

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.Б. Антаневіч

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плеццохоў

А.Ф. Равінскі

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2018

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 (у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь ад 16.01.2018 № 16) часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

Сендзер Ганна. «Весніку Брэсцкага ўніверсітэта» – 20 гадоў.....5

Сендер Н.Н. На пути к новым рубежам.....6

ФІЗІКА

ПАМЯТИ АНТОНА ФЕДОРОВИЧА РЕВИНСКОГО7

Ворсин Н.Н.

Четырехприемниковый СВЧ радиометр предельной чувствительности.....10

Ліопо В.А., Лявшук І.А., Овчинников Е.В., Пушкарев А.В., Секержицкий С.С.

Факторы, влияющие на размеры узлов обратной решетки.....23

Плетюхов В.А., Шелест А.И.

О спинорной формулировке рву для микрообъекта со спином $\frac{1}{2}$ и спектром масс35

Савенко В.С., Троицкий О.А., Гуненко А.В.

Физические аспекты электропластической деформации металлов.....40

Сендер Н.Н.

Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе приближенных соотношений48

МАТЭМАТЫКА

Грицук Д.В., Трофимук А.А., Бондарук Т.В.

Производная p -длина p -разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовой p -подгруппы ограничен59

Грицук Е.В., Лукашик Н.А.

О локальных свойствах решений аналога второго уравнения Пенлеве шестого порядка66

Грицук Е.В., Семенцов И.И.

О локальных свойствах решений аналога первого уравнения Пенлеве десятого порядка74

Матысик О.В., Жуковец М.Н.

Правило останова в процессе вычислений для метода итераций неявного типа решения линейных операторных уравнений.....82

Мельникова И.Н., Швайко В.В.

О существовании решений с бесконечными предельными значениями компонент у системы трех дифференциальных уравнений88

Юдов А.А., Арабчик Е.В., Кононюк М.А., Сирисько Е.А.

Инвариантные характеристики подгрупп Ли группы Ли движений пятимерного пространства Лоренца.....95



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
A.M. Sender
Deputy Editor-in-chief:
S.A. Marzan

International Board:
V.A. Glavan (Moldova)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.B. Antanevich
M.M. Sender
(managing editor)
M.I. Lyavchuk
I.P. Martynov
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.M. Rad'kov
Y.S. Sekyarzhytski
M.M. Trush
A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2018

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94
(as revised by the order of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus from January 16, 2018 № 16)
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

Sender Hanna. «Vesnik of Brest University» is 20 Years.....5

Sender N.N. On the Way to New Achievements6

PHYSICS

IN MEMORY ANTON F. REVINSKY7

Vorsin N.N.

Four-Received Super-High Frequency Radiometer Limiting Sensitivity10

Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnika Y.V., Pushkarev A.V., Sekerzhitsky S.S.

Factors Influencing the Size of the Reciprocal Lattice23

Pletyukhov V.A., Shelest A.I.

On the Spinor Formulation RWE for a Microobject with Spin $\frac{1}{2}$ and Spectrum of Masses.....35

Savenko V.S., Troitsky O.A., Gunenko A.V.

Physical Aspects of Electroplastic Deformation of Metals40

Sender N.N.

Experimental Determination of Optical Constant Absorbing Crystals Based
on Approximate of Relationships.....48

MATHEMATICS

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A., Bondaruk T.V.

The Derived p -Length of a p -Solvable Group with Limited Normal Rank of Sylow p -Subgroup.....59

Gricuk E.V., Lukashik N.A.

On Local Properties of Solutions of the Analogue of the Second Painlevé Equation of Sixth Order66

Gricuk E.V., Sementsov I.I.

On Local Properties of Solutions of the Analogue of the First Painlevé Equation of the Tenth Order.....74

Matysik O.V., Zhukovec S.V.

The Rule of Stopping in the Process of Calculations for the Method of Iterations
of the Implicit Type of Solution of Linear Operator Equations82

Melnikova I.N., Shvaiko V.V.

On The Existence of Solutions with Infinite Limiting Values of the Components
of the System of Three Differential Equations.....88

Yudov A.A., Arabchik E.V., Kononyuk M.A., Sirisko E.A.

Invariant Characteristics of Lie Subgroup of Lie Group of Motions of the Five-Dimensional Lorentz Space.....95

«ВЕСНІКУ БРЭСЦКАГА ЁНІВЕРСІТЭТА» – 20 ГАДОЎ

Шаноўныя калегі, паважаныя аўтары і чытачы!

Сёлета навукова-тэарэтычны часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» адзначае сваё 20-годдзе. Часопіс быў створаны ў снежні 1997 г. згодна з рашэннем Рады ўніверсітэта, а першы нумар «Весніка Брэсцкага ўніверсітэта» выйшаў з друку ў маі 1998 г. У прывітальным слове з нагоды нараджэння новага навуковага выдання Васіль Аляксеевіч Сцепановіч, рэктар Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта, адзначаў, што заснаванне навуковага часопіса – «гэта яшчэ адзін крок у станаўленні нашай навучальнай установы ў якасці ўніверсітэта... сведчанне прызнання тых навукова-педагагічных школ, якія склаліся... і тых, якія знаходзяцца ў станаўленні... сведчанне сталасці навукова-педагагічных работнікаў... і новая магчымасць для маладых даследчыкаў... давесці вынікі сваіх навуковых пошукаў да патрабавальнага чытача». І сёння мы бачым, што тыя ідэі, тыя спадзяванні цалкам спраўдзіліся: наш часопіс займае годнае і пачэснае месца ў шэрагу навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь.

Развіваўся наш універсітэт – сталаў наш часопіс. У першыя чатыры гады свайго існавання (1998–2002) «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» – гэта выданне фармату В5 аб'ёмам да 100 старонак і з перыядычнасцю выхаду адзін раз на два месяцы. На старонках часопіса друкаваліся артыкулы розных навуковых накірункаў. З 2003 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» быў падзелены на дзве серыі – «Серыя гуманітарных і грамадскіх навук» і «Серыя прыродазнаўчых навук». У 2005 г. з «Серыі гуманітарных і грамадскіх навук» была вылучана і пачала асобна выдавацца «Серыя філалагічных навук». У 2009 г. было прынята рашэнне аб рэарганізацыі часопіса: змены былі абумоўлены як пашырэннем навуковай працы ва ўніверсітэце, так і патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да часопісаў, якія прэтэндуюць на ўключэнне ў Пералік навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў. Такім чынам, была створана рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», і з сакавіка 2010 г. часопіс выдаецца ў пяці серыях: Серыя 1. Філасофія. Паліталогія. Сацыялогія; Серыя 2. Гісторыя. Эканоміка. Права; Серыя 3. Філалогія. Педагогіка. Псіхалогія; Серыя 4. Фізіка. Матэматыка; Серыя 5. Хімія. Біялогія. Навукі аб зямлі.

За два дзесяцігоддзі на старонках «Весніка Брэсцкага ўніверсітэта» было апублікавана каля 2 850 матэрыялаў (навуковых артыкулаў, паведамленняў, рэцэнзій) (больш за 450 з іх на беларускай мове). Сярод нашых аўтараў не толькі айчынныя навукоўцы з розных навучальных і акадэмічных устаноў Беларусі, але і вучоныя з Азербайджана, Арменіі, Германіі, ЗША, Казахстана, Кітая, Літвы, Сірыі, Славакіі, Паўднёвай Карэі, Польшчы, Расіі, Украіны.

Часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па філасофскіх, палітычных, сацыялагічных, гістарычных, эканамічных, юрыдычных, філалагічных, педагагічных, псіхалагічных, фізіка-матэматычных (фізіка), біялагічных, геаграфічных і геалага-мінералагічных навук. Таму запрашаю да супрацоўніцтва даследчыкаў як Берасцейшчыны, так і ўсёй Беларусі і нашых замежных партнёраў.

Спадзяюся, што навуковыя публікацыі нашага часопіса будуць заставацца на высокім узроўні, а тэматыка іх будзе актуальнай па ўсіх галінах даследаванняў. У развіцці часопіса ёсць новыя арыенціры і перспектывы. Упэўнена, што кожны: і даследчык-тэарэтык, і практык, і аспірант, і студэнт – знойдзе на старонках часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» неабходныя яму матэрыялы, разважанні, ідэі!

Віншую сённяшніх і будучых аўтараў і чытачоў з дваццацігоддзем нашага выдання!



Ганна Сендзер,
галоўны рэдактар,
рэктар Брэсцкага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

НА ПУТИ К НОВЫМ РУБЕЖАМ УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Неумолимо бежит время, и вот прошло уже двадцать лет с тех пор, как в Республике Беларусь появился новый научно-теоретический журнал – «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта»! Двадцать лет научному изданию – знаковое событие, своеобразный рубеж. Наш журнал преодолел период становления и перешел на уровень стабильного существования. За эти два десятилетия изменилось многое: и структура журнала, и его дизайн, и состав редакционной коллегии. Но неизменным осталось стремление закрепиться в белорусском научном пространстве, а также дать возможность и начинающим исследователям, и опытным ученым рассказать о результатах своих научных поисков.

Основанный как универсальное научное издание, в первые пять лет своего существования (1998–2002) журнал «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» не был разделен на серии, а выходил в формате специализированных номеров, посвященных поочередно гуманитарным и естественным наукам. С 2003 по 2010 г. научные статьи и материалы по основным направлениям естествознания: математике, физике, химии, биологии, наукам о земле – публиковались в журнале «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук». Журнал «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» как отдельное профильно-научное издание берет свое начало с 2010 г., когда в результате реформирования «Серыі прыродазнаўчых навук» были образованы две серии – «Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» и «Серыя 5. Хімія. Біялогія. Навукі аб зямлі». С 2007 г. журнал «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования диссертационных исследований по физико-математическим наукам (физика).

У журнала «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» вполне сложившийся круг авторов – ответственных и интересных ученых из нашего университета, а также исследователей из других учебных и научных учреждений Беларуси и зарубежья. Особо хочется отметить, что наше издание публикует статьи авторов, с которыми готов сотрудничать научный журнал самого высокого уровня. Так, в числе наших постоянных авторов доктора физико-математических наук, профессора Владимир Анестиевич Плетюхов, Валерий Александрович Лиопо, Иван Платонович Мартынов, Виктор Михайлович Редьков, Михаил Иванович Левчук, Василий Михайлович Волков, Валерий Григорьевич Самойленко. За два десятилетия было опубликовано порядка 430 статей и материалов по физике (более 250) и математике (около 180).

Следует отметить плодотворные научные контакты журнала с Институтом физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, Белорусским государственным университетом, Гродненским государственным университетом имени Янки Купалы, сотрудники которых активно освещают на страницах журнала результаты своих исследований, актуальные вопросы физики и математики, пути их решения. Журнал также активно сотрудничает с учеными ведущих вузов ближнего зарубежья: Киевским национальным университетом имени Тараса Шевченко, Восточноевропейским национальным университетом имени Леси Украинки, Каменец-Подольским национальным университетом имени Ивана Огиенко.

Впереди у нас большая работа, одна из важных целей которой – включение научного направления «Математика» в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований. Редакционная коллегия будет прилагать все усилия для повышения научного уровня журнала, актуальности и востребованности публикуемых в нем материалов.

*Н.Н. Сендер, ответственный редактор журнала
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»,
кандидат физико-математических наук, доцент*

ФІЗІКА



**ПАМ'ЯТИ
АНТОНА ФЕДОРОВИЧА
РЕВИНСКОГО
13.03.1952 – 17.01.2018**

17 января 2018 г. трагически оборвалась жизнь профессора кафедры общей и теоретической физики Учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», доктора физико-математических наук, профессора Ревинского Антона Федоровича.

Антон Федорович родился 13 марта 1952 г. в деревне Крагли Ляховичского района Брестской области. В 1972 г. окончил физико-математический факультет Минского государственного педагогического института имени А.М. Горького по специальности «Физика». В 1976 г. А.Ф. Ревинский окончил аспирантуру Минского пединститута по специальности «Физика твердого тела».

С января 1977 г. работал на кафедре общей и теоретической физики Брестского государственного педагогического института имени А.С. Пушкина. В 1983 г. в Московском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина защитил подготовленную под руководством академика Н.Н. Сироты кандидатскую диссертацию «Квантово-механический расчет зонной структуры, магнитных, упругих и термодинамических свойств алмаза и кубического нитрида бора по данным комптоновского рассеяния рентгеновских лучей» по специальности «Физика твердого тела». В 1986 г. ему было присвоено ученое звание доцента.

В 1991 г. Антон Федорович был избран заведующим кафедрой физики Брестского государственного педагогического института имени А.С. Пушкина. После преобразования в 1995 г. института в университет продолжал заведовать кафедрой физики, а в 1997–2012 гг. – кафедрой общей физики. В 1996 г. в Москве в Институте общей и неорганической химии имени Н.С. Курнакова РАН Антон Федорович защитил докторскую диссертацию «Электронная структура, термодинамические свойства и фазовые переходы Мота полупроводниковых кристаллов» по специальности «Физическая химия». В 1999 г. ему было присвоено ученое звание профессора.

Антон Федорович активно занимался научными исследованиями, связанными с квантовой теорией конденсированного состояния, в частности с расчетами электронных энергетических спектров высокотемпературных сверхпроводников и мультиферроиков. Особое место в кругу его научных интересов занимали вопросы динамики кристаллической решетки и теории фазовых переходов. Умение выбрать перспективное направление и акцентировать внимание на наиболее важных и основополагающих моментах – отражение глубины и широты научных взглядов, знаний и интересов Антона Федоровича Ревинского. Диэлектрическая спектроскопия ионных кристаллов, исследование корреляций структуры и магнитных свойств твердых тел, изучение мультиферроиков, анализ влияния размерных факторов на электромагнетизм наноструктур – лишь часть наиболее известных научных достижений, нашедших свое отражение

как в работах самого Антона Федоровича, так и в материалах, посвященных описанию и оценке его научной деятельности.

Экспериментальные данные, их теоретическое описание, интерпретация и научные идеи Антона Федоровича актуальны в связи с получением и исследованием новых многофункциональных материалов на основе мультиферроиков – элементной базы устройств электроники и спинтроники – и отражены в многочисленных научных публикациях. Работы Антона Федоровича отличает четкое и последовательное изложение материала, в основу которого положен профессиональный подход к исследованиям, вдумчивое отношение к экспериментальным данным и результатам теоретических расчетов и оценок. Критическое отношение к собственным результатам, многократная проверка полученных данных сочетались с пристальным вниманием к результатам работы коллег и учеников. В то же время доброжелательность, легкая ирония, с которой он относился к недочетам и промахам учеников, умение в простой форме рассказать о сложных процессах способствовали повышению интереса молодых исследователей к изучаемым явлениям.

Антон Федорович – автор многочисленных научных работ: из-под его пера вышли и были опубликованы более 100 статей в научных журналах и сборниках (в том числе зарубежных). Он неоднократно принимал участие в работе международных и республиканских конференций (и как докладчик, и как член оргкомитетов). Антон Федорович – автор и соавтор двух монографий [1; 2], он руководил выполнением научных тем по заданиям государственных программ фундаментальных и научных исследований, по грантам Министерства образования Республики Беларусь [3–10]. В Брестском государственном университете им была создана и плодотворно работала научно-педагогическая школа по физике твердого тела. Антон Федорович пользовался заслуженным авторитетом в научном мире в Республике Беларусь и за рубежом.

Работая на протяжении многих лет в педагогическом институте, потом в университете, Антон Федорович уделял много внимания организации и совершенствованию образовательного процесса, разработке и внедрению современных форм и методов проведения учебных занятий, организации научной работы студентов и магистрантов. Умение выслушать собеседника, неприятие никаких форм давления, равноправный диалог с учетом взаимных интересов, уважительное и терпимое отношение к другой точке зрения – вот редкие в наше время качества, которые позволяли Антону Федоровичу строить общение и достигать взаимопонимания с коллегами и студентами. Преподавание им курсов общей физики и дисциплин специализации по физике твердого тела всегда отличалось четкостью и доступностью изложения учебного материала, занятия были насыщены как необходимыми научными сведениями, так и наглядными примерами. Он умел увлечь учеников, студентов и магистрантов, физикой конденсированного состояния и был одним из лучших лекторов физико-математического факультета. Выпускники университета, прошедшие за время обучения научную школу А.Ф. Ревинского, практически ежегодно поступали в аспирантуру научно-исследовательских институтов Национальной академии наук Беларуси.

Антон Федорович поддерживал тесные контакты с учреждениями среднего образования, участвовал в организации и проведении олимпиад для школьников по физике, был соавтором пособия по решению олимпиадных задач [11; 12], два издания которого рекомендованы Научно-методическим центром учебной книги и средств обучения Министерства образования Республики Беларусь в качестве пособий для учителей общеобразовательных школ с углубленным изучением физики и для студентов специальности «Физика» высших учебных заведений.

Трудовые заслуги А.Ф. Ревинского были отмечены грамотами Министерства образования Республики Беларусь и грамотами университета.

Антон Федорович отличался доброжелательностью к студентам и коллегам, отзывчивостью, скромностью, добросовестным отношением к работе. Он пользовался заслуженным уважением студентов, преподавателей и сотрудников университета.

Светлая память об Антоне Федоровиче Ревинском навсегда сохранится в сердцах друзей, коллег, учеников.

СПИСОК НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ РАБОТ А.Ф. РЕВИНСКОГО

1. Ревинский, А. Ф. Квантовая теория динамики кристаллической решетки / А. Ф. Ревинский. – Брест : Изд-во БрГУ, 1998. – 215 с.
2. Ревинский, А. Ф. Динамические и магнитные свойства мультиферроиков : монография / А. Ф. Ревинский, И. И. Макоед ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2012. – 200 с.
3. Использование методов квантовой физики для расчета физических свойств многочастичных систем : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 1997. – 41 с. – № ГР 19963030.
4. Квантово-механический расчет спектральной функции электрон-фононного взаимодействия и температуры сверхпроводящего перехода перовскитоподобных сверхпроводников : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 1997. – 27 с. – № ГР 19971532.
5. Квантово-механический расчет электронной структуры и фононных спектров перовскитоподобных сверхпроводников : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 1998. – 16 с. – № ГР 1998985.
6. Механизм фазовых переходов Мотта в полупроводниковых кристаллах : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 2001. – 45 с. – № ГР 1999728.
7. Механизм сегнетоэлектрической неустойчивости перовскитоподобных кристаллов : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 2005. – 106 с. – № ГР 2001717.
8. Получение, магнитные и электрические свойства высокотемпературных сегнетомагнетиков : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 2010. – 101 с. – № ГР 20061180.
9. Получение и физические свойства тонкопленочных мультиферроиков на основе феррита висмута : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 2013. – 88 с. – № ГР 20111730.
10. Технология получения и физические характеристики тонкопленочных мультиферроиков на основе ферритов тербия и висмута : отчет о НИР (заключ.) / Брест. гос. ун-т ; рук. темы А. Ф. Ревинский. – Брест, 2015. – 74 с. – № ГР 20140205.
11. Плетюхов, В. А. Сборник олимпиадных задач по физике / В. А. Плетюхов, А. Ф. Ревинский, В. С. Секержицкий. – Брест : БрГУ, 1995. – 122 с.
12. Плетюхов, В. А. Сборник олимпиадных задач по физике / В. А. Плетюхов, А. Ф. Ревинский, В. С. Секержицкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – Брест : Изд-во БрГУ, 2000. – 144 с.

А.В. Демидчик, А.С. Ивкович, П.Б. Кац, А.А. Козинский, О.А. Котловский, И.В. Котов, Д.А. Кривченя, В.А. Лиопо, В.В. Лозенко, И.И. Макоед, И.Н. Мельникова, А.М. Живулько, Д.А. Петрукович, В.А. Плетюхов, В.С. Секержицкий, С.С. Секержицкий, Н.Н. Сендер, А.И. Серый, В.В. Тригук, К.И. Янушкевич, М.В. Ярмолич

УДК 621.3969

Н.Н. Ворсин

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики
Брестского государственного технического университета

ЧЕТЫРЕХПРИЕМНИКОВЫЙ СВЧ РАДИОМЕТР ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

e-mail: vorsin@hotmail.com

Описан СВЧ радиометр 18 см диапазона, обеспечивающий чувствительность, близкую к теоретическому пределу для используемых элементов. Приведены результаты экспериментов по сравнительной оценке, чувствительности многоприемникового и одноприемникового модуляционных радиометров.

Многоприемниковые СВЧ радиометры позволяют получить наилучшее значение главного параметра – чувствительности – и обладают другими положительными характеристиками [1]. Однако построение и использование их остаются весьма ограниченными. Это связано с большей сложностью их в сравнении с традиционными одноприемниковыми радиометрами и с тем, что техника их реализации мало отработана. Ниже на примере 4-приемникового радиометра дециметрового диапазона волн описаны некоторые приемы построения, типичные для данных приборов.

Структурная схема радиометра показана на рисунке 1. Из схемы видно, что он включает в себя четыре одинаковых канала, каждый из которых является одноприемниковым модуляционным радиометром. Каналы объединяются по входам общим антенным узлом, а по выходу общим цифровым узлом, который формирует модулирующие сигналы и выходной сигнальный код. Общим для всех каналов является также генератор шумового СВЧ сигнала ГШП-3, который используется для автоматического уравнивания средних мощностей шумовых сигналов, поступающих на входы приемников от антенны и эталонов радиояркости на соответствующих интервалах периода модуляции.

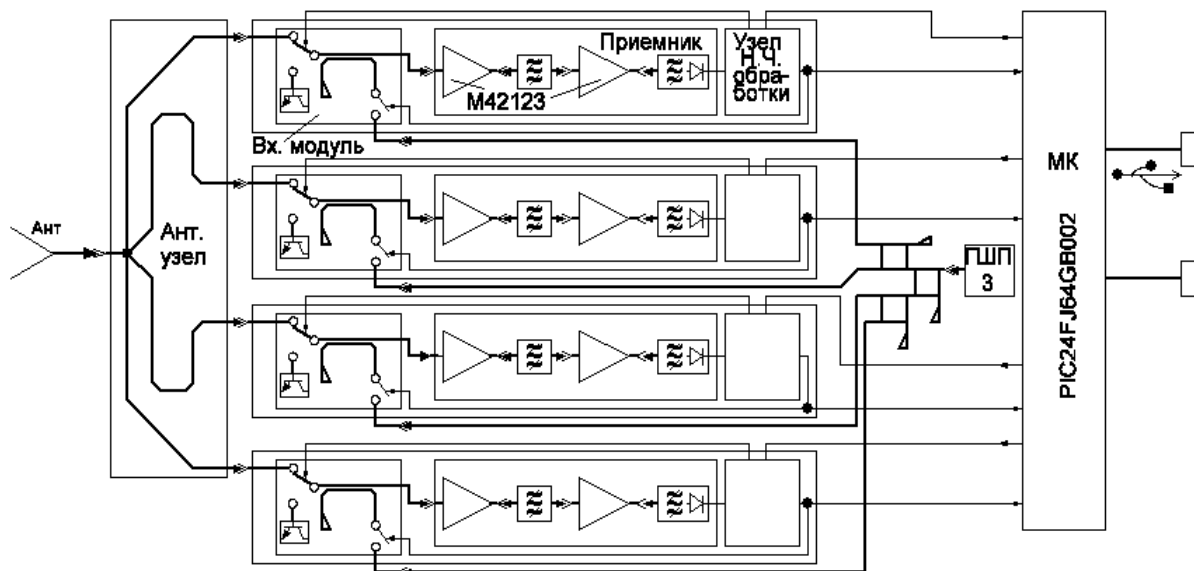


Рисунок 1. – Структурная схема радиометра

Радиометр не имеет собственного устройства индикации результатов измерений и работает только под управлением внешнего компьютера, который формирует коман-

ду управления, получает код очередного результата, отображает его на дисплее в виде числа, точки на графике и добавляет в текстовый файл. Накопленный файл может затем подвергаться обработкам стандартными программами. Набор команд, получаемых от компьютера, включает в себя измерение шумовой температуры антенного сигнала в одном из трех режимов: четырехприемниковом, двухприемниковом, одноприемниковом. Кроме того, имеются две команды калибровки, которая проводится отдельно для каждого из каналов. Ниже приведены краткие описания составных частей радиометра.

Одной из новых задач, возникающих при создании многоприемникового радиометра, является построение узла коммутации антенного сигнала и эталонных сигналов радиояркости. В случае простого построения данного узла на основе антенного и канальных СВЧ переключателей на пути антенного сигнала оказываются два включенных друг за другом коммутатора. Каждый из них создает потери мощности проходящих сигналов. При суммарной величине данных потерь, большей 3 дБ, многоприемниковое построение радиометра становится бессмысленным, поскольку не дает выигрыша в чувствительности. Предложенный в [3] прием замены канальных коммутаторов на взаимные ферритовые элементы (вентили или циркуляторы), по нашему мнению, не является удачным решением, поскольку данные элементы также создают потери сигнальной мощности.

Видимо, более рациональным является отказ от антенного коммутатора и решение проблемы перенаправления антенного сигнала на основе резонансных эффектов. Это позволяет избежать применения многопозиционного коммутатора, создающего основные потери мощности – около 1 дБ [4]. Задачу перенаправления антенного сигнала с минимальными потерями решает антенный узел. Он построен на основе прочного разъема СР50-7/3.04ФВ, известного под названием «экспертиза».

Конструкция антенного узла показана на рисунке 2.

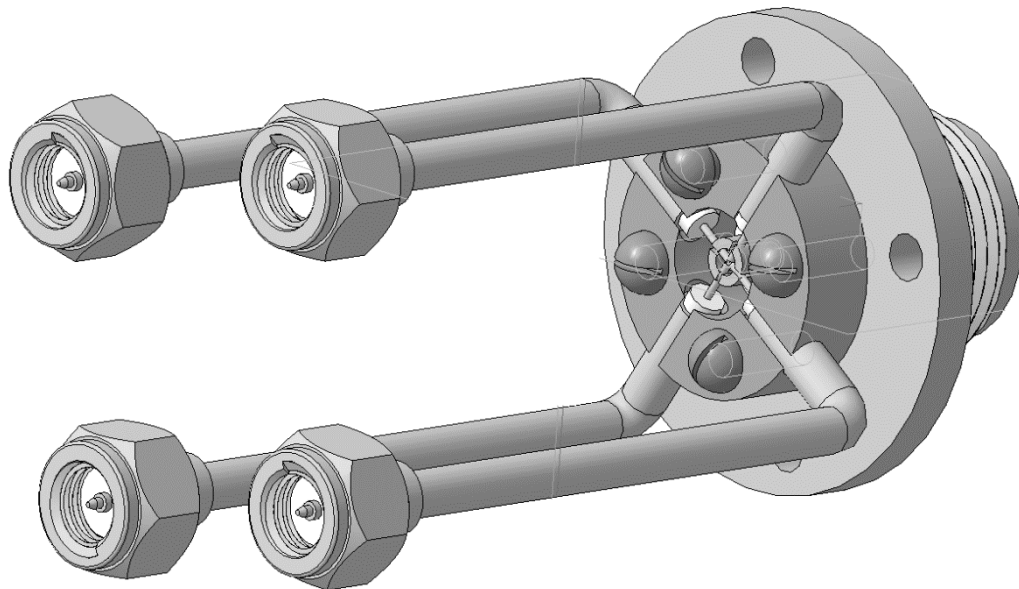


Рисунок 2. – Конструкция антенного узла

Отличие его от обычного приборно-кабельного разъема заключается в наличии разветвления на четыре полужестких кабеля, которые заканчиваются разъемами типа «град» для подключения к канальным входным модулям. Электрические длины полужестких кабелей несколько менее половины длины волны на центральной частоте ра-

бочего диапазона – 1,67 ГГц. Они подвергаются подстройке с помощью измерителя Р4-38 таким образом, чтобы каждый из кабелей, будучи подключенным к своему каналному модулю, создавал нулевую фазу коэффициента отражения в точке разветвления. Это соответствует наименьшим потерям отражения антенного сигнала в данной точке.

Входной каналный модуль, показанный на рисунке 3, является весьма насыщенным устройством. Он выполнен на керамической подложке из Al_2O_3 (поликор) размером 24×30 мм. Канальный модулятор построен по простейшей схеме последовательного включения р-і-п диодов (D_1 , D_2) в разрыв линии передач. Используются диоды КА543А-5. Их остаточная емкость 0,1–0,15 пф обеспечивает развязку с запертым плечом около 25 дБ, что является вполне достаточной величиной для данного модулятора. В то же время отсутствие дополнительных поглощающих или отражающих элементов в узле коммутации позволяет получить минимальные потери сигнальной мощности в открытом плече. Величина потерь сигнальной мощности при прохождении ее через открытое плечо от антенного (Р1) до выходного (Р2) разъема во всех каналных модулях не превышает 0,5 дБ. Изменение направления передачи сигнала (модуляция) осуществляется сменой полярности управляющего напряжения, которое подается через проходной конденсатор (Сп1).

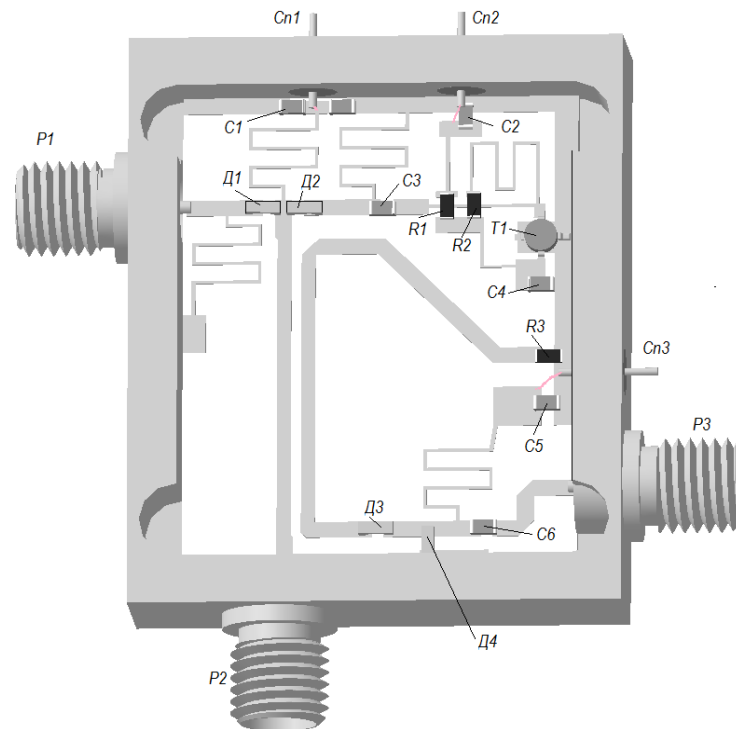


Рисунок 3. – Входной каналный модуль

Генератор «холодного» шума построен на транзисторе Т1. Эмиттерные выводы непосредственно припаяны к заземленной окантовке поликоровой платы. Напряжение питания (+10 В) подается через проходной конденсатор (Сп2). Компенсация емкости базовых переходов осуществляется отрезком высокоомной линии передач с волновым сопротивлением 80 Ом и длиной 6.5 мм, что приблизительно равно десятой части длины волны. Режим работы транзистора подвергается подстройке подбором сопротивления R_2 для получения минимального КСВ, измеряемого на разъеме Р2 при «открытом» диоде D_2 . Типичная величина КСВ, получаемая после настройки, – 1,2–1,4.

Модулятор сигнала компенсации средних шумовых температур антенны и генератора «холодного» шума построен на диодах D_3 , D_4 . В данном случае необходима вы-

сокая величина ослабления сигнала при его выключении, порядка 50 дБ. Это достигается использованием параллельно-последовательной схемы включения p - i - n диодов.

Из рисунка 2 видно, что сигнал компенсации вводится после модулятора – непосредственно на вход приемника. Данное решение позволяет поддерживать баланс средних шумовых температур антенны и эталона при любом знаке их разности. Очевидным недостатком такого построения является влияние на результат измерений шумового сигнала, обусловленное диссипативными потерями сигнала в модуляторе. Однако, как уже отмечалось, данные потери сведены к минимуму, а их влияние компенсируется в ходе дальнейшей обработки принятого сигнала.

Исходный сигнал компенсации формируется путем деления мощности генератора шумового сигнала ГШПЗ на 4 канала. Модуль ГШП включает в себя входной разъем «экспертиза», делитель мощности, условно показанный на рисунке 1, и развязывающие аттенюаторы. Его конструкция не имеет принципиальных особенностей и здесь не приводится.

Приемники построены на основе малошумящих усилителей М42123. Структура приемника показана на рисунке 1. Формирование АЧХ осуществляется двумя фильтрами, один из которых дополнен обращенным диодом 1И401, осуществляющим функцию квадратичного детектора. Конструкция межкаскадного фильтра показана на рисунке 4. Он представляет собой микрополосковый фильтр стержневого типа и формирует трехгорбую АЧХ с пульсациями около 1 дБ, полосой пропускания $\Delta f_{пр} = 35$ МГц при центральной частоте 1,67 ГГц. Второй фильтр, совмещенный с квадратичным детектором, отличается от межкаскадного только тем, что выходной резонатор соединяется с отводящим полосоком через детекторный диод. На выходе детектора установлен блокировочный конденсатор. Место подключения диода к резонатору подбирается при настройке по критерию максимума коэффициента передачи.

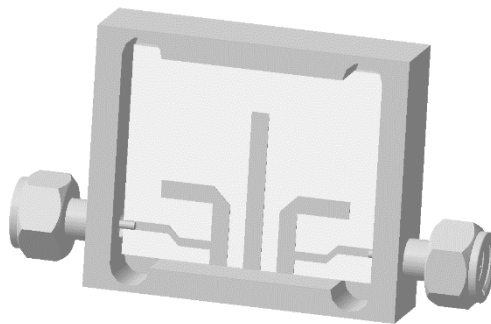


Рисунок 4. – Конструкция межкаскадного фильтра

Два усилителя М42123, включенных друг за другом, обеспечивают усиление мощности сигнала на 62–65 дБ. Детектор на основе обращенного диода обладает весьма высокой крутизной детектирования. В результате усиления и детектирования собственного шума усилителя и шума согласованного с входом резистора, находящегося при температуре около 300 К, на выходе приемника образуется шумовое напряжение, имеющее постоянную составляющую. Измерение этой составляющей дает величину 4–5 мВ, что позволяет оценить коэффициент передачи приёмника. Последний определяется как отношение постоянной составляющей выходного напряжения приемника к величине эквивалентной шумовой температуры сигнала на входе. Данная температура складывается из шумовой температуры согласованной нагрузки – 300 К и шумовой температуры приемника, равной 200 К.

$$K_{\text{пр}} = U/T_{\text{ш}} \approx 4 \text{ мВ}/500\text{К} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ В/К.}$$

Оценка данной величины необходима для выбора параметров дальнейшей низкочастотной обработки сигнала.

