

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.Б. Антаневіч

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецохоў

А.Ф. Равінскі

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2017

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 (у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь ад 13.01.2017 № 6) часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Гугнюк М.Л., Плетюхов В.А. Описание поколений нейтрино в подходе теории релятивистских волновых уравнений	5
Лиопо В.А., Овчинников Е.В., Секержицкий С.С., Ситкевич Ф.А. Влияние электрических зарядов наночастиц-модификаторов на технологию изготовления полимерных композитов	12
Овсюк Е.М., Веко О.В., Войнова Я.А., Кисель В.В., Редьков В.М. Частица Дирака с учетом аномального магнитного момента, описание свойств точных решений уравнения в кулоновском поле.....	17
Секержицкий В.С., Хомич Е.М. Сверхплотное электронно-протонное вещество в сильном магнитном поле.....	35
Сендер Н.Н. Проявление гиротропии при отражении света от одноосных кристаллов	42

МАТЭМАТЫКА

Артюшеня Т.А., Трофимук А.А. Разрешимые группы со свободными от n -х степеней индексами P -субнормальных подгрупп в своих нормальных замыканиях.....	52
Волков В.М., Буяльская Ю.В., Врублевский И.Д., Коленченко О.П. Прямые и итерационные алгоритмы реализации спектральных методов Чебышева для многомерных дифференциальных краевых задач с использованием технологии GPGPU в среде Matlab	60
Матысик О.В., Сидак С.В. Регуляризация операторных уравнений первого рода при помощи неявного метода итераций в случае применения правила останова по малости невязки	67
Мадорский В.М. О синтезе оптимального управления некоторых оптимизационных задач	74
Худяков А.П., Матысик О.В. Формулы обобщенного тригонометрического интерполирования Эрмита – Биркгофа для функций матричного аргумента.....	86
Юдов А.А., Волкова А.О., Арабчик Е.В., Арабчик Д.С. Классификация подгрупп Ли группы Ли движений пространства 2R_4 и их инвариантные характеристики	95



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
A.M. Sender
Deputy Editor-in-chief:
S.A. Marzan

International Board:
V.A. Glavan (Moldova)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.B. Antanevich
M.M. Sender
(managing editor)
M.I. Lyavchuk
I.P. Martynov
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.M. Rad'kov
Y.S. Sekyarzhytski
M.M. Trush
A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2017

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94 (as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 13, 2017 № 6) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

Huhniuk M.L., Pletyukhov V.A. Description of Neutrino Generations in Approach of the Relativistic Wave Equations Theory.....	5
Liopo V.A., Auchynnika Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich F.A. Influence of Electric Charges of Nanoparticles-Modifiers on Technology of Production of Polymeric Composites	12
Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. Dirac Particle with Anomalous Magnetic Moment, Properties of Exact Solutions in the Coulomb Field	17
Sekerzhitsky V.S., Khomich E.M. Superdense Electron-Proton Matter in Strong Magnetic Field	35
Sender N.N. The Manifestation of Girotrophy at the Reflection of Light from Uniaxial Crystals.....	42

MATHEMATICS

Artiushenia T.A., Trofimuk A.A. Solvable Group with N-Free Degrees of Indexes of P -Subnormal Subgroups in its Normal Closures.....	52
Volkov V.M., Buyalskaya Yu.V., Vrubleuski I.D., Kalenchanka A.P. Direct and Iterative Algorithms Implementing Spectral Chebyshev Methods for Multidimensional Boundary Value Problems Using GPGPU Technology in Matlab.....	60
Matysik O.V., Sidak S.V. On the Regularization of Operator Equations of First Kind by Implicit Iteration Method Rules in the Case of Stop in Smallness of the Inviscid.....	67
Madorsky V.M. On the Synthesis of Optimum Control of Some Optimization Problems.....	74
Khudyakov A.P., Matysik O.V. Formulas of the Generalized Trigonometric Interpolation of the Hermite – Birkhoff Type for the Functions of a Matrix Argument	86
Yudov A.A., Volkova A.O., Arabchik E.V., Arabchik D.S. Classification of Lie Subgroup of a Group of Movements Spaces 2R_4 and their Invariant Characteristics	95

М.Л. Гугнюк¹, В.А. Плетюхов²

¹магистрант каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: otf@brsu.brest.by

ОПИСАНИЕ ПОКОЛЕНИЙ НЕЙТРИНО В ПОДХОДЕ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Твердо установленный в настоящее время факт наличия массы у всех трех известных сортов нейтрино указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица. Очевидно, что и описание нейтрино посредством безмассового уравнения Дирака также не является правильным. В настоящей работе предлагается релятивистское волновое уравнение для микрообъекта со спином 1/2 и тремя различными значениями массы. Данное уравнение может рассматриваться как основа для описания поколений нейтрино в рамках классической теории поля.

Введение

В настоящее время установлено существование трех различных сортов (флейворов) нейтрино: электронное, мюонное и τ -лептонное. Удивительным свойством флейворных нейтрино является их способность смешиваться и осциллировать, то есть самопроизвольно превращаться друг в друга. Для данного явления принципиально важно, чтобы нейтрино обладали массой, так как осцилляции невозможны для строго безмассовых частиц. Открытие осцилляций нейтрино и наличие трех различных массовых состояний указывает на ограниченный характер Стандартной модели, в рамках которой нейтрино – безмассовая частица и осцилляции между различными типами нейтрино отсутствуют. Очевидно, что и описание нейтрино в классической теории поля посредством безмассового уравнения Дирака также не является правомерным.

Как известно, одним из основных направлений в классической теории поля является теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Последняя базируется на стандартной матричной форме уравнений

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

описывающих элементарные частицы с ненулевой массой. В (1) $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, Γ_{μ} – квадратные числовые матрицы, m – массовый параметр. С точки зрения теории РВУ все три типа нейтрино в свободном состоянии могут рассматриваться как единый микрообъект, который способен находиться в трех различных массовых состояниях. Другими словами, масса нейтрино, как и спин, выступает в роли внутреннего квантового числа.

Возможность построения РВУ для микрообъектов с переменной массой была известна давно (см., напр., [1]), однако до открытия явления осцилляций нейтрино физический смысл таких уравнений был неясен. Теперь же ситуация изменилась. Из вышеуказанного вытекает, что в подходе теории РВУ свободное нейтрино должно описываться уравнением (1) для частицы со спином 1/2 и тремя различными значениями массы. Построение и исследование такого уравнения и является целью настоящей работы.

Некоторые сведения из теории РВУ

Основные положения теории РВУ подробно изложены в классической работе [2] (см. также [3]). Поэтому мы ограничимся лишь кратким напоминанием некоторых из них. Основную роль в уравнении (1) играет матрица Γ_4 , которая в каноническом базисе имеет структуру

$$\Gamma_4 = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2s+1}. \quad (2)$$

Здесь C^s – спиновый блок, соответствующий спину s в том смысле, что если собственные значения (хотя бы одно) блока C^s отличны от нуля, то частица обладает спином s . Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ выражаются через параметр m и корни $\pm \lambda_k^{(s)}$ блока C^s по формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_k^{(s)}|}. \quad (3)$$

Многокомпонентная волновая функция $\psi(x)$ в (1) преобразуется по некоторому приводимому представлению T группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент τ . Под зацепляющимися понимаются неприводимые представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$, для которых выполняются условия

$$l'_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}, \quad l'_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}, \quad (4)$$

причем знаки «+» и «-» в (4) могут не коррелировать. Кроме того, в представлении T наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ должно присутствовать сопряженное представление $\dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$. В формировании спина s участвуют представления, удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \quad (5)$$

Наглядное изображение представления T осуществляется с помощью так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся неприводимые компоненты соединены чертой. При этом спиновый блок C^s состоит из элементов $c_{\tau\tau'}^s$, отличных от нуля только для зацепляющихся представлений $\tau - \tau'$.

Обязательными требованиями, предъявляемыми к РВУ (1), помимо релятивистской инвариантности являются инвариантность относительно операции пространственного отражения и возможность лагранжевой формулировки. При построении лагранжиана теории

$$L = -\bar{\psi} \left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m \right) \psi \quad (6)$$

используется лоренц-инвариантная билинейная форма

$$\bar{\psi} \psi = \psi^+ \eta \psi, \quad (7)$$

где η – матрица билинейной формы, имеющая в каноническом базисе аналогичную (2) структуру

$$\eta = \bigoplus_s \eta^s \otimes I_{2s+1}. \quad (8)$$

В блоках η^s отличными от нуля являются лишь элементы $\eta_{\tau\dot{\tau}}^s$, причем

$$\eta_{\tau\dot{\tau}}^s = \eta_{\dot{\tau}\tau}^s = -\eta_{\tau\tau}^{s+1}. \quad (9)$$

Матрицу η можно нормировать так, что в блоках η^s будут встречаться только числа ± 1 .

Конкретные ограничения, накладываемые на числа $c_{\tau\tau}^s$ и $\eta_{\tau\tau}^s$ требованиями P -инвариантности и лагранжевой формулировки РВУ (1), можно найти, например, в [3].

РВУ для частицы со спином $s = 1/2$ и тремя массами

Для построения заявленного РВУ рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{2}\right)' & - & \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \