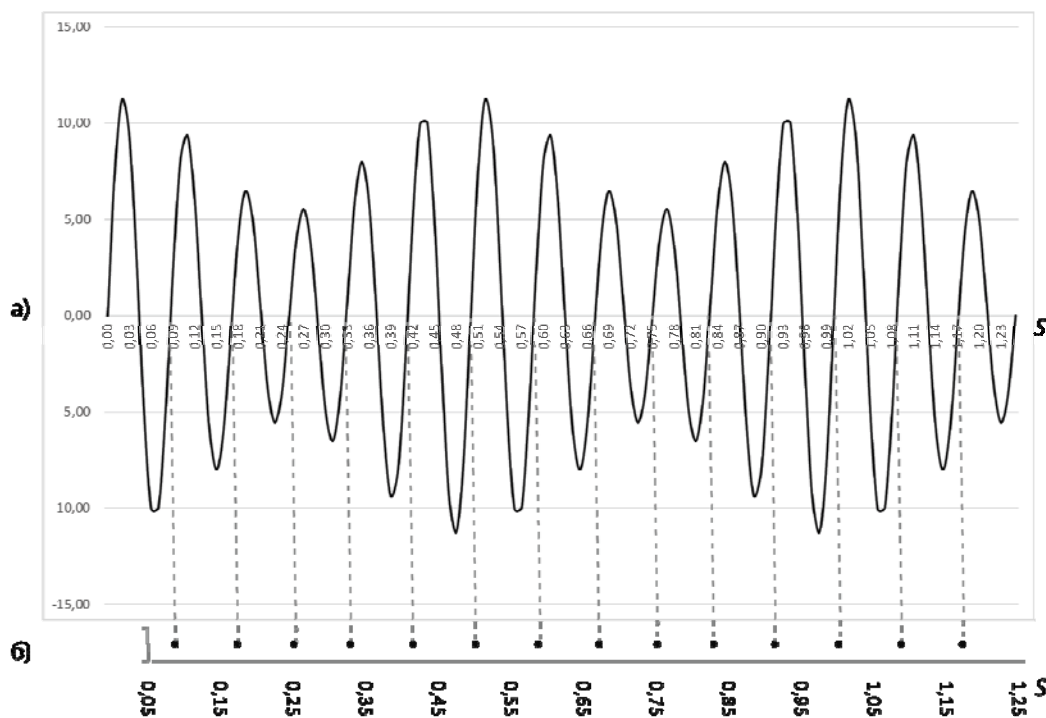
$$R(S) = 2\pi \sum_{j=1}^3 P_j d_j \sin\{2\pi S d_j\}, \quad (5)$$

нулевые значения которой соответствуют уравнению (3). Решение может быть получено графически. На рисунке 3 в качестве примера взята формула (5) при  $P_1 = 0,3$ ;  $P_2 = 0,7$ ;  $P_3 = 0$ .

Рисунок 3 характеризует суперпозицию трех синусоид. Так как цель анализа – значения  $S$ , при которых  $R(S) = 0$ , то в качестве объекта исследования взяты значения  $S$  при  $R(S) = 0$ . Эти значения приводятся в виде распределения точек на оси  $S$ .

Значения  $S$  изменяются в интервале от  $S = 0$  до  $S = 1,25$ . Максимальное значение  $S_{max}$  выбрано для рентгеновских дифрактограмм и полученных при использовании

$K_\alpha$  излучения от медного антикатада  $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ , т.е.  $S_{max} = \frac{1}{d_{min}} = \frac{2}{\lambda} \approx 1,3 \text{ \AA}^{-1}$ .



а) положение узлов обратной решетки; б)  $S$  направление  $(0,0,1)$  в обратной решетке

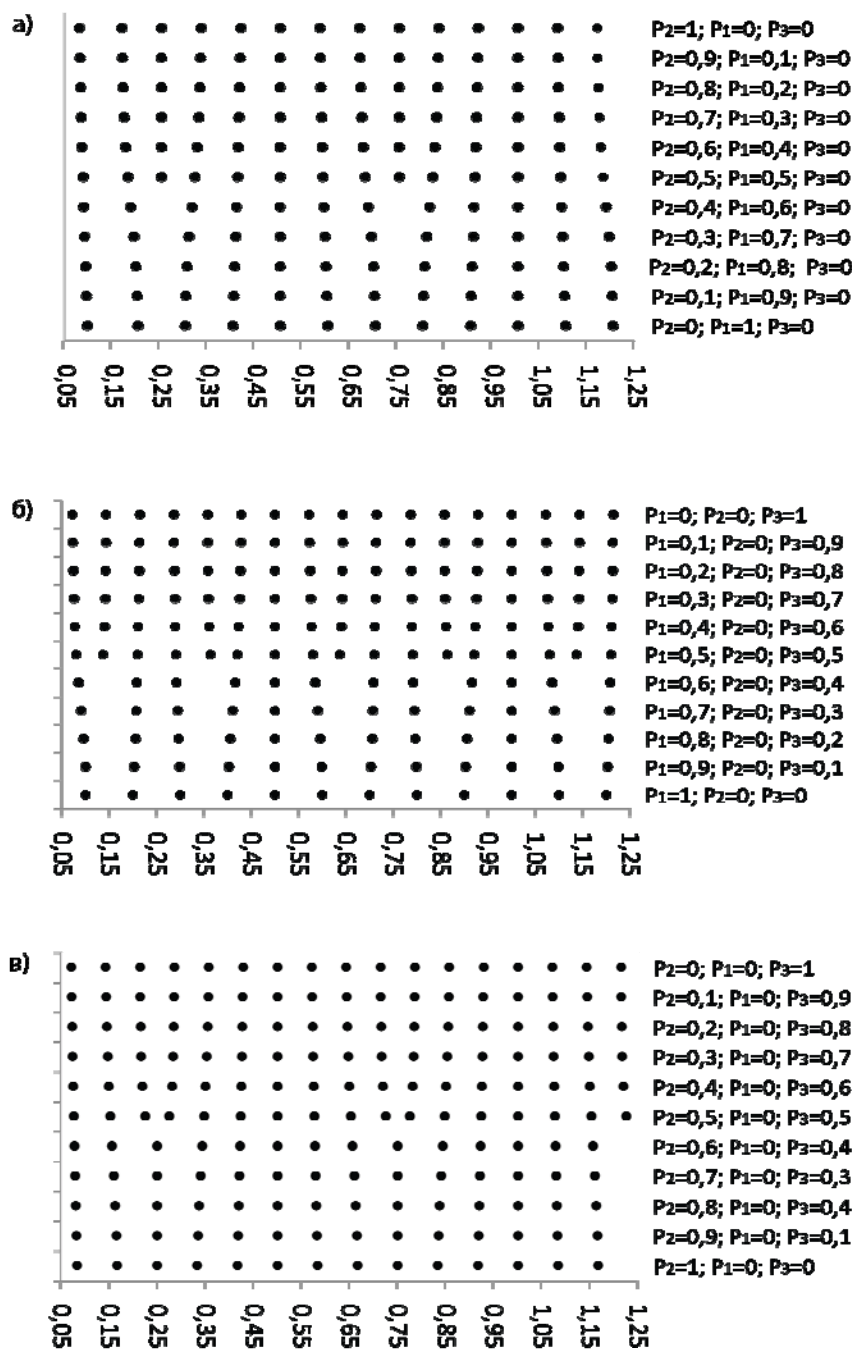
Рисунок 3. – Функция  $R(S)$  для  $P_1=0,2$ ;  $P_2=0,7$ ;  $P_3=0$

Таблица 1. – Изучение зависимости  $R(S)$  при различных вариациях  $P_1, P_2, P_3$ . Знаком  $(-)$  отмечены модели для которых сумма  $P_i > 1$ , что невозможно

| $P_2$ | $P_1$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | $P_3$       |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------------|
| 0,0   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | $1 - P_1$   |
| 0,1   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | -   | $0,9 - P_1$ |
| 0,2   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | -   | -   | $0,8 - P_1$ |
| 0,3   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | -   | -   | -   | $0,7 - P_1$ |
| 0,4   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | -   | -   | -   | -   | $0,6 - P_1$ |
| 0,5   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | -   | -   | -   | -   | -   | $0,5 - P_1$ |
| 0,6   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | -   | -   | -   | -   | -   | -   | $0,4 - P_1$ |
| 0,7   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | 0,3 | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | $0,3 - P_1$ |
| 0,8   | 0,0   | 0,1 | 0,2 | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | $0,2 - P_1$ |
| 0,9   | 0,0   | 0,1 | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | $0,1 - P_1$ |
| 1,0   | 0,0   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -   | 0,0         |

В таблице 1 приведены значения  $P_1, P_2, P_3$  при изменении концентраций  $\Delta P_j = 0,1$  в интервале от 0 до 1. Двухфазные смеси приводятся в таблице:  $P_3 = 0$  определяется диагональными элементами таблицы, верхняя строка описывает смеси при  $P_2 = 0$ , левый столбец –  $P_1 = 0$ .

Распределения узлов обратной решетки двухфазных смесей даны на рисунке 4.



а) смеси  $d_1 \approx 10$  и  $d_2 \approx 12$ ; б) смеси  $d_1 \approx 10$  и  $d_3 \approx 14$ ;

в) смеси  $d_2 \approx 12$  и  $d_3 \approx 14$  (в  $\text{\AA}$ )

**Рисунок 4. – Положение узлов обратной решетки серии 00/ для двухфазных смесей**

На рисунке 4 приведены диаграммы при вариации концентрации, когда один из компонентов равен 0. Из этих диаграмм видно, где для двухфазных систем при концентрации отдельных фаз от 0 до 0,4 распределение узлов 00/ колеблется вокруг иде-

ального периодического  $P_j = 1$  положения. В интервалах концентрацией  $0,4 \div 0,6$  узлы обратной решетки испытывают наибольшие вариации. Узел обратной решетки связан с энергетическим состоянием кристалла. Возрастание вариаций узлов  $00l$  в этом концентрационном интервале объясняет неустойчивость структур смешанно-послойного типа. При таких степенях гидратации, особенно для смеси  $d_1$  и  $d_3$ , вероятно возникновение отдельных фаз такого типа. На рентгенограмме будут зафиксированы рентгеновские рефлексы обеих фаз.

Существование самостоятельных фаз возможно и в других концентрационных интервалах. Однако концентрация фаз с малым значением  $P$  будет иметь значение ниже порога чувствительности рентгеновского дифракционного анализа.

Определенный интерес, на наш взгляд, вызывает переслойка трех типов с примерно одинаковыми концентрациями (рисунок 5).

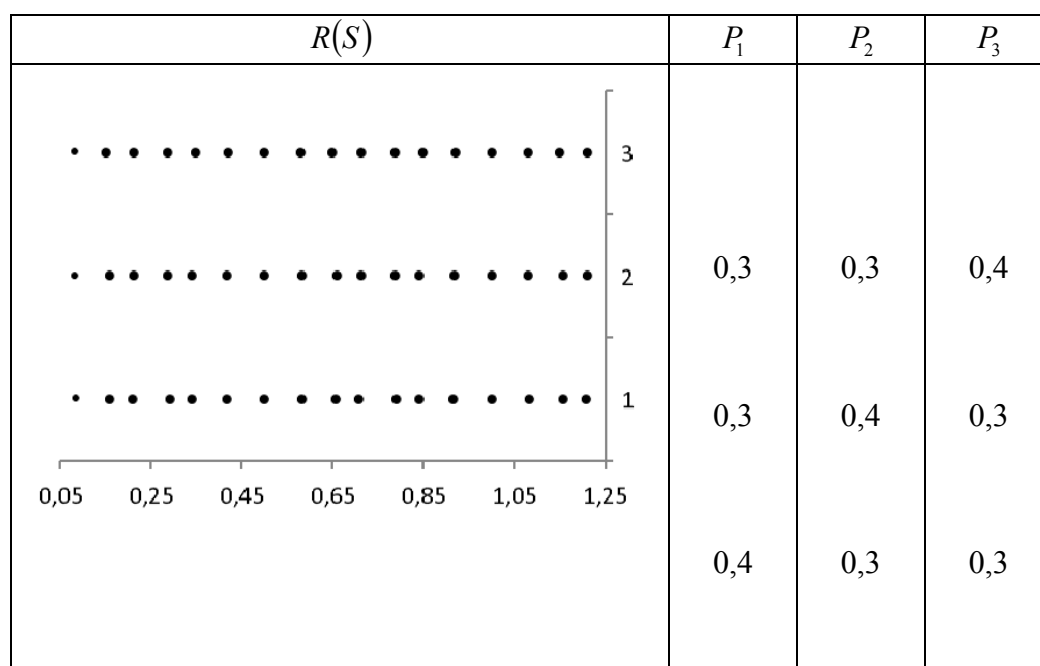


Рисунок 5. – Функции  $R(S)$  для переслойки при  $P_j \approx const$

Из рисунка видно, что при уменьшенных концентрациях слоев в смешанно-послойной системе в обратном пространстве нарушается регулярность расположения узлов решетки. В этом случае можно ожидать выделение одной из слоистых фаз. Это приведет к уменьшению ее концентрации в оставшихся частях образца, т.е. он перейдет в состояние переслойки двух слоев с малыми концентрациями слоев третьего типа. Выделение таких фаз в природных кристаллах будет зависеть от их генетических условий.

В таблице 2 приведены значения  $S$  при  $R(S)=0$  для смесей с концентрациями  $0,2; 0,2; 0,6$ .

Результаты, приведенные в таблице, подтверждают вывод о том, что при преобладании концентрации одного из типов слоев он становится доминирующим в распределении узлов обратной решетки. Значения  $S$  при  $R(S)=0$  оставшихся смесей, указанных в таблице 1, полностью соответствуют вышепредставленному утверждению. Предложенная методика в определенной степени носит формальный характер, так как не позволяет оценить «вес» узлов обратной решетки, т.е. интенсивности рентгеновских рефлексов. Но это не являлось целью нашей работы, так как необходимо было выяс-

нить, почему экспериментальные значения  $d(00l) \times l \neq const$  отличаются друг от друга на величины, значительно превосходящие погрешности экспериментов.

Таблица 2. – Значения  $S$  при  $R(S)=0$  трехслойных систем с преобладающей концентрацией одной из них

| $P_1, P_2, P_3$ | $S$    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,2; 0,2; 0,6   | 0,0760 | 0,1453 | 0,2135 | 0,2865 | 0,3547 | 0,4240 | 0,5000 | 0,5760 | 0,6453 | 0,7135 | 0,7865 | 0,8547 | 0,9240 | 1,0000 | 1,0760 | 1,1453 | 1,2135 |
| 0,2; 0,6; 0,2   | 0,0824 | 0,1648 | 0,2500 | 0,3352 | 0,4176 | 0,5000 | 0,5824 | 0,6648 | 0,7500 | 0,8352 | 0,9176 | 1,0000 | 1,0824 | 1,1648 |        |        |        |
| 0,6; 0,2; 0,2   | 0,0891 | 0,2038 | 0,2962 | 0,4109 | 0,5000 | 0,5891 | 0,7038 | 0,7962 | 0,9109 | 1,0000 | 1,0891 | 1,2038 |        |        |        |        |        |

Указанный формализм анализа обратного пространства, основанный на изучении распределения узлов без учета их структурных амплитуд можно встретить в работе [6].

