

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.Б. Антаневіч

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецохоў

А.Ф. Равінскі

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2017

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 (у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь ад 13.01.2017 № 6) часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Веко О.В., Войнова Я.А., Овсюк Е.М., Редьков В.М.

Частица Дирака во внешнем электрическом поле на фоне геометрии пространства Лобачевского5

Голуб А.А.

Влияние внешнего переменного электрического поля на взаимодействие гауссовых световых пучков в фоторефрактивном оптически активном кристалле.....21

Крылова Н.Г.

Финслерова геометрия электрокапиллярного взаимодействия в лэнгмюровских монослоях27

Левчук М.И.

О полном сечении фотопоглощения на дейтроне в первой резонансной области.....40

Липо В.А., Овчинников Е.В., Ситкевич Ф.А., Секержицкий С.С., Лявчук И.А.

Суперъёмка обратной решетки кристаллов47

МАТЭМАТЫКА

Башняков А.Н., Пичкур В.В., Полищук А.А., Линдер Я.Н.

О методе адаптивной коррекции угловых скоростей твердого тела с использованием матрицы чувствительности58

Грицук Е.В., Кузьмина Е.В.

Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве64

Ковальчук И.Р.

Приближение классов (ψ, β) -дифференцируемых функций суммами Стеклова73

Конет И.М., Геселева К.Г.

Коллокационный и коллокационно-итеративные методы решения интегро-функциональных уравнений.....82

Собчук В.В., Хитько И.В.

Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и явный вид точек порядка Шарковского90

Матысик О.В., Сидак С.В.

О сходимости неявного итерационного метода решения некорректных задач с правилом останова по поправкам97



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
A.M. Sender
Deputy Editor-in-chief:
S.A. Marzan

International Board:
V.A. Glavan (Moldova)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.B. Antanevich
M.M. Sender
(managing editor)
M.I. Lyavchuk
I.P. Martynov
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.M. Rad'kov
Y.S. Sekyarzhytski
M.M. Trush
A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2017

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94 (as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 13, 2017 № 6) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

- Veko O.V., Voynova Ya.A., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.**
Dirac Particle in External Electric Field of the Background of Lobachevsky Geometry5
- Golub A.A.**
The Influence of an External Alternating Electric Field on the Interaction
of Gaussian Light Beams in a Photorefractive Optically Active Crystal21
- Krylova N.G.**
Finsler Geometrization of Electrocapillary Interaction in Langmuir Monolayers27
- Levchuk M.I.**
On the Total Photoabsorption Cross Section on the Deuteron in the First Resonance Region40
- Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sitkevich A.V., Sekerzhitsky S.S., Liaushuk I.A.**
Super Cell of the Reciprocal Lattice of Crystals47

MATHEMATICS

- Bashniakov A., Pichkur V., Polishchuk A., Linder Y.**
On the Method of Adaptive Correction of Corner Speeds of Solid Body Using the Matrix of Sensitivity58
- Kovalchuk I.R.** Class Approximation (ψ, β) of Differentiated Functions by Steklov's Sums73
- Konet I.M., Geseleva K.G.**
Collocation and Collocation-Iterative Methods of Solving Integrally-Functional Equations82
- Sobchuk V.V., Khitko I.V.**
Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations with Impulse Effect
and Exclusive Views Point of Order of Sharkovsky90
- Matysik O.V., Sidak S.V.**
About of Convergence the Implicite Iteration Method with a Rule of Neighboring Approximations
for Solving Incorrect Problems97

УДК 539.12

О.В. Веко¹, Я.А. Войнова², Е.М. Овсиюк³, В.М. Редьков⁴

¹учитель физики гимназии г. Калинковичи

²учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики
Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

⁴д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики
Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

ЧАСТИЦА ДИРАКА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ НА ФОНЕ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Для свободной частицы Дирака в квазидекартовой системе координат (x, y, z) пространства Лобачевского существует специальный тип состояний, когда составляющие квазиимпульса частицы вдоль осей x, y равны нулю: эти решения не чувствуют возникающего из-за геометрии пространства эффективного потенциального барьера вдоль оси z , идеально отражающего дираковскую частицу во всех других состояниях. В работе исследуется этот случай в присутствии обобщенного однородного электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля, причем оно наиболее заметно при рассмотрении больших масштабов расстояний. Физическая задача описывается системой из двух связанных уравнений первого порядка, которые методом исключения приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с комплекснозначными потенциалами; построены и исследованы возможные решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Показано, что комбинированием исходных уравнений первого порядка можно привести задачу к уравнениям второго порядка с вещественными потенциалами с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной особенностью на бесконечности ранга 2, т.е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Получены решения Фробениуса для этих уравнений, анализ сходимости возникающих степенных рядов указывает на их определенность и корректность во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$.

Введение

Для свободной частицы Дирака в квазидекартовой системе координат (x, y, z) пространства Лобачевского существует специальный тип состояний, когда составляющие квазиимпульса частицы вдоль осей x, y равны нулю: эти решения не чувствуют возникающего из-за геометрии пространства эффективного потенциального барьера вдоль оси z , идеально отражающего дираковскую частицу во всех других состояниях [1–7]. В настоящей работе исследуется этот случай в присутствии обобщенного однородного электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля, причем оно наиболее заметно при рассмотрении больших масштабов расстояний.

1. Постановка задачи

В отсутствие электрического поля для частицы Дирака в квазидекартовой системе координат

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad dV = e^{-2z} dx dy dz \quad (1)$$

существует специальный случай, когда составляющие импульса вдоль осей x, y равны нулю:

$$\Psi(t, z) = e^{-i\epsilon t} e^z \begin{vmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \\ F_4(z) \end{vmatrix}, \quad F_4 = \frac{\epsilon - p}{M} F_2, \quad F_3 = \frac{\epsilon - p}{M} F_1, \quad p = +\sqrt{\epsilon^2 - M^2}. \quad (2)$$

Уравнения для таких решений сводятся к следующим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - ip \right) F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = C_1 e^{+ipz}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + ip \right) F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = C_2 e^{-ipz}. \quad (3)$$

Они приводят к двум легко интерпретируемым решениям:

$$\Psi_1(t, z) = e^{i\epsilon t} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\epsilon - p}{M} \\ 0 \end{vmatrix} e^z e^{+ipz}, \quad \Psi_2(t, z) = e^{i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\epsilon - p}{M} \end{vmatrix} e^z e^{-ipz}. \quad (4)$$

Характерно, что эти решения не чувствуют эффективного потенциального барьера, идеально отражающего дираковские частицы во всех других состояниях [2–7].

При обобщении этой задачи на случай присутствия внешнего электрического поля также существует аналогичный класс состояний

$$\Psi(t, z) = e^{-i\epsilon t} e^z \begin{vmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \\ F_4(z) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Используемое задание потенциала электрического поля здесь согласовано с геометрией пространства Лобачевского в координатах (1):

$$A_0(z) = \frac{E}{2} (e^{2z} - 1) = A, \quad F_{30} = E e^{2z}. \quad (6)$$

Величина E может быть разных знаков в зависимости от направления электрического поля (и соответственно сила, действующая на электрон со стороны этого поля). Отметим, что в малой области переменной z оно переходит в обычное однородное поле в плоском пространстве; в области $z \rightarrow -\infty$ электрическое поле исчезает (но остается ненулевой постоянной в выражении для потенциала), а в области $z \rightarrow +\infty$ оно экспоненциально возрастает:

$$\begin{aligned} z \rightarrow -\infty, \quad A_0(z) &\rightarrow -\frac{E}{2} = \text{const}, \quad F_{30} \rightarrow 0; \\ z \rightarrow +\infty, \quad A_0(z) &\rightarrow \frac{E}{2} e^{2z} \rightarrow +\infty, \quad F_{30} \rightarrow E e^{2z} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Это свидетельствует о том, что геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля; причем это наиболее заметно при рассмотрении расстояний больших масштабов. Для рассматриваемого случая (5) уравнение Дирака приводит к двум распадающимся системам:

$$\left[(\varepsilon - eA) - i \frac{d}{dz} \right] F_3 - MF_1 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i \frac{d}{dz} \right] F_1 - MF_3 = 0; \quad (8)$$

$$\left[(\varepsilon - eA) - i \frac{d}{dz} \right] F_2 - MF_4 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i \frac{d}{dz} \right] F_4 - MF_2 = 0. \quad (9)$$

Задача настоящей работы – исследовать аналитически этот наиболее простой класс решений уравнения Дирака в пространстве Лобачевского с учетом присутствия внешнего электрического поля (6).

2. Построение комплекснозначных решений

Очевидно, что можно построить два линейно независимых решения уравнения Дирака:

$$\Psi^{(1)}(t, z) = e^{-i\epsilon t} e^z \begin{vmatrix} F_1(z) \\ 0 \\ F_3(z) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi^{(2)}(t, z) = e^{-i\epsilon t} e^z \begin{vmatrix} 0 \\ F_2(z) \\ 0 \\ F_4(z) \end{vmatrix}; \quad (10)$$

они будут обобщать решения (4), полученные при отсутствии электрического поля. Будем рассматривать уравнения (8); уравнения (9) имеют ту же самую структуру. Методом исключения получим уравнения второго порядка для функций $F_1(z)$ и $F_3(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\varepsilon eA + e^2 A^2 + ie \frac{dA}{dz} \right) F_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\varepsilon eA + e^2 A^2 - ie \frac{dA}{dz} \right) F_3 = 0.$$

Можно утверждать, что всякое решение первого уравнения порождает решение второго (и наоборот) согласно правилу

$$F_1(z) \longrightarrow F_3(z) = \text{const} [F_1(z)]^*; \quad (11)$$

это позволяет ограничиться анализом решений только одного уравнения. В явном виде уравнение для F_1 выглядит так:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \varepsilon eE(e^{2z} - 1) + \frac{e^2 E^2}{4} (e^{2z} - 1)^2 + ieEe^{2z} - M^2 \right) F_1 = 0. \quad (12)$$

В областях $z \rightarrow \pm\infty$ оно упрощается:

$$z \rightarrow -\infty, \left[\frac{d^2}{dz^2} + (\varepsilon + eE/2)^2 - M^2 \right] F_1 = 0, \quad z \rightarrow +\infty, \left[\frac{d^2}{dz^2} + e^{4z} e^2 E^2 / 4 \right] F_1 = 0; \quad (13)$$

в первом уравнении добавка $eE/2$ к энергии обусловлена отмеченным поведением потенциала: $eA_0(z \rightarrow -\infty) \rightarrow -eE/2$; во втором уравнении оставляем только главный член, пропорциональный e^{4z} . Легко находим возможные асимптотики решений в этих областях:

$$z \rightarrow -\infty, F_1 \sim \exp\left(\pm i \sqrt{(\varepsilon + eE/2)^2 - M^2} z\right); \quad z \rightarrow +\infty, F_1 \sim \exp\left(\pm i \frac{eE}{2} e^{2z}\right). \quad (14)$$

Специально обратим внимание на то, что, в отличие от задачи о частице Дирака в электрическом поле на фоне плоского пространства, здесь решения в областях

$z \rightarrow -\infty$ и $z \rightarrow +\infty$ описываются существенно разными дифференциальными уравнениями; это находит отражение и в поведении решений в этих областях. Различия обусловлены несимметричным поведением метрики пространства Лобачевского в этих двух областях.

Введем новую переменную $Z = e^z$, $Z \in (0, +\infty)$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} + \left(ieE - \varepsilon eE - \frac{e^2 E^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon eE + e^2 E^2 / 4 - M^2}{Z^2} + \frac{e^2 E^2}{4} Z^2 \right] F_1 = 0.$$

Воспользуемся (временной) заменой в обозначениях: $eE/2 \Rightarrow E$; тогда последнее уравнение можно представить кратко как

$$F''_1 + \frac{1}{Z} F'_1 + \left(A + \frac{B}{Z^2} + CZ^2 \right) F_1 = 0, \\ A = -2E(E + \varepsilon - i), \quad B = (\varepsilon + E)^2 - M^2, \quad C = E^2. \quad (15)$$

Заметим, что уравнение для функции F_3 – см. (11) – будет иметь похожий вид с единственной заменой в параметре A :

$$A = -2E(E + \varepsilon - i) \Rightarrow \bar{A} = -2E(E + \varepsilon + i) = A^*, \\ F''_3 + \frac{1}{Z} F'_3 + \left(\bar{A} + \frac{B}{Z^2} + CZ^2 \right) F_3 = 0, \quad F_3(Z) = \text{const} [F_1(Z)]^*. \quad (16)$$

Для уравнения (15) особая точка $Z = 0$ – регулярная. Исследуем особенность в $Z = \infty$. Для этого воспользуемся переменной $y = 1/Z$, получим

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^6} \right) F_1 = 0; \quad (17)$$

т.е. точка $Z = \infty$ является нерегулярной и имеет ранг 3. Таким образом, имеем уравнение типа $[0, \infty_3]$.

Поскольку в уравнении есть только две симметричные особые точки 0 и ∞ , то можно использовать квадратичную замену. Действительно, пусть

$$Z^2 = x, \quad \frac{d}{dZ} = 2\sqrt{x} \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dZ^2} = 4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx};$$

уравнение (15) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{A}{4x} + \frac{B}{4x^2} + \frac{C}{4} \right) F_1(x) = 0; \quad (18)$$

уравнение для $F_3(x)$ имеет похожий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{\bar{A}}{4x} + \frac{B}{4x^2} + \frac{C}{4} \right) F_3(x) = 0, \quad \bar{A} = A^*, \quad F_3(x) = \text{const} [F_1(x)]^*. \quad (19)$$

Точка $x = 0$ – регулярная. Исследуем точку $x = \infty$, $z = \pm\infty$. Для этого введем замену переменных $X = x^{-1}$:

$$\left(\frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d}{dX} + \frac{A}{4X^3} + \frac{B}{4X^2} + \frac{C}{4X^4} \right) F_1 = 0; \quad (20)$$

точка $x = \infty$ является нерегулярной особой точкой ранга 2. Таким образом, уравнение (18) относится к классу $[0, \infty_2]$, т.е. вырожденному гипергеометрическому типу.

Свяжем уравнение с вырожденными гипергеометрическими функциями [8] явно. Для этого применим подстановку:

$$F_1 = x^\rho e^{\sigma x} \varphi_1(x), \quad F'_1 = x^\rho e^{\sigma x} \left[\varphi'_1 + \left(\frac{\rho}{x} + \sigma \right) \varphi_1 \right],$$

$$F''_1 = x^\rho e^{\sigma x} \left[\varphi''_1 + \left(\frac{2\rho}{x} + 2\sigma \right) \varphi'_1 + \left(\frac{\rho(\rho-1)}{x^2} + \frac{2\rho\sigma}{x} + \sigma^2 \right) \varphi_1 \right].$$

Исходное уравнение (18) примет вид:

$$x \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + (2\rho + 1 + 2\sigma x) \frac{d\varphi_1}{dx} + \left(\frac{\rho^2 + B/4}{x} + (\sigma^2 + C/4)x + \sigma(2\rho + 1) + \frac{A}{4} \right) \varphi_1 = 0.$$

Накладывая ограничения на параметры ρ, σ :

$$\rho = \pm i \frac{\sqrt{B}}{2} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad \sigma = \pm i \frac{\sqrt{C}}{2} = \pm \frac{iE}{2}, \quad (21)$$

приходим к уравнению

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + (2\rho + 1 + 2\sigma x) \frac{d}{dx} + \sigma(2\rho + 1) + \frac{A}{4} \right) \varphi_1 = 0.$$

Для определенности пусть

$$\rho = + \frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad \sigma = -i \frac{|E|}{2} \quad (E = \delta |E|, \delta = \pm 1). \quad (22)$$

Вводим новую переменную y :

$$y = -2\sigma x = i |E| e^{2z} \in (0 \cdot i, +\infty \cdot i), \quad \frac{d}{dx} = -2\sigma \frac{d}{dy}; \quad (23)$$

уравнение для φ_1 принимает вид:

$$y \frac{d^2 \varphi_1}{dy^2} + (2\rho + 1 - y) \frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{4\sigma(2\rho + 1) + A}{8\sigma} \varphi_1 = 0. \quad (24)$$

Это уравнение вырожденного гипергеометрического типа [8]

$$y \frac{d^2 Y}{dy^2} + (c - y) \frac{dY}{dy} - aY = 0 \quad (y = i |E| e^{2z})$$

с параметрами

$$c = 1 + 2\rho = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$a = \rho + \frac{1}{2} + \frac{A}{8\sigma} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i\delta}{2}(\varepsilon + E). \quad (25)$$

В зависимости от направления электрического поля имеем варианты A и B :

$$(A), E = +|E|, \quad c = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$a = \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E); \quad (26)$$

$$(B), E = -|E|, \quad c = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$a' = 1 + \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i}{2}(\varepsilon + E). \quad (27)$$

Дальше будем следить за обоими вариантами.

Заметим, что при построении решений для функции $F_3(x)$ было бы получено аналогичное уравнение. Чтобы полностью сохранить формальную симметрию относительно комплексного сопряжения, запишем его в виде

$$F_3 = x^{\bar{\rho}} e^{\bar{\sigma}x} \varphi_3(x), \quad \varphi_3(x) = [\varphi_1(x)]^*,$$

$$\bar{\rho} = \rho^* = -\frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad \bar{\sigma} = \sigma^* = +i\frac{|E|}{2}, \quad \bar{y} = y^* = -y,$$

$$\bar{c} = 1 + 2\bar{\rho} = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$\bar{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i\delta}{2}(\varepsilon + E). \quad (28)$$

В зависимости от направления электрического поля здесь также имеем варианты A и B :

$$(A), E = +|E|, \quad \bar{c} = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$\bar{a} = -\frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i}{2}(\varepsilon + E); \quad (29)$$

$$(B), E = -|E|, \quad \bar{c} = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$

$$\bar{a}' = 1 - \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E). \quad (30)$$

Дальше достаточно детально следить только за функцией $F_1(y)$, решения для $F_3(y)$ можно получить с помощью формальных замен.

Теперь перейдем к описанию линейно независимых решений уравнения для функции $\varphi_1(y)$, пользуясь общими свойствами решений вырожденного гипергеометрического уравнения. Сначала рассматриваем два решения [8]:

$$Y_1(y) = \Phi(a, c; y),$$

$$\varphi_1^{(1)}(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}/2} e^{-y/2} \times \Phi(a, c; y); \quad (31)$$

$$Y_2(y) = y^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; y),$$

$$\varphi_1^{(2)}(y) = y^{-i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}/2} e^{-y/2} \times \Phi(a - c + 1, 2 - c; y). \quad (32)$$

Эти два решения имеют простое асимптотическое поведение в области $z \rightarrow -\infty (y \rightarrow 0)$:

$$(A) \quad \begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &\sim y^{+i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2-M^2}/2} = \left(i|E|e^{2z}\right)^{+i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2-M^2}/2}, \\ \varphi_1^{(2)} &\sim y^{-i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2-M^2}/2} = \left(i|E|e^{2z}\right)^{-i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2-M^2}/2}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$(B) \quad \begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &\sim y^{+i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2-M^2}/2} = \left(i|E|e^{2z}\right)^{+i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2-M^2}/2}, \\ \varphi_1^{(2)} &\sim y^{-i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2-M^2}/2} = \left(i|E|e^{2z}\right)^{-i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2-M^2}/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Отмечаем, что асимптотики мало различаются в зависимости от направления поля; в обоих случаях поля они имеют вид модифицированных плоских волн, распространяющихся в разных направлениях.

Известно [8] асимптотическое представление для Y_1 в области $y \rightarrow +i\infty$:

$$Y_1(y) = \Phi(a, c; y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-y)^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{a-c} e^y; \quad (35)$$

после умножения этого соотношения на $y^\rho e^{-y/2}$ получаем

$$\varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-y)^{-a+\rho} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{a-c+\rho} e^{+y/2}. \quad (36)$$

Для вариантов (A) и (B) эта формула примет, соответственно, вид:

$$(A) \quad \varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y^{-1-i(\varepsilon+|E|)/2} e^{+y/2},$$

$$(B) \quad \varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a')} (-y)^{-1-i(\varepsilon-|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}; \quad (37)$$

штрих означает замену $|E| \rightarrow -|E|$. В разложениях (37) нужно учесть, что

$$z \rightarrow +\infty, \quad y^{-1} = \frac{1}{iEe^{2z}} \rightarrow 0,$$

а все остальные элементы в (37) представляют осциллирующие функции. Поэтому асимптотические формулы (37) упрощаются до следующих:

$$(A) \quad \varphi_1^{(1)}(z \rightarrow +\infty) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2};$$

$$(B) \quad \varphi_1^{(1)}(z \rightarrow +\infty) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}. \quad (38)$$

Отметим, что два множителя в асимптотиках не равноценны:

$$(A) \quad y^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} \sim e^{i(\varepsilon+|E|)z} e^{-ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left(-i\frac{|E|}{2}e^{2z}\right),$$

$$(B) \quad y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2} \sim e^{i(\varepsilon-|E|)z} e^{+ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left(+i\frac{|E|}{2}e^{2z}\right). \quad (39)$$

Аналогично имеем асимптотическое представление для решения Y_2 :

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= y^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; y) \sim \\ &\sim y^{1-c} \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2-c-a+c-1)} (-y)^{-a+c-1} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} x^{a-c+1-2+c} e^y \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_2(y) \sim \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} (-y)^{-a} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} x^{a-c} e^y \right); \end{aligned} \quad (40)$$

отсюда после умножения на $y^\rho e^{-y/2}$ получаем

$$\varphi_1^{(2)}(y) \sim \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} (-y)^{-a+\rho} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} y^{a-c+\rho} e^{+y/2} \right). \quad (41)$$

Для вариантов (A) и (B) эта формула примет вид:

$$\begin{aligned} (A) \quad \varphi_1^{(2)} &\sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} (-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} y^{-1-i(\varepsilon+|E|)/2} e^{+y/2}, \\ (B) \quad \varphi_1^{(2)} &\sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a')} (-y)^{-1-i(\varepsilon-|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a'-c+1)} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

С учетом соотношений

$$z \rightarrow +\infty, \quad y^{-1} = \frac{1}{iEe^{2z}} \rightarrow 0$$

асимптотические формулы (42) упрощаются:

$$\begin{aligned} (A) \quad \varphi_1^{(2)}(z \rightarrow +\infty) &\sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a')} (-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2}, \\ (B) \quad \varphi_1^{(2)}(z \rightarrow +\infty) &\sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a'-c+1)} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь также множители в асимптотиках не равноценны:

$$\begin{aligned} (A) \quad y^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} &\sim e^{i(\varepsilon+|E|)z} e^{-ie^{2z}|E|/2} \approx \exp \left\{ -i \frac{|E|}{2} e^{2z} \right\}, \\ (B) \quad y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2} &\sim e^{i(\varepsilon-|E|)z} e^{+ie^{2z}|E|/2} \approx \exp \left\{ +i \frac{|E|}{2} e^{2z} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Можно выбрать другую пару решений [8, с. 246]:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(5)}(y) &= y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}} e^{-y/2} \times Y_5(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}} e^{-y/2} \times \Psi(a, c; y), \\ \varphi_1^{(7)}(y) &= y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}} e^{-y/2} \times Y_7(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}} e^{+y/2} \Psi(c-1, c; -y). \end{aligned} \quad (45)$$

Известны [8] линейные перерасложения решений $Y_1 - Y_2$ и $Y_5 - Y_7$:

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} Y_1 + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \quad Y_7 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} Y_1 - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi c} Y_2. \quad (46)$$

Эти формулы после умножения на $y^\rho e^{-y/2}$ дают линейные соотношения между полными решениями:

$$\varphi_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \varphi_1^{(1)} + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \varphi_1^{(2)}, \quad \varphi_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \varphi_1^{(1)} - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi c} \varphi_1^{(2)}. \quad (47)$$

Соотношения (47) позволяют найти поведение функций φ_5 и φ_7 в обеих особых точках. Пара решений φ_1, φ_2 интерпретируется наиболее просто: в области $z \rightarrow -\infty$ электрическое поле «исчезает», эти два решения описывают почти плоские волны, распространяющиеся в двух противоположных направлениях. В области $z \rightarrow +\infty$ это качественное различие в значительной степени сглаживается (см. также более точные асимптотики с учетом двух сомножителей). Решения φ_5, φ_7 ведут себя похожим образом с тем отличием, что в области $z \rightarrow -\infty$ они представляют суперпозиции плоских волн, распространяющихся в разных направлениях.

3. Вычисление относительного коэффициента

Поскольку по известным решениям F_1 предстоит вычислять сопутствующую функцию F_3 , преобразуем уравнения первого порядка (8)

$$\left[(\varepsilon - eA) - i \frac{d}{dz} \right] F_3 - M F_1 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i \frac{d}{dz} \right] F_1 - M F_3 = 0$$

к переменной x . С учетом тождеств $eA(z) = E(x-1)$, $(d/dz) = 2x(d/dx)$ получаем

$$F_1 = \frac{1}{M} \left(\varepsilon + E - Ex - 2ix \frac{d}{dx} \right) F_3, \quad F_3 = \frac{1}{M} \left(\varepsilon + E - Ex + 2ix \frac{d}{dx} \right) F_1. \quad (48)$$

Поскольку функция F_1 представлена в переменной $y = iEx$, то соотношение, задающее F_3 , перепишем также в этой переменной:

$$F_3 = \frac{2i}{M} \left(-\frac{i}{2}(\varepsilon + E) + \frac{y}{2} + y \frac{d}{dy} \right) F_1, \quad F_1 = y^\rho e^{-y/2} F(a, c; y). \quad (49)$$

С учетом равенств

$$\rho = +\frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad c = 1 + i \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad \rho = \frac{c-1}{2}, \quad a = \frac{c-1}{2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E)$$

уравнение связи (49) можно записать так, чтобы оставались только параметры a, c :

$$F_3 = \frac{2i}{M} \left(a - \frac{c-1}{2} + \frac{y}{2} + y \frac{d}{dy} \right) y^{(c-1)/2} e^{-y/2} F(a, c; y). \quad (50)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} & y \frac{d}{dy} y^{(c-1)/2} e^{-y/2} F(a, c; y) = \\ & = \frac{c-1}{2} y^{(c-1)/2} e^{-y/2} F(a, c; y) - \frac{1}{2} y^{(c-1)/2+1} e^{-y/2} F(a, c; y) + y^{(c-1)/2} e^{-y/2} y \frac{d}{dy} F(a, c; y); \end{aligned}$$

дальше получаем:

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} \times \\ \times \left\{ ay^{(c-1)/2} F(a, c; y) - \frac{c-1}{2} y^{(c-1)/2} F(a, c; y) + \frac{1}{2} y^{(c-1)/2+1} F(a, c; y) + \right. \\ \left. + \frac{c-1}{2} y^{(c-1)/2} F(a, c; y) - \frac{1}{2} y^{(c-1)/2+1} F(a, c; y) + y^{(c-1)/2} y \frac{d}{dy} F(a, c; y) \right\}.$$

Отсюда после упрощения находим

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} y^{(c-1)/2} \left[aF(a, c; y) + y \frac{d}{dy} F(a, c; y) \right]. \quad (51)$$

Дальше учтем известное соотношение [8]

$$y \frac{d}{dy} F(a, c; y) = a [F(a+1, c; y) - F(a, c; y)];$$

в результате приходим к равенству:

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} y^{(c-1)/2} aF(a+1, c; y).$$

Отсюда, принимая во внимание тождество [8]

$$F(a+1, c; y) = e^y F(c-a-1, c; -y),$$

приходим к нужному выражению для функции $F_3(y)$:

$$F_3 = \frac{2i}{M} a \left\{ e^{+y/2} y^{(c-1)/2} F(c-a-1, c; -y) \right\}. \quad (52)$$

С учетом равенства

$$a = -\frac{i}{2} \left((\varepsilon + E) - \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} \right)$$

формулу связи (52) записываем в виде:

$$F_3 = \frac{(\varepsilon + E) - \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}}{M} F_1^*. \quad (53)$$

Это можно записать короче с использованием специальной параметризации:

$$\cosh \gamma = \frac{\varepsilon + M}{M}, \quad F_3 = (\cosh \gamma - \sinh \gamma) F_1^* = e^{-\gamma} F_1^*. \quad (54)$$

4. Анализ вещественных дифференциальных уравнений

Заметим, что свойство (11) позволяет комбинированием уравнений (8) вывести два уравнения первого порядка для двух вещественных функций $F_1 + F_3 = g$, $i(F_1 - F_3) = h$; эти уравнения выглядят так:

$$(\varepsilon - eA - M)g + \frac{dh}{dz} = 0, \quad (\varepsilon - eA + M)h - \frac{dg}{dz} = 0. \quad (55)$$

Переходим к переменной $x = e^{2z}$:

$$A(z) = \frac{E}{2}(e^{2z} - 1) = \frac{E}{2}(x - 1), \quad \frac{d}{dz} = 2x \frac{d}{dx};$$

так получаем систему

$$\left[\varepsilon - \frac{eE}{2}(x - 1) - M \right] g + 2x \frac{dh}{dx} = 0, \quad \left[\varepsilon - \frac{eE}{2}(x - 1) + M \right] h - 2x \frac{dg}{dx} = 0. \quad (56)$$

Временно для краткости сменим обозначение $eE/2 \rightarrow E$; тогда

$$(\varepsilon + E - M - Ex)g + 2x \frac{dh}{dx} = 0, \quad (\varepsilon + E + M - Ex)h - 2x \frac{dg}{dx} = 0. \quad (57)$$

Отсюда получаем, например, явный вид вещественного уравнения 2-го порядка для H :

$$\frac{d^2}{dx^2} h + \left(\frac{1}{x} - \frac{E}{-\varepsilon - E + M + Ex} \right) \frac{d}{dx} h + \left(\frac{1}{4} E^2 - \frac{1}{2} \frac{E(E + \varepsilon)}{x} + \frac{1}{4} \frac{(E + \varepsilon)^2 - M^2}{x^2} \right) h = 0;$$

его можно записать короче:

$$x_0 = \frac{\varepsilon + E - M}{E}, \quad \frac{d^2}{dx^2} h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x_0} \right) \frac{d}{dx} h + \left(\frac{1}{4} E^2 - \frac{1}{2} \frac{E(E + \varepsilon)}{x} + \frac{1}{4} \frac{(E + \varepsilon)^2 - M^2}{x^2} \right) h = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2} h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x_0} \right) \frac{d}{dx} h + \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} \right) h = 0. \quad (58)$$

Особые точки $0, x_0$ – регулярные; точка $x = \infty$ – нерегулярная ранга 2. Таким образом, здесь имеем уравнение из класса конфлюэнтного уравнения Гойна [9]. Линейным преобразованием аргумента особую точку можно переместить из x_0 в 1:

$$\frac{x}{x_0} \Rightarrow x = \frac{E}{\varepsilon + E - M} e^{2z}, \quad c'_0 = x_0^2 c_0, \quad c'_1 = x_0 c_1, \quad c'_2 = c_2; \quad (59)$$

тем самым преобразуя уравнение (58) к виду (ниже штрихи для краткости будем опускать):

$$\frac{d^2}{dx^2} h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} \right) \frac{d}{dx} h + \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} \right) h = 0. \quad (60)$$

В окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ решения ведут себя так:

$$x \rightarrow 0, \quad h(x) = x^a, \quad a = \pm i \sqrt{c_2}; \quad x \rightarrow 1, \quad h(x) = (x - 1)^b, \quad b = 0, 2. \quad (61)$$

Чтобы установить возможное поведение решений на бесконечности, делаем замену переменных $x=1/X$:

$$\frac{d^2 h}{dX^2} + \left(\frac{2}{X} + \frac{1}{X-1} \right) \frac{dh}{dX} + \left(\frac{c_0}{X^4} + \frac{c_1}{X^3} + \frac{c_2}{X^2} \right) h = 0. \quad (62)$$

Около $X = 0$ решения строятся на основе подстановки

$$h(X) = X^\rho e^{\sigma X} = x^{-\rho} e^{\sigma x}.$$

Вещественные уравнения имеют то преимущество, что они позволяют лучше понять сущность физической задачи в терминах потенциалов.