Узел низкочастотной обработки сигнала является звеном петли обратной связи, которая автоматически поддерживает равенство средних шумовых температур сигналов, поступающих на вход приемника на антенном и эталонном интервалах периода модуляции. Для этого выходной сигнал приемника, осциллограмма которого показана на рисунке 5, преобразуется в синхронный с модуляцией импульсный сигнал, в котором ширина импульсов пропорциональна указанной разности шумовых температур. Полученный сигнал, обозначенный на схеме НЧ узла (рисунок 6) как «Сиг. ОС», управляет включением шумового сигнала компенсации, который вводится через направленный ответвитель входного модуля на вход приемника. Фаза данного сигнала соответствует отрицательному характеру обратной связи. На осциллограмме (рисунок 5) хорошо видны высокие узкие импульсы протектированного сигнала компенсации, поступающего на эталонном интервале периода модуляции. Электрическая схема НЧ-узла приведена на рисунке 6.

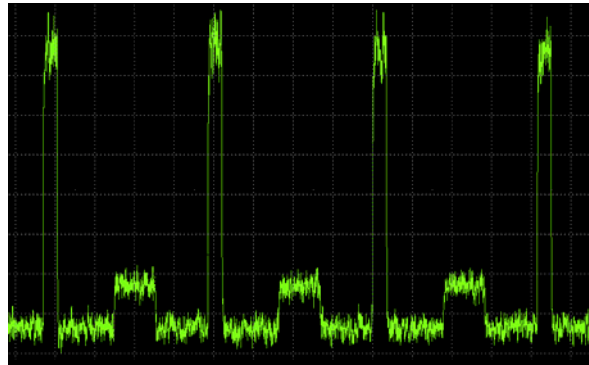


Рисунок 5. – Осциллограмма выходного сигнала приемника

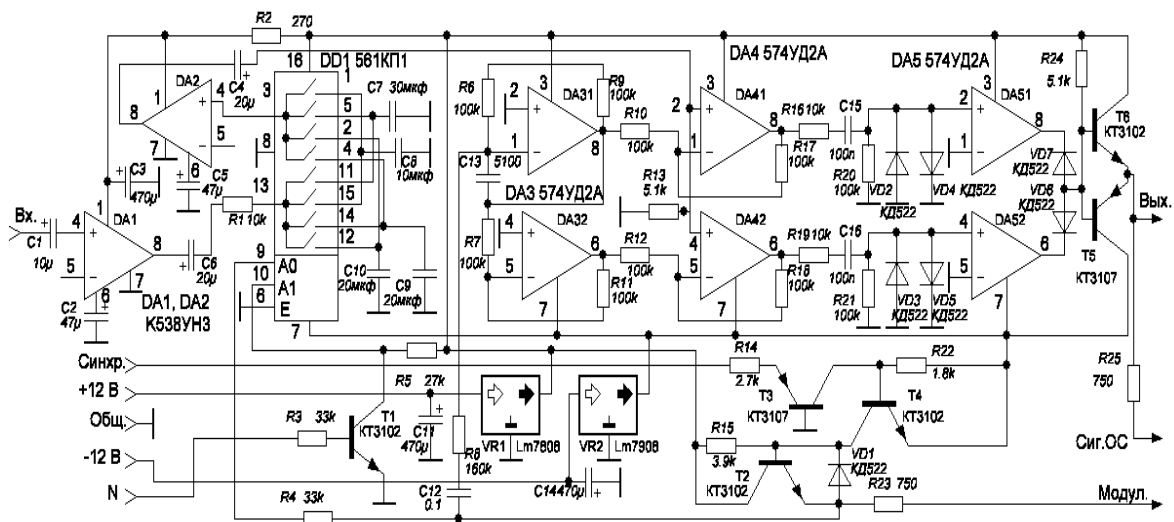


Рисунок 6. – Электрическая схема НЧ-узла

В него входят предварительный усилитель выходного сигнала приемника – элемент DA1, синхронный интегрирующий RC-фильтр – микросхема DD1 с резистором R1 и конденсаторами C7 – C10, усилитель НЧ сигнала – элемент DA2, генератор пара-

фазного пилообразного напряжения – DA3, сумматоры пилообразных напряжений с выходным НЧ сигналом – DA4, компараторы знака суммарных напряжений – DA5. Вся цепочка сигнальных преобразований обеспечивается сигналом «синхр.», поступающим от центрального микроконтроллера. Сигнал «синхр.» имеет нулевое значение (напряжение ≈ 0 В) на интервале приема антенного сигнала и единичное значение (напряжение $\approx 3,3$ В) на интервале приема сигнала радиояркого эталона. Этих уровней недостаточно для приведения в действие СВЧ модулятора и электронных ключей в DD1. Поэтому в составе НЧ-узла имеется усилитель, построенный на транзисторах T2 – T4, который приводит сигнал «синхр» к уровням ± 8 В и обеспечивает ток через p-i-n диоды модулятора около 10 мА. Аналогичное назначение усилителя на транзисторе T1, он приводит сигнал N микроконтроллера к уровням 0–8 В.

Как видно из рисунка 1 и схемы узла НЧ обработки, каждый из канальных радиометров представляет собой аналоговую следящую систему без астатизма, в которой длительность импульсов радишума, подаваемых на вход приемника, отслеживает величину шумовой температуры антенного сигнала. Такое построение канальных радиометров представляется наиболее рациональным по критерию отсутствия лишних сигнальных преобразований в «петле» обратной связи.

Синхронный фильтр НЧ-сигнала работает по принципу разделения фаз накопления сигнала и передачи его в УНЧ. Когда электронные ключи DD1 обеспечивают накопление антенного сигнала в конденсаторе C8 или C9, на вход УНЧ передается ранее накопленный в конденсаторах C7 или C10 сигнал радиояркого эталона, затем цепи накопления и передачи меняются местами. Такое построение обеспечивает чистоту сигнала на входе УНЧ, но вносит задержку распространения сигнала на один период модуляции. Наличие нескольких накопительных конденсаторов обусловлено необходимостью переключения радиометра в один из трех режимов работы: одноприемниковый, двухприемниковый, четырехприемниковый. При работе в четырехприемниковом режиме используются конденсаторы C7, C8 с соотношением емкостей 3/1. При этом постоянная времени накопления сигнала радиояркого эталона будет в три раза больше в сравнении с постоянной времени накопления антенного сигнала. Дисперсия шумовых флуктуаций напряжения на накопительном конденсаторе сигнала радиояркого эталона (C7) будет соответственно в 3 раза меньше, чем на накопительном конденсаторе антенного сигнала (C8). Именно это обстоятельство позволяет увеличить отношение сигнал/шум и чувствительность радиометра при переходе в четырехприемниковый режим. В одно- или двухприемниковом режимах используются одинаковые накопительные конденсаторы C9, C10, обеспечивая одинаковые постоянные времени накопления антенного и эталонного сигналов.

Как обычно, построение следящей системы требует решения задач о ее устойчивости и динамических характеристиках. Статический коэффициент передачи в петле обратной связи для принятого способа преобразования амплитуды сигнала в длительность импульса определяется формулой:

$$K_{cm} = K_{np} * K_{нч} \frac{4 * T_{гш}}{V_m} \approx 50, \tag{1}$$

в которой $K_{np} = 8 \times 10^{-6}$ В/К, $K_{нч} \approx 4 \times 10^4$, $T_{гш} \approx 300$ К и $V_m = 8$ В соответственно коэффициент передачи приемника, коэффициент усиления предварительного и последующего УНЧ, шумовая температура сигнала компенсации и размах пилообразного напряжения в преобразователе амплитуды сигнального напряжения в ширину формируемых

импульсов. Как видно из (1), величина петлевого статического коэффициента передачи имеет умеренное значение.

Несмотря на «аналоговость» системы регулирования для определения ее динамических характеристик необходимы методы анализа дискретных сигналов. Дело в том, что в системе имеется переключаемый элемент – синхронный фильтр, который действует по алгоритму: накопление отсчета – передача его в сигнальный тракт. При этом z -изображение его передаточной функции определяется известной формулой [4].

$$H(z) = \frac{1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{z - e^{-\frac{t_0}{\tau}}}, \quad (2)$$

в которой t_0 – период отсчетов, τ – эквивалентная постоянная времени RC-фильтра. Для используемого типа синхронного фильтра, при котором накопительный конденсатор сохраняет заряд в промежутках времени между накопительными интервалами, эквивалентная постоянная времени равна $\tau = RC \times s$, где s – скважность накопительных интервалов (отношение периода к времени накопления). В четырехприемниковом режиме на интервалах накопления антенного и эталонного сигналов получаем $s_a = 4$, $s_s = 4/3$. В одно- и двухприемниковом режимах – $s_a = s_s = 2$. В четырехприемниковом режиме используемая емкость накопительного конденсатора антенного сигнала в 3 раза меньше, чем конденсатора накопления эталонного сигналов, а в двух- и одноприемниковом режимах эти емкости одинаковы. Благодаря этому эквивалентные постоянные времени накопления антенного и эталонного сигналов во всех режимах работы оказываются одинаковыми: $\tau \approx 4 \times R_1 \times C_8 \approx 4 \times R_1 \times C_9/3 \approx 0,4 \approx R_1 \times C_9 \approx 0,4$ с.

Поскольку $t_0/\tau = d \ll 1$ и учитывая дополнительную задержку на период модуляции в синхронном фильтре, можно записать для z -изображения петлевого коэффициента передачи следующее выражение:

$$K_{петл}(z) = \frac{K_{cm}d}{z(z-1+d)}. \quad (3)$$

Соответственно, коэффициент передачи всей системы с обратной связью выразится формулой:

$$K(z) = \frac{K_{cm}d}{z(z-1+d) + K_{cm}d}, \quad (4)$$

из которой определится условие устойчивости системы [4]:

$$K_{cm}d < 1. \quad (5)$$

Динамические параметры системы также вытекают из (4), в частности, переходная характеристика, графики которой для трех значений параметра $K_{cm}d$ показаны на рисунке 7. Как видно из графиков, переходной процесс без признаков колебательности реализуется при величине $K_{cm}d \leq 0.2$. Соответствующий этому значению период модуляции равен $t_0 \leq 0,2\tau/K_{cm} \approx 1,6 \times 10^{-3}$ с. Было выбрано $t_0 = 10^{-3}$ с.

Узел микроконтроллера выполняет функции оцифровки и накопления значения шумовой температуры антенного сигнала, измерения физической температуры входных модулей и связь радиометра с компьютером.

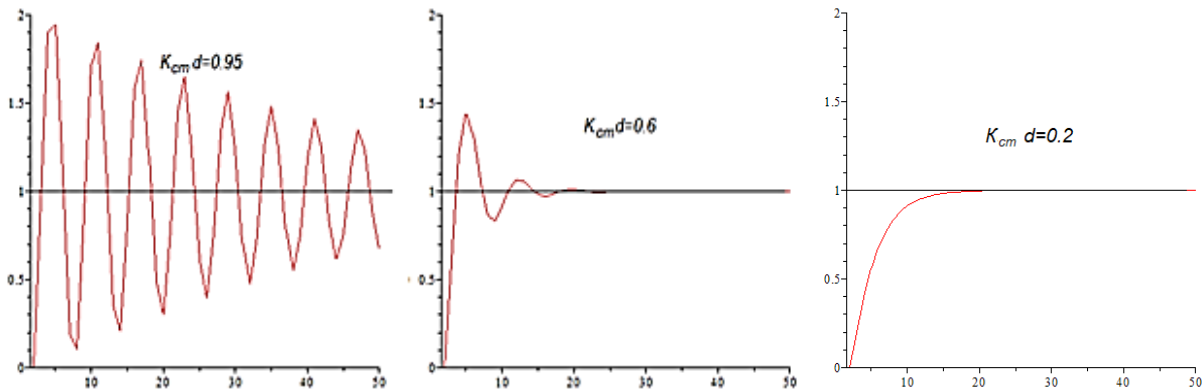


Рисунок 7. – Переходная характеристика для трех значений параметра $K_{cm}d$

Командный код компьютера имеет длину 1 байт (2 тетрады). Каждому разряду старшей тетрады соответствует один канал радиометра. Наличие единицы включает соответствующий канал в работу: ему выделяется время подключения к антенне (t_a), и накопленный каналом код суммируется с кодами других включенных каналов при формировании результата. Четырехприемниковый режим реализуется четырьмя единицами в старших разрядах командного кода. Наличие двух единиц в старшей тетраде команды осуществляет двухприемниковый режим, а наличие только одной единицы – одноприемниковый.

Примененный микроконтроллер pic24FJ64GB002 работает при частоте тактирования 16 МГц, осуществляя машинный цикл за 0,125 мкс. Формирование сигналов модуляции, обозначенных как «синхр.» на рисунке 6, выполняется контроллером с помощью одного из внутренних таймеров.

Таймер отсчитывает время приема антенного сигнала текущим каналом. По истечении заданного времени – 256 или 512 мкс (4 096 или 8 192 такта) срабатывает прерывание, по которому происходит обнуление таймера и переход по кругу на следующий задействованный канал. Прерываниям от таймера назначен более высокий приоритет, поэтому работа модулятора никогда не замирает.

Микроконтроллер имеет удобные для оцифровки результатов периферийные «модули захвата» текущих кодов в счетчиках импульсов (контроллер имеет пять таких модулей, используются только четыре). Изменение значения сигнала на входе модуля вызывает переписывание текущего кода из его счетчика тактовых импульсов в буферный регистр и прерывание программы процессора. Обработка прерывания весьма короткая и занимает не более 2 мкс. Она состоит из нескольких команд: считывание значения сигнала управления компенсацией. При наличии там 0 следует обнуление счетчика, буферного регистра и выход из прерывания. При наличии 1 – считывание кода из буферного регистра, который является результатом измерения длительности импульса сигнала компенсации – Δt . Далее следует добавление Δt в 32-разрядный накопительный регистр соответствующего канала, где формируется умноженное на 256 среднее значение $\Delta \bar{t}$ по формуле:

$$\Delta \bar{t} = \Delta \bar{t}_{m-1} - \frac{\Delta \bar{t}_{m-1}}{256} \pm \Delta t_m. \quad (5)$$

Знак «+» или «-» в (5) определяется текущей фазой процесса модуляции в канале, вызвавшим прерывание. Если оно приходится на интервал антенного сигнала, выбирается знак «-», в противном случае – знак «+». Как следует из (5), величина $\Delta\bar{t}$ может быть положительной или отрицательной. В последнем случае она представляется дополнительным 32-разрядным кодом.

В течение периода модуляции – $t_0 = 1\,000$ мкс контроллер формирует величины $\Delta\bar{t}$ по всем активным каналам, тратя на это не более 10 мкс. Остальное время расходуется на оцифровку значения физической температуры входного модуля – $T_{\text{физ}}$, которая измеряется с помощью термодатчика LM35DZ, и вычисление шумовой температуры антенного сигнала по формуле

$$T_a = T_{\text{физ}} * b + c * \Delta\bar{t}. \quad (6)$$

В данной формуле b – коэффициент пропорциональности между шумовой и физической температурой транзистора, генерирующего «холодный» шум, c – коэффициент, зависящий от шумовой температуры сигнала компенсации и режима работы радиометра. $c = \frac{T_{\text{ш}}}{t_{a,\text{э}}}$, где $T_{\text{ш}}$ – шумовая температура сигнала компенсации, $t_{a,\text{э}}$ –

длительность антенного или эталонного интервалов времени в течение периода модуляции. Значения коэффициентов b и c определяются в ходе калибровок радиометра и сохраняются в программной памяти контроллера.

Для использования целочисленной арифметики микроконтроллера канальные константы b и c представлены в виде дробей. Умножение на константу выполняется в два этапа: умножение на числитель с получением 40-разрядного результата, деление на знаменатель и возвращение к 32-разрядному коду.

Согласно [6] для устранения влияния конечности шага квантования на чувствительность радиометра требуется выполнение условия: $a \leq 0,6 \sigma_{\text{ш}}$, где $\sigma_{\text{ш}}$ – среднеквадратичное значение шумовых флуктуаций сигнала на входе аналого-цифрового преобразователя. В нашем случае

$$\sigma_{\text{ш}} \gg \frac{T_{\text{шпр}}}{\sqrt{2\Delta f_{\text{пр}} \tau / K_{\text{см}}}} = 0,27 \text{ K},$$

где $T_{\text{шпр}} \approx 200$ К и $\Delta f_{\text{пр}} \approx 35$ МГц – соответственно эквивалентная шумовая температура приёмника и его полоса пропускания. Следовательно, условие достаточной малости шага квантования имеет вид $a < 0,16$ К. Исходная величина шага квантования шумовой температуры антенного сигнала определяется вторым слагаемым (6) при $\Delta\bar{t} = 1$. Т.е. $a = T_{\text{ш}}/t_a \approx 300 \text{ K} / 4\,096 = 0,073 \text{ K}$, что вдвое лучше допустимого уровня.

Поступление от компьютера команды вызывает прерывание программы контроллера. Его обработка заключается в суммировании накопленных включенными каналами результатов T_a и передаче полученной суммы в компьютер. Обработка полученного кода в компьютере состоит из двух действий: сдвиг полученного кода вправо на 4 разряда и дробного деления полученного кода на известный коэффициент – для вычисления шумовой температуры антенного сигнала в Кельвинах. Заметим, что в ходе цифрового накопления сигналов длина их кодов была увеличена на 8 разрядов. Затем эти ко-

ды укорачиваются компьютером только на 4 разряда, что увеличивает длину исходных кодов на 4 разряда и, соответственно, уменьшает шаг квантования в 16 раз. Этот прием, известный под названием сверхдискретизация (или оверсэмплинг), широко используется в цифровой технике. В результате получается действительное число, выражающее шумовую температуру антенного сигнала с шагом квантования около 0,005 К. Естественно, отношение среднеквадратичного отклонения к шагу квантования сохраняется.

Как видно из приведенного описания, все основные действия контроллера происходят по прерываниям программы главного цикла. Сам же цикл состоит из команды запуска АЦП на оцифровку сигнала термодатчика, пересчета полученного кода в канальные коды абсолютной шумовой температуры антенного сигнала.

Калибровка радиометра осуществляется отдельно по каждому из каналов. Для этого используются команды с одной или двумя единицами в младших разрядах команды и одной единицей в старшей тетраде, соответствующей калибруемому каналу. Радиометр работает в одноканальном режиме, обеспечивая отсчет шумовой температуры антенного сигнала.

Сама калибровка состоит из двух шагов. На первом шаге командный код содержит две единицы в младших разрядах, а к антенному разъему подключается криогенный генератор шума ГШ2-7, создающий шумовую температуру сигнала 82 К. В таком состоянии система калибровки выдерживается несколько секунд, что обеспечивает стабильную величину среднего времени импульсов компенсирующего сигнала $\Delta\bar{t}_{k1}$.

При переходе ко второму шагу, для которого из командного кода удаляется единица младшего разряда, накопленное значение $\Delta\bar{t}$ запоминается в специальной регистровой паре.

На втором шаге к антенному разъему подключается согласованная нагрузка с температурой 300 К и по истечении нескольких секунд подается команда окончания калибровки, код которой содержит нули в младшей тетраде. Получение этой команды вызывает запись сформированного кода $\Delta\bar{t}_{k2}$ в другую регистровую пару.

Полученные коды $\Delta\bar{t}_{k1}$ и $\Delta\bar{t}_{k2}$ являются результатом калибровки и используются для вычисления констант b и c для формулы (6).

Экспериментальные исследования радиометра в лаборатории позволяют воочию наблюдать изменение его чувствительности при смене режимов работы: одноприемниковый, двухприемниковый, четырехприемниковый. Для проведения опытов к антенному входу радиометра через аттенюатор подключается ГПП-3, включение или выключение которого создает контраст радиояркости. Затухание аттенюатора устанавливается таким, чтобы величина контраста составила 5 К.

На рисунках 8–10 показаны графики записей файлов 5-градусного контраста для трех режимов работы радиометра: четырехприемниковый (рисунок 8), двухприемниковый (рисунок 9), одноприемниковый (рисунок 10).

Данные записи ясно указывают на улучшение чувствительности радиометра при увеличении числа приемников. Интересно истолковать механизм этого улучшения с точки зрения функционирования аппаратуры, не прибегая к точным расчетам. В одноприемниковом режиме имеем обычный модуляционный радиометр с некоторой дисперсией шума в выходном сигнале. При переходе к двухприемниковому режиму никаких изменений в обработке сигнала не происходит, просто к выходному сигналу одного канала добавляется выходной сигнал другого. При этом складываются амплитуды сигналов и дисперсии шумов в каналах. Поскольку параметры каналов почти одинаковы, амплитуда сигнала и дисперсия шума удваиваются, а среднеквадратичное отклонение шумовой составляющей возрастает в $\sqrt{2}$ раз. В такое же число раз улучшается чувствительность радиометра.

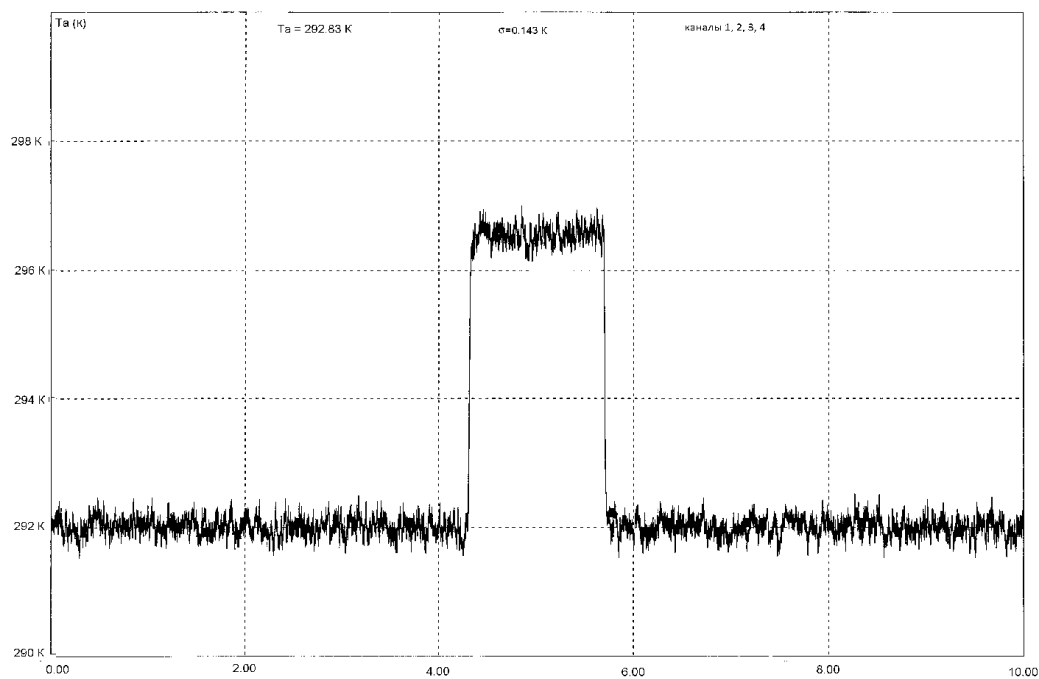


Рисунок 8. – График записи файлов 5-градусного контраста для четырехприемникового режима работы радиометра

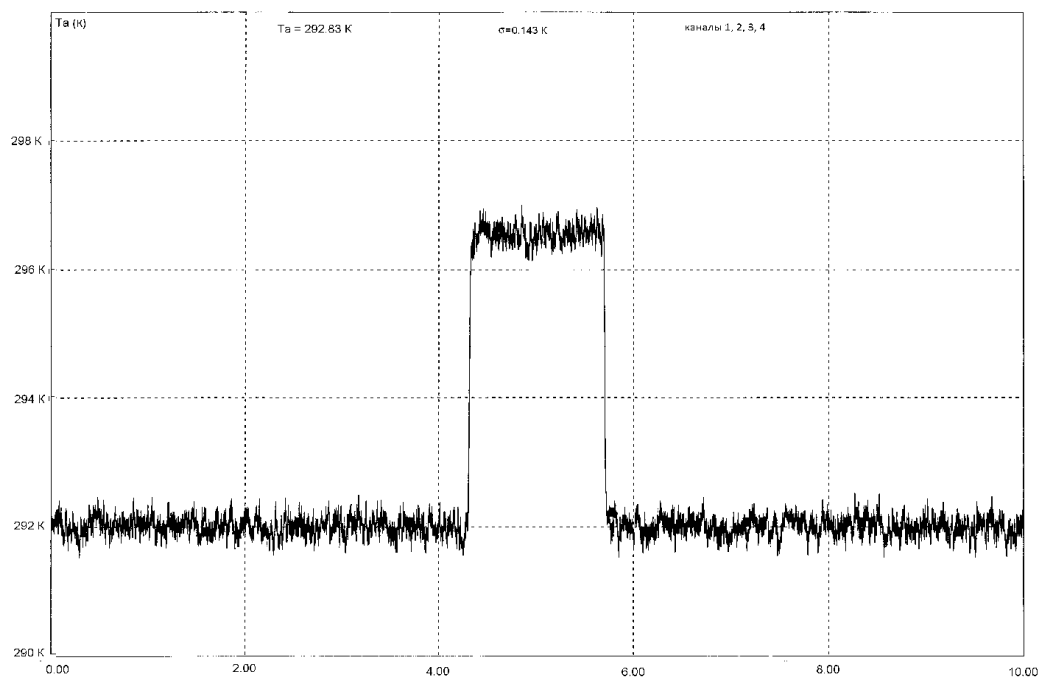


Рисунок 9. – График записи файлов 5-градусного контраста для двухприемникового режима работы радиометра

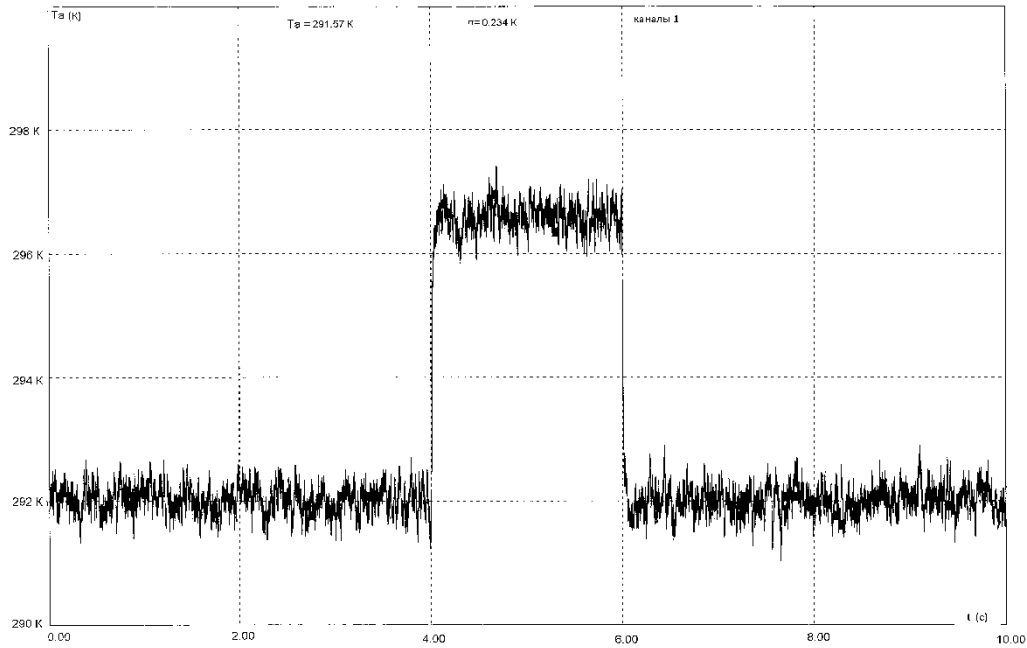


Рисунок 10. – График записи файлов 5-градусного контраста для одноприемникового режима работы радиометра

Переход от двухприемникового режима к четырехприемниковому сложнее, так как изменяются параметры обработки сигналов. Во-первых, в 2 раза уменьшается постоянная времени накопления антенного сигнала. Это приводит к увеличению в два раза дисперсии шума в антенном плече синхронного фильтра. Во-вторых, постоянная времени накопителя эталонного сигнала увеличивается, а дисперсия шума в плече эталонного сигнала уменьшается в 1,5 раза. После вычитания антенного и эталонного сигналов на разделительном конденсаторе С4 дисперсия шума в сравнении с двухприемниковым режимом увеличится в $(2 + 1/1,5) = 8/3$ раза. При сложении выходных сигналов четырех каналов суммарная дисперсия шума учетверится и будет равна $32/3$ дисперсии шума двухприемникового радиометра. Соответственно, среднеквадратичное отклонение шума в выходном сигнале возрастет в $\sqrt{32/3}$. Одновременно амплитуда сигнала в результате суммирования возрастет в 4 раза. Результирующее отношение приращения амплитуды сигнала к приращению среднеквадратичного отклонения шума составит $\frac{4}{\sqrt{32/3}} = 1,22$. Таким образом, переход от двухприемникового режима к четырехприемниковому должен улучшить чувствительность радиометра в 1,22 раза. Приблизительно такой результат следует из рисунков 8 и 9.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворсин, Н. Н. Многоприемниковые СВЧ радиометры / Н. Н. Ворсин // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 5–9.
2. Топольницкий, В. Н. Генерация «холодного» шума сверхвысокочастотным транзистором / В. Н. Топольницкий // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47, № 12. – С. 1513–1516.

3. Убайчин, А. В. Многоприемниковые микроволновые радиометрические системы на основе модифицированного метода нулевых измерений / А. В. Убайчин, А. В. Филатов ; Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – Томск : Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2014. – 153 с.

4. Дьяконов, В. П. Монолитные микросхемы коммутаторов СВЧ сигналов компании Hittite Microwave / В. П. Дьяконов // Компоненты и технологии. – 2012. – № 2.

5. Первачев, С. В. Радиоавтоматика : учеб. для вузов / С. В. Первачев. – М. : Радио и связь, 1982. – 296 с.

6. Ворсин, Н. Н. Цифровая СВЧ радиометрия / Н. Н. Ворсин // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2015. – № 1. – С. 5–14.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.04.2018

Vorsin N.N. Four-Received Super-High Frequency Radiometer Limiting Sensitivity

A S-HF radiometer measuring 18 cm is described, providing a sensitivity close to the theoretical limit for the elements used. The results of experiments on the comparative evaluation of the sensitivity of multicast and single-receiver modulation radiometers are presented.

УДК 538.9

**В.А. Лиопо¹, И.А. Лявшук², Е.В. Овчинников³,
А.В. Пушкарёв⁴, С.С. Секержицкий⁵**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

²ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

³д-р техн. наук, доц., зам. декана по научной работе

факультета инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

⁴канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник НППЦ НАН Беларуси по материаловедению

⁵канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: Sekerzhitsky@rambler.ru

ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА РАЗМЕРЫ УЗЛОВ ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ

Исследованы причины изменения полуширины рентгеновского рефлекса. Значение ее размеров зависит от крупности кристаллитов в соответствии с известной формулой Шеррера, для которой в рамках кинематической теории рассеяния показано, что ее постоянный коэффициент строго равен единице. Установлено, что с увеличением угла дифракции данная полуширина всегда монотонно возрастает. При этом полуширина рентгеновского рефлекса может быть использована при иерархических оценках крупности или температуры.

Введение

Решетка кристалла определяется трансляционной симметрией, т.е. может быть описана параллелограммом, построенным на трех некопланарных векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называемых репером Бравэ. Такой параллелограмм называется ячейкой решетки кристалла, и для ее геометрического описания необходимо знать три линейных параметра a, b, c , равных модулям соответствующих векторов в репере Бравэ, и трех угловых параметров $\alpha = \angle \vec{b}, \vec{c}$, $\beta = \angle \vec{a}, \vec{c}$, $\gamma = \angle \vec{a}, \vec{b}$. Одним из основных экспериментально определяемых параметров кристаллов является расстояние между ближайшими кристаллографическими плоскостями $d(hkl)$, где (hkl) – кристаллографические индексы плоскости. Межплоскостное расстояние описывается аксиальным вектором \vec{d} , который изображается в абстрактном пространстве точкой, радиус-вектор которой $\vec{r}^* \parallel \vec{d}$, а $\vec{r}^* \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{r}^* = 1$. Точка с радиусом-вектором \vec{r}^* называется узлом. Совокупность узлов $r^*(hkl)$ называется обратной решеткой с параметрами a^*, b^*, c^* . Координаты атомов в ячейке кристалла описываются в кристаллографической системе, в которой a, b, c приняты за единицы. Узлы обратной решетки также определяются параметрами $\vec{a}_i^*, i = 1, 2, 3$, т.е. всегда целые. Эти координаты (hkl) и являются индексами отображаемой этим узлом кристаллографической плоскости.

Основные формулы структурного анализа веществ

Для кристаллов первой основной формулой структурного анализа является условие Вульфа – Брэггов.

$$2d \sin \theta = n \lambda, \quad (1)$$

где λ – длина волны излучения, θ – угол скольжения (рисунок 1).

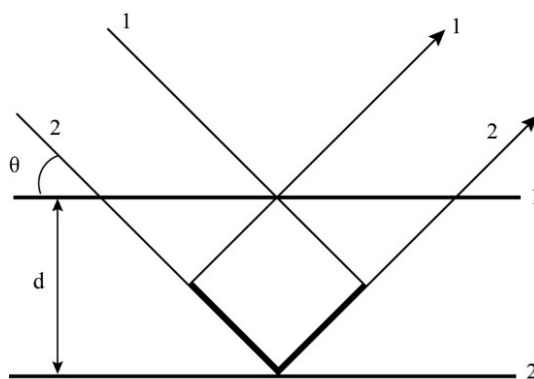


Рисунок 1. – Разность хода лучей 1, 2 (показана более жирными отрезками)

Формула (1) позволяет определять геометрические характеристики прямой и обратной решеток кристалла: параметры $(a_i, a_i), i = 1, 2, 3$, $(a_j^*, a_j^*), j = 1, 2, 3$, индексы плоскостей (hkl) , сингонии, ячейки Бравэ [1–3]. Структуру кристалла, которая описывается взаиморасположением атомов в ячейке, по формуле (1) определить невозможно. Надо для этого учесть интенсивность $I(hkl)$ -рефлекса, а не только его угловое положение (θ).

Любой атом (ион, молекула, радикал и т.д.) характеризуется своей рассеивающей способностью. Рассеивающая способность электрона принята за единицу. $f = \frac{A}{A_g}$, где A – амплитуда рентгеновской волны рассеянной на объекте, A_g – амплитуда рентгеновского луча, рассеянного на свободном электроне для того же исходного луча и при одинаковых направлениях рассеяния лучей. Значения f атомов, ионов (табличные величины) также измеряются в электронных единицах [1].