**Заклучение**

Природные кристаллы слюды в своих межслоевых промежутках могут содержать водные моно- или бимолекулярные слои. Это наряду с наличием негидратированной фазы приводит к возникновению слоев с размерами трех типов:  $d(00l) \times 1 \approx 10 \text{ \AA}$ ,  $d(00l) \times 2 \approx 12 \text{ \AA}$ ,  $d(00l) \times 3 \approx 14 \text{ \AA}$ .

Эти слои (или блоки) имеют одинаковые слюдяные октаэдрические структуры, а отличаются только концентрациями молекул воды в межслоевых промежутках. Если учесть, что рассеивающая способность молекул  $H_2O$  много меньше, чем у слюдяного блока ( $f$ ), то можно принять, что  $f_{j=1,2,3} = const$ . Рассмотрев парциальный вклад каждого из типов слоев в общее рассеяние, мы получили функцию  $R(S)$ , которая при условии ее равенства нулю определяет положение узлов обратной решетки в смеси с различными значениями  $P_j$  с учетом  $\sum_{j=1}^3 P_j = 1$ .

Проанализировано 66 различных моделей с интервалом изменения концентраций  $\Delta P_j = 0,1$ . Установлено, что при преобладающей концентрации одной из фаз она оказывает доминирующее влияние на распределение узлов серии  $00l$  в обратной решетке. Влияние остальных типов проявляется в том, что  $d(00l) \times l$  флуктуируют вокруг положений узлов «чистой» фазы с преобладающей концентрацией. Наличие в структуре слоев с примерно равными концентрациями распределения узлов обратной решетки говорит о том, что такие структуры энергетически неустойчивые. В смесях такого типа будут возникать области с повышенной концентрацией одного из слоев смеси. На рентгенограмме проявятся рефлексы  $d(00l)$  для разных типов. Степень гидратации слюд учитывается при создании наномодификаторов чешуйчатого типа для композитных по-

лимеров. Повышенная гидратация вызывает термическое расщепление кристаллов, связанных с выходом молекул воды из межслоевых промежутков.

Работа представляет интерес для специалистов в области структурной физики, а также для создателей полимерных композиционных материалов с использованием силикатных наполнителей с одной наноразмерностью.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полимер-силикатные машиностроительные материалы: физико-химия, технология, применение / В. А. Струк [и др.]. – Минск : Тэхналогія, 2007. – 431 с.
2. Мецик, М. С. Термические свойства кристаллов слюды / М. С. Мецик. – Иркутск : ИГУ, 1989. – 184 с.
3. Базальные рефлексы природных гидратированных флоготипов / Г. А. Кринари [и др.] // Методы дифракционных исследований кристаллических материалов : сб. науч. тр. / под ред. В. А. Франк-Каменецкого, Б. М. Шмакина. – Новосибирск : Наука, 1989. – С. 139–141.
4. Овчинников, Е. В. Нанозлектретные фторсодержащие покрытия / Е. В. Овчинников // Композиционные материалы в промышленности : материалы 32 Междунар. конф., Ялта, 4–8 июня 2012 г. / под ред. З. Ю. Главацкой. – Киев, 2012. – С. 68–70.
5. Брегг, У. Л. Кристаллическая структура минералов / У. Л. Брегг, Г. Ф. Кларинбул. – М. : Мир, 1967. – 389 с.
6. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.09.2018

#### ***Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitski S.S. Analysis of Positions 00l-Nodes of the Lattice with a Random of Three Layers***

*The effect of mica hydration on the position of the reciprocal lattice sites at different concentration of layers of three possible types is investigated in this work. The object of investigation is a certain function of the vector of the inverse space, which determines the position of the nodes of the series in it. An explanation is given for the experimental fact that in hydrated micas, and also why some hydrated micas show the presence of reflexes, for example, for  $d(00l) \times 1 \approx 10 \text{ \AA}$  and  $d(00l) \times 3 \approx 14 \text{ \AA}$ .*

УДК 524.354.6-33

**В.С. Секержицкий**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
e-mail: [svs@brsu.brest.by](mailto:svs@brsu.brest.by)

**О СОСТАВЕ ТЯЖЕЛЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР  
РАВНОВЕСНОГО СВЕРХПЛОТНОГО ВЕЩЕСТВА**

*Проведена оценка ядерных параметров и удельной энергии связи тяжелых ядер равновесного сверхплотного вещества. Исследовано влияние сильных магнитных полей на эти параметры.*

Согласно существующим представлениям [1], при плотностях, превышающих порог полной ионизации атомных ядер, реакции нейтронизации и пикноядерные реакции могут привести к установлению в сверхплотном веществе абсолютно устойчивого состояния термодинамического равновесия. Отличительной особенностью такого состояния является однозначная зависимость массового числа ядра от плотности вещества [1]; при этом предполагается существование экзотических сверхтяжелых ядер с массовыми числами  $A > 600$ .

Классическая формула Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра хорошо согласующаяся с экспериментальными данными при  $A \sim (40 \div 80)$ , для описания сверхтяжелых ядер вряд ли применима. Попытка модифицировать формулу Бете – Вайцеккера для ядер, аномально богатых нейтронами, была предпринята в [2] путем введения поправки к энергии асимметрии ядра, но для сверхтяжелых ядер этого мало.

Известно, что ядерные взаимодействия между нуклонами в ядрах осуществляются, в основном, путем обмена  $\pi$ -мезонами. Мезон в процессе обмена некоторое малое время может находиться в «свободном состоянии» как самостоятельная частица. Не исключено, что эффективное число пионов в ядрах может быть заметной величиной [3]. Возможно также, что в ядрах имеются пионы необменного характера. Существование  $\pi^0$ -мезонов, а также равного числа  $\pi^+$ -мезонов и  $\pi^-$ -мезонов не должно сказываться на внешнем виде формулы Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра: учет их наличия сводится к перенормировке значений численных коэффициентов в этой формуле по сравнению с тем случаем, когда в ядре имеются только нуклоны. Это обстоятельство фактически учтено при подгонке формулы Бете – Вайцеккера к экспериментальным значениям масс ядер. Отличия возникают лишь при неравном числе положительных и отрицательных пионов.

Как отмечалось в [3], эти отличия невозможно устранить уточнением коэффициентов в формуле Бете – Вайцеккера, сохраняя при этом охват всей области от средних до самых тяжелых атомных ядер. Но систематическое отклонение формулы Бете – Вайцеккера от экспериментальных данных можно ликвидировать, допустив наличие небольшого числа отрицательных пионов в тяжелых ядрах. Стандартный вид формулы Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра должен быть изменен путем вычитания числа пионов из числа протонов в слагаемых, связанных с кулоновской энергией и энергией асимметрии ядра, а также введением дополнительных слагаемых, связанных с числом пионов. Предлагаемая модификация данной формулы практически устраняет имеющее место расхождение с экспериментальными данными для тяжелых ( $A > 200$ ) ядер.

Будем исходить из полуэмпирической формулы Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра, модифицированной в соответствии с [3; 4]. Массу ядра вычисляем следующим образом:

$$Mc^2 = N_n m_n c^2 + N_p m_p c^2 + W. \quad (1)$$

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{(N_p - N_\pi)^2}{A^{1/3}} + \frac{c_3}{A} (N_n - (N_p - N_\pi))^2 + \\ + c'_3 \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} (N_n - (N_p - N_\pi))^4 + c_\pi N_\pi, \quad (2)$$

где  $m_n c^2$  и  $m_p c^2$  – энергии покоя нейтрона и протона,  $W$  – энергия связи ядра,  $N_n, N_p, N_\pi$  – числа нейтронов, протонов и пионов в ядре;  $c_0 = 15,75$  МэВ,  $c_1 = 17,8$  МэВ,  $c_2 = 0,71$  МэВ,  $c_3 = 23,7$  МэВ,  $c'_3 \approx 17,7$  МэВ,  $c_\pi \approx 11,9$  МэВ [3]; коэффициент  $c_4$  различен в разных источниках:  $c_4 = 0$  [1],  $c_4 \approx 0,88$  МэВ [2],  $c_4 \approx 7,7$  МэВ [4].

Поскольку сверхплотное вещество в природных условиях может существовать в недрах сверхплотных астрофизических объектов типа пульсаров, обладающих сильными магнитными полями, то необходимо учесть влияние этих полей на энергию связи ядра.

В этом случае к (2) следует добавить слагаемые  $N_\pi \mu_\pi B$  и  $c_5 B^2 (N_p - N_\pi) A^{2/3}$ , где  $\mu_\pi = e\hbar / (2m_\pi c) = 2,1 \cdot 10^{-17}$  МэВ/Гс – магнетон, соответствующий пиону с массой  $m_\pi$ ,  $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38}$  МэВ/Гс<sup>2</sup> [5],  $B$  – индукция магнитного поля (в гауссах).

Исходной для расчета параметров сверхплотного вещества является формула для полной энергии среды:

$$E = E_A + E_e + E_n, \quad (3)$$

где  $E_A, E_n, E_e$  – энергии атомных ядер, свободных нейтронов и электронов. При этом мы пренебрегаем кинетической энергией ядер и считаем, что электроны образуют крайне вырожденный идеальный газ.

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме  $V$  равны соответственно:

$$E_n = w_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n = n_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (4)$$

где [6]

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (5)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left( (\zeta_n - \varepsilon_\pi + \sigma_n \mu_\pi B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_\pi - \sigma_n \mu_\pi B)^{3/2} \right), \quad (6)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_\pi + \sigma_n \mu_\pi B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_\pi - \sigma_n \mu_\pi B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_\pi + \sigma_n \mu_\pi B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_\pi - \sigma_n \mu_\pi B)^{3/2}}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_\pi = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} (n_n)^{1/3}}, \quad (8)$$

$N_A$  – число ядер,  $n_n$  и  $P_n$  – концентрация и давление свободных нейтронов,  $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$  – их химический потенциал,  $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38}$  см<sup>-3</sup> – концентрация нуклонов в ядре,  $\mu_\pi$  – ядерный магнетон,  $\sigma_n = 1,913$ .



Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [6]:

$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2 m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (9)$$

где  $n_e, P_e, \chi_e$  – концентрация, давление и химический потенциал электронов,  $m_e$  – масса электрона,  $\mu_B$  – магнетон Бора.

Среда полагается электронейтральной, полное число нуклонов сохраняется, поэтому

$$n = n_n + n_e \left( 1 - \frac{n_n}{n_0} \right) \frac{A}{N_p - N_\pi}. \quad (10)$$

Абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия соответствует минимум энергии среды  $E$  относительно независимых параметров  $A, N_p, N_\pi$  и  $N_A$  при фиксированных  $N = nV$  и  $B$ :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial N_p} = \frac{\partial E}{\partial N_\pi} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений для вычисления равновесных параметров сверхплотного замагниченного вещества.

В таблицах 1–3 представлены численные значения  $N_\pi, N_p, b$ .

Таблица 1. – Зависимость  $N_\pi, N_p, b$  от  $A$

| $c_4 = 0$                        |       |         |       |                                  |         |       |
|----------------------------------|-------|---------|-------|----------------------------------|---------|-------|
| $B = 0$                          |       |         |       | $B = 2 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |         |       |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$   | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$   |
| 120                              | 47    | 8       | -7,5  | 41                               | 2       | -7,4  |
| 140                              | 56    | 14      | -7,1  | 49                               | 7       | -6,8  |
| 160                              | 64    | 19      | -6,8  | 56                               | 11      | -6,4  |
| 180                              | 73    | 25      | -6,5  | 64                               | 16      | -6,01 |
| 200                              | 81    | 30      | -6,2  | 71                               | 21      | -5,6  |
| 220                              | 90    | 37      | -5,9  | 79                               | 26      | -5,3  |
| $B = 6 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |       |         |       | $B = 10^{18} \text{ Гс}$         |         |       |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$   | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$   |
| 120                              | 29    | 0       | -4,7  | 17                               | 0       | 0,6   |
| 140                              | 35    | 0       | -5,03 | 21                               | 0       | 0,001 |
| 160                              | 40    | 0       | -5,1  | 24                               | 0       | -0,1  |
| 180                              | 46    | 1       | -5,1  | 28                               | 0       | -0,5  |
| 200                              | 51    | 3       | -4,7  | 31                               | 0       | -0,5  |
| 220                              | 57    | 7       | -4,2  | 35                               | 0       | -0,7  |

Таблица 2. – Зависимость  $N_\pi$ ,  $N_p$ ,  $b$  от  $A$ 

| $c_4 = 0,88 \text{ МэВ}$         |       |         |       |                                  |         |       |
|----------------------------------|-------|---------|-------|----------------------------------|---------|-------|
| $B = 0$                          |       |         |       | $B = 2 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |         |       |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$   | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$   |
| 120                              | 47    | 8       | -7,5  | 41                               | 2       | -7,4  |
| 140                              | 56    | 14      | -7,1  | 49                               | 7       | -6,8  |
| 160                              | 64    | 19      | -6,7  | 56                               | 11      | -6,4  |
| 180                              | 73    | 25      | -6,4  | 64                               | 16      | -5,9  |
| 200                              | 81    | 30      | -6,2  | 72                               | 22      | -5,6  |
| 220                              | 90    | 37      | -5,9  | 79                               | 26      | -5,3  |
| $B = 6 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |       |         |       | $B = 10^{18} \text{ Гс}$         |         |       |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$   | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$   |
| 120                              | 30    | 0       | -4,9  | 18                               | 0       | 0,3   |
| 140                              | 35    | 0       | -5,1  | 22                               | 0       | -0,2  |
| 160                              | 41    | 0       | -5,3  | 26                               | 0       | -0,6  |
| 180                              | 46    | 1       | -5,01 | 30                               | 0       | -0,9  |
| 200                              | 52    | 4       | -4,6  | 33                               | 0       | -0,8  |
| 220                              | 58    | 8       | -4,1  | 37                               | 0       | -1,04 |