Локальные решения Фробениуса [9] уравнения (60) в окрестности точки $x = 0$ строятся на основе подстановки:

$$h(x) = x^a f(x), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Ищем решения уравнения (60) в виде $h(x) = x^a f(x)$. Находим первую и вторую производные:

$$h' = ax^{a-1} f + x^a f', \quad h'' = a(a-1)x^{a-2} f + 2ax^{a-1} f' + x^a f'';$$

далее получаем уравнение

$$f'' + \left(\frac{2a+1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) f' + \left(c_0 + \frac{a^2 + c_2}{x^2} + \frac{c_1 - a}{x} + \frac{a}{x-1} \right) f = 0.$$

Накладываем ограничения

$$a^2 + c_2 = 0, \quad a = \pm i\sqrt{c_2} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}.$$

Домножим получаемое уравнение на $x(x-1)$:

$$x^2 f'' - x f'' + [2ax - (2a+1)] f' + (x^2 c_0 + (c_1 - c_0)x + (a - c_1)) f = 0$$

или

$$x^2 f'' - x f'' + (N_1 x + N) f' + (L_2 x^2 + L_1 x + L) f = 0. \quad (63)$$

Строим решения в виде степенных рядов:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2};$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k d_{k+1} x^k + N_1 \sum_{k=1}^{\infty} k d_k x^k + N \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} x^k + \\ + L_2 \sum_{k=2}^{\infty} d_{k-2} x^k + L_1 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1} x^k + L \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = 0. \end{aligned}$$

В результате приходим к рекуррентным соотношениям для коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned} k=0, \quad Nd_1 + Ld_0 &= 0, \\ k=1, \quad -2d_2 + L_1d_0 + Ld_1 &= 0, \\ k=2, 3, \dots \\ k(k-1)d_k - k(k+1)d_{k+1} + N_1kd_k + N(k+1)d_{k+1} + L_2d_{k-2} + L_1d_{k-1} + Ld_k &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, основное рекуррентное соотношение имеет вид:

$$L_2d_{k-2} + L_1d_{k-1} + [L + k(k-1) + N_1k]d_k + [-k(k+1) + N(k+1)]d_{k+1} = 0. \quad (64)$$

Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре – Перрона [9]:

$$L_2 + L_1 \frac{d_{k-1}}{d_{k-2}} + [L + k(k-1) + N_1k] \frac{d_k}{d_{k-1}} \frac{d_{k-1}}{d_{k-2}} + [-k(k+1) + N(k+1)] \frac{d_{k+1}}{d_k} \frac{d_k}{d_{k-1}} \frac{d_{k-1}}{d_{k-2}} = 0.$$

Делим уравнение на k^2 , устремляем $k \rightarrow \infty$, вводим параметр

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k-1}}{d_{k-2}} = r, \quad R_{conv} = \frac{1}{|r|};$$

получаем алгебраическое уравнение для величины r : $r^2 - r^3 = 0 \Rightarrow r = 1, r = 0$. Следовательно, минимальный радиус сходимости ряда равен $R_{conv}^{min} = 1$.

Обратимся к уравнению (62). Используем подстановку

$$h(X) = X^\rho e^{\sigma X} g(X), \quad g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n, \quad (65)$$

$$h' = X^\rho e^{\sigma X} \left(\frac{\rho}{X} g - \frac{\sigma}{X^2} g + g' \right),$$

$$h'' = X^\rho e^{\sigma X} \left[\left(\frac{\rho(\rho-1)}{X^2} + \frac{2\sigma-2\rho\sigma}{X^3} + \frac{\sigma^2}{X^4} \right) g + \left(\frac{2\rho}{X} - \frac{2\sigma}{X^2} \right) g' + g'' \right].$$

Для функции $g(X)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} g'' + \left(\frac{2\rho+2}{X} - \frac{2\sigma}{X^2} + \frac{1}{X-1} \right) g' + \\ + \left(\frac{\sigma^2 + c_0}{X^4} + \frac{-2\rho\sigma + c_1}{X^3} + \frac{\rho(\rho+1) + \sigma + c_2}{X^2} + \frac{\sigma - \rho}{X} + \frac{\rho - \sigma}{X-1} \right) g = 0. \end{aligned}$$

Накладываем ограничения

$$\begin{aligned} \sigma^2 + c_0 = 0 &\Rightarrow \sigma = \pm i\sqrt{c_0}, \\ -2\rho\sigma + c_1 = 0 &\Rightarrow \rho = \frac{c_1}{2\sigma} = \pm \frac{c_1}{2i\sqrt{c_0}}. \end{aligned} \quad (66)$$

Уравнение упрощается

$$g'' + \left(\frac{2\rho+2}{X} - \frac{2\sigma}{X^2} + \frac{1}{X-1} \right) g' + \left(\frac{\rho(\rho+1) + \sigma + c_2}{X^2} + \frac{\sigma - \rho}{X} + \frac{\rho - \sigma}{X-1} \right) g = 0.$$

Удобно использовать сокращенную запись:

$$N_1 = 2\rho + 2, \quad N_2 = -2\sigma, \quad N_3 = 1,$$

$$M_2 = \rho(\rho+1) + \sigma + c_2, \quad M_1 = \sigma - \rho, \quad M_3 = \rho - \sigma;$$

$$g'' + \left(\frac{N_1}{X} + \frac{N_2}{X^2} + \frac{N_3}{X-1}\right)g' + \left(\frac{M_1}{X} + \frac{M_2}{X^2} + \frac{M_3}{X-1}\right)g = 0. \quad (67)$$

Домножив последнее уравнение на $X^2(X-1)$:

$$X^3 g'' - X^2 g'' + [(N_1 + N_3)X^2 + N_2 X + (-N_1 - N_2)]g' + \\ + [(M_1 + M_3)X^2 + (-M_1 + M_2)X - M_2]g = 0,$$

будем строить решения уравнения в виде степенного ряда:

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n, \quad g'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n X^{n-1}, \quad g''(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n X^{n-2};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n X^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n X^n + \\ + (N_1 + N_2) \sum_{n=1}^{\infty} n d_n X^{n+1} + N_2 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n X^n - (N_1 + N_2) \sum_{n=1}^{\infty} n d_n X^{n-1} + \\ + (M_1 + M_3) \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^{n+2} + (-M_1 + M_2) \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^{n+1} - M_2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n = 0.$$

После изменения индексов суммирования получим:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) d_{n-1} X^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n X^n + \\ + (N_1 + N_2) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} X^n + N_2 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n X^n - \\ - (N_1 + N_2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} X^n + \\ + (M_1 + M_3) \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} X^n + (-M_1 + M_2) \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} X^n - M_2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n = 0.$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях X^n :

$$n = 0, \quad -(N_1 + N_2) d_1 - M_2 d_0 = 0;$$

$$n = 1, \quad N_2 d_1 - (N_1 + N_2) 2d_2 + (-M_1 + M_2) d_0 - M_2 d_1 = 0;$$

$$n = 2, \quad -2d_2 + (N_1 + N_2) d_1 + N_2 2d_2 - \\ - (N_1 + N_2) 3d_3 + (M_1 + M_3) d_0 + (-M_1 + M_2) d_1 - M_2 d_2 = 0;$$

$$n = 3, \quad 2d_2 - 6d_3 + (N_1 + N_2) 2d_2 + N_2 3d_3 - \\ - (N_1 + N_2) 4d_4 + (M_1 + M_3) d_1 + (-M_1 + M_2) d_2 - M_2 d_3 = 0;$$

$$n = 4, 5, 6, \dots \quad (n-1)(n-2) d_{n-1} - n(n-1) d_n + (N_1 + N_2)(n-1) d_{n-1} + N_2 n d_n - \\ - (N_1 + N_2)(n+1) d_{n+1} + (M_1 + M_3) d_{n-2} + (-M_1 + M_2) d_{n-1} - M_2 d_n = 0.$$

Таким образом, приходим к 4-членным рекуррентным соотношениям:

$$(M_1 + M_3) d_{n-2} + [(n-1)(n-2) + (N_1 + N_2)(n-1) + (-M_1 + M_2)] d_{n-1} + \\ + [-n(n-1) + N_2 n - M_2] d_n - (N_1 + N_2)(n+1) d_{n+1} = 0.$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре – Перрона:

$$(M_1 + M_3) + [(n-1)(n-2) + (N_1 + N_2)(n-1) + (-M_1 + M_2)] \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} + (-n(n-1) + N_2n - M_2) \frac{d_n}{d_{n-1}} \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} - (N_1 + N_2)(n+1) \frac{d_{n+1}}{d_n} \frac{d_n}{d_{n-1}} \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = 0.$$

Делим уравнение на n^2 , устремляем $n \rightarrow \infty$, вводим параметр

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = r, \quad R_{conv} = \frac{1}{|r|};$$

получаем алгебраическое уравнение для величины r : $r - r^2 = 0 \Rightarrow r = 0, r = 1$; следовательно, минимальный радиус сходимости ряда равен 1. Эта область соответствует плоскости в переменной x с вырезанным кругом радиуса 1.

Поскольку на окружности радиуса 1 поведение решений вполне регулярное – см. (61), – можно ожидать, что построенные ряды (и по переменной x , и по переменной $ZX = x^{-1}$) будут сходиться в более широких областях, плавно проходя через границу круга радиуса 1.

В уравнении (60) можно убрать преобразованием член с первой производной:

$$h = \varphi F, \quad F'' + F' \left(2 \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) + \left[\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) + c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} \right] F = 0.$$

Фиксируя функцию φ :

$$\left(2 \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{x-1}{x}},$$

приходим к уравнению со структурой

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + P^2(x) \right) F = 0,$$

где эффективный квадрат импульса равен

$$P^2(x) = c_0 + \frac{c_1 - 1/2}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{c_2 + 1/4}{x^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(x-1)^2}. \quad (68)$$

Около особых точек $x = 0, x = \infty, x = 1$ функция $P^2(x)$ ведет себя так:

$$x \rightarrow 0, P^2 \sim \frac{c_2 + 1/4}{x^2}; \quad x \rightarrow \infty, P^2 \sim c_0; \quad x \rightarrow 1, P^2 \sim -\frac{3}{4} \frac{1}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Заключение

Физическая задача описывается системой из двух связанных уравнений первого порядка, которые методом исключения приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с комплекснозначными потенциалами. Построены и исследованы возможные решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Показано, что комбинированием исходных уравнений первого порядка можно привести задачу к уравнениям второго порядка с вещественными потенциалами с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной особенно-

стью на бесконечности ранга 2, т.е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Получены решения Фробениуса для этих уравнений, анализ сходимости возникающих степенных рядов указывает на их определенность и корректность во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$.

Авторы благодарят участников семинара лаборатории теоретической физики ИФ НАН Беларуси за обсуждение работы и полезные советы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсюк, В. М. Редьков // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.
2. Овсюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсюк, О. В. Веко // Вест. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.
3. Овсюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсюк, О. В. Веко // Вест. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.
4. Ovsyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // NPCS. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.
5. Овсюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 / Е. М. Овсюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Вест. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 1. – С. 76–85.
6. Овсюк Е. М. О решении уравнения Шредингера для частицы в электрическом поле в пространствах постоянной кривизны / Е. М. Овсюк, О. В. Веко // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 3. – С. 43–47.
7. Ovsyuk, E. M. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models / E. M. Ovsyuk, O. V. Veko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, № 11. – P. 1065–1072.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука. 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 298 с.
9. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.02.2017

Veko O.V., Voynova Ya.A., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M. Dirac Particle in External Electric Field of the Background of Lobachevsky Geometry

For a free Dirac particle in quasi-Cartesian coordinates (x, y, z) of the Lobachevsky space, there exists special states when projections of the quasi-momentum along axes x and y equal to zero; the effective reflecting barrier $U(z)$ arising from Lobachevsky geometrical background vanishes for these states. In the present paper, this special case is investigated in presence of generalized uniform electric field. Geometry substantially influences the effects of electric field, mainly for large scale distances. The physical problem is described by two related first order equations, which lead to 2-nd order equations with complex-valued potentials; its solutions are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. It is shown that by combining initial first order equations, one can derive second order equations with real-valued potentials: they both have two regular singular points and one irregular one of the rank 2 at infinity; they are recognized as confluent Heun equations. Its Frobenius solutions are constructed; analysis of convergence of arising series indicates that these solutions are correct in the whole physical region of the variable, $z \in (-\infty, +\infty)$.

УДК 535.42

А.А. Голуб

*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина*

**ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ
В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ**
e-mail: agolub@tut.by

Исследовано когерентное взаимодействие (1+1)D световых пучков в фоторефрактивном кристалле $Bi_{12}TiO_{20}$, помещенном во внешнее знакопеременное электрическое поле. Показано, что отклонение световых пучков на выходе из кристалла зависит от выбора направления их линейной поляризации на входе в кристалл. Указана возможность использования эффектов отклонения световых пучков и перераспределения их интенсивности в оптических логических устройствах.

Введение

В работе представлены результаты численного моделирования взаимодействия двух гауссовых (1+1)D световых пучков, распространяющихся в фоторефрактивном оптически активном кристалле $Bi_{12}TiO_{20}$ в зависимости от направления их линейной поляризации на входе в кристалл. Использование таких кристаллов удобно из-за их сильного электрооптического отклика. Внешнее знакопеременное электрическое поле, приложенное к боковым граням таких кристаллов, позволяет создать градиент показателя преломления, что приводит к отклонению световых пучков, распространяющихся внутри кристалла.

Во многих работах, например, в [1–3], рассматривалось взаимодействие световых пучков в фоторефрактивных кристаллах, помещенных в постоянное электрическое поле. Влияние внешнего переменного электрического поля на взаимодействие световых пучков подробно не рассматривалось, так как оно обладает слабым фокусирующим эффектом и приводит к значительному отклонению световых пучков. Несколько частных случаев было рассмотрено в работе [4].

Теоретическая модель

При расчетах использовалась теоретическая модель, предложенная в [4]. Световые пучки с гауссовым распределением интенсивности вдоль оси OX падают на кристалл среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ так, чтобы плоскость их перетяжки совпадала с входной гранью кристалла, и распространяются внутри него вдоль оси OZ (рисунок 1).

К кристаллу под углом θ , отсчитываемым от кристаллографического направления $[1\bar{1}0]$, приложено знакопеременное электрическое поле меандровой формы [5]:

$$E_x = -\frac{L_E E_0}{I_d + I} \frac{dI}{dx}, \quad (1)$$

где $L_E = \mu\tau_R E_0$ – дрейфовая длина, μ – подвижность, τ_R – время рекомбинации носителей заряда, I – интенсивность света внутри кристалла, I_d – «темновая» интенсивность, включающая также интенсивность подсветки, E_0 – напряженность внешнего знакопеременного электрического поля.

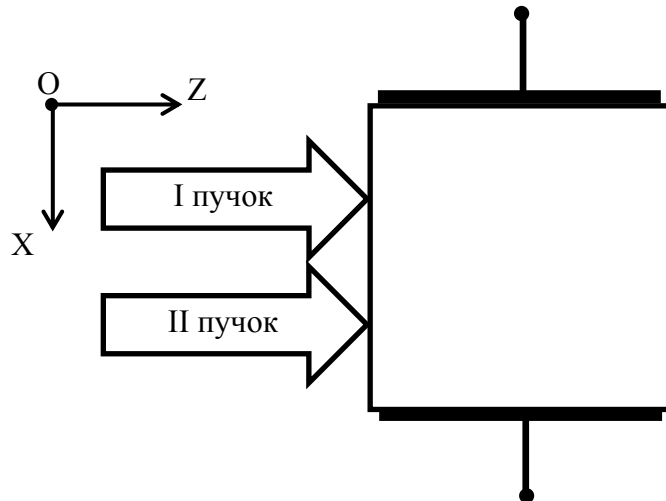


Рисунок 1. – Взаимное расположение световых пучков и фоторефрактивного кристалла

Комплексную интенсивность амплитуды светового поля $A(x, z)$ можно описать следующим уравнением:

$$i \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + k_0 \delta n A. \quad (2)$$

Здесь: $k_0 = 2\pi / \lambda$ – волновое число для вакуума; λ – длина световой волны; n_0 – показатель преломления невозмущенной среды; $\delta n = -r_{\text{eff}} n_0^3 E_x / 2$ – нелинейная добавка к показателю преломления; r_{eff} – эффективная электрооптическая постоянная.

Решение уравнения (2) с учетом оптической активности фоторефрактивных кристаллов в аналитическом виде на данный момент не найдено, поэтому представленные в статье результаты получены численным моделированием с использованием схемы Дугласа.

Результаты численного моделирования

Для моделирования использовались следующие параметры кристалла: $n_0 = 2,58$, $r_{\text{eff}} = 5$ пм/В, $\mu\tau_R = 2 \cdot 10^{-12}$ м²/В, величина оптической активности $\rho = 6$ °/мм, длина кристалла принималась равной $z = 20$ мм, ориентационный угол $\theta = 90^\circ$.

Распределение интенсивности световых пучков на входе в кристалл (рисунок 2) задавалось следующим выражением:

$$I(x) = I_0 (\exp(-(x - x_a)^2 / x_b^2) + \exp(-(x + 2x_a)^2 / x_0^2)), \quad (3)$$

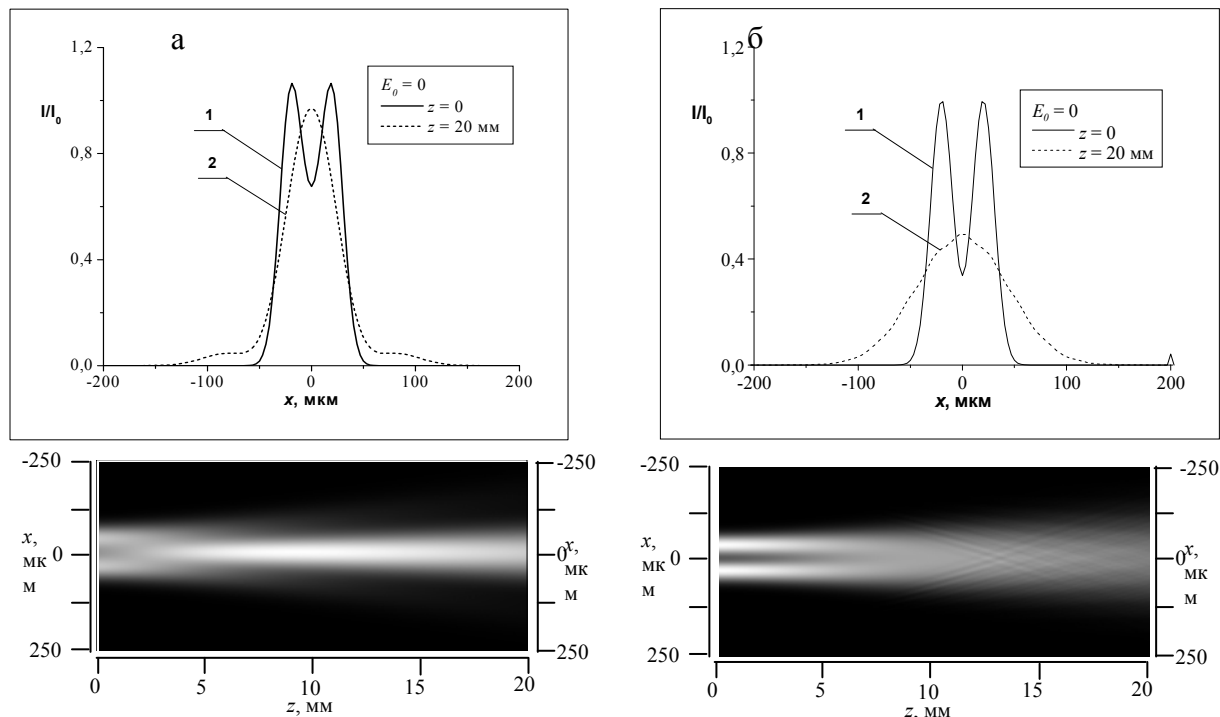
где $x_0 = 15$ мкм – радиус перетяжки световых пучков.

Расстояние между центрами световых пучков принималось равным $2x_a$ (40 мкм), длина волны $\lambda = 0,6328$ мкм.

В отсутствие внешнего электрического поля световые пучки испытывают естественную дифракционную расходимость, и в результате взаимодействия их друг с другом формируется общий световой пучок (рисунок 2).

На рисунке 2а представлен результат взаимодействия световых пучков, имеющих на входе одинаковую линейную поляризацию, так как пучки когерентны, то интенсивность результирующего светового пучка определяется выражением $I = (A_1 + A_2)^2$.

Этот пучок достигает максимума интенсивности примерно в середине кристалла, а затем постепенно дифрагирует и на выходе имеет относительную интенсивность $I/I_0 = 0,95$.



a – направления линейной поляризации световых пучков параллельны друг другу;
б – направления линейной поляризации световых пучков ортогональны друг другу.
 1 – распределение интенсивности светового поля на входе в кристалл;
 2 – распределение интенсивности светового поля на выходе из кристалла.

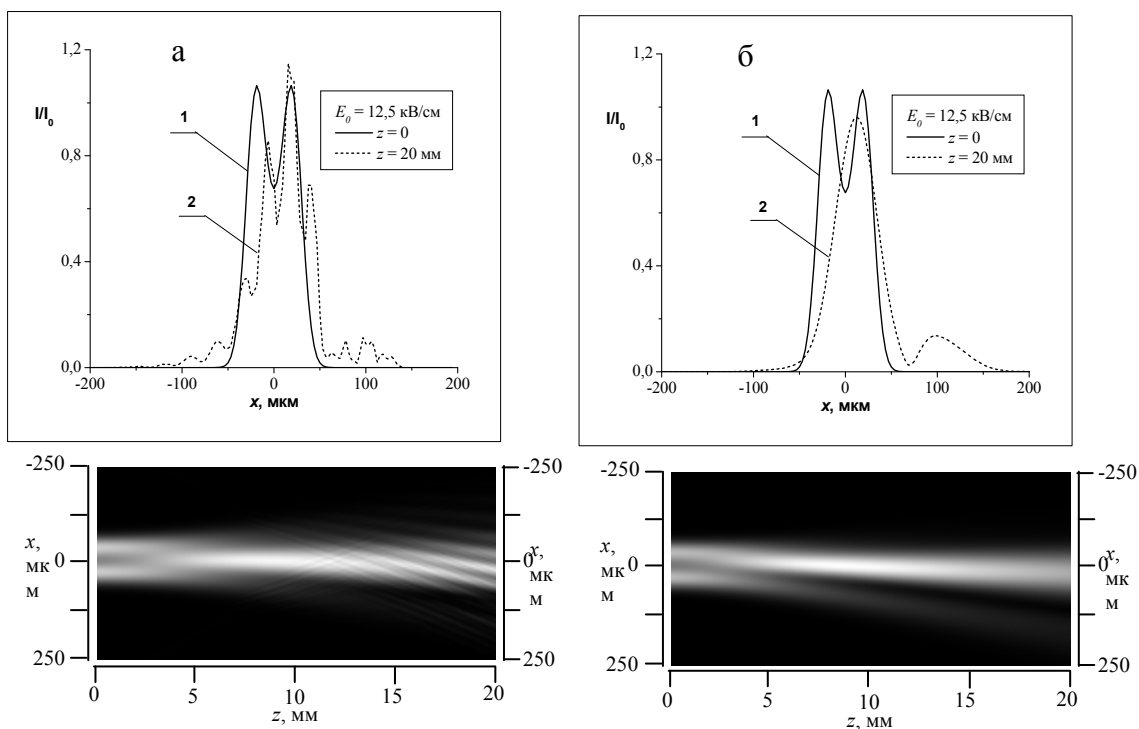
Рисунок 2. – Распределение интенсивности световых пучков, распространяющихся в фоторефрактивном оптически активном кристалле для случая, когда напряженность внешнего знакопеременного электрического поля $E_0 = 0$

Если на входе в кристалл линейная поляризация световых пучков ортогональна друг другу, то результирующая интенсивность на входе в кристалл описывается выражением $I = A_1^2 + A_2^2$. Объединение световых пучков происходит без пика интенсивности, а результирующий пучок до середины кристалла имеет два ярко выраженных пика в распределении интенсивности и рассеивается значительно сильнее, а на выходе из кристалла имеет относительную интенсивность $I/I_0 = 0,5$, что почти в 2 раза меньше, чем в случае, представленном на рисунке 2а. Также значительно увеличивается ширина выходного светового пучка.

При моделировании влияния внешнего знакопеременного электрического поля напряженностью $E_0 = 12,5$ кВ/см на взаимодействие световых пучков предполагалось, что они на входе в кристалл имели линейную поляризацию, направление которой было либо параллельно, либо ортогонально направлению вектора напряженности внешнего знакопеременного электрического поля. Как показано в работе [6], при рассматриваемом значении ориентационного угла θ наибольшее отклоняющее влияние внешнее знакопеременное электрическое поле будет оказывать на световой пучок, линейно поляризованный перпендикулярно оси ox (рисунок 3б) и существенно меньшее при ортогональной этому направлению поляризации (рисунок 3а).

В случае, рассмотренном на рисунке 3а, оба световых пучка находятся в не выгодных для наблюдения отклонения и фокусировки условиях, поэтому объединенный световой пучок на выходе из кристалла отклоняется незначительно.

Взаимодействие световых пучков, линейно поляризованных ортогонально оси ОХ (рисунок 3б) из-за сдвигающего действия внешнего электрического поля, не приводит к их полному объединению. Происходит частичная перекачка энергии из нижнего пучка в верхний, а на выходной грани кристалла наблюдается незначительное отклонение верхнего пучка и смещение от первоначального положения примерно на 80 мкм нижнего. За счет перекачки энергии из одного светового пучка в другой интенсивность нижнего светового пучка на выходе из кристалла меньше в 6,5 раз, чем верхнего. Верхний световой пучок достигает наибольшей интенсивности на расстоянии 9 мм от входной грани кристалла, а его максимум смещается в сторону второго пучка вдоль оси ОХ. Дальнейшее распространение светового пучка происходит практически без отклонений.



*а – направления линейной поляризации световых пучков параллельны оси ОХ;
б – направления линейной поляризации световых пучков ортогональны оси ОХ.
1 – распределение интенсивности светового поля на входе в кристалл;
2 – распределение интенсивности светового поля на выходе из кристалла.*

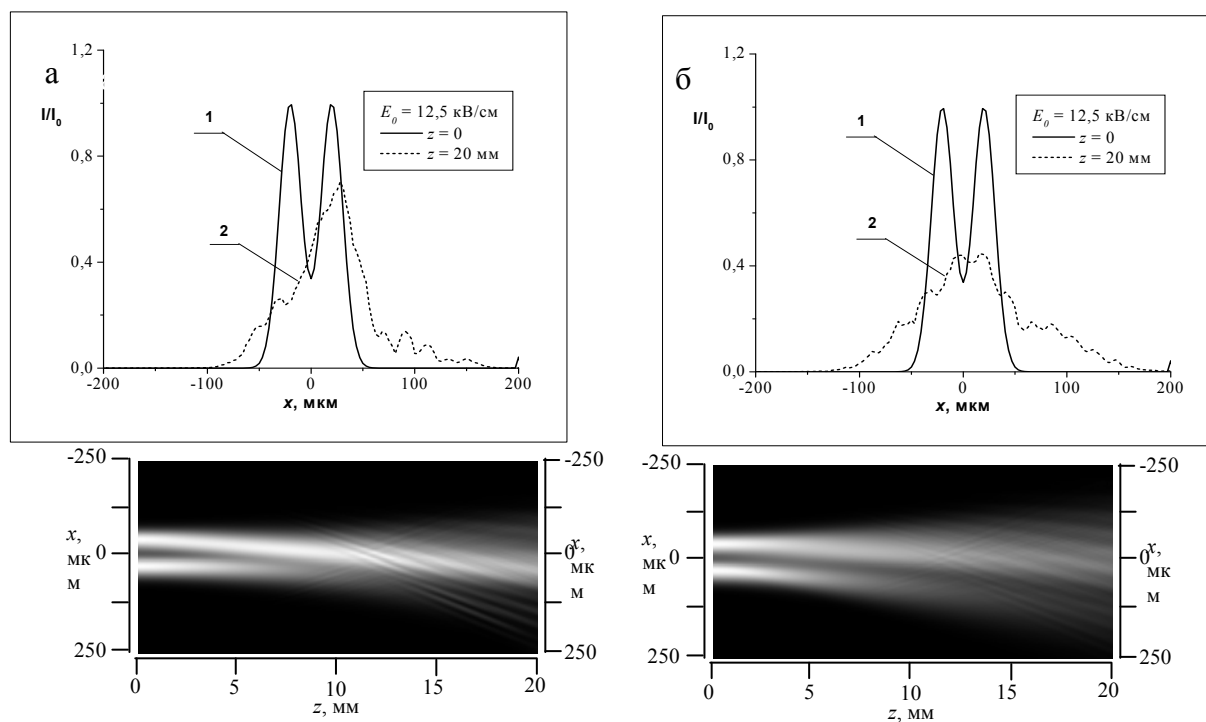
Рисунок 3. – Распределение интенсивности световых пучков, распространяющихся в фоторефрактивном оптически активном кристалле для случая, когда напряженность внешнего знакопеременного электрического поля $E_0 = 12,5$ кВ/см

На рисунке 4 представлены результаты моделирования взаимодействия световых пучков, линейно поляризованных ортогонально друг другу для случая, когда напряженность внешнего знакопеременного электрического поля $E_0 = 12,5$ кВ/см.

Результат взаимодействия зависит от взаимного расположения световых пучков, поляризованных параллельно или ортогонально вектору напряженности внешнего электрического поля, так как под воздействием поля они отклоняются по-разному.

На рисунке 4а верхний световой пучок на входе в кристалл линейно поляризован ортогонально оси OX , а нижний параллельно ей. В этом случае нижний световой пучок рассеивается, а максимум интенсивности верхнего пучка смещается на ≈ 40 мкм.

Если изменить поляризацию световых пучков на 90° (рисунок 4б), то отклонения светового пучка на выходе из кристалла практически не наблюдается.



а – направление линейной поляризации нижнего светового пучка параллельно оси OX , верхнего – ортогонально оси OX ;

б – направление линейной поляризации нижнего светового пучка ортогонально оси OX , верхнего – параллельно оси OX .

1 – распределение интенсивности светового поля на входе в кристалл;

2 – распределение интенсивности светового поля на выходе из кристалла.