Для вывода второй основной формулы структурного анализа рассмотрим два рассеивающих центра f_1 и f_2 .

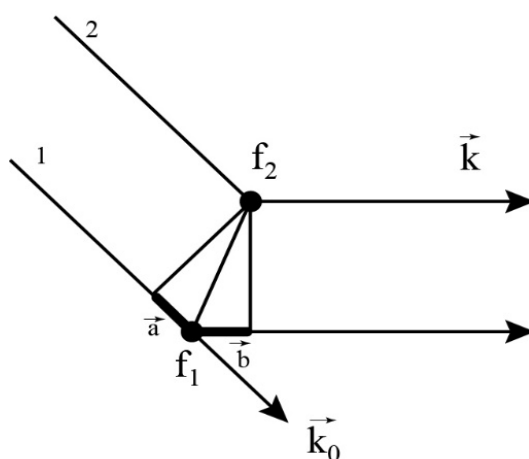


Рисунок 2. – К выводу второй основной формулы структурного анализа

Амплитуда рассеянного излучения на центрах 1 и 2 имеет вид:

$$A_{12} = f_1 \exp\{i\varphi_1\} + f_2 \exp\{i\varphi_2\} = \sum_{j=1}^2 f_j \exp\{i\varphi_j\} \quad (2)$$

где φ_1, φ_2 – фазы лучей, рассеянных на f_1 и f_2 соответственно.

Разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ определяется разностью хода:

$$\Delta = a + b. \quad (3)$$

Здесь a и b – это не параметры ячейки. Определим направление падающего и рассеянного лучей векторами \vec{k}_0 и \vec{k} соответственно, при этом их величины $k_0 = k = 1$. Положение рассеивающего центра f_2 относительно рассеивающего центра f_1 определим вектором \vec{r} , тогда:

$$\begin{aligned} a &= -r \cos \angle \vec{k}_0, \vec{r} = -(\vec{r} \vec{k}_0) \\ b &= r \cos \angle \vec{k}, \vec{r} = (\vec{r} \vec{k}). \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (3) получим $\Delta = (\vec{r}(\vec{k} - \vec{k}_0))$, следовательно:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi r S,$$

где $\vec{S} = \vec{k} - \vec{k}_0$

Следовательно, формула (2) может быть записана в виде:

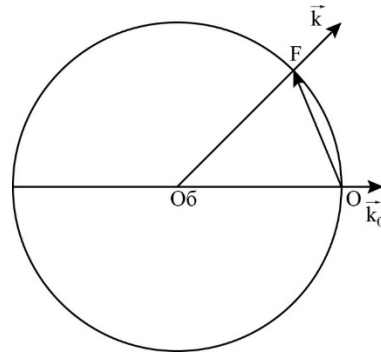
$$A_2(S) = \sum_{j=1}^2 f_j \exp\{2\pi i S r_j\}. \quad (4)$$

Если имеется три рассеивающих центра, то в качестве одного из них надо взять пару, рассеивающая способность которой равна $A_2(s)$ и т.д. до учета всех рассеивающих центров (N):

$$A_N(S) = \sum_{j=1}^N f_j \exp\{2\pi i S r_j\}. \quad (5)$$

Эта формула справедлива для любого вещества с произвольной структурой [1,2,3,4]. Если анализировать кристалл, то достаточно определения $A(S)$ для одной ячейки. В этом случае $A(S) = F(hkl)$ и называется структурной амплитудой.

Физический смысл вектора \vec{S} рассмотрим в рамках модели, предложенной Эвальдом, которая основана на построениях в обратном пространстве.

Рисунок 3. – Смысл вектора \vec{S}

Пусть в точке F на поверхности сферы с центром в образце ($Oб$) и радиусом $\frac{1}{\lambda}$ находится узел обратной решетки F . Очевидно, что вектор $\overrightarrow{(Oб, O)} = \frac{\vec{k}_0}{\lambda}$, а вектор $\overrightarrow{(Oб, F)} = \frac{\vec{k}}{\lambda}$. Вектор $\frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)}{\lambda} = \vec{r}^*$ по определению угол $\angle \vec{k}_0 \vec{k} = \varphi = 2\theta$. Из треугольника $(O, F, Oб)$ следует:

$$\vec{r}^* = \frac{2 \sin \theta}{\lambda} = \frac{1}{d} = \frac{\vec{d}}{d^2}. \quad (6)$$

При этом вектор \vec{d} и вектор \vec{r} перпендикулярны биссектрисе угла $\angle OFOб$, которая является следом отражающей плоскости.

На сферу Эвальда может выходить любая точка обратного пространства кристалла. Если выходит узел, то по его радиусу-вектору возникает рефлекс. Любая точка обратного пространства описывается вектором обратного пространства $S = \frac{2 \sin \theta}{\lambda}$, где $\theta = \frac{\varphi}{2}$. Если эта точка имеет ненулевой «вес», то он определяет амплитуду рассеянного луча, которая в общем виде приведена формулой (5).

С учетом того, что (xyz) и (hkl) измерены в единицах параметров соответствующих ячеек, а также с учетом $a_j^* a_i = \delta_{ij}$ формула (5) примет вид:

$$F(hkl) = \sum_{i=1}^N f_i \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)\}, \quad (7)$$

где N – число атомов в ячейке кристалла. Если в качестве рассеивающих центров брать любые точки кристалла с электронной плотностью $\rho(xyz)$, то (7) записывается в виде:

$$F(hkl) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho(xyz) \exp\{2\pi i(hx + ky + lz)\} dx dy dz. \quad (9)$$

Интегрирование проводится по ячейке кристалла. Выражения (7), (8) являются двумя формами записи второй основной формулы структурного анализа [1; 3]. Чем больше значение $F(hkl)$, тем больше интенсивность рефлекса при выходе узла (hkl) на сферу Эвальда. Поэтому $F(hkl)$ является весом узла (hkl) . Чем больше «вес», тем интенсивнее рефлекс.

Увеличение объема узла обратной решетки с увеличением его радиус-вектора

Формула (7), как и вся модель обратной решетки, предполагает, что узел обратной решетки – это точка в обратном пространстве. Рентгеновский рефлекс возникает только в том случае, когда эта точка находится на сфере. Любое смещение узла от сферы должно привести к исчезновению рефлекса. Однако рентгеновские рефлексы не бесконечно тонкие (в этом случае их просто нельзя было бы обнаружить), но еще и увеличивают свою полуширину с увеличением угла дифракции, что подтверждается экспериментально (рисунок 4).

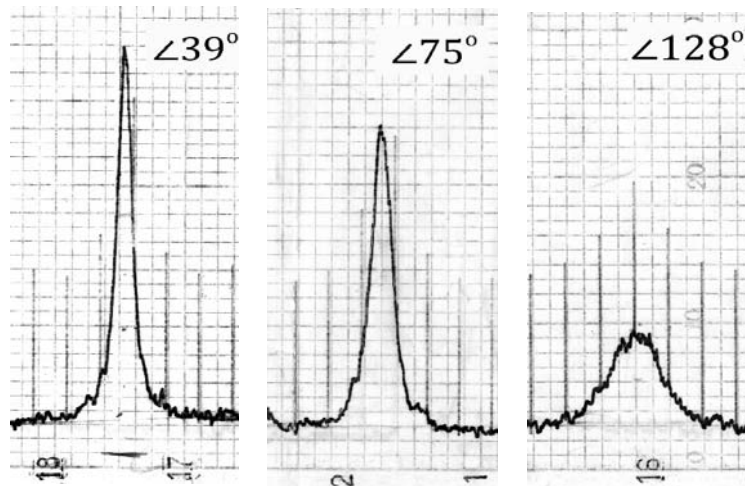


Рисунок 4. – Три фрагмента рентгеновской дифрактограммы для разных значений угла дифракции

Этот хорошо известный экспериментальный факт требует, на наш взгляд, объяснения. Если узел обратной решетки не является точкой, а занимает какой-то объем, то при выходе его на сферу Эвальда рассеянный луч определяется углом расходимости (δ).

В идеальном кристалле атом – точечный объект. В реальных – атом объект конечный, и распределение электронной плотности сосредоточено в интервале $r_j \pm \delta r_j$. Рассмотрим случай $r + \delta r$, тогда точечный узел обратной решетки кристалла смещается на величину $(-\Delta\varphi)$. Т.е. ненулевой «вес» узла будет в интервале $S_{ид} \pm \Delta S$, где ΔS – полуширина узла, определяемая полушириной рефлекса, $S_{ид}$ – положение максимума рефлекса.

Рассмотрим одно из слогаемых уравнения (5). Показатель экспоненты примет вид $2\pi(S_{\text{ид}} - \Delta S)(r + \delta r)$. Как и в идеальном случае, $S_{\text{ид}} \cdot r = 1$. Тогда для выполнения условия получения дифракционного максимума $(S_{\text{ид}} - \Delta S)(r + \delta r) = 1$, отсюда

$$S_{\text{ид}} \cdot r + S_{\text{ид}} \cdot \delta r - r\Delta S - \Delta S\delta r = 1$$

или

$$\frac{\Delta S}{S_{\text{ид}}} = \frac{\delta r}{r + \delta r}. \quad (10)$$

Так как правый член уравнения (10) определяется только кристаллом, то $\frac{\Delta S}{S} = \text{const}$. Т.е. с увеличением S увеличивается размер узла обратной решетки, что приводит к увеличению полуширины рефлекса с ростом угла дифракции $\varphi = 2\theta$. Это и наблюдается экспериментально.

Также экспериментально установлено, что при нагревании происходит увеличение полуширины рефлекса. Теория этого явления основана на следующем.

При нагревании, когда в образце отсутствуют температурные градиенты, то вследствие тепловых колебаний атомов межатомные расстояния увеличиваются. Отсюда делается вывод, что $F(hkl)$ должна рассчитываться не по формуле (7), но нужно учесть увеличение x, y, z , на значения $\Delta x_j, j = 1, 2, 3$ [1; 3; 4].

Т.е. (7) приобретает вид:

$$F(hkl) = \sum_{j=1}^N f_j \exp\{2\pi i [h(x_j + \Delta x) + k(y_j + \Delta y) + l(z_j + \Delta z)]\}. \quad (11)$$

Однако это ошибочное предположение. Если отсутствуют температурные градиенты и фазовые переходы, то кристаллографические координаты не меняются [2; 5]. Будет увеличиваться размер объема, в котором колеблется атом. В этом случае изменение амплитуды рассеяния зависит от вектора обратной решетки по условию:

$$A(S) = \int_{R_0}^{R_0+\delta} \rho(T) \exp\{2\pi iSr\} dr. \quad (12)$$

В этой формуле S и r заданы в кристаллографической системе координат, где R_0 – размер атома при начальной температуре, δ – тепловое расширение атома $\delta = R(1 + \alpha\Delta T)$, где α – коэффициент термического расширения, так как функция $\rho(T)$ зависит только от температуры, причем термическое расширение не будет существенно влиять на изменение электронной плотности, и условие (12) можно записать в виде:

$$A(S) = \rho(T) \int_{R_0}^{R_0+\delta} \exp\{2\pi iSr\} dr,$$

отсюда

$$A(S) = \rho(T) \frac{1}{2\pi iS} \exp\{2\pi iSr\} \Big|_{R_0}^{R_0+\delta} = \frac{\exp\{2\pi iSR_0\}}{2\pi iS} (\exp\{2\pi iS\delta\} - 1). \quad (13)$$

Так как $I = A \cdot A^*$, то:

$$I(S) = \frac{\rho^2(T)}{\pi^2 S^2} \sin^2 \pi S \delta. \quad (14)$$

Т.е. $I_{MAX} = (\rho_0)^2$, где ρ_0 – электронная плотность при $\Delta T = 0$. Обозначим полуширину рентгеновского рефлекса $\Delta = (\Delta 2\theta)$. Введем обозначение $\tau = \frac{\Delta 2\theta}{2}$.

Рассмотрим условие:

$$\frac{I(S) + \tau}{I_{MAX}} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Так как $\frac{\rho(T)}{\rho_0} \approx 1$, то $\frac{I(S)}{I_{MAX}} = \frac{\sin^2 \pi \delta (S + \tau)}{\pi^2 (S + \tau)^2} = \frac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{\sin \pi \delta (S + \tau)}{\pi (S + \tau)} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (16)$$

Но $\sin \pi \delta (S + \tau) = \sin \pi \delta S \cdot \cos \pi \delta \tau + \cos \pi \delta S \cdot \sin \pi \delta \tau \approx \pi \delta S$, с учетом малых значений τ и δ . Поэтому формулу (16) запишем в виде: $\frac{\pi \delta S}{\pi (S + \tau)} = \frac{\delta S}{S + \tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, отсюда $\sqrt{2} S \delta = S + \tau$, т.е. с учетом принятых допущений получим:

$$1 + \frac{\Delta 2\theta \lambda}{2 \sin \theta} = \sqrt{2} \delta = \frac{\sqrt{2} \alpha \Delta T}{R_0}. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что с увеличением температуры полуширина рентгеновского рефлекса возрастает и чем больше угол дифракции, тем это возрастание больше.

На полуширину рентгеновского рефлекса оказывает влияние размер кристаллического образца. Зависимость между размером (D) и полушириной рефлекса описывается формулой Шеррера [6; 7]:

$$\Delta 2\theta = \frac{c\lambda}{D \cos \theta}. \quad (18)$$

Формула Шеррера обычно выводится из геометрической модели, но при этом (C) может принимать значения в интервале $0,8 \div 2,0$ [5]. В этих моделях не учитывается интенсивность рефлекса. Рассмотрим модели в кинематическом рассеянии. В качестве

рассеивающего центра берется плоскость (hkl) , рассеивающая способность которой определяется по формуле (5).

Если в кристаллите гранями являются эти плоскости (hkl) с межплоскостным расстоянием d и толщиной образца D , то число таких плоскостей равно $N = \frac{D}{d}$. Амплитуда рентгеновского рефлекса равна:

$$A(S) = F(S) \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{2\pi i n d\}. \quad (19)$$

Сумма членов геометрической прогрессии в (19) равна:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\{2\pi i S n d\} = \frac{1 - \exp\{2\pi i S N d\}}{1 - \exp\{2\pi i S d\}}. \quad (20)$$

Интенсивность рефлекса равна:

$$I(S) = F(S) F^*(S) = F^2(S) \frac{\sin^2 \pi S N d}{\sin^2 \pi S d}. \quad (21)$$

Если ΔS – полуширина узла обратной решетки, то $I(S_m \pm \Delta S) = 0$, где S_m – положение максимума рефлекса. По определению, $S \cdot d = 1$, т.е. $S N d = 1$ и $D S = 1$. Из уравнения (21) следует:

$$\sin \pi N d (S \pm \Delta S) = \sin N S d \cdot \cos \pi N d \Delta S \pm \cos N S d \cdot \sin \pi N d \Delta S = 0. \quad (22)$$

С учетом $\sin \pi N S d = 0$, $\cos \pi N S d = \pm 1$ (22) примет вид $\sin \pi N \Delta S d = \sin \pi D \Delta S = 0$, отсюда:

$$\pi D \Delta S = \pi, \quad (23)$$

так как $S = \frac{2 \sin \theta}{\lambda}$, то $\Delta S = \frac{2 \cos \theta (\Delta \theta)}{\lambda} = \frac{\cos \theta (\Delta 2\theta)}{\lambda}$, т.е. (23) запишется:

$$D = \frac{\lambda}{\cos \theta (\Delta 2\theta)}, \quad (24)$$

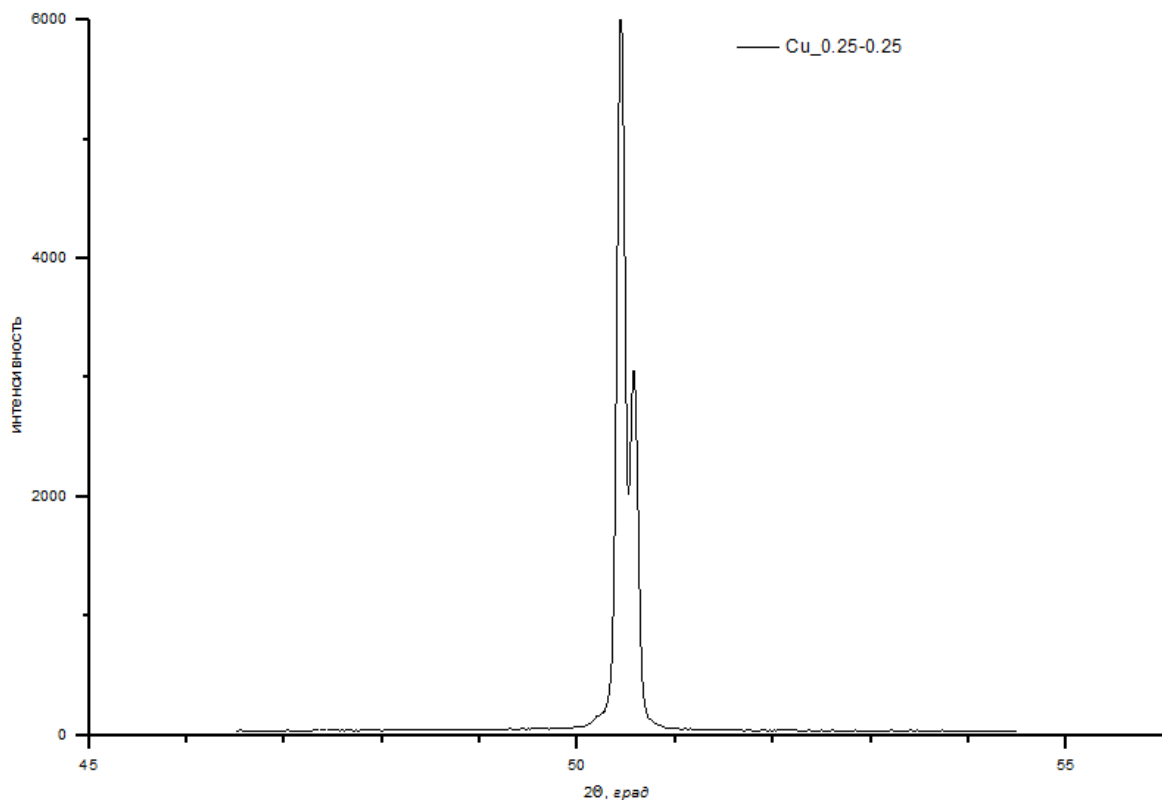
Уравнение Шеррера, выведенное на основе кинематической теории, утверждает, что постоянная (C) равна точно единице. Указанные три причины изменения полуширины рентгеновского рефлекса показывают, что, во-первых, узлы обратной решетки кристаллов имеют не только различный «вес», определяемый структурной амплитудой $F(hkl)$, но и увеличение размера в зависимости от увеличения r^* . Все это, на наш взгляд, позволяет говорить о том, что параметр $(\Delta 2\theta)$ для определения структурно-химических особенностей кристалла надо использовать только для оценки иерархии различий: дефектности, размера, энергии колебаний атомов и т.д.

Но есть еще один фактор, который существенно влияет на величину полуширины рефлекса. Этим фактором являются условия проведения эксперимента. В гониометрах рентгеновских дифрактометрах обязательно есть элементы, фиксирующие падающий на образец луч, и луч, входящий в счетчик [2]. Нами анализировались профили одного и того же рефлекса при одинаковой установке образца и одинаковых режимах работы рентгеновской трубки и счетчика. Образцом являлась поликристаллическая медь. Излучение CuK_{α} – фильтрованное монохроматором, установленным между образцом и счетчиком. Анализировался рефлекс 200. Для примера приведем четыре результата при сочетании размеров щели на входе в гониометр C_r и на входе в счетчик $C_{сч}$.

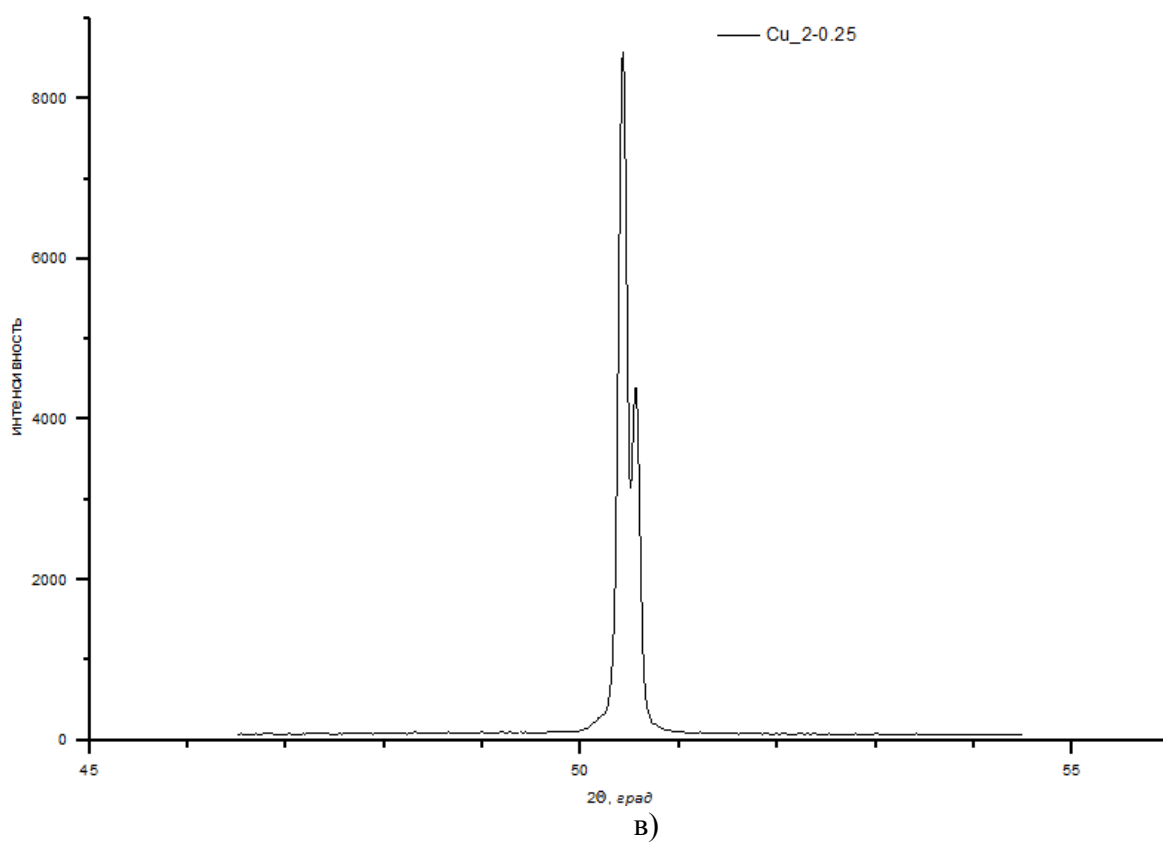
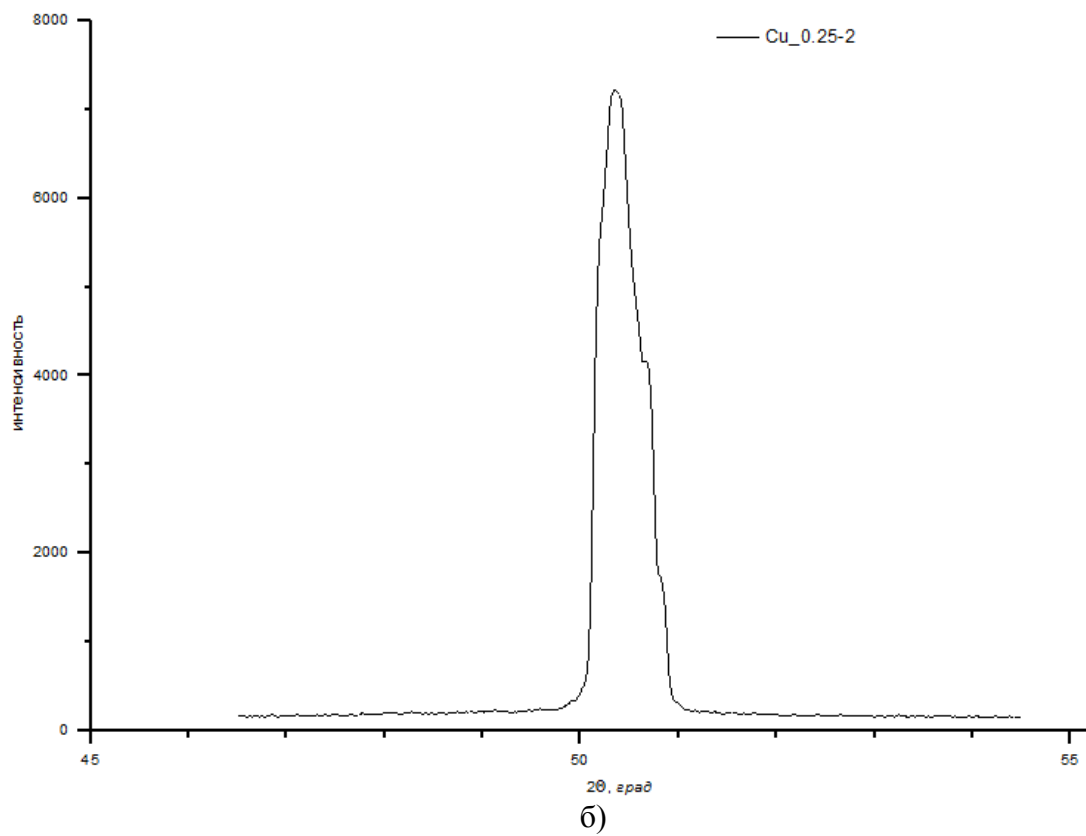
Таблица. – Описание комбинаций щелей гониометра (Γ) и счетчика (C) (ширина щелей в мм)

$\Gamma \setminus C$	$0,25 C_1$	$2,00 C_2$
$0,25 \Gamma_1$	$\Gamma_1 C_1$	$\Gamma_1 C_2$
$2,00 \Gamma_2$	$\Gamma_2 C_1$	$\Gamma_2 C_2$

На рисунке 5 в качестве примера влияния щелей гониометра (Γ) и счетчика (C) на профиль рефлекса взяты сочетания $\Gamma, C - 0,25 \text{ мм}, 2,00 \text{ мм}$. Очевидно, что любые параметры, для расчета которых необходимо значение $(\Delta 2\theta)$, могут на порядок отличаться друг от друга при различных условиях получения дифрактограммы.



а)



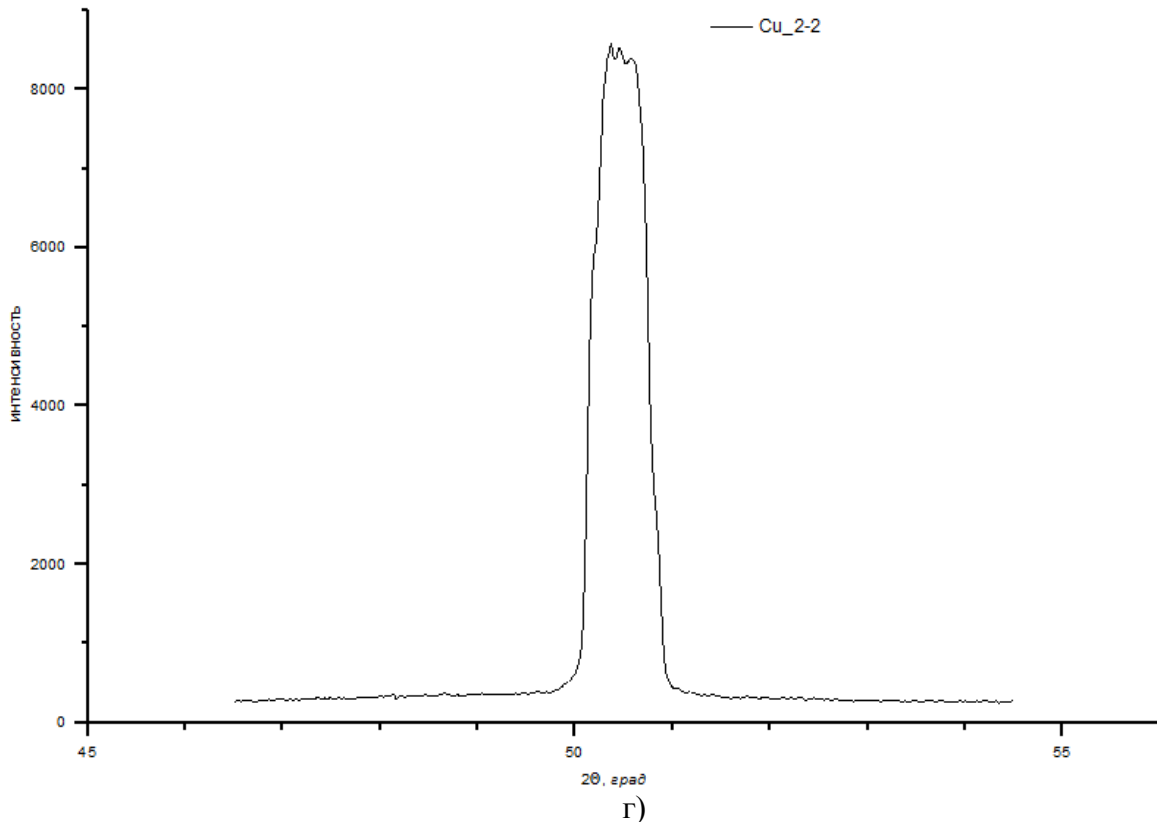


Рисунок 5. – Профили рефлекса меди 200
при $\Gamma_1 = 0,25$; $\Gamma_2 = 2,00$; $C_1 = 0,25$; $C_2 = 2,0$, мм

Заключение

Описана кинематическая теория рассеяния рентгеновского излучения на кристаллах, из которой получены следующие выводы:

1. Так как «вес» узла (hkl) обратной решетки кристалла определяется структурной амплитудой соответствующей ему плоскости (hkl) , то профиль (hkl) описывает геометрию узла, который в теории рассматривается как точка, но, в соответствии с моделью Эвальда, он имеет ненулевое поперечное сечение.

2. При увеличении размера узла обратной решетки увеличивается полуширина рентгеновского рефлекса.

3. На полуширину рефлекса оказывают влияние три основных фактора: структурно-химические дефекты, увеличение температуры, размер кристаллитов.

4. Дефекты вызывают искажения структуры кристалла, приводящие к изменению кристаллографических координат атомов, т.е. влияют на фазовый множитель в формуле расчета структурной амплитуды, что приводит к появлению дополнительного фазового множителя, объясняющего увеличение $(\Delta 2\theta)$.

5. При нагревании, когда в образце устанавливается равновесие, т.е. $grad T = 0$ во всех точках, на величину $(\Delta 2\theta)$ оказывает влияние амплитудный множитель в формуле расчета $F(hkl)$, что обусловлено увеличением амплитуд колебаний атомов.

6. Формула Шеррера, выведенная на основе кинематической теории рассеяния, содержит множитель Шеррера, строго равный единице.

7. Экспериментальный параметр ($\Delta 2\theta$) зависит от геометрии съемки рентгенограммы, так как вариации входных щелей гониометра и счетчика изменяют полуширину рефлекса.

8. Полуширина рефлекса может быть использована для иерархических оценок в серии образцов, рентгенограммы которых получены при одинаковых условиях, но даже в этом случае вероятны ошибочные заключения. Например, при диспергировании в образце изменяется не только размер кристалла, но и его дефектность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинье, А. Рентгенография кристаллов. Теория и практика / А. Гинье. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 604 с.
2. Практическая рентгеновская дифрактометрия / В. А. Лиопо [и др.]. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2010. – 159 с.
3. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.
4. Ramakanth Hebbar, K. Basics of X-Ray Diffraction and its Applications / K. Ramakanth Hebbar. – New Delhi : I. K. International Publishing House Pvt. Ltd, 2007. – 257 p.
5. Лиопо, В. А. Температурный эквивалент наноразмерности / В. А. Лиопо, В. А. Струк // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. – 2009. – Т. 82, № 2. – С. 84–89.
6. Cao, G. Nanostructures and Nanomaterial Synthesis, Properties, and Applications / G. Cao, Y. Wang. – New York : World Scientific, 2011. – 581 p.
7. Mitin, V. V. Quantum Mechanics for Nanostructures / V. V. Mitin, D. I. Sementsov, N. Z. Vagidov. – Cambridge : Cambridge University Press, 2010. – 488 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.02.2018

Liopo V.A., Liaushuk I.A., Auchynnikau Y.V., Pushkarev A. V., Sekerzhitsky S.S. Factors Influencing the Size of the Reciprocal Lattice

The reasons for the change in the half-width of the X-ray reflex are investigated. The value of its dimensions depends on the size of the crystallites in accordance with the well-known Scherrer formula, for which we have shown in the kinematic scattering theory that its constant coefficient is strictly equal to one. It is found that with increasing diffraction angle this half-width always monotonically increases. In this case, the half-width of the X-ray reflex can be used only for hierarchical estimates of the size or temperature

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов¹, А.И. Шелест²

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: otf@brsu.brest.by

О СПИНОРНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ РВУ ДЛЯ МИКРООБЪЕКТА СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И СПЕКТРОМ МАСС

Полученное ранее [1] релятивистское волновое уравнение (РВУ) для микрообъекта со спином $s=1/2$ и тремя различными массами записано в явной спинорной форме. Обсуждается возможность описания на основе данного РВУ поколений нейтрино или кварков в рамках стандартной теории поля.

В работе [1] предложено релятивистское волновое уравнение (РВУ) для микрообъекта со спином $\frac{1}{2}$ и тремя различными значениями массы. При построении указанного РВУ используется набор неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)' \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (1)$$

где знак «штрих» введен для различения кратных компонент. Матрично-дифференциальная формулировка этого РВУ имеет вид:

$$\left(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m\right) \psi(x) = 0, \quad (2)$$

где $\psi(x)$ – 20-компонентная волновая функция, преобразующаяся по представлению (1), Γ_{μ} – квадратные матрицы размерности 20×20 , m – массовый параметр.