Таблица 3. – Зависимость  $N_\pi$ ,  $N_p$ ,  $b$  от  $A$ 

| $c_4 = 7,7 \text{ МэВ}$          |       |         |      |                                  |         |      |
|----------------------------------|-------|---------|------|----------------------------------|---------|------|
| $B = 0$                          |       |         |      | $B = 2 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |         |      |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$  | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$  |
| 120                              | 48    | 9       | -7,5 | 43                               | 4       | -7,3 |
| 140                              | 57    | 15      | -7,1 | 51                               | 9       | -6,7 |
| 160                              | 66    | 21      | -6,7 | 59                               | 14      | -6,2 |
| 180                              | 75    | 27      | -6,4 | 67                               | 19      | -5,8 |
| 200                              | 84    | 33      | -6,1 | 75                               | 25      | -5,4 |
| 220                              | 93    | 40      | -5,8 | 83                               | 30      | -5,1 |
| $B = 6 \cdot 10^{17} \text{ Гс}$ |       |         |      | $B = 10^{18} \text{ Гс}$         |         |      |
| $A$                              | $N_p$ | $N_\pi$ | $b$  | $N_p$                            | $N_\pi$ | $b$  |
| 120                              | 33    | 0       | -5,5 | 24                               | 0       | -1,6 |
| 140                              | 39    | 0       | -5,7 | 29                               | 0       | -2,1 |
| 160                              | 45    | 2       | -5,3 | 34                               | 0       | -2,4 |
| 180                              | 52    | 7       | -4,6 | 39                               | 0       | -2,7 |
| 200                              | 59    | 11      | -4,2 | 45                               | 2       | -2,6 |
| 220                              | 65    | 15      | -3,7 | 50                               | 5       | -1,9 |

Из таблиц видно, что под воздействием сильных магнитных полей наиболее устойчивыми становятся ядра-изобары с меньшими значениями числа протонов и числа пионов. Тенденция изменения абсолютной величины удельной энергии связи с ростом индукции магнитного поля дает основание полагать, что в сильных магнитных

полях с индукцией порядка  $10^{18}$  Гс невозможно существование описанных в [1–3] экзотически сверхтяжелых ядер со значениями массовых чисел  $A \sim 500 \div 700$ . Заметим, что в столь сильных магнитных полях удельная энергия связи средних ядер также заметно уменьшается, очевидно, в связи с деформацией ядра в магнитном поле [5].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
2. Вартанян, Ю. Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю. Л. Вартанян, Н. К. Овакимова // Астрон. журн. – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
3. Саакян, Г. С. Физика нейтронных звезд / Г. С. Саакян. – Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1995. – 347 с.
4. Саакян, Г. С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г. С. Саакян, Л. Ш. Григорян // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
5. Леинсон, Л. Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский // Ядер. физика. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
6. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.02.2018

#### ***Sekerzhitsky V.S. On the Composition of Heavy Atomic Nuclei of an Equilibrium Superdense Matter***

*The nuclear parameters and the specific binding energy of heavy nuclei of an equilibrium superdense matter are estimated. The influence of strong magnetic fields on these parameters is investigated.*

УДК 517.95

**А.И. Басик<sup>1</sup>, Е.В. Грицук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
e-mail: [hightmath@brsu.brest.by](mailto:hightmath@brsu.brest.by)

## ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В $\mathbb{R}^4$

*Проводится исследование задачи типа Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в неограниченной области специального вида четырехмерного пространства. Получены априорные оценки нормы оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Определено понятие слабого решения задачи типа Римана – Гильберта и указаны достаточные условия его существования.*

### Введение

В работе рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU = F(x), \quad (1)$$

где  $A_j$  – постоянные действительные квадратные матрицы четвертого порядка,  $B$  – непрерывная матрица-функция размера  $4 \times 4$ ,  $U = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$  – искомая дифференцируемая вектор-функция,  $F(x)$  – заданная четырехкомпонентная вектор-функция. Напомним, что матрица

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^4 A_j \xi_j \quad (2)$$

называется характеристической матрицей системы (1). Система (1) называется эллиптической, если при любом ненулевом векторе  $\xi \in \mathbb{R}^4$  матрица  $A(\xi)$  является невырожденной.

Одним из представителей систем вида (1) является система Фьютера. Ее характеристическая матрица имеет вид (при этом  $B = 0$  и  $F = 0$ )

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_1 - \xi_4 & \xi_3 \\ \xi_3 & \xi_4 & \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_4 - \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

эта система является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана.

А.Т. Усс выделил класс четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [1] (кратко класс ЧКР-систем). Система (1) при  $B = 0$  и  $F = 0$  называется четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, если каждая компонента произвольного непрерывного дифференцируемого решения этой системы удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ . В работе [1] доказан критерий, позволяющий по коэффициентам системы (1) определить ее принадлежность классу ЧКР-систем. Он состоит в следующем. Система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана тогда и только тогда, когда все матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) являются невырожденными и выполняются равенства

$$A_j A_k^{-1} + A_k A_j^{-1} = 2\delta_{jk} E_4 \quad (j, k = \overline{1, 4}). \quad (4)$$

Если все матрицы  $A_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) являются ортогональными (т.е.  $A_k^{-1} = A_k^T$ ), то систему (1) называют нормальной эллиптической системой (по терминологии В.Е. Балабаева [2]) либо системой ортогонального типа (по терминологии В.И. Шевченко [3]).

Остановимся на некоторых результатах, относящихся к краевым задачам для систем вида (1). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$  – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова  $\partial\Omega$ . Задача отыскания непрерывно дифференцируемого в области  $\Omega$  решения системы (1), непрерывного по Гельдеру в замыкании области  $\Omega$  и удовлетворяющего граничным условиям

$$(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3 + b_{14}u_4)|_{\partial\Omega} = f_1(y), (b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 + b_{24}u_4)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (5)$$

называется задачей Римана – Гильберта. Здесь  $b_{ij} : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, j = 1, \dots, 4$ ),  $f_1, f_2 : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$  – заданные непрерывные по Гельдеру на  $\partial\Omega$ , действительные функции.

М.З. Соломяк [4] показал, что для системы Фьютера (3) и для произвольного (даже псевдодифференциального) граничного оператора (5) краевая задача (1), (5) не является регуляризуемой. Напомним, что задача (1), (5) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского [5]. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеро-вость задачи в широком классе гильбертовых пространств.

В.С. Виноградов изучал задачу Римана – Гильберта для эллиптических систем (1) псевдосимметрического типа (т.е. систем, для которых  $B = 0$ ,  $A_1 = E_4$  – единичная матрица четвертого порядка,  $A_2, A_3, A_4$  – кососимметрические матрицы). В работе [6] В.С. Виноградовым было установлено, что однородная задача для рассматриваемого класса систем имеет бесконечно много линейно независимых решений. В этом случае нарушение условия Я.Б. Лопатинского краевой задачи (1), (5) вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

В совместной работе А.И. Басика и А.Т. Усса [7] была доказана нерегуляризуемость произвольной внутренней краевой задачи для систем псевдосимметрического типа в  $\mathbb{R}^4$ . А.Т. Уссом было показано отсутствие регуляризуемых краевых условий для класса четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [1]. Отметим, что класс четырехмерных аналогов систем Коши – Римана имеет непустое пересечение, но не совпадает с классом эллиптических систем псевдосимметрического типа.

Таким образом, для ограниченной односвязной области не существует регуляризуемых внутренних классических краевых задач для рассмотренных классов систем. Тем самым представляет научный интерес вопрос о нахождении «хороших» (корректных или, хотя бы, регуляризуемых) краевых условий для указанных систем уравнений. Аналогичный вопрос рассматривается в работах Б.Б. Ошорова [8; 9].

В настоящей работе указывается корректная постановка краевой задачи типа Римана – Гильберта в неограниченной области специального вида для нормальных эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка в  $\mathbb{R}^4$ .

### Постановка задачи типа Римана – Гильберта

Пусть  $h > 0$ , через  $\Omega$  обозначим множество

$$\Omega = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^4 \mid 0 < x_1 < h, x' = (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Пусть далее  $B(x)$  – заданная в области  $\Omega$  непрерывная матрица-функция размера  $4 \times 4$ ,  $A_1 = E_4$  – единичная матрица четвертого порядка,  $A_2, A_3, A_4$  – постоянные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие соотношениям

$$A_k A_j^T + A_j A_k^T = 2\delta_{jk} E_4 \quad (j, k = \overline{1, 4}), \quad (6)$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера,  $T$  означает транспонирование.

**Определение 1.** Оператор вида

$$\Lambda : U \rightarrow \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU$$

называется оператором ортогонального типа в  $\mathbb{R}^4$ , здесь  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  – дифференцируемая вектор-функция.

Через  $C_\Lambda(\Omega)$  обозначим класс бесконечно дифференцируемых вектор-функций  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ , удовлетворяющих условиям

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_2=h} = u_3|_{\partial\Omega} = u_4|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7)$$

и интегрируемых в квадрате по  $\Omega$  вместе со всеми производными до второго порядка включительно. Замыкание  $C_\Lambda(\Omega)$  по норме пространства  $W_2^1(\Omega)$  [10] обозначим через  $S_\Lambda(\Omega)$ . Напомним, что норма и скалярное произведение в пространствах  $L_2(\Omega), W_2^1(\Omega)$  задаются формулами:

$$\langle U; V \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^4 u_j v_j dx, \quad \|U\|_{L_2(\Omega)}^2 = \langle U; U \rangle_{L_2(\Omega)};$$

$$\langle U; V \rangle_{W_2^1(\Omega)} = \langle U; V \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^4 \langle U_{x_j}; V_{x_j} \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \langle U; U \rangle_{W_2^1(\Omega)}.$$

**Определение 2.** Пусть  $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$  – заданная вектор-функция. Задача типа Римана – Гильберта состоит в отыскании в слое  $\Omega$  решения системы уравнений

$$\Lambda U = F(x), \quad (8)$$

удовлетворяющего граничным условиям (7). Вектор-функция  $U \in S_\Lambda(\Omega)$ , удовлетворяющая (8) в пространстве  $W_2^1(\Omega)$ , называется сильным решением задачи типа Римана – Гильберта.

**Вспомогательные утверждения**

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм. Здесь и ниже для краткости обозначим  $\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j$ .

**Лемма 3.** Для каждой вектор-функции  $U \in S_\Lambda(\Omega)$  справедливо неравенство

$$\|U\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{h^2}{2} \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную функцию  $U \in C_{\Lambda(\Omega)}$ . При  $j \neq 2$  в силу неравенства Коши – Буняковского имеем

$$u_j(x) = \int_0^{x_1} \partial_1 u_j(x) dx_1 \leq \sqrt{x_1} \sqrt{\int_0^h (\partial_1 u_j)^2(x) dx_1}.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат и проинтегрируем по переменным  $x_2, x_3, x_4$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_j^2(x) dx_2 dx_3 dx_4 \leq x_1 \int_{\Omega} (\partial_1 u_j)^2(x) dx = x_1 \|\partial_1 u_j\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по  $x_1$  от 0 до  $h$ , получим

$$\|u_j\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u_j^2(x) dx \leq \frac{h^2}{2} \|\partial_1 u_j\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Рассмотрим теперь случай  $j = 2$ . Так как, очевидно,

$$u_2(x) = - \int_{x_1}^h \partial_1 u_2(x) dx_1,$$

то, пользуясь неравенством Коши – Буняковского, имеем:

$$|u_2(x)| \leq \sqrt{\int_{x_1}^h 1 dx_1} \sqrt{\int_{x_1}^h \partial_1 u_2^2(x) dx_1} = \sqrt{h-x_1} \sqrt{\int_{x_1}^h \partial_1 u_2^2(x) dx_1}.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат

$$u_2^2(x) \leq (h-x_1) \int_0^h (\partial_1 u_2(x))^2 dx_1,$$

и проинтегрируем по переменным  $x_2, x_3, x_4$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_2^2(x) dx_2 dx_3 dx_4 \leq (h - x_1) \|\partial_1 u_2\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по  $x_1$  от 0 до  $h$ , получим

$$\|u_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left( hx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \Big|_0^h \|\partial_1 u_2\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{h^2}{2} \|\partial_1 u_2\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Тогда

$$\|U\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^4 \|u_j\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^4 \|\partial_1 u_j\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{h^2}{2} \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Пусть теперь  $U \in S_\Lambda(\Omega)$ , тогда существует последовательность  $(U_n)_{n=1}^\infty$  функций класса  $C_\Lambda(\Omega)$ , таких что  $\|U_n - U\|_{W_1^1(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда при каждом  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$\|U_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{h^2}{2} \|\partial_1 U_n\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (9)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{L_2(\Omega)} = \|U\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_1 U_n\|_{L_2(\Omega)} = \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)},$$

то, переходя в неравенстве (9) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , приходим к требуемому неравенству.

**Лемма 4.** Для каждой вектор функции  $U \in S_\Lambda(\Omega)$  и для любых натуральных  $l, m = \overline{1, 4}$  таких, что  $l \neq m$ , выполняется равенство:

$$\langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} = 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $l \neq m$  и  $U \in C_\Lambda(\Omega)$ , тогда  $\langle A_l U_{x_l}; A_m U_{x_m} \rangle_{L_2(\Omega)}$ .

$$\langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{\mathbb{R}^4} dx = \int_{\Omega} \langle \partial_l U; A_l^T A_m \partial_m U \rangle_{\mathbb{R}^4} dx.$$

Обозначим  $A_l^T A_m = C_{lm} = (c_{jk}^{(lm)})_{j,k=1}^4$ . Из условий (6) следует, что матрица  $C_{lm}$  является кососимметрической, т.е.

$$c_{jk}^{lm} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k, \\ -c_{jk}^{lm}, & \text{если } j = k, \quad (j, k = \overline{1, 4}). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} &= \langle \partial_l U; C_{lm} \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^4 c_{jk}^{(lm)} \partial_l u_j \cdot \partial_m u_k dx = \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq 4} \int_{\Omega} c_{jk}^{(lm)} \partial_l u_j \cdot \partial_m u_k dx + \sum_{1 \leq k < j \leq 4} \int_{\Omega} c_{jk}^{(lm)} \partial_l u_j \cdot \partial_m u_k dx. \end{aligned}$$

Во второй сумме сделаем замену индексов ( $j$  на  $k$ ,  $k$  на  $j$ ) и запишем под одним знаком суммы:



$$\langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{1 \leq j < k \leq 4} c_{jk}^{(lm)} (\partial_l u_j \cdot \partial_m u_k - \partial_l u_k \cdot \partial_m u_j) dx.$$

Применив к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \langle A_l \partial_l U; A_m \partial_m U \rangle_{L_2(\Omega)} &= - \int_{\Omega} \sum_{1 \leq j < k \leq 4} c_{jk}^{(lm)} (u_j \cdot \partial_{lm}^2 u_k - u_j \cdot \partial_{lm}^2 u_k) dx + \\ &+ \int_{\partial \Omega} \sum_{1 \leq j < k \leq 4} c_{jk}^{(lm)} (v_l \cdot u_j \cdot \partial_m u_k - v_m \cdot u_j \cdot \partial_l u_k) dS = \\ &= \int_{\partial \Omega} \sum_{1 \leq j < k \leq 4} c_{jk}^{(lm)} (v_l \cdot u_j \cdot \partial_m u_k - v_m \cdot u_j \cdot \partial_l u_k) dS, \end{aligned}$$

где  $\partial_{lm}^2 := \partial_l \partial_m$ ,  $v = (\pm 1, 0, 0, 0)$  – вектор единичной внешней нормали к поверхности  $\partial \Omega$ . Нетрудно видеть, что в силу граничных условий (7) и вида границы области  $\Omega$ , последний интеграл равен нулю.