Рисунок 4. – Распределение интенсивности световых пучков, распространяющихся в фоторефрактивном оптически активном кристалле для случая, когда напряженность внешнего знакопеременного электрического поля $E_0 = 12,5$ кВ/см

Заключение

Взаимодействие световых пучков в фоторефрактивном оптически активном кристалле, помещенном во внешнее знакопеременное электрическое поле меандровой формы можно использовать для конструирования оптических логических устройств переключения [7–8]. Кроме того, может оказаться полезным эффект усиления одного из пучков за счет перекачки энергии из второго (представлен на рисунке 3б).

Результаты моделирования, описанные выше, позволяют выбрать наиболее оптимальные параметры взаимного расположения и линейной поляризации взаимодействующих световых гауссовых пучков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Królikowski, W. Photorefractive materials and solitons / W. Królikowski, B. Luther-Davies, Y. Kivshar // Opt. Electron. Rev. – 2001. – № 9. – С. 287–292.
2. Взаимодействие экранирующих солитонов в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2005. – Т. 35, № 4. – С. 351–355.
3. Interaction of Two-Dimensional Rectangular Light Beams in a Photorefractive SBN Crystal / D. Khmel'nitsky [et al.] // Ferroelectrics. – 2009. – Vol. 390, № 1. – P. 18–28.
4. Влияние оптической активности на самоискривление светового пучка в кубических фоторефрактивных кристаллах во внешнем знакопеременном электрическом поле / В. В. Шепелевич [и др.] // Электронные средства и системы управления : материалы науч.-практ. конф., Томск, 6–8 окт. 2004 г. – Томск, 2004. – Ч. 1. – С. 6–9.
5. Самоискривление траектории светового пучка в фоторефрактивных кристаллах во внешнем знакопеременном электрическом поле / М. В. Бородин [и др.] // Изв. вузов. Физика. – 2001. – № 10. – С. 38–42.
6. Влияние оптической активности на самоискривление светового пучка в кубических фоторефрактивных кристаллах во внешнем знакопеременном электрическом поле / О. А. Кашин [и др.] // Изв. вузов. Физика. – 2004. – № 7. – С. 26–32.
7. Blair, S. Spatial soliton angular deflection logic gates / S. Blair, K. Wagner // Appl. Opt. – 1999. – Vol. 38, № 32. – P. 6749–6772.
8. Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле / В. В. Давыдовская [и др.] // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 10. – С. 899–906.
9. A concomitant and complete set of nonvolatile all-optical logic gates based on hybrid spatial solitons / L. L. Colombo [et al.] // Opt. Expr. – 2014. – Vol. 22, № 1. – P. 6934–6947.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.04.2017

Golub A.A. The Influence of an External Alternating Electric Field on the Interaction of Gaussian Light Beams in a Photorefractive Optically Active Crystal

The coherent interaction of $(1+1)D$ light beams in a photorefractive $Bi_{12}TiO_{20}$ crystal placed in an external alternating electric field is investigated. It is shown that the bending of light beams at the exit from the crystal depends on the choice of the direction of their linear polarization at the entrance to the crystal. The possibility of using the effects of bending of light beams and redistribution of their intensity in optical logic devices is indicated.

УДК 538.913

Н.Г. Крылова

науч. сотрудник научно-исследовательской лаборатории
диэлектрической спектроскопии гетерогенных систем
каф. биофизики Белорусского государственного университета
e-mail: krylovang@bsu.by

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЛЕНГМЮРОВСКИХ МОНОСЛОЯХ

Предложен эффективный потенциал, определяющий суммарный эффект взаимодействия молекул субфазы с молекулами ленгмюровского монослоя. Проведен анализ зависимости потенциальной функции от параметров системы, установлено существование минимума потенциальной энергии при скоростях сжатия монослоя выше некоторой критической величины. Положение и глубина этого минимума меняются с ростом скорости сжатия. На основе анализа процессов гетерогенной нуклеации в монослое предложена специальная параметризация конфигурационного пространства системы, учитывающая распределение по временам релаксации зародышей фаз в процессе фазового перехода жидкость – кристаллическое состояние. Проведена финслерова геометризация электрокапиллярного взаимодействия в монослое, построена метрическая функция полученного финслерова пространства системы, выведены уравнения для геодезических, которые описывают конфигурацию системы в процессе сжатия.

Введение

Технология Ленгмюра – Блоджетт (ЛБ) позволяет формировать двумерные высокоупорядоченные наноразмерные объекты на основе органических амфифильных соединений [1]. Кроме того, эта технология перспективна для создания упорядоченных кластеров неорганических наноматериалов (углеродные нанотрубки, металлические наночастицы и др.) с высокой плотностью упаковки для задач наноэлектроники и нанофотоники [2]. Формирование трехмерных ЛБ-пленок достигается посредством последовательного переноса сжатых до кристаллического состояния двумерных ЛБ-монослоев на твердую подложку. При этом структура доменов сжатых монослоев на поверхности жидкой субфазы сохраняется при их переносе [3].

В этой связи важной является задача моделирования процессов кристаллизации ленгмюровских монослоев, это может обеспечить эффективный выбор параметров формирования ЛБ-монослоев с заданными характеристиками. Настоящая работа посвящена именно такому моделированию.

При сжатии монослоя на поверхности полярной жидкости наблюдается ряд последовательных фазовых переходов из состояния двумерного газа в кристаллическое [1; 4]. Критические значения параметров фазовых переходов и структура сжатых монослоев зависят от свойств амфифильных молекул и параметров водной субфазы (pH , наличие ионов металлов). Чаще всего при теоретическом описании двумерных фазовых переходов используется теория среднего поля Ландау [5], при этом фазовый переход описывается как результат изменения симметрии. Также используются методы молекулярной динамики с полуэмпирическими парными потенциалами [5; 6] (например, потенциал Леннарда-Джонса [7; 8]), описывающими взаимодействие гидрофобных частей молекул.

Однако задача моделирования процессов кристаллизации ленгмюровских монослоев до сих пор остается не решенной полностью, вследствие необходимости учитывать не только сложное взаимодействие амфифильных молекул друг с другом, но и взаимодействие с водной субфазой: а именно, образование водородных связей и двумерных кристаллогидратов, учет изменения структуры прилегающего к поверхности слоя воды под действием амфифильных молекул, наконец, нужно учитывать влияние двой-

ного электрического слоя на термодинамику фазовых переходов [1; 5; 9]. Влияние последнего на формирование ленгмюровских монослоев до сих пор не рассматривалось.

Кроме того, в известных моделях остается нерешенным ряд существенных проблем. Так, не описаны экспериментально наблюдаемые зависимости морфологии доменов фаз [10; 11], вязкости [12], температуры и поверхностного давления [13–15] фазового перехода 2D-жидкость – кристаллическое состояние от скорости сжатия монослоя V . Типичная для фазового перехода 1-го рода зависимость поверхностного натяжения π от площади монослоя S наблюдается не только в условиях квазиравновесного сжатия, но и при некоторых скоростях сжатия далеко от состояния равновесия [13]. Эти эффекты могут возникать как результат зависимости перераспределения плотности электрического заряда на границе раздела фаз от скорости V .

Наиболее сложным при построении микроскопических теорий конденсированных сред является выбор модельных потенциалов межатомных взаимодействий. На практике используются различные эффективные потенциалы взаимодействия между ближайшими атомами, которые подбираются на основе полуэмпирических соображений [16; 17]. Так, при описании монослоев Ленгмюра методами молекулярной динамики обычно используют потенциалы, учитывающие только парные взаимодействия [5]. Однако показано [18; 19], что при моделировании конденсированных состояний для непротиворечивого описания изменения симметрии при фазовых переходах типа упорядочения необходимо учитывать взаимодействия между атомами (как минимум) в одиннадцати координационных сферах. Таким образом, реалистичное описание взаимодействия между молекулами в конденсированных средах должно учитывать большое число частиц, что затрудняет моделирование таких систем методами молекулярной динамики.

На границе раздела фаз (монослой амфифильных молекул – водная среда) возникает разность потенциалов двойного электрически заряженного слоя, который создается распределением электрических зарядов ионизованных гидрофильных групп амфифильных молекул и противоионов в воде. Возникшая разность потенциалов приводит к появлению дополнительного вклада в величину поверхностного натяжения монослоя [20]. Для произвольных двухфазных систем этот вклад, называемый электрокапиллярным эффектом, описан в [20] феноменологически в рамках термодинамики. Учет электрокапиллярности позволяет простым образом ввести в рассмотрение взаимодействие амфифильных молекул с водной субфазой и учесть влияние двойного слоя на формирование ленгмюровских монослоев.

Цель настоящей работы – исследовать динамику фазового перехода жидкость – кристаллическое состояние в процессе сжатия ленгмюровских монослоев под действием электрокапиллярных сил. Для этого предложен эффективный потенциал, определяющий суммарный эффект взаимодействия молекул субфазы с молекулами ленгмюровского монослоя. На основе анализа процессов гетерогенной нуклеации в монослое предложена параметризация конфигурационного пространства системы, которая позволяет учесть распределение времен релаксации в процессе фазового перехода. Проведена финслерова геометризация взаимодействия в монослое, построена метрическая функция полученного финслерова пространства системы, выведены уравнения для геодезических, которые описывают конфигурацию системы в процессе сжатия.

Модельный потенциал

Пусть некоторое количество амфифильных молекул, формирующих ЛБ-монослой, распределено на поверхности жидкой субфазы. Гидрофильные группы амфифильных молекул погружены в электролит, а гидрофобные части находятся снаружи. В воде гидрофильные группы молекул диссоциируют на положительно заряженный ион водорода и отрицательно заряженную гидрофильную группу. При этом молекулы

воды и положительно заряженные ионы электролита ориентируются таким образом, чтобы компенсировать заряд амфифильных молекул, образуя в результате двойной электрический слой толщиной D . Отрицательно заряженная гидрофильная группа и положительно заряженная «шуба» ионов и молекул воды формируют диполь. По поверхности субфазы движется барьер, сжимая монослой амфифильных молекул. Сжатие монослоя приводит к движению отрицательно заряженных молекул относительно положительно заряженной «шубы» ионов и молекул воды. Напряженность электрического поля \vec{E} двойного электрического слоя будет направлена под некоторым углом α к нормали плоскости монослоя, что создает дополнительную радиальную компоненту силы, действующую против направления движения сжимающего барьера. Тогда поверхностная энергия монослоя будет изменяться при сжатии монослоя.

Используя подход, предложенный в [21], на основе детального рассмотрения вышесказанного построено следующее приближенное выражение для плотности эффективной потенциальной энергии поверхностного натяжения U в произвольной точке монослоя с координатами (r, t) в виде

$$U(\dot{r}, r, t; V) = -p \left[P_1 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{2}{3}(Vt)^5 \left(6 - \frac{Vt}{r} \right) Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] - \frac{V}{\dot{r}} \left(P_2 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{4}{3}(Vt)^5 Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] \right) \right], \quad (1)$$

где используются обозначения:

$$P_1 = -\frac{3}{4}r^5 + (Vt)r^4 + \frac{3}{4}(Vt)^2r^3 + \frac{5}{6}(Vt)^3r^2 + \frac{11}{6}(Vt)^4r - \frac{1}{3}(Vt)^5,$$

$$P_2 = r^5 + \frac{1}{2}(Vt)r^4 + \frac{1}{3}(Vt)^2r^3 + \frac{1}{3}(Vt)^3r^2 + \frac{2}{3}(Vt)^4r,$$

V – скорость сжатия монослоя; p – параметр, определяемый составом субфазы, структурой амфифильных молекул и начальной плотностью монослоя; Ei – интегральная показательная функция вида

$$Ei(z) \stackrel{def}{=} - \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad z = \frac{2Vt}{r}.$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости эффективной потенциальной функции от переменной r в разные моменты времени t (а–г), для различных значений скорости V сжатия монослоя (д–и) и при разных скоростях частиц монослоя \dot{r} (к–н). Как видно из рисунка 1 (а–г), потенциал изменяется со временем таким образом, что появляется выраженный локальный минимум при некотором значении $r = r_{\min}$. Так как наличие минимума энергии определяет устойчивое положение молекул монослоя, то можно полагать, что потенциал вида (1) моделирует появление локальных структур (доменов кристаллической фазы) в монослое в процессе сжатия.

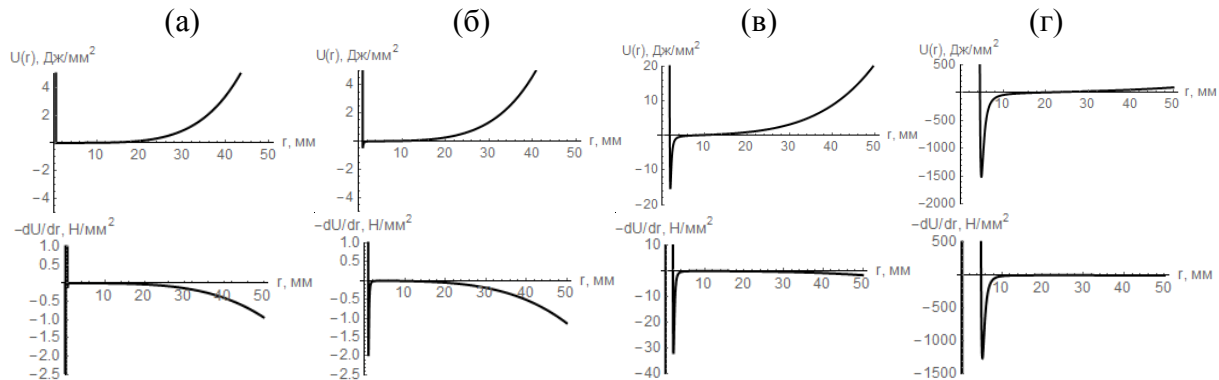
При увеличении r , что соответствует приближению к границе монослоя, потенциал монотонно растет, а сила выходит на некоторое постоянное значение при достаточных временах сжатия.

Как видно из рисунка 2 (а, б), величина r_{\min} линейно возрастает, а глубина минимума $U_{\min}(t)$ монотонно убывает при сжатии монослоя. Это можно интерпретировать как увеличение области (домена) структурированного состояния монослоя в процессе сжатия.

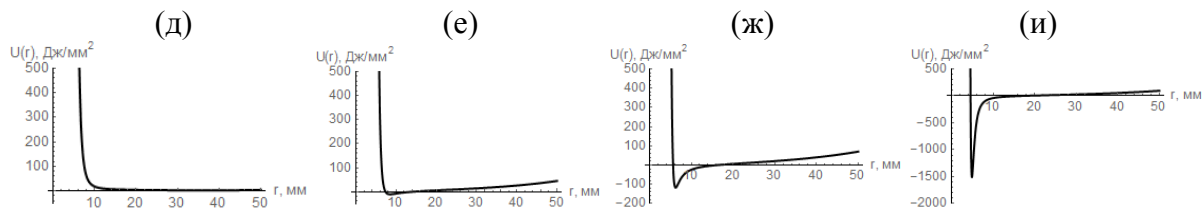
На рисунке 1 (д–н) представлено поведение потенциальной функции $U(r)$ в зависимости от V и \dot{r} при фиксированной степени сжатия монослоя ($Vt = const$).

Отмечаем, что наличие минимума потенциальной энергии и его глубина зависят от скорости сжатия монослоя и скорости движения молекул.

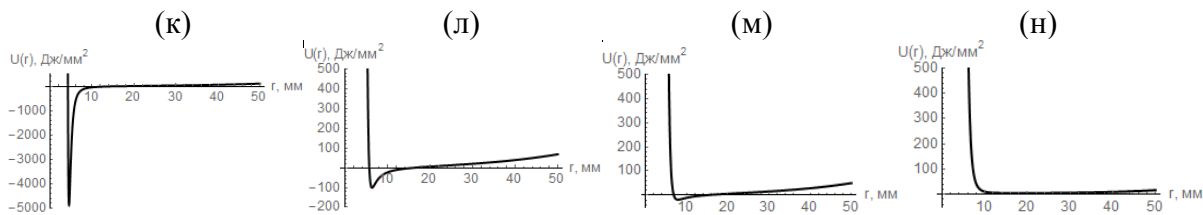
Анализ зависимости потенциальной функции $U(\dot{r}, r, t; V)$ от скорости сжатия показал, что возникновение структурированного состояния (появление локального минимума функции $U(r)$) возможно только при скоростях сжатия V выше и \dot{r} ниже некоторых критических значений (рисунок 1). Это означает, что электрокапиллярный вклад в процесс структуризации лентгмюровского монослоя играет роль в условиях достаточно высоких скоростей сжатия.



Фиксируем $\dot{r} = 0,11$ мм/с, $V = 1$ мм/с; $t = 5$ (а), 10 (б), 20 (в), 50 (г).



Фиксируем $\dot{r} = 0,11$ мм/с, $Vt = 50$ мм; $V = 0,1$ (д), 0,5 (е), 0,75 (ж), 1 мм/с (и).



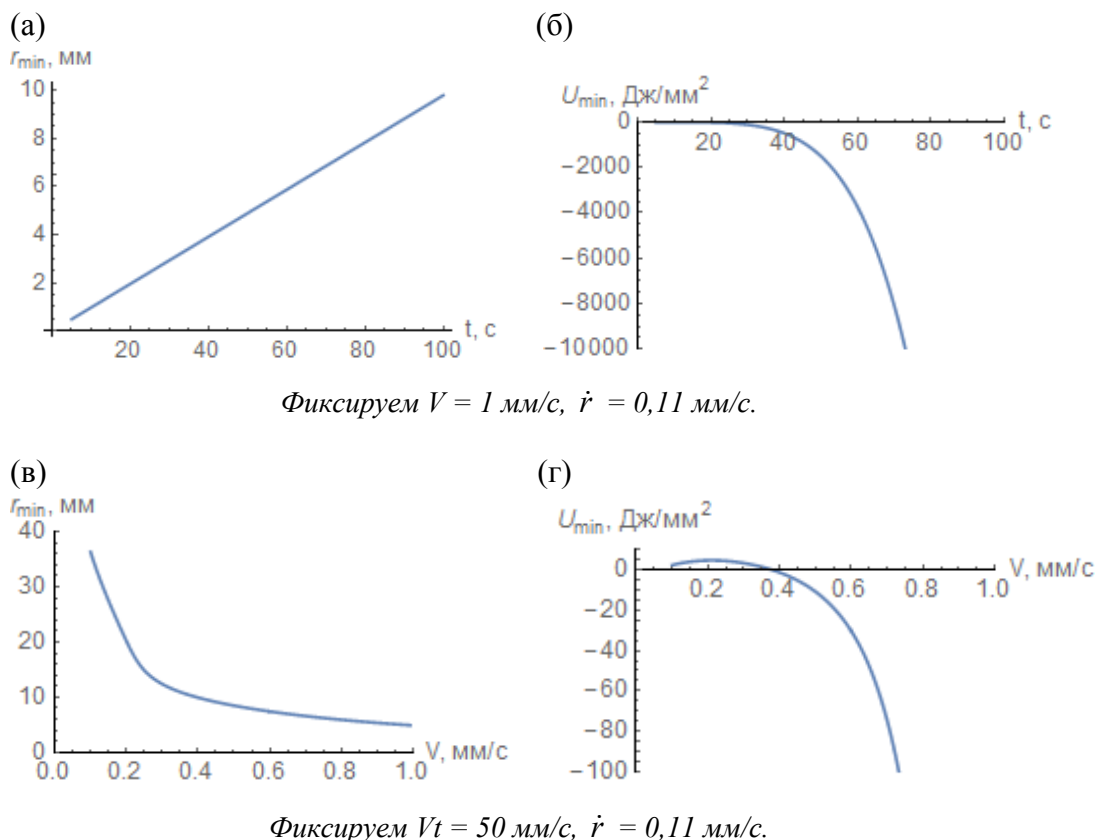
Фиксируем $V = 1$ мм/с, $Vt = 50$ мм; $\dot{r} = 0,1$ (к), 0,15 (л), 0,2 (м), 0,5 мм/с (н).

Значения параметров: $q\eta_0 = 0,3$ Кл/м², $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 81$, $R_0 = 1$ м, $k = 0,1$ м⁻².

Рисунок 1. – Зависимость потенциальной энергии $U(\dot{r}, r, t)$ и силы $\frac{\partial U}{\partial r}$ от r

Как видно из рисунка 2 (в–г), повышение скорости сжатия приводит к резкому углублению минимума потенциальной энергии при скоростях выше 0,3 мм/с.

Анализ зависимостей на рисунке 1 (д–и) и рисунке 2 (в) позволяет сделать вывод, что с ростом V происходит сужение потенциального минимума, и вероятность образования доменов кристаллической фазы вблизи r_{\min} должна значительно возрастать с ростом V .



Значения параметров: $q n_0 = 0,3 \text{ Кл/м}^2$, $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 81$, $R_0 = 1 \text{ м}$, $k = 0,1 \text{ м}^{-2}$.

Рисунок 2. – Зависимость положения r_{\min} (а, в) и величины $U|_{r=r_{\min}}$ (б, г) минимума потенциальной энергии от t и V

Качественное рассмотрение

Чтобы в дальнейшем перейти от полученного потенциала к геометро-термодинамической модели сжатого монослоя, сначала рассмотрим процессы нуклеации в структурирующихся монослоях качественно. Из-за наличия двойного электрически-заряженного слоя на границе воздух – вода нужно рассматривать формирование структуры ленгмюровских монологов не из отдельных молекул поверхностно-активных соединений, а из гидратных комплексов этих молекул. Известно, что в процессе формирования двумерных кристаллических фаз степень гидратации гидрофильных групп снижается, а избыток воды (субфазы) будет выбрасываться из сжатого монослоя [22]. Экспериментально это регистрируется как появление капель воды на поверхности алкильных цепей амфифильных молекул; эффект зависит от скорости сжатия монослоя. В процессе сжатия гидрофобные части амфифильных молекул постепенно выталкиваются с поверхности субфазы, в то время как гидрофильные группы переориентируются [23; 24]. Процесс структуризации монослоя можно рассматривать как распад гидратных комплексов и выброс амфифильных молекул с поверхности субфазы, сопровождающийся разделением фаз на собственно сжатый монослой (монослой Ленгмюра – Блуджетт (ЛБ)) и поверхность субфазы. При этом процесс структуризации в ленгмюровских монослоях между растянутой жидкостью и кристаллическими фазами представляет собой эволюцию распада/образования гидратных комплексов. Такие гидратные комплексы можно рассматривать как элементарные зародыши (фазовые элементы) жидкой фа-

зы, а амфифильные молекулы в свободном состоянии (когда молекулы вытолкнуты из субфазы) – как элементарные зародыши кристаллической фазы.

Дальше будем использовать стандартную терминологию из теории фазовых переходов [25]. В определенной области температуры и давления две фазы сосуществуют равновесно. При этом вещество может оставаться однородным и сохранять свойства исходной фазы. Такое состояние вещества является метастабильным [26]. При быстрых фазовых переходах, когда происходят значительные отклонения системы от условия равновесия, одна из фаз оказывается в метастабильном состоянии. В этом смысле метастабильные состояния неизбежно сопровождают фазовые переходы. Так как метастабильное состояние всегда характеризуется некоторым временем жизни, наличие метастабильной фазы вносит в рассмотрение фактор времени, отсутствующий в термодинамике [26]. Метастабильное состояние эволюционирует к равновесному через образование и рост зародышей новой фазы. В настоящий момент процессы первичной однородной нуклеации (классическая теория нуклеации Беккера – Деринга – Зельдовича [27; 28]), а также последующий рост зародышей (в английской литературе «late Ostwald ripening stage» [28]) достаточно хорошо изучены. В то же время эволюция системы от первичной нуклеации к фазе роста зародышей описана плохо. В частности, предпринимаются попытки решения этой проблемы в рамках методов среднего поля. При этом экспериментальные данные указывают на существенную роль межчастичных взаимодействий и пространственного расположения частиц [29; 30]. Поэтому модели фазовых переходов должны учитывать эти эффекты.

В данной работе микроскопическая теория структуризации описывается как релаксация метастабильного состояния растянутой жидкости к равновесному (стабильному) кристаллическому состоянию. В классической теории нуклеации критическая энергия образования зародыша в трехмерной фазе определяется двумя факторами: определяющим образование зародыша объемным членом и поверхностным членом, который способствует его распаду. Минимизация свободной энергии межфазной границы приводит к тому, что зародыши фаз с размером выше критического растут, в то время как зародыши меньше критического размера распадаются. Вместо параметра – размер зародыша фаз, будем оперировать понятием времени релаксации гидратного комплекса. Чем больше размер гидратного комплекса, тем больше должно быть время его релаксации. При этом каждый гидратный комплекс характеризуется своим временем релаксации.

Удобно время релаксации зародыша критического размера τ_c выбрать как единицу измерения времен релаксации, т.е. ниже будем пользоваться безразмерным параметром релаксации $\tau_i/\tau_c \rightarrow \tau_i$. Определим эволюционный параметр s следующим соотношением: $\tau_i = \Delta t_i/\Delta s$. Эволюция системы в пределе бесконечного числа времен релаксации может быть описана дифференциальным соотношением (во избежание путаницы дальше вместо безразмерного τ_i будем пользоваться величиной ξ):

$$\dot{\xi} = \frac{dt}{ds}. \quad (2)$$

Переход системы из метастабильного в стабильное состояние характеризуется сужением распределения ξ времен релаксации [31], и по завершению фазового перехода (в стабильной стадии) времена релаксации возможных зародышей должны стремиться к нулю. Другими словами, это означает отсутствие гидратных комплексов в кристаллическом состоянии.

Фазовое пространство макроскопической системы складывается из фазовых элементов и описывается 2-мерными координатами и импульсами. В литературе присутст-

вуют две теории: гомогенная и гетерогенная нуклеации [32]. В теории гомогенной нуклеации считается, что все зародыши образуются мгновенно и эволюционируют одинаково; при этом время t выступает как эволюционный параметр системы. Статистическое распределение макроскопической системы с гомогенной нуклеацией, имеющей N зародышей фазы, определяется функцией распределения $p(\vec{r}_1, \vec{r}_1; \vec{r}_2, \vec{r}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{r}_N; t)$.

В настоящей работе мы придерживаемся теории гетерогенной нуклеации, в которой предполагается, что при изучении этапа эволюции системы от первичной нуклеации к фазе роста зародышей необходимо рассматривать образование/распад зародышей во всем диапазоне времен. В этом случае статистическое распределение макроскопической системы должно учитывать моменты образования t_i и времена релаксации τ_i зародышей, и функция распределения зависит от большего числа переменных: $p(\vec{r}_1, \vec{r}_1, t_1, \tau_1; \vec{r}_2, \vec{r}_2, t_2, \tau_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{r}_N, t_N, \tau_N)$. В макроскопической системе, когда N велико ($N \rightarrow \infty$), можно перейти к непрерывному пределу $p(\vec{r}(s), \vec{r}(s), t(s), \tau(s))$ и с учетом параметризации времен релаксации (2) функцию распределения можно параметризовать так: $p(\vec{r}(s), \vec{r}(s), t(s), \dot{\xi}(s))$.

Таким образом, смысл введенной параметризации (2) состоит в том, что новый эволюционный параметр s определяет число образованных (без вычитания распавшихся) фазовых элементов макроскопической системы. Условие (2) подразумевает, что в системе за время Δt может возникать либо большое количество малых фазовых элементов (которые быстро распадаются), либо меньшее количество долгоживущих, рост которых будет приводить к формированию новой фазы. Таким образом, в пределе сплошной среды точка в фазовом пространстве $\{\vec{r}, \vec{r}, t, \dot{\xi}\}$ определяет расширенное конфигурационное пространство M_C , а переход от микро- к макро-состоянию системы описывается с помощью параметризации (2). Известно, что в процессах фазового перехода для реальных систем отсутствуют выделенные пространственно-временные масштабы (вследствие их самоподобия) [33], и введенная параметризация (2) согласуется с этим свойством.

Лагранжев формализм

Динамику каждого фазового элемента можно рассматривать в рамках лагранжева формализма. Из физических соображений понятно, что с ростом плотности монослоя $n(r, t)$ будет возрастать вероятность распада гидратного комплекса с образованием зародыша кристаллической фазы. Обозначим через n_c плотность элемента кристаллической фазы в критическом состоянии (в момент фазового перехода), а через a_s^2 – площадь зародыша кристаллической фазы. Как было сказано выше, зародыши фаз выше критического размера растут, в то время как зародыши меньше критического размера распадаются. Можно записать следующее соотношение:

$$a_s^2 = a_c^2 \dot{\xi}, \quad \dot{\xi} > 0, \quad (3)$$

где a_c – критический размер зародыша кристаллической фазы. При $\dot{\xi} = 1$ образовавшийся зародыш имеет критический размер и система находится в квазистационарном состоянии. При $\dot{\xi} > 1$ и $\dot{\xi} < 1$ зародыш фаз растет и распадается, соответственно. Поскольку в фазовом элементе кристаллического состояния плотность всегда равна n_c ,

то масса зародыша равна $M_s = m n_c a_s^2 = m n_c a_c^2 \dot{\xi}$. Тогда динамика зародышей кристаллической фазы определяется функцией Лагранжа:

$$L_S(t, r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{M_s}{2} \dot{r}^2 + \frac{M_s r^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{U(\dot{r}, r, t)}{n_c} \dot{\xi}. \quad (4)$$

После учета выражения для потенциальной энергии (1) из (4) получаем

$$L_S = m a_c^2 n_c \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{2} \dot{\xi} + \frac{p}{n_c} \dot{\xi} \times \\ \times \left(P_1 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{2}{3} (Vt)^5 \left(6 - \frac{Vt}{r} \right) Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] - \frac{V}{\dot{r}} \left[P_2 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{4}{3} (Vt)^5 Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] \right] \right). \quad (5)$$

Как отмечалось выше, при переходе от динамики отдельных фазовых элементов к макроскопической системе необходимо учитывать эволюцию функции распределения времен релаксации для отдельных зародышей фаз, и это достигается применением следующей параметризации:

$$t \rightarrow t(s), \quad \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t(s)), \quad \dot{\xi} \equiv \frac{dt}{ds}, \quad \vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{r}'}{\dot{\xi}} \quad (6)$$

Следует отметить, что в \vec{r}' штрих указывает на то, что производная берется не по времени, а по новому эволюционному параметру s . При этом время t перестает быть параметром системы и является независимой координатой. При такой параметризации лагранжиан (6) принимает вид:

$$L_S = m a_c^2 n_c \frac{\dot{r}'^2 + r'^2 \dot{\varphi}'^2}{2 \dot{\xi}} + \frac{p}{n_c} \dot{\xi} \times \\ \times \left(P_1 e^{\frac{2Vt}{r'}} - \frac{2}{3} (Vt)^5 \left(6 - \frac{Vt}{r'} \right) Ei \left[\frac{2Vt}{r'} \right] - \dot{\xi} \frac{V}{\dot{r}'} \left[P_2 e^{\frac{2Vt}{r'}} - \frac{4}{3} (Vt)^5 Ei \left[\frac{2Vt}{r'} \right] \right] \right). \quad (7)$$

В дальнейшем для упрощения штрихи опускаем, т.е. символ точки будет обозначать производную по параметру s .