В базисе Гельфанда – Яглома [2], который используется в [1], матрица Γ_{μ} , играющая основную роль для уравнения (2), характеризуется структурой

$$\Gamma_4 = \left(C^{1/2} \otimes I_2\right) \oplus I_8. \quad (3)$$

Здесь $C^{1/2}$ – спиновый блок, отвечающий спину $\frac{1}{2}$ в том смысле, что если собственные значения блока $C^{1/2}$ (хотя бы одно) отличны от нуля, то микрочастица обладает спином $\frac{1}{2}$. При этом собственные значения $\pm \lambda_i$ ($i=1,2,3$) связаны с возможными значениями массы m_i рассматриваемого микрообъекта соотношением

$$m_i = \frac{m}{|\lambda_i|}. \quad (4)$$

После наложения стандартных требований релятивистской и Р-инвариантности, а также возможности лагранжевой формулировки теории блок $C^{1/2}$ может быть приведен к виду [1]:

$$C^{1/2} = \sigma_1 \otimes C, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ fc_3^* & gc_4^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где c_1, c_2 – произвольные вещественные; c_3, c_4 – произвольные комплексные параметры; $f, g = \pm 1$. Минимальное уравнение блока $C^{1/2}$ (5) имеет следующий вид:

$$\lambda^3 - \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1c_2 - f|c_3|^2 - g|c_4|^2) + fc_2|c_3|^2 + gc_1|c_4|^2 = 0. \quad (6)$$

Отсюда получается спектр возможных массовых состояний.

Обсуждаемое уравнение может претендовать на описание поколений нейтрино или кварков методами теории РВУ. Для проверки данного предположения необходимо исследовать вытекающие из него физические следствия. Для указанной цели во многих случаях более удобен не базис Гельфанда – Яглома, а спинорный базис. В связи с этим в настоящей работе ставится задача получения системы спинорных уравнений, эквивалентной матрично-дифференциальному РВУ (1) – (3), (5).

Набору представлений (1) соответствует в общем случае система спинорных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} \alpha \hat{\partial}_{ab} \psi^b + \beta \hat{\partial}_c^b \psi_{(ab)}^c + m \psi_a &= 0, \\ \alpha \hat{\partial}^{ab} \psi_b - \beta \hat{\partial}_b^c \psi_c^{(ab)} + m \psi^a &= 0, \\ \gamma \hat{\partial}_{ab} \varphi^b + \sigma \hat{\partial}_c^b \varphi_{(ab)}^c + m \varphi_a &= 0, \\ \gamma \hat{\partial}^{ab} \varphi_b - \sigma \hat{\partial}_b^c \varphi_c^{(ab)} + m \varphi^a &= 0, \\ f \beta^* \hat{\partial}_a^{(b} \psi^{c)} + g \sigma^* \hat{\partial}_a^{(b} \varphi^{c)} + m \psi_a^{(bc)} &= 0, \\ -f \beta^* \hat{\partial}_{(b}^a \psi_{c)} - g \sigma^* \hat{\partial}_{(b}^a \varphi_{c)} + m \varphi_{(bc)}^a &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (7) $\psi_a, \varphi_a, \psi^a, \varphi^a, \psi_a^{(bc)}, \varphi_{(bc)}^a$ – спиноры, соответствующие неприводимым представлениям

$$\begin{aligned} \psi_a &\sim \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_a \sim \left(0, \frac{1}{2}\right)', \quad \psi^{\dot{a}} \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right), \\ \varphi^{\dot{a}} &\sim \left(\frac{1}{2}, 0\right)', \quad \psi_a^{(\dot{b}\dot{c})} \sim \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad \psi_{(bc)}^{\dot{a}} \sim \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{aligned} \quad (8)$$

и использованы обозначения спинорных производных [3]:

$$\begin{aligned} \partial_{ab} &= \frac{1}{i} \partial_{\mu} (\sigma^{\mu})_{ab}, \quad \partial^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{i} \partial_{\mu} (\sigma^{\mu})^{\dot{a}\dot{b}} \quad (x_4 = ict), \\ (\sigma^1)_{ab} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (\sigma^2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, (\sigma^3)_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (\sigma^4)_{ab} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ (\sigma^1)^{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, (\sigma^3)^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\sigma^4)^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \\ \partial_{ab} &= \frac{1}{i} \partial_{\mu} (\sigma^{\mu})_{ab}, \quad \partial^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{i} \partial_{\mu} (\sigma^{\mu})^{\dot{a}\dot{b}} \quad (x_4 = ict). \end{aligned} \quad (9)$$

Систему (7) можно записать в матрично-дифференциальной форме (2). Выбрав следующий порядок расположения компонент волновой функции

$$\begin{aligned} \psi &= \left(\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1^{(\dot{1}\dot{2})}, \psi_2^{(\dot{1}\dot{2})}, \psi_1^{(\dot{2}\dot{2})}, \psi_2^{(\dot{2}\dot{2})}, \psi_1^{(\dot{1}\dot{1})}, \psi_2^{(\dot{1}\dot{1})}, \right. \\ &\left. \varphi_1^{\dot{1}}, \varphi_2^{\dot{1}}, \psi_{(12)}^{\dot{1}}, \psi_{(12)}^{\dot{2}}, \psi_{(22)}^{\dot{1}}, \psi_{(11)}^{\dot{2}}, \psi_1^{(\dot{1}\dot{1})}, \psi_2^{(\dot{2}\dot{2})}, \psi_{(11)}^{\dot{1}}, \psi_{(22)}^{\dot{2}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

получим для матрицы Γ_4 выражение:

$$\Gamma_4 = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma^{(8)} & \\ \hline \Gamma^{(8)} & O_4 \end{array} \right), \quad (11)$$

где $\Gamma^{(8)}$ – матрица 8×8 вида

$$\Gamma^{(8)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\sigma & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \sigma & -\sigma & 0 \\ -f\beta^* & 0 & -g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\beta^* & 0 & g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f\beta^* & 0 & -g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\beta^* & 0 & g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Ненулевые собственные значения матрицы Γ_4 (11) с точностью до знака совпадают с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ блока $\Gamma^{(8)}$ (12). Последние являются решениями кубического уравнения:

$$\lambda^3 - \lambda^2(\alpha - \gamma) + \lambda(\alpha\gamma - 2f|\beta|^2 - 2g|\sigma|^2) + 2f\gamma|\beta|^2 + 2g\alpha|\sigma|^2 = 0. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с аналогичным уравнением (6) для блока C (5), находим связь между параметрами c_1, c_2, c_3, c_4 и $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$:

$$\alpha = c_1, \quad \gamma = c_2, \quad \beta = \frac{c_3}{\sqrt{2}}, \quad \sigma = \frac{c_4}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Таким образом, в спинорной форме система уравнений, эквивалентная матрично-дифференциальному РВУ (1) – (3), (5), имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1 \partial_{ab} \psi^b + \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 \partial_{\dot{c}}^b \psi_{(ab)}^{\dot{c}} + m \psi_a &= 0, \\ c_2 \partial_{a\dot{b}} \varphi^b + \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 \partial_{\dot{c}}^b \psi_{(ab)}^{\dot{c}} + m \varphi_a &= 0, \\ c_1 \partial^{ab} \psi_b - \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 \partial_b^c \psi_c^{(\dot{a}\dot{b})} + m \psi^a &= 0, \\ c_2 \partial^{\dot{a}\dot{b}} \varphi_b - \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 \partial_b^c \psi_c^{(\dot{a}\dot{b})} + m \varphi^a &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} f c_3^* \partial_a^{(\dot{b}} \psi^{\dot{c})} + \frac{1}{\sqrt{2}} g c_4^* \partial_a^{(\dot{b}} \varphi^{\dot{c})} + m \psi_a^{(\dot{b}\dot{c})} &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} f c_3^* \partial_{(\dot{b}}^{\dot{a}} \psi_{\dot{c})} - \frac{1}{\sqrt{2}} g c_4^* \partial_{(\dot{b}}^{\dot{a}} \varphi_{\dot{c})} + m \psi_{(\dot{b}\dot{c})}^{\dot{a}} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Изучение системы (15) с точки зрения возможности описания на ее основе реально существующих микрообъектов является предметом исследования авторов в настоящее время. Результаты этого исследования будут опубликованы в последующем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гугнюк, М. Л. Описание поколений нейтрино в подходе теории релятивистских волновых уравнений / М. Л. Гугнюк, В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 5–11.
2. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1948. – Вып. 8, т. 18. – С. 703–733.
3. Паули, В. Труды по квантовой теории / В. Паули. – М. : Наука, 1977. – 696 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 05.02.2018

Pletyukhov V.A., Shelest A.I. On the Spinor Formulation RWE for a Microobject with Spin $\frac{1}{2}$ and Spectrum of Masses

The recently derived [1] relativistic wave equation (RWE) for a microobject with spin $\frac{1}{2}$ and three different masses is formulated in the explicit spinor form. The possibility to describe neutrino and quark generations on the basis of this RWE in the framework of the standard field theory is discussed.

УДК 669.2/8:620

В.С. Савенко¹, О.А. Троицкий², А.В. Гуненко³¹д-р техн. наук, проф., зав. каф. физики и математики

Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

²д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотрудник

Института машиноведения имени А.А. Благонравова РАН

³аспирант каф. физики и математики

Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

e-mail: savenko-vl@rambler.ru¹

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований электропластической деформации металлов. Рассмотрено влияние импульсов тока высокой плотности порядка 10^3 А/мм² длительностью 10^{-4} с во время пластической деформации нержавеющей стали 12Х18Н10Т с нагрузкой выше предела текучести и собственное магнитное поле внутри деформируемого образца с учетом вторичных пондеромоторных сил. Возникающие пондеромоторные явления в виде динамического пинч-эффекта создают ультразвуковую вибрацию решеточной системы, и, как следствие, изменяется кинетика пластической деформации, увеличивается амплитуда колебаний дислокаций с периодическим изменением позиции дислокационных петель, что стимулирует отрыв дислокаций от стопоров. Показано, что в научно-прикладном аспекте необходимо учитывать физические условия создания пондеромоторных эффектов применительно к конкретным технически важным материалам в условиях деформирования статическими, динамическими и знакопеременными нагрузками.

Введение

Основные направления развития современного физического материаловедения связаны с интенсификацией технологических процессов обработки металлов давлением в условиях внешних энергетических воздействий для получения технически важных материалов с высокими служебными характеристиками, обеспечивающими их применение в экстремальных физических условиях.

Электропластичность в металлах реализуется при пропускании импульсов тока высокой плотности порядка 10^3 А/мм² длительностью 10^{-4} с во время пластической деформации через электропроводящие материалы, которая получила название электропластический эффект (ЭПЭ). ЭПЭ стимулирует деформационные процессы, уменьшает усилия деформации, энергопотребление, улучшает физико-механические и служебные характеристики материала.

Возбуждение электронной подсистемы металла импульсами тока для реализации электропластичности в металлическом образце, нагруженном выше предела текучести, приводит к возникновению дополнительных деформационных процессов за счет пондеромоторных эффектов, обуславливающих виброакустические колебания кристаллической решетки в различных кристаллографических направлениях [1; 2].

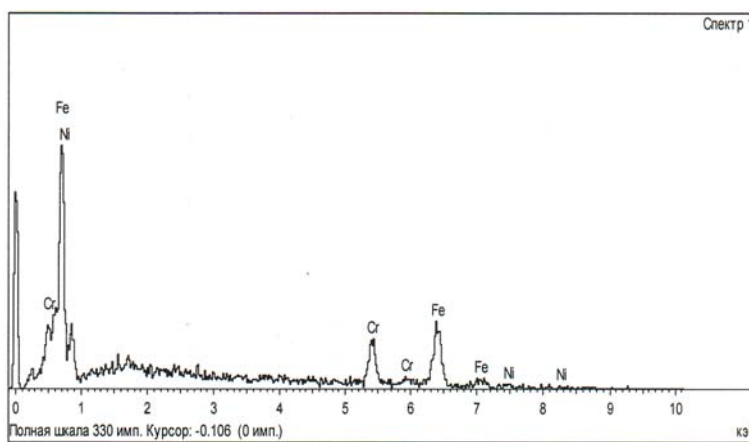
Некоторые авторы объясняют механизмы электропластической деформации электроно-дислокационным взаимодействием, давлением «электронного ветра» на скопление дислокаций, точечных дефектов, уменьшением стартовых напряжений для срыва дислокаций со стопоров, действием термических и нетермических эффективных напряжений, а также спиновым разупрочнением металлов [3–6].

Следует отметить, что при возбуждении импульсов тока в образцах выделяется значительное количество Джоулева тепла, однако при длительности импульсов тока 100 мкс и плотности тока от 100 до нескольких тысяч А/мм² нагрев образца не превышает нескольких градусов, если импульсы разделены интервалами в десятки секунд.

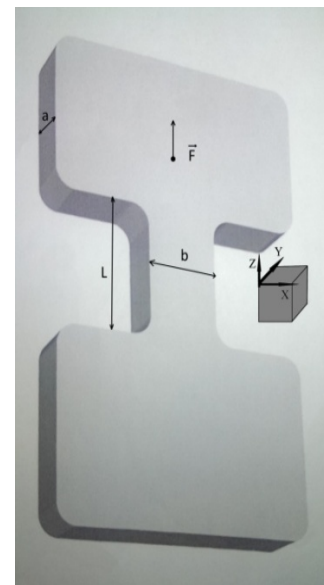
Методика проведения экспериментальных исследований

Образцы специальной формы и размеров из нержавеющей стали 12Х18Н10Т со спектром, полученным на растровом электронном микроскопе с рентгеновским микроанализатором Tescan, содержали никель, железо и хром (рисунок 1а) и деформировались статической силой F на испытательной машине ИР5047-50-10. К образцу по специальной методике монтировался датчик – трехкомпонентный пьезометрический акселерометр АП20 весом 5 г (рисунок 1б).

Выбор материала обуславливался содержанием в стали ферро-магнитного железа и никеля, а также парамагнитных примесей, обладающих большими собственными магнитными моментами, которые при реализации пинч-эффекта в условиях электропластичности ориентируются по направлению возникающего собственного магнитного поля тока, тем самым усиливают его, что стимулирует электронно-пластическую деформацию электропроводящего материала.



Название спек...	Cr	Fe	Ni	Итого
<input checked="" type="checkbox"/> Спектр 1	19.29	70.57	10.14	100.00
<input checked="" type="checkbox"/> Спектр 2	17.13	71.33	11.54	100.00
<input checked="" type="checkbox"/> Спектр 3	18.10	67.63	14.27	100.00



а)

б)

Рисунок 1. – Рентгенограмма образца нержавеющей стали 12Х18Н10Т на растровом электронном микроскопе с рентгеновским микроанализатором (а). Испытательный образец с размерами L (длина), b (ширина шейки) и датчиком трехкомпонентного пьезометрического акселерометра (б)

Во время деформации с нагрузкой выше предела текучести через образцы пропускаясь импульсы тока плотностью $10^2 - 10^4 \text{ A/mm}^2$ и длительностью 100 мкс. При действии тока в образце происходит возбуждение электронной подсистемы металла и реализуется электропластический эффект в виде осцилляций деформирующих усилий, без существенного теплового эффекта и тепловой дилатации.

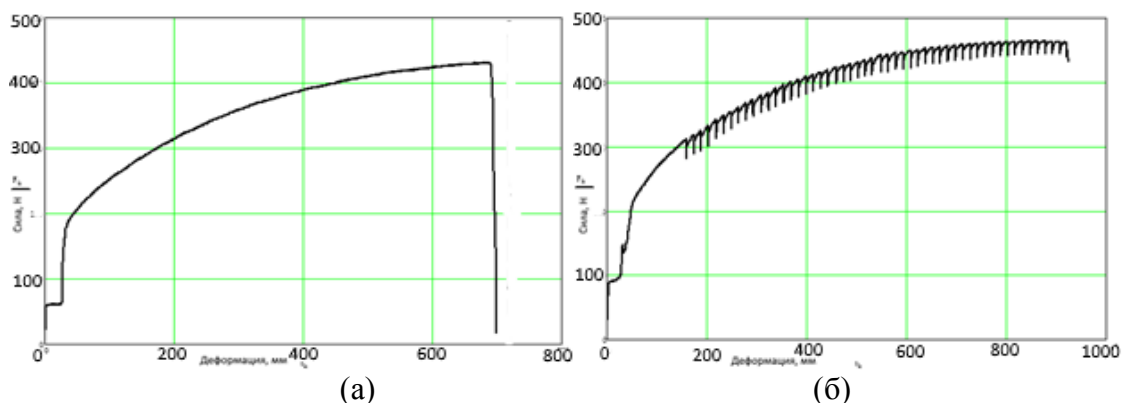


Рисунок 2. – Зависимость приложенной к образцу статической силы от величины деформации до момента его разрушения:
(а) – нержавеющая сталь без воздействия тока;
(б) – нержавеющая сталь под действием импульсов тока

Возникающие деформационные напряжения в образце за счет электронно-дислокационного взаимодействия и пондеромоторных факторов обуславливают виброакустические колебания кристаллической решетки в различных направлениях. Следует отметить, что деформационная аппаратура, регистрирующая осцилляции деформирующих усилий в осевом направлении, при действии статической силы F имеет недостаточное разрешение по быстродействию для определения вибрационного спектра ультразвуковых затухающих колебаний и их характеристик. В связи с этим возникающие при реализации электропластичности ультразвуковые колебания регистрировались специальными трехкомпонентными датчиками АП20, выполненными на основе пьезоэлектрических аксельрометров с диапазоном резонансной частоты, превышающей 55 КГц, которые анализировались специальным модулем сбора данных NIUSB4431 с помощью компьютерной программы LabVIEW (рисунок 3) [7].

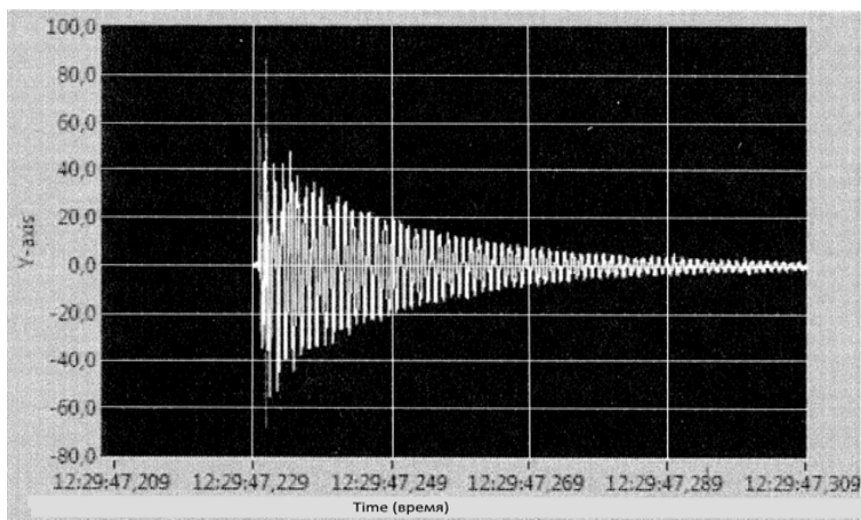


Рисунок 3. – Переходные процессы ультразвуковой акустической вибрации от действия импульсов тока в условиях деформации выше предела текучести

Исследование микроструктуры образцов проведено с использованием растрового электронного микроскопа LEO 1455VP (CarlZeiss). Наблюдение осуществлялось регистрацией отраженных электронов, ускоряющее напряжение составляло 20 кВ.

Результаты экспериментальных исследований и их обсуждение

Возбуждение импульсов тока большой плотности во время пластической деформации выше предела текучести в металле приводит к возникновению дополнительных механических напряжений за счет пондеромоторных факторов, которые обуславливают виброакустические ультразвуковые колебания кристаллической решетки на фронте нарастания импульса. При малой осевой нагрузке образца F колебания происходят в достаточно большом интервале времени. С ростом силы статической нагрузки F затухающие процессы происходят интенсивнее. С увеличением нагрузки увеличивается не только амплитуда импульсов ускорения, но и скорость затухания колебаний после прохождения импульса тока, причем в поперечных к плоскости образца направлениях эффект заметней.

При реализации пинч-эффекта в условиях электропластичности создающееся собственное магнитное поле импульсного тока диффундирует к оси образца, при этом скорость диффузии зависит как от проводимости, так и от частоты тока [1]:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\rho c^2}{4\pi\Delta H}, \quad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление, c – скорость света, ΔH – оператор Лапласа.

$$H = H_m e^{-qx} \cos(\omega t - qx), \quad (2)$$

где H_m – амплитудные значения напряженности поля; $q = \left(\frac{2\pi\omega}{\rho c^2}\right)$, ω – круговая частота,

равная $(LC)^{\frac{1}{2}}$; t – время; L и C – индуктивность и емкость цепи.

Направление скорости распространения упругих волн будет иметь как радиальную (3), так и продольную (4) составляющие:

$$V_r = \left(\frac{1}{\rho d\sigma / d\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$$V_r = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

где σ – приложенное механическое напряжение, ε – относительная деформация, $\rho = \frac{\gamma}{g}$, γ – удельный вес металла и g – ускорение силы тяжести.

Под влиянием собственного магнитного поля тока, которое кольцевыми линиями охватывает деформируемый образец, возникает поляризация электронной подсистемы металла, вследствие чего появляется поперечное электрическое поле Холла, препятствующее дальнейшему сжатию электронной плазмы. В результате перераспределение напряженности магнитного поля H в приповерхностных слоях металла будет:

$$H_z(x,t) = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right),$$

где δ – толщина скин-слоя.

Возникающий от высокочастотного тока скин-эффект индуцирует вихревые токи, препятствующие равномерному распределению плотности по поперечному сечению проводника, при этом возникает скин-слой с меньшей плотностью тока на оси, чем у поверхности. Возникающие пондеромоторные явления в виде динамического пинч-эффекта создают дополнительные напряжения за счет ультразвуковой вибрации решеточной системы, и, как следствие, увеличивается амплитуда колебаний дислокаций с периодическим изменением позиции дислокационных петель, что стимулирует отрыв дислокаций от стопоров и изменяет кинетику пластической деформации. Из графиков (рисунок 2) видно, что в условиях электропластичности существенно увеличиваются (20 %) пределы текучести и прочности материала.

Таким образом, в научно-прикладном аспекте имеет смысл учитывать физические условия создания пондеромоторных эффектов, применительно к конкретным технически важным материалам при деформировании статическими, динамическими и знакопеременными нагрузками. Важными с практической точки зрения представляются исследования виброакустических явлений, обуславливающих механические напряжения ионного остова кристаллической решетки металла для условий эксплуатации ответственных конструкций, деталей машин и механизмов. Ультразвуковые виброакустические колебания могут являться комплексным средством неразрушающего контроля высокотехнологичных устройств и механизмов, а также для определения физико-механических и служебных характеристик материалов, сложных конструктивных систем и особенностей их эксплуатации на опасных производственных объектах.

При воздействии импульсов электрического тока на образец, нагруженный выше предела текучести, изменяется не только пластичность нержавеющей стали, но и ее прочностные характеристики: микроструктура становится более мелкозернистой, размер зерен уменьшается, изменяется морфология, внутри материала появляются зоны рекристаллизации с размером зерна 1–3 мкм (рисунок 4).

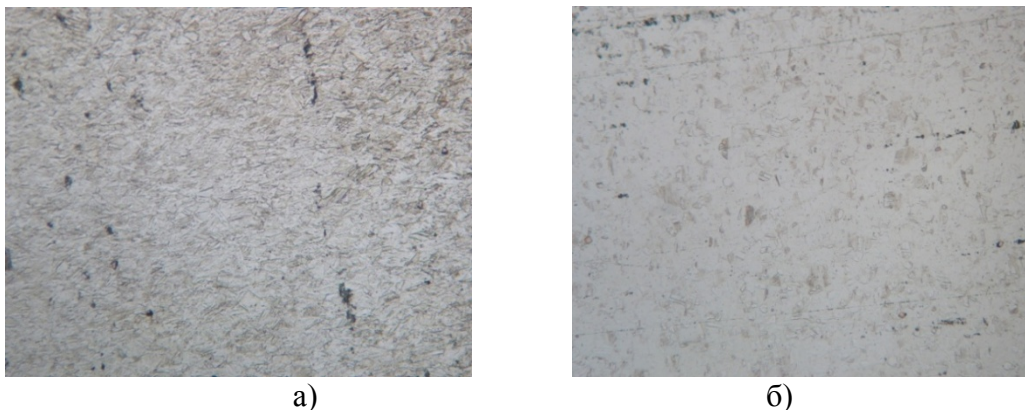


Рисунок 4. – Микроструктура образца под действием тока (а) и без воздействия тока (б)

Изучение деформационных характеристик образцов с током и без тока по различным параметрам показало существенное влияние внешних энергетических воздействий на микроструктуру образцов нержавеющей стали. Морфологический анализ изображения определялся прибором «Пост микроконтроля МК-3» с помощью компьютерной программы Autoscan Objects, с выделением гистограмм по классам и определением контроля физико-механических свойств материала (рисунок 5 а, б).

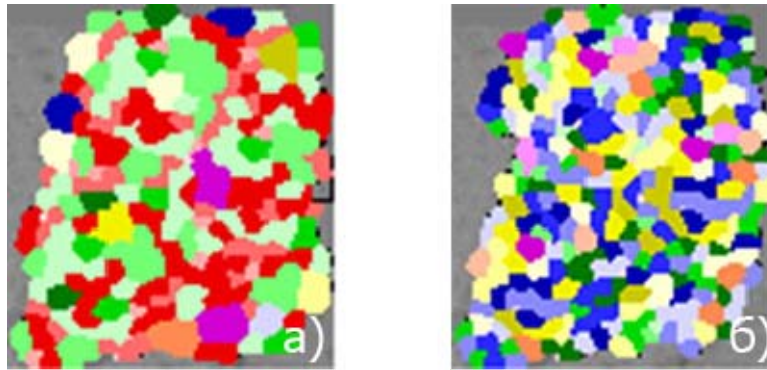


Рисунок 5. – Морфология образцов без тока (а) и с током (б) (100х)

Анализ расчетов классов зерен в доли по количеству и массе, по параметрам площади зерен (рисунок 6) и периметр зерен (рисунок 7) показал существующее влияние импульсов тока на микроструктуру и деформационные процессы нержавеющей стали в условиях электропластичности.



Рисунок 6. – Сравнительный график по параметру площади

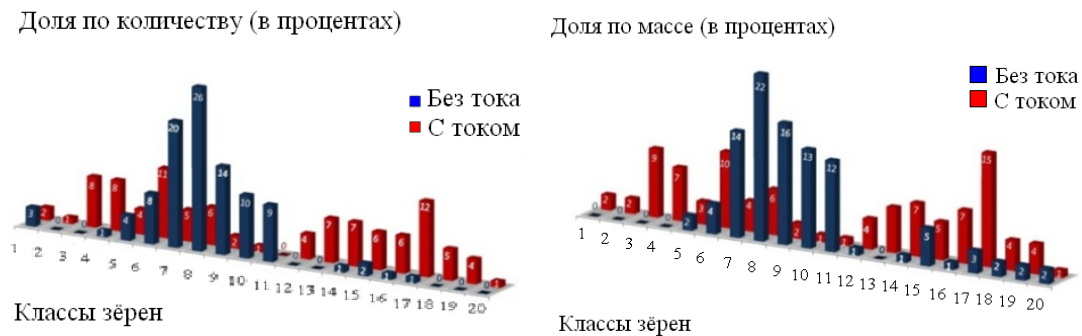


Рисунок 7. – Сравнительный график по параметру периметр

При воздействии импульсов электрического тока на образец нержавеющей стали, нагруженный выше предела текучести статической силой с вектором F продольной ориентации относительно оси образца, происходит перестройка ОЦК-структуры с изменением α -фазы, мартенсита и аустенита деформации.

Улучшение микроструктуры поверхностного слоя нержавеющей стали в условиях электропластичности реализуется созданием мелкозернистого строения с частичной аморфизацией за счет увеличения изотропности кристаллической решетки с изменением прочности. Таким образом, электропластическая деформация позволяет реализовать интенсификацию технологического процесса обработки металлов давлением с возможностью сочетания достаточной прочности материала с повышенной пластичностью и улучшенными физико-механическими свойствами и служебными характеристиками.

Заклучение

1. Внешние энергетические воздействия импульсами тока большой плотности, пропущенными через металл, нагруженный выше предела текучести, во время пластической деформации приводят к возникновению дополнительных механических напряжений за счет пондеромоторных факторов, которые обуславливают виброакустические ультразвуковые колебания кристаллической решетки на фронте нарастания импульса.

2. Пондеромоторные явления в виде динамического пинч-эффекта создают ультразвуковую вибрацию решеточной системы материала, увеличивая амплитуду колебаний дислокаций с периодическим изменением позиции дислокационных петель, что приводит к росту вероятности отрыва дислокаций от стопоров, и, как следствие, изменяется кинетика пластической деформации, стимулируется пластичность без заметного изменения прочности.

3. Физические условия создания пондеромоторных факторов электропластичности необходимо учитывать при деформации конкретных технически важных материалов знакопеременными, статическими и динамическими нагрузками для эксплуатации ответственных конструкций, деталей машин и механизмов и применять как комплексное средство неразрушающего контроля для определения физико-механических, служебных характеристик и эксплуатационных свойств в сложных технологических системах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савенко, В. С. Вклад пондеромоторных факторов в реализацию электропластической деформации / В. С. Савенко, О. А. Троицкий, А. Г. Силивонец // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – № 1. – С. 85–91.
2. Савенко, В. С. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / О. А. Троицкий, В. С. Савенко. – Минск : ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.
3. Савенко, В. С. Физические и технологические основы электропластической деформации металлов / В. С. Савенко, О. А. Троицкий. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2016. – 208 с.
4. Bennett, W. H. Magnetically self-focussing streams / W. H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – № 45. – P. 890.
5. Батаронов, И. Л. О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / И. Л. Батаронов А. М. Рошупкин // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, № 11. – С. 3311–3318.
6. Савенко, В. С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий : монография / В. С. Савенко. – 2-е изд., доп. и перераб. – Минск : БГАФК, 2003. – 203 с.

7. Новые исследования вибрации металлов с помощью пьезометрических преобразователей под влиянием импульсов тока в статических и динамических условиях / В. И. Стащенко [и др.] // Фундаментальные исследования инновационных технологий в машиностроении. – М. : ИМАШ РАН, 2015. – С. 242–245.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.10.2017

Savenko V.S., Troitsky O.A., Gunenko A.V. Physical Aspects of Electroplastic Deformation of Metals

The article presents the results of theoretical and experimental studies of electroplastic deformation of metals. The effect of high density current pulses of the order of 10^3 A/mm² for a duration of 10^{-4} s during the plastic deformation of stainless steel 12X18H10T above the yield point and the intrinsic magnetic field inside the deformable sample are considered, taking into account the secondary ponderomotive forces. The emerging ponderomotive phenomena in the form of a dynamic pinch effect are created ultrasonic vibration of the lattice system, and as a result the kinetics of plastic deformation changes, the amplitude of dislocation oscillations increases with a periodic change in position Dislocation loops, which stimulates the detachment of dislocations from the stoppers.

УДК 535.012

Н.Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: sender@brsu.brest.by

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

На основе предложенного метода определения оптических постоянных поглощающих одноосных кристаллов и низкосимметричных кристаллов ромбической сингонии, основанного на разложении функций в ряд по малым величинам, рассчитаны оптические постоянные таких кристаллов, как сапфир, турмалин, ниобат лития, кварц, антрацит, кальцит, рубин, соль сульфокислоты Tl_3AsS_4 и ортоферрита тербия $TbFeO_3$. Предлагаемый подход позволяет относительно просто вычислить оптические постоянные одноосных и ромбических поглощающих кристаллов по приближенным соотношениям. При этом удается избежать трудностей, связанных с решением обратной задачи, поскольку оптические постоянные вычисляются без потери точности, которая не превышает погрешностей эксперимента, по формулам подстановкой в них измеряемых эллипсометрических параметров.

Для определения оптических постоянных необходимо найти эллипсометрические углы ψ и Δ , характеризующие поляризацию отраженной от кристалла волны. Экспериментальные измерения поляризационных углов ψ и Δ проводились на эллипсометре, в оптической схеме которого компенсатор расположен до исследуемого образца. Источник света – гелий-неоновый лазер ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$). Измерительная схема эллипсометра представляет собой так называемую нулевую схему, в которой эллипсометрические углы ψ и Δ определяются в момент нулевой (или минимальной) интенсивности света на выходе эллипсометра. Проводимые по такой схеме измерения более прецизионные по сравнению со схемами, основанными на использовании измерения интенсивности света [1].

В связи с тем что при эллипсометрических измерениях на анизотропных объектах требования к точности определения углов ψ и Δ возрастают, необходимо исключить систематические ошибки, которые появляются из-за неидеальности оптических элементов эллипсометра. Для изотропных отражающих систем устранение этих ошибок может достигаться за счет зонных усреднений [1]. Для кристаллов обычные зонные усреднения возможны в тех случаях, когда матрица отражения диагональна. В общем же случае они не применимы из-за появления недиагональных элементов r_{sp} и r_{ps} в матрице отражения, связанных не только с погрешностью оптических элементов эллипсометра, но и непосредственно со свойствами изучаемого образца [2].

В общем случае анизотропной слоистой среды из-за недиагональных элементов матрицы отражения изменения состояния поляризации плоской монохроматической волны характеризуются уже не одной, как в случае изотропной отражающей системы, а тремя парами поляризационных углов, определяемых системой трех комплексных основных уравнений. Такой подход к эллипсометрии анизотропных сред был предложен в [1; 3; 4] и основывался на естественном обобщении эллипсометрии изотропных систем. В обобщенной эллипсометрии измеряются и недиагональные элементы матрицы отражения. Точность измерения их гораздо ниже, чем диагональных. Поэтому для того,

чтобы использовать обобщенную эллипсометрию, необходимо увеличить точность измерения недиагональных элементов, что возможно при учете различных неидеальностей эллипсометра.

На практике, если возможно, удобно использовать частные случаи ориентации кристаллографических осей, когда матрица отражения диагональна. Такие ориентации реализуются довольно часто при росте кристаллов. Предложенный подход для определения оптических постоянных поглощающих кристаллов основан на использовании таких ориентаций кристалла, когда недиагональные элементы матрицы отражения равны нулю. Это дает возможность использовать зонные усреднения, устраняющие систематические ошибки, связанные с несовершенствами эллипсометра.

В измерительной схеме эллипсометра азимут компенсатора фиксировался и был равен $\gamma = -45^\circ$ (γ – угол между «быстрой» осью компенсатора и плоскостью падения света), а азимуты поляризатора и анализатора устанавливались так, чтобы получить на выходе анализатора минимальную интенсивность света (условие гашения света). Такая схема с фиксированным азимутом компенсатора дает наибольшую точность метода при измерениях на изотропных образцах при ориентации «быстрой» оси компенсатора $\pm 45^\circ$ [5] и получила наибольшее распространение, хотя для измерений на кристаллах в обобщенной эллипсометрии не самая лучшая [5]. Это обусловлено, главным образом, тем обстоятельством, что именно компенсатор из-за отклонений от идеальности $\lambda/4$ пластины может при измерениях вносить наиболее существенные ошибки, зависящие от угла между «быстрой» осью и плоскостью падения света. Известно [6], что в обобщенной эллипсометрии условия компенсации выполняются только в определенной области ориентаций компенсатора, определяемой свойствами исследуемой структуры. Это, вообще говоря, может сделать невозможным гашение при ориентации компенсатора $\pm 45^\circ$. Однако в нашем случае, при использовании ориентаций кристалла, когда матрица отражения диагональна, ориентация «быстрой» оси под углом 45° дает наибольшую точность.