Возьмем функцию  $U$  из  $S_{\Lambda}(\Omega)$ , тогда существует последовательность  $(U_n)_{n=1}^{\infty}$  функций класса  $C_{\Lambda}(\Omega)$  таких, что  $\|U_n - U\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\partial_j U_n \rightarrow \partial_j U$  в пространстве  $L_2(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) и по доказанному

$$\langle A_l \partial_l U_n; A_m \partial_m U_n \rangle_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, получим требуемое.

#### Априорные оценки нормы эллиптического оператора ортогонального типа в $\mathbb{R}^4$

**Теорема 5.** Пусть  $C = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{h} \right\}$ , матрица  $B(x)$  непрерывна в слое  $\bar{\Omega}$ , и существует число  $\delta \in [0, (\sqrt{2} - 1)C]$  такое, что для любой  $U \in S_{\Lambda}(\Omega)$  выполняется

$$\|BU\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta \|U\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда существуют положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что для любой вектор-функции  $U \in S_{\Lambda}(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\alpha \|U\|_{W_1^2(\Omega)} \leq \|\Lambda U\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta \|U\|_{W_1^2(\Omega)}. \quad (10)$$

**Доказательство.** Через  $\Lambda_0$  обозначим старшую часть оператора  $\Lambda$ . Согласно лемме 4, получим

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^4 \langle A_j \partial_j U; A_j \partial_j U \rangle_{L_2(\Omega)} + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq 4} \langle A_j \partial_j U; A_k \partial_j U \rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{j=1}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Используя утверждение леммы 3, получим

$$\|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=2}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{h^2} \|U\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq C^2 \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2.$$

Оценим сверху модуль скалярного произведения  $\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}$ :

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| &\leq \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \delta \|U\|_{L_2(\Omega)} \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \delta \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = (1 + \delta) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \|\Lambda U\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \langle \Lambda U; \Lambda_0 U + BU \rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle BU; BU \rangle_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq (1 + \delta) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \delta \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)} \|U\|_{L_2(\Omega)} + \delta^2 \|U\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq (1 + 2\delta + \delta^2) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\Lambda U\|_{L_2(\Omega)} \leq (1 + \delta) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Таким образом, можно положить  $\beta = 1 + \delta$ .

Оценим снизу модуль скалярного произведения  $\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}$ :

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| &= |\langle \Lambda_0 U + BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| = \\ &= |\langle \Lambda_0 U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| \geq \\ &\geq \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 - |\langle BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| \geq \\ &\geq \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|BU\|_{L_2(\Omega)} \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 - \delta \|U\|_{L_2(\Omega)} \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq \|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 - \delta C \|U\|_{L_2(\Omega)} \|U\|_{W_2^1(\Omega)} \geq \\ &\geq C^2 \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - \delta C \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = (C^2 - \delta C) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\Lambda U\|_{L_2(\Omega)}^2 &= |\langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)} + \|BU\|_{L_2(\Omega)}^2| \geq \\ &\geq |\langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| - |\langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)}| - \|BU\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \\ &\geq (C^2 - \delta C) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - \delta C \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - \delta^2 \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \geq \\ &\geq (C^2 - 2\delta C - \delta^2) \|U\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить  $\alpha^2 = C^2 - 2\delta C - \delta^2$ . Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет установить единственность сильного решения однородной задачи типа Римана – Гильберта.

**Теорема 6.** *Задача типа Римана – Гильберта (8) имеет не более одного сильного решения.*

Для доказательства достаточно показать, что однородная задача (8) имеет только нулевое решение. Пусть  $\Lambda U = 0$ . Тогда из неравенства (10) следует, что  $\|U\|_{W_1^2(\Omega)} = 0$  и, значит,  $U = 0$ . Что и требовалось доказать.

**Слабое решение задачи типа Римана – Гильберта**

Для произвольных четырехкомпонентных вектор-функций  $U \in S_\Lambda(\Omega)$ ,  $V \in C^\infty(\bar{\Omega})$  рассмотрим выражение  $\langle \Lambda_0 U, V \rangle_{L_2(\Omega)}$ . Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_0 U, V \rangle_{L_2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left\langle \sum_{j=1}^4 A_j \partial_j U, V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx = \\ &= - \int_{\Omega} \left\langle U, \sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^4 \langle U, A_j^T V \rangle_{\mathbb{R}^4} \nu_j dS = \\ &= - \int_{\Omega} \left\langle U, \sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx + \int_{\partial\Omega} \langle U, V \rangle_{\mathbb{R}^4} \nu_1 dS. \end{aligned}$$

Если вектор-функция  $V$  дополнительно удовлетворяет граничным условиям

$$v_1|_{x_1=h} = v_2|_{x_1=0} = v_3|_{\partial\Omega} = v_4|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11}$$

то

$$\langle \Lambda_0 U, V \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U, \Lambda_0^* V \rangle_{L_2(\Omega)}, \tag{12}$$

где

$$\Lambda_0^* := - \sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j = -A_1 \partial_1 + \sum_{j=2}^4 A_j \partial_j.$$

Оператор  $\Lambda^* := \Lambda_0^* + B^T$  назовем формально сопряженным оператору  $\Lambda$ .

Через  $C_{\Lambda^*}(\Omega)$  обозначим класс бесконечно дифференцируемых вектор-функций  $V = (v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x))^T$ , удовлетворяющих условиям (11) и интегрируемых в квадрате по  $\Omega$  вместе со всеми производными до второго порядка включительно. Замыкание  $C_{\Lambda^*}(\Omega)$  по норме пространства  $W_2^1(\Omega)$  обозначим через  $S_{\Lambda^*}(\Omega)$ .

В силу принципа продолжения тождеств [11, с. 100], равенство (12) выполняется для всех  $U \in S_\Lambda(\Omega)$  и  $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ .

Пусть  $U \in S_\Lambda$  – решение задачи типа Римана – Гильберта. Умножим скалярно обе части уравнения (8) на произвольную функцию  $V \in C_{\Lambda^*}(\Omega)$ , тогда

$$\begin{aligned} \langle \Lambda U; V \rangle_{L_2(\Omega)} &= \langle F; V \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ \langle U; \Lambda^* V \rangle_{L_2(\Omega)} &= \langle F; V \rangle_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

По непрерывности последнее тождество продолжается на функции  $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ . Следуя С.Л. Соболеву [12], сформулируем определение слабого решения задачи типа Римана – Гильберта.

**Определение 7.** Функция  $U \in L_2(\Omega)$  называется слабым решением задачи типа Римана – Гильберта, если для любой  $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$  имеет место равенство

$$\langle F, V \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U, \Lambda^* V \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

**Теорема 8.** Пусть  $C = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{h} \right\}$ , матрица  $B(x)$  непрерывна в слое  $\bar{\Omega}$  и существует число  $\delta \in \left[ 0, (\sqrt{2} - 1)C \right]$ , такое, что для любой  $U \in S_A(\Omega)$  выполняется

$$\|BU\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta \|U\|_{L_2(\Omega)}. \quad (13)$$

Тогда для любой  $F \in L_2(\Omega)$  существует слабое решение задачи типа Римана – Гильберта.

**Доказательство.** Анализ доказательств лемм 3, 4 и теоремы 5 позволяет перенести все полученные результаты для оператора  $\Lambda$  на оператор  $\Lambda^*$ , в частности существование числа  $\alpha > 0$ , такого, что для любой  $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\alpha \|V\|_{W_1^2(\Omega)} \leq \|\Lambda^*V\|_{L_2(\Omega)}. \quad (14)$$

Для фиксированной функции  $F(x) \in L_2(\Omega)$  и произвольной функции  $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$  рассмотрим функционал  $\langle F, V \rangle_{L_2(\Omega)}$ . Пользуясь неравенствами Коши-Буняковского и (14), получим

$$\left| \langle F, V \rangle_{L_2(\Omega)} \right| \leq \|F\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|V\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\Lambda^*V\|_{L_2(\Omega)},$$

т.е. функционал  $\langle F, V \rangle_{L_2(\Omega)}$  является линейным ограниченным функционалом по  $\Lambda^*V$  на некотором подпространстве пространства  $L_2(\Omega)$ . По теореме Хана – Банаха этот функционал продолжается на все пространство [11, с. 210]. Тогда по теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, найдется функция  $U(x) \in L_2(\Omega)$  такая, что имеет место равенство

$$\langle F, V \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U, \Lambda^*V \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Существование слабого решения задачи типа Римана – Гильберта (8) доказано.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.
2. Балабаев, В. Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка / В. Е. Балабаев // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 71–83.
3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация краевых задач Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 201, № 5. – С. 1067–1069.
4. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.
5. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
6. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

7. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в  $\mathbb{R}^4$  / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.
8. Ошоров, Б. Б. Об одном четырехмерном аналоге системы уравнений Коши – Римана / Б. Б. Ошоров // Неклас. уравнения мат. физики. – 2007. – С. 212–220.
9. Ошоров, Б. Б. Задачи Римана – Гильберта и Пуанкаре с разрывными условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных / Б. Б. Ошоров // Дифференц. уравнения. – 2011. – № 5. – С. 696–704.
10. Михлин, С. Г. Линейные уравнения с частными производными : учеб. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов / С. Г. Михлин. – М. : Высш. шк., 1977. – 431 с.
11. Антоневиц, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А. Б. Антоневиц, Я. В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.
12. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 336 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.10.2018

***Basik A.I., Gritsuk E.V. The Riemann – Hilbert Type Boundary Value Problem for Orthogonal Elliptic Systems in  $\mathbb{R}^4$***

*The class of elliptic systems of four differential equations of the first order with four variables orthogonal type is considered in this paper. The questions of existence and uniqueness of the solution of Riemann-Hilbert type boundary value problem are studied for this class of systems in the unbounded special domain.*

УДК 519.21

**И.Н. Боднарчук**канд. физ.-мат. наук, ведущий инженер-математик  
научно-исследовательской лаборатории

«Дифференциальные уравнения и их применение в механике»

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

e-mail: [ibodnarchuk@univ.kiev.ua](mailto:ibodnarchuk@univ.kiev.ua)**АСИМПТОТИКА МЯГКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ**

Исследованы задачи Коши для волнового уравнения с общей стохастической мерой в двух случаях: уравнение задано (1) на прямой и (2) на плоскости. Доказано, что мягкие решения задач стремятся к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

**Введение**

Пусть  $X$  – произвольное множество,  $B(X)$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $X$ ;  $L_0(\Omega, F, P)$  – множество вещественнозначных случайных величин, определенных на полном вероятностном пространстве  $L_0(\Omega, F, P)$ . Сходимость в  $L_0(\Omega, F, P)$  – это сходимость по вероятности. Пусть также  $\mu$  – стохастическая мера на  $B(X)$ , т.е.  $\sigma$  – аддитивное отображение  $\mu: B(X) \rightarrow L_0(\Omega, F, P)$ . В [1] такая  $\mu$  называется общей стохастической мерой. Мы не накладываем на меру  $\mu$  никаких дополнительных условий, кроме  $\sigma$ -аддитивности.

Рассматриваем следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x) \dot{\mu}(t), \\ u(0, x) = u_0(x); \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

где  $(t, x) \in [0, T] \times R^d$ ,  $d = 1, 2$ ,  $T > 0$ ,  $a > 0$  и  $\mu$  – стохастическая мера, определенная на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $B([0, T])$ .

Мы исследуем мягкое решение задачи (1), т.е. такую измеримую случайную функцию  $u(t, x) = u(t, x, \omega): [0, T] \times R^d \times \Omega \rightarrow R$ , что

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_{R^d} S_d(t, x - y) v_0(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{R^d} S_d(t, x - y) u_0(y) dy \right) + \\ & + \int_0^t ds \int_{R^d} S_d(t - s, x - y) f(s, y, u(s, y)) dy + \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{R^d} S_d(t - s, x - y) \sigma(s, y) dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $S_d(t, x)$  – фундаментальное решение однородного волнового уравнения:

$$S_1(t, x) = \frac{1}{2a} I_{\{|x| < at\}}, \quad S_2(t, x) = \frac{1}{2a\pi \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} I_{\{|x| < at\}},$$

где  $I_A$  – индикатор множества  $A$ ,  $|\cdot|$  – евклидова норма.

Интегралы от случайных функций по  $dy$  и  $ds$  берутся для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$ . Определение и свойства интегралов по стохастическим мерам представлены в [1; 2].

Мягкие решения уравнений со стохастическими мерами исследованы, например, в работах [3–6]. В [3] доказано существование и единственность мягкого решения (2) для  $d = 1$ , а также получена непрерывность по Гельдеру его траекторий по временной и пространственной переменным, установлена непрерывная зависимость решения от данных задачи. Аналогичная задача для  $d = 2$  исследована в [4].

Асимптотическое поведение мягких решений уравнений теплопроводности со стохастическими мерами рассмотрено в [7–9]. В публикациях [10–11] изучена асимптотика решений волновых уравнений с белым шумом.

Цель данной работы – показать, что при определенных условиях мягкое решение задачи Коши (1) стремится к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

**Дополнительные сведения**

Рассмотрим пространство Бесова  $B_{22}^\alpha([b, c])$ ,  $\alpha \in (1/2, 1)$ , т.е. пространство функций  $g : [b, c] \rightarrow R$ , для которых конечной является норма

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b, c])} = \|g\|_{L_2([b, c])} + \left( \int_0^{c-b} (w_2(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2},$$

где

$$w_2(g, r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left( \int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Для произвольных  $n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^n$  положим  $\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t]$ . Пусть функция  $g(z, s) : Z \times [0, t] \rightarrow R$  такова, что для некоторого  $\alpha \in (1/2, 1)$  и для любого  $z \in Z : g(z, \cdot) \in B_{22}^\alpha([0, t])$ . Здесь  $Z$  – произвольное множество. Обозначим

$$g_n(z, s) = g(z, 0)I_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} g(z, (k-1)2^{-n}t)I_{\Delta_{kn}^{(t)}}(s).$$

Тогда, согласно [5] (лемма 3), случайная функция

$$\eta(z) = \int_{(0, t]} g(z, s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

имеет такую модификацию

$$\tilde{\eta}(z) = \int_{(0, t]} g_0(z, s) d\mu(s) + \sum_{n \geq 1} \left( \int_{(0, t]} g_n(z, s) d\mu(s) - \int_{(0, t]} g_{n-1}(z, s) d\mu(s) \right), \quad (3)$$

что для всех  $\omega \in \Omega, z \in Z$  справедлива оценка

$$|\tilde{\eta}(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| +$$

$$+ \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |g(z, k2^{-n}t) - g(z, (k-1)2^{-n}t)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2}.$$

Определение модификации случайной функции представлено, например, в [12, с. 21]. Тогда, согласно [13] (теорема 1.2):

$$|\tilde{\eta}(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| + C \|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Отметим, что константа  $C$  зависит от  $\alpha, t$  и не зависит от  $z, \omega$ .