Финслерова геометризация взаимодействия

В математической литературе уже много лет существует многообещающее обобщение для стандартного физического лагранжева формализма, оно основано на геометрическом подходе Финслера – Лагранжа [34–36]. При этом свойства физических систем могут исследоваться на основе применения обобщенного финслерова геометрического аппарата: связностей, кривизн и др. [37]. При геометризации электрокапиллярного взаимодействия будем придерживаться изложенного в [36] подхода. Используем обозначения $x^j = (t, r, \varphi)$ и $y^j = (\dot{\xi}, \dot{r}, \dot{\varphi})$. Финслеров интервал между двумя близкими событиями (в математической литературе чаще используется понятие квадрат метрической функции F^2) определяется формулой

$$F^2 = g_{\mu\nu}(x, y) dx^\mu dx^\nu, \quad (8)$$

где метрический тензор $g_{\mu\nu}$ зависит от координат x и скоростей y . Основным требованием к геометризации взаимодействия является то, что траектории частиц в обычном

пространстве под действием внешних сил должны в определенном смысле соответствовать геодезическим в эффективном пространстве [38]. Так как геодезические по определению являются экстремальными кривыми, а траектории частиц определяются из требования экстремальности действия S , то квадрат метрической функции F^2 выбирается пропорциональным дифференциалу действия dS [36] таким образом:

$$dS = L \dot{\xi} ds. \quad (9)$$

Локальный метрический тензор g_{ij} 3-мерного финслерова пространства задается формулой [37]

$$g_{ij}(x^k, y^k) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (10)$$

где F^2 определено выражением

$$F^2 = \Lambda^2 \dot{\xi}^2 - \frac{dS}{ds} = \Lambda^2 \dot{\xi}^2 - L(t(s)) \dot{\xi}. \quad (11)$$

Параметр Λ^2 имеет размерность энергии. Дополнительное слагаемое $\Lambda^2 \dot{\xi}^2$ в (11) вводится для того, чтобы функция F^2 была положительно определенной и однородной функцией второго порядка по переменной y^i (используем терминологию из [37]).

Подставляя лагранжиан L_S (7) для кристаллической фазы в формулу (11), получаем выражение для F^2 :

$$F^2 = A \frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B \dot{\xi}^2 - C \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}{2}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} B &= \Lambda^2 - \tilde{p} \left(P_1 e^{\frac{2Vt}{r'}} - \frac{2}{3} (Vt)^5 \left(6 - \frac{Vt}{r} \right) Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] \right), \\ A &= \tilde{p} V \left(P_2 e^{\frac{2Vt}{r}} - \frac{4}{3} (Vt)^5 Ei \left[\frac{2Vt}{r} \right] \right), \quad C = ma_c^2 n_c, \quad \tilde{p} = \frac{p}{n_c}; \end{aligned} \quad (13)$$

напоминаем, что $\dot{\xi}$, \dot{r} , $\dot{\varphi}$ являются производными по параметру s . Вычисления дают явное представление для метрического тезора (пусть $i, j = t, r, \varphi$):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 3A \frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} + B & -\frac{3}{2} A \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} \right)^2 & 0 \\ -\frac{3}{2} A \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} \right)^2 & A \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} \right)^3 - \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C}{2} r^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где A и B зависят только от x^i . Так как метрический тензор $g_{ij}(x^k, y^k)$ зависит не только от координат x^k , но и от скоростей y^k , то пространство M_C является финслеровым [37].

Пространство называется финслеровым, если его метрическая функция $F(x^i, y^i)$ удовлетворяет двум условиям:

- 1) $F(x^i, y^i) \geq 0$ для любых (x^i, y^i) , и $F(x^i, y^i) = 0$, только если $y^i = 0$;
- 2) $F(x^i, y^i)$ является однородной функцией первого порядка по y^i :
 $F(x^i, \lambda y^i) = \lambda F(x^i, y^i)$.

Непосредственно убеждаемся, что функция $F(x^i, y^i)$ (12) является однородной функцией первого порядка по переменной y^i :

$$F(\lambda \vec{r}, \lambda \dot{\xi}) = \sqrt{A \frac{(\lambda \dot{\xi})^3}{(\lambda \dot{r})} + B(\lambda \dot{\xi})^2 - C \frac{((\lambda \dot{r})^2 + r^2(\lambda \dot{\phi})^2)}{2c^2}} = \lambda F(\vec{r}, \dot{\xi}).$$

Покажем, что при выборе метрической функции F^2 согласно (12) геодезические $\vec{r}(t(s))$ в финслеровом пространстве, если потребовать выполнение равенства $\dot{\xi} = 1$, будут совпадать с решениями уравнений Эйлера – Лагранжа для системы с лагранжианом (5).

Геодезические в финслеровом пространстве определяются уравнением [39]

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial F^2}{\partial y^i} - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} = 0; \quad (15)$$

с учетом явного выражения для F^2 (12) очевидно, что при $\dot{\xi} = 1$ уравнения (15) совпадают с уравнениями Эйлера – Лагранжа. Напомним, что уравнения движения для лагранжиана (5) дают траектории отдельных фазовых элементов. Лагранжиан для макроскопической системы (7) и соответствующая финслерова функция (12) определяют динамику, а отвечающие уравнениям (15) геодезические описывают конфигурацию рассматриваемой системы. Из соотношения (3), определяющего размер зародышей фазы, следует, что при условии $\dot{\xi} = 1$ образуются зародыши кристаллической фазы только критического размера. В то же время все фазовые элементы не отличимы друг от друга, и поэтому достаточно лагранжиана для произвольного i -ого фазового элемента (5), чтобы описать конфигурацию макроскопической системы.

Уравнения для геодезических (15) формулируются с использованием символов Кристоффеля в финслеровом пространстве и имеют вид:

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} y^j y^k = 0,$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) - g^{il} (C_{kml} N_j^m + C_{jml} N_k^m - C_{jkm} N_l^m).$$

Здесь $C_{ijk} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$ – тензор Картана и $N_j^i := y^k \Gamma_{kj}^i$ – компоненты нелинейной связности [34; 35; 37]. Если ввести специальное обозначение для величины

$$G^i := \frac{1}{2} N_j^i y^j,$$

то уравнения для геодезических записываются так:

$$\frac{dy^i}{ds} + 2G^i = 0, \quad G^i = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k.$$

Для метрики (12) имеем следующий явный вид для G^i :

$$\begin{aligned} G^1 &= \frac{A}{4\Delta_2} \left[\frac{1}{2} A_t \frac{\dot{\xi}^6}{\dot{r}^4} + B_t \frac{\dot{\xi}^5}{\dot{r}^3} + \frac{1}{2} B_r \frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + \frac{3}{2} Cr \frac{\dot{\xi}^2 \dot{\phi}^2}{\dot{r}^2} \right] - \frac{C}{8\Delta_2} \left[2A_t \frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B_t \dot{\xi}^2 + 3A_r \dot{\xi}^2 + 2B_r \dot{\xi} \dot{r} \right], \\ G^2 &= \frac{3}{4} \frac{A}{\Delta_2} \left[-\frac{1}{2} A_r \frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + \frac{1}{2} B_t \frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + Cr \frac{\dot{\xi} \dot{\phi}^2}{\dot{r}} \right] - \frac{B}{4\Delta_2} \left[A_t \frac{\dot{\xi}^4}{\dot{r}^2} + 2A_r \frac{\dot{\xi}^3}{\dot{r}} + B_r \dot{\xi}^2 - Cr \dot{\phi}^2 \right], \\ G^3 &= \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (16)$$

где использованы обозначения:

$$\Delta_2 = \frac{3A^2}{4} \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} \right)^4 + AB \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} \right)^3 - \frac{3AC}{2} \frac{\dot{\xi}}{\dot{r}} - \frac{BC}{2}, \quad A_t = \frac{\partial A}{\partial t}, A_r = \frac{\partial A}{\partial r}, B_t = \frac{\partial B}{\partial t}, B_r = \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Дальнейший численный анализ полученных уравнений в финслеровом пространстве будет выполнен в отдельной работе.

Заклучение

Предложено эффективное потенциальное поле, которое определяет суммарное взаимодействие молекул субфазы с молекулами ленгмюровского монослоя в условиях сжатия. Установлено наличие минимума потенциальной энергии, что должно приводить к появлению некоторой локальной структуры в монослое.

Анализ зависимостей потенциальной функции от параметров системы показывает, что минимум потенциальной энергии возникает только при достижении некоторого критического значения скорости сжатия; положение и глубина минимума меняются с ростом скорости сжатия.

Предложена специальная параметризация конфигурационного пространства системы и соответствующего лагранжиана для описания эволюции фазового перехода жидкость – кристаллическое состояние в монослое под действием электрокапиллярных сил. Проведена геометризация взаимодействия в монослое, построена финслерова метрическая функция, выведены уравнения для геодезических, которые описывают конфигурацию системы в процессе сжатия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Möhwald, H. From Langmuir monolayers to multilayer films / H. Möhwald. G. Brezesinski // Langmuir. – 2016. – Vol. 32. – P. 10445–10458.
2. Acharya, S. Soft Langmuir – Blodgett technique for hard nanomaterials / S. Acharya, J. P. Hill, K. Ariga // Adv. Mater. – 2009. – Vol. 21. – P. 2959–2981.
3. Microscopically observed preparation of Langmuir-Blodgett films / M. Lösche [et al.] // Thin Solid Films. – 1984. – Vol. 117. – P. 269–280.
4. Блинов, Л. М. Лэнгмюровские пленки / Л. М. Блинов // Успехи физ. наук. – 1988. – Т. 155, № 3. – С. 443–480.
5. Kaganer, V. M. Structure and phase transitions in Langmuir monolayers / V. M. Kaganer, H. Möhwald, P. Dutta // Rev. Mod. Phys. – 1999. – Vol. 71, № 3. – P. 779–819.

6. O'Connor, E. Discontinuous molecular dynamics studies of model Langmuir monolayers / E. O'Connor // This Thesis is Approved. – Canada : University of Prince Edward Island, 2006. – 110 p.
7. Проценко, С. П. Молекулярно-динамическое моделирование метастабильных фазовых состояний. Термодинамические свойства леннард-джонсовской системы / С. П. Проценко, В. Г. Байдаков, З. Р. Козлова // Вестн. УГАТУ. – 2014. – Т. 18, № 1. – С. 214–223.
8. Karaborni, S. Molecular dynamics simulations of Langmuir monolayers: A study of structure and thermodynamics / S. Karaborni, S. Toxvaerd // J. Chem. Phys. – 1992. – Vol. 96 (7). – P. 5505–5515.
9. Structures and phase transitions in Langmuir monolayers / D. Andelman [et al.] // Micelles, Membranes, Microemulsions and Monolayers / Ed. W. M. Gelbart, A. Ben-Shaul, D. Roux. – New York : Springer, 1994. – P. 559–602.
10. Nandi, N. Anomalous temperature dependence of domain shape in Langmuir monolayers: Role of dipolar interaction / N. Nandi, D. Vollhardt // J. Phys. Chem. B. – 2004. – Vol. 108. – P. 18793–18795.
11. Gehlert, U. Nonequilibrium structures in 1-Monopalmitoyl-rac-glycerol monolayers / U. Gehlert, D. Vollhardt // Langmuir. – 1997. – Vol. 13. – P. 277–282.
12. Lopez, J. M. Influence of coexisting phases on the surface dilatational viscosity of Langmuir monolayers / J. M. Lopez, M. J. Vogel, A. H. Hirska // Phys. Rev. E. – 2004. – Vol. 70. – P. 056308.
13. Grushevskii, V. V. The thermodynamics of phase states in Langmuir – Blodgett monolayers / V. V. Grushevskii, H. V. Krylova // Low-dimensional systems. – Grodno : University, 2005. – P. 30–36.
14. Modeling of the behavior and statistical analysis of compressibility in the process of Langmuir monolayer structurization / H. V. Grushevskaya [et al.] // J. Phys. CS. – 2015. – Vol. 643.
15. Domain-growth kinetic origin of nonhorizontal phase coexistence plateaux in Langmuir monolayers: Compression rigidity of a raft-like lipid distribution / L. R. Arriaga [et al.] // J. Phys. Chem. B. – 2010. – Vol. 114. – P. 4509–4520.
16. Erkoç, S. Empirical potential energy functions used in the simulations of materials properties / S. Erkoç // Annual reviews of computational physics V / Ed. D. Stauffer. – Singapore : World Scientific, 2001.
17. Жарков, В. Н. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах / В. Н. Жарков, В. А. Калинин. – М. : Наука, 1968.
18. Гуфан, А. Ю. Теория микроструктуры неупорядоченных твердых растворов $AA'BO_3$ и $ABV'O_3$ со структурой перовскита / А. Ю. Гуфан // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47. – С. 445–451.
19. Модели трехчастичных взаимодействий и теория нелинейных деформаций кристаллов / А. Ю. Гуфан [и др.] // Физика твердого тела. – 2012. – Т. 54, № 4. – С. 770–781.
20. Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1976. – С. 142–143.
21. Multiple-relaxation-time Finsler-Lagrange dynamics in a compressed Langmuir monolayer / V. Balan [et al.] // Int. J. Nonlin. Phenom. in Complex Sys. – 2016. – Vol. 19, № 3. – P. 223–253.
22. Ramos, S. Langmuir monolayers of C17, C19, and C21 fatty acids: textures, phase transitions and localized oscillations / S. Ramos, R. Castillo // J. Chem. Phys. – 1999. – Vol. 110. – P. 7021–7030.
23. Grushevskaya, H. V. Kinetic theory of phase foliation at formation of Langmuir – Blodgett monolayers / H. V. Grushevskaya, G. Krylov, V. V. Hrushevsky // Int. J. Nonlin. Phenom. in Complex Sys. – 2004. – Vol. 7. – P. 17–33.

24. Langmuir monolayers composed of single and double tail sulfobetaine lipids / G. Hazell [et al.] // *J. Colloid and Interface Sci.* – 2016. – Vol. 474. – P. 190–198.
25. Ландау, Л. Д. Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1976. – С. 486–580.
26. Бражкин, В. В. Метастабильные фазы, фазовые превращения и фазовые диаграммы в физике и химии / В. В. Бражкин // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 7. – С. 745–750.
27. Анисимов, М. П. Нуклеация: теория и эксперимент / М. П. Анисимов // *Успехи химии.* – 2003. – Т. 72 (7). – С. 664–705.
28. Slezov, V. V. Kinetics of first-order phase transitions / V. V. Slezov. – Weinheim : Wiley-VCH, 2009.
29. Sagui, C. Nucleation and growth: Decay of a metastable state / C. Sagui, D. S. O’Gorman, M. Grant // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 56. – P. R21–R24.
30. Phase nucleation in curved space / L. R. Gomez [et al.] // *Nature Comm.* – 2015. – Vol. 6. – P. 6856.
31. Немилов, С. В. Оптическое материаловедение: физическая химия стекла / С. В. Немилов. – СПб : СПбГУ ИТМО, 2009.
32. Куни, Ф. М. Теория гетерогенной нуклеации в условиях постепенного создания метастабильного состояния пара / Ф. М. Куни, А. К. Щекин, А. П. Гринин // *Успехи физ. наук.* – 2001. – Т. 171, № 4. – С. 345–385.
33. Гиттерман, М. Фазовые превращения. Краткое изложение и современные приложения / М. Гиттерман, В. Хэлперн. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2006. – С. 18.
34. Lagrange and Finsler geometry: Application to physics and biology / Eds. P. L. Antonelli, R. Miron. – Springer, 1996.
35. Balan, V. Jet single-time Lagrange geometry and its application / V. Balan, M. Neagu. – Wiley, 2011.
36. Гарасько, Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков / Г. И. Гарасько. – М. : ТЕТРУ, 2009.
37. Bao, D. An introduction to Riemann – Finsler geometry / D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen. – Berlin : Springer, 2000.
38. Владимиров, Ю. С. Геометрофизика / Ю. С. Владимиров. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
39. Muzsnay, Z. The Euler – Lagrange PDE and Finsler metrizableblity / Z. Muzsnay // *Houston J. Math.* – 2006. – Vol. 32. – P. 1–20.

Автор выражает благодарность В.М. Редькову и Г.В Грушевской за интерес к работе и полезные советы.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.08.2017

Krylova N.G. Finsler Geometrization of Electrocapillary Interaction in Langmuir Monolayers

In the paper we propose an effective potential which describes resultant interaction between a subphase and Langmuir monolayer molecules. Analysis of dependences of potential energy on system parameters has been carried out. It has been established that the potential energy has a minimum while a compression rate is higher than a some critical value. A position and a depth of the minimum are changed with the increase of compression rate. Consideration of heterogeneous nucleation process in the monolayer allows to propose a special parametrization of configuration space of the system that takes into account a distribution of relaxation times of phase nuclei at phase transition (liquid - solid state). Finsler geometrization of electrocapillary interactions in the monolayer has been carried out and a metric function of the Finsler configuration space has been constructed; geodesic equations which describe a configuration of the system under compression have been obtained.

УДК 539.12

М.И. Левчук

*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник
лаборатории теоретической физики имени Б.И. Степанова
НАН Беларуси
e-mail: mlevchuk@yandex.ru*

О ПОЛНОМ СЕЧЕНИИ ФОТОПОГЛОЩЕНИЯ НА ДЕЙТРОНЕ В ПЕРВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ*

Рассмотрено полное сечение фотопоглощения на дейтроне в области Δ -резонанса. Сравнены результаты прямых экспериментальных измерений этого сечения с суммой вкладов отдельных каналов реакции $\gamma d \rightarrow X$. Показано, что в центре Δ -резонанса при энергии фотона около 320 МэВ сумма превышена примерно на 100 мкбн. Обсуждены следствия такого расхождения.

Введение

В работах [1; 2] показано, что данные по полному сечению фотопоглощения на нейтроне из работы [3] в центре Δ -резонанса, т.е. при энергии фотона в лабораторной системе $\omega \approx 320$ МэВ, заметно занижены по сравнению с сечениями, ожидаемыми из анализов фоторасщепления дейтрона и фоторождения одиночных пионов на нейтроне. Данные на нейтроне извлекаются из результатов на дейтроне за вычетом протонных сечений. Поскольку последние, измеренные в работе [4], находятся в хорошем согласии с данными, полученными из анализов фоторождения одиночных пионов на протоне, то возможная причина такого расхождения состоит в том, что занижено измеренное в работе [3] полное сечение фотопоглощения на дейтроне. Следует при этом отметить, что дейтронные данные этой работы в центре Δ -резонанса находятся в хорошем согласии с результатами измерений из работы [5].

Следствие такого расхождения проявляется при расчетах суммы дипольных электрической, α_N , и магнитной, β_N , поляризуемостей нуклона по правилу сумм Балдина в случае нейтрона

$$\alpha_N + \beta_N = \int_{\omega_0}^{\infty} \sigma_N^{tot}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi^2 \omega^2}. \quad (1)$$

В выражении (1) $\sigma_N^{tot}(\omega)$ есть полное сечение фотопоглощения на нуклоне, а ω_0 – порог фоторождения π -мезона на нуклоне ($\omega_0 \approx 150$ МэВ).

Как показано в работах [1; 2], сумма (1) в случае нейтрона ($N = n$), если ее вычислять на основе данных работы [3] для полного сечения фотопоглощения $\sigma_n^{tot}(\omega)$, занижена примерно на 20 % по сравнению с результатами расчетов с использованием этого сечения, полученного из надежных данных по фоторождению π -мезонов на нуклонах.

Есть основания предполагать, что имеется несогласование сечений из работ [3; 5] с результатами измерений по отдельным каналам реакции $\gamma d \rightarrow X$. При энергиях ниже 500 МэВ имеется пять таких каналов:

- 1) фоторасщепление дейтрона $\gamma d \rightarrow pn$;
- 2) когерентное фоторождение π^0 -мезона на дейтроне $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$;

*Работа поддержана грантом Ф17Д-001 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

- 3) некогерентное фоторождение π^0 -мезона на дейтроне $\gamma d \rightarrow \pi^0 pn$;
- 4) некогерентное фоторождение π^- -мезона на дейтроне $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$;
- 5) некогерентное фоторождение π^+ -мезона на дейтроне $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$.

Сумма полных сечений этих каналов должна давать результаты прямых измерений из работ [3; 5]. В данной работе мы проверяем, имеет ли это место на самом деле.

Фоторасщепление дейтрона

Начнем наше рассмотрение с фоторасщепления дейтрона, $\gamma d \rightarrow pn$. Имеются многочисленные данные по этой реакции, как с неполяризованными, так и с поляризованными частицами. Для фита полного сечения будем использовать только результаты работ [6–8], полученные на пучках с мечеными (моноэнергетическими) фотонами. Профитируем их с помощью выражения (2), предложенного в работе [9]. Как нетрудно видеть, второе слагаемое отвечает за вклад от Δ -резонанса.

$$\sigma_{\gamma d \rightarrow pn}(\omega) = C_1 e^{-C_2 \omega} + \frac{C_3 + C_4 \omega}{1 + C_6(\omega - C_5)^2}. \quad (2)$$

Фитирование будем проводить с учетом систематических ошибок экспериментов, которые для данных из работ [6–8] составляют соответственно 4, 3,5 и 5%. Это делается с помощью метода, предложенного в работе [10]. Коротко опишем этот метод.

Для каждого отдельно взятого эксперимента $j=1, \dots, N_{exp}$, рассматриваемого в данном анализе, относительные систематические ошибки измеряемых сечений $\sigma_{ij}^{exp} \equiv \sigma^{exp,j}(\omega_{ij}, \theta_{ij}), i=1, \dots, n_j$ слабо зависят от энергий и углов рассеяния и в основном сводятся к общей нормировке k_j этих сечений. Коэффициенты k_j можно рассматривать как независимые параметры обобщенного теоретического описания экспериментов, при котором теоретические сечения σ_{ij}^{theor} должны согласовываться с перемасштабированными экспериментальными сечениями $k_j \sigma_{ij}^{exp}$. Тот факт, что величины k_j равны единице в пределах неопределенностей δ_j абсолютизации сечений отдельных экспериментов, можно рассматривать как независимое измерение этих величин. Соответственно функции χ^2 записываются как

$$\chi^2(k) = \sum_{j=1}^{N_{exp}} \left[\sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{k_j \sigma_{ij}^{exp} - \sigma_{ij}^{theor}}{k_j \Delta \sigma_{ij}^{exp}} \right)^2 + \left(\frac{k_j - 1}{k_j \delta_j} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где $\Delta \sigma_{ij}^{exp}$ – статистические ошибки. Так как выражение (3) – квадратичная функция от $1/k_j$, его минимизация по величинам k_j делается в аналитическом виде. Результат имеет вид:

$$\min_k \chi^2(k) = \sum_{j=1}^{N_{exp}} \left[X_j^{ee} - \frac{(X_j^{te})^2 \delta_j^2}{1 + X_j^{tt} \delta_j^2} \right], \quad (4)$$

где

$$X_j^{ee} = \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\sigma_{ij}^{exp} - \sigma_{ij}^{theor}}{\Delta \sigma_{ij}^{exp}} \right)^2, \quad X_j^{te} = \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\sigma_{ij}^{exp} - \sigma_{ij}^{theor}}{\Delta \sigma_{ij}^{exp}} \right) \frac{\sigma_{ij}^{theor}}{\Delta \sigma_{ij}^{exp}}, \quad X_j^{tt} = \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\sigma_{ij}^{theor}}{\Delta \sigma_{ij}^{exp}} \right)^2. \quad (5)$$

В уравнении (5) член X_j^{ee} учитывает статистические ошибки j -го эксперимента. Он является обычным для методики фитирования по критерию χ^2 . Второй (отрицательный) член возникает благодаря оптимизации χ^2 по нормировочным параметрам k_j и описывает влияние систематической ошибки j -го эксперимента. Минимум (3) достигается при перемасштабировании экспериментальных данных факторами

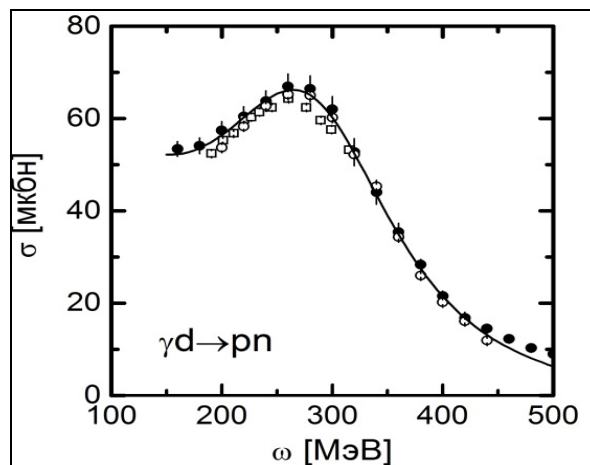
$$k_j = \left(1 + \frac{X_j^{te} \delta_j^2}{1 + X_j^{te} \delta_j^2}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Фитирование данных из работ [6–8] с использованием описанного метода дает значения коэффициентов C_i , приведенные в таблице 1.

Таблица 1. – Коэффициенты C_i в формуле (2)

C_1 [мкбн]	C_2 [ГэВ ⁻¹]	C_3 [мкбн]	C_4 [мкбн/ГэВ]	C_5 [ГэВ]	C_6 [ГэВ ⁻²]
114 ± 55	11.0 ± 4.0	98.3 ± 6.3	-137 ± 13	0.285 ± 0.002	87.5 ± 6.5

Результаты фита показаны на рисунке 1.



Кривая – результат фита. Данные из работ [6] (○), [7] (●) и [8] (□). Показаны статистические ошибки

Рисунок 1. – Полное сечение фоторасщепления дейтрона

Можно видеть, что выражение (2) с коэффициентами C_i из таблицы 1 позволяет получить хорошее описание имеющихся экспериментальных данных во всей исследуемой области энергий. Отметим также, что неопределенности в профитированном сечении на рисунке 1, обусловленные неопределенностями в определении коэффициентов C_i в таблице 1, составляют не более ± 1 мкбн при всех энергиях.

Когерентное и некогерентное фоторождение π^0 -мезона

Полные сечения реакций когерентного, $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$, и некогерентного, $\gamma d \rightarrow \pi^0 pn$, фоторождения π^0 -мезона на дейтроне были измерены в работах [10] и [11] соответственно. Систематические ошибки данных первого и второго экспериментов в случае

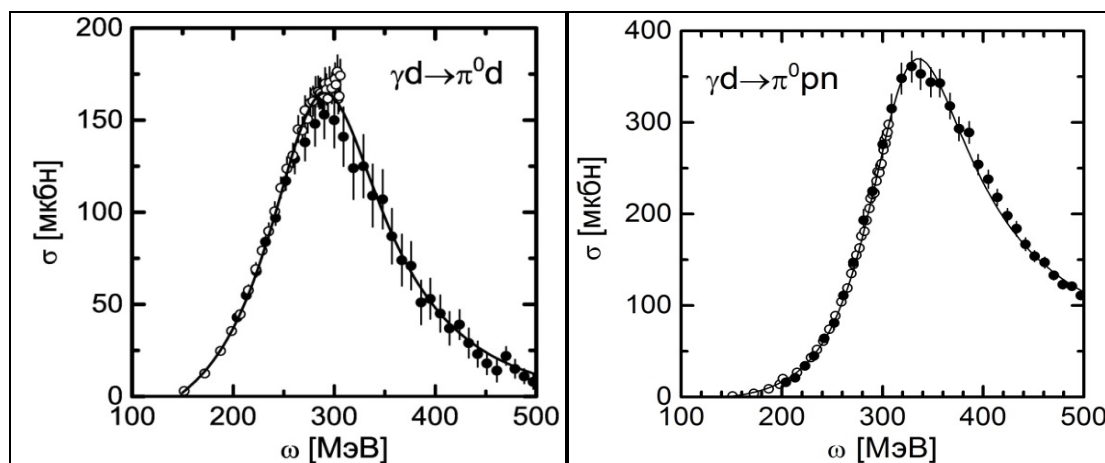
обоих каналов составляют 6 и 7 %. Полученные данные будем фитировать с помощью выражения (7), которое, в отличие от выражения (2), содержит только часть, связанную с возбуждением Δ -резонанса.

$$\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi^0(d+pn)}(\omega) = \frac{D_1 + D_2\omega + D_3\omega^2}{1 + D_5(\omega - D_4)^2}. \quad (7)$$

Коэффициенты D_i приведены в таблице 2. Как видно из рисунка 2, выражение (7) с такими коэффициентами обеспечивают очень хорошее описание экспериментальных данных.

Таблица 2. – Коэффициенты D_i в формуле (7) для двух каналов реакции с рождением нейтральных π^0 -мезонов

Канал	D_1 [мкбн]	D_2 [мкбн/ГэВ]	D_3 [мкбн/ГэВ ²]	D_4 [ГэВ]	D_5 [ГэВ ²]
$\pi^0 d$	-345 ± 19	2999 ± 175	-4269 ± 317	0.283 ± 0.002	185 ± 9
$\pi^0 pn$	-37.2 ± 21.6	-521 ± 206	5398 ± 497	0.319 ± 0.001	248 ± 6



Кривые – результат фитов. Данные из работ [10] (●) и [11] (○). Показаны статистические ошибки

Рисунок 2. – Полные сечения реакций $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ (слева) и $\gamma d \rightarrow \pi^0 pn$ (справа)

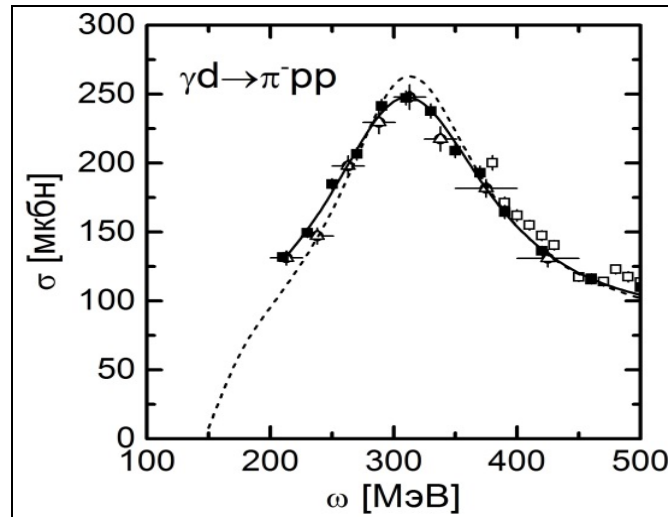
Неопределенности в профитированном сечении на рисунке 2, обусловленные неопределенностями в определении коэффициентов D_i в таблице 2, составляют не более ± 3 мкбн для обоих каналов $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ и $\gamma d \rightarrow \pi^0 pn$ при всех энергиях.

Некогерентное фоторождение заряженных π -мезонов

Полное сечение реакции некогерентного фоторождения π^- -мезона на дейтроне, $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$, измерялось в работах [13–15]. Полученные данные будем также фитировать с использованием выражения (7). Так как минимальная энергия фотона в этих экспериментах составляла 210 МэВ, то в области энергий от порога фоторождения π -мезона (~ 150 МэВ) до 210 МэВ будем опираться на предсказания теоретической модели [16], которая дает удовлетворительные предсказания для поляризационных и неполяризационных наблюдаемых во всех каналах реакции $\gamma d \rightarrow \pi NN$.