В процессе измерения приходится сталкиваться с проблемой однозначного определения поляризационного угла Δ . Она устраняется при использовании измерительных зон [1; 5]. Угол ψ определен в интервале $(0, \pi/2)$, и никаких особенностей с его определением не возникает. Измерения проводились в двух зонах – 3 и 4 (равносильно проводить измерения в зонах 1 и 2), т.е. компенсатор был ориентирован так, что $\gamma = -45^\circ$ [1]. Из-за несовершенств компенсатора его относительная разность пропускания осей $f \neq 1$ и разность фаз $\delta \neq 90^\circ$, формулы, связывающие углы ψ и Δ с углами гашения поляризатора P и анализатора A , имеют вид [1]:

$$3 \text{ зона } \Delta = 2P_3 + v_3 + \pi/2 + 2\pi l, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \alpha_3 \operatorname{tg}A_3, \quad (2)$$

$$4 \text{ зона } \Delta = 2P_4 + v_4 - \pi/2 + 2\pi l, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \alpha_4 \operatorname{tg}A_4, \quad (4)$$

где величины v_i , α_i ($i = 3, 4$) при учете несовершенств компенсатора определяются согласно выражениям [1]:

$$\operatorname{tg}v_i = \frac{h_i \cos 2P_i - f \sin \delta \sin 4P_i}{h_i \sin 2P_i + 2f \sin \delta \cos 2P_i}, \quad (5)$$

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{h_i^2 + 4f^2 \sin^2 \delta \cos^2 2P_i}}{(1+f)^2 + 2f \cos \delta \cos 2P_i - (1-f)^2 \sin 2P_i}, \quad (6)$$

$$h_i = (1+f^2) \sin P_i - (1+f^2), \quad (7)$$

$$f^2 = \frac{\sin(P_3 + P_4) - \cos(P_3 - P_4)}{\sin(P_3 + P_4) + \cos(P_3 - P_4)}, \quad (8)$$

$$\cos \delta = -\frac{1}{f} \cdot \frac{\sin(P_3 - P_4)}{\sin(P_3 + P_4) + \cos(P_3 - P_4)} \cdot \frac{\operatorname{tg} A_3 - \operatorname{tg} A_4}{\operatorname{tg} A_3 + \operatorname{tg} A_4}. \quad (9)$$

Зонные формулы для поляризационного угла ψ удобнее представить в виде [1]:

$$\psi = A_i + \mu_i \quad (i = 3, 4), \quad (10)$$

$$\mu_i = \operatorname{artg} \frac{(\alpha_i - 1) \operatorname{tg} A_i}{1 + \alpha_i \operatorname{tg}^2 A_i}. \quad (11)$$

Параметры компенсатора определяются по формулам (8), (9) из эллипсометрических измерений, проводимых в двух зонах. Это имеет важное значение в связи с тем, что практически трудно с хорошей точностью знать геометрические и оптические параметры компенсатора, вследствие чего расчетные f и δ могут существенно отличаться от истинных. Отметим высокую чувствительность параметров f и δ компенсатора к его оптическим константам и толщине, зависящим от температуры, которая может измениться во время эксперимента, что сильно отражается на измеренных зонных значениях углов ψ и Δ . В [7] были проведены исследования зависимости параметров кварцевого компенсатора и компенсатора из исландского штата от температуры. Было показано, что уже при изменении температуры на $0,5^\circ$ параметры компенсатора значительно изменяются. Для устранения зависимости параметров компенсатора от температуры необходимо компенсатор термостатировать, что существенно при измерениях на анизотропных объектах. Строго поддерживать заданную температуру компенсатора с высокой точностью довольно трудно. Поэтому удобнее построить зависимость параметров компенсатора (f и δ) от температуры, как это указано в [7].

Для различных температур были проведены измерения в двух зонах на кристалле кремния, и по формулам (8) и (9) рассчитаны f и δ (рисунок 1). При эллипсометрических измерениях, точно определяя температуру компенсатора, по градуировочной кривой находятся f и δ . Параметры компенсатора, как указывалось выше, можно достаточно точно определить по инвариантам эллипсометрии [1] и измерениям на тестовом образце (8, 9).

Однако f и δ можно контролировать несколько по-иному, используя двухзонную методику, которая применима при измерениях на поглощающих кристаллах в таких случаях ориентации кристалла, когда матрица отражения диагональна, f и δ рассчитываются при каждом акте измерения в двух зонах, причем по формулам f и δ для изотропного образца. Затем на основе рассчитанных f и δ находятся поляризационные углы ψ и Δ и усредняются по двум зонам. Таким путем удастся учесть температурные колебания параметров компенсатора без его термостабилизации.

В качестве компенсатора в эллипсомере использовалась пластинка одноосного кристалла кварца с оптической осью, лежащей в плоскости пластины. При проведении измерений на образцах, если не учитывать оптическую активность, ошибка в определении поляризационных углов может достигать 15' [8]. Исключить ошибки, связанные с оптической активностью кварца [8], можно путем переопределения начала отсчетов азимутов поляризующих элементов [9; 10]. Новые нулевые азимуты могут быть найдены расчетным путем или в процессе юстировки [9; 10].

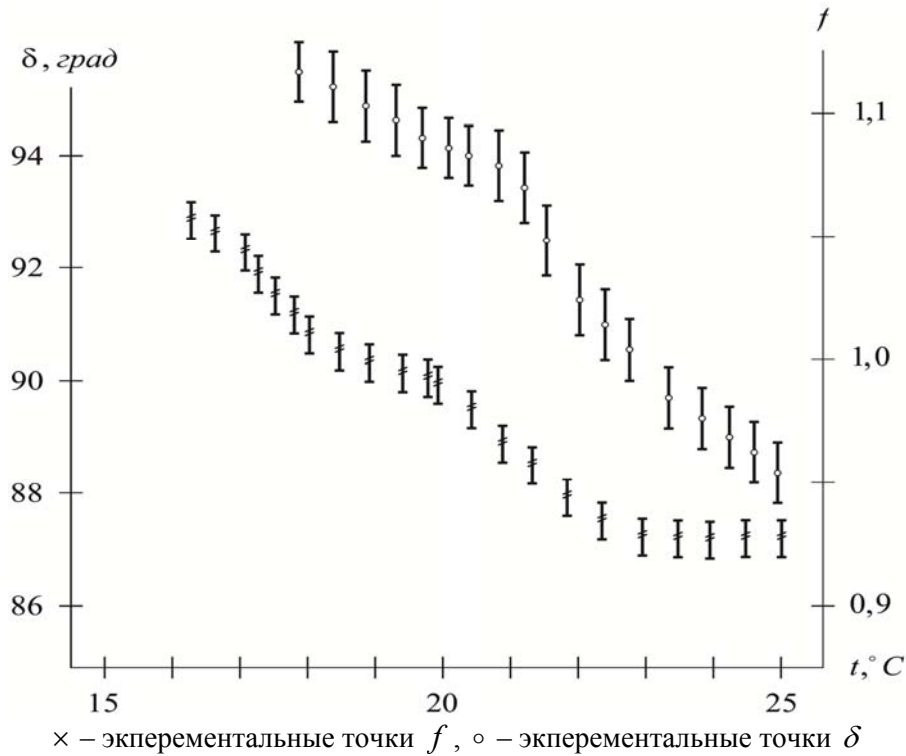


Рисунок 1. – Зависимость параметров f и δ компенсатора из кристаллического кварца от температуры

Возможен также подход [11; 12], связанный с получением соотношений, определяющих (для любого случая оптически активного кристаллического компенсатора) связь поляризационных углов анизотропной отражающей среды с положениями гашения оптических элементов в пределах обобщенной измерительной зоны. В [12], используя зонные соотношения и инварианты эллипсометрии, проведен учет оптической активности компенсатора. Необходимая точность в определении параметров компенсатора обеспечивается третьим приближением по оптической активности. Данный подход довольно громоздкий в математическом плане, поэтому проще и надежнее подходы, предложенные в [9; 10].

Согласно [9], для учета оптической активности необходимо совместить направление пропускания поляризатора с плоскостью падения. Варьированием азимутов анализатора и компенсатора определяем две пары $A_{1,2}$ и $C_{1,2}$ показаний на шкалах элементов, соответствующие двум несимметричным положениям гашения света на выходе анализатора. Затем определяем новые положения начала отсчетов азимутов анализатора и компенсатора [9]:

$$A_0 = \frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{\pi}{2}, C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2} - \frac{\pi}{4}. \tag{12}$$

Метод юстировки, учитывающий оптическую активность компенсатора [10], состоит в следующем (использована схема эллипсометра поляризатор – компенсатор – образец – анализатор). Пусть P, A, C – некоторые исходные азимутальные углы в условиях минимума интенсивности света на выходе анализатора. Из положения A вращением анализатора на угол 90° (в любую сторону) переводим его в положение $A_1 = A \pm 90^\circ$. Вращением поляризатора и компенсатора добиваемся минимума интенсивности света на выходе анализатора. Обозначим найденные углы P_1 и C_1 соответственно. Из положения P вращением поляризатора переводим его в положение $P_2 = P \pm 90^\circ$. Вращением анализатора и компенсатора добиваемся минимума интенсивности света на выходе анализатора. Обозначим найденные углы поворота через A_2 и C_2 . Повторяя многократно описанные действия, мы находим нулевые значения P_0 и C_0 – поляризатора и компенсатора. Данный метод довольно громоздкий. Единственное его преимущество перед [9] в том, что он не требует знания положения плоскости пропускания поляризатора. Метод, предложенный в [9], более прост, чем в [10], и обычно известно положение плоскости пропускания всех поляризующих элементов.

Для увеличения точности измерений необходим также учет многократных отражений внутри фазовой пластинки при прохождении через нее поляризованного света. В диссертационной работе такой учет не проводился, так как использовались такие ориентации кристалла, когда матрица отражения диагональна, что позволяло использовать хорошо разработанные методы измерения эллипсометрических углов ψ и Δ для изотропных сред. Эффективное просветление реально позволяет существенно уменьшить влияние переотражений, что в конечном итоге дает более резкий минимум в эксперименте, а значит, увеличивает точность измерений. Такой учет переотражений был предложен и экспериментально исследован в [13]. Следует отметить, что величина минимально регистрируемого сигнала после просветления уменьшается практически более чем на два порядка.

Нахождение ψ и Δ будет более точным, если проводить измерения, используя то обстоятельство, что кривые зависимости сигнала на выходе эллипсометра от азимуты поляризационных элементов симметричны относительно минимума сигнала на выходе. Вначале добиваемся минимума сигнала на выходе вращением поляризатора и анализатора при фиксированном компенсаторе. После этого вращаем один из поляризационных элементов в любом направлении, например анализатор, чтобы получить определенный сигнал на выходе эллипсометра, и запоминаем значение азимута анализатора A_1 . Затем вращаем анализатор в обратном направлении, проходя через минимум сигнала на выходе, устанавливаем его в таком положении A_2 , чтобы сигнал на выходе был такой же, как и при значении азимута анализатора A_1 . Тогда значение азимута анализатора, соответствующее минимуму сигнала на выходе, будет определяться из выражения $A = (A_1 + A_2)/2$. Определив A , устанавливаем его на лимбе анализатора. Теперь проделываем аналогичные действия и для поляризатора. Тогда получим, что $P = (P_1 + P_2)/2$. Этот метод измерений увеличивает точность примерно в 10 раз.

Перед проведением эллипсометрических измерений важной задачей является правильная юстировка и калибровка азимутальных шкал поляризатора, компенсатора и анализатора. В [14] предлагается методика точной юстировки эллипсометра при фиксированном угле падения света. Преимуществом этой методики по сравнению с другими является то, что она дает возможность определять A_0, P_0, C_0 , не убирая из эллипсометра компенсатор, т.е. обеспечивается возможность юстировки в рабочем состоянии

прибора. Кроме того, методика отличается простотой, позволяет быстро находить эти величины, не прибегая к графическим построениям и не требуя предварительного знания величин поляризационных углов ψ и Δ юстировочного образца или параметров компенсатора f и δ . Недостатком данного метода является невозможность использования его в случае оптически активного компенсатора.

Измерения по описанным в [23] методикам проводились на таких прозрачных и поглощающих кристаллах средних и низших сингоний, как сапфир, турмалин, ниобат лития, кварц, соль сульфокислоты (Tl_3AsS_4) и ортоферрит тербия ($TbFeO_3$). Результаты измерений, а также оптические константы кристаллов приведены в таблицах 1 и 2. Вычисленные оптические постоянные кристаллов с небольшим двулучепреломлением, как, например, сапфир, турмалин, кварц, уже в первом приближении по ΔN совпадают в пределах точности измерений с их объемными значениями, приведенными в справочной литературе [15; 16].

Таблица 1. – Оптические постоянные одноосных кристаллов, вычисленные из эллипсометрических измерений на основе приближенных соотношений

Кристалл	φ , град	θ , град	ψ , град Δ , град	ψ_{\perp} , град Δ_{\perp} , град	Первое приближение		Второе приближение	
					$N_0 = n_0 - i\chi_0$	$N_e = n_e - i\chi_e$	$N_0 = n_0 - i\chi_0$	$N_e = n_e - i\chi_e$
Рубин	45	90	21,12 179,55	21,38 179,90	1,759 -i 0,003	1,754 -i 0,004	1,759 -i 0,003	1,754 -i 0,004
Турмалин	45	90	18,49 178,78	20,04 177,62	1,644 -i 0,038	1,623 -i 0,033	1,650 -i 0,041	1,624 -i 0,032
Кальцит	45	44,63	16,63 180,0	19,44 180,0	1,637 -i 0,0	1,498 -i 0,0	1,651 -i 0,0	1,486 -i 0,0
Антрацит	45	75,20	23,95 165,70	28,87 164,31	2,073 -i 0,665	1,956 -i 0,655	2,084 -i 0,684	1,961 -i 0,534
Сапфир	65	90	7,21 8,97	7,35 7,82	1,762 -i 0,053	1,757 -i 0,047	1,763 -i 0,052	1,756 -i 0,047
Ниобат лития лигированный Cu	60	90	7,94 176,58	9,90 175,65	2,264 -i 0,046	2,197 -i 0,041	2,297 -i 0,053	2,205 -i 0,037
Кварц	45	90	18,33 177,15	17,52 177,75	1,541 -i 0,036	1,554 -i 0,039	1,543 -i 0,037	1,554 -i 0,040

Таблица 2. – Оптические постоянные поглощающих ромбических кристаллов Tl_3AsS_4 , $TbFeO_3$, вычисленные из эллипсометрических измерений на основе приближенных соотношений $N_i = \sqrt{\varepsilon_i} = n_i - i\chi_i$, $i = x, y, z$

Кристалл	φ , град	ψ_x	Δ_x	ψ_y	Δ_y	ψ_z	Δ_z	N_x	N_y	N_z
Соль сульфокислоты Tl_3AsS_4	65	9,41	166,76	9,49	166,87	8,73	165,08	2,828 -i 0,2	2,770 -i 0,20	2,822 -i 0,200
Ортоферрит тербия $TbFeO_3$	70	4,29	16,51	3,87	17,51	4,16	18,64	2,424 -i 0,09	2,453 -i 0,089	2,436 -i 0,100

Для $TbFeO_3$ оптические постоянные в литературе отсутствуют, и сравнивать их можно лишь с оптическими постоянными $YFeO_3$, приведенными в [17; 18]. Для кристаллов средних сингоний рассчитанные оптические постоянные приведены для первого и второго приближения, а для низших сингоний только для первого приближения. Завышенные значения коэффициентов поглощения δl объясняются наличием переходного слоя, возникшего в результате полировки. Для получения более точных значений необходимо проводить измерения на естественных гранях роста и свежих сколах кристаллов [19]. Существование переходного слоя на поверхности кристалла приводит к необходимости его учета при определении оптических постоянных [20–22]. С некоторым приближением переходный слой можно моделировать изотропной пленкой с показателем преломления n и толщиной d . Применение ее для кварца, согласно [20], позволило увеличить точность нахождения оптических постоянных на порядок. Однако такой вывод нам кажется сомнительным. Используя данные работы [20], мы по приближенным формулам, полученным в [23], нашли оптические постоянные кварца для различных углов падения. Расхождение таким образом найденных значений оптических постоянных со значениями, приведенными в [20], составляют величины $\sim 10^{-4}$. Подчеркнем, что в работе [23] задача нахождения оптических постоянных решалась приближенным методом, а в [20] на основе точных формул. Это еще раз говорит о том, что точность используемых приближенных соотношений в [23] достаточно высока. Вклад же переходного слоя в данном случае пропорционален ΔN^2 (ΔN – параметр анизотропии кристалла), что для кварца дает ошибку в четвертом знаке после запятой.

Проверка предлагаемого подхода для одноосных кристаллов проводилось также на основе экспериментальных данных работы [24]. В пределах погрешности измерений они совпадают с оптическими постоянными, полученными в [24] на основании точных формул.

Хотелось бы обратить внимание на тщательность подготовки поверхности кристалла к измерениям, что особенно важно при измерениях на поглощающих низкосимметричных кристаллах. Необходимо удалить с поверхности исследуемого кристалла различные загрязнения. Это можно осуществить ультразвуковой обработкой, например, в изопропиловом спирте с последующим нагреванием спирта, а затем просушить его в парах этого спирта. Недопустимо удалять с поверхности загрязнения, например, ватным тампоном, смоченным в этиловом спирте, так как при трении поверхность электризуется и на ней осаждаются пыль. При этом загрязнения не удаляются полностью, на что еще указывал Друде.

Перед измерениями поляризационных углов ψ и Δ проводилась ориентация оптической оси одноосных кристаллов и кристаллографических осей ромбических кристаллов относительно плоскости падения (плеч эллипсометра). Это делалось следующим образом. Поляризатор ставился в положение P_0 (P_0 – показание лимба поляризатора, когда направление пропускания поляризатора совпадает с плоскостью падения), при котором выходящий из поляризатора свет был поляризован в плоскости падения. Одна из главных осей компенсатора совмещалась с плоскостью падения. В этом случае на кристалл падает свет, содержащий лишь P -компоненту. Анализатор выставлялся в положение A_0 (A_0 – показание лимба анализатора, при котором направление пропускания анализатора перпендикулярно плоскости падения), когда его плоскость пропускания составляла угол 90° с плоскостью пропускания поляризатора. Это обеспечивало полное гашение P -компоненты отраженного от кристалла света на выходе анализатора.

В случае одноосных кристаллов, когда оптическая ось не лежит в плоскости грани кристалла, при вращении кристалла на 360° вокруг нормали к ее поверхности

для описанной выше фиксированной измерительной ситуации мы дважды (через 180°), когда оптическая ось будет расположена в плоскости падения света, получим полное гашение света на выходе анализатора. Если оптическая ось лежит в плоскости пластины, то положения полного гашения должны повторяться через 90° . Следует принять меры против смещения при вращении кристалла плоскости границы параллельно самой себе или наклона относительно оси вращения. В противном случае будут наблюдаться эффекты, связанные с уходом отраженного луча с оси плеча эллипсометра.

Проверка показала, что в пределах чувствительности эллипсометра можно сделать вывод о том, что оптическая ось исследуемых кристаллов была расположена в плоскости границы. В этом случае измерения по описанной в [23] методике проводились для двух ориентаций, когда ось параллельна плоскости падения (ρ_{\parallel}) и когда перпендикулярна ей (ρ_{\perp}). За нулевое приближение, как указывалось в [23], можно взять ρ_{\parallel} или ρ_{\perp} . Полученные в этих случаях оптические постоянные совпадают в пределах погрешностей эксперимента. Например, для рубина получаем $N_o = 1,757 - i0,004$ и $N_e = 1,752 - i0,004$ (таблица 1).

Для ромбических кристаллов в случае ориентации кристаллографических осей, рассмотренных в [23], затемнение при вращении кристалла вокруг нормали и плоскости границы наступает через 90° . Выставить кристалл относительно плоскости падения, а затем произвести измерения параметров ρ_x, ρ_y, ρ_z [23] не представляет трудности. В случае ромбических кристаллов при расчете ε_z в нулевом приближении можно брать, как и в случае одноосных кристаллов, одну из измерительных величин $\rho_{x,y,z}$. Полученные значения оптических постоянных в этих случаях также в пределах точности эксперимента совпадают между собой.

Методики, изложенные в [23], предполагают знание угла θ , задающего ориентацию оптической оси одноосного кристалла и кристаллографических осей ромбического кристалла. Для одноосных кристаллов оптическая ось лежала в плоскости границы и поэтому $\theta = 90^\circ$. Для ромбических кристаллов угол θ [23] определялся из геометрических расчетов, так как ориентация кристаллографических осей была заранее известна из условий роста кристалла. Так, для кристалла Tl_3AsS_4 (соль сульфокислоты) он был равен $\theta = 10^\circ$, для $YFeO_3$ (ортоферрит иттрия) – $\theta = 32,5^\circ$ и для $TbFeO_3$ (ортоферрит тербия) – $\theta = 30^\circ$.

Анализ ошибок эксперимента проводился по следующей схеме. Решалась прямая задача, и находились ψ и Δ . Затем к ψ и Δ прибавлялась ошибка в определении этих величин. После этого по решенной обратной задаче (как для одноосных, так и для ромбических кристаллов [23]) находились оптические постоянные и вычислялась относительная или абсолютная погрешность. Для анализа зависимости ошибок от угла падения φ прибавлялась ошибка в определении φ . После этого решалась прямая и обратная задачи и находились оптические постоянные, а затем относительная или абсолютная погрешность.

Исходя из анализа ошибок углы падения выбирались вблизи угла Брюстера (рисунок 2). Для одноосных кристаллов все измерения ($\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}$) выполнялись на одной грани, и по соотношениям (1) – (15) [23] рассчитывались оптические постоянные с точностью до ΔN^2 включительно. Для ромбических кристаллов расчет проводился по формулам (16) – (27) [23] с точностью до ΔN включительно, а измерения (ρ_x, ρ_y, ρ_z) про-

водились на двух гранях кристалла, содержащих одну и две оси. Полученные значения оптических постоянных хорошо согласуются с объемными, приведенными в справочной литературе. Отметим, что проведенный учет несовершенств эллипсометра увеличил точность определения оптических констант.

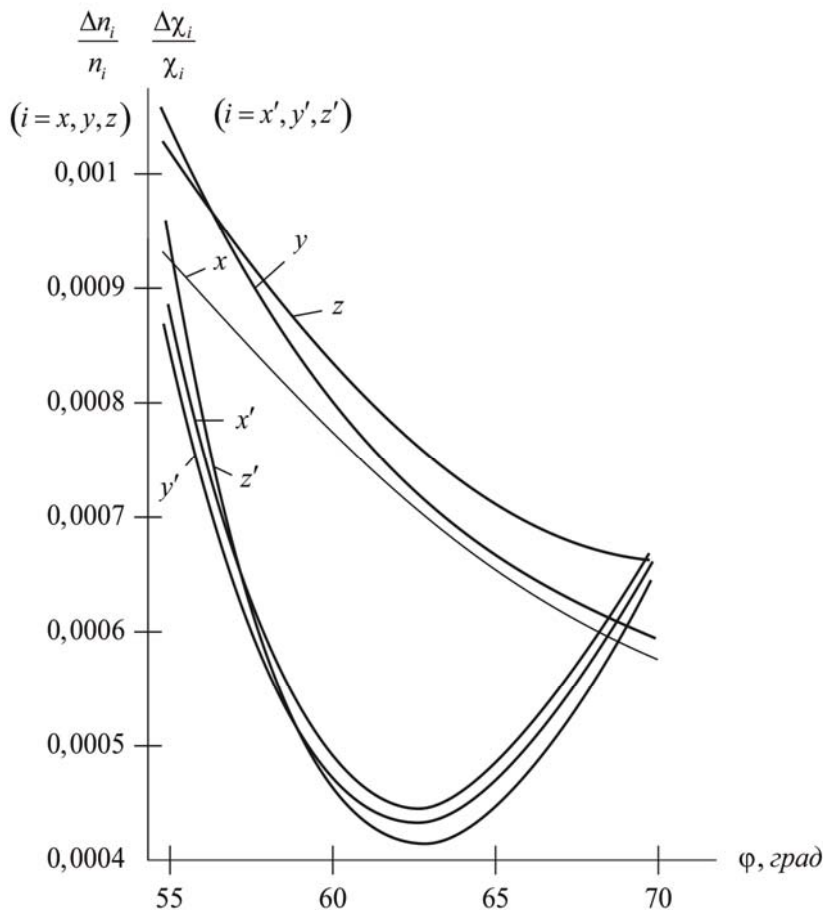


Рисунок 2. – Зависимость относительных ошибок $\frac{\Delta n}{n}$ и $\frac{\Delta \chi}{\chi}$ показателей преломления и коэффициентов поглощения ромбических кристаллов от угла падения φ

В таблице 1 приведены значения оптических констант сапфира с учетом несовершенств эллипсометра. Для сравнения: оптические константы сапфира, рассчитанные до учета несовершенств, имели значения $N_0 = 1,759 - i0,003$ и $N_e = 1,754 - i0,004$ и литературные данные для сапфира на длину волны $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ $n_0 = 1,7661$, $n_e = 1,7580$.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет относительно просто вычислить оптические постоянные одноосных и ромбических поглощающих кристаллов по приближенным соотношениям. При этом удается избежать трудностей, связанных с решением обратной задачи, поскольку оптические постоянные вычисляются без потери точности их определения по формулам подстановкой в них измеряемых эллипсометрических параметров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржанов, А. В. Основы эллипсометрии / А. В. Ржанов, К. К. Свиташев, А. И. Семенов. – Новосибирск : Наука, 1979. – 424 с.
2. De Smet, D. J. Ellipsometry of a biaxial surface / D. J. De Smet // J. Opt. Soc. Am. – 1975. – Vol. 65, № 5. – P. 542–547.
3. Семенов, А. И. Новые представления в эллипсометрии, основанные на обобщении понятий поляризационных углов и измерительных зонах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А. И. Семенов. – Новосибирск, 1977. – 372 л.
4. Семенов, А. И. Эллипсометрия анизотропных сред / А. И. Семенов, Ф. С. Миронов // Физика твердого тела. – 1976. – Т. 18, № 11. – С. 3511–3513.
5. Аззам, Р. М. Эллипсометрия анизотропных сред / Р. М. Аззам, Н. М. Башара. – М. : Мир, 1981. – 638 с.
6. Azzam, R. M. Spacing of the multiple nulls in generalized ellipsometry / R. M. Azzam, N. M. Bashara // Opt. Comm. – 1972. – Vol. 5, № 1. – P. 5–8.
7. Мардежов, А. С. Температурная зависимость параметров компенсатора / А. С. Мардежов, А. И. Семенов, Т. Хасанов // Эллипсометрия – метод исследования поверхности : сб. материалов междунар. науч. конф., Новосибирск, 11–16 апр. 1983 г. – Новосибирск, 1983. – С. 137–139.
8. Константинова, А. Ф. Оптическая активность кристаллов в направлениях отличных от направления оптической оси. Одноосные кристаллы / А. Ф. Константинова, Н. Р. Иванов, В. Н. Гречушников // Кристаллография. – 1969. – Т. 14, № 2. – С. 283–292.
9. Пахомов, А. Г. Метод юстировки эллипсометра, устраняющий влияние оптической активности компенсатора / А. Г. Пахомов, В. А. Яковлев, А. Ф. Константинова // Физика твердого тела. – 1981. – Т. 51, № 2. – С. 442–444.
10. Свиташев, К. К. Учет оптической активности компенсатора при юстировке эллипсометра / К. К. Свиташев, Т. Хасанов // Оптика и спектроскопия. – 1986. – Т. 60, № 2. – С. 399–401.
11. Бохонько, А. И. Об особенностях метода обобщенных измерительных зон в эллипсометрии анизотропных сред / А. И. Бохонько, А. И. Семенов // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 63, № 2. – С. 351–355.
12. Бохонько, А. И. Об особенностях метода обобщенных измерительных зон в эллипсометрии анизотропных сред / А. И. Бохонько, А. И. Семенов // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 63, № 4. – С. 901–906.
13. О влиянии многократного отражения на работу фазовой кварцевой пластинки / С. В. Рыхлицкий [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 63, № 5. – С. 1092–1094.
14. Миронов, Ф. С. Юстировка эллипсометра с фиксированным углом падения / Ф. С. Миронов, А. И. Семенов, Т. Хасанов // Оптика и спектроскопия. – 1981. – Т. 51, № 3. – С. 1095–1100.
15. Акустические кристаллы / А. А. Блистанов [и др.] ; под ред. М. П. Шаскольской. – М. : Наука, 1982. – 632 с.
16. Оптические материалы для инфракрасной техники / Е. М. Воронкова [и др.]. – М. : Наука, 1965. – 336 с.
17. О влиянии переходного слоя на магнитооптические эффекты вблизи угла Брюстера / В. Е. Зубов [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1989. – Т. 66, № 4. – С. 852–857.
18. Определение оптических констант ферромагнетиков на магнитооптических измерениях / Г. С. Кринчик [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1984. – Т. 56, № 3. – С. 468–471.
19. Jacobsent, R. T. Optical Properties Vanadium Pentoxide / R. T. Jacobsent, M. Kerber // J. Opt. Soc. Am. – 1967. – Vol. 57, № 6. – P. 751–755.

20. Определение оптических постоянных одноосных кристаллов с учетом поверхностной изотропной пленки из эллипсометрических измерений / Р. И. Любинская [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 1985. – Т. 59, № 2. – С. 353–357.

21. Яковлев, В. А. Эллипсометрический контроль состояния поверхности анизотропных кристаллов / В. А. Яковлев // Оптика анизотропных сред : сборник. – М. : Изд-во МФТИ, 1985. – С. 27–28.

22. Пахомов, А. Г. Определение оптических параметров системы одноосная поглощающая подложка – тонкая изотропная пленка / А. Г. Пахомов, А. Ф. Константинова // Оптика анизотропных сред : сборник. – М. : Изд-во МФТИ, 1985. – С. 29–32.

23. Сендер, Н. Н. Определение оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов на основе разложения в ряд коэффициентов отражения / Н. Н. Сендер // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 38–45.

24. Пахомов, А. Г. Определение оптических параметров одноосных поглощающих кристаллов эллипсометрическим методом : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. Г. Пахомов. – М., 1981. – 15 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2018

Sender N.N. Experimental Determination of Optical Constant Absorbing Crystals Based on Approximate of Relationships

Optical constants of such crystals as sapphire, tourmaline, lithium niobate, quartz, anthracite, calcite, ruby, sulphosalt Tl_3AsS_4 and terbium orthoferrite $TbFeO_3$ were calculated on the basis of the proposed method for determining the optical constants of absorbing uniaxial crystals and low-symmetry crystals of rhombic syngony based on the expansion of functions in a series of small quantities. The proposed approach makes it possible to calculate the optical constants of uniaxial and rhombic absorbing crystals relatively simply by approximate relationships. In this case, it is possible to avoid difficulties connected with the solution of the inverse problem, since the optical constants are calculated without the loss of accuracy, which does not exceed the experimental errors, by formulas substituting the measured ellipsometric parameters in them.

Д.В. Грицук¹, А.А. Трофимук², Т.В. Бондарук³

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной и прикладной математики
Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

³магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com¹

ПРОИЗВОДНАЯ p -ДЛИНА p -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ СИЛОВСКОЙ p -ПОДГРУППЫ ОГРАНИЧЕН*

Установлена функциональная зависимость производной p -длины p -разрешимой группы от значения нормального ранга ее силовской p -подгруппы. В частности, установлено, что если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга, не превышающего 2, то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2 (здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини). Если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга, не превышающего 3, то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в [1; 2].

В 1956 г. Ф. Холл и Г. Хигмэн предложили понятие p -длины p -разрешимой группы [3]. Напомним это определение. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

факторы которого являются либо p' -группами, либо p -группами. Наименьшее число p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается $l_p(G)$.

Работа Ф. Холла и Г. Хигмена определила одно из основных направлений в изучении p -разрешимых групп – установление взаимосвязи между мерой сложности силовской p -подгруппы p -разрешимой группы G и ее p -длины. Разумно предположить, что чем больше p -длина группы G , тем сложнее должна быть устроена ее силовская p -подгруппа.

В 2006 г. В.С. Монахов [4] привел понятие производной p -длины p -разрешимой группы. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевой p -группой, либо p' -группой. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф17М-063).

через $l_p^a(G)$. Простейшие свойства производной p -длины p -разрешимой группы приведены в лемме 1 настоящей работы. Получению оценок производной p -длины p -разрешимой группы в зависимости от строения подгрупп группы посвящены работы [5–7].

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p -группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P , в том числе и P . Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X . Из теоремы Бернсайда о базисе (теорема III.3.15) [2] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p -группы P порождается не более чем k элементами.

В.С. Монахов в [8] установил, что:

1) если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 3 , то p -длина не превышает 2;

2) если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 2 для нечетного p , то p -длина не превышает 1.

Развитием результатов работы [8] является следующая

Теорема 1. Пусть G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга $\leq k$. Тогда

$$1) \text{ если } p \notin \{2,3\}, \text{ то } l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2 + k + 2}{4};$$

$$2) \text{ если } p \in \{2,3\}, \text{ то } l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2 + k + 4}{4}.$$

1. Вспомогательные результаты

Из определений p -длины и производной p -длины p -разрешимой группы следует, что $l_p(G) \leq l_p^a(G)$.

Лемма 1. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда:

$$1) \text{ если } H \text{ – подгруппа группы } G, \text{ то } l_p^a(H) \leq l_p^a(G);$$

$$2) \text{ если } N \text{ – нормальная подгруппа группы } G, \text{ то } l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G) \text{ и } l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N);$$

$$3) \text{ если } N \text{ – нормальная } p' \text{-подгруппа группы } G, \text{ то } l_p^a(G/N) = l_p^a(G);$$

$$4) \text{ если } G \text{ и } V \text{ – } p \text{-разрешимые группы, то } l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\};$$

$$5) \text{ если } N_1 \text{ и } N_2 \text{ – нормальные подгруппы в } G, \text{ то}$$

$$l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}.$$

Доказательство. Для p -разрешимой группы G зафиксируем субнормальный ряд

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G,$$

где G_{i+1}/G_i – либо абелева p -группа, либо p' -группа, причем число абелевых p -факторов совпадает с $t = l_p^a(G)$.

1. Ряд $1 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_m = H$, где $H_i = G_i \cap H$ будет субнормальным рядом подгруппы H , причем факторы

$$H_{i+1}/H_i = (G_{i+1} \cap H)/(G_i \cap H) \cong (G_{i+1} \cap H)G_i/G_i$$

являются подгруппами фактор-групп G_{i+1}/G_i . Поэтому в построенном ряде подгруппы H каждый фактор либо p' -группа, либо абелева p -группа, и число абелевых p -факторов не превосходит числа t . Таким образом, $l_p^a(H) \leq t = l_p^a(G)$.

2. Ясно, что ряд

$$1 = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq G_2N/N \subseteq \dots \subseteq G_m/N = G/N,$$

будет субнормальным рядом группы G/N с факторами

$$\begin{aligned} (G_{i+1}N/N)/(G_iN/N) &\cong G_{i+1}N/G_iN = G_{i+1}(G_iN)/G_iN \cong \\ &\cong G_{i+1}/G_{i+1} \cap G_iN = G_{i+1}/G_i(G_{i+1} \cap N) \cong G_{i+1}/G_i/G_i(G_{i+1} \cap N)/G_i, \end{aligned}$$

изоморфными фактор-группам групп G_{i+1}/G_i . Поэтому факторы построенного ряда для фактор-группы G/N будут либо p' -группами, либо абелевыми p -группами, и число абелевых p -факторов не превосходит числа t . Таким образом, $l_p^a(G/N) \leq t = l_p^a(G)$.

Пусть N – нормальная p' -подгруппа группы G , и пусть

$$1 = X_0/N \subseteq X_1/N \subseteq X_2/N \subseteq \dots \subseteq X_k/N = G/N,$$

субнормальный ряд фактор-группы G/N с факторами, являющимися p' -группами или абелевыми p -группами, причем число абелевых p -факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Тогда ряд

$$1 \leq N \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k = G,$$

будет субнормальным для группы G , факторы этого ряда являются либо p' -группами или абелевыми p -группами, причем число абелевых p -факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Из определения производной p -длины следует, что $l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N)$. Так как уже доказано, что $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G)$, то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$.

3. Пусть N – неединичная нормальная абелева p -подгруппа группы G и

$$1 = G_0/N \subseteq G_1/N \subseteq G_2/N \subseteq \dots \subseteq G_m/N = G/N,$$

субнормальный ряд группы G/N , факторы которого являются либо p' -группами или абелевыми p -группами, причем число абелевых p -факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Тогда

$$1 < N \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G,$$

такого же типа ряд группы G , в котором число абелевых p -факторов равно $1 + l_p^a(G/N)$. Из определения производной p -длины получаем, что $l_p^a(G) \leq 1 + l_p^a(G/N)$. По пункту (2) доказываемой леммы $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G)$, поэтому $l_p^a(G) \leq i + l_p^a(G/N)$, где $i \in \{0,1\}$.

4. Так как G и V – подгруппы группы $G \times V$, то из пункта (1) доказываемой леммы следует, что $\max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\} \leq l_p^a(G \times V)$. Покажем, используя индукцию по $|G| + |V|$, обратное утверждение. Пусть

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m \subseteq G, \quad (2)$$

$$1 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_n \subseteq V, \quad (3)$$

субнормальные ряды p -разрешимых групп G и V , в которых число абелевых p -факторов равно $l_p^a(G)$ и $l_p^a(V)$ соответственно. Предположим, что одна из подгрупп G/G_m , V/V_n является p' -подгруппой. Пусть, например, G/G_m – p' -подгруппа. Тогда $l_p^a(G) = l_p^a(G_m)$, а по индукции $l_p^a(G_m \times V) = \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V)\}$. Поскольку $(G \times V)/(G_m \times V) \cong G/G_m$ является p' -группой, то $l_p^a(G \times V) = l_p^a(G_m \times V)$ и утверждение 4 справедливо.

Пусть теперь G/G_m и V/V_n являются p -подгруппами. Из выбора рядов (2) и (3) следует, что $l_p^a(G_m) = l_p^a(G) - 1$, $l_p^a(V_n) = l_p^a(V) - 1$. Действительно, у ряда

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m$$

число абелевых p -факторов равно $l_p^a(G) - 1$, поэтому $l_p^a(G_m) \leq l_p^a(G) - 1$. Но если $l_p^a(G_m) < l_p^a(G) - 1$, то у ряда (2) число абелевых p -факторов равно $l_p^a(G_m) + 1 < l_p^a(G)$, что противоречит выбору этого ряда. Поэтому $l_p^a(G_m) = l_p^a(G) - 1$. Аналогично, $l_p^a(V_n) = l_p^a(V) - 1$. Отсюда следует, что

$$\max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\} = 1 + \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V_n)\}.$$

Используя индукцию, получаем: $l_p^a(G_m \times V_n) = \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V_n)\}$. Так как $(G \times V)/(G_m \times V_n) \cong G/G_m \times V/V_n$ является абелевой p -группой, то

$$l_p^a(G \times V) \leq 1 + l_p^a(G_m \times V_n) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}.$$

Утверждение 4 доказано.

5. Пусть N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G . По лемме Ремака, группа $G/N_1 \cap N_2$ является подгруппой группы $G/N_1 \times (G/N_2)$, поэтому из пунктов (1) и (4) доказываемой леммы следует, что $l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть G – p -разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_p^a(G/N) \leq t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G , но $l_p^a(G) > t$. Тогда:

- 1) $O_p(G) = 1$;
- 2) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;
- 3) $F(G) = O_p(G) = F(O_p(G))$;
- 4) $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Доказательство. Лемма вытекает из [5, лемма 4] при $\pi = \{p\}$.

Здесь $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G , $F(G)$ – подгруппа Фиттинга, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G .

Лемма 3. [7, теорема 3.1]. Пусть G – p -разрешимая группа, G_p – силовская p -подгруппа порядка p^n . Тогда:

- 1) если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$;
- 2) если $p \in \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$.

Лемма 4. [8, леммы 7–8]. Пусть P – p -группа и N – нормальная подгруппа группы P . Тогда:

- 1) $\log_p |N/\Phi(N)| \leq r_p(P)$;
- 2) $r_p(G/N) \leq r_p(G) r_p(G/N) \leq r_p(G)$.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга $\leq k$. Тогда

- 1) если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2 + k + 2}{4}$;
- 2) если $p \in \{2, 3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2 + k + 4}{4}$.

Доказательство. Пусть $\bar{G} = G/\Phi(G)$, т.е. $\Phi(G) \neq 1$. Очевидно, что силовская p -подгруппа \bar{G}_p группы \bar{G} имеет $r_n(\bar{G}_p) \leq k$. Действительно,

$$\bar{G}_p = (G/\Phi(G))_p = G_p \Phi(G) / \Phi(G) = P\Phi(G) / \Phi(G) \cong P / (P \cap \Phi(G)).$$

Так как по лемме 4 $r_n(G/N) \leq r_n(G)$, то

$$r_n(\bar{G}_p) \leq r_n(P / (P \cap \Phi(G))) \leq r_n(G) \leq k.$$

Значит, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы. Поэтому для $p \notin \{2,3\}$ получим

$$l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \leq \frac{k^2 + k + 2}{4},$$

а для $p \in \{2,3\}$

$$l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \leq \frac{k^2 + k + 4}{4}.$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G))=1$, то справедливо заключение теоремы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G)=1$.

Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой оценки производной p -длины не выполняются. Очевидно, что все фактор-группы G/N удовлетворяют условию теоремы. По лемме 2, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа

$$N = F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G).$$

Очевидно, что $N \triangleleft P$. Если $|N| = p^\alpha$, то, по лемме 4 1), $\alpha \leq k$, так как $\Phi(N)=1$. Поэтому G/N изоморфна подгруппе группы $GL(\alpha, p)$. Так как

$$|GL(\alpha, p)| = (p^\alpha - 1)(p^\alpha - p) \dots (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} \dots \cdot p^1 \cdot s,$$

где $\text{НОД}(s, p)=1$. Тогда

$$|P| = p^\alpha \cdot p^{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} \dots \cdot p^1 = p^{\frac{1+\alpha}{2} \cdot \alpha} = p^t.$$

По лемме 3 $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{t+1}{2}$ при $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 1 + \frac{t}{2}$ при $p \in \{2,3\}$.

Тогда для $p \notin \{2,3\}$

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{\alpha+1}}{2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{4} \leq \frac{k^2 + k + 2}{4}$$

и для $p \in \{2,3\}$

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq 1 + \frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^\alpha}{2} = 1 + \frac{\alpha^2 + \alpha}{4} \leq \frac{k^2 + k + 4}{4}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 2 , то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Доказательство. Так как $r_n(G_p) \leq 2 = k$, то, по теореме 1,

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \max \left\{ \frac{k^2 + k + 2}{4}, \frac{k^2 + k + 4}{4} \right\} = \frac{k^2 + k + 4}{4} = \frac{2^2 + 2 + 4}{4} = \frac{5}{2},$$

т.е. $l_p^a(G) \leq 2$. Следствие доказано.

Следствие 2. Если G – p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой нормального ранга ≤ 3 , то производная p -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Доказательство. Так как $r_n(G_p) \leq 3 = k$, то, по теореме 1,

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \max \left\{ \frac{k^2 + k + 2}{4}, \frac{k^2 + k + 4}{4} \right\} = \frac{k^2 + k + 4}{4} = \frac{3^2 + 3 + 4}{4} = 4,$$

т.е. $l_p^a(G) \leq 4$. Следствие доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Высш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967.
3. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
4. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – P. 573–581.
5. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д. В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
7. Грицук, Д. В. Зависимость производной p -длины p -разрешимой группы от порядка ее силовской p -подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.
8. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A., Bondaruk T.V. The Derived p -Length of a p -Solvable Group with Limited Normal Rank of Sylow p -Subgroup

The functional dependence of the derived p -length of a p -solvable group on the value of the normal rank of its Sylow p -subgroup is established. In particular, the following results are proved: if G is a p -solvable group and the normal rank of Sylow p -subgroup of G is at most 2, then the derived p -length of the quotient $G/\Phi(G)$ is at most 2 (here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup); if G is a p -solvable group and the normal rank of Sylow p -subgroup of G is at most 3, then the derived p -length of the quotient $G/\Phi(G)$ is at most 4.

УДК 517.925

Е.В. Грицук¹, Н.А. Лукашик²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: lukashik92@inbox.ru²**О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ
АНАЛОГА ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ШЕСТОГО ПОРЯДКА**

Исследуется решение уравнения шестого порядка иерархии второго уравнения Пенлеве в окрестности подвижного полюса. Методом резонансов найдены номера произвольных коэффициентов рядов Лорана, и с помощью системы компьютерной алгебры Maple подтверждено их соответствие числу положительных резонансов.

Введение

Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения, хотя первоначально они были открыты из классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Задача определения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков. В окрестности стационарной особой точки уравнения ${}_{2n}\tilde{P}_2$ получены асимптотические разложения решения в работе [8]. В настоящей работе исследуются свойства решений уравнений иерархий ${}_{2n}\tilde{P}_2$ для $n = 3$ в окрестности подвижного полюса.

1. Структура уравнений ${}_{2n}\tilde{P}_2$, $n \geq 1$ Иерархия уравнений ${}_{2n}\tilde{P}_2$ может быть записана в виде

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\tilde{L}_n[w' - w^2] = zw + \alpha_n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где последовательность $\tilde{L}_n(w)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$D\tilde{L}_{n+1}[u] = (D^3 + 4uD + 2u_z + \beta_n)\tilde{L}_n[u], \quad \tilde{L}_1[u] = u, \quad D = \frac{d}{dz}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для $n = 1, 2, 3$ из (2) соответственно находим

$$\begin{aligned} L_2[u] &= u^{(2)} + 3u^2 + \beta_1 u + \gamma_1, \\ L_3[u] &= u^{(4)} + 10u^3 + 5(u')^2 + 3(\beta_1 + \beta_2)u^2 + \beta_1\beta_2 u + (10u + \beta_1 + \beta_2)u'' + 2\gamma_1 u + \gamma_2, \\ L_4[u] &= u^{(6)} + 14u^{(4)}u + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)u^{(4)}u + 28u^{(3)}u' + 21(u'')^2 + 10(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)u''u + \\ &+ (\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + 2\gamma_1)u'' + 70u''u^2 + 5(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)(u')^2 + 70(u')^2 u + 35u^4 + \\ &+ 10(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)u^3 + 3(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + 2\gamma_1)u^2 + (\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_3\gamma_1 + 2\gamma_2)u + \gamma_3. \end{aligned}$$

По формуле (1) вычисляем

$$w'' - 2w^3 - zw - \alpha = 0, \quad (2\tilde{P}_2)$$

$$w^{(4)} + 6w^5 - 10w(w')^2 - 10w^2w'' + \beta_1(w'' - 2w^3) - 2\gamma_1w - zw - \alpha = 0, \quad (4\tilde{P}_2)$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} - 20w^7 - 56w''w'w + 140w^3(w')^2 + 70w^4w'' - 14w^2w^{(4)} - 42w(w'')^2 - \\ - 70(w')^2w'' + (\beta_1 + \beta_2)(6w^5 - 10w^2w'' - 10w(w')^2 + w^{(4)}) + \\ + \beta_1\beta_2(w'' - 2w^3) + \gamma_1(2w'' - 4w^3) + 2\gamma_2w - zw - \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6\tilde{P}_2)$$

Теорема 1. Последовательность $\tilde{L}_{n+1}[u]$, $n \geq 2$ имеет структуру

$$\tilde{L}_{n+1}[u] = u_{2n} + \delta_n u_0^{n+1} + P_n(u_0, u_1, \dots, u_{2n-2}), \quad (3)$$

где $u_m := \frac{d^m u}{dz^m}$, P_n – полином от $u_0, u_1, \dots, u_{2n-2}$ степени n вида

$$P_n(u_0, u_1, \dots, u_{2n-2}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle \leq 2n+2 \\ k_0 \leq n-1}} a_{k_0 k_1 \dots k_{2n-2}} u_0^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_{2n-2}^{k_{2n-2}}.$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{2n-2})$ с нормой $\langle k \rangle := \sum_{p=0}^{2n-2} (p+2)k_p$,

$$a_{k_0 k_1 \dots k_{2n-2}} - \text{константы и } \delta_n = \frac{2^{2n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)}.$$

Доказательство. Заметим, что рекурсивное соотношение (2) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}[u_0] = (D^2 + 2u_0 + \beta_n)\tilde{L}_n[u_0] + 2 \int u_0 \frac{\partial \tilde{L}_n[u_0]}{\partial z} dz + \gamma_n,$$

причем выражение $u_0 \frac{\partial \tilde{L}_n[u_0]}{\partial z}$ представляет собой производную некоторого полинома [9].

Применим метод математической индукции. По формуле (3) при $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}_3[u_0] &= (D^2 + 2u_0 + \beta_2)(u_2 + 3u_0^2 + \beta_1 u_0 + \gamma_1) + 2 \int u_0 (u_3 + 6u_0 u_1 + \beta_1 u_1) dz + \gamma_2 = \\ &= u_4 + 10u_0^3 + 5u_1^2 + 3(\beta_1 + \beta_2)u_0^2 + \beta_1\beta_2 u_0 + (10u_0 + \beta_1 + \beta_2)u_2 + 2\gamma_1 u_0 + \gamma_2. \end{aligned}$$

Пусть представление (3) верно при $n = s$. Докажем его истинность при $n = s + 1$. Вычислим:

$$\begin{aligned} L_{s+2}[u_0] &= D^2 L_{s+1}[u_0] + 2u_0 L_{s+1}[u_0] + \\ &+ \beta_n \tilde{L}_n[u_0] + 2 \int u_0 \frac{\partial L_{s+1}[u_0]}{\partial z} dz = u_{2s+2} + (s+1)s\delta_s u_0^{s-1} u_1^2 + (s+1)\delta_s u_0^s u_2 + D^2 P_s + \\ &+ 2(u_0 u_{2s} + \delta_s u_0^{s+2} + u_0 P_s) + 2 \int u_0 (u_{2s+1} + \delta_s (s+1)u_0^s u_1 + DP_s) dz + \beta_n \tilde{L}_n[u_0] = \end{aligned}$$

$$= u_{2s+2} + 2(2s+3)/(s+2)\delta_s u_0^{s+2} + P_{s+1}(u_0, u_1, \dots, u_{2n}) = [\text{так как } \delta_{s+1} = 2(2s+3)/(s+2)\delta_s] = \\ = u_{2s+2} + \delta_{s+1} u_0^{s+2} + P_{s+1}(u_0, u_1, \dots, u_{2n}) = u_{2s+2} + \delta_{s+1} u_0^{(s+1)+1} + P_{s+1}(u_0, u_1, \dots, u_{2n}),$$

где

$$P_{s+1}(u_0, u_1, \dots, u_{2n}) = (s+1)s\delta_s u_0^{s-1} u_1^2 + (s+1)\delta_s u_0^s u_2 + D^2 P_s + 4(u_0 u_{2s} + u_0 P_s) + \\ + 2 \int u_0 (u_{2s+1} + D P_s) dz = \sum_{\substack{\langle k \rangle \leq 2s+4 \\ k_0 \leq s}} \tilde{a}_{k_0 k_1 \dots k_{2s}} u_0^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_{2s}^{k_{2s}} = \sum_{\substack{\langle k \rangle \leq 2(s+1)+2 \\ k_0 \leq (s+1)-1}} \tilde{a}_{k_0 k_1 \dots k_{2(s+1)-2}} u_0^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_{2(s+1)-2}^{k_{2(s+1)-2}}.$$

Дадим некоторые пояснения. Слагаемое $u_0 P_s$ дает степень $s+1$ полинома P_{s+1} , а замена k_0+1 на k_0 приводит к требованию $k_0 \leq s$. Для нормы мультииндекса k' мономов полинома $D P_s$ имеет место равенство $\langle k' \rangle = \langle k \rangle + 1$, где $\langle k \rangle$ норма мультииндекса мономов полинома P_s . Норма мультииндекса мономов подынтегрального полинома равна $\langle k \rangle + 3$. После интегрирования норма мультииндекса мономов уменьшается на единицу и равна $\langle k \rangle + 2 = 2s + 2 + 2 = 2(s+1) + 2$. Аналогично для нормы мультииндекса k'' мономов полинома $D^2 P_s$ имеет место равенство $\langle k'' \rangle = \langle k' \rangle + 1 = \langle k \rangle + 2 = 2s + 2 + 2 = 2(s+1) + 2$. Для остальных слагаемых полинома P_{s+1} непосредственно убеждаемся, что норма мультииндекса мономов меньше либо равна $2(s+1) + 2$. Это значит, что представление (3) верно при $n = s+1$. По методу математической индукции получаем, что представление (3) верно при любом натуральном n . Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Уравнение $({}_{2n} \tilde{P}_2)$ имеет структуру

$$w_{2n} = \beta_n w_0^{2n+1} + P_{2n-1}(w_0, w_1, \dots, w_{2n-2}) + z w_0 + \alpha_n, \quad (4)$$

где $w_m := \frac{d^m w}{dz^m}$, P_{2n-1} – полином от $w_0, w_1, \dots, w_{2n-2}$ степени $2n-1$ вида

$$P_{2n-1}(w_0, w_1, \dots, w_{2n-2}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle \leq 2n+1 \\ k_0 \leq 2n-1}} b_{k_0 k_1 \dots k_{2n-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{2n-2}^{k_{2n-2}}. \quad (5)$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{2n-2})$ с нормой $\langle k \rangle := \sum_{p=0}^{2n-2} (p+1)k_p$,

$b_{k_0 k_1 \dots k_{2n-2}}$ – константы и $\beta_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^n (2n-1)!!}{n!}$.

Доказательство. Истинность утверждения следует из теоремы 1 и формулы (1).

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (4)

Лемма 1. Если решение уравнения (4) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (4) произведем замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$, $z \rightarrow z_0$. Ведущими членами уравнения (4) являются w_{2n} , некоторые слагаемые полинома (5) и, возможно, слагаемое $\beta_n w_0^{2n+1}$.

В первом случае имеем

$$q + 2n = qk_0 + (q + 1)k_1 + \dots + (q + 2n - 2)k_{2n-2}$$

или

$$q + 2n = (q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2}) + \langle k \rangle.$$

Так как $\langle k \rangle = 2n + 1$, то имеем

$$(q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} - 1) = 0.$$

Условие

$$k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} = 1$$

вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = 2n + 1$. Значит, $q = 1$.

Во втором случае получаем условие $q + 2n = q(2n + 1)$. Откуда находим $q = 1$. Теперь в уравнении произведем подстановку $w \sim c_0(z - z_0)^{-1}$. При $(z - z_0)^{-7}$ получим уравнение на $c_0 \neq 0$:

$$-20c_0 \prod_{j=1}^3 (c_0^2 - j^2) = 0. \tag{6}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Уравнение $({}_6\tilde{P}_2)$ имеет симметрию

$$S: w(z, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \rightarrow \tilde{w}(z, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) = -w(z, -\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2).$$

Доказательство. В уравнении (4) положим $w \sim c_0 t^{-1}$. После деления на $c_0 \beta_n \neq 0$ получаем уравнение на c_0 :

$$\frac{(2n)!}{\beta_n} = c_0^{2n} + \frac{1}{\beta_n} \sum_{\substack{\langle k \rangle = 2n+1 \\ k_0 \leq 2n-1}} b_{k_0 \dots k_{2n-2}} c_0^{k_0 + \dots + k_{2n-2} - 1} (-1)^{k_1 + \dots + k_{2n-1}} (2!)^{k_2} \dots ((2n-2)!)^{k_{2n-2}}. \tag{7}$$

Из условия (6) имеем, что уравнение (7) содержит только четные степени c_0 . Следовательно, при условии $k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_{2n-2} = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ соответствующий коэффициент $b_{k_0 k_1 \dots k_{2n-2}} = 0$. Лемма 2 доказана.

3. Исследование решений уравнения ${}_6\tilde{P}_2$ в окрестности подвижного полюса

В окрестности точки z_0 уравнение $({}_6\tilde{P}_2)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} &w^{(6)} - 20w^7 - 56w''w'w + 140w^3(w')^2 + 70w^4w'' - 14w^2w^{(4)} - 42w(w'')^2 - 70(w')^2w'' + \\ &+ (\beta_1 + \beta_2)(6w^5 - 10w^2w'' - 10w(w')^2 + w^{(4)}) + \beta_1\beta_2(w'' - 2w^3) + \gamma_1(2w'' - 4w^3) + \\ &+ 2\gamma_2w - tw - z_0w - \alpha = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Осуществим подстановку $w \sim c_0(z - z_0)^{-1}$ в уравнение (8), при наименьшей степени $z - z_0$ получим условие на коэффициент c_0

$$-20c_0(c_0^2 - 1)(c_0^2 - 2^2)(c_0^2 - 3^2) = 0.$$

Рассмотрим первый случай. Пусть $c_0 = 1$. Применим подстановку

$$w \sim c_0(z - z_0)^{-1} + \beta(z - z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta(z - z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, c_0) = (r + 1)(r - 2)(r - 3)(r - 4)(r - 5)(r - 8).$$

Т.е., имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и пять положительных резонансов $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$, $r_6 = 8$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w(t, c_0) = t^{-1} + h_1 t^1 + h_2 t^2 + h_3 t^3 + h_4 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + h_5 t^7 + c_9 t^8 + \sum_{j=10}^{\infty} c_j t^{j-1}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = h_1, \quad c_3 = h_2, \quad c_4 = h_3, \quad c_5 = h_4, \quad c_8 = h_5, \\ c_6 &= \frac{25}{168} \beta_1 h_1^2 - \frac{1}{56} \beta_1 \beta_2 h_1 - \frac{5}{84} \beta_2 h_3 + \frac{25}{168} \beta_2 h_1^2 + \frac{1}{168} \gamma_2 + \frac{3}{2} h_1 h_3 + \frac{1}{3} h_2^2 - \frac{1}{28} \gamma_1 h_1 - \frac{5}{84} \beta_1 h_3 - \frac{5}{4} h_1^3, \\ c_7 &= -\frac{1}{960} - \frac{7}{12} h_2 h_1^2 - \frac{\alpha}{960} - \frac{1}{120} \gamma_1 h_2 + \frac{1}{16} h_1 h_2 \beta_1 - \frac{3}{80} \beta_1 h_4 - \frac{3}{80} \beta_2 h_4 + \\ &\quad + \frac{7}{8} h_1 h_4 + \frac{7}{12} h_2 h_3 - \frac{1}{240} \beta_1 \beta_2 h_2 + \frac{1}{16} h_1 h_2 \beta_2, \\ c_9 &= \frac{1}{50400} \beta_1 + \frac{1}{50400} \beta_2 - \frac{3}{140} h_2 h_3 \beta_1 - \frac{17}{33600} h_1 - \frac{9}{400} h_1 \beta_1 h_4 - \frac{17}{1680} \beta_1 \beta_2 h_1 h_2 + \\ &\quad + \frac{1}{6300} \gamma_1 h_2 \beta_2 - \frac{3}{140} \beta_2 h_2 h_3 + \frac{1}{50400} \beta_2 \alpha + \frac{1}{1400} \beta_2^2 h_4 + \frac{1}{50400} \beta_1 \alpha + \frac{1}{1400} \beta_1^2 h_4 - \\ &\quad - \frac{9}{400} \beta_2 h_1 h_4 + \frac{3}{10} h_3 h_4 + \frac{51}{560} \beta_2 h_2 h_1^2 - \frac{3}{4} h_2 h_1^3 - \frac{1}{840} h_1 h_2 \beta_1^2 + \\ &\quad + \frac{1}{1400} \beta_1 \beta_2 h_4 + \frac{1}{9} h_2^3 + \frac{3}{4} h_1 h_2 h_3 - \frac{13}{840} h_1 \gamma_1 h_2 + \frac{1}{12600} \beta_2 \beta_1^2 h_2 + \frac{1}{6300} \beta_1 \gamma_1 h_2 + \\ &\quad + \frac{51}{560} \beta_1 h_1^2 h_2 - \frac{1}{840} h_1 h_2 \beta_2^2 + \frac{1}{12600} \beta_1 \beta_2^2 h_2 - \frac{1}{1600} h_1 \alpha + \frac{3}{8} h_1^2 h_4 - \frac{1}{700} h_4 \gamma_1 + \frac{1}{504} h_2 \gamma_2, \end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – произвольные параметры. Коэффициенты c_j , $j > 9$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. В силу теоремы 2 [10] ряд (9) является сходящимся.

Рассмотрим второй случай. Пусть $c_0 = 2$. Применим подстановку

$$w \sim c_0(z - z_0)^{-1} + \beta(z - z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta(z - z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, c_0) = (r + 1)(r + 3)(r - 2)(r - 5)(r - 8)(r - 10).$$

Т.е., имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$ и четыре положительных резонанса $r_3 = 2$, $r_4 = 5$, $r_5 = 8$, $r_6 = 10$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид

$$w(t, c_0) = 2t^{-1} + h_1 t^1 + c_4 t^3 + h_2 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + h_3 t^7 + c_9 t^8 + h_4 t^9 + c_{11} t^{10} + \sum_{j=12}^{\infty} c_j t^{j-1}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = h_1, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = h_2, \quad c_8 = h_3, \quad c_{10} = h_4, \\ c_4 &= -\frac{1}{140} \beta_1 \beta_2 - \frac{1}{70} \gamma_1 - \frac{11}{2} h_1^2 + \frac{3}{14} \beta_2 h_1 + \frac{3}{14} h_1 \beta_1, \\ c_6 &= \frac{1}{1008} \beta_2 \beta_1^2 + \frac{1}{504} \beta_1 \gamma_1 - \frac{5}{168} h_1 \beta_1^2 + \frac{1}{1008} \beta_1 \beta_1^2 + \frac{1}{504} \beta_2 \gamma_1 - \frac{5}{168} h_1 \beta_2^2 - \frac{1}{504} \gamma_2 - \\ &\quad - \frac{67}{2} h_1^3 + \frac{57}{28} h_1^2 \beta_1 + \frac{57}{28} \beta_2 h_1^2 - \frac{8}{105} \gamma_1 h_1 - \frac{41}{420} \beta_1 \beta_2 h_1, \\ c_7 &= \frac{1}{1200} - \frac{3}{50} \beta_2 h_2 + \frac{\alpha}{2400} - \frac{3}{50} \beta_1 h_2 + \frac{14}{5} h_1 h_2, \\ c_9 &= -\frac{1}{50400} \beta_1 - \frac{\alpha}{100800} \beta_2 + \frac{1}{700} h_2 \beta_2^2 - \frac{1}{50400} \beta_2 - \frac{9}{350} h_1 h_2 \beta_2 + \frac{1}{1600} h_1 \alpha - \\ &\quad - \frac{9}{350} h_1 \beta_1 h_2 - \frac{1}{1400} \beta_1 \beta_2 h_2 + \frac{9}{20} h_1^2 h_2 - \frac{1}{140} \gamma_1 h_2 + \frac{1}{700} \beta_1^2 h_2 - \frac{1}{100800} \beta_1 \alpha + \frac{h_1}{1050}, \\ c_{11} &= -\frac{313}{381024000} \alpha \beta_1 \beta_2 - \frac{44}{3675} h_1 h_2 \beta_2^2 + \frac{1287}{1400} \beta_2 h_2 h_1^2 + \frac{23}{23625} \beta_2 h_2 \gamma_1 + \frac{569}{1323000} \beta_2^2 h_2 \beta_1 \\ &\quad - \frac{22}{525} h_2 h_1 \gamma_1 - \frac{44}{3675} \beta_1^2 h_2 h_1 + \frac{1287}{1400} \beta_1 h_2 h_1^2 + \frac{23}{23625} \beta_1 h_2 \gamma_1 + \frac{569}{1323000} \beta_1^2 h_2 \beta_2 + \frac{11}{604800} \alpha h_1 \beta_1 - \\ &\quad + \frac{11}{604800} \alpha \beta_2 h_1 - \frac{463}{95256000} \gamma_1 - \frac{121}{63504000} \beta_2 \beta_1 + \frac{1}{7620480} \beta_2^2 \alpha - \frac{1}{52990} \beta_2^3 h_2 - \\ &\quad - \frac{11}{245} \beta_2 h_2 h_1 \beta_1 + \frac{1}{3810240} \beta_2^2 + \frac{17}{352800} \beta_2 h_1 - \frac{11}{28800} \alpha h_1^2 + \frac{1}{7620480} \beta_1^2 \alpha - \frac{77}{5} h_2 h_1^3 - \\ &\quad - \frac{59}{27216000} \alpha \gamma_1 - \frac{1}{52920} \beta_1^3 h_2 + \frac{1}{3810240} \beta_1^2 - \frac{361}{302400} h_1^2 + \frac{17}{352800} h_1 \beta_1 - \frac{1}{1512} h_2 \gamma_2, \end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3, h_4 – произвольные параметры. Коэффициенты $c_j, j > 11$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, \dots, 4$. В силу теоремы 2 [10] ряд (10) является сходящимся.

Рассмотрим третий случай. Пусть $c_0 = 3$. Применим подстановку

$$w \sim c_0 (z - z_0)^{-1} + \beta (z - z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta (z - z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, 3) = (r + 1)(r + 3)(r + 5)(r - 8)(r - 10)(r - 12).$$

Т.е., имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -3, r_3 = -5$ и три положительных $r_4 = 8, r_5 = 10, r_6 = 12$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w(t, c_0) = 3t^{-1} + c_2 t^1 + c_4 t^3 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + h_1 t^7 + c_9 t^8 + h_2 t^9 + c_{11} t^{10} + c_{12} t^{11} + \sum_{j=13}^{\infty} c_j t^{j-1}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_8 = h_1, \quad c_{10} = h_2, \quad c_{12} = h_3, \\
 c_2 &= \frac{1}{70}(\beta_1 + \beta_2), \quad c_4 = -\frac{1}{630}\gamma_1 - \frac{4}{11025}\beta_1\beta_2 + \frac{19}{88200}\beta_2^2 + \frac{19}{88200}\beta_1^2, \\
 c_6 &= \frac{1}{5544}\gamma_2 + \frac{23}{7546000}\beta_2^3 + \frac{23}{7546000}\beta_1^3 - \frac{31}{970200}\beta_2\gamma_1 - \frac{29}{4244625}\beta_1\beta_2^2 - \\
 &\quad - \frac{29}{4244625}\beta_1\beta_2^2 - \frac{29}{4244625}\beta_2\beta_1^2 - \frac{31}{970200}\beta_1\gamma_1, \\
 c_7 &= -\frac{\alpha}{14400} - \frac{1}{4800}, \quad c_9 = -\frac{1}{7056000}\beta_1 - \frac{1}{7056000}\beta_2 - \frac{1}{1008000}\beta_2\alpha - \frac{1}{1008000}\beta_1\alpha, \\
 c_{11} &= \frac{23}{63504000}\gamma_1 + \frac{71}{1111320000}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{18144000}\alpha\gamma_1 - \frac{37}{2540160000}\alpha\beta_1^2 - \frac{521}{8890560000}\beta_2^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{635040000}\alpha\beta_1\beta_2 - \frac{37}{2540160000}\alpha\beta_2^2 - \frac{521}{8890560000}\beta_1^2, \\
 c_{13} &= -\frac{1}{104781600}\gamma_2 - \frac{59}{279417600000}\beta_2^3\alpha - \frac{11861}{61611580800000}\beta_2^3 - \frac{11861}{61611580800000}\beta_1^3 + \\
 &\quad + \frac{821}{440082720000}\beta_2\gamma_1 + \frac{21887}{61611580800000}\beta_1\beta_2^2 + \frac{21887}{61611580800000}\beta_1^2\beta_2 + \\
 &\quad + \frac{821}{440082720000}\beta_1\gamma_1 + \frac{1}{654885000}\beta_2\gamma_1\alpha + \frac{109}{838252800000}\beta_1\beta_2^2\alpha + \frac{109}{838252800000}\beta_1^2\beta_2\alpha + \\
 &\quad + \frac{1}{654885000}\beta_1\gamma_1\alpha - \frac{59}{279417600000}\beta_1^3\alpha - \frac{1}{239500800}\gamma_2\alpha,
 \end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3 – произвольные параметры. Коэффициенты $c_j, j > 13$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, 3$. В силу теоремы 2 [10] ряд (11) является сходящимся.

Следует отметить, что вместе с рядами (9) – (11), согласно лемме 2, уравнению $({}_6\tilde{P}_2)$ удовлетворяют ряды $w(z, -\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$.

Теорема 3. Уравнение $({}_6\tilde{P}_2)$ имеет полярные решения, представимые рядами (9), (10) и (11) сходящиеся в области $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Painlevé, P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Bull. Soc. Math. France. – 1900. – Vol. 28. – P. 201–261.
2. Painlevé, P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1–85.
3. Gambier, B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes / B. Gambier // Acta Math. – 1909. – Vol. 33. – P. 1–55.
4. Ince, E. L. Ordinary Differential Equations / E. L. Ince. – New York : Dover, 1956. – 719 p.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
6. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 157 с.

7. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. : Ин-т комплекс. исслед., 2004. – 360 с.
8. Громак, В. И. О дискретных уравнениях Пенлеве высших порядков / В. И. Громак // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 6. – С. 65–74.
9. Lax, P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation / P. D. Lax // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18, № 3. – P. 351–375.
10. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.04.2018

Gricuk E.V., Lukashik N.A. On Local Properties of Solutions of the Analogue of the Second Painlevé Equation of Sixth Order

In this paper we investigate the solution of the sixth-order equation of the hierarchy of the second Painlevé equation in the neighborhood of a moving pole. By the method of resonances, the numbers of arbitrary coefficients of the Laurent series were found and using the computer algebra system Maple, their correspondence to the number of positive resonances was confirmed.

УДК 517.925.7

Е.В. Грицук¹, И.И. Семенов²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: sementsovivan@yandex.by**О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ
АНАЛОГА ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА**

Исследуется решение уравнения десятого порядка иерархии уравнений K_1 в окрестности подвижного полюса. Методом резонансов найдены номера произвольных коэффициентов рядов Лорана, и с помощью системы компьютерной алгебры Maple подтверждено их соответствие числу положительных резонансов.

Введение

Уравнения Пенлеве получены в результате исследования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отсутствие подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений порядков 3 и выше такое исследование не завершено. В работе [8] для уравнения восьмого порядка из иерархии K_1 рассмотрены свойства решения в окрестности подвижного полюса.

В настоящей работе исследуются локальные свойства решений уравнений иерархии K_1 для $n = 4$ в окрестности подвижного полюса.

1. Уравнения иерархии K_1 Иерархия уравнений K_1 представляется [9] в виде

$$h_n(w) = z, \quad (K_1)$$

где последовательность $h_n(w)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$h_{n+2}(w) = J(w)\Omega(w)h_n(w), \quad (1)$$

$$h_0(w) = 1, h_1(w) = w'' + 4w^2, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Omega(w) = D^3 + 2wD + w_z,$$

$$J(w) = D^3 + 3(wD + Dw) + 2(D^2wD^{-1} + D^{-1}wD^2) + 8(w^2D^{-1} + D^{-1}w^2),$$

$$D = \frac{d}{dz}, D^{-1} = \int(\cdot)dz.$$

Рекуррентную формулу из (1) можно представить в виде:

$$h_n(w) = (J(w)\Omega(w))^{\frac{n-s}{2}} h_s(w), n = 2, 3, 4, \dots,$$

где $s = 0$ при n – четном, $s = 1$ при n – нечетном.Для $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ соответственно получаем:

$$w^{(4)} + \frac{32}{3} w^3 + 12ww'' + 6(w')^2 - z = 0, \quad (4K_1)$$

$$w^{(8)} + \frac{256}{3} w^5 + \frac{1120}{3} w^3 w'' + 560w^2 (w')^2 + 136w^2 w^{(4)} + 554ww'w^{(3)} + 84(w^{(3)})^2 + \\ + 134w''w^{(4)} + 60w'w^{(5)} + 20ww^{(6)} + 396w''(w')^2 + 408w(w'')^2 - z = 0, \quad (8K_1)$$

$$w^{(10)} + \frac{2240}{9} w^6 + 1680w^4 w'' + \frac{2576}{3} w^3 w^{(4)} + 3360w^3 (w')^2 + 5152w^2 w^{(3)} w' + \\ + 3864w^2 (w'')^2 + 212w^2 w^{(6)} + 8596ww''(w')^2 + 1686w(w^{(3)})^2 + 2746ww^{(4)} w'' + \\ + 1272ww^{(5)} w' + 24ww^{(8)} + +861(w')^4 + \frac{3821}{3} (w'')^3 + 302(w^{(4)})^2 + 5384w^{(3)} w'' w' + \\ + 1563w^{(4)} (w')^2 + 495w^{(5)} w^{(3)} + 277w^{(6)} w'' + 96w^{(7)} w' - z = 0. \quad (10K_1)$$

$$w^{(14)} + 19712/9 w^8 + 256256/9 w^6 w'' + 256256/3 w^5 (w')^2 + 68992/3 w^5 w^{(4)} + \\ + 172480w^4 (w'')^2 + 689920/3 w^4 w^{(3)} w' + 31328/3 w^4 w^{(6)} + 810656w^3 (w')^2 w'' + \\ + 125312w^3 w' w^{(5)} + 800624/3 w^3 w'' w^{(4)} + 162448w^3 (w^{(3)})^2 + 8272/3 w^3 w^{(8)} + \\ + 263032w^2 (w')^4 + 498696w^2 (w')^2 w^{(4)} + 1716352w^2 w' w'' w^{(3)} + \\ + 1217656/3 w^2 (w'')^3 + 92488w^2 w'' w^{(6)} + 33088w^2 w' w^{(7)} + 161656w^2 w^{(3)} w^{(5)} + \\ + 412w^2 w^{(10)} + 98120w^2 (w^{(4)})^2 + 1529528w(w')^2 (w'')^2 + 117348w(w')^2 w^{(6)} + \\ + 741664w(w')^3 w^{(3)} + 847000ww'w^{(3)} w^{(4)} + 564168ww'w'' w^{(5)} + \\ + 4120ww'w^{(9)} + 583748w(w'')^2 w^{(4)} + 720676ww''(w''')^2 + 31122w(w^{(5)})^2 + \\ + 14382ww'' w^{(8)} + 32808ww^{(3)} w^{(7)} + 53256ww^{(4)} w^{(6)} + 32ww^{(12)} + \\ + 322014(w')^4 w'' + 120428(w')^3 w^{(5)} + 748374(w')^2 w'' w^{(4)} + 470624(w')^2 (w''')^2 + \\ + 9201(w')^2 w^{(8)} + 1293952w'(w'')^2 w''' + 56976w'w'' w^{(7)} + 114310w'w''' w^{(6)} + \\ + 160146w'w^{(4)} w^{(5)} + 192w'w^{(11)} + 452023/3 (w'')^4 + 77774(w'')^2 w^{(6)} + \\ + 269538w'' w''' w^{(5)} + 161765w'' (w^{(4)})^2 + 807w'' w^{(10)} + 199920(w''')^2 w^{(4)} + \\ + 2275w''' w^{(9)} + 4655w^{(4)} w^{(8)} + 7082w^{(5)} w^{(7)} + 4071(w^{(6)})^2 - z = 0. \quad (14K_1)$$

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения $(10K_1)$

Лемма. Если решение уравнения $(10K_1)$ имеет подвижный полюс, то только второго порядка.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении $(10K_1)$ произведем замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения $(10K_1)$ являются w^6 , а также все остальные слагаемые, кроме z .

В первом случае имеем условие $-q - 10 = -6q$ или $-5q = -10$, т.е. $q = 2$.

Во втором случае $-q - 10 = -5q - 2$ или $-q - 10 = -4q - 4$, или $-q - 10 = -3q - 6$ или $-q - 10 = -2q - 8$, т.е. $q = 2$.

С помощью подстановки $w \sim c_0 (z - z_0)^{-2}$ в уравнение $(10K_1)$ получим условие на коэффициент c_0

$$\prod_{j=0}^1 (c_0 + (9j^2 + 12j + 3)/2) (c_0 + (36j^2 + 48j + 15)/2) (c_0 + 18j^2 + 6j) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что в (2) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

3. Исследование решения уравнения $(_{10}K_1)$ в окрестности подвижного полюса

Применим метод резонансов [10; 11] для определения номеров коэффициентов c_j , которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-2},$$

где $t = z - z_0$, решения, в окрестности подвижного полюса $z_0, z_0 \in \mathbb{C}$.

Произведем в уравнении $(_{10}K_1)$ замену $w \sim c_0 t^{-2} + \beta t^{r-2}$, тогда при βt^{r-2} выделяем резонансный многочлен $R_{10}(c_0, r)$. Для первого типа корней из (2) $c_0 = -3/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)(r-10)(r-14). \quad (3)$$

Для второго типа $c_0 = -15/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+5)(r-2)(r-3)(r-6)(r-7)(r-10)(r-11)(r-14)(r-18). \quad (4)$$

Для $c_0 = -12$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+2)(r+7)(r-3)(r-4)(r-9)(r-10)(r-14)(r-15)(r-20). \quad (5)$$

Для $c_0 = -24$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+4)(r+5)(r+11)(r-3)(r-10)(r-14)(r-17)(r-18)(r-24). \quad (6)$$

Для $c_0 = -99/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+5)(r+7)(r+11)(r+17)(r-14)(r-18)(r-20)(r-24)(r-30). \quad (7)$$

Можно убедиться, что корни каждого из многочленов (3) – (7) целые и однократные.

4. Исследование решения уравнения иерархии K_1 , при $n = 4$, в окрестности подвижного полюса

В окрестности точки z_0 уравнение иерархии K_1 , при $n = 4$, имеет вид

$$\begin{aligned} w^{(10)} + \frac{2240}{9} w^6 + 1680 w^4 w'' + \frac{2576}{3} w^3 w^{(4)} + 3360 w^3 (w')^2 + 5152 w^2 w^{(3)} w' + \\ + 3864 w^2 (w'')^2 + 212 w^2 w^{(6)} + 8596 w w'' (w')^2 + 1686 w (w^{(3)})^2 + 2746 w w^{(4)} w'' + \\ + 1272 w w^{(5)} w' + 24 w w^{(8)} + 861 (w')^4 + \frac{3821}{3} (w'')^3 + 302 (w^{(4)})^2 + 5384 w^{(3)} w'' w' + \\ + 1563 w^{(4)} (w')^2 + 495 w^{(5)} w^{(3)} + 277 w^{(6)} w'' + 96 w^{(7)} w' - t - z_0 = 0, \quad \text{где } t = z - z_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим первый случай $c_0 = -3/2$. Из формулы (3) имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и девять положительных резонансов $r_2 = 3, r_3 = 4, r_4 = 5, r_5 = 6, r_6 = 7, r_7 = 8, r_8 = 9, r_9 = 10, r_{10} = 14$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -\frac{3}{2}t^{-2} + h_1t^1 + h_2t^2 + h_3t^3 + h_4t^4 + h_5t^5 + h_6t^6 + h_7t^7 + h_8t^8 + c_{11}t^9 + c_{12}t^{10} + c_{13}t^{11} + h_9t^{12} + c_{15}t^{13} + \sum_{j=16}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (9)$$

где h_1, h_2, \dots, h_9 , – произвольные параметры, $c_1 = 0, c_2 = 0$,

$$c_{11} = -\frac{13}{1152}h_1^2h_3 - \frac{5}{36}h_2h_5 - \frac{53}{336}h_1h_6 - \frac{41}{320}h_3h_4 - \frac{11}{864}h_1h_2^2,$$

$$c_{12} = -\frac{137}{54432}h_2^3 - \frac{1}{7}h_1h_7 - \frac{11}{105}h_3h_5 - \frac{29}{576}h_4^2 - \frac{223}{20160}h_1^2h_4 - \frac{1}{9434880}z_0 -$$

$$-\frac{47}{2520}h_1h_2h_3 - \frac{19}{168}h_2h_6 - \frac{1}{11520}h_1^4,$$

$$c_{13} = -\frac{1}{25401600} - \frac{173}{12600}h_1h_2h_4 - \frac{1}{8}h_8h_1 - \frac{167}{30240}h_2^2h_3 - \frac{523}{6300}h_4h_5 - \frac{11}{1260}h_1^2h_5 -$$

$$-\frac{11}{1680}h_1h_3^2 - \frac{171}{1960}h_6h_3 - \frac{23}{45360}h_1^3h_2 - \frac{7}{72}h_2h_7,$$

$$c_{15} = -\frac{1531}{25344}h_7h_4 + \frac{1}{87859200}h_1z_0 + \frac{2911}{1382400}h_1^2h_3h_2 + \frac{39437}{45619200}h_1^3h_4 - \frac{431}{7392}h_6h_5 -$$

$$-\frac{251}{3840}h_8h_3 + \frac{1313}{88704}h_1h_6h_2 + \frac{2825}{2737152}h_1h_2^3 + \frac{1933}{633600}h_1h_3h_5 - \frac{227}{253440}h_3^3 +$$

$$+\frac{445}{50688}h_1^2h_7 + \frac{13}{1782}h_2^2h_5 + \frac{1061}{182476800}h_1^5 + \frac{5969}{1520640}h_3h_4h_2 + \frac{7373}{5068800}h_1h_4^2.$$

Коэффициенты $c_j, j > 15$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, \dots, 9$. В силу теоремы 2 [12] ряд (9) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0$.

Рассмотрим второй случай: $c_0 = -15/2$. Из формулы (4) имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -5$ и восемь положительных: $r_3 = 2, r_4 = 3, r_5 = 6, r_6 = 7, r_7 = 10, r_8 = 11, r_9 = 14, r_{10} = 18$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -\frac{15}{2}t^{-2} + h_1 + h_2t^1 + c_4t^2 + c_5t^3 + h_3t^4 + h_4t^5 + c_8t^6 + c_9t^7 + h_5t^8 + h_6t^9 + c_{12}t^{10} + c_{13}t^{11} + h_7t^{12} + c_{15}t^{13} + c_{16}t^{14} + c_{17}t^{15} + h_8t^{16} + c_{19}t^{17} + \sum_{j=20}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (10)$$

где h_1, h_2, \dots, h_8 – произвольные параметры, $c_1 = 0$,

$$c_4 = -\frac{1}{8}h_1^2, c_5 = \frac{1}{3}h_1h_2, c_8 = \frac{7}{24}h_2^2h_1 - \frac{259}{180}h_1h_3 - \frac{1603}{10368}h_1^4,$$

$$c_9 = \frac{19}{63}h_2^3 - \frac{86}{105}h_2h_3 - \frac{8}{21}h_1h_4 - \frac{59}{378}h_1^3h_2,$$

$$c_{12} = \frac{48301}{550800}h_1^3h_3 + \frac{1}{14320800}z_0 - \frac{849}{47600}h_2^2h_1^3 + \frac{671}{4200}h_2^2h_3 - \frac{821}{16800}h_2^4 - \frac{5489}{30600}h_3^2 -$$

$$-\frac{451}{1020}h_1h_5 + \frac{7631053}{634521600}h_1^6 - \frac{219}{2380}h_2h_1h_4,$$

$$\begin{aligned}
c_{13} = & -\frac{8693}{232848} h_1^2 h_2^3 + \frac{305}{43659} h_1^3 h_4 + \frac{55603}{3048192} h_1^5 h_2 - \frac{46}{315} h_4 h_3 - \frac{2}{693} h_2^2 h_4 + \frac{1}{34927200} - \\
& -\frac{1}{7} h_5 h_2 - \frac{109}{385} h_1 h_6 + \frac{6751}{52920} h_1^2 h_2 h_3, \\
c_{15} = & \frac{113}{2640} h_6 h_1^2 + \frac{11519}{146880} h_2 h_3^2 - \frac{859}{199264665600} h_1 + \frac{480943}{47900160} h_1^4 h_4 - \\
& -\frac{378684497}{106599628800} h_2 h_1^6 - \frac{317}{8640} h_3 h_2^3 - \frac{2066191}{185068800} h_1^3 h_2 h_3 - \frac{7}{916531200} h_2 z_0 - \\
& -\frac{21169}{1615680} h_1 h_2^2 h_4 + \frac{29789987}{4071513600} h_2^3 h_1^3 + \frac{643}{172800} h_2^5 + \frac{629}{4320} h_1 h_4 h_3 + \frac{107}{4080} h_1 h_2 h_5, \\
c_{16} = & -\frac{211}{81048567600} h_2 - \frac{1361}{21420} h_3 h_5 - \frac{42851}{26218080} h_1^3 h_5 + \frac{47}{122700614400} h_1^2 z_0 + \\
& + \frac{3611}{179928} h_4^2 h_1 - \frac{14077759}{262180800} h_1^2 h_3^2 + \frac{11}{1176} h_2^2 h_5 + \frac{2843}{49980} h_2 h_3 h_4 - \\
& -\frac{6985652593}{10873162137600} h_1^8 + \frac{16591535377}{11099686348800} h_1^5 h_2^2 - \frac{151}{1428} h_1 h_7 + \\
& + \frac{37629241}{2267092800} h_1^2 h_3 h_2^2 - \frac{8153}{1649340} h_2 h_1 h_6 - \frac{701}{38808} h_2^3 h_4 - \\
& -\frac{21237809}{1797811200} h_1^5 h_3 + \frac{128808301}{14131545120} h_2 h_1^3 h_4 - \frac{50039291}{99752083200} h_1^2 h_2^4, \\
c_{17} = & \frac{32429}{5301450} h_1^2 h_5 h_2 + \frac{12472013}{392931000} h_2^3 h_1 h_3 - \frac{8070283}{148440600} h_3^3 h_1 h_2 - \frac{247131659}{14574168000} h_1^4 h_2 h_3 - \\
& -\frac{66786493}{17288964000} h_2^5 h_1 - \frac{932}{17325} h_6 h_3 + \frac{44797}{86306508288000} h_1^2 - \frac{12479}{13100095008000} z_0 h_1 h_2 + \\
& + \frac{6568359029}{1511549424000} h_2^3 h_1^4 - \frac{16081}{485100} h_1^2 h_4 h_3 - \frac{698}{571725} h_6 h_2^2 + \frac{38209051}{4898539800} h_2^2 h_1^2 h_4 - \\
& -\frac{76}{1485} h_5 h_4 - \frac{3229}{686070} h_1^3 h_6 - \frac{72683}{23051952} h_1^5 h_4 - \frac{232}{3465} h_7 h_2 - \frac{104}{68607} h_4^2 h_2 - \\
& -\frac{554498186773}{507880606464000} h_1^7 h_2, \\
c_{19} = & -\frac{285319}{237124952064000} h_3 + \frac{17191}{7451136} h_2^4 h_4 - \frac{809}{70560} h_2^3 h_5 + \frac{4809585109543}{736765466443776000} h_1^8 h_2 - \\
& -\frac{766826922511}{107444963856384000} h_1^5 h_2^3 + \frac{124819}{10281600} h_3^2 h_4 - \frac{1}{366612480} h_4 z_0 - \frac{13506542359}{36115954237440} h_1^6 h_4 + \\
& + \frac{3950153591}{175563666432000} h_1^2 h_2^5 + \frac{30281}{4878720} h_1^4 h_6 - \frac{180401}{4127537627136000} h_1^3 + \frac{5603}{51073066598400} h_2^2 - \\
& -\frac{1403626717}{7047419904000} h_1^5 h_2 h_3 + \frac{60596839829}{149229116467200} h_1^3 h_2^2 h_4 + \frac{1621876409}{3990083328000} h_1^2 h_2^3 h_3 + \\
& + \frac{139594153}{23071910400} h_1^3 h_2 h_5 - \frac{140767783}{57001190400} h_1^3 h_3 h_4 - \frac{5410709543}{3230067456000} h_1^2 h_2 h_3^2 + \\
& + \frac{2500889}{870851520} h_1 h_2 h_4^2 - \frac{5934493}{791683200} h_2^2 h_3 h_4 - \frac{893}{89760} h_1 h_2 h_7 + \frac{2061}{30800} h_1 h_3 h_6 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{3391}{104720}h_1h_4h_5 + \frac{16073}{428400}h_2h_3h_5 - \frac{94847}{1461836242944000}h_1^2h_2z_0 - \frac{1029521}{90713700}h_1h_2^2h_6.$$

Коэффициенты $c_j, j > 19$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, \dots, 8$. В силу теоремы 2 [12] ряд (10) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0$.

Рассмотрим третий случай: $c_0 = -12$. Из формулы (5) имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = -7$ и семь положительных: $r_4 = 3, r_5 = 4, r_6 = 9, r_7 = 10, r_8 = 14, r_9 = 15, r_{10} = 20$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -12t^{-2} + h_1t^1 + h_2t^2 + c_6t^4 + c_7t^5 + c_8t^6 + h_3t^7 + h_4t^8 + c_{11}t^9 + c_{12}t^{10} + c_{13}t^{11} + h_5t^{12} + h_6t^{13} + c_{16}t^{14} + c_{17}t^{15} + c_{18}t^{16} + c_{19}t^{17} + h_7t^{18} + c_{21}t^{19} + \sum_{j=22}^{\infty} c_jt^{j-2}, \tag{11}$$

где h_1, h_2, \dots, h_7 – произвольные параметры, $c_1 = c_2 = c_5 = 0$,

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{5}{32}h_1^2, & c_7 &= \frac{2}{3}h_1h_2, & c_8 &= \frac{469}{540}h_2^2, & c_{11} &= -\frac{11}{54}h_1h_2^2, \\ c_{12} &= -\frac{311}{28672}h_1^4 - \frac{1067}{34020}h_2^3 - \frac{11}{56}h_1h_3 - \frac{1}{71705088}z_0, \\ c_{13} &= -\frac{233}{6480}h_1^3h_2 - \frac{4}{25}h_1h_4 - \frac{7}{180}h_2h_3 - \frac{1}{63504000}, \\ c_{16} &= \frac{4261}{1161216}h_1^4h_2 - \frac{47963}{1632960}h_2^4 - \frac{1}{1440}h_1^2h_4 - \frac{19}{504}h_1h_2h_3 + \frac{5}{3504586176}h_2z_0 + \frac{701}{387348998400}h_1, \\ c_{17} &= \frac{1913}{738720}h_1^3h_2^2 - \frac{448}{12825}h_1h_2h_4 - \frac{499}{9720}h_2^2h_3 - \frac{16}{171}h_1h_5 + \frac{2101}{1694032704000}h_2, \\ c_{18} &= \frac{710382541}{6354173952000}h_1^6 + \frac{171208651}{37231488000}h_1^2h_2^3 + \frac{203309}{137894400}h_1^3h_3 + \frac{9493}{65395040256000}h_1^2z_0 - \\ &\quad - \frac{228533}{5130000}h_2^2h_4 - \frac{29801}{399000}h_1h_6 - \frac{1129}{17100}h_2h_5 - \frac{3313}{136800}h_3^2, \\ c_{19} &= \frac{15457}{38707200}h_1^5h_2 + \frac{33781}{4082400}h_1h_2^4 + \frac{11}{10800}h_1^3h_4 + \frac{277}{40320}h_1^2h_2h_3 + \frac{1457}{4205503411200}h_1h_2z_0 + \\ &\quad + \frac{5507}{247903358976000}h_1^2 - \frac{113}{2100}h_2h_6 - \frac{43}{1050}h_3h_4, \\ c_{21} &= -\frac{19746809}{8186882457600}h_1^7 + \frac{7767377}{10704052800}h_1^3h_2^3 + \frac{463557917}{1562950287360}h_1^4h_3 + \frac{203521}{30834720}h_1h_3^2 - \\ &\quad - \frac{513421}{174032142162278400}h_1^3z_0 + \frac{218603}{17698500}h_1h_2^2h_4 + \frac{12013}{3810240}h_2^3h_3 - \frac{140383}{44049600}h_1^2h_6 - \\ &\quad - \frac{1001}{58995}h_1h_2h_5 + \frac{790379}{1987100361792000}h_2^2 + \frac{11255}{25905901012992}h_3z_0. \end{aligned}$$

Коэффициенты $c_j, j > 21$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, \dots, 7$. В силу теоремы 2 [12] ряд (11) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0$.

Рассмотрим четвертый случай: $c_0 = -24$. Из формулы (6) имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -4, r_3 = -5, r_4 = -11$ и шесть положительных: $r_5 = 3,$

$r_6 = 10, r_7 = 14, r_8 = 17, r_9 = 18, r_{10} = 24$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -24t^{-2} + h_1 t^1 + c_6 t^4 + c_9 t^7 + h_2 t^8 + c_{12} t^{10} + c_{13} t^{11} + h_3 t^{12} + c_{15} t^{13} + c_{16} t^{14} + \\ + h_4 t^{15} + h_5 t^{16} + c_{19} t^{17} + c_{20} t^{18} + c_{21} t^{19} + c_{22} t^{20} + c_{23} t^{21} + h_6 t^{22} + c_{25} t^{23} + \sum_{j=26}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (12)$$

где h_1, h_2, \dots, h_6 – произвольные параметры, $c_1 = \dots = c_5 = c_7 = c_8 = c_{11} = 0$,

$$c_6 = \frac{265}{1496} h_1^2, \quad c_9 = \frac{241}{1683} h_1^3, \quad c_{12} = -\frac{1936091}{36622080} h_1^4 + \frac{1}{1054010880} z_0, \\ c_{13} = -\frac{4}{17} h_1 h_2 + \frac{1}{678585600}, \quad c_{15} = \frac{25762079}{3021321600} h_1^5 - \frac{7}{50065516800} h_1 z_0, \\ c_{16} = \frac{4135}{80784} h_1^2 h_2 - \frac{1}{7561382400} h_1, \quad c_{19} = -\frac{8161}{686664} h_1^3 h_2 - \frac{1117231}{72848172773376000} h_1^2, \\ c_{20} = -\frac{601057}{41738400} h_1^2 h_3 - \frac{7673}{79050} h_1 h_4 - \frac{2876}{118575} h_2^2, \\ c_{21} = \frac{60929439359}{279668633904000} h_1^7 - \frac{22147}{4634314562592000} h_1^3 z_0 - \frac{4}{55} h_1 h_5, \\ c_{22} = \frac{60682013}{19775923200} h_1^4 h_2 - \frac{351889}{58828984860672000} h_1^3 - \frac{7}{212042188800} h_2 z_0, \\ c_{23} = -\frac{126781}{32252400} h_1^3 h_3 - \frac{1057499}{387028800} h_1^2 h_4 + \frac{413248}{54425925} h_1 h_2^2 - \frac{1}{22722336000} h_2, \\ c_{25} = -\frac{4603413313}{6933933072000} h_1^5 h_2 + \frac{19244474137583}{8106541752294370344960000} h_1^4 + \\ + \frac{9847}{1110703490208000} h_1 h_2 z_0 - \frac{5647}{177965172158446632960000} z_0.$$

Коэффициенты $c_j, j > 25$ однозначно определяются через произвольные параметры $z_0, h_i, i = 1, 2, \dots, 6$. В силу теоремы 2 [12] ряд (12) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0$.

Рассмотрим случай $c_0 = -99/2$. Из формулы (7) имеем пять отрицательных резонансов ($r_1 = -1, r_2 = -5, r_3 = -7, r_4 = -11, r_5 = -17$) и пять положительных ($r_6 = 14, r_7 = 18, r_8 = 20, r_9 = 24, r_{10} = 30$). Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -\frac{99}{2} t^{-2} + c_{12} t^{10} + c_{13} t^{11} + h_1 t^{12} + h_2 t^{16} + h_3 t^{18} + h_4 t^{22} + c_{25} t^{23} + c_{26} t^{24} + \\ + c_{27} t^{25} + c_{28} t^{26} + h_5 t^{28} + c_{31} t^{29} + \sum_{j=32}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (13)$$

где h_1, h_2, \dots, h_5 – произвольные параметры, $c_1 = \dots = c_{11} = c_{15} = c_{16} = c_{17} = c_{19} = c_{21} = c_{22} = c_{23} = c_{29} = 0$,

$$c_{12} = -\frac{1}{58075999488} z_0, \quad c_{13} = -\frac{1}{23750496000}, \quad c_{25} = -\frac{313}{9467747158829360873472000} z_0, \\ c_{26} = \frac{775}{1283858610997248} h_1 z_0 - \frac{467}{15023495831792627773440000},$$

$$c_{27} = \frac{37657}{31537618624512000} h_1, \quad c_{28} = -\frac{771}{64960} h_1^2, \quad c_{31} = \frac{4691}{6880934972620800} h_2.$$

Коэффициенты c_j , $j > 31$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0 , h_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. В силу теоремы 2 [12] ряд (13) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Теорема 2. Уравнению (8) иерархии K_1 , при $n = 4$, удовлетворяют сходящиеся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$ ряды вида (9), (10), (11), (12) и (13).

Таким образом, для уравнения $(_{10}K_1)$ выполняются необходимые условия наличия свойства Пенлеве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Painlevé, P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Bull. Soc. Math. France. – 1900. – Vol. 28. – P. 201–261.
2. Painlevé, P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1–85.
3. Gambier, B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes / B. Gambier // Acta Math. – 1909. – Vol. 33. – P. 1–55.
4. Ince, E. L. Ordinary Differential Equations / E. L. Ince. – New York : Dover, 1956. – 719 p.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
6. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 157 с.
7. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. : Ин-т комплекс. исслед., 2004. – 360 с.
8. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений высших аналогов первого уравнения Пенлеве / Е. В. Грицук // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2011. – № 4. – С. 33–41.
9. Громак, В. И. О свойствах решений уравнений иерархии K_2 / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 172–180.
10. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21. – P. 715–721.
11. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.
12. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Gricuk E.V., Sementsov I.I. On Local Properties of Solutions of the Analogue of the First Painlevé Equation of the Tenth Order

In the article the solution of the tenth-order equation of the hierarchy of the equations K_1 in the vicinity of the mobile pole has been studied. By the method of resonances, the numbers of arbitrary coefficients of the Laurent series have been found and using the computer algebra system Maple their correspondence to number of positive resonances is confirmed.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик¹, М.Н. Жуковец²¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: matysikoleg@mail.ru¹**ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ПРОЦЕССЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ
ДЛЯ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА
РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правил останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова. Решен численный модельный пример.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)x_n + 2\alpha(E + \alpha A)^{-1}y, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha(E + \alpha A)^{-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Под сходимостью метода (3) далее понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ .

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности и найден априорный момент останова [1]. Также в [1] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1), исследована сходимость метода итераций (3) в энергетической норме гильбертова пространства и обоснована возможность применения к методу (3) правила останова по поправкам.

2. Правило останова по невязке. В случае когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, итерационный метод (3) становится неэффективным, так как невозможно получить оценку погрешности и определить априорно момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если восполь-

зоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [2–4]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \quad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha\lambda)^n}{(1 + \alpha\lambda)^n} \right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2n\alpha, n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall \lambda \in (0, M], \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s (4n\alpha)^{-s}, n > 0, 0 \leq s \leq s_0, s_0 = \infty. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда для любого $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))w = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \left(\frac{1 - \alpha\lambda}{1 + \alpha\lambda} \right)^n$ и $\left| \frac{1 - \alpha\lambda}{1 + \alpha\lambda} \right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$,

$$\text{то } \left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda w \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|w\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Из (6) имеем } \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w \right\| = \|E_{\varepsilon_0} w\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0 \text{ в силу свойств}$$

спектральной функции [5, с. 302]. Следовательно, $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Доказательство. Так как верно равенство (8), то

$$n^s \|A^s (E - Ag_n(A))\| \leq n^s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s, \text{ где } \gamma_s = \left(\frac{s}{4\alpha}\right)^s.$$

Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [6, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n = 1, 2, \dots$, ограничены не зависящей от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного подмножества в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ имеем

$$\begin{aligned} n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| &= n^s \|A^{s+1} (E - Ag_n(A))w\| \leq n^s \left(\frac{s+1}{4\alpha}\right)^{s+1} n^{-(s+1)} \|w\| = \\ &= \gamma_{s_1} n^{-1} \|w\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $w_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \|v_0\|$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \rightharpoonup v$, ($p \in N' \subseteq N$), тогда имеем $Av_p \rightharpoonup Av$, ($p \in N'$). Но по условию $w_p = Av_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0) = (v_p, v_0) - (v_p, Ag_{n_p}(A)v_0) = \\ &= (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (w_p, g_{n_p}(A)v_0) \rightarrow (v, v_0) = 0, \end{aligned}$$

так как $w_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $v = 0$ и по условию (5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 2n\alpha \leq 2\bar{n}\alpha$. Следовательно, $\|v_p\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем леммы 1–3 при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $t = t(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. По индукции легко показать, что выполняется равенство $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2n\alpha\delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$

или $(m-1)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ (так как из (12) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$

при $\delta \rightarrow 0$, то, используя (9), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2m\alpha\delta \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем

$\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда по лемме 3 получаем,

что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2m\alpha\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. То-

гда справедливы оценки $m \leq 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (17)$$

Доказательство. Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda} \right)^{m-1} dE_\lambda z \right\| \leq \\ &\leq (s+1)^{s+1} [4(m-1)\alpha]^{-(s+1)} \|z\| \end{aligned}$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{s+1} [4(m-1)\alpha]^{-(s+1)} \|z\|$, отсюда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}. \text{ При помощи неравенства моментов оценим}$$

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \text{ (смотреть (15)).} \end{aligned}$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \\ &+ 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ и, как следует из [3], он оптимально мал в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка $s > 0$ истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останова по малости невязки (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

3. Численный пример. В пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается некорректная

модельная задача в виде уравнения $\int_0^1 K(t,s) x(s) ds = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$ с симметричным

положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$ точной правой частью

$y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(t-1)$. Обычно на практике мы не знаем

точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим

приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения \tilde{y}_i , $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Заменяем интеграл в уравнении квадратурной суммой

с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т.е. $\int_0^1 K(t, s) x(s) ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j) h x_j$. Получим СЛАУ

относительно приближенного решения $\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j = \tilde{y}_i$, $i = \overline{1, m}$. Выберем $m = 32$

и будем решать полученную систему методом итераций (3), дискретная форма записи которого имеет вид:

$$x_i^{(n+1)} + \alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) x_j^{(n+1)} h = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) x_j^{(n)} h + 2\alpha \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Для решения предложенной задачи воспользовались правилом останова по невязке с уровнем останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности рассматриваемым неявным итерационным методом при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.
2. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач : монография / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
6. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2018

Matysik O.V., Zhukovec S.V. The Rule of Stopping in the Process of Calculations for the Method of Iterations of the Implicit Type of Solution of Linear Operator Equations

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self-conjugate operator the implicit iteration method is proposed. For the proposed method, the application of stopping rules on residuals is justified, which makes the iterative method under consideration also effective when there is no information about the source-like representability of the exact solution. The convergence of the iterative method is proved, the error of the method is estimated and the estimation for the error is obtained. A numerical model example is solved.

УДК 527.925

И.Н. Мельникова¹, В.В. Швайко²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: hightmath@brsu.brest.by**О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ
С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КОМПОНЕНТ
У СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Изучены условия существования решений с определенными свойствами и условия алгебраичности особых точек этих решений для частного вида системы трех дифференциальных уравнений. Для получения достаточных условий существования этих решений был применен метод, основанный на голоморфности правых частей преобразованных систем.

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

которая не имеет решений

$$x_i = f_i(z), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

с подвижными существенно особыми точками. Тогда, если $z_0 \in D \setminus (D_{x_1} \cup D_{x_2} \cup D_{x_3})$, то решение системы (1) обладает при $z \rightarrow z_0$ одним из свойств:

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow x_{20}, \quad f_3(z) \rightarrow x_{30} \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (3)$$

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow x_{20}, \quad f_3 \rightarrow x_{30} \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (4)$$

$$f_1(z) \rightarrow x_{10}, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3 \rightarrow x_{30} \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (5)$$

$$f_1(z) \rightarrow x_{10}, \quad f_2(z) \rightarrow x_{20}, \quad f_3 \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (6)$$

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3 \rightarrow x_{30} \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (7)$$

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow x_{20}, \quad f_3 \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (8)$$

$$f_1(z) \rightarrow x_{10}, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3 \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (9)$$

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3 \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (10)$$

Применив метод, основанный на голоморфности правых частей преобразованной системы, изучим условия существования решений со свойством (10) и условия алгебраичности особых точек этих решений для частного вида системы (1), а именно для системы

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{p_i(z)x_1^{p_i^1}x_2^{p_i^2}x_3^{p_i^3} + P_i^1(x_1, x_2, x_3, z)}{q_i(z)x_1^{q_i^1}x_2^{q_i^2}x_3^{q_i^3} + Q_i^1(x_1, x_2, x_3, z)} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)}, \quad (11)$$

где x_1, x_2, x_3, z – комплексные переменные, P_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) – полиномы относительно x_1, x_2, x_3 , коэффициенты которых являются аналитическими функциями относительно z .

Через p_{ij} и q_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2,3$) обозначены степени многочленов P_i и Q_i ($i=1,2,3$) по x_1, x_2, x_3 , причем члены со старшей степенью многочленов одновременно по x_1, x_2, x_3 не содержатся в P_i^1 и Q_i^1 ($i=1,2,3$).

Найдем условия, при выполнении которых система (11) имеет единственное решение с подвижными полярными особыми точками или вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все компоненты решения стремились бы к бесконечности.

С помощью замены $x_i = \frac{1}{u_i}$ ($i=1,2,3$) сведем систему (11) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= -\frac{p_1(z) + (\dots)}{q_1(z) + (\dots)} u_1^{-r_{11}+2} u_2^{-r_{12}} u_3^{-r_{13}}, \\ \frac{du_2}{dz} &= -\frac{p_2(z) + (\dots)}{q_2(z) + (\dots)} u_1^{-r_{21}} u_2^{-r_{22}+2} u_3^{-r_{23}}, \\ \frac{du_3}{dz} &= -\frac{p_3(z) + (\dots)}{q_3(z) + (\dots)} u_1^{-r_{31}} u_2^{-r_{32}} u_3^{-r_{33}+2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $r_{ij} = p_{ij} - q_{ij}$ ($i=1,2,3, j=1,2,3$).

Наряду с системой (12) будем рассматривать и системы:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du_1} &= -\frac{q_1(z) + (\dots)}{p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-2} u_2^{r_{12}} u_3^{r_{13}}, \\ \frac{du_2}{du_1} &= \frac{p_2(z)q_1(z) + (\dots)}{q_2(z)p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-r_{21}-2} u_2^{r_{22}-r_{22}+2} u_3^{r_{13}-r_{23}}, \\ \frac{du_3}{du_1} &= \frac{p_3(z)q_1(z) + (\dots)}{q_3(z)p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-r_{31}-2} u_2^{r_{12}-r_{32}} u_3^{r_{13}-r_{33}+2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du_2} &= -\frac{q_2(z) + (\dots)}{p_2(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}} u_2^{r_{22}-2} u_3^{r_{23}}, \\ \frac{du_1}{du_2} &= \frac{p_1(z)q_2(z) + (\dots)}{q_1(z)p_2(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}-r_{11}+2} u_2^{r_{22}-r_{12}-2} u_3^{r_{23}-r_{13}}, \\ \frac{du_3}{du_2} &= \frac{p_3(z)q_2(z) + (\dots)}{q_3(z)p_2(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}-r_{31}} u_2^{r_{22}-r_{32}-2} u_3^{r_{23}-r_{33}+2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du_3} &= -\frac{q_3(z) + (\dots)}{p_3(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}} u_2^{r_{32}} u_3^{r_{33}-2}, \\ \frac{du_1}{du_3} &= \frac{p_1(z)q_3(z) + (\dots)}{q_1(z)p_3(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}-r_{11}+2} u_2^{r_{32}-r_{12}} u_3^{r_{33}-r_{13}-2}, \\ \frac{du_2}{du_3} &= \frac{p_2(z)q_3(z) + (\dots)}{q_2(z)p_3(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}-r_{21}} u_2^{r_{32}-r_{22}+2} u_3^{r_{33}-r_{23}-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Через (\dots) обозначены функции, которые обращаются в ноль при любом из $u_i = 0$ ($i=1,2,3$).

Теорема 1. При выполнении условий

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{22} = 2, r_{21} = 0, r_{23} = 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} = 2, \quad (16)$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{22} = 2, r_{21} \leq 0, r_{23} \leq 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \quad (17)$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{22} = 2, r_{21} = 0, r_{23} = 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \quad (18)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого

$$q_1(z_0)q_2(z_0)q_3(z_0) \neq 0, \quad (19)$$

система (12) имеет единственное решение (2) со свойством (10). Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{-m+i} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\ x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{-n+i} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\ x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{-l+i} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Точка z_0 для функций этого решения является полюсом.

Доказательство. При условиях (16) – (19) правые части системы (12) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3 и z в окрестности точки $(0, 0, 0, z_0)$. Тогда, по теореме Коши, эта система имеет единственное голоморфное в окрестности точки z_0 решение $u_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z) = 0$. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma} (z - z_0)^{m+\sigma} \quad (a_0 \neq 0, m > 0), \\ u_2 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{\sigma} (z - z_0)^{n+\sigma} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \\ u_3 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{\sigma} (z - z_0)^{l+\sigma} \quad (c_0 \neq 0, l > 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Возвращаясь от системы (12) к системе (11), получим для нее решение (2) со свойством (10) вида (19). Существование у системы (11) решения (2) со свойством (10) доказано.

Покажем единственность такого решения. Пусть $x_i = \varphi_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) – любое решение системы (11), обладающее свойством $\varphi_i(z) \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2, 3$) при $z \rightarrow z_0$. Тогда решение системы (12)

$$u_i = \frac{1}{\varphi_i(z)} \equiv \Phi_i(z) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

будет обладать свойством $\Phi_i(z) \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3$) при $z \rightarrow z_0$. По теореме Пенлеве, это означает, что решение (22) системы (12) совпадает в окрестности точки z_0 с голоморфным решением (21), полученным по теореме Коши. Тогда решение $x_i = \phi_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) системы (11) совпадает с решением (20). Что и доказывает единственность решения.

Теорема 2. При выполнении условий

$$r_{11} < 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{22} \leq 2, r_{21} \leq 0, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} \leq 2, \quad (23)$$

или

$$r_{11} \leq 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{22} < 2, r_{21} \leq 0, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} \leq 2, \quad (24)$$

или

$$r_{11} \leq 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{22} \leq 2, r_{21} \leq 0, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} < 2, \quad (25)$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} < 0, r_{13} < 0, r_{22} = 2, r_{21} < 0, r_{23} < 0, r_{31} < 0, r_{32} < 0, r_{33} = 2, \quad (26)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (19), система (11) не имеет решений, обладающих свойством (10) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство. Правые части системы (12) при выполнении условий (23) – (26) и (19) являются однозначными аналитическими функциями от $u_i(z)$ ($i=1,2,3$) и z в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Тогда, по теореме Коши, существует единственное решение $u_i(z)$ ($i=1,2,3$) системы (12), голоморфное в окрестности точки z_0 и удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z) = 0$. Очевидно, что хотя бы одна компонента этого решения будет тождественным нулем. Следовательно, система (11) не будет иметь решений (2), обладающих свойством (10).

Теорема 3. При выполнении условий

$$r_{11} \geq \max\{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \quad (27)$$

$$r_{22} = r_{12} + 2, \quad r_{33} = r_{13} + 2$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место

$$p_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) \neq 0, \quad (28)$$

система (11) имеет единственное решение (2) со свойством (10). Это решение имеет вид:

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{(i-1)}{m}} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0),$$

$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{(i-n)}{m}} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \quad (29)$$

$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{\frac{(i-l)}{m}} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0).$$

Для всех функций этого решения точка z_0 является полюсом, как правило, критическим.

Доказательство. Правые части системы (13) при выполнении условий (27) и (28) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3 и z в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Следовательно, система (13) имеет, по теореме Коши, единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1)$, голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$z(0) = z_0, u_2(0), u_3(0) = 0. \quad (30)$$

Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} z(u_1) &= z_0 + \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma} u_1^{\sigma+m} \quad (a_0 \neq 0, m > 0), \\ u_2(u_1) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{\sigma} u_1^{\sigma+n} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \\ u_3(u_1) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{\sigma} u_1^{\sigma+l} \quad (c_0 \neq 0, l > 0). \end{aligned} \quad (31)$$

Возвращаясь от системы (13) к системе (11), получим для последней решение (2), обладающее свойством (10) и имеющее вид (29).

Покажем единственность этого решения.

Пусть $x_i = \varphi_i(z)$ ($i=1,2,3$) – любое решение системы (11) со свойством $\varphi_i(z) \rightarrow \infty$ ($i=1,2,3$) при $z \rightarrow z_0$. Очевидно, что решение (22) системы (12) при этом будет обладать свойством

$$\Phi_i(z) \rightarrow 0 \quad (i=1,2,3) \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (32)$$

Тогда в плоскости переменной u_1 существует путь G , оканчивающийся в точке $u_1 = 0$, что решение

$$z = \Phi^{-1}_1(u_1) \equiv \psi(u_1), \quad u_j = \Phi_j(\psi(u_1)) \equiv \tau_j(u_1) \quad (j=2,3) \quad (33)$$

системы (13) будет обладать свойством

$$\psi(u_1) \rightarrow z_0, \quad \tau_j(u_1) \rightarrow 0 \quad (j=2,3) \text{ при } u_1 \rightarrow 0 \quad (34)$$

вдоль пути G . По теореме Пенлеве, это означает, что решение (33) системы (13) совпадает в окрестности точки $u_1 = 0$ с голоморфным решением (31), полученным по теореме Коши и определяемым начальными условиями (30). В этом случае решение $\varphi_i(z)$ ($i=1,2,3$) системы (11) совпадает с решением (29), что и требовалось доказать.

Теорема 4. При выполнении условий

$$\begin{aligned} r_{11} \geq \max\{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \\ r_{22} < r_{12} + 2, \quad r_{33} \leq r_{13} + 2 \end{aligned} \quad (35)$$

или

$$\begin{aligned} r_{11} \geq \max\{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \\ r_{22} \leq r_{12} + 2, \quad r_{33} < r_{13} + 2 \end{aligned} \quad (36)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (28), система (11) не имеет решений (2), обладающих свойством (10) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство. Правые части системы (13) при выполнении любого из условий (35), (36) и условия (28) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3 и z окрестности точки $(0,0,0,z_0)$. Следовательно, система (13) имеет единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1)$, голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям (30). У этого решения, очевидно, функция $u_2(u_1) \equiv 0$, или $u_3(u_1) \equiv 0$, или обе функции одновременно представляют собой тождественный ноль. Отсюда и получается заключение теоремы.

Теорема 5. При выполнении условий

$$\begin{aligned} r_{22} &\geq \max\{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &= r_{21} + 2, \quad r_{33} = r_{23} + 2 \end{aligned} \quad (37)$$

система (11) имеет единственное решение (2) со свойством (10). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{(i-m)}{n}} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\ x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{(i-1)}{n}} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\ x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{\frac{(i-l)}{n}} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0). \end{aligned} \quad (39)$$

Для всех функций этого решения точка z_0 является полюсом, как правило, критическим.

Теорема 6. При выполнении условий

$$\begin{aligned} r_{22} &\geq \max\{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &< r_{21} + 2, \quad r_{33} \leq r_{23} + 2 \end{aligned} \quad (40)$$

или

$$\begin{aligned} r_{22} &\geq \max\{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, r_{21} \geq \max\{0, r_{31}\}, r_{23} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &\leq r_{21} + 2, \quad r_{33} < r_{23} + 2 \end{aligned} \quad (41)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (38), система (13) не имеет решений (2), обладающих свойством (10) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Теорема 7. При выполнении условий

$$\begin{aligned} r_{33} &\geq \max\{2, r_{13} + 2, r_{23} + 2\}, r_{31} \geq \max\{0, r_{21}\}, r_{32} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &= r_{31} + 2, \quad r_{22} = r_{32} + 2 \end{aligned} \quad (42)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место

$$p_3(z_0)g_1(z_0)g_2(z_0) \neq 0, \quad (43)$$

система (11) имеет единственное решение (2) со свойством (10). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{(i-m)}{l}} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\ x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{(i-n)}{l}} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\ x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{\frac{(i-1)}{l}} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0). \end{aligned} \quad (44)$$

Для всех функций этого решения точка z_0 является полюсом, как правило, критическим.

Теорема 8. При выполнении условий

$$\begin{aligned} r_{33} &\geq \max\{2, r_{13} + 2, r_{23} + 2\}, r_{31} \geq \max\{0, r_{21}\}, r_{32} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &< r_{31} + 2, \quad r_{22} \leq r_{32} + 2 \end{aligned} \quad (45)$$

или

$$\begin{aligned} r_{33} &\geq \max\{2, r_{13} + 2, r_{23} + 2\}, r_{31} \geq \max\{0, r_{21}\}, r_{32} \geq \max\{0, r_{12}\}, \\ r_{11} &\leq r_{31} + 2, \quad r_{22} < r_{32} + 2 \end{aligned} \quad (46)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (43), система (13) не имеет решений (2), обладающих свойством (10) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство теорем 5–8 основывается на голоморфности в окрестности $(0,0,0,z_0)$ правых частей систем (14) и (15) и проводится в полной аналогии с доказательствами теорем 3 и 4.

Точки $z_0 \in D$, в которых

$$1) g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0,$$

$$2) p_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0,$$

$$3) p_2(z_0)g_1(z_0)g_3(z_0) = 0,$$

$$4) p_3(z_0)g_1(z_0)g_2(z_0) = 0,$$

отнесем к неподвижным точкам системы (11). Тогда из ранее изложенного следует, что при выполнении любого из условий (16) – (18), (27), (37), (42) система (11) имеет единственное решение (2), для всех функций которого точка z_0 является подвижным полюсом. А при выполнении любого из условий (23) – (26), (35), (36), (40), (41), (45), (46) система (11) вовсе не имеет решений (2) с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все функции решения стремились бы к бесконечности.

Таким образом, полученные условия выделяют классы систем вида (11), не имеющих решений (2) со свойством (10) при $z \rightarrow z_0$.

Данные исследования позволяют дать более полную характеристику аналитических свойств решений системы трех дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными правыми частями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.
2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
3. Еругин, Н. П. Аналитическая теория нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, вып. 4. – С. 465–486.
4. Еругин, Н. П. Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка / Н. П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 579–598.
5. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1979. – 744 с.
6. Кондратеня, С. Г. По поводу особенностей решений обыкновенного дифференциального уравнения / С. Г. Кондратеня // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 12. – С. 2286–2289.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.04.2018

Melnikova I.N., Shvaiko V.V. On The Existence of Solutions with Infinite Limiting Values of the Components of the System of Three Differential Equations

In this paper we studied the conditions for the existence of solutions with certain properties and the conditions for the algebroidity of the singular points of these solutions for a particular form of a system of three differential equations. To obtain sufficient conditions for the existence of these solutions, a method based on the holomorphy of the right-hand sides of the transformed systems was applied.

УДК 513.82

А.А. Юдов¹, Е.В. Арабчик², М.А. Кононюк³, Е.А. Сирисько⁴
¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического
 моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
²магистрант физико-математического факультета
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
³магистрант физико-математического факультета
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
⁴магистрант физико-математического факультета
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
 e-mail: modelmath@brsu.brest.by

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений пятимерного пространства Лоренца и классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуются подгруппы Ли группы Ли движений пятимерного пространства Лоренца, находятся инвариантные прямые и K -плоскости для таких подгрупп и находятся редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство L_5 пятимерное лоренцово пространство.

Выберем в пространстве L_5 репер $\mathcal{E} = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, причем $e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства L_5 , в репере \mathcal{E} зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_{\mathcal{E}}$.

На множестве реперов пространства L_5 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере \mathcal{E} изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T$, $A - (5 \times 5)$ – матрица, причем $A^T E_5 A = E_5$, где знак T означает транспонирование, а матрица E_5 является единичной матрицей, причем первый элемент по главной диагонали равен -1 , остальные элементы главной диагонали 1 , а прочие элементы – нули.

При движении, заданном матрицей (1), репер \mathcal{E} переходит в репер $\mathcal{E}' = (0, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5) = (0', e')$, где $e' = eA$, $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (T)_e$, а точка M переходит в точку M' , имеющую в репере \mathcal{E}' такие же координаты, какие точка M имеет в репере \mathcal{E} .

Пусть $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X)_{e'}$, $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_e$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \quad (2)$$

Таким образом, в пространстве L_5 действует слева группа Ли G , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства L_5 по формуле (2). Алгебру Ли \overline{G} этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)^T$, а матрица B удовлетворяет условию: $B^{T_1}E_5 + E_5B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки O и алгебра Ли \overline{H} этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим в алгебре Ли \overline{G} базис:

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_7 = E_{23} + E_{32}, i_8 = E_{24} + E_{42}, \\ i_9 &= E_{25} + E_{52}, i_{10} = E_{26} + E_{62}, i_{12} = E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, \\ i_{16} &= E_{45} - E_{54}, i_{17} = E_{46} - E_{64}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_{\alpha\beta} - (6 \times 6)$ – матрицы, у которых в α – й строке, β – м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$, задают базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H вращений пространства L_5 .

Согласно формуле

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4)$$

где $A, B \in \overline{G}$, получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$:

$$\begin{aligned}
 [i_7; i_8] &= i_{12} & [i_8; i_{16}] &= i_9 & [i_7; i_{14}] &= i_{10} & [i_9; i_{10}] &= i_{19} & [i_{13}; i_{10}] &= 0 \\
 [i_7; i_9] &= i_{13} & [i_9; i_{12}] &= 0 & [i_7; i_{17}] &= 0 & [i_9; i_{14}] &= 0 & [i_{13}; i_{14}] &= -i_{19} \\
 [i_7; i_{12}] &= i_8 & [i_9; i_{13}] &= -i_6 & [i_7; i_{19}] &= 0 & [i_9; i_{17}] &= 0 & [i_{13}; i_{17}] &= 0 \\
 [i_7; i_{13}] &= i_9 & [i_9; i_{16}] &= -i_8 & [i_8; i_{10}] &= i_{17} & [i_9; i_{19}] &= i_{10} & [i_{13}; i_{19}] &= i_{14} \\
 [i_7; i_{16}] &= 0 & [i_{12}; i_{13}] &= -i_{16} & [i_8; i_{17}] &= i_{10} & [i_{12}; i_{10}] &= 0 & [i_{16}; i_{10}] &= 0 \\
 [i_8; i_9] &= i_{16} & [i_{12}; i_{16}] &= i_{13} & [i_8; i_{14}] &= 0 & [i_{12}; i_{14}] &= -i_{17} & [i_{16}; i_{14}] &= 0 \\
 [i_8; i_{12}] &= -i_7 & [i_{13}; i_{16}] &= -i_{12} & [i_8; i_{19}] &= 0 & [i_{12}; i_{17}] &= i_{14} & [i_{16}; i_{17}] &= -i_{19} \\
 [i_8; i_{13}] &= 0 & [i_7; i_{10}] &= i_{14} & [i_{10}; i_{18}] &= -i_9 & [i_{14}; i_{17}] &= -i_{12} & [i_{16}; i_{19}] &= i_{17} \\
 [i_{14}; i_{19}] &= -i_{13} & [i_{10}; i_{17}] &= -i_8 & [i_8; i_{19}] &= 0 & [i_{12}; i_{19}] &= 0 & [i_{17}; i_{19}] &= -i_{16} \\
 [i_{10}; i_{14}] &= -i_7.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Всего получено 29 подгрупп Ли G_1, \dots, G_{29} группы Ли вращений, которые в базисе (3) задаются своими алгебрами Ли G_1, \dots, G_{29} в виде (причем группа G_{29} совпадает с группой Ли всех вращений пространства L_5):

$$\begin{aligned}
 \overline{G_1} &= \{i_{19}\}, \overline{G_2} = \{i_{19} + \beta i_{12}\}, \overline{G_3} = \{i_7\}, \overline{G_4} = \{i_{13} + i_9\}, \overline{G_5} = \{i_{16} + \beta i_7\}, \\
 \overline{G_6} &= \{i_{13} + i_9 + \beta i_{17}\}, \overline{G_7} = \{i_{19}, i_{12}\}, \overline{G_8} = \{i_{16}, i_7\}, \overline{G_9} = \{i_{13} + i_9, i_{17}\}, \\
 \overline{G_{10}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9\}, \overline{G_{11}} = \{i_{13} + i_9, i_7\}, \overline{G_{12}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}\}, \\
 \overline{G_{13}} &= \{i_{19} + i_{12}, i_{17} - i_{13}, i_{14} + i_{16}\}, \overline{G_{14}} = \{i_{12}, i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{15}} &= \{i_{10} + i_{14}, i_9 + i_{13}, i_7\}, \overline{G_{16}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{19}\}, \\
 \overline{G_{17}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8 + \lambda i_{19}\}, \overline{G_{18}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
 \overline{G_{19}} &= \{i_{12}, i_8, i_7, i_{19}\}, \overline{G_{20}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_7\}, \overline{G_{21}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{22}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}\}, \overline{G_{23}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_7, i_{19}\}, \\
 \overline{G_{24}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}, i_7\}, \overline{G_{25}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
 \overline{G_{26}} &= \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{14}, i_{13}, i_{12}\}, \overline{G_{27}} = \{i_{16}, i_{13}, i_9, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{28}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_7\}, \overline{G_{29}} = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}.
 \end{aligned}$$

В данной статье для каждой из групп $G_1 \dots G_{28}$ находятся все инвариантные одно- двух- трех- и четырехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости, 3-плоскости, 4-плоскости.

Рассмотрим группу G_1 с алгеброй Ли $\overline{G_1} = \{i_{19}\}$.

$$\{i_{19}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Необходимо найти все инвариантные одномерные пространства

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, -a_5, a_4) = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Отсюда следует система:

$$\begin{cases} 0 = \lambda a_1, \\ 0 = \lambda a_2, \\ 0 = \lambda a_3, \\ -a_5 = \lambda a_4, \\ a_4 = \lambda a_5. \end{cases}$$

Из четвертого и пятого уравнений системы следует:

$$-a_5 = \lambda^2 a_5.$$

Рассмотрим два случая:

1. $\lambda \neq 0$

Если $\lambda \neq 0$, то следует, что $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$,

$-a_5 = \lambda^2 a_5 \Rightarrow a_5 = 0$, иначе $\lambda^2 = -1$, значит, и $a_4 = 0$.

Вывод: нет ненулевых решений.

2. $\lambda = 0 \Rightarrow a_4 = 0, a_5 = 0$.

Итог: $(a_1, a_2, a_3, 0, 0) \{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3\}$.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны одномерные подпространства $\{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + a_3 \bar{e}_3, \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3\}$, $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $\{\bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_3 \bar{e}_1 - b_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1, a_4 \bar{e}_2 - b_4 \bar{e}_3, -a_5 \bar{e}_2 - b_5 \bar{e}_5 + \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_5 \bar{e}_2 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, четырехмерные подпространства $\{a_3 \bar{e}_1 + a_1 \bar{e}_3, a_3 \bar{e}_2 - a_2 \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$.

Находя инвариантные подпространства для остальных подгрупп Ли $G_2 \dots G_{28}$, аналогично получаем следующие теоремы.

Теорема 2. Относительно группы G_2 инвариантны одномерные подпространства $\{a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + a_3 \bar{e}_3, \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3\}$, $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_3 \bar{e}_1 - b_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$,

$\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$
и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 3. Относительно группы G_3 инвариантны одномерные подпространства $\{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2\}$, $\{a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_3 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4; a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4; a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 4. Относительно группы G_5 инвариантны одномерные подпространства $\{a_1 \beta \bar{e}_1 + a_2 \beta \bar{e}_2 + a_3 \beta \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$.

Теорема 5. Относительно группы G_6 инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_3, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, a_5 \bar{e}_3 + b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 6. Относительно группы G_7 инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\{\bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ трехмерные инвариантные подпространства $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 7. Относительно группы G_8 инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Теорема 8. Относительно группы G_9 инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$.

Теорема 9. Относительно группы G_{10} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_2 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$, $\{a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 10. Относительно группы G_{11} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$, $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$.

Теорема 11. Относительно группы G_{12} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Теорема 12. Относительно группы G_{13} инвариантных одномерных подпространств нет, двумерных подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Теорема 13. Относительно группы G_{14} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 14. Относительно группы G_{15} инвариантны одномерные подпространства $\{\overline{a_1 e_1} + \overline{a_2 e_2}\}$, $\{\overline{a_1 e_1} - \overline{a_1 e_2} + \overline{a_3 e_3} + \overline{a_5 e_5}\}$, двумерные подпространства, $\{\overline{e_1} - \overline{e_2} + \overline{a_4 e_4} + \overline{a_5 e_5}, \overline{e_3} + \overline{b_4 e_4} + \overline{b_5 e_5}\}$, $\{\overline{e_1} + \overline{a_2 e_2} + \overline{a_3 e_3} + \overline{a_5 e_5}, \overline{e_4} - \overline{a_5 e_5}\}$, $\{\overline{e_1} - \overline{e_2}, \overline{e_5}\}$, $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_2 e_1} - \overline{b_4 e_3} + \overline{e_4}; \overline{a_5 e_1} - \overline{b_5 e_3} + \overline{e_5}\}$, $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_3 e_1} + \overline{e_3}, \overline{a_5 e_1} - \overline{b_5 e_4} + \overline{e_5}\}$, $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_3 e_1} + \overline{e_3}, \overline{a_4 e_1} + \overline{e_4}\}$, $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$, $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{a_1 e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}, \overline{e_5}\}$.

Теорема 15. Относительно группы G_{16} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 16. Относительно группы G_{17} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 17. Относительно группы G_{18} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 18. Относительно группы G_{19} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 19. Относительно группы G_{20} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Теорема 20. Относительно группы $G_{21} - G_{28}$ инвариантных одномерных подпространств нет, двумерных подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Образы стационарности групп Ли

Определение 1. Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства L_5 и ему соответствующего векторного про-

пространства 1E_5 таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.

Определение 2. Упорядоченная совокупность фигур пространства L_5 называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k -плоскостями ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) пространства L_5 , причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Зафиксируем $\overline{e_5}$. Рассмотрим вектор $(0,0,0,0,1)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0,0,0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \varphi \\ \beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ \gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ \delta & -\varphi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (\delta; -\varphi; -\rho; -\eta; 0) = \lambda \cdot \overline{e_5} = \lambda (0,0,0,0,1).$$

Из этого следует, что $\lambda = 0, \delta = 0, -\varphi = 0, -\rho = 0, -\eta = 0$.

При этом получаем алгебру Ли группы Ли $\overline{G_{27}} = \{i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}\}$. Таким образом, группа Ли G_{27} имеет в качестве образа стационарности флаг $\{R_0, R_1\}$.

Аналогично получаем следующие образы стационарности, результаты запишем в виде следующих теорем:

Теорема 21. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{26} является флаг $\{R_0, {}^1R_1\}$.

Теорема 22. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{28} является флаг $\{R_0, R_1^1\}$.

Теорема 23. Если $\lambda = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{25} является флаг $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ R_0, & R_1 \end{smallmatrix} \right\}$.

Теорема 24. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{20} является флаг $\{R_0, R_2\}$.

Теорема 25. Если $\eta = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{14} получим флаг $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 0 \\ R_0, & R_2 \end{smallmatrix} \right\}$.

Теорема 26. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{19} является флаг $\{R_0, {}^1R_2\}$.

Теорема 27. Если $\alpha = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{12} получим флаг $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ R_0, & R_2 \end{smallmatrix} \right\}$.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства L_5 .

Цепочки:

$$H \supset G_{28}; G_{27}, G_{26}, G_{25}; G_{24}; G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{19}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}, G_{14}, G_{13}, G_{12}; G_{11}, G_{10}, G_9, G_8, G_7; G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{27} \supset G_{25}; G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_9; G_6, G_4, G_1.$$

$$G_{26} \supset G_{14}; G_{11}, G_8; G_5, G_4, G_3.$$

$$G_{25} \supset G_{13}, G_{12}; G_7; G_2, G_1.$$

$$G_{24} \supset G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_9; G_6, G_4, G_1.$$

$$G_{23} \supset G_{22}, G_{21}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{22} \supset G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{21} \supset G_{18}, G_{17}, G_{16}; G_{10}; G_4, G_1.$$

$$G_{20} \supset G_{14}; G_7; G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{19} \supset G_{12}; G_8; G_3, G_1.$$

$$G_{18} \supset G_{10}; G_4.$$

$$G_{17} \supset G_{10}; G_4.$$

$$G_{16} \supset G_{10}; G_4, G_1.$$

$$G_{15} \supset G_{11}, G_{10}; G_4, G_3.$$

$$G_{14} \supset G_3.$$

$$G_{13} \supset G_2.$$

$$G_{12} \supset G_1.$$

$$G_{11} \supset G_4, G_3.$$

$$G_{10} \supset G_4.$$

$$G_8 \supset G_5, G_3.$$

$$G_7 \supset G_2, G_1.$$

Пусть G группа Ли H_1, H_2 ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

$$f: G/H_1 \rightarrow G/H_2: aH_1 \rightarrow aH_2 \text{ для любого } a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства L_5 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства L_5 .

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G с точностью до сопряженности имеется в [1]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой H . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства.

В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида H / G_i , где G_i – связные подгруппы Ли группы Ли H вращений пространства L_5 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства H / G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \overline{H} и \overline{G}_i , затем находятся все $(\dim H - \dim G_i)$ -мерные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $\text{ad } \overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \overline{G}_i . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H / G_i . Поскольку пространство G / H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G / G_i .

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{G} = m + \overline{G}_i \tag{6}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $\text{ad } \overline{G}_i$, где $\text{ad } \overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G} .

Рассмотрим однородное пространство H / G_{14} , $\overline{G}_{14} = \{i_7, i_8, i_{12}\}$, $a = \{i_7\}$, $\overline{H} = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}$.

1⁰ случай:

x_1	1		q	a	z	$x_1 = i_8 + qi_{16} + ai_{17} + zi_{19}$				
x_2	1		w	s	x	$x_2 = i_9 + wi_{16} + si_{17} + xi_{19}$				
x_3		1	e	d	c	$x_3 = i_{10} + ei_{16} + di_{17} + ci_{19}$				
x_4		1	r	f	v	$x_4 = i_{12} + ri_{16} + fi_{17} + vi_{19}$				
x_5		1	t	g	b	$x_5 = i_{13} + ti_{16} + gi_{17} + bi_{19}$				
x_6		1	y	h	n	$x_6 = i_{14} + yi_{16} + hi_{17} + ni_{19}$				
x_7		1	u	j	m	$x_7 = i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}$				
	i_8	i_9	i_{10}	i_{12}	i_{13}	i_{14}	i_7	i_{16}	i_{17}	i_{19}

Используя таблицу коммутаторов, получим

$$[a, x_1] = i_{12}, [a, x_2] = i_{13}, [a, x_3] = i_{14}, [a, x_4] = i_8, [a, x_5] = i_9, [a, x_6] = i_{10}, [a, x_7] = 0. \tag{7}$$

Приравнивая правые части равенств (7) линейным комбинациям векторов $x_1 \dots x_7$:

$$\alpha_k i_8 + \beta_k i_9 + \gamma_k i_{10} + \delta_k i_{12} + \omega_k i_{13} + \varepsilon_k i_{14} + \rho_k i_{17} + i_{16} (\alpha_k q + \beta_k w + \gamma_k e + \delta_k r + \omega_k t + \varepsilon_k y + \rho_k u) + i_{17} (\alpha_k a + \beta_k s + \gamma_k d + \delta_k f + \omega_k g + \varepsilon_k h + \rho_k j) + i_{19} (\alpha_k z + \beta_k x + \gamma_k c + \delta_k v + \omega_k b + \varepsilon_k n + \rho_k m)$$

где $k = 1 \dots 7$, и проводя соответствующие вычисления, получим:

- 1) $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 1, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \rho_1 = 0,$
 $r = 0, f = 0, v = 0$
- 2) $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 1, \varepsilon_2 = 0, \rho_2 = 0,$
 $t = 0, g = 0, b = 0$

- 3) $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 0, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 1, \rho_3 = 0,$
 $y = 0, h = 0, n = 0$
- 4) $\alpha_4 = 1, \beta_4 = 0, \gamma_4 = 0, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \rho_4 = 0,$
 $q = 0, a = 0, z = 0$
- 5) $\alpha_5 = 0, \beta_5 = 1, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = 0, \rho_5 = 0,$
 $w = 0, s = 0, x = 0$
- 6) $\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 1, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \rho_6 = 0,$
 $e = 0, d = 0, c = 0.$

Из равенств 1–6 можно сделать вывод, что относительно оператора i_7 инвариантно следующее пятимерное подпространство:

$$i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}.$$

Теорема 28. Однородное пространство H/G_8 является редуцированным. Редуцированными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$

Теорема 29. Однородное пространство H/G_{14} является редуцированным. Редуцированными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}.$

Теорема 30. Однородное пространство H/G_{19} является редуцированным. Редуцированными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}\}.$

Теорема 31. Однородное пространство H/G_{20} является редуцированным. Редуцированными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$

Теорема 32. Однородное пространство H/G_{26} является редуцированным. Редуцированным дополнением для него является пространства $m = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}\}.$

Теорема 33. Однородное пространство H/G_{27} является редуцированным. Редуцированным дополнением для него является пространства $m = \{i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т. 126, № 1. – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Yudov A.A., Arabchik E.V., Kononyuk M.A., Sirisko E.A. Invariant Characteristics of Lie Subgroup of Lie Group of Motions of the Five-Dimensional Lorentz Space

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines, and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of the five-dimensional Lorentz space and the classification of homogeneous reductive spaces with a fundamental group—the Lie group of motions of the five-dimensional Lorentz space.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылкаў падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *К.М. Мароз, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 04.06.2018. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,32. Ул.-выд. арк. 7,61.

Тыраж 100 экз. Заказ № 180.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.