### Волновое уравнение на прямой

При  $d = 1$  уравнение (2) принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x+at) - u_0(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s, y, u(s, y)) dy + \frac{1}{2a} \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy. \quad (5)$$

Будем рассматривать следующие предположения.

A1.1. Функции  $u_0(y) = u_0(y, \omega) : R \times \Omega \rightarrow R$  и  $v_0(y) = v_0(y, \omega) : R \times \Omega \rightarrow R$  измеримы и ограничены:  $|u_0(y)| \leq C(\omega)$ ,  $|v_0(y)| \leq C(\omega)$ .

A1.2. Функция  $u_0(y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq C(\omega) |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1.$$

A1.3.  $f(s, y, v) : [0, T] \times R \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|f(s, y, v)| \leq C$ .

A1.4.  $f(s, y, v)$  липшицева по  $v \in R$ :

$$|f(s, y, v_1) - f(s, y, v_2)| \leq C |v_1 - v_2|.$$

A1.5.  $\sigma(s, y) : [0, T] \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|\sigma(s, y)| \leq C$ .

A1.6.  $\sigma(s, y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|\sigma(s_1, y_1) - \sigma(s_2, y_2)| \leq C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A1.7.  $|u_0(y)| \rightarrow 0$ ,  $|v_0(y)| \rightarrow 0$ ,  $\sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \rightarrow 0$ ,  $\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0$

при  $|y| \rightarrow \infty$ .

Здесь и далее будем обозначать через  $C$  и  $C(\omega)$  константы, которые могут быть разными в разных формулах, и точное значение которых не существенно.

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения A1.1.–A1.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (5), что для любых фиксированных  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$  имеет место сходимость

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Согласно [3] (теорема 2.1), если выполнены предположения A1.1–A1.6, то для всех  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R$  уравнение (5) имеет единственное решение  $u(t, x)$ . Для этого решения имеем



$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{2} |u_0(x + at) - u_0(x - at)| + \frac{1}{2a} \left| \int_{x-at}^{x+at} v_0(y) dy \right| + \frac{1}{2a} \left| \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s, y, u(s, y)) dy \right| + \frac{1}{2a} \left| \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| \leq \frac{1}{2} |I_1(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_2(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_3(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_4(t, x)|.$$

Рассмотрим стохастический интеграл  $|I_4(t, x)| = \int_{(0,t]} q(t, x, s) d\mu(s)$ . Пусть  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R$  фиксированы. Тогда случайная функция  $\varphi(z) = I_4(t, x)$ ,  $z = (t, x)$  имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Рассмотрим составные его правой части. Для произвольного  $s \leq t$  оценим  $|q(t, x, s)|$ .

Согласно предположению A1.7, имеем, что для любого  $\varepsilon_0 > 0$  существует такое число  $\delta_0 > 0$ , что  $\forall |y| > \delta_0$ :

$$|u_0(y)| < \varepsilon_0, \quad |v_0(y)| < \varepsilon_0, \quad \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| < \varepsilon_0, \quad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| < \varepsilon_0. \quad (6)$$

Тогда  $\forall s \leq t, \forall |x| > \delta_0 + aT$  по теореме о среднем существует такая точка  $y_0 \in [x - a(t - s), x + a(t - s)]$ , что

$$|q(t, x, s)| = \left| \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| = 2a(t-s) |\sigma(s, y_0)| \leq 2aT \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y_0)| < 2aT\varepsilon_0 = C\varepsilon_0, \quad (7)$$

где мы применили теорему о трех последовательностях и A1.7.

Таким образом,

$$|q(t, x, 0)| < C\varepsilon_0, \quad \|q(t, x, 0)\|_{L_2(B_{22}^a([0, t]))} = \left( \int_0^t |q(t, x, s)|^2 ds \right)^{1/2} < C\varepsilon_0.$$

Далее оценим норму  $\|q(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^a([0, t])}$ . Для этого рассмотрим величину  $|q(t, x, s + h) - q(t, x, s)|$ . Согласно A1.5 – A1.6, имеем

$$\begin{aligned} |q(t, x, s + h) - q(t, x, s)| &= \left| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} \sigma(s + h, y) dy - \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma(s + h, y) - \sigma(s, y)) dy - \int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)} \sigma(s, y) dy - \int_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| \leq \\ &\leq Ch^{\beta(\sigma)} 2a(t-s-h) + 2C2ah \leq Ch^{\beta(\sigma)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left( \int_0^t |q(t, x, s + h) - q(t, x, s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq Cr^{\beta(\sigma)} \sqrt{t} \leq Cr^{\beta(\sigma)}. \quad (8)$$

С другой стороны, за (7) для  $s + h \leq t$ :

$$|q(t, x, s+h) - q(t, x, s)| \leq |q(t, x, s+h)| + |q(t, x, s)| < C\varepsilon_0,$$

и поэтому

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < C\varepsilon_0 \sqrt{t} \leq C\varepsilon_0. \quad (9)$$

Перемножим неравенства (8) и (9), возведенные в степени  $\theta$  и  $1-\theta$  соответственно, где  $\theta \in (0,1)$  – произвольное. Имеем

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < Cr^{\theta\beta(\sigma)} \varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Тогда существует такое  $\alpha < \theta\beta(\sigma)$ , что

$$\|q(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} < C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^{1-\theta} \left( \int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \leq C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

где  $a \vee b$  – максимум чисел  $a$  и  $b$ .

Таким образом,

$$|I_4(t, x)| < C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}) \left( |\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2} \right) \leq C(\omega)(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

где в последнем неравенстве мы использовали [6] (лемма 3.1).

Кроме того, для любого  $|x| > \delta_0 + aT$ , согласно (6) и A1.1,

$$|I_1(t, x)| = |u_0(x+at) - u_0(x-at)| < 2\varepsilon_0,$$

и аналогично доказательству неравенства (7) устанавливаем оценку

$$|I_2(t, x)| = 2at |v_0(y_1)| < C\varepsilon_0,$$

для произвольного  $|x| > \delta_0 + aT$  и некоторого  $y_1 \in [x-at, x+at]$ .

Также аналогично получаем, что для любого  $|x| > \delta_0 + aT$

$$|I_3(t, x)| \leq \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \int_0^t 2a(t-s) ds < \varepsilon_0 at^2 \leq C\varepsilon_0.$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  положим в (6)  $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon \geq 1$  и  $\varepsilon_0 = \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon < 1$ . Таким образом, существует такое множество  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $P(\Omega_0) = 1$ , что для любых фиксированных  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_0 + aT \quad \forall |x| > \delta: |u(t, x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

### Волновое уравнение на плоскости

Рассмотрим теперь случай  $d = 2$ . Положим для  $x \in R^2$  и  $r > 0$ :  $B(x, r) = \{y \in R^2 : |x - y| < r\}$  – шар в  $R^2$ ,  $\bar{B}(x, r)$  – его замыкание.

Уравнение (2) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \frac{1}{2a\pi} \int_{B(x, at)} \frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy + \frac{1}{2a\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right) + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \int_0^t ds \int_{B(x, a(t-s))} \frac{f(s, y, u(s, y))}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{B(x, a(t-s))} \frac{\sigma(s, y)}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Будем рассматривать следующие предположения.

A2.1. Функции  $u_0(y) = u_0(y, \omega) : R^2 \times \Omega \rightarrow R$  и  $v_0(y) = v_0(y, \omega) : R^2 \times \Omega \rightarrow R$  измеримы и ограничены:  $|u_0(y)| \leq C(\omega)$ ,  $|v_0(y)| \leq C(\omega)$ .

A2.2.  $v_0(y), u_0(y), \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i = 1, 2$ , непрерывны по Гельдеру:

$$|v_0(y') - v_0(y'')| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(v_0)}, \quad 0 < \beta(v_0) \leq 1;$$

$$|u_0(y') - u_0(y'')| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1;$$

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'') \right| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}.$$

A2.3.  $f(s, y, v) : [0, T] \times R^2 \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|f(s, y, v)| \leq C$ .

A2.4.  $f(s, y, v)$  липшицева по  $y \in R^2, v \in R$ :

$$|f(s, y', v') - f(s, y'', v'')| \leq C(|y' - y''| + |v' - v''|).$$

A2.5.  $\sigma(s, y) : [0, T] \times R^2 \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|\sigma(s, y)| \leq C$ .

A2.6.  $\sigma(s, y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|\sigma(s', y') - \sigma(s'', y'')| \leq C(|s' - s''|^{\beta(\sigma)} + |y' - y''|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A2.7.  $|u_0(y)| \rightarrow 0, \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \rightarrow 0, |v_0(y)| \rightarrow 0, \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \rightarrow 0,$

$\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены предположения A2.1.–A2.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (10), что для любых фиксированных  $t \in [0, T], \omega \in \Omega$  имеет место сходимость

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Согласно [4] (теорема 2.1), если выполнены предположения A1.1–A1.6, то для всех  $t \in [0, T], x \in R^2$  уравнение (10) имеет единственное решение  $u(t, x)$ . Для этого решения

$$\begin{aligned}
 |u(t, x)| = & \frac{1}{2a\pi} \left| \int_{B(x, at)} \frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right| + \frac{1}{2a\pi} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right) \right| + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \left| \int_0^t ds \int_{B(x, a(t-s))} \frac{f(s, y, u(s, y))}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy \right| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a\pi} \left| \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} dy \right| = \\
& = \frac{1}{2a\pi} |J_1(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_2(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_3(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_4(t,x)|. \quad (11)
\end{aligned}$$

Аналогічна доказательству теоремы 1, рассмотрим стохастический интеграл  $J_4(t,x) = \int_{(0,t]} \hat{q}(t,x,s) d\mu(s)$ . Пусть  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^2$  фиксированы. Тогда случайная функция  $\psi(z) = J_4(t,x)$ ,  $z = (t,x)$  имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Для произвольного  $s \leq t$  оценим  $|\hat{q}(t,x,s)|$ .

Согласно с A2.7, имеем, что  $\forall \varepsilon_* > 0 \exists \delta_* > 0 \forall |y| > \delta_*$ :

$$|u_0(y)| < \varepsilon_*, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| < \varepsilon_*, \quad |v_0(y)| < \varepsilon_*, \quad \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s,y,v)| < \varepsilon_*, \quad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s,y)| < \varepsilon_*. \quad (12)$$

Тогда, выполнив в интеграле  $\hat{q}(t,x,s)$  замену переменных

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - r(t-s) \cos \varphi \\
y_2 &= x_2 - r(t-s) \sin \varphi, \quad r \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, a),
\end{aligned}$$

получаем

$$\hat{q}(t,x,s) = (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\sigma(s, x_1 - r(t-s) \cos \varphi, x_2 - r(t-s) \sin \varphi)}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr.$$

Теперь выполняем замену  $v = \sqrt{a^2 - r^2}$ :

$$\begin{aligned}
|\hat{q}(t,x,s)| &= (t-s) \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \sin \varphi) dv \right| = \\
&= 2a\pi(t-s) |\sigma(s, y_*)| \leq 2a\pi T \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y_*)| < 2a\pi T \varepsilon_* \leq C\varepsilon_*, \quad (13)
\end{aligned}$$

где  $y_* \in \bar{B}(x, a(t-s))$ ,  $|x| > \delta_* + aT$ . Мы применили теорему о среднем, теорему о трех последовательностях и неравенство (12).

Следовательно,

$$|\hat{q}(t,x,0)| < C\varepsilon_*, \quad \|\hat{q}(t,x,0)\|_{L_2([0,t])} = \left( \int_0^t |\hat{q}(t,x,s)|^2 ds \right)^{1/2} < C\varepsilon_*.$$

Оценим норму  $\|\hat{q}(t,x,\cdot)\|_{B_{22}^c([0,t])}$ . В силу A2.5 – A2.6 имеем

$$\begin{aligned}
& |\hat{q}(t,x,s+h) - \hat{q}(t,x,s)| = \\
& = \left| (t-s-h) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s-h) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s-h) \sin \varphi) dv - \right. \\
& \left. - (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \sin \varphi) dv \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C2a\pi h + Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)\frac{a^2\pi^2}{2} \leq Ch^{\beta(\sigma)}.$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\|\hat{q}(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} < C\varepsilon_* + C\varepsilon_*^{1-\rho} \left( \int_0^t r^{2\rho\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \leq C(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}),$$

где  $\rho \in (0, 1)$  – произвольное, и найдется соответствующее  $\alpha < \rho\beta(\sigma)$ .

Таким образом,

$$|J_4(t, x)| < C(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}) \left( |\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2} \right) \leq C(\omega)(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}),$$

где в последнем неравенстве мы также использовали [6] (лемма 3.1).

Теперь рассмотрим остальные слагаемые (11). Аналогично (13) получаем

$$|J_1(t, x)| = t \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a v_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv \right| = 2a\pi |v_0(y_{**})| < C\varepsilon_*,$$

где  $y_{**}$  – элемент множества  $\bar{B}(x, a(t-s))$ , а  $|x| > \delta_* + aT$ .

Рассмотрим  $J_2(t, x)$ . В [4] при доказательстве теоремы 2.1 было получено следующее. Поскольку

$$\int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy = t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial t}(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv. \end{aligned}$$

Поэтому, аналогично предыдущему,  $\forall |x| > \delta_* + aT$ :

$$|J_2(t, x)| < C\varepsilon_*, \text{ а также } |J_3(t, x)| < C\varepsilon_*.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  положим в (6)  $\varepsilon_* = \varepsilon C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon \geq 1$ , и  $\varepsilon_* = \varepsilon^{\frac{1}{1-\rho}} C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon < 1$ . Тогда существует множество  $\Omega_* \subset \Omega, P(\Omega_*) = 1$  такое, что для любых фиксированных  $t \in [0, T], \omega \in \Omega_*$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_* + aT \quad \forall |x| > \delta: |u(t, x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

### Заклученне

Рассмотрено мягкое решение задачи Коши для волнового уравнения, управляемого общей стохастической мерой. Доказано, что при определенных условиях решение стремится к нулю, если абсолютная величина пространственной переменной стремится к бесконечности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kwapień, S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapień, W. A. Woyczyński. – Boston : Birkhäuser, 1992. – 360 p.
2. Радченко, В. Н. Интегралы по общим случайным мерам / В. Н. Радченко // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – Т. 27. – 196 с.
3. Bodnarchuk, I. M. Wave equation with a stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Theory Probab. Math. Statist. – 2017. – Vol. 94. – P. 1–16.
4. Боднарчук, И. Н. Волновое уравнение на плоскости, управляемое общей стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Теория вероятности. Мат. статистика. – 2018. – Вып. 1 (98). – С. 70–86.
5. Radchenko, V. M. Evolution equations driven by general stochastic measures in Hilbert space / V. M. Radchenko // Theory Probab. Appl. – 2015. – Vol. 59. – P. 328–339.
6. Radchenko, V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251.
7. Боднарчук, И. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Науч. вестн. Черновиц. ун-та. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.
8. Боднарчук, И. Асимптотическое поведение мягкого решения стохастического уравнения теплопроводности / И. Боднарчук // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 2016. – Вып. 2 (36). – С. 40–42.
9. Радченко, В. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой при  $|t| \rightarrow \infty$  / В. Н. Радченко // Науч. вестн. Ужгород. ун-та. – 2012. – Вып. 23, № 1. – С. 119–124.
10. Yang, M. Asymptotic behavior of solutions for random wave equations with nonlinear damping and white noise / M. Yang, J. Duan, P. Kloeden // Nonlinear Anal. RWA. – 2011. – Vol. 12, № 1. – P. 464–478.
11. Chen, L. Moment bounds and asymptotics for the stochastic wave equation / L. Chen, R. C. Dalang // Stoch. Process. Appl. – 2015. – Vol. 125. – P. 1605–1628.
12. Theory of Stochastic Processes: With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory / D. Gusak [et al.] // Problem Books in Mathematics. – New York : Springer Science & Business Media, 2010. – 376 p.
13. Kamont, A. A discrete characterization of Besov spaces / A. Kamont // Approx. Theory Appl. – 1997. – Vol. 13, № 2. – P. 63–77.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.08.2018

#### ***Bodnarchuk I.M. Asymptotics of the Mild Solution for the Wave Equation with a Stochastic Measure***

*The Cauchy problem for the wave equation with a general stochastic measure is investigated in two cases: the equation is given (1) on the line and (2) on the plane. We prove that the mild solutions tend to zero as the spatial variable tends to infinity.*

УДК 512.542

**Д.В. Грицук<sup>1</sup>, А.А. Трофимук<sup>2</sup>, Т.В. Бондарук<sup>3</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, докторант каф. алгебры и геометрии

Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

<sup>3</sup>магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: <sup>1</sup>dmitry.gritsuk@gmail.com, <sup>2</sup>alexander.trofimuk@gmail.com**ИНВАРИАНТЫ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ ИЗ ФАКТОРОВ ИМЕЮТ ЗАДАННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ**

*Исследованы -разрешимые группы, у которых силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения, получены оценки  $\pi$ -длины, нильпотентной  $\pi$ -длины и производной  $\pi$ -длины для таких групп. В частности, если  $\pi$ -разрешимая группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются циклическими, то  $\pi$ -длина не превышает 1, а нильпотентная  $\pi$ -длина и производная  $\pi$ -длина не превышают 2. Если  $\pi$ -разрешимая группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются бициклическими и  $2 \in \pi$ , то  $\pi$ -длина не превышает 2, нильпотентная  $\pi$ -длина не превышает 4, а производная  $\pi$ -длина не превышает 10.*

Рассматриваются только конечные частично разрешимые группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Строение частично разрешимых групп можно изучить за счет получения оценок таких инвариантов как  $\pi$ -длина, нильпотентная  $\pi$ -длина и производная  $\pi$ -длина, где  $\pi$  – некоторое подмножество множества простых чисел  $\mathbb{P}$ . Дополнение к  $\pi$  во множестве  $\mathbb{P}$  обозначается через  $\pi'$ . Символом  $\pi$  обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$  следующим образом:  $\pi(a)$  – множество простых чисел, делящих натуральное число  $a$ . Для группы  $G$  и ее подгруппы  $H$  считаем, что  $\pi(G) = \pi(|G|)$  и  $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$ . Зафиксируем множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется  $\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$  и  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . В этом случае  $\pi(G) \cap \pi' = \emptyset$ .

Напомним, что субнормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G, \quad (1)$$

такая, что  $G_i$  нормальна в  $G_{i+1}$  для любого  $i$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами субнормального ряда (1).

Группа называется  $\pi$ -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми  $\pi$ -группами, либо  $\pi'$ -группами. Хорошо известно, что наименьшее число  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi(G)$ .

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс [3] для  $\pi$ -разрешимой группы ввели аналог нильпотентной длины, а именно, понятие нильпотентной  $\pi$ -длины. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо нильпотентными  $\pi$ -группами. Наименьшее число нильпотентных  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы  $G$  называется нильпотентной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы и обозначается через  $l_\pi^n(G)$ . Ясно, что в случае, когда  $\pi = \pi(G)$ , значение нильпотентной  $\pi$ -длины  $l_\pi^n(G)$  совпадает со значением нильпотентной длины группы  $G$ .

В.С. Монаховым в 2006 г. [4] был предложен аналог производной длины для  $\pi$ -разрешимых групп. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает

субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди таких субнормальных рядов группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Если  $\pi(G) = \pi$ , то значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ .

В ряде работ Д.В. Грицука, В.С. Монахова и О.А. Шпырко получены оценки производной и нильпотентной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы в зависимости от строения либо силовских  $p$ -подгрупп для  $p \in \pi$ , либо  $\pi$ -холловой подгруппы.

Так, например, доказано, что если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы циклические для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ ; если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы абелевы для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leq |\pi(G_\pi)|$  [5]. Установлено, что производная  $\pi$ -длина конечной  $\pi$ -разрешимой группы с бициклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi$  не превышает 6 [6]. Доказано, что производная  $\pi$ -длина конечной  $\pi$ -разрешимой группы, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические либо имеют порядок  $p^3$  для всех  $p \in \pi$ , не превышает 7 [5]. Напомним, что бициклической называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами.

В работе [7] установлено, что если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы циклические для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^n(G) \leq 2$ ; если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы бициклические для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^n(G) \leq 4$ .

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы  $G$  имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что  $G$  сверхразрешима. Поэтому группа  $G$  дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы  $G$  не выше 2. Поскольку любая  $p$ -группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [8]. В частности, получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и  $\pi$ -длины) таких разрешимых групп. В 2013 г. [9] получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки. В частности, получены оценки производной длины, нильпотентной длины и  $\pi$ -длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга, силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

Развитием данного направления исследования частично разрешимых групп является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются:

- 1) циклическими, то  $l_\pi(G) \leq 1$ ,  $l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$ ;
- 2) метациклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2$ ,  $l_\pi^n(G) \leq 4$ ,  $l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 3) бициклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2$ ,  $l_\pi^n(G) \leq 4$ ,  $l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то  $l_\pi(G) \leq 3$ ,  $l_\pi^n(G) \leq 4$ ,  $l_\pi^a(G) \leq 18$ , если  $2 \in \pi$ .



**Вспомогательные результаты**

Через  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы  $G$  соответственно;  $Z_m$  – циклическая группа порядка  $m$ ;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно. Полупрямое произведение нормальной в  $G$  подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$  будем записывать:  $[A]B$ .

В дальнейшем под  $l_\pi^*(G)$  будем понимать либо всюду  $l_\pi^a(G)$ , либо всюду  $l_\pi^n(G)$ , либо всюду  $l_\pi(G)$ .

**Лемма 1.** [5] (лемма 1–2) Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^*(H) \leq l_\pi^*(G)$ ;
- 2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^*(G/N) \leq l_\pi^*(G)$  и  $l_\pi^*(G) \leq l_\pi^*(G/N) + l_\pi^*(N)$ ;
- 3) если  $N$  – нормальная  $\pi'$ -подгруппа группы  $G$ , то  $l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G)$ ;
- 4) если  $G$  и  $V$  –  $\pi$ -разрешимые группы, то  $l_\pi^*(G \times V) = \max\{l_\pi^*(G), l_\pi^*(V)\}$ ;
- 5) если  $N_1$  и  $N_2$  – нормальные подгруппы в  $G$ , то  $l_\pi^*(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^*(G/N_1), l_\pi^*(G/N_2)\}$ ;
- 6)  $l_\pi^n(G/\Phi(G)) = l_\pi^n(G)$  и  $l_\pi(G/\Phi(G)) = l_\pi(G)$ .

**Лемма 2.** [5] (лемма 4) Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $t$  – натуральное число. Предположим, что  $l_\pi^*(G/N) \leq t$  для всех неединичных нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$ , но  $l_\pi^*(G) > t$ . Тогда:

- 1)  $O_{\pi'}(G) = 1$ ;
- 2)  $\Phi(G) = 1$ , если рассматривать  $l_\pi^n(G)$  и  $l_\pi(G)$ ;
- 3) в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа;
- 4)  $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$  для некоторого простого  $p \in \pi$ ;
- 5)  $O_{p'}(G) = 1$  и  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ .

**Доказательство.** Для  $\pi$ -длины  $l_\pi(G)$  и нильпотентной  $\pi$ -длины  $l_\pi^n(G)$  утверждение доказано в [2] (лемма VI.6.9) и [10] (лемма 2) соответственно.

1. Предположим, что  $O_{\pi'}(G) \neq 1$ . Тогда по условию леммы  $l_\pi^a(G/O_{\pi'}(G)) \leq t$ . Теперь из леммы 1 (2) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G/O_{\pi'}(G)) \leq t$$

противоречие. Поэтому предположение неверно, и  $O_{\pi'}(G) = 1$ .

2. Допустим, что в группе  $G$  существуют две различные минимальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ . Тогда  $N_1 \cap N_2 = 1$  и по условию

$$l_\pi^a(G/N_1) \leq t \text{ и } l_\pi^a(G/N_2) \leq t.$$

Теперь из леммы 1 (5) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) \leq \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\} \leq t$$

противоречие. Поэтому допущение неверно, и в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа.

3. Так как группа  $G$  -разрешима и  $O_{\pi'}(G) = 1$ , то  $O_\pi(G) \neq 1$ . Подгруппа  $O_\pi(G)$  разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга  $F(O_\pi(G))$  отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G)) \subseteq F(G).$$

Из утверждения 1 следует, что  $F(G)$  является -подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F(O_\pi(G)), \quad F(G) = F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа  $F(G)$  нильпотентна, а согласно утверждению 2 в группе  $G$  минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого  $p \in \pi$ .

4. Если  $O_{p'}(G) \neq 1$ , то в группе  $G$  будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы:  $p$ -подгруппа из  $O_p(G)$  и  $p'$ -подгруппа из  $O_{p'}(G)$ . Имеем противоречие с утверждением 2. Поэтому  $O_{p'}(G) = 1$ .

Так как подгруппа  $O_p(G)$  нормальна в  $G$ , то  $C_G(O_p(G))$  нормальна в  $G$ . Предположим, что

$$C_G(O_p(G)) \not\subseteq O_p(G).$$

Тогда фактор-группа

$$C_G(O_p(G))O_p(G)/O_p(G)$$

будет неединичной нормальной подгруппой фактор-группы  $G/O_p(G)$ . Поскольку  $O_p(G/O_p(G)) = 1$ , то минимальная нормальная в  $G/O_p(G)$  подгруппа  $A/O_p(G)$  из

$$C_G(O_p(G))O_p(G)/O_p(G)$$

будет  $p'$ -группой. Пусть  $K$  –  $p'$ -холлова подгруппа из  $A$ . Тогда фактор-группа  $KO_p(G)/O_p(G)$  будет  $p'$ -холловой подгруппой в группе  $A/O_p(G)$ , поэтому

$$A = KO_p(G) = K \times O_p(G).$$

Так как  $K$  холлова, то  $K$  характеристическая подгруппа в  $A$ , а подгруппа  $A$  нормальна в  $G$ . Следовательно, подгруппа  $K$  нормальна в  $G$ , и

$$K \subseteq O_{p'}(G) = 1.$$

Имеем противоречие. Поэтому допущение неверно, и

$$C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G).$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** [11] (лемма 1). Пусть  $G$  – бициклическая  $p$ -группа и  $N$  – дополняемая нормальная подгруппа группы  $G$ , то справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $p = 2$ , то  $|N/\Phi(N)| \leq 4$ ,
- 2) если  $p > 2$ , то либо  $N = G$ , либо  $N$  циклическая.

**Лемма 4.** [7] (лемма 10). Если  $G$  – сверхразрешимая группа, то для любого множества  $\pi$  простых чисел  $l_\pi(G) \leq 1$  и  $l_\pi^m(G) \leq 2$ .

**Лемма 5.** [11] (лемма 3). Если  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(2, p)$ , то сверхразрешимый корадикал подгруппы  $H$  является расширением циклической 2-группы порядка, делящего  $(p-1)$ , с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Кроме того, производная длина подгруппы  $H$  не превышает 4.

**Лемма 6.** [5] (лемма 3). Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, то

$$d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi).$$

**Лемма 7.** [11] (лемма 4). Пусть  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(3, p)$ . Тогда: для сверхразрешимого корадикала  $H^U$  подгруппы  $H$  возможны два случая:

- 1)  $H^U$  абелева порядка, делящего  $(p-1)^2$ ;
- 2)  $H^U$  – 3-замкнутая  $\{2,3\}$ -подгруппа; её силовская 3-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего  $p-1$  с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9, а силовская 2-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего  $p-1$  с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Кроме того, производная длина подгруппы  $H$  не превышает 5.

**Основные результаты**

**Теорема.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются:

- 1) циклическими, то  $l_\pi(G) \leq 1, l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$ ;
- 2) метациклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 3) бициклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то  $l_\pi(G) \leq 3, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 18$ , если  $2 \in \pi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда силовские подгруппы  $\pi$ -факторов являются бициклическими, либо свободными от четвертых степеней.

Пусть ряд (1) группы  $G$  из условия теоремы. Покажем, что для произвольной нормальной подгруппы  $N$  условие теоремы переносится на фактор-группу  $G/N$ . Очевидно, что ряд

$$G/N = G_n/N \supseteq G_{n-1}N/N \supseteq \dots \supseteq G_1N/N \supseteq G_0N/N = 1$$

будет нормальным рядом группы  $G/N$  с факторами

$$\begin{aligned} (G_{i+1}N/N)/(G_iN/N) &\simeq G_{i+1}N/G_iN = G_{i+1}(G_iN)/G_iN \simeq \\ &\simeq G_{i+1}/(G_{i+1} \cap G_iN) = G_{i+1}/(G_i(G_{i+1} \cap N)) \simeq (G_{i+1}/G_i)/(G_i(G_{i+1} \cap N)/G_i), \end{aligned}$$

изоморфными фактор-группам групп  $G_{i+1}/G_i$ . Если фактор-группа  $G_{i+1}/G_i$  является  $\pi$ -группой, то и фактор-группа

$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N)$$

является  $\pi$ -группой. Так как по свойствам силовских подгрупп справедливо равенство

$$(G/N)_p = G_pN/N,$$

то силовские подгруппы  $\pi$ -факторов

$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N)$$

будут являться циклическими (метациклическими, абелевыми, бициклическими, свободными от четвертых степеней).

Таким образом, условия теоремы переносятся на фактор-группы. Получим оценки  $\pi$ -длины и нильпотентной  $\pi$ -длины. По леммам 1 и 2,

$$O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1,$$

и в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная  $p$ -подгруппа  $F$ , являющаяся подгруппой Фиттинга группы  $G$ , для некоторого  $p \in \pi$ , совпадающая со своим централизатором и дополняемая в группе  $G$ . Ясно, что  $G_1$  является  $\pi$ -группой и  $F \leq (G_1)_p$  для некоторого  $p \in \pi$ . Так как по условию  $(G_1)_p$  либо бициклическая, либо свободна от четвертых степеней, то по лемме 3  $|F| = p$  или  $p^2$  или  $p^3$ .

Если  $|F| = p$ , то фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе циклической группы  $Aut F$ , порядок которой равен  $p - 1$ . Теперь группа  $G$  сверхразрешима,  $l_\pi(G) \leq 1$  и  $l_\pi^n(G) \leq 2$ .

Пусть  $2 \in \pi$ . Тогда  $G$  – разрешимая группа. Если  $|F| = p^2$ , то фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p)$ . Если  $G/F$  – сверхразрешимая группа, то по лемме 4  $l_\pi(G/F) \leq 1$  и  $l_\pi^n(G/F) \leq 2$ , откуда  $l_\pi(G) \leq 2$  и  $l_\pi^n(G) \leq 3$ . Если  $G/F$  – несверхразрешимая группа, то по лемме 5 сверхразрешимый корадикал  $H/F$  факторгруппы  $G/F$  является 2-группой. Учитывая, что  $2 \in \pi$  заключаем, что  $l_\pi(G) \leq 2$  и  $l_\pi^n(G) \leq 4$ .

Если  $|F| = p^3$ , то факторгруппа  $G/F$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(3, p)$ . Если  $G/F$  – сверхразрешимая группа, то по лемме 4  $l_\pi(G/F) \leq 1$  и  $l_\pi^n(G/F) \leq 2$ , откуда  $l_\pi(G) \leq 2$  и  $l_\pi^n(G) \leq 3$ . Если  $G/F$  – несверхразрешимая группа, то по лемме 4 сверхразрешимый корадикал  $H/F$  факторгруппы  $G/F$  является абелевой или 3-замкнутой  $\{2,3\}$ -группой. Если  $H/F$  абелева, то  $l_\pi(G) \leq 3$  и  $l_\pi^n(G/F) \leq 4$ . Пусть

$H/F$  – 3-замкнутая  $\{2,3\}$ -группа. Если  $3 \in \pi$ , то  $l_\pi(G) \leq 2$  и  $l_\pi^n(G) \leq 4$ . Если  $3 \notin \pi$ , то  $l_\pi(G) \leq 3$  и  $l_\pi^n(G/F) \leq 4$ .

Оценки  $\pi$ -длины и нильпотентной  $\pi$ -длины в случаях, когда силовские подгруппы  $\pi$ -факторов являются циклическими, метацyclicескими, либо бициклическими, легко получить, используя вышеизложенное доказательство.

Из леммы 6 следует, что

$$l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi),$$

где  $d(G_\pi)$  – производная длина  $\pi$ -холловой подгруппы  $G_\pi$  группы  $G$ . Из лемм 3 и 7 и проведенных выше рассуждений следует, что

– если силовские подгруппы  $\pi$ -факторов являются циклическими, то

$$l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi) \leq 1 \cdot 2 = 2;$$

– если силовские подгруппы  $\pi$ -факторов являются метацyclicескими (бициклическими), то

$$l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi) \leq 2 \cdot 5 = 10;$$

– если силовские подгруппы  $\pi$ -факторов являются бициклическими либо свободны от четвертых степеней, то

$$l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi) \leq 3 \cdot 6 = 18.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.
4. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – P. 573–581.
5. Грицук, Д. В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д. В. О конечных  $\pi$ -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1(15). – С. 61–66.
7. Монахов, В. С. О нильпотентной  $\pi$ -длине конечной  $\pi$ -разрешимой группы / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискрет. математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 145–152.
8. Monakhov, V. S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in algebra. – 2011. – № 39. – P. 3178–3186.
9. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3 (19). – С. 304–307.
10. Монахов, В. С. О нильпотентной  $\pi$ -длине конечных  $\pi$ -разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискр. математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.
11. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.09.2018

---

**Gritsuk D.V., Trofimuk A.A., Bondaruk T.V. The Invariants of A  $\pi$ -Soluble Group in which Sylow Subgroups of Factors Have Given Restrictions**

*We study  $\pi$ -soluble groups in which Sylow subgroups of factors have given restrictions. We obtain the estimates of the  $\pi$ -length, the nilpotent  $\pi$ -length, and the derived  $\pi$ -length for such groups. In particular, if a  $\pi$ -soluble group  $G$  has a normal series in which Sylow subgroups of  $\pi$ -factors are cyclic, then the  $\pi$ -length does not exceed 1, and the nilpotent  $\pi$ -length and the derived  $\pi$ -length do not exceed 2. If a  $\pi$ -soluble group  $G$  has a normal series in which Sylow subgroups of  $\pi$ -factors are bicyclic and  $2 \in \pi$ , then the  $\pi$ -length does not exceed 2, the nilpotent  $\pi$ -length does not exceed 4, and the derived  $\pi$ -length does not exceed 10.*

УДК 519.6 + 517.983.54

**О.В. Матысик<sup>1</sup>, Е.Н. Минзер<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант специальности «Веб-программирование и интернет-технологии»  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
e-mail: matysikoleg@mail.ru<sup>1</sup>**ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ЯВНЫМ ДВУХШАГОВЫМ МЕТОДОМ  
С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ**

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается явный итерационный метод. Исследована сходимость предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций. Для метода обосновано применение правила останова по малости невязки, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова. Решена численная модельная задача, и будет реализована визуализация результатов действий предложенного метода.

**1. Постановка задачи.**

В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается явный итерационный метод:

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения  $x$  уравнения (1) при точной правой части  $y$ , ищем его приближение  $x_{n,\delta}$  при приближенной правой части  $y_\delta$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . В этом случае метод (2) примет вид:

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению  $x$  уравнения (1) при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ .

**2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.**

Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного положительного самосопряженного оператора  $A$  и формулой (2), по индукции получим

$$x - x_n = \int_0^M \left[ \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^n + n\alpha(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right] dE_\lambda y,$$

где  $M = \|A\|$ ,  $E_\lambda$  – спектральная функция оператора  $A$ . Так как при  $0 < \alpha < 2/M$  имеем  $|1 - \alpha\lambda| < 1$ , то отсюда легко выводится [1–3] сходимость процесса (2) при  $n \rightarrow \infty$ .

Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций  $n$  в зависимости от уровня погрешности  $\delta$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Итерационный процесс (3) сходится при  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ , если выбирать число итераций  $n$  в зависимости от  $\delta$  так, чтобы  $n\delta \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [2; 3].

При этом легко показывается оценка  $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta$ .

Скорость сходимости приближений (3) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения  $x$  уравнения (1), т.е.  $x = A^s z, s > 0$ . Тогда  $y = A^{s+1}z$  и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha dE_\lambda z.$$

Для оценки нормы  $\|x - x_n\|$

найдем максимумы модулей подынтегральных функций  $f_1(\lambda) = \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1}$  и  $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha$ . Нетрудно показать, что при условии  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$  справедливо неравенство  $\|x - x_n\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\|$ . Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку  $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$  и априорный момент останова  $n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{1/(s+1)}$ . Существенно, что порядок оптимальной оценки есть  $O(\delta^{s/(s+1)})$ , и, как следует из [1; 2; 6], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра  $\alpha$ , но от него зависит  $n_{\text{опт}}$ . Поэтому для уменьшения  $n_{\text{опт}}$  и, значит, объема вычислительной работы, следует брать  $\alpha$  по возможности большим, удовлетворяющим условию  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$  и так, чтобы  $n_{\text{опт}}$  было целым.

Для метода (3) в статье [4] при условии  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$  исследована сходимость в энергетической норме ( $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ ) гильбертова пространства.

### 3. Правило останова по малости невязки.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения итерационный метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и определить априорно момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [5; 6]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и определим момент  $m$  останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \quad (4)$$

Предполагаем, что при начальном приближении  $x_{0,\delta}$  невязка достаточно велика, больше уровня останова  $\varepsilon$ , т.е.  $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ . Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Ниже метод итераций (3) с остановом (4) является сходящимся, если

если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$ . Рассмотрим семейство функций  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right]$ . Нетрудно показать, что для  $g_n(\lambda)$  выполняются условия

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \geq 1, M = \|A\|, 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 2, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \forall \lambda \in (0, M], 0 < \alpha < 2/M, \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq (s+2) \left( \frac{s}{\alpha e} \right)^s (n-1)^{-s}, \quad n \geq 1, 0 \leq s < \infty, 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}. \quad (8)$$

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ . Тогда справедливо

$$\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного самосопряженного оператора  $A$ , получим  $\|(E - Ag_n(A))w\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w \right\| \leq \left\| \int_0^M (1 - \alpha\lambda)^n dE_\lambda w \right\| + \left\| \int_0^M n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda w \right\|$ . Так как  $|1 - \alpha\lambda| < 1$  при условии  $0 < \alpha < 2/M$ , то каждый из интегралов по норме стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$  [7, с. 302], а, значит, и  $\|(E - Ag_n(A))w\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ . Тогда для  $\forall v \in \overline{R(A)}$  имеет место соотношение  $(n-1)^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$ .



Доказательство. Так как (8) верно, то выполняется  $(n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leq \leq (n-1)^s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq (s+2) \left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s = \gamma_s, n \geq 1$ . Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [8, с. 151], по которой сходимость  $B_n u \rightarrow Bu$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $\forall u \in H$  имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в  $H$  подмножестве и  $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$  ограничены независимой от  $n$  постоянной. У нас  $\|B_n\| = (n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leq \gamma_s$ , т.е.  $\|B_n\|$  совокупно ограничены. В качестве плотного в  $\overline{R(A)}$  подмножества возьмем множество  $R(A)$  и положим  $s_1 = s + 1$ . Тогда для каждого  $v = Aw \in R(A)$  получим

$$\begin{aligned} (n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))v\| &= (n-1)^s \|A^{s+1}(E - Ag_n(A))w\| \leq (n-1)^s \times \\ &\times \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{s+1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \|w\| \leq (n-1)^s (s+3) \left(\frac{s+1}{\alpha e}\right)^{s+1} (n-1)^{-(s+1)} \|w\| = \\ &= (n-1)^{-1} \gamma_{s_1} \|w\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как  $s_1 < \infty$ . Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ . Если для некоторых  $n_k < \bar{n} = const$  и  $v_0 \in \overline{R(A)}$  при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ , то  $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ .

Доказательство. В силу (6) справедливо  $\|v_k\| = \|(E - Ag_{n_k}(A))v_0\| \leq 2\|v_0\|, k \in N$ . Следовательно, последовательность  $v_k$  ограничена. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть  $v_k \rightharpoonup v (k \in N' \subseteq N)$ , тогда  $Av_k \rightharpoonup Av (k \in N')$ . Но по условию имеем  $w_k = Av_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , следовательно,  $Av = 0$ . Поскольку нуль не является собственным значением оператора  $A$ , то  $v = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 &= (v_k, (E - Ag_{n_k}(A))v_0) = (v_k, v_0) - (v_k, Ag_{n_k}(A)v_0) = \\ &= (v_k, v_0) - (Av_k, g_{n_k}(A)v_0) = (v_k, v_0) - (w_k, g_{n_k}(A)v_0) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как  $w_k \rightarrow 0, v = 0$  и по условию (5)  $\|g_{n_k}(A)\| \leq \frac{5}{4}(n_k - 1)\alpha < \frac{5}{4}(\bar{n} - 1)\alpha$ . Следовательно,  $\|v_k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности  $v_k$  стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность  $v_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

**Теорема 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$  и пусть момент останова  $t = t(\delta)$  в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда  $x_{t(\delta), \delta} \rightarrow x$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Доказательство. По индукции нетрудно показать, что  $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y_\delta$ . Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = (n-1)\|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 2. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда  $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$ ,  $b > 1$ , и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+2)\delta. \quad (15)$$

Для любых  $n < m$  справедливы неравенства  $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ . Поэтому  $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-2)\delta$ . Итак, для любых  $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-2)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при  $n = m-1$  получаем  $\frac{\sigma_{m-1}}{m-2} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-2)\delta$ , или, что то же,  $(m-2)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-2} \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , (так как из (12)  $\sigma_m \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ ). Если при этом  $m \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то, используя равенство (9), получим  $\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta$ ,  $m \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , так как из (11) вытекает  $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Если же для некоторых  $\delta_n$  последовательность  $m(\delta_n)$  окажется ограниченной, то и в этом случае  $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Действительно, из (15) имеем  $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+2)\delta_n$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Следовательно,  $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ ,

поэтому по лемме 3 получаем, что тогда  $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Отсюда  $\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \frac{5}{4}\alpha(m(\delta_n) - 1)\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . Тогда

$$\text{справедливы оценки } m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[ \frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)},$$

$$\|x_{m(\delta), \delta} - x\| \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[ \frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (17)$$

*Доказательство.* Справедливо записать:

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) dE \lambda z \right\| \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (16), получим

$$(b-2)\delta \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|, \text{ откуда имеем } m \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[ \frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \|A^s (E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{s+1} (E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (15).$$

Теперь, поскольку соотношение (9) справедливо для любых  $n$ , то

$$\|x_{m, \delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[ \frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta.$$

Теорема 3 доказана.

**Замечание 1.** Порядок оценки (17) есть  $O(\delta^{s/(s+1)})$ , и он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями  $x = A^s z$ ,  $s > 0$  [6].

**Замечание 2.** Хотя формулировка теоремы 3 дается с указаниями степени истокорпредставимости  $s$  и истокорпредставляющего элемента  $z$ , на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 3 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций  $m$ , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

#### 4. Численный пример.

Рассмотрим в пространстве  $L_2(0,1)$  задачу в виде уравнения Фредгольма I рода

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,1] \quad \text{с симметричным положительным ядром}$$

$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}$ . В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию  $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 1-s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$

С использованием метода правых прямоугольников при  $m = 32$ ,  $h = \frac{1}{m}$  была вычислена в точках  $t_i = ih$ ,  $i = \overline{1, m}$  правая часть  $y(t)$  рассматриваемого уравнения. Данная задача относится к классу обратных задач теории потенциала, и она некорректна. Обычно на практике мы не знаем точной функции  $y(t)$ , а вместо нее известны значения приближенной функции  $\tilde{y}(t)$  в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью  $\delta$ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения  $\tilde{y}_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , полученные следующим образом:  $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$ , квадратные скобки означают целую часть числа и  $k = 3$ .

Будем решать задачу методом (3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n)} = 2x_i^{(n-1)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-1)} - x_i^{(n-2)} + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h \tilde{y}_j + 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-2)} - \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h \left( \sum_{k=1}^m K(t_j, s_k) h x_k^{(n-2)} \right), \quad x_i^{(0)} = x_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При счете используется  $\alpha = 0,8$ . Для решения задачи сведений об истокообразной представимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по малости невязки (3), выбрав  $\varepsilon = 1,5\delta$ . Итак, при  $\delta = 0,001$  для достижения оптимальной точности при счете явным двухшаговым итерационным процессом потребовалось 14 итераций.

В конечном итоге будет создан и протестирован веб-сервис для визуализации результатов действий итерационных процедур (метода (3) и явного метода Ландвебера [5; 6; 9; 10]) с определением оптимальных значений норм решения, невязок, погрешности приближений, а также числа итераций для достижения необходимой точности при изменении значения уровня погрешности входных данных при решении некорректных задач первого рода. Веб-приложение будет предоставлять возможность решения линейных некорректных задач с выбором различных значений  $K(t, s)$ ,  $x(s)$ ,  $y(t)$  и визуализации приближенного решения в виде графика.

Веб-сервис будет написан на стеке технологий JAVAEE. Для визуализации страницы сервиса используются JSP страницы. Расширение функциональных возможностей сервера реализуется с помощью JAVA SERVLET. Веб-приложение должно разворачиваться в контейнере сервлетов APACHE TOMCAT 8.5 и представлять собой WAR-архив.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
3. Минзер, Е. И. Итерационная регуляризация некорректных задач при помощи двухшагового метода явного типа / Е. И. Минзер // XIX Респ. науч.-практ. конф. молодых ученых, Брест, 12 мая 2017 г. : сб. материалов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2017. – С. 82–83.
4. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в явной двухшаговой итерационной схеме решения некорректных задач / О. В. Матысик, Е. И. Минзер // Инновац. наука. – 2017. – № 3. – С. 23–25.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
8. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
9. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
10. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2018

#### ***Matysik O.V., Minzer E.N. The Iterative Regularization of Non-correct Equations by an Explicit Two-step Method with the Rule of Stop on the Smallness of Non-band***

*In the Hilbert space for solving linear operator equations with a positive bounded and self-adjoint operator, an explicit iterative method is proposed. The convergence of the proposed method is investigated in the case of an a priori choice of the number of iterations. For the method, the application of the stopping rule due to the smallness of the discrepancy is justified, which makes the iteration method under consideration effective even when there is no information about the source-specific representability of the exact solution. In the initial norm of the Hilbert space, the convergence of the iterative method is proved, the estimate of the error of the method and the estimate for the stopping time are obtained. The numerical model problem has been solved and visualization of the results of the actions of the proposed method will be implemented.*

УДК 513.82

**А.А. Юдов<sup>1</sup>, М.А. Кононюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ  
ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ  
ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуется подгруппа Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, классифицируются редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой  $H$ . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида  $H/G_i$ , где  $G_i$  – связные подгруппы Ли группы Ли  $H$  вращений пространства  $R_5$ . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства  $H/G_i$  рассматриваются соответствующие алгебры Ли  $\overline{H}$  и  $\overline{G_i}$ , затем находятся все  $n$ -мерные подпространства алгебры Ли  $\overline{H}$ , инвариантные относительно  $\text{ad}\overline{G_i}$ . Среди таких пространств находятся дополнительные к  $\overline{G_i}$ . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства  $H/G_i$ . Поскольку пространство  $G/H$  редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства  $G/G_i$ . При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство  $G/G_i$  может быть получено таким образом.

**Определение 1.** Однородное пространство  $H/G_i$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \quad (2)$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $\text{ad}\overline{G_i}$ , где  $\text{ad}\overline{G_i}$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\overline{G_i}$ .

**Теорема 1.** Однородное пространство  $G/H$  является редуктивным.

Доказательство. Алгебра Ли  $\overline{G}$  группы Ли  $G$  имеет базис:  $\{i_1 \dots i_{15}\}$ , а алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  имеет базис:  $\{i_6 \dots i_{15}\}$ . Выбрав в качестве подпространства  $m$  подпространство с базисом  $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ , получим представление  $\overline{G}$  в виде прямой суммы:  $\overline{G} = \overline{H} + m$ . Причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad \overline{H}$ , что и требовалось доказать.  $i_1 \dots i_{15}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $F$  – подгруппа Ли группы Ли  $H$ . Однородное пространство  $G/F$  редуктивно тогда и только тогда, когда редуктивно однородное пространство  $H/F$ .

Доказательство. Пусть однородное пространство  $G/F$  редуктивно и  $\overline{G} = \overline{F} + n$  – соответствующее разложение. Рассмотрим подпространство  $l = n \cap \overline{H}$ , при этом  $\overline{H} = \overline{F} + l$  – прямая сумма. Поскольку  $\overline{H} \subset \overline{F} + n \cap \overline{H} = \overline{F} + l$ . И обратно,  $\overline{F} + l \subset \overline{H}$ , поскольку сумма  $\overline{F} + n$  – прямая.

Инвариантность  $l$  относительно  $ad \overline{F}$  следует из того, что  $ad \overline{F}(l) \subset ad \overline{F}(\overline{H}) \subset \overline{H}$ . А также из того, что  $ad \overline{F}(l) \subset ad \overline{F}(n) \subset n$ . Отсюда следует:  $ad \overline{F}(l) \subset l$ .

Обратно. Пусть однородное пространство  $H/F$  редуктивно, причем  $\overline{H}$  равно  $\overline{F} + l$  – соответствующее редуктивное разложение.

Рассмотрим  $n = l + m$ , тогда  $\overline{G} = \overline{F} + n$  – сумма прямая. При этом  $ad \overline{F}(n) = ad \overline{F}(l) + ad \overline{F}(m) \subset l + m = n$ . Поскольку  $ad \overline{F}(l) \subset l$  в силу редуктивности однородного пространства  $H/F$ , а  $ad \overline{F}(m) \subset ad \overline{H}(m) \subset m$  в силу редуктивности однородного пространства  $G/H$ , что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 получаем следующее следствие.

**Следствие 1.** Классификация однородных пространств  $G/G_i$ ,  $G_i \subset H$  равносильна классификации однородных пространств  $H/G_i$ .

В работе производится классификация однородных пространств  $H/G_i$ .

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ (опишем его на примере нахождения трехмерного векторного подпространства  $m$ ). Пусть  $a_1, a_2, a_3$  – базис алгебры Ли  $\overline{G}_i$  группы Ли  $G_i$ , принадлежащей группе Ли  $H$ . Рассмотрим трехмерное векторное подпространство  $m$  алгебры Ли  $\overline{H}$ , образованное векторами  $b_1, b_2, b_3$ , т.е.  $m = \{b_1, b_2, b_3\}$ . Для этого подпространства  $m$  потребуем выполнимость условия инвариантности относительно  $ad a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Т.е. выполнимость условий:

$$b_j = b_{j6} i_6 + \dots + b_{j15} i_{15}$$

$$[a_i, b_j] = a_{j1} b_1 + a_{j2} b_2 + a_{j3} b_3, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Систему (3) будем называть системой инвариантности пространства  $m$  или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису  $i_6 \dots i_{15}$  алгебры Ли  $\overline{H}$ , получим систему инвариантности в виде системы алгебраических урав-

нений. Пусть, например,  $b_j = b_{j_6}i_6 + \dots + b_{j_{15}}i_{15}$ . Элементарными преобразованиями можно от базиса  $\{b_1, b_2, b_3\}$  перейти к базису  $\{b'_1, b'_2, b'_3\}$  с более простыми коэффициентами  $b_{jk}$ . Для этого придется рассмотреть 210 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены трехмерные пространства  $m_1 \dots m_p$ , инвариантные относительно  $\text{ad } \overline{G}_i$ . Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (2). Такие пространства  $m_i$  и будут искомыми редуцированными дополнениями.

Рассмотрим однородное пространство  $H/G_7$ ,  $G_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$ ,  $a = \{i_6\}$ ,  $\overline{H} = \{i_6 \dots i_{15}\}$ .

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_6 + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_6 + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_6 + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_6 + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_6 + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{12} + g i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_6] + \mu[a, i_{13}] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10}, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_6] + t[a, i_{13}] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11}, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_6] + \rho[a, i_{13}] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_6] + \varphi[a, i_{13}] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_6] + d[a, i_{13}] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = i_8, \\ [a, X_6] &= [a, i_{12}] + g[a, i_6] + h[a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = i_9. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{12} + i_6(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c + \varepsilon_1 g) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (6)$$



Сравнивая формулу (6) с первой формулой (5), получим:

$$\delta_1 = -1, \varepsilon = 0, \varphi = 0, \psi = 0, b = 0.$$

Сравнивая формулу (6) со второй формулой (5), получим:

$$\omega_2 = -1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с третьей формулой (5), получим:

$$\varepsilon_3 = -1, g = 0, h = 0, k = 0, m = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с четвертой формулой (5), получим:

$$\alpha_4 = 1, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с пятой формулой (5), получим:

$$\beta_5 = 1, s = 0, t = 0, p = 0, q = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с шестой формулой (5), получим:

$$\gamma_6 = 1, r = 0, q = 0, \delta = 0, \omega = 0.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантно следующее шестимерное подпространство  $\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$ .

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] + \mu [a, i_{13}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{12}] + t [a, i_{13}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{12}] + \rho [a, i_{13}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{12}] + \varphi [a, i_{13}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_{12}] + d [a, i_{13}] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_6 + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая формулу (9) с первой формулой (8), получим:

$$\delta_1 = -1, \sigma = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (9) со второй формулой (8), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (9) с третьей формулой (8), получим:

$$\lambda \alpha_1 + s\beta_1 + r\sigma_1 + \xi\delta_1 + c\omega_1 = -1, \sigma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{12}] + t [a, i_6] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{12}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{12}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{13} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая формулу (12) с первой формулой (11), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (12) со второй формулой (11), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (12) с третьей формулой (11), получим:

$$\lambda \alpha_3 + s\beta_3 + r\gamma_3 + \xi\delta_3 + c\omega_3 = -1, \gamma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & \psi & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{13} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{12}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{13}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{12}] + t[a, i_6] + p[a, i_{13}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{12}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{13}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{12}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{13}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{13}] + f[a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{14} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая формулу (15) с первой формулой (14), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (15) со второй формулой (14), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (15) с третьей формулой (14), получим:

$$\lambda \alpha_3 + s\beta_3 + r\gamma_3 + \xi\delta_3 + c\omega_3 = -1, \gamma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & \psi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{14}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{13} + q i_{14}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{14}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{14}, \\ X_6 &= i_{15}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{13}] + \sigma [a, i_{14}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{12}] + t [a, i_6] + p [a, i_{13}] + q [a, i_{14}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{12}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{13}] + \omega [a, i_{14}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{12}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{13}] + b [a, i_{14}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{13}] + f [a, i_{14}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{15} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{14}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f). \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнивая формулу (18) с первой формулой (17), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (18) со второй формулой (17), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_{13}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_{13}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_{13}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_{13}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_{13}] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_6 + i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{21}$$

Сравнивая формулу (21) с первой формулой (20), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (21) со второй формулой (20), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{13} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{14} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (24)$$

Сравнивая формулу (24) с первой формулой (23), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (24) со второй формулой (23), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантных подпространств нет.

$$8^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{25}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{13}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{13}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{13}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{13}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{13}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{14} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{27}$$

Сравнивая формулу (27) с первой формулой (26), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (27) со второй формулой (26), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантных подпространств нет.

$$9^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{14}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{14}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{14}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{14}, \\ X_6 &= i_{15}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{13}] + \sigma [a, i_{14}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{13}] + q [a, i_{14}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{13}] + \omega [a, i_{14}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{13}] + b [a, i_{14}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{13}] + f [a, i_{14}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{15} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{14} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая формулу (30) с первой формулой (29), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (30) со второй формулой (29), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.



$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & t & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & \rho & 0 & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \varphi & 0 & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{12} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{12} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{12} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{12} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{31}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_{12}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8 + \mu i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_{12}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8 + t i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_{12}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8 + \rho i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_{12}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8 + \varphi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = 0, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_6 + \varepsilon_1 i_{13} + \\ &+ i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_{12}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая формулу (33) с первой формулой (32), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, \gamma_1 = \mu, -\xi + \lambda s + \mu r = 0, -\varphi + \lambda t + \mu \rho = 0, -\psi + \lambda p + \mu \delta = 0, -b + \lambda q + \mu \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (33) со второй формулой (32), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s, \gamma_2 = t, \Rightarrow s^2 + rt = -1.$$

Инвариантных подпространств относительно оператора  $i_6$  нет.

Вычисляя редуктивные дополнения подалгебры  $\{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$ , получаем теорему.

**Теорема 3.** Относительно оператора  $i_6$  инвариантны следующие подпространства:

$$\begin{aligned} &\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \\ &\{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}, \\ &\{i_7 + \lambda i_9, i_8 - s i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \\ & \{i_8 + \nu i_6, i_9 + p i_6, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7, i_9, i_{10}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_9, i_8, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10} + \lambda i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9 + i_{10}, i_{11}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора  $i_7$ , инвариантны следующие подпространства:

$$\{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$$

**Теорема 5.** Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора  $i_{10}$ , инвариантны следующие подпространства:

$$\begin{aligned} & \{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}, \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \{i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** Относительно оператора  $i_{15}$  инвариантны все подпространства из теоремы 3.3, кроме следующих подпространств:

$$\begin{aligned} & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 7.** Однородное пространство  $H / G_7$  является редуктивным, редуктивным дополнением для этого пространства является подпространство:

$$\{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1. – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2018

**Yudov A.A., Kononyuk M.A. Classification and Study of Reductive Homogeneous Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space**

*The aim of the study is to classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of a five-dimensional Euclidean space.*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *К.М. Мароз, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 05.12.2018. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,56. Ул.-выд. арк. 7,00.

Тыраж 100 экз. Заказ № 475.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.