Таблица 3. – Коэффициенты D_i в формуле (7) для реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$

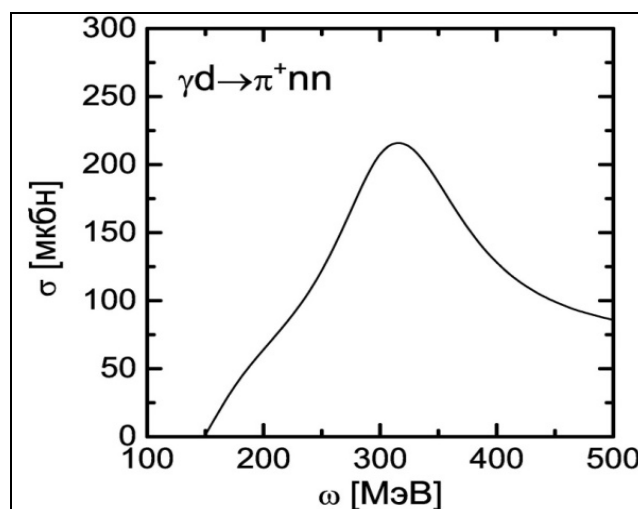
D_1 [мкбн]	D_2 [мкбн/ГэВ]	D_3 [мкбн/ГэВ ²]	D_4 [ГэВ]	D_5 [ГэВ ²]
1052 ± 39	-5695 ± 149	9987 ± 268	0.303 ± 0.003	151 ± 4



Сплошная кривая – результат фита. Данные из работ [13] (■), [14] (△) и [15] (□). Показаны статистические ошибки. Пунктирная кривая – предсказание работы [16]

Рисунок 3. – Полное сечение реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$

Неопределенности в профитированном сечении на рисунке 3, возникающие из-за неопределенностей в коэффициентах D_i из таблицы 3, составляют не более ± 5 мкбн в области первого резонанса. Что касается реакции $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$, то экспериментальные данные по ней отсутствуют. Поэтому для предсказания полного сечения будем использовать результаты модели [16], которые, как видно из рисунка 3, находятся в удовлетворительном согласии с данными для канала $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$.

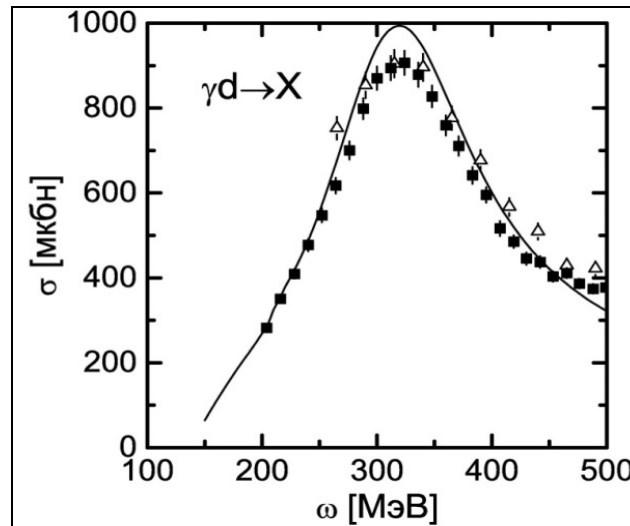


Кривая – предсказание работы [16]

Рисунок 4. – Полное сечение реакции $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$

Полный вклад всех каналов

Складывая все сечения реакций 1–5, приходим к полному сечению процесса $\gamma d \rightarrow X$, показанному на рисунке 5. Можно видеть, что в пике Δ -резонанса сумма сечений отдельных каналов превышает примерно на 100 мкбн сечение, полученное в экспериментах [3; 5]. Ошибку в найденной сумме полных сечений можно оценить, взяв в квадратуре сумму упомянутых выше неопределенностей в найденных сечениях для отдельных каналов. Таким образом, получаем, что эта ошибка составляет примерно ± 7 мкбн. Т.е. даже с учетом этой неопределенности заметное расхождение с результатами работ [3; 5] сохраняется.



*Кривая – сумма всех вкладов 1)–5).
 Данные из работ [3] (Δ) и [5] (\blacksquare).
 Показаны статистические ошибки*

Рисунок 5. – Полное сечение фотопоглощения на дейтроне

Закключение

Таким образом, в результате проведенного исследования было показано, что в области пика Δ -резонанса имеется заметное расхождение между результатами прямых измерений полного сечения фотопоглощения на дейтроне $\gamma d \rightarrow X$ и суммой вкладов отдельных каналов. Это наблюдение является довольно неожиданным, так как при прямых измерениях, по сути, измеряется сумма вкладов тех же самых каналов. Понять причину такого расхождения очень трудно. Только экспериментаторы, которые участвовали в проведении всех этих экспериментов, могут указать эту причину.

После выяснения этой причины можно будет сделать вывод о том, какое значение суммы поляризуемостей нейтрона, вычисленному по правилу сумм Балдина (1), является более надежным – с использованием полного сечения фотопоглощения $\sigma_n^{tot}(\omega)$ из данных прямых измерений из работы [3] или с результатами расчетов с этим сечением, полученным из данных по фоторождению мезонов на нуклонах.

Автор благодарен А.И. Львову за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babusci, D. New evaluation of the Baldin sum rule / D. Babusci, G. Giordano, G. Matone // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C 57, № 1. – P. 291–295.
2. Levchuk, M. I. Deuteron Compton scattering below pion photoproduction threshold / M. I. Levchuk, A. I. L'vov // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. A 674, № 3–4. – P. 449–492.
3. The total deuteron hadronic cross section in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Nucl. Phys. – 1972. – Vol. B 41, № 4. – P. 445–473.
4. Total hadronic cross section of γ rays in hydrogen in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D 5, № 7. – P. 1640–1652.
5. Total photoabsorption cross sections for ^1H , ^2H , and ^3He from 200 to 800 MeV / M. MacCormick [et al.] // Phys. Rev. – 1996. – Vol. C 53, № 1. – P. 41–49.
6. Experimental investigation of deuteron photodisintegration in the Δ -resonance region / J. Arends [et al.] // Nucl. Phys. – 1983. – Vol. A 412, № 4. – P. 509–522.
7. Two-body photodisintegration of the deuteron from 100 to 800 MeV / R. Crawford [et al.] // Nucl. Phys. – 1996. – Vol. A 603, № 3–4. – P. 303–325.
8. Measurement of $^2\text{H}(\bar{\gamma}, p)n$ with linearly polarized photons in the Δ -resonance region / G. Blanpied [et al.] // Phys. Rev. – 1999. – Vol. C 61, № 2. – P. 024604.
9. Thorlacius, A. E. Phenomological fit to deuteron photodisintegration data in the medium energy region / A. E. Thorlacius, H. W. Fearing // Phys. Rev. – 1986. – Vol. C 33, № 5. – P. 1830–1833.
10. Экспериментальный статус электрической и магнитной поляризуемостей протона / П. С. Баранов [и др.] // Физика элементарных частиц и атомного ядра – 2001. – Т. 32, № 3. – С. 699–733.
11. Single and double π^0 -photoproduction from the deuteron / B. Krusche [et al.] // Eur. Rev. J. – 1999. – Vol. A 6, № 3. – P. 309–324.
12. Coherent and incoherent π^0 photoproduction from the deuteron / U. Siodlaczek [et al.] // Eur. Rev. J. – 2001. – Vol. A 10, № 3. – P. 365–371.
13. Measurement of the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$, and determination of cross sections for the reaction $\gamma n \rightarrow \pi^- p$, at photon energies between 0.2 and 2.0 GeV / P. Benz [et al.] // Nucl. Phys. – 1973. – Vol. B 65, № 2. – P. 158–209.
14. Total cross section measurement of π^- photoproduction on the deuteron in the first-resonance region / G. Chiefari [et al.] // Lett. Nuovo Cim. – 1975. – Vol. 13, № 4. – P. 129–133.
15. Total cross section for the $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ reaction between 380 and 840 MeV / M. Asai [et al.] // Phys. Rev. – 1990. – Vol. C 42, № 3. – P. 837–845.
16. Levchuk, M. I. Helicity-dependent reaction $\bar{\gamma} \vec{d} \rightarrow \pi NN$ and its contribution to the GDH sum rule for the deuteron / M. I. Levchuk // Phys. Rev. – 2010. – Vol. C 82. – № 4.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.09.2017

Levchuk M.I. On the Total Photoabsorption Cross Section on the Deuteron in the First Resonance Region

The total photoabsorption cross section on the deuteron is considered in the first resonance region. We compare results of direct measurements of this cross section with the sum of separate contributions to the reaction $\gamma d \rightarrow X$. It is shown that in the center of the Δ -resonance at photon energy near 320 MeV the sum is exceeded by about 100 μb . The consequences of this discrepancy are discussed.

УДК 538.9

**В.А. Лионо¹, Е.В. Овчинников², Ф.А. Ситкевич,
С.С. Секержицкий⁴, И.А. Лявчук⁵**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

²д-р тех. наук, доц., зам. декана по научной работе

факультета инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

³аспирант каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

⁴канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

⁵магистр естеств. наук, ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

e-mail: otf@brsu.brest.by

СУПЕРЪЯЧЕЙКА ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ КРИСТАЛЛОВ

Показано, что кристаллы с ячейками Бравэ I,F,C-типа в обратной решетке характеризуются суперъячейками, периоды которых в n раз больше $a^ = a^{-1}$, где a – период ячейки кристаллической решетки. Для сложных структур, даже если они моноэлементные, период суперъячейки обратной решетки может превышать a^* в несколько раз. Например, для алмаза $a_S^* = 4a^*$ под суперъячейкой обратной решетки необходимо брать наименьший параллелепипед, вес всех вершинных узлов которого не равен нулю.*

Введение

Решетка кристалла предполагает регулярность в расположении атомов (молекул) вдоль любого направления. Это означает, что при выборе двух рядом расположенных одинаковых структурно-химических (гомологичных) элементов с расстоянием между ними a , на прямой, проходящей через эти две точки, будут находиться гомологичные или точки с расстоянием $t = na$, где n – целое число. Величина t – трансляция, перенос кристалла на которую приводит его к самосовпадению. Три некомпланарных трансляции $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, выбранных по соответствующим требованиям, образуют параллелепипед, называемый ячейкой кристалла. Ячейка должна удовлетворять требованиям:

- точечная симметрия ячейки та же самая, что и кристалла к целому;
- число прямых углов в ячейке должно быть максимальным;
- полная поверхность ячейки должна быть наименьшей.

Эти требования позволяют в большинстве случаев из множества возможных вариантов выбрать один. В общем случае ячейка решетки кристалла – косоугольный параллелепипед с тремя линейными (a, b, c) и тремя угловыми (α, β, γ) параметрами. Ячейку можно описать векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, которые формируют кристаллографическую систему координат (kr) (или репер Бравэ). Координаты точки в пределах ячейки измеряются в единицах параметров a, b, c .

Параметры прямой и обратной решеток кристалла

Любая плоскость в кристалле отсекает от кристаллографических осей координаты $(x, y, z)_{kr}$ и обязательно имеет совокупность гомологичных ей плоскостей, межплоскостное расстояние между рядом расположенными плоскостями равно d . Пусть одна

из плоскостей проходит через точку с координатой x_{kr} . Гомологичная ей плоскость в пределах первой ячейки, находится в начале координат. Отрезок $x_{kr} \leq a$. Любая кристаллографическая плоскость отсекает от кристаллографической оси отрезок $x_{kr} = \frac{a}{h}$, где h – обязательное целое число.

В трехмерном варианте кристаллографическая плоскость проходит через точки с кристаллографическими координатами $(x, y, z)_{kr} = \left(\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{l}\right)$. Целые числа (h, k, l) называются кристаллографическими индексами. Из сказанного следует, что одна из совокупности тождественных плоскостей обязательно проходит через две, три, четыре вершины решетки.

Значение межплоскостного расстояния определяется методом дифракции рентгеновских электронных или нейтронных лучей (методы рентгено-, электроно- и нейтронографии соответственно).

Если на кристаллографическую плоскость I (рисунок 1) падает рентгеновский луч под углом скольжения θ (луч 1) и отражается от нее, а от следующей плоскости II (луч 2), и эти лучи интерферируют, то угол дифракции равен 2θ . Угловое положение отраженного луча (рефлекса) описывается уравнением Вульфа – Бреггов:

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (1)$$

где d – межплоскостное расстояние, λ – длина волны излучения, n – целое число.

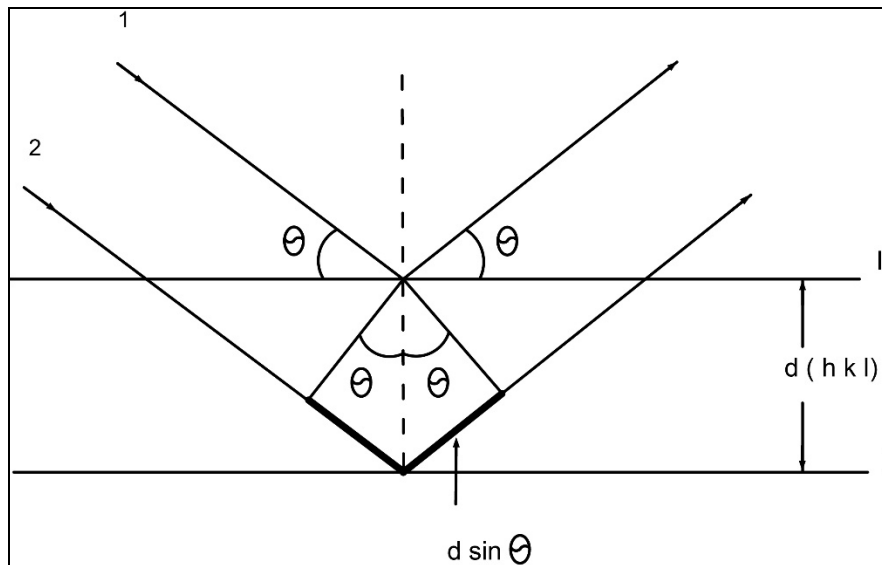


Рисунок 1. – К условию Вульфа – Бреггов

Значение $\frac{d}{n}$ определяется из эксперимента и рассматривается как $\frac{d}{n} \equiv d$ для соответствующих кристаллографических плоскостей. Каждая из плоскостей $d(h, k, l)$ может быть представлена в виде точки обратного пространства (рисунок 2).

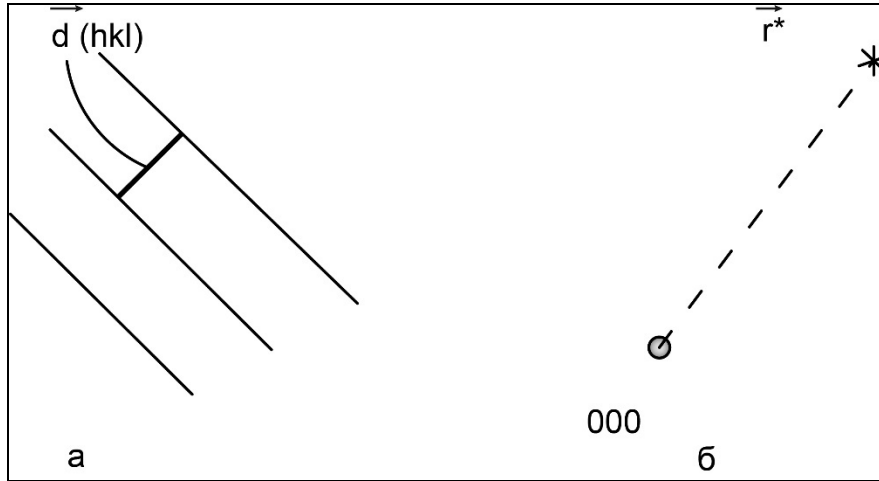


Рисунок 2 – а) – отображение плоскости $d(h,k,l)$, б) – в обратном пространстве

Точка (*) является отображением плоскости $\vec{d}(h,k,l)$ пространства кристалла. Радиус-вектор точки (*) в обратном пространстве равен $\vec{r}^* = \vec{d}^{(-1)}$.

Причем \vec{r}^* параллелен \vec{d} . Очевидно, что переход от обратного пространства к прямому также легко осуществим. Каждый узел обратной решетки имеет целочисленные координаты (h,k,l) в ее кристаллической системе, которые связаны с репером Бравэ кристалла.

Узлы (h,k,l) в обратном пространстве формируют решетку, но в отличие от прямого пространства эта решетка определяет только положение узлов, но не является трансляционной симметрией. Каждый рентгеновский рефлекс имеет свою интенсивность (I) , которая характеризует «вес» узла обратной решетки. Чем больше $I(h,k,l)$, тем больше «вес» узла (h,k,l) , который обозначим $F(h,k,l)$.

В обратной решетке, как и в прямой, выбирается элементарный параллелепипед с параметрами $a^*, b^*, c^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$, причем этот выбор зависит от ячейки прямой решетки, так как $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = (a_i^0, \alpha_i^0)_{i=1,2,3}$ связан с $(a^*, b^*, c^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = (a_j^*, \alpha_j^*)_{j=1,2,3}$ условиями:

$$a_j^{*(0)} = \frac{a_{j+1}^{0(*)} a_{j+2}^{0(*)} \sin \alpha_j^{0(*)}}{V^{0(*)}}, \tag{2}$$

$$\cos \alpha_j^{*(0)} = \frac{\cos \alpha_{j+1}^{0(*)} \cos \alpha_{j+2}^{0(*)} - \cos \alpha_j^{0(*)}}{\sin \alpha_{j+1}^{0(*)} \sin \alpha_{j+2}^{0(*)}}, \tag{3}$$

или

$$\sin \alpha_j^{*(0)} = \frac{r^{0(*)}}{\sin \alpha_{j+1}^{*(0)} \sin \alpha_{j+2}^{*(0)}}, \tag{4}$$

где

$$r^{0(*)} = \left(1 - \cos^2 \alpha^{0(*)} - \cos^2 \beta^{0(*)} - \cos^2 \gamma^{0(*)} + 2 \cos \alpha^{0(*)} \cos \beta^{0(*)} \cos \gamma^{0(*)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$V^{*(0)}$ – объемы обратной (прямой) ячеек решеток, определяемые по формуле:

$$V^{*(0)} = a^{*(0)} b^{*(0)} c^{*(0)} r^{*(0)}. \quad (5)$$

Скалярные произведения векторов репера Бравэ прямой и обратных ячеек равны $(a_j^*, a_k^0) = \delta_{jk}$. Из условий (2–5) следует, что решетка, обратная обратной, – это прямая решетка.

Ячейки прямой и обратной решеток

Несмотря на то, что обратная и прямая решетки описываются формально симметричными переходами от параметров одной решетки к параметрам другой и обе эти решетки в качестве элементарной геометрической конфигурации характеризуются ячейками, эти две решетки существенно отличаются друг от друга.

В кристаллической решетке все ячейки абсолютно тождественны друг другу. Т.е. всегда выполняется правило

$$\hat{T}R(x, y, z) = R'(mx, ny, pz), \quad (6)$$

где \hat{T} – оператор трансляции. Причем точки (x, y, z) и (mx, ny, pz) гомологичные, т.е. их можно поменять местами, и никакие свойства решетки не изменятся. В узлах решетки кристалла и, следовательно, в вершинах ячейки находятся гомологичные точки. Это может быть отдельный атом, любая точка молекулы, определенная точка молекулярного радикала, центр структурного полиэдра и т.п. В ячейке обратной решетки узлами являются точки с радиусами-векторами:

$$\vec{r}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*, \quad (7)$$

т.е. вершинами прямой ячейки, находящейся в октанте системы координат x^*, y^*, z^* , является параллелепипед с координатами вершин 000; 100; 010; 001; 110; 101; 011; 111.

В обратной решетке ячейки тождественны только геометрически, т.е. все они – параллелепипед с ребрами $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$. Каждый узел обратной решетки $r^*(hkl)$ определяет плоскость (hkl) . Структурная амплитуда рентгеновского (электронного, нейтронного) излучения $F(h, k, l)$ определяет «вес» узла обратной решетки [2].

Трансляция в обратной решетке с учетом $F(h, k, l)$ отсутствует. Сам выбор ячейки связан с прямой решеткой, т.е. начало координат в обратной решетке и направление осей x^*, y^*, z^* не могут изменяться, так как зависят от $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. В ячейке кристалла может находиться любое, в зависимости от состава, количество атомов с координатами (x, y, z) , имеющими значения в интервале $(0 \div 1)$. Любой точке в пространстве кристалла есть ей гомологичная в ячейке, принятой за начальную.

В ячейке обратной решетки не может быть никаких узлов этой решетки, так как их координаты в репере $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ целые числа. «Вес» узла обратной решетки может быть нулевым.

В этом случае необходимо по осям x^*, y^*, z^* пройти до ненулевого узла и ячейка должна быть построена так, чтобы все ее вершины были с ненулевым «весом». Периоды такой суперячейки, как и ее объем, будут кратными (a^*, b^*, c^*, V^*) (2–5).

Суперъячейки обратной решетки кристаллов с ячейками Бравэ не примитивных типов

«Вес» узла обратной решетки описывается значением структурной амплитуды, которая рассчитывается по формуле:

$$F(h, k, l) = \sum_{j=1}^N f_j(x, y, z) \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_k)\}, \quad (8)$$

где f_j – атомная амплитуда рассеяния j -того атома (табличная величина). N – число атомов в ячейке, объемно-центрированная ячейка решетки кристалла (I -типа). Базисом ячейки I -типа является параллелепипед, которому принадлежат узлы $(0,0,0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, т.е. любой точке (любому атому) с координатами (x, y, z) обязательно имеется гомологичная точка (атом) с координатами $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2})$.

Следовательно, структурная амплитуда (8) для I -типа решетки примет вид:

$$\begin{aligned} F(h, k, l) &= \sum_{j=1}^{N/2} f_j(x, y, z) \times \\ &\times \left(\exp 2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j) + \exp 2\pi i \left(h \left(x_j + \frac{1}{2} \right) + k \left(y_j + \frac{1}{2} \right) + l \left(z_j + \frac{1}{2} \right) \right) \right) = \quad (9) \\ &= 1 + \exp 2\pi i \frac{h+k+l}{2} \sum_{j=1}^{N/2} f_j \exp 2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j). \end{aligned}$$

Множитель, вынесенный за знак суммы, имеет вид:

$$\left[1 + e^{\pi i(h+k+l)} \right] = \left[1 + e^{i\pi C} \right]. \quad (10)$$

Постоянное целое число C может принять два значения: $C = 2n$ (четное), $C = 2n + 1$ (нечетное). Следовательно, все узлы обратной решетки I -типа с нечетной суммой индексов имеют нулевой «вес». Обратная решетка в таком случае имеет вид (рисунок 3).

На рисунке 3 приведены ближайшие к началу координат обратной решетки ее узлы с ненулевым «весом».

На этом же рисунке приведена ячейка с a^*, b^*, c^* , но она имеет четыре узла с ненулевым «весом» 000,110,101,011.

Суперъячейка, вершины которой имеют ненулевой «вес», имеет периоды

$$\left\{ a_s^* = 2a^* = \frac{2}{a}, b_s^* = 2b^* = \frac{2}{b}, c_s^* = 2c^* = \frac{2}{c}, V_s^* = 8V^* \right\}. \quad (11)$$

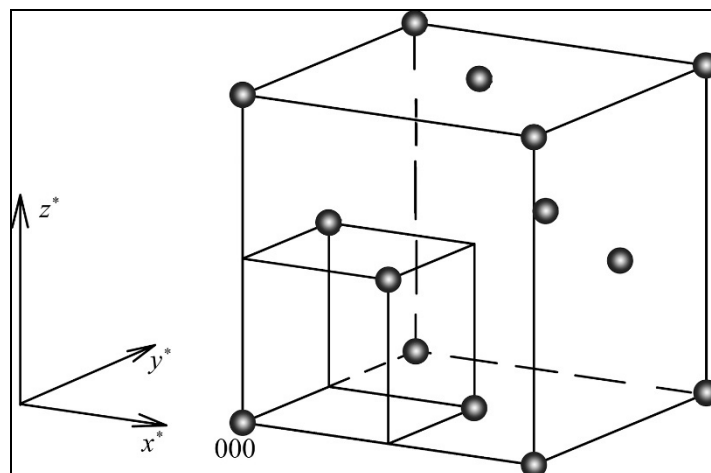


Рисунок 3. – Суперъячейка обратной решетки кристалла с решеткой I-го типа, \bullet – ненулевые узлы

Т.е., объемноцентрированная ячейка в обратном пространстве описывается границированной суперъячейкой с размерами (11).

Границированная решетка кристалла характеризуется базисом Бравэ $000; \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0; \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}; 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$.

Формула структурной амплитуды для таких кристаллов имеет вид (8):

$$\begin{aligned}
 F(h, k, l) &= \sum_{j=1}^{N/4} f_j(x, y, z) \times \\
 &\left(\exp 2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j) + \exp 2\pi i \left(h \left(x_j + \frac{1}{2} \right) + k \left(y_j + \frac{1}{2} \right) + lz_j \right) + \right. \\
 &\times \left. \left(\exp 2\pi i \left(h \left(x_j + \frac{1}{2} \right) + ky_j + l \left(z_j + \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. \exp 2\pi i \left(hx_j + k \left(y_j + \frac{1}{2} \right) + l \left(z_j + \frac{1}{2} \right) \right) \right) \right) = \quad (12) \\
 &= (1 + \exp \pi i (h+k) + \exp \pi i (k+l) + \exp \pi i (l+h)) \\
 &\sum_{j=1}^{N/4} f_j \exp 2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j).
 \end{aligned}$$

Множитель перед знаком суммы (четырёхчлен) равен нулю, если индексы (hkl) имеют разную четность: два четных, один нечетный, – и наоборот. Если (hkl) имеют одинаковые четности, то этот четырехчлен равен четырем.

Следовательно, узлы обратной решетки с индексами смешанной четности имеют нулевой «вес» (рисунок 4).

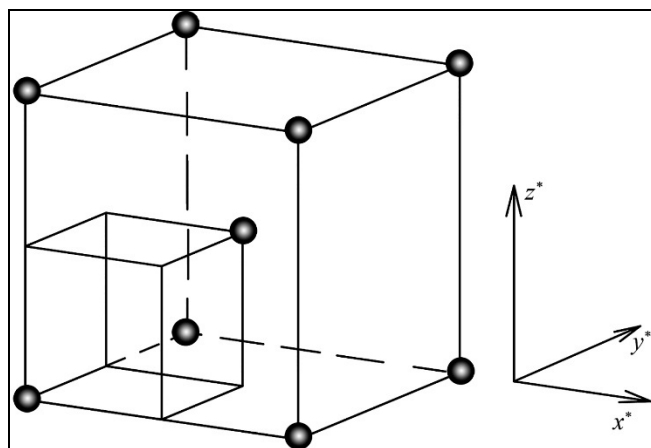


Рисунок 4. – Суперъячейка обратной решетки кристалла с ячейкой F-типа

На рисунке 4 приведена ячейка обратной решетки, у которой только два узла с ненулевым «весом» $000,111$. Суперъячейка имеет индексы $000,111$, т.е. суперъячейка относится к объемноцентрированной ячейке Бравэ. Соотношения между параметрами суперъячейки обратной решетки кристалла с решеткой F -типа и параметрами ячеек обратной и прямой решеток те же, что и в условиях (11).

Базис Бравэ ячеек C -типа имеет значение $000, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$. Следовательно, структурная амплитуда таких кристаллов имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F(h, k, l) &= \sum_{j=1}^{N/2} f_j(x, y, z)_j \times \\
 &\times \left(\exp 2 \pi i (hx_j + ky_j + lz_j) + \exp 2 \pi i \left(h \left(x_j + \frac{1}{2} \right) + k \left(y_j + \frac{1}{2} \right) + lz_j \right) \right) =. \quad (13) \\
 &= (1 + \exp \pi i (h + k)) \sum_{j=1}^{N/2} f_j \exp 2 \pi i (hx_j + ky_j + lz_j).
 \end{aligned}$$

Следовательно, $F(hkl) \neq 0$ только для четной суммы индексов hk (на l ограничения не накладываются). Суперъячейка обратной решетки таких кристаллов приведена на рисунке 5.

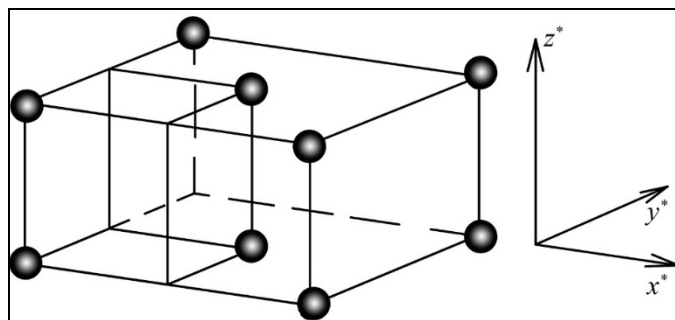


Рисунок 5. – Суперъячейка обратной решетки кристалла с ячейкой C-типа

Из приведенного рисунка 5 видно, что ячейка обратной решетки в своих вершинах имеет узлы с нулевым «весом». Соотношения между параметрами суперъчейки и параметрами ячеек обратной и прямой решеток имеют вид:

$$\left\{ a_s^* = 2a^* = \frac{2}{a}, b_s^* = 2b^* = \frac{2}{b}, c_s^* = c^* = \frac{1}{c}, V^* = 4V^* \right. \quad (14)$$

Очевидно, что ячейки P -типа прямой решетки в обратной решетке характеризуются также ячейкой P -типа, так как при расчете $F(hkl)$ на индексы никаких ограничений не накладываемся.

Для более сложных структур эти соотношения между ячейками кристалла и суперъчейками обратной решетки могут нарушаться. Это можно проиллюстрировать на примере алмаза.

Суперъчейка обратной решетки алмаза

Кристаллы алмаза описываются пространственной группой $Fd3m$. На рисунке б(а) приведена полиэдрическая модель структуры алмаза как сочленение тетраэдров и ячейка его кристаллической решетки:

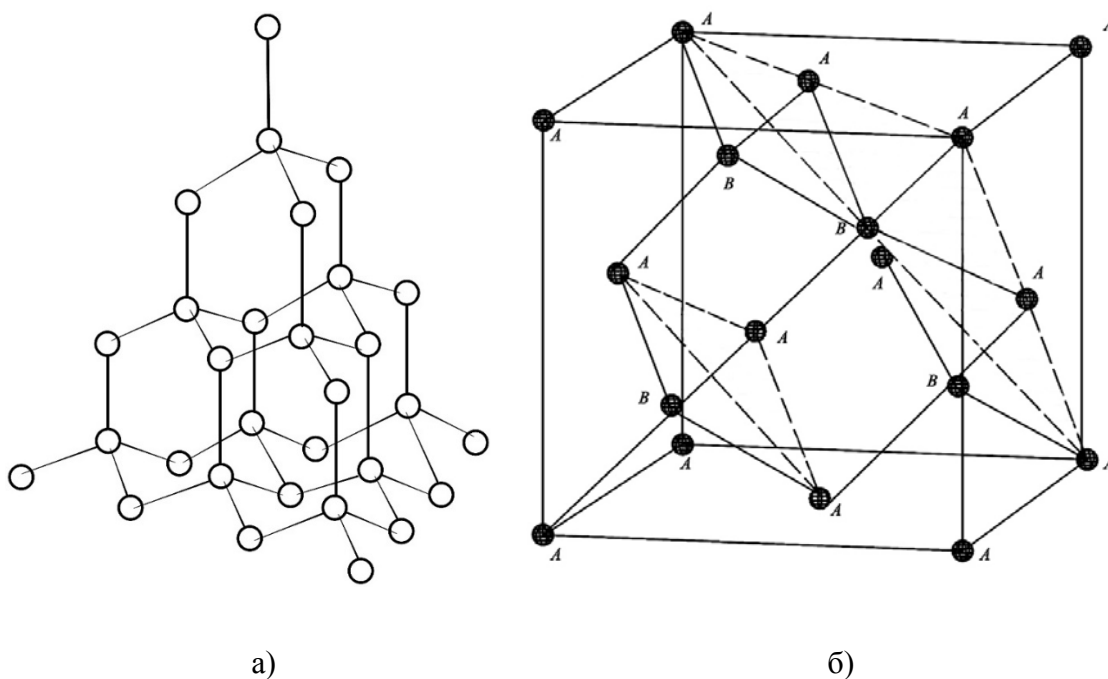


Рисунок 6. – а) схема сочленения углеродных тетраэдров;
б) ячейка решетки кристалла алмаза

Ячейка алмаза представляет собой два гранцентрированных куба, сдвинутых друг относительно друга по главной диагонали куба на трансляцию $\left(\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}\right)$. Координаты атомов углерода в ячейке алмаза приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Кристаллографические координаты атомов в ячейке алмаза (номера как на рисунке 6б)

№	1	2	3	4
$x y z$	000	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0$	$\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}$	$0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
№	5	6	7	8
$x y z$	$\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$

Период кристаллической решетки алмаза и минимальное межатомное расстояние имеют значения: $a = 3,57 \text{ \AA}$, $(r_{C-C}) = 1,54 \text{ \AA}$ [3].

Структурная амплитуда (8) с учетом координат атомов (таблица 1) после преобразования примет вид:

$$F(hkl) = f_c \left[1 + \exp \pi i (h+k) + \exp \pi i (k+l) + \exp \pi i (l+h) \right] \times \left[1 + \exp \frac{\pi i (h+k+l)}{2} \right]. \quad (15)$$

Первая скобка в этом выражении не равна нулю для индексов с одинаковой четностью. Если индексы четные, но их сумма равна $4n + 2$, то $F(hkl) = 0$. Следовательно, первые ненулевые узлы для суперъячейки алмаза следующие: 400;040;004. Если индексы (hkl) в координатной системе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ все нечетные, то $F(hkl) \neq 0$. Если индексы четные, то их сумма должна делиться на 4 без остатка.

Суперъячейка кубической обратной решетки алмаза имеет период $a_s^* = 4a^* = \frac{4}{a}$.

Все грани центрированы: 220;202;022.

Узлы обратной решетки со всеми нечетными индексами находятся внутри суперъячейки и имеют индексы: 111;311;131;331;113;313;133;333. Узлы с нечетными индексами образуют куб с ребром $(a')^{(*)} = 2a^* = \frac{2}{a}$, который находится внутри суперъячейки обратной решетки алмаза (рисунок 7):

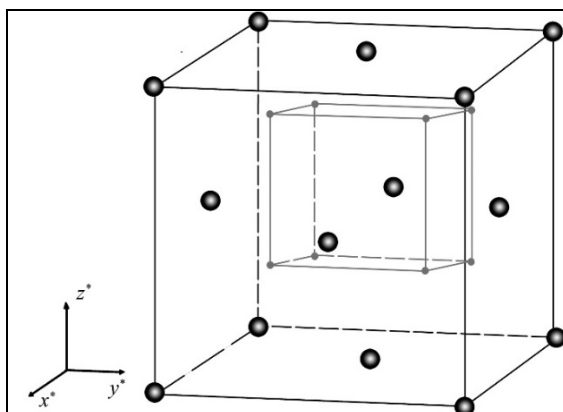


Рисунок 7. – Суперъячейка кубической обратной решетки алмаза

Если в качестве структурного элемента выбрать тройки узлов обратной решетки $(x^* y^* z^*)_l$ и учесть трансляцию $x_l^* = x_1^* + 4$, то получим распределение узлов, приведенное в таблице 2.

Таблица 2. – Приведение суперъячейки обратной решетки алмаза к суперъячейке F -типа

$(x^* y^* z^*)_l$	000 111 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	220 331 $\bar{3}\bar{3}\bar{1}$	202 313 $\bar{3}\bar{1}\bar{3}$	022 133 $\bar{1}\bar{3}\bar{3}$
$(x^* y^* z^*)_t$	000 111 333	220 331 113	202 313 131	022 133 311

Каждый вершинный узел находится в центре тетраэдра из узлов обратной решетки. Узел 000 лежит в тетраэдре из узлов $\bar{1}\bar{1}\bar{1} \equiv 333$, $1\bar{1}\bar{1} \equiv 133$, $\bar{1}1\bar{1} \equiv 313$. Остальные узлы первой суперъячейки координированы узлами с нечетными индексами по аналогичной схеме. Узлы с нечетными индексами также находятся в тетраэдрах, вершинами которых являются узлы в вершинах суперъячейки и трех узлов, координирующих грани.

Тетраэдр, координирующий узлы с четными индексами, может рассматриваться как «некий суперузел» обратной решетки. В этом случае очевидно, что суперъячейка алмаза относится к F -типу.

Заключение

Обратная решетка кристалла играет важную роль в теории дифракции излучения и при анализе проблем, связанных с исследованием свойств кристаллов [4–6]. При изучении дифракции рентгеновских лучей исходят из того, что при попадании узла обратной решетки на сферу Эвальда по радиус-вектору узла этой сферы пойдет отраженный луч (рефлекс), интенсивность рефлекса определяет «вес» узла, равный структурной амплитуде. В зависимости от типа ячейки Бравэ решетки кристалла некоторые узлы обратной решетки имеют нулевой вес. Ячейка обратной решетки имеет периоды a_i^* ($i=1,2,3$) такие, что $a_j^* a_k^* = a_k^* a_j^* = \delta_{jk}$. В вершинах ячейки обратной решетки должны быть узлы с $F(hkl) \neq 0$. Это условие выполняется только для решетки P -типа. Ячейка обратной решетки строится на репере $a^* = r^*(100)$, $b^* = r^*(010)$, $c^* = r^*(001)$. Такая ячейка не может включать в себя узлы решетки, так как их индексы имели бы дробные значения. Утверждение о том, что ячейка F -типа решетки кристалла характеризуется ячейкой I -типа в обратной решетке, неверное. Такие типы в обратной решетке относятся к суперъячейкам с параметрами, в целое число раз превышающими a_j^* .

Понятие обратной решетки используется при анализе механических, оптических, термодинамических и квантовых свойств кристалла [4–6]. Для анализа кристаллов с непримитивными ячейками необходимо использовать понятие суперъячейки.

Показано на примере алмаза, что для ячейки решетки F -типа в обратном пространстве суперъячейка относится тоже к F -типу. Суперъячейки обратной решетки кристаллов с ячейками Бравэ для кристаллов с решеткой C -типа имеют объем $V_S^* = 4V^*$, для F - и I -типа $V_S^* = 8V^*$, для алмаза $V_S^* = 64V^*$, где V^* – объем ячейки обратной решетки с параметрами $a^* b^* c^*$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн, Б. Современная кристаллография / Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 384 с.
2. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.
3. Брегг, У. Кристаллическая структура минералов / У. Брегг, Г. Кларинбул. – М. : Мир, 1967. – 389 с.
4. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. – М. : Мир, 1979. – Т. 1. – 458 с.
5. Киттель, Ч. Квантовая теория твердых тел / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1967. – 492 с.
6. Mitin, V. Quantum Mechanics for Nanostructures / V. Mitin, D. Sementsov, N. Vagidov ; ed. by V. Mitin. – Cambridge : University Press, 2010. – 431 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.06.2017

Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sitkevich A.V., Sekerzhitsky S.S., Liaushuk I.A. Super Cell of the Reciprocal Lattice of Crystals

It has been demonstrated that crystals with Bravais cells of types I, F, C in the reciprocal lattice are characterized by super cells, the periods of which are n times larger $a = a^{-1}$ where a is the period of a lattice cell. For complex structures, even if they contain one element only, the period of super cell in the reciprocal lattice can exceed a^ more times. For example, for diamond $a_s^* = 4a^*$. The smallest parallelepiped, with the weight of all its points not equal to zero, should be taken as a super cell.*

УДК 519.688

А.Н. Башняков¹, В.В. Пичкур², А.А. Полищук³, Я.Н. Линдер⁴

¹канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник лаборатории моделирования и оптимизации
Киевского национального университета имени Т. Шевченко

²д-р физ.-мат. наук, доц. каф. моделирования сложных систем
Киевского национального университета имени Т. Шевченко

³канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник лаборатории моделирования и оптимизации
Киевского национального университета имени Т. Шевченко

⁴канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. информационных систем
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

e-mail: alexander.bashnyakov@gmail.com

О МЕТОДЕ АДАПТИВНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Предлагается метод решения задачи коррекции угловых скоростей твердого тела по эталонным измерениям ориентации. Математическая модель представляется в форме кинематических уравнений с использованием кватернионов. Особенности поставленной задачи следующие: отсутствует априорная информация о шумах, действующих на систему; разработанный алгоритм должен иметь высокое быстродействие; коррекция должна осуществляться по ходу функционирования системы. В основе подхода лежит разработанный авторами адаптивный метод идентификации параметров по дискретным измерениям вектора состояния. Идея метода состоит в том, что при получении эталонной информации параметры выбираются из условия минимума отклонения соответствующего решения от эталонных значений. При этом используется линеаризация решений системы с помощью матрицы чувствительности, а также подходы оптимизационных методов второго порядка. Вычислительный эксперимент показывает эффективность предложенного подхода.

Задачи анализа, управления, оптимизации и идентификации динамики твердого тела широко представлены в научной литературе. Это связано с существенным прикладным значением таких задач, поскольку они возникают в проблематике построения систем управления летательными аппаратами, в задачах навигации и других прикладных областях.

В частности, к такой области принадлежит задача коррекции угловых скоростей твердого тела. Она возникает в системах управления летательными аппаратами и связана с необходимостью уточнения данных об угловых скоростях в динамике [1; 2].

Для указанной задачи существует ряд особенностей: отсутствует априорная информация о шумах, действующих на систему; разработанный алгоритм должен иметь высокое быстродействие; коррекция должна осуществляться по ходу функционирования системы.

Поэтому такие задачи целесообразно решать с применением адаптивного подхода. Адаптивные методы являются эффективными при решении различных задач управления, стабилизации, оценки состояния, идентификации параметров, обработки информации [3–8].

В работе предлагается адаптивный метод параметрической идентификации, который применяется для задачи адаптивной коррекции угловых скоростей твердого тела. В основе метода лежит понятие матрицы чувствительности и идеи оптимизационных методов второго порядка. Разработанные итерационные процедуры апробированы при проведении вычислительного эксперимента.

Метод адаптивной идентификации с использованием матрицы чувствительности

Пусть задана динамическая система вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – вектор фазовых координат, $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$ – вектор параметров, $f(x, p, t) = (f_1(x, p, t), f_2(x, p, t), \dots, f_n(x, p, t))^*$ – вектор-функция правых частей системы (1), непрерывно дифференцируемая по переменным x , p и непрерывная по переменной t на $R^n \times R^m \times [0, T]$, x_0 – вектор начальных условий из R^n . Обозначим $x(t, p)$ – решение задачи Коши (1), (2). По теореме о непрерывной дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по параметру функция $x(t, p)$ является непрерывно дифференцируемой по переменной p .

В моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_{N+1} = T$ мы имеем измерения $y^{(i)} = y(t_i)$ вектора фазовых координат $x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Информация о погрешности наблюдения, а также о характере этой погрешности отсутствует. Задача состоит в том, чтобы определить значение параметра p , которое соответствует наблюдениям $y^{(i)}$ в моменты времени t_i .

Для решения поставленной задачи будем использовать адаптивный подход. Мы считаем, что на промежутках (t_k, t_{k+1}) параметр p принимает постоянные значения, $k = 0, 1, \dots, N$. В моменты времени t , которые соответствуют различным интервалам, значения параметра p могут отличаться. В моменты $t = t_i$ известна реализация $x(t, p)$, которая соответствует значению параметра $p = p^{(i-1)}$. Ищем такое значение параметра $p^{(i)}$, которое минимизирует критерий качества вида

$$J(p) = \langle Q^{(i)}(x(t_i, p) - y^{(i)}), x(t_i, p) - y^{(i)} \rangle \rightarrow \min_p. \quad (3)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^n , $Q^{(i)}$ – симметричные положительно определенные матрицы размерности $n \times n$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Используем свойства матрицы чувствительности [9]. Зададим возмущение параметра p в точке $p^{(i-1)}$ на величину h и запишем решение системы (1) с учетом линейного приближения:

$$x(t_i, p^{(i-1)} + h) = x(t_i, p) + U(t_i, p^{(i-1)})h + r_i(h). \quad (4)$$

Здесь $U(t) = U(t, p^{(i-1)})$ – матрица чувствительности системы (1), которая соответствует решению $x(t, p)$ при $p = p^{(i-1)}$, h принадлежит R^m , $r_i(h)$ бесконечно малая высших порядков малости по отношению к h при $h \rightarrow 0$. Матрица чувствительности удовлетворяет матричное дифференциальное уравнение [9]:

$$\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p)U(t) + g(t), t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (5)$$

$$U(t_i) = 0, \quad (6)$$

где $L(t, p) = \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial x}$, $g(t, p) = \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial p}$, $p = p^{(i-1)}$.

Обозначим $y^{(i)} - x(t_i, p^{(i-1)}) = \Delta x^{(i)}$. Опуская в (4) функцию $r_i(h)$, подставляем линейное приближение к $x(t_i, p^{(i-1)} + h)$ в критерий качества (3). Получаем квадратичный функционал вида:

$$\begin{aligned} J(h) &= \langle Q^{(i)}(x(t_i, p) + U(t_i)h - y^{(i)}), x(t_i, p) + U(t_i)h - y^{(i)} \rangle = \\ &= \langle Q^{(i)}(U(t_i)h - \Delta x^{(i)}), U(t_i)h - \Delta x^{(i)} \rangle = \\ &= \langle Q^{(i)}\Delta x^{(i)}, \Delta x^{(i)} \rangle + \langle U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)h, h \rangle - 2\langle U(t_i)h, Q^{(i)}\Delta x^{(i)} \rangle. \end{aligned}$$

Находим параметр $h = h^{(i)}$ с условиями минимума $J(h)$. Применяя необходимые условия экстремума $\frac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0$, получаем для нахождения $h^{(i)}$ систему линейных алгебраических уравнений

$$U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)h = U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}. \quad (7)$$

Предположим, что матрица $U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)$ является невырожденной. Тогда

$$h^{(i)} = (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}. \quad (8)$$

Исходя из (1), (2), (5), (6), (8), метод можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}, p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $i = 0, 1, \dots, N$. Опишем соответствующий алгоритм:

Шаг 1. Выбираем начальное приближение p_0 . На интервале $[0, t_1]$ решаем задачу (1), (2) при $p = p_0$. Подставляем решение в (5), (6), находим матрицу чувствительности $U(t_1)$. Находим

$$p^{(1)} = p_0 + (U^*(t_1)Q^{(1)}U(t_1))^{-1}U^*(t_1)Q^{(1)}\Delta x^{(1)}.$$

Шаг 2. На i -м шаге, $i = 1, \dots, N$, на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ решаем задачу (1), (2) при $p = p^{(i)}$. Находим матрицу чувствительности $U(t_i)$ как решение задачи (5), (6) при $p = p^{(i)}$. Определяем

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}.$$

Если матрица $U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)$ особая или близка к особой, то можно применить регуляризацию метода (9). Для этого вводится параметр регуляризации $\varepsilon > 0$, и для него получаем следующий метод

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}, p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $i = 0, 1, \dots, N$, I – $m \times m$ -единичная матрица.

Обозначим

$$p(i, s) = p^{(i)} + s((U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}),$$

где $s > 0$ – параметр. Получим еще одну модификацию метода (9):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \min_{s \in [0, 1]} J(p(i, s)) &= J(p(i, s(i))), \\ p^{(i+1)} &= p(i, s(i)), p^{(0)} = p_0, \\ i &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{11}$$

Метод коррекции угловых скоростей

На основе (9) предлагается метод решения задачи коррекции угловых скоростей твердого тела по эталонным измерениям его ориентации. Суть предложенного метода состоит в адаптивном выборе параметров системы так, чтобы наиболее быстро настроиться на эталонные значения. Разработанный алгоритм можно использовать при настройке параметров системы в том случае, когда теряется эталонный сигнал (система функционирует автономно). При возобновлении эталонного сигнала система будет автоматически скорректирована, компенсируя погрешности, которые могли возникнуть как в процессе интегрирования самой системы, так и в результате зашумления данных из датчиков.

Реализация алгоритма предусматривает дополнительный подбор параметров, таких как шаг и метод интегрирования, а также частота поступления тестового сигнала.

Введем следующие обозначения: $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор кватернионов, $\|\Lambda\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловых скоростей. Кинематические уравнения, которые описывают ориентацию твердого тела, можно записать в виде системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda_0}{dt} &= -\omega_1 \lambda_1 - \omega_2 \lambda_2 - \omega_3 \lambda_3, \\ 2 \frac{d\lambda_1}{dt} &= \omega_1 \lambda_0 + \omega_3 \lambda_2 - \omega_2 \lambda_3, \\ 2 \frac{d\lambda_2}{dt} &= \omega_2 \lambda_0 - \omega_3 \lambda_1 + \omega_1 \lambda_3, \\ 2 \frac{d\lambda_3}{dt} &= \omega_3 \lambda_0 + \omega_2 \lambda_1 - \omega_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

В моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_{N+1} = T$ известны измерения $y^{(i)} = \Lambda(t_i)$ вектора кватернионов. Задача состоит в том, чтобы на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ осуществить коррекцию угловых скоростей так, чтобы они адекватно отвечали текущей ориентации твердого тела. Для поставленной задачи применим метод (9).

Обозначим матрицу чувствительности

$$U(t) = (u_{ij}(t)), u_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}, \text{ где } i = 0, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3.$$

Тогда предлагаемый метод будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d\lambda_0}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_2 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_3, \\
 2 \frac{d\lambda_1}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_2 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_3, \\
 2 \frac{d\lambda_2}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_0 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_1 + (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_3, \\
 2 \frac{d\lambda_3}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_2, \\
 t &\in [t_i, t_{i+1}], \Lambda(0) = \Lambda_0; \Lambda(t_i) = \Lambda(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\
 2 \frac{du_{0j}}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{1j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{2j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{3j} + f_{0j}(t), \\
 2 \frac{du_{1j}}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{0j} + (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{2j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{3j} + f_{1j}(t), \\
 2 \frac{du_{2j}}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{0j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{1j} + (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{3j} + f_{2j}(t), \\
 2 \frac{du_{3j}}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{0j} + (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{1j} - (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{2j} + f_{3j}(t), \\
 j &= 1, 2, 3, t \in [t_i, t_{i+1}], \\
 p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta\Lambda^{(i)}, p^{(0)} = p_0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 f_{01}(t) &= -\lambda_1(t), f_{02}(t) = -\lambda_2(t), f_{03}(t) = -\lambda_3(t), \\
 f_{11}(t) &= \lambda_0(t), f_{12}(t) = -\lambda_3(t), f_{13}(t) = \lambda_2(t), \\
 f_{21}(t) &= \lambda_3(t), f_{22}(t) = \lambda_0(t), f_{23}(t) = -\lambda_1(t), \\
 f_{31}(t) &= -\lambda_2(t), f_{32}(t) = \lambda_1(t), f_{33}(t) = \lambda_0(t),
 \end{aligned}$$

$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})^*$, $\Delta\Lambda^{(i)} = y^{(i)} - \Lambda(t_i, p^{(i)})$, Λ_0 – известная начальная ориентация, $Q^{(i)}$ – симметричные положительно определенные матрицы размерности 3×3 , $i = 1, 2, \dots, N$.

Для тестирования алгоритма создана программа. Входными являются такие данные:

1. Эталонные углы Крылова, которые получаются из системы контрольных измерений.
2. Покоординатная точность приближения к эталонным углам Крылова.
3. Начальные значения углов Крылова.

Начальные углы Крылова отображаются в соответствующие значения в системе кватернионов. Для этого применяются стандартные формулы соответствия между этими системами. Полученные в результате работы алгоритма значения кватернионов переводились в углы Крылова для вычисления отклонения от заданных углов. Результат вычислений записывался в файл в виде 4-мерных векторов, где первая координата – время (условное время от начала вычислений), остальные координаты – текущие углы Крылова. При этом последняя строка в файле содержит углы Крылова, которые покоординатно отличаются от эталонных на величину покоординатной точности. Изменяя начальные, эталонные углы Крылова и точность вычислений, оценивали эффективность алгоритма.

Алгоритм протестирован при различных входных данных. Например, при параметрах: текущие углы Крылова (0.5; 0.7; 0.2); эталонные углы Крылова (0.01; 0.02; 0.01); допустимое покоординатное отклонение: до 0.01 за время 2.36 – получили углы Крылова с отклонением от эталонных с точностью до 0.01.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко, Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко. – Одесса : ОНУ, 2013. – 288 с.
2. Бранец, В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000. – 475 с.
4. Гаращенко, Ф. Г. Адаптивный метод дистанционного обнаружения химических компонентов в растениях на основе градиентного похода / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвиенко // Мехатроника, автоматика, управление. – 2013. – № 2. – С. 34–37.
5. Пупков, К. А. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов, А. И. Гаврилов. – М. : МГТУ им. Баумана, 2002. – 744 с.
6. Фрадков, А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы / А. Л. Фрадков. – М. : Наука, 1990. – 296 с.
7. Цыпкин, Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
8. Sastry, S. Adaptive control: stability, convergence, and robustness / S. Sastry, M. Bodson. – New Jersey : Prentice Hall, 1989. – 196 p.
9. Розенвассер, Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. – М. : Наука, 1981. – 464 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.06.2017

Bashniakov A., Pichkur V., Polishchuk A., Linder Y. On the Method of Adaptive Correction of Corner Speeds of Solid Body Using the Matrix of Sensitivity

In the article, the method of solving the problem of a solid body angular velocities correction by reference orientation measurements is proposed. The mathematical model is represented in the form of kinematic equations using quaternions. The specific features of the task are as follows: there is no a priori information about the noise acting on the system; the developed algorithm should have high performance; correction must be carried out as the system progresses. The approach is based on the adaptive method developed by the authors for identifying parameters from discrete measurements of the state vector. The idea of the method is that during reference information acquisition, the parameters are selected from the condition of the corresponding solution minimum deviation from the reference values. In this case, the linearization of system solutions using the sensitivity matrix, as well as the approaches of second-order optimization methods are used. Computational experiment shows the effectiveness of the proposed approach.

УДК 517.925

Е.В. Грицук¹, Е.В. Кузьмина²¹канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: gricuk_e@tut.by

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ
НА СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ**

Проводится исследование уравнений обобщенной иерархии дифференциальных уравнений Риккати методом резонансов. Получена структура уравнений иерархии, найден порядок подвижного полюса решения, указан явный вид резонансного многочлена и определены его корни. Для первых пяти уравнений найдены ряды Лорана с необходимым числом произвольных параметров.

Введение

В последние годы повысился интерес к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве, так как выяснилось, что свойство Пенлеве имеет тесную связь с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. В разделе нелинейной математической физики, связанным со свойством Пенлеве для дифференциальных уравнений, получены важные и интересные результаты при решении многих нелинейных задач в области гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и физики твердого тела. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить дифференциальные уравнения высших порядков, обладающих свойством Пенлеве.

Одним из способов построения таких уравнений является воздействие специальными операторами на уравнения Пенлеве-типа в надежде получить уравнения того же свойства. Из-за специфики применяемых операторов получаемые уравнения сохраняют некоторые свойства стартовых уравнений, однако требуют исследований на свойство Пенлеве. Рассмотрим одну из последовательностей таких уравнений – обобщенную иерархию уравнения Риккати.

Структура уравнений обобщенной иерархии уравнения Риккати

Обобщенная иерархия уравнения Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

При $n = 1$

$$w' + \gamma w^2 = 0, \quad (3)$$

при $n = 2$

$$w'' + \gamma^2 w^3 + 3\gamma w w' = 0, \quad (4)$$

при $n = 3$

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0, \quad (5)$$

при $n = 4$

$$w^{(4)} + \gamma^4 w^5 + 10\gamma^3 w^3 w' + 10\gamma^2 w^2 w'' + 15\gamma^2 w w'^2 + 5\gamma w w''' + 10\gamma w' w'' = 0. \quad (6)$$

Относительно вида уравнения (1) можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема 1. Уравнение (1), при $n \geq 2$, имеет вид

$$w^{(n)} + \gamma^n w^{n+1} + P_n(w, w', \dots, w^{(n-1)}) = 0, \quad (7)$$

где P_n – полином от $w, w', \dots, w^{(n-1)}$ степени n , вида

$$P_n(w, w', \dots, w^{(n-1)}) = \sum_{\langle k \rangle = n+1, k_0 \leq n-1} a_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}} w^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(n-1)})^{k_{n-1}}, \quad (8)$$

$a_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}$ – константы, k – мультииндекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ с нормой

$$\langle k \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) k_p. \quad (9)$$

Доказательство. Осуществим доказательство теоремы методом математической индукции по n -порядку дифференциального уравнения (1). Для случая $n = 2$ первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое представляет собой полином $P_2 = 3\gamma w w'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома, входящего в P_2 , равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$, т.е. $n + 1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m > 1$, докажем ее истинность при $n = m + 1$. При $n = m + 1$ из (1) и (7) получим

$$\begin{aligned} D_R^{m+1} w &= \left(\frac{d}{dz} + \gamma w \right) \left(w^{(m)} + \gamma^m w^{m+1} + P_m(w, w', \dots, w^{(m-1)}) \right) = \\ &= w^{(m+1)} + \gamma^{m+1} w^{m+2} + \gamma w w^{(m)} + (m+1) \gamma^m w^m w' + \gamma w P_m + P_m'. \end{aligned} \quad (10)$$

Первые два слагаемые из формулы (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m + 1$. Остается показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1} . Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формулы (9), равна $1 \cdot 1 + (m+1) \cdot 1 = (m+1) + 1$, т.е. третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы, входящие в полином P_{m+1} . Четвертое слагаемое имеет норму $1 \cdot m + (1+1) \cdot 1 = m + 2 = (m+1) + 1$, а значит также подходит.

Слагаемое $\gamma w P_m$ имеет мономы с нормой мультииндекса, равной $1 \cdot (k_0 + 1) + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot k_m = 1 + 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot k_m = 1 + \langle k \rangle = (m+1) + 1$, т.е. удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома P_m' также удовлетворяют требованию индукции. Мономы полинома P_m' двух различных типов:

$$k_j a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} w^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(j)})^{k_{j-1}} (w^{(j+1)})^{k_{j+1}} \dots (w^{(m-1)})^{k_{m-1}}, j = 0, 1, \dots, m-2, \quad (11)$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} (w)^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(m-1)})^{k_{m-1}} w^{(m)}. \quad (12)$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11). Она равна

$$\begin{aligned} & 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + (j+1) \cdot (k_j - 1) + (j+2) \cdot (k_{j+1} + 1) + \dots + m \cdot k_{m-1} = \\ & = 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + (j+1) \cdot k_j + (j+2) \cdot k_{j+1} + \dots + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1. \end{aligned}$$

Остается найти норму мультииндекса монома из формулы (12). Имеем

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot (k_{m-1} - 1) + (m+1) \cdot 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0 .

Из условия $\langle k \rangle = m+2$, теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1} , получаем $k_0 = m+2 - 2 \cdot k_1 - \dots - (m+1) \cdot k_m$, так как целые $k_j \geq 0$, то максимально возможное значение $k_0 = m+2$. Но моном с мультииндексом $k = (m+2, 0, \dots, 0)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), т.е. в полином P_{m+1} не входит. Значение $k_0 = m+1$ невозможно, так как не существует мультииндекса k , удовлетворяющего условию $\langle k \rangle = m+2$. Таким образом, максимальное значение $k_0 = m = (m+1) - 1$. Теорема доказана.

Лемма. Если решение уравнения (1) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведем замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются $w^{(n)}$, слагаемые полинома (8) и, возможно, $\gamma^n w^{n+1}$. В первом случае $q+n = q \cdot k_0 + (q+1) \cdot k_1 + \dots + (q+n-1) \cdot k_{n-1}$ или $q+n = (q-1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2}) + \langle k \rangle$. Так как $\langle k \rangle = n+1$, то $(q-1) \cdot (k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} = 1$ противоречит ограничению $\langle k \rangle = n+1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае $q+n = q(n+1)$, откуда $q = 1$.

Покажем, что существует $c_0 \neq 0$. Подставим в формулу (1) $w \sim c_0 (z - z_0)^{-1}$. Пусть $D_R^n w \sim S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} D_R^{n+1} w &= D_R(D_R^n w) \sim D_R(S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+1)}) = S_n(c_0)(-(n+1))(z - z_0)^{-(n+2)} + \\ &+ \gamma c_0 S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+2)} = S_n(c_0)(\gamma c_0 - n - 1)(z - z_0)^{-(n+2)}. \end{aligned}$$

Значит, $S_n(c_0)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$S_{n+1}(c_0) = (\gamma c_0 - n - 1) S_n(c_0), S_1(c_0) = c_0(\gamma c_0 - 1). \quad (13)$$

Из (13) находим условие на c_0 :

$$\prod_{j=0}^n \left(c_0 - \frac{j}{\gamma} \right) = 0. \quad (14)$$

Очевидно, что в (14) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

Исследование решений некоторых уравнений обобщенной иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса

Получение уравнений обобщенной иерархии Риккати в случае $n \geq 5$ в силу формул (1) и (2) сводится к нахождению производной от полинома и не представляет технической сложности.

Получим рекуррентное соотношение на резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии Риккати. Для этого в формулу (1) подставим $w \sim c_0 t^{-1} + \beta t^{r-1}$, получим $D_R^n w \sim S_n(c_0) t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r) t^{r-n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} D_R^{n+1} w &= \left(\frac{d}{dz} + \gamma w \right) D_R^n w \sim \left(\frac{d}{dz} + \frac{\gamma c_0}{t} + \frac{\gamma \beta}{t^{1-r}} \right) \left(S_n(c_0) t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r) t^{r-n-1} \right) = \\ &= (\gamma c_0 - n - 1) S_n(c_0) t^{-(n+2)} + \beta (\gamma S_n(c_0) + (r - n - 1 + \gamma c_0) R_n(c_0, r)) t^{r-n-2}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} D_R^{n+1} w &\sim S_{n+1}(c_0) t^{-(n+2)} + \beta R_{n+1}(c_0, r) t^{r-n-2}, \text{ т.е.} \\ R_{n+1}(c_0, r) &= \gamma S_n(c_0) + (r - n - 1 + \gamma c_0) \cdot R_n(c_0, r). \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 2. Резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии Риккати имеет вид

$$R_n(c_0, r) = \prod_{j=0}^{m-1} (r + j + 1) \prod_{s=0}^{n-m-1} (r - s - 1). \quad (16)$$

Доказательство. В зависимости от c_0 можно убедиться, например, с помощью пакета символьных вычислений Maple 9, что рекуррентному соотношению (15) удовлетворяет многочлен вида (16). Так как при фиксированном c_0 резонансный многочлен уравнения единственный, то указанный и есть искомый. Теорема доказана.

Таким образом, все резонансы, соответствующие паре (c_0, r) , являются целыми и однократными. Количество положительных равно $n - m$.

Для определения номеров коэффициентов c_j , которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-1}, \text{ где } t = z - z_0, z_0 \in \mathbb{C},$$

требуется получить корни многочлена (16).

Исследуем уравнение (4). В окрестности особой точки z_0 уравнение (4) имеет вид

$$w'' + \gamma^2 w^3 + 3\gamma w w' = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1/\gamma$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем

$$R_2(c_0, r) = (r+1)(r-1).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и один положительный $r_2 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (4), имеет вид:

$$w = \frac{1}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + \dots, \quad (17)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, коэффициенты c_j , $j > 5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 . В силу теоремы 2 [4] ряд (17) является сходящимся.

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем

$$R_2(c_0, r) = (r+1)(r+2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$ и $r_2 = -2$. Так как все резонансы отрицательны, то $c_j = 0$, $j \geq 1$. Решение, удовлетворяющее уравнению (4), имеет вид:

$$w = \frac{2}{\gamma t}, \quad (18)$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (5). В окрестности особой точки z_0 уравнение (5) имеет вид

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1/\gamma$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и два положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = \frac{1}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + \dots, \quad (19)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{3}{2}\gamma h_1 h_2 - \frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$, $c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2$, коэффициенты c_j , $j > 5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1 и h_2 .

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и один положительный $r_3 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = \frac{2}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + \dots, \quad (20)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, коэффициенты c_j , $j > 5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В силу теоремы 2 [4] ряды (19) и (20) являются сходящимися.

В третьем случае $c_0 = 3/\gamma$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем:

$$R_3(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$. Решение, удовлетворяющее уравнению (5), имеет вид

$$w = \frac{3}{\gamma t}, \tag{21}$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (6). В окрестности особой точки z_0 уравнение (6) имеет вид:

$$w^{(4)} + \gamma^4 w^5 + 10\gamma^3 w^3 w' + 10\gamma^2 w^2 w'' + 15\gamma^2 w w'^2 + 5\gamma w w''' + 10\gamma w' w'' = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и три положительных: $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = \frac{1}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + \dots, \tag{22}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}\gamma^3 h_1^4 - \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{4}{3}\gamma h_1 h_3 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = \frac{1}{6}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{6}\gamma^3 h_1^3 h_2 + \frac{5}{6}\gamma^2 h_1^2 h_3 - \frac{5}{6}\gamma h_2 h_3,$$

$$c_6 = -\frac{1}{12}\gamma^5 h_1^6 - \frac{1}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{1}{3}\gamma^3 h_1^3 h_3 + \frac{3}{4}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \gamma^2 h_1 h_2 h_3 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3 - \frac{1}{3}\gamma h_3^2,$$

коэффициенты c_j , $j > 6$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1 , h_2 , h_3 .

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ – и два положительных: $r_3 = 1$, $r_4 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = \frac{2}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + \dots, \tag{23}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3 - \frac{3}{2}\gamma h_1 h_2$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2, \quad c_6 = -\frac{3}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{3}{2}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3,$$

коэффициенты c_j , $j > 6$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1 , h_2 .

В третьем случае $c_0 = 3/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r-1).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ – и один положительный $r_4 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = \frac{3}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + \dots, \quad (24)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, $c_6 = -\gamma^5 h_1^6$, коэффициенты c_j , $j > 6$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В четвертом случае $c_0 = 4/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = 1$. Решение, удовлетворяющее уравнению (6), имеет вид

$$w = \frac{4}{\gamma t}. \quad (25)$$

где $t = z - z_0$.

В силу теоремы 2 [4] ряды (22) – (24) являются сходящимися.

Исследуем уравнение (1) при $n = 5$. В окрестности особой точки z_0 оно имеет вид:

$$w^{(5)} + \gamma^5 w^6 + 15\gamma^4 w^4 w' + 20\gamma^3 w^3 w'' + 45\gamma^3 w^2 w'^2 + 15\gamma^2 w^2 w''' + 60\gamma^2 w w' w'' + \\ + 6\gamma w w^{(4)} + 15\gamma^2 (w')^3 + 15\gamma w' w''' + 10\gamma (w'')^2 = 0. \quad (26)$$

В первом случае $c_0 = 1/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2)(r-3)(r-4).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и четыре положительных: $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 4$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{1}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \dots, \quad (27)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = h_4$,

$$c_5 = -\frac{1}{24}\gamma^4 h_1^5 - \frac{5}{12}\gamma^3 h_1^3 h_2 - \frac{5}{6}\gamma^2 h_1^2 h_3 - \frac{5}{8}\gamma^2 h_1 h_2^2 - \frac{5}{4}\gamma h_1 h_4 - \frac{5}{6}\gamma h_2 h_3, \\ c_6 = \frac{1}{24}\gamma^5 h_1^6 + \frac{3}{8}\gamma^4 h_1^4 h_2 + \frac{2}{3}\gamma^3 h_1^3 h_3 + \frac{3}{8}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 h_1^2 h_4 - \frac{1}{8}\gamma^2 h_2^3 - \frac{3}{4}\gamma h_2 h_4 - \frac{1}{3}\gamma h_3^2, \\ c_7 = -\frac{1}{48}\gamma^6 h_1^7 - \frac{7}{48}\gamma^5 h_1^5 h_2 - \frac{7}{24}\gamma^4 h_1^4 h_3 + \frac{7}{48}\gamma^4 h_1^3 h_2^2 - \frac{7}{24}\gamma^3 h_1^3 h_4 + \frac{7}{12}\gamma^3 h_1^2 h_2 h_3 + \frac{7}{16}\gamma^3 h_1 h_2^3 +$$

$$+\frac{7}{8}\gamma^2 h_1 h_2 h_4 + \frac{7}{24}\gamma^2 h_2^2 h_3 - \frac{7}{12}\gamma h_3 h_4,$$

коэффициенты c_j , $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3, h_4 .

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и три положительных $r_3 = 1$, $r_4 = 2$, $r_5 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{2}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \dots, \quad (28)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}\gamma^3 h_1^4 - \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{4}{3}\gamma h_1 h_3 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = \frac{1}{6}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{6}\gamma^3 h_1^3 h_2 + \frac{5}{6}\gamma^2 h_1^2 h_3 - \frac{5}{6}\gamma h_3 h_2,$$

$$c_6 = -\frac{1}{12}\gamma^5 h_1^6 - \frac{1}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{1}{3}\gamma^3 h_1^3 h_3 + \frac{3}{4}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \gamma^2 h_1 h_2 h_3 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3 - \frac{1}{3}\gamma h_3^2$$

$$c_7 = \frac{1}{36}\gamma^6 h_1^7 + \frac{7}{36}\gamma^4 h_1^4 h_3 - \frac{7}{12}\gamma^4 h_1^3 h_2^2 + \frac{7}{9}\gamma^2 h_1 h_3^2 + \frac{7}{12}\gamma^2 h_2^2 h_3,$$

коэффициенты c_j , $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3 .

В третьем случае $c_0 = 3/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ – и два положительных: $r_4 = 1$, $r_5 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{3}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \dots, \quad (29)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3 - \frac{3}{2}\gamma h_1 h_2$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2 \quad c_6 = -\frac{3}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{3}{2}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3,$$

$$c_7 = \frac{1}{8}\gamma^6 h_1^7 + \frac{7}{8}\gamma^5 h_1^5 h_2 + \frac{7}{8}\gamma^4 h_1^3 h_2^2 - \frac{7}{8}\gamma^3 h_1 h_2^3,$$

коэффициенты c_j , $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2 .

В четвертом случае $c_0 = 4/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r-1).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$ и один положительный $r_5 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{4}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \dots, \quad (30)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, $c_6 = -\gamma^5 h_1^6$, $c_7 = \gamma^6 h_1^7$, коэффициенты c_j , $j > 7$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В силу теоремы 2 [4] ряды (27) – (30) являются сходящимися.

В пятом случае $c_0 = 5/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5).$$

Т.е. имеем пять отрицательных резонансов: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$, $r_5 = -5$. Решение, удовлетворяющее уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{5}{\gamma t}. \quad (31)$$

где $t = z - z_0$.

Заклучение

В работе доказывается, что порядок подвижного полюса решения каждого уравнения обобщенной иерархии Риккати равен единице; все резонансы уравнений обобщенной иерархии Риккати являются целыми и однократными: у первых пяти уравнений иерархии формальные ряды Лорана содержат нужное количество произвольных постоянных: все указанные ряды Лорана являются сходящимися.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.
4. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.09.2017

Gritsuk E. V., Kuzmina E.V. The Study of the Generalized Hierarchy of the Equation of Riccati on the Painleve Property

The paper deals with the study of the generalized hierarchy of differential Riccati equations, the resonant method The resulting structure equations of the hierarchy, found order movable pole solutions, specified the explicit form of the resonance and the polynomial defined by its roots. For the first five equations was found the Laurent series with the desired number of arbitrary parameters.

УДК 517.5

И.Р. Ковальчук

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. алгебры и математического анализа

Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки

e-mail: difrivnsnu@gmail.com

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ (ψ, β) -ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ СТЕКЛОВА

Работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств сумм Стеклова на классах дифференцируемых функций. В частности, найдены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений классов (ψ, β) -дифференцируемых функций суммами Стеклова в равномерной метрике.

Под классами $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, следуя [1], будем понимать множество суммируемых функций, ряд Фурье которых имеет вид

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt,$$

где $\psi(k)$ – произвольная последовательность, $\beta \in R$, $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L$. Функцию $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$ называют (ψ, β) -производной функции $f(\cdot)$. Когда $f \in L_\beta^\psi$ непрерывна и $\|f_\beta^\psi\|_\infty < 1$, то говорят, что $f \in C_{\beta, \infty}^\psi$.

Пусть

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) -$$

частная сумма ряда Фурье. Применяя к $S_n(f, x)$ преобразование Стеклова, при $h = \frac{2\pi}{n}$ получаем

$$S_{\frac{2\pi}{n}}(f, t) = \frac{n}{2\pi} \int_{t-\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}} S_n(f, x) dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

$S_{\frac{2\pi}{n}}(f, t)$ будем называть частной суммой Стеклова функции $f(t)$, а полученный метод суммирования – методом Стеклова.

В работе [2] получены асимптотические равенства для величин:

$$\varepsilon \left(W^r H_w, S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \sup_{f \in W^r H_w} \left\| f(x) - S_{\frac{2\pi}{n}}(f, x) \right\|_C.$$

Установлено, что метод Стеклова насыщенный и имеет порядок насыщения n^{-2} .

В настоящей работе изучаются приближения суммами Стеклова классов $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. При этом мы пользуемся методами исследований интегральных представлений уклонений линейных средних рядов Фурье работ [3–5].

При исследовании величины

$$\varepsilon \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}, S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \left\| f(x) - S_{\frac{2\pi}{n}}(f, x) \right\|_C \quad (1)$$

будем считать, что функция $\psi(v)$, $\mathcal{G} \in [1, \infty)$ непрерывна, выпукла вниз и $\lim_{\mathcal{G} \rightarrow \infty} \psi(v) = 0$ ($\psi \in \mathfrak{M}$), а функция $g(v) = \mathcal{G}^2 \psi(v)$ выпукла вниз или вверх.

Теорема 1. Пусть $\beta = 0$ и $\lim_{\mathcal{G} \rightarrow \infty} g(v) > 0$, тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\varepsilon \left(C_{0, \beta}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O\left(\frac{\psi(n)}{n}\right), \quad (2)$$

где

$$A(\tau_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt \quad (3)$$

и

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sin \pi v}{\pi v}\right) \frac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & \frac{1}{n} \leq v \leq 1, \\ \frac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Если функция $\tau_n(v)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и интеграл $A(\tau_n)$ сходится, то согласно лемме 2 из [4]

$$\varepsilon \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}, S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O(\psi(n) a(\tau_n)), \quad (4)$$

где

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi} \int_{|\nu| > \frac{\pi n}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n(v) \cos\left(\mathcal{G}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt.$$

Определим функцию $\tau_n(v)$ на промежутке $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ так, чтобы ее график был касательной в точке $\frac{1}{n}$ к графику функции

$$\begin{aligned} \tau_n(v) &= \left(1 - \frac{\sin \pi v}{\pi v}\right) \frac{\psi(nv)}{\psi(n)} \\ \tau_n(v) &= \frac{n^2}{\psi(n)\pi} \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}\right) \psi(1) + \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}\right) \psi'(v)v + \\ &+ \frac{n}{\psi(n)\pi} \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}\right) (\psi(1) - \psi'(1)) - \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}\right) \psi(1). \end{aligned}$$

Тогда непрерывность $\tau_n(v)$ следует из определения.

Докажем, что

$$A(\tau_n) < C_1. \tag{5}$$

Пусть сначала $g(v) = \mathcal{G}^2\psi(v)$ выпукла вверх. Представим $\tau_n(v)$ в виде $\tau_n(v) = \Phi_n(v) - R_n(v)$, где $\Phi_n(v)$ непрерывная выпуклая вниз, монотонно убывающая функция, совпадающая на $[1, +\infty)$ с $\frac{\psi(nv)}{\psi(n)}$, а на $[0, 1]$ – с ее касательной:

$$\Phi_n(v) = \begin{cases} \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \mathcal{G} + \frac{\psi(n) - n\psi'(n)}{\psi(n)}, & 0 \leq v \leq 1, \\ \frac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \geq 1. \end{cases}$$

Поэтому функция $R_n(\mathcal{G}) = \Phi_n(\mathcal{G}) - \tau_n(\mathcal{G})$ непрерывная, неотрицательная, невозрастающая, выпуклая вниз.

Учитывая (3), имеем

$$\begin{aligned} t(\tau_n) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} (\Phi_n(v) - R_n(v)) \cos vtdv \right| dt \leq \\ &\leq 2 \left(\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt + \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} R_n(v) \cos vtdv \right| dt \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vtdv = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \sin vtdv. \tag{7}$$

Функция $-\Phi'_n(v)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает. Следовательно, при любом $t > 0$ $\frac{1}{t} \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \sin vtdv > 0$. Поэтому

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{1}{t} \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \sin vtdv \right| dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \frac{\sin vt}{t} dv \right) dt. \tag{8}$$

Поскольку (при каждом $n \in N$) функция $-\Phi'_n(v) \frac{\sin vt}{t}$ суммируема на $[0, +\infty) \times [0, A]$

и $\int_0^{\infty} \frac{\sin vt}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & v > 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases}$, то, применяя теоремы Фубини и Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \left(\int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \frac{\sin vt}{t} dv \right) dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \left(\int_0^A \frac{\sin vt}{t} dt \right) dv = \\ &= \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin vt}{t} dt \right) dv = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} (-\Phi'_n(v)) dv = \frac{\pi}{2} \Phi_n(0) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассуждая аналогічна, можна даказаць, што

$$\int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} R_n(v) \cos vtdv \right| dt = \frac{\pi}{2} R_n(0) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right) - \frac{n}{\psi(n)\pi} \left(\left(\frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right) (\psi(1) - \psi'(1)) - \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \psi(1) \right). \quad (10)$$

Так как функция $v^2\psi(n)$ при $v \geq 1$ не убывает, то

$$(v^2\psi(v))' = 2v\psi(v) + \mathcal{G}^2\psi'(v) > 0$$

и

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \leq 2. \quad (11)$$

Учитывая разложения в степенные ряды функций $\sin x$ и $\cos x$, получаем

$$\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi^3}{n^3 6} - \frac{\pi^5}{n^5 5!} + \dots = \frac{\pi^3}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

$$\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{n^3 3!} + \frac{\pi^5}{n^5 5!} - \dots - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi^3}{n^3 2!} - \frac{\pi^5}{n^5 4!} + \dots = \frac{\pi^3}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Отсюда

$$\left| \frac{n}{\pi\psi(n)} \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right) (\psi(1) - \psi'(1)) - \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \psi(1) \right| < C_2. \quad (12)$$

Объединяя соотношения (6) – (12), убеждаемся в справедливости оценки (5).

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве соотношения (9), получаем

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt < \frac{\pi}{2n} \Phi_n(0) = \frac{\pi}{2n} \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right). \quad (13)$$

Аналогично

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} R_n(v) \cos vtdv \right| dt < \frac{\pi}{2n} R_n(0) = \frac{\pi}{2n} \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right) - \frac{n}{\psi(n)\pi} \left(\left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right) (\psi(1) - \psi'(1)) - \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \psi(1) \right). \quad (14)$$

Так как

$$a(\tau_n) = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt \leq \frac{2}{\pi} \left(\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt + \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} R_n(v) \cos vtdv \right| dt \right),$$

то из соотношений (11) – (14) следует, что

$$a(\tau_n) = \frac{C_3}{n}. \quad (15)$$

Пусть теперь функция $\mathcal{G}^2\psi(v)$ выпукла вниз и $\lim_{g \rightarrow \infty} v^2\psi(v) = \infty$ или $\lim_{g \rightarrow \infty} v^2\psi(v) = C > 0$.

Поскольку $\tau_n(v)$ непрерывна на $[0, \infty)$, $\tau'_n(v)$ непрерывна на $[0, 1) \cup (1, \infty)$, $\lim_{g \rightarrow \infty} \tau_n(v) = \lim_{g \rightarrow \infty} \tau'_n(v) = 0$, то, дважды интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^\infty \tau_n(v) \cos vtdv = -\frac{1}{t^2} \left(\tau'_n(0) + (\tau'_n(1+0) - \tau'_n(1-0)) \cos t + \int_{\frac{1}{n}}^1 \tau''_n(v) \cos vtdv \right). \quad (16)$$

Так как $\tau'_n(0) - \tau'_n(\frac{1}{n}) = 0$, $\tau'_n(1+0) - \tau'_n(1-0) = -1$, $\tau''_n(v) > 0$ при $v \in [\frac{1}{n}, \infty)$,

то из (16) имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \tau_n(v) \cos vtdv \right| &\leq \frac{1}{t^2} \left(\tau'_n(0) + |(\tau'_n(1+0) - \tau'_n(1-0)) \cos t| + \int_{\frac{1}{n}}^1 \tau''_n(v) dv \right) = \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\tau'_n(0) + |(\tau'_n(1+0) - \tau'_n(1-0)) \cos t| + \tau'_n(1-0) - \tau'_n(\frac{1}{n}) - \tau'_n(1+0) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{t^2} |\tau'_n(1+0) - \tau'_n(1-0)| (|\cos t| + 1) \leq \frac{2}{t^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из неравенства (17) следует, что

$$a(\tau_n) = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left| \int_0^\infty \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt < \frac{C_4}{n} \quad (18)$$

и

$$\int_{|t| \geq \alpha} \left| \int_0^\infty \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt \leq \frac{4}{\alpha}. \quad (19)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^\alpha \left| \int_0^\infty \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt &= 2 \int_0^\alpha \left| \int_0^\infty (\Phi_n(v) - R_n(v)) \cos vtdv \right| dt \leq \\ &\leq 2 \left(\int_0^\alpha \left| \int_0^\infty \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt + \int_0^\alpha \left| \int_0^1 \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt + \int_0^\alpha \left| \int_0^1 \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В силу ограниченности $\tau_n(v)$

$$\int_0^\alpha \left| \int_0^1 \tau_n(v) \cos vtdv \right| dt < \int_0^\alpha \left(\int_0^1 |\tau_n(v)| dv \right) dt < C_5. \quad (21)$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству (9), и учитывая, что $\int_0^{\alpha} \frac{\sin vt}{t} dt < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\int_0^{\alpha} \left| \int_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt < \pi \Phi_n(0) = \pi \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right). \quad (22)$$

Если $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \vartheta^2 \psi(\vartheta) = \infty$, то $\vartheta^2 \psi(\vartheta)$ возрастает и

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} < 2. \quad (23)$$

Если же $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \vartheta^2 \psi(\vartheta) = C > 0$, то $\vartheta^2 \psi(\vartheta)$ можно представить в виде суммы $\vartheta^2 \psi(\vartheta) = C + h(\vartheta)$, где $h(\vartheta)$ выпукла вниз и $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} h(\vartheta) = 0$. Значит, $(\vartheta^2 \psi(\vartheta))' = C - h(\vartheta) + \vartheta h'(\vartheta) > 0$ или $3\vartheta^2 \psi(\vartheta) + \vartheta^3 \psi'(\vartheta) > 0$.

Отсюда

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} < 3. \quad (24)$$

Так как $|\Phi_n(v)| = \Phi_n(v) < \Phi_n(0) = 1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}$, то, учитывая (23), (24),

$$\int_0^{\alpha} \left| \int_0^1 \Phi_n(v) \cos vtdv \right| dt < \int_0^{\alpha} \left(\int_0^1 |\Phi_n(v)| dv \right) dt < C_6. \quad (25)$$

Из неравенств (19) – (25) следует (5). Учитывая (5), (15), (18), по лемме 2 получаем равенство (2).

Теорема доказана.

В случае $\beta \neq 0$ при помощи леммы 2 рассуждениями, близкими к проведенным выше, можно получить теоремы.

Теорема 2. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, $\int_0^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv < \infty$, функция $g(v)$ выпукла вниз и $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} g(\vartheta) = \infty$,

то при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O \left(\frac{\psi(n)}{n} \right).$$

Теорема 3. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, функция $\vartheta^2 \psi(\vartheta)$ выпукла вверх, $\int_1^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv < \infty$

и $\int_1^n \psi(v) dv = O(n^2 \psi(n))$, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Если $\psi(\cdot)$ такова, что порядок приближения суммами Стеклова на $C_{\beta,\infty}^\psi$ близок к порядку насыщения, при нахождении асимптотических равенств для величины (1) воспользуемся леммой 1.6 из работы [5].

Лемма. Пусть $\psi \in F_1$, т.е. $\psi \in \mathfrak{M}$ и при $n \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$n|\psi'(n)| = O(\psi(n)); \int_n^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv = O(\psi(n)).$$

Если $\tau_n(\mathcal{G})$ имеет абсолютно непрерывную производную $\tau'_n(v)$ на $[0,1]$, $\tau_n(0) = 0$ и сходятся интегралы $\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv$ и $\int_0^1 \frac{|\lambda(v)|}{1-v} dv$, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{\beta,\infty}^\psi; U(\lambda)) &= \psi(n) \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv + \\ &+ O\left(\psi(n) \left(\int_0^1 \frac{|\lambda(v)|}{1-v} dv + \int_0^1 v(1-v)|\tau_n''(v)| dv + \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv + 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Теорема 4. Пусть функция $\psi \in \mathfrak{M}$ такова, что $g(v) = \mathcal{G}^2\psi(v)$ выпукла и $\lim_{g \rightarrow \infty} v^2\psi(v) = C > 0$ или если $\lim_{g \rightarrow \infty} g(v) = \infty$, то функция выпукла вверх и, кроме того,

$$\frac{1}{\psi(n)} \int_n^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv = O(1), \quad (27)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2\psi(n)} \int_1^n \mathcal{G}\psi(v) dv = \infty. \quad (28)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\varepsilon\left(C_{\beta,\infty}^\psi; S_{\frac{2\pi}{n}}\right) = \frac{\pi}{3} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{1}{n^2} \int_1^n v\psi(v) dv + O(\psi(n)). \quad (29)$$

Доказательство. Из соотношения (28) следует, что

$$n|\psi'(n)| = O(\psi(n)), \quad (30)$$

а из (27) и (29) делаем вывод, что $\psi \in F_1$.

Докажем, что функция

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \frac{n^3}{\pi\psi(n)} \left(\left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \psi(1) + \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right) (\psi'(1) - \psi(1)) \right) v^2 + \\ + \frac{n^2}{\pi\psi(n)} \left(\left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right) (\psi'(1) - 2\psi(1)) - \left(\sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \psi(1) \right) v; & v \in \left(0, \frac{1}{n} \right), \\ \left(1 - \frac{(\sin \pi v)}{\pi v} \right) \frac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right], \\ \frac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \in [1, +\infty], \end{cases}$$

удовлетворяет условиям леммы.

Из определения видно, что $\tau_n(v)$ и $\tau'_n(v)$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$.

Поскольку $\lambda_n(v) = \frac{\sin \pi v}{\pi v}$, то в силу ограниченности подынтегральной функции

$$\int_0^1 \frac{|\lambda_n(v)|}{1-v} dv = \int_0^1 \frac{\sin \pi v}{\pi v(1-v)} dv = O(1). \quad (31)$$

Используя определение функции $\tau_n(v)$, имеет

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv = O\left(\frac{1}{n^2 \psi(n)}\right). \quad (32)$$

Так как $\int_1^n v^3 \psi(v) dv = O(n^4 \psi(n))$, то

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv &= \frac{1}{\psi(n)} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\left(1 - \frac{\sin \pi v}{\pi v}\right) \psi(nv)}{v} dv = \frac{1}{\psi(n)} \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{\sin \frac{\pi v}{n}}{\frac{\pi v}{n}}\right) \psi(v)}{v} dv = \\ &= \frac{1}{\psi(n)} \int_1^n \left(\frac{\pi^2 v^2}{3! n^2} - \frac{\pi^4 v^4}{5! n^4} + \dots\right) \psi(v) dv = \frac{\pi^2}{6n^2 \psi(n)} \int_1^n v \psi(v) dv + \\ &+ O\left(\frac{1}{n^4 \psi(n)} \int_1^n v^3 \psi(v) dv\right) = \frac{\pi^2}{6n^2 \psi(n)} \int_1^n v \psi(v) dv + O(1). \end{aligned} \quad (33)$$

Из соотношений (31) – (33) следует, что интегралы $\int_0^1 \frac{|\lambda_n(v)|}{1-v} dv$ и $\int_0^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv$ сходятся.

Таким образом, все условия леммы выполнены. Значит, для $\varepsilon \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}}\right)$ имеет место равенство (26).

Поскольку $\int_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv < \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv$, то

$$\int_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v} dv = O\left(\frac{1}{n^2 \psi(n)}\right). \quad (34)$$

Используя определение функции $\tau_n(v)$, находим, что

$$\int_0^1 v(1-v) |\tau_n''(v)| dv = O(1). \quad (35)$$

Подставляя оценки (31), (34), (35) в (26), получаем асимптотическое равенство (29). Теорема доказана.

Теорема 5. Если функция $g(v)$ выпукла вниз, $\lim_{g \rightarrow \infty} g(v) = 0$, а интеграл $\int_1^{\infty} g(v) dv$ расходится, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \frac{\pi}{3} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{1}{n^2} \int_1^n v \psi(v) dv + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для доказательства этой теоремы нужно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем случае, и учесть, что $\psi(n) = o(v)^{-2}$.

Если $\psi(v)$ такова, что для величины (1) на классах $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ наступает насыщение, поступая так же как при доказательстве теоремы 2.5 работы [6], получаем утверждение.

Теорема 6. Пусть $v\psi(v)$ суммируема на $[1, \infty)$, а $g(v)$ выпукла вниз на $[1, \infty)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon \left(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \frac{\pi^2}{6n^2} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f''\| + \gamma(n),$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 0(\psi(n) \ln n), & \text{если } k^4 \psi(k) \text{ возрастает,} \\ O\left(\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{\psi(k) k^4}{n-k}\right), & \text{если } k^4 \psi(k) \text{ убывает.} \end{cases}$$

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи поведения на бесконечности функции $v^2\psi(v)$ при условии ее выпуклости.

Замечание. Для верхних граней уклонений сумм Стеклова, как и для сумм Рогозинского [6], можно получить аналоги теорем 1–6 в метрике L , а для верхних граней уклонений на классах $L_{\beta, p}^{\psi}$ – точные порядковые оценки в метрике L_s , $1 < p, s < \infty$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. Сапилиди, Т. М. Приближение функций классов Гельдера суммами Стеклова / Т. М. Сапилиди. – Киев, 1978. – 48 с.
3. Степанец, А. И. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье / А. И. Степанец. – Киев, 1983. – 57 с.
4. Рукасов, В. И. Приближение периодических функций линейными средними и их рядов Фурье / В. И. Рукасов. – Киев, 1983. – 55 с.
5. Бушев, Д. Н. Приближение классов непрерывных функций суммами Зигмунда / Д. Н. Бушев. – Киев, 1984. – 64 с.
6. Ковальчук, И. Р. Приближение классов (ψ, β) -дифференцируемых функций полиномами Рогозинского / И. Р. Ковальчук // Приближение классов (ψ, β) -дифференцируемых функций полиномами Рогозинского и некоторые обратные теоремы. – Киев, 1988. – С. 3–47.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.06.2017

Kovalchuk I.R. Class Approximation (ψ, β) of Differentiated Functions by Steklov's Sums

The work is devoted to the study of approximative properties of Steklov sums on the classes of differentiable functions. In particular, the asymptotic equalities for the exact upper bounds of the approximations of the classes (ψ, β) -differentiable functions by Steklov sums in the uniform metric are found.

УДК 517.927

И.М. Конет¹, К.Г. Геселева²

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проректор по научной работе
 Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко,
 заслуженный деятель науки и техники Украины
²аспирант 3 года обучения каф. математики
 Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко
 e-mail: geseleva1702@gmail.com

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован коллокационный и коллокационно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

Введение

При исследовании различных задач теоретического и прикладного характера широкое применение имеют интегральные и интегро-функциональные уравнения. Поскольку построение точных решений таких уравнений возможно только в отдельных случаях, то большое значение приобретают методы построения приближенных решений этих уравнений. Одним из эффективных методов является коллокационный метод и одно из его обобщений – коллокационно-итеративный метод.

В статье рассматриваются вопросы возможности применения этих методов к некоторым типам интегро-функциональных уравнений.

Рассмотрим некоторые классы интегро-функциональных уравнений, приближенные решения которых можно построить коллокационным и коллокационно-итеративными методами.

Линейные интегро-функциональные уравнения

В пространстве $L_2(a; b)$ действительных и измеримых на промежутке $(a; b)$ функций, суммируемых с квадратом, рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x; t)y(t)dt, x \in (a; b), \quad (1)$$

$$y(x) = 0, x \notin (a; b),$$

где $f(x)$ известная, а $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a; b)$. Относительно функций $h(x), p(x), K(x; t)$ предполагаем, что они, соответственно, на промежутке $[a; b]$ и в квадрате $[a; b]^2 = [a; b] \times [a; b]$ удовлетворяют условиям:

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty, \quad (2)$$

$$h(x) - \text{дифференцируема на } [a; b] \text{ и } h'(x) \geq l > 0, x - h(x) \geq \sigma > 0, \quad (3)$$

$$\iint_{a a}^{b b} K^2(x; t) dx dt = B^2 < \infty. \quad (4)$$

Покажем, что уравнение (1) при выполнении условий (2) – (4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3; 5]. Рядом с интегральным вполне непрерывным оператором K , который имеет вид

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)dt, \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

будем рассматривать оператор S такой, что

$$(Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a, h^{-1}(a)], \\ v(x) - p(x)v(h(x)), x \in [h^{-1}(a), b], \end{cases} \quad (5)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из $L_2(a;b)$.

Отметим, что этот оператор, как и оператор K , действует с $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показать, что оператор S линейный. Условия (2), (3) гарантируют его ограниченность. Действительно,

$$S = \sup \frac{(Sv)(x)}{v(x)} \leq 1 + \left| \frac{p^2(x)}{h'(x)} \right|^{1/2} \leq 1 + \frac{\bar{p}}{\sqrt{l}} < \infty,$$

где \sup берется по $v(x) \in L_2(a;b), v(x) \neq 0$.

Эти же условия говорят о том, что оператор S обратимый. Обратный к нему оператор имеет вид

$$(S^{-1}v)(x) = \begin{cases} v(x), x \in [a, h^{-1}(a)], \\ v(x) + \sum_{i=1}^s v(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), \\ x \in \Delta s, s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\Delta s = [c_{s-1}, c_s], c_0 = a, c_s = h^{-1}(c_{s-1}), c_m = b, h^k(x) = h(h^{k-1}(x)), s = \overline{1, m}.$$

Иными словами, выражение (6) – это решение функционального уравнения

$$\begin{aligned} y(x) - p(x)y(h(x)) &= u(x), x \in [a; b], \\ y(x) &= 0, x \notin [a; b], \end{aligned}$$

где $u(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции, с помощью пошагового метода. Условие (3)

гарантирует тот факт, что количество шагов m конечно и $m \leq \frac{b-a}{\sigma}$.

Нетрудно убедиться в том, что оператор S^{-1} , как и оператор S , линейный и ограниченный. Таким образом, учитывая вышесказанное, мы можем рассматривать уравнение (1) как операторное уравнение

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \quad (7)$$

где $f(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$.

Пусть $(Sy)(x) = u(x)$, тогда $y(x) = (S^{-1}u)(x)$, и мы от уравнения (7) приходим к уравнению

$$u(x) = f(x) + (Tu)(x). \quad (8)$$

Оператор $T = KS^{-1}$ Фредгольмов как суперпозиция Фредгольмова и линейного ограниченного операторов. Иными словами, применив упомянутую выше замену, мы превращаем интегро-функциональное уравнение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)dt \quad (9)$$

с вполне непрерывным интегральным оператором T , ядро которого

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x;(h^{-1})^k(t)) \prod_{k=1}^i p[(h^{-1})^k(t)], & t \in \Delta s, \\ K(x;t), & t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a; b), \end{cases}$$

где $(h^{-1})^k(t) = h^{-1}((h^{-1})^{k-1}(t))$.

Метод коллокации решения интегро-функционального уравнения

Рассмотрим уравнения

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)dt, x \in (a; b); y(x) = 0, x \notin (a; b). \quad (10)$$

Идея метода относительно уравнения (10) заключается в том, что приближенное решение $y_m(x)$ ищем в виде

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x)$$

и определяем из функционального уравнения

$$\begin{aligned} y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) &= f(x) + \int_a^b K(x;t)y_m(t)dt, \\ y_m(x) &= 0, x \notin [a; b], \end{aligned} \quad (11)$$

$\{\varphi_j(x)\}$ – система линейно независимых на $[a; b]$ функций $j = \overline{1, m}$, а неизвестные параметры $a_j = a_j(n)$ находим из условия

$$\gamma_m(x_i) = 0, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n}, \quad (12)$$

$$\gamma_m(x) = y_m(x) - p(x)y_m(h(x)) - f(x) - \int_a^b K(x;t)y_m(t)dt. \quad (13)$$

Для нахождения параметров a_j получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j = b_i, i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

в которой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - T_j(x_i), b_i = f(x_i), i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Систему уравнений (14) целесообразно записать в векторном виде $\Lambda a_k = b_k$.

Коллокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения

Применим коллокационно-итеративный метод к уравнению (10). Приближенное решение $y_k(x)$ определяем согласно формул

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt, x \in (a;b), \quad (16)$$

$$y_k(x) = 0, x \notin [a;b],$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + \omega_k(x), \quad (17)$$

$$\omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x),$$

$$\eta_j(x) = (S^{-1}\varphi_j)(x).$$

Неизвестные параметры $a_j^k = a_j^k(n)$ находим из условия $\gamma_k(x_i) = 0$, где $x_i \in [a;b]$, $i = \overline{1, n}$ узлы коллокации и

$$\gamma_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - y_k(x) + p(x)y_k(h(x)), x \in (a;b). \quad (18)$$

Введя обозначения $\mathcal{E}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt - y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$ и подставляя функцию $z_k(x)$, определенную формулой (17), в выражение (18) для поиска параметров a_j^k , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij}^k a_j^k = b_i^k, i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

где

$$\beta_{ij}^k = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i), b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i),$$

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt, j = \overline{1, n},$$

$$\eta_j(x) = (S^{-1}\varphi_j)(x),$$

$$b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему уравнений (19) можно записать в виде $\Lambda a_k = b_k$, где b_k, a_k записаны в векторном виде и Λ – матрица, составленная из элементов β_{ij} .

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно взять как функцию $y_k(x)$, так и функцию $z_k(x)$. Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (16) – (18) при $\omega_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$ приближения $y_k(x)$ находятся методом последовательных приближений.

Алгоритмы (11) – (13) и (16) – (18) сводят рассматриваемую задачу к коллокационному и коллокационно-итеративному методу решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, для которых получены условия сходимости [2]. В частности, имеет место теорема.

Теорема 1. Пусть соблюдается условие

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b |T(x, t) - T(x_0, t)| dt = 0, \forall x_0 \in [a, b]$$

и единица – регулярное значение интегрального уравнения (9). Пусть система функций $\{\varphi_i(x)\}$ и узлы $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$ выбраны таким образом, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |T(x, t) - H_n(x, t)| dt = 0,$$

где функция H_n выражается формулой $H_n(x, t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) T(x_i, t)$.

Тогда $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. существует такой номер n_0 , что для всех фиксированных $n \geq n_0$ последовательность $\{y_k(x)\}$ согласно методу (17) – (19) строится однозначно и равномерно сходится к решению $y^*(x)$ уравнения (9).

Нестационарный коллокационно-итеративный метод

Пусть, как и раньше, $\{\varphi_i(x)\}$ – заданная ортогональная и полная в $L_2(a; b)$ система, а $\{P_k\}$ – последовательность проектирующих операторов, определяемых посредством формулы

$$(P_k v)(x) = \int_a^b P_k(x, t) v(t) dt, \forall v(x) \in L_2(a, b), \quad (20)$$

в которой

$$P_k(x, t) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(t), \mu_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \quad (21)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n_k > n_0 = n \geq 1, n_{k_1} \leq n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$.

Очевидно, проекционные операторы (20) ортогонально проектируют пространство $L_2(a; b)$ на его подпространство $L_2^k(a; b)$, причем $L_2^{k-1}(a; b) \subset L_2^k(a; b), k = 1, 2, 3, \dots$.

Суть предлагаемого метода применительно к уравнению (10) состоит в следующем. Пусть, исходя из начального приближения $y_0(x) \in L_2(a, b)$ и функции $s_0(x)$ такой, что

$$\begin{aligned} y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) &= s_0(x), x \in (a, b), \\ y_0(x) &= 0, x \notin (a, b), \end{aligned} \quad (22)$$

мы нашли приближение $y_{k-1}(x)$ и функцию $s_{k-1}(x)$.

Вычисляем функцию

$$\tilde{s}_{k-1}(x) = \int_a^b P_{k-1}(x, t)s_{k-1}(t)dt,$$

где $P_{k-1}(x, t)$ имеет вид (21). Решаем уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k-1}(x) - p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x)) &= s_{k-1}(x), x \in (a, b), \\ \tilde{y}_{k-1}(x) &= 0, x \notin (a, b). \end{aligned} \quad (23)$$

Приближение $y_k(x)$ определяем как решение уравнения

$$\begin{aligned} y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) &= f(x) + \int_a^b K(x; t)\tilde{z}_k(t)dt, x \in (a, b), \\ y_k(x) &= 0, x \notin (a, b), \end{aligned} \quad (24)$$

в котором

$$\tilde{z}_k(x) = \tilde{y}_{k-1}(x) + \omega_k(x), \omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), x \notin (a, b). \quad (25)$$

Неизвестные параметры a_j^k находим из условия

$$\tilde{r}_k(x_i) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

где

$$\tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t)\tilde{z}_k(t)dt - \tilde{z}_k(x) + p(x)\tilde{z}_k(h(x)), \quad (27)$$

система функций $\{\eta_i(x)\}$ в выражениях (25), (26) определяются из уравнений, которые в нашем случае принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_i(x) - p(x)\eta_i(h(x)) &= \varphi_i(x), x \in (a, b), \\ \eta_i(x) &= 0, x \notin (a, b); \end{aligned} \quad (28)$$

где система функций $\{\varphi_i(x)\}$, как уже отмечалось, ортогональная и полная в пространстве $L_2(a; b)$.

Вводя обозначение

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t) \tilde{y}_k(t) dt - \tilde{y}_{k-1}(x) + p(x) \tilde{y}_{k-1}(h(x))$$

и подставляя функцию $\tilde{z}_k(x)$, определяемую формулой (25), в выражение (27), а затем полученный результат – в условие (26) для нахождения параметров a_j^k , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, i = \overline{1, n}, \quad (29)$$

в которой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \int_a^b \{\varphi_j(x) - K_j(x)\} \psi_i(x) dx, i, j = \overline{1, n}, \quad (30)$$

и

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), i = \overline{1, n}. \quad (31)$$

Как и раньше, систему уравнений (29) будем записывать в векторном виде $\Lambda a_k = b_k$.

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно брать любую из функций $y_k(x), \tilde{y}_k(x), \tilde{z}_k(x)$.

Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (22) – (27) при $s_0(x) = 0$ приближение $\tilde{z}_1(x)$ совпадает с приближением, построенным по колокационному методу, приближение $y_1(x)$ – с приближением, построенным по улучшенному колокационному методу, а при $\omega_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$ приближение $y_k(x)$ находится по нестационарному методу последовательных приближений.

Алгоритм (22) – (27) можно свести к нестационарному колокационно-итеративному методу решения интегро-функционального уравнения (1). В самом деле, формулы (22) – (24) и (27) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (S\tilde{y}_{k-1})(x) &= (P_{k-1}S_{k-1})(x), \\ (Sy_k)(x) &= f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x), \\ \tilde{r}_k &= f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x) - (S\tilde{y}_{k-1})(x) - (S\omega_k)(x). \end{aligned}$$

С помощью этих формул условие (26) легко преобразуется к виду:

$$(Sy_k - S\tilde{y}_{k-1} - S\omega_k)(x_i) = 0, i = \overline{1, n}.$$

Теперь положим

$$u_k(x) = s_k(x) = (Sy_k)(x), \alpha_k(x) = (S\omega_k)(x), \quad (32)$$

откуда следует

$$y_k(x) = (S^{-1}u_k)(x), \omega_k(x) = (S^{-1}\alpha_k)(x). \quad (33)$$

На основании формул (32), (33) и соотношения (28) получаем:

$$u_k(x) = f(x) + (TP_{k-1}u_{k-1})(x) + (T\alpha_k)(x), \quad (34)$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \varphi_j(x), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (35)$$

$$\int_a^b \{u_k(x) - (P_{k-1}u_{k-1})(x) - \alpha_k(x)\} \varphi_i(x) dx = 0, i = \overline{1, n}. \quad (36)$$

Теперь видно, что соотношения (34) – (36) – это нестационарный колокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения (1). В работах [1; 3] установлены различные достаточные условия сходимости и оценки погрешности этого метода для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из изложенных там результатов, в частности, следует утверждение.

Теорема 2. Если единица не является точкой спектра интегрального оператора T , при $k \rightarrow \infty$, и система функций $\{\varphi_i(x)\}$ полна в пространстве $L_2^k(a; b)$, то существует такой номер n , при котором нестационарный колокационно-итеративный метод (22) – (27) сходится, причем быстрота сходимости увеличивается с ростом n .

Заключение

Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован колокационный и колокационно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г. М. О сходимости и устойчивости метода колокации / Г. М. Вайникко // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 2. – С. 244–254.
2. Лучка, А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1980. – 264 с.
3. Лучка, А. Ю. Быстрота сходимости одного проекционно-итеративного метода, основанного на тригонометрической колокации, для линейных интегральных уравнений / А. Ю. Лучка, Е. М. Луцев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 10–13.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.10.2017

Konet I., Geseleva K. Collocation and Collocation-Iterative Methods of Solving Integrally-Functional Equations

Approximate methods for solving integral-functional equations are considered in the article. Collocation and collocation-iterative (stationary and non-stationary) methods for finding approximate solutions of integral-functional equations are investigated.

УДК 517.9

В.В. Собчук¹, И.В. Хитько²¹канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. кафедры дифференциальных уравнений и математической физики
Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки²канд. физ.-мат. наук, инженер-программист Симкорп Украина, ОООe-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ
И ЯВНЫЙ ВИД ТОЧЕК ПОРЯДКА ШАРКОВСКОГО**

Для уравнения Лянара с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени показано, что задача о существовании его периодических решений эквивалентна задаче о существовании периодических точек некоторого отображения отрезка прямой в себя. Даны примеры функций импульсного воздействия $I(\dot{x})$, при которых уравнения Лянара имеют периодические решения и для которых имеет место сосуществование периодических решений согласно порядку Шарковского. Последнее обеспечивается изменениями параметра в функции $I(\dot{x})$.

В связи с развитием современного естествознания и техники возникает необходимость исследования нелинейных динамических систем, для которых присущи кратковременные (мгновенные) процессы или которые находятся под действием внешних сил, длительностью которых можно пренебречь при составлении соответствующих математических моделей.

Такие системы встречаются, например, в механике, химической технологии, медицине и биологии, динамике летательных аппаратов, математической экономике, теории управления и в иных областях науки и техники, где приходится изучать системы, пребывающие под воздействием кратковременных (импульсных) внешних сил, которые называют системами с импульсным воздействием.

Как оказалось, наличие импульсного воздействия может существенно усложнить поведение траекторий таких систем даже для случаев сравнительно простых дифференциальных уравнений. В общем случае при наличии импульсного воздействия поведение решений дифференциальных уравнений (даже линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами) может быть существенно нелинейным и значительно отличаться от поведения таких систем при отсутствии импульсного воздействия.

Рассмотрим динамическую систему, движение в которой описывается дифференциальным уравнением Лянара вида

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1)$$

($x \in M \subset R^3$, M – фазовое пространство системы (1), $t \in R$ – время) и которая подвержена влиянию мгновенных сил, которые определяются некоторым оператором A_t . В моменты прохождения движущейся точкой некоторого фиксированного положения $x = x_*$ он действует согласно правилу $(x, t) \rightarrow (t, A_t x)$. Импульсное воздействие в такой системе происходит в нефиксированные моменты времени и увеличивает количество движения в системе на некоторую величину $I(\dot{x})$, которая зависит от скорости движущейся точки в момент прохождения ею положения $x = x_*$. Далее положим, что $I(y)$, где $y = \dot{x}$ как функция своего аргумента непрерывна.

Если t_* некоторый момент времени, в который движущаяся точка достигает положения $x = x_*$, в котором подвергается импульсному воздействию, то импульсные возмущения движущейся точки записывают [1]:

$$\Delta \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_*} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_*+0} - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_*-0} = A_t x - x = I(\dot{x}). \quad (2)$$

Описания физической интерпретации уравнения Льенара и характеристика его фазового портрета детально изучена в [3].

Уравнение (1) записывается эквивалентным образом в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем используются обозначения:

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s) ds.$$

Определение. Дифференциальное уравнение (1), удовлетворяющее условию

$$x g(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0 \quad (4)$$

и

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x), \quad (5)$$

называется согласно Опялю дифференциальным уравнением типа S .

Обозначим $y_* = \sqrt{2G(x_*)}$. Допустим, что:

1. Дифференциальное уравнение Льенара (1) является уравнением типа S и удовлетворяет условию существования и единственности решения.
2. Прямая $x = x_*$ трансверсальна потоку (1) везде, кроме траектории, для которой прямая $x = x_*$ является касательной. В этом случае считаем, что $I(0) = 0$.
3. Оператор импульсного воздействия является непрерывным относительно своих переменных.

Допустим также, что $|\min G(x)| > 1$.

При изучении движение фазовой точки системы (1), (2) в [3] построено отображение Пуанкаре для прямой $x = x_*$, которое используется для исследования вопроса о существовании периодических решений задачи (1), (2). Также показано, что задача о существовании периодических решений системы (1), (2) сводится к задаче о существовании периодических и неподвижных точек некоторого отображения интервала в этот же интервал, которое определяется формулой

$$f(y) = -y + I(-y), \quad (6)$$

где $I(-y) < y$, $y \neq 0$, $y = \dot{x}$.

Рассмотрим задачу о существовании периодических решений задачи (1), (2), когда функция импульсного воздействия имеет вид:

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda - 1)y - \lambda y_*, & y \geq 0, \\ -(\lambda + 1)y - \lambda y_*, & y < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $y = \dot{x}$, λ – некоторый параметр, причем $0 < \lambda \leq |\min G(x)|$.

Отображение

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda (y_* - y), & y \geq 0, \\ \lambda (y_* + y), & y < 0 \end{cases} \quad (8)$$

непрервно для всех $y \in R$ и имеет такие свойства: при $0 < \lambda < 1$ существует только одна неподвижная точка, которая является устойчивой; при $1 < \lambda \leq |\min G(x)|$ – две неподвижные точки:

$$\left\{ \frac{\lambda}{1-\lambda} y_* \right\} \text{ и } \left\{ \frac{\lambda}{1+\lambda} y_* \right\},$$

периодическую точку периода 2:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda^2} y_* \right\}.$$

Точки периода 3 для отображения (8) образуют два цикла:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_* \right\},$$

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 + \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_* \right\}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с импульсным воздействием (2), (7), где $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \leq |\min G(x)|$, имеет $T(n)$ -периодические решения такие, что фазовая точка данной системы при движении вдоль соответствующей траектории подвергается ровно n импульсным воздействиям за период, где n – произвольное натуральное число [2; 3]. Точки, задающие циклы, которые соответствуют периодическим решениям задачи (1), (7), удовлетворяют порядку Шарковского.

Покажем, что точки, утворюющие периодическим циклам для отображения (8), необходимо искать среди дробей вида

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \quad (9)$$

где $P^n(\lambda)$ – многочлен вида $P^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda$, $a_i = \pm 1$, $i = \overline{2, n}$.

Докажем равенство (9), используя метод математической индукции. В частности, при $n = 2$ получим:

$$y = \lambda (y_* \pm \lambda (y_* \pm y)) = (\lambda \pm \lambda^2) y_* \pm \lambda^2 y,$$

$$(\lambda^2 \pm \lambda) y_* = (1 \pm \lambda^2) y,$$

$$y = \frac{\lambda \pm \lambda^2}{1 \pm \lambda^2} y_* = \frac{P^2(\lambda)}{1 \pm \lambda^2} y_*.$$

Допустим, что (9) справедливо для $n = k$, т.е. справедливо равенство:

$$y = \frac{P^k(\lambda)}{1 \pm \lambda^k} y_*. \quad (10)$$

Используя (10), докажем, что равенство (9) справедливо для $n = k + 1$.
 Запишем (10) в виде $(1 \pm \lambda^k)y = P^k(\lambda)y_*$, или, что то же самое, в виде

$$y = P^k(\lambda)y_* \pm \lambda^k y. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8), получаем:

$$\begin{aligned} y &= \lambda(y_* \pm (P^k(\lambda)y_* \pm \lambda^k y)) = \lambda y_* \pm \lambda P^k(\lambda)y_* \pm \lambda^{k+1} y = \\ &= \lambda y_* \pm P^{k+1}(\lambda)y_* \pm \lambda^{k+1} y = P^{k+1}(\lambda)y_* \pm \lambda^{k+1} y, \\ y &= \frac{P^{k+1}(\lambda)}{1 \pm \lambda^{k+1}} y_*. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. Дифференциальное уравнение (1) с импульсным воздействием (2), (7), где $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \leq |\min G(x)|$, имеет $T(n)$ -периодические решения такие, что фазовая точка данной системы при движении вдоль соответствующей траектории подвергается ровно n импульсных воздействий за период, где n – произвольное натуральное число. При этом точки воздействия импульсных сил, соответствующие $T(n)$ -периодическим решениям, необходимо искать среди дробей вида

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \quad (9)$$

где $P^n(\lambda)$ – многочлен, вида $P^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda$, $a_i = \pm 1$, $i = \overline{2, n}$.

Изучим детальнее задачу о виде периодических точек отображения (8), которые соответствуют $T(n)$ -периодическим решениям задачи (1), (7).

Построим многочлены $P^n(\lambda)$ в явном виде. Построение начнем с точки $y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*$. Подействуем на эту точку отображением (8)

$$f(y) = \lambda \left(y_* \pm \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_* \right), \quad (12)$$

или

$$f(y) = \lambda y_* \frac{1 + \lambda^n \pm (\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n)}{1 + \lambda^n}.$$

Согласно Утверждению 1, многочлен в знаменателе дроби должен содержать степень n , таким образом, знак перед дробью в (12) будет «+», а $y < 0$.

Произведя соответствующие преобразования (12), получим следующую точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*, \quad (13)$$

причем

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_* < 0,$$

или, что то же самое,

$$\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n < 0. \quad (14)$$

Повторив аналогичные суждения для (13), получим точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_*, \quad (15)$$

где опять же $\frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 + \lambda^n} y_* < 0$, или

$$\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n < 0. \quad (16)$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что если числитель дроби (9) будет равным $1 + \lambda^n$, то многочлены $P^n(\lambda)$ в знаменателе соответствующих точек цикла будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\ & \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\ & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, для λ должна быть справедливой система неравенств

$$\begin{cases} \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\ \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\ \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Очевидно, что для того, чтобы число λ удовлетворяло систему неравенств (18), достаточно, чтобы оно удовлетворяло предпоследнему неравенству системы (18), т.е. $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0$. Таким образом, можно показать, что при увеличении n сужается интервал, с которого можно выбирать значения параметра λ .

Повторяя вышеприведенные рассуждения для случая, когда числитель дроби (9) равен $1 - \lambda^n$, т.е. когда начальная точка имеет вид $y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 - \lambda^n} y_*$, полу-

чаем представления соответствующих многочленов $P^n(\lambda)$ в его знаменателе. Эти многочлены будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 & \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n, \\
 & \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n, \\
 & \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n, \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots - \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n, \\
 & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} + \lambda^n, \\
 & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В этом случае система неравенств, которые определяют интервал существования параметра λ , сведется к виду:

$$\begin{cases}
 \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0, \\
 \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0, \\
 \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0, \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots - \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0, \\
 \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} + \lambda^n > 0, \\
 \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0.
 \end{cases} \tag{20}$$

Как и для системы (18), для того, чтобы число λ удовлетворяло систему неравенств (20), достаточно, чтобы оно удовлетворяло последнему неравенству системы (20), т.е. $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n < 0$.

Таким образом, мы получили для обоих рассмотренных случаев одинаковое неравенство, которое определяет интервал для параметра λ : для всех

$$n \geq 3 \quad \lambda \in (\alpha, \lfloor \min G(x) \rfloor],$$

где α является решением уравнения

$$r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} - r^n = 0$$

на интервале $(1, \lfloor \min G(x) \rfloor]$. В частности, при $n = 3$ $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$,

при $n = 4$ $\alpha = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \frac{\sqrt{33}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \frac{\sqrt{33}}{9}} \approx 1,83928$.

Отметим, что все рассуждения проведены для случая, когда в качестве начальной точки отображения (8) выбирали точки $y = \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} y_*$. Если в каче-

стве начальной точки выбрать иную точку, то получим набор точек, которые определяют периодический цикл отображения (8), отличный от приведенных выше.

Следовательно, из (17) и (19) видим, что среди точек периодических циклов периода n отображения (8), когда фазовая точка при движении фазовой траекторией уравнения (1) подвержена импульсному воздействию (7) ровно n раз за период, обязательно будут точки вида:

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n}. \quad (21)$$

Используя (21), можно найти набор точек для отображения (8), определяющих соответствующее $T(n)$ – периодическое решение задачи (1), (7).

Необходимо отметить, что с учетом (17) точка $\frac{\lambda - \lambda^2}{1 - \lambda^2}$, которая является точкой периода 2, совпадает с неподвижной точкой $\frac{\lambda}{1 + \lambda}$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 2. Точки, определяющие периодический цикл периода n на интервале $(1, |\min G(x)|]$ для отображения (8), когда фазовая точка при движении фазовой траектории уравнения (1) подвержена импульсному воздействию (7) ровно n раз за период, имеют вид:

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \dots - \lambda^{n-2} - \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 \pm \lambda^n}.$$

При этом с увеличением n будет сужаться интервал, из которого выбираются значения параметра λ , а именно, $\lambda \in (\alpha, |\min G(x)|]$, где α – решение уравнения $r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} - r^n = 0$ на интервале $(1, |\min G(x)|]$.

Проведенный анализ качественного поведения системы (1), (2), (8) демонстрирует сложный характер поведения траекторий систем, определенных дифференциальными уравнениями и условиями импульсного воздействия, причем в таких системах могут проявляться некоторые специфические эффекты (изменение асимптотических свойств решения (при $t \rightarrow \infty$), сосуществование периодических решений), обусловленные именно импульсным воздействием.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев : Вищ. шк., 1987. – 252 с.
2. Самойленко, А. М. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією / А. М. Самойленко, В. Г. Самойленко, В. В. Собчук // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 827–834.
3. Самойленко, В. Г. Періодичні розв'язки рівняння Льєнара з імпульсною дією / В. Г. Самойленко, В. В. Собчук // Нелінійні коливання. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 256–265.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.06.2017

Sobchuk V.V., Khitko I.V. Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations with Impulse Effect and Exclusive Views Point of Order of Sharkovsky

In the paper for the Lienard equation with impulse effect at non-fixed instants of time, it is shown that the problem of the existence of its periodic solutions is equivalent to the problem of the existence of periodic points of some mapping of the line segment into itself. Examples of impulse effect functions $I(\dot{x})$ are given for which the Lienard equations have periodic solutions and for which the coexistence of periodic solutions in accordance with the Sharkovskii order takes place. The latter is provided by changes in the parameter in the function $I(\dot{x})$.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик¹, С.В. Сидак²¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²ассистент каф. ИиПМБрестского государственного технического университета,
магистрант специальности «Математика»

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: priclmath@brsu.brest.by**О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ
НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО ПОПРАВКАМ**

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и несамосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по поправкам, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным несамосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x . Будем искать его, используя неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha(A^*A)^2 \right) x_n + 2\alpha(A^*A) A^* y \right], \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, метод итераций (2) примет вид:

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left[\left(E + \alpha(A^*A)^2 \right) z_n + 2\alpha(A^*A) A^* y_\delta \right] + \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} u_n, \quad z_0 = 0, \quad (3)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\| \leq \beta$. Обозначим через

$$C = \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^2 \right), \quad B = 2 \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \alpha(A^*A) A^*.$$

Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n.$$

Для метода (2) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта априорная оценка погрешности оптимизирована, и найден априорный момент останова.

В статье [2] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1) и исследована сходимость метода (3) в энергетической («ослабленной») норме гильбертова пространства.

В [3; 4] для метода (3) обоснована возможность применения правила останова по малости невязки и решена численная модельная задача.

Правило останова по поправкам. В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам [5–7].

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\left. \begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [6; 7] доказываются леммы.

Лемма 1. Пусть приближение ω_n определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + Bu + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. При $\forall \omega_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \leq \beta$, выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n , удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \beta\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$, $\delta, \beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

1. По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (6)$$

При $n=1$ из $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$ имеем $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$, из (6) получим то же самое, т.е. при $n=1$ формула (6) верна.

Предположим, что (6) верна при $n=p$, т.е.

$$z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1})$$

и докажем ее справедливость при $n=p+1$. Имеем

$$\begin{aligned} z_{p+1} &= C^p z_p + B y_\delta + C u_p = C \left(C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + B y_\delta + C u_p = \\ &= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\ &\quad + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1} u_0) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + C (B y_\delta + C u_{p-1} + \\ &\quad + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + C u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p) = \\ &= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) B y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 + A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\ &= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y + A^{-1} (E - C^{n+1}) y - A^{-1} (E - C^n) y_\delta - \\ &\quad - C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1} (E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y - y_\delta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n B(y - y_\delta)\|. \quad (7)$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\begin{aligned} \|C^n B(y - y_\delta)\| &= \|C^n \sigma\| = \left\| \int_0^{\|A^* A\|} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A^* A\|} \left(\frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| + q^n \|\sigma\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \varepsilon_0 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как при $\alpha > 0$, $\lambda \in (0, \|A^* A\|]$ имеем $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right| \leq q < 1$.

Поэтому (см. лемму 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$.

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $u_n, \|u_n\| \leq \beta$.

2. Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова m' условием

$$\left. \begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| &\leq \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (7) следует, что $m \leq m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2,$$

поэтому справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при $n < m'$ имеем

$$\begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|B\|\delta, \\ \text{то } m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 &\leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2 \beta^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \leq m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \leq m' \leq \|z_0 - x\|^2 ((\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta))^{-1}.$$

3. Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} B C^k y. \quad (9)$$

Предположим, что (9) верно, тогда

$$\begin{aligned} x - C^n x &= B(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y, \\ (E - C^n)x &= B(E - C^n)(E - C)^{-1}y, \quad (E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax, \\ (E - C^n)x &= (E - C^n)x. \end{aligned}$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана.

Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (10)$$

Отсюда

$$\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}], \text{ где } \Delta_n = z_n - x \text{ и } \Delta_0 = z_0 - x.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (11)$$

В частности, (11) справедливо и при $n = m$. Если $m \rightarrow \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$, тогда, как показано ранее, $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Поэтому для доказательства

$$\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$$

достаточно показать, что

$$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$$

Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - C u_n - C^n B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C) u_{n-k-1}. \quad (12)$$

Так как спектр оператора

$$C = \left(E + \alpha(A^* A)^2 \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^* A)^2 \right)$$

принадлежит $[0,1]$, то можно доказать, что

$$\|C^n(E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (13)$$

Поэтому из (12) получим при $n = m - 1$

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} B(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$ ([8]).

Так как по условию теоремы

$$\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p), d > 1, p \in (0, 1),$$

то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из 2) получим

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

Поскольку

$$\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon, \text{ то } \varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$$

Отсюда получим, что $m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства

на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| (\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}. \text{ При } m \rightarrow \infty \text{ множитель}$$

$$2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0, \text{ а } \frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$$

ограничена при $\delta, \beta \rightarrow 0$. Поэтому $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty, \delta, \beta \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенства (11) при $m \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} (\|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2016. – № 2. – С. 71–76.
2. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач I рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізика. Матэматыка. Выліч. тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 13–21.
3. Матысик, О. В. Регуляризация операторных уравнений первого рода при помощи неявного метода итераций в случае применения правила останова по малости невязки / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 67–73.
4. Матысик, О. В. Программная реализация нахождения приближенного решения модельной некорректной задачи с помощью неявной итерационной процедуры в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізика. Матэматыка. Выліч. тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 62–67.
5. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.
7. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
8. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.08.2017

O.V. Matysik, S.V. Sidak. About of Convergence the Implicite Iteration Method with a Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems

In the Hilbert space for solving linear operator equations with affirmative limited and non self-conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *С.Ф. Бут-Гусаім, К.М. Мароз, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 08.12.2017. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,09. Ул.-выд. арк. 6,75.

Тыраж 100 экз. Заказ № 503.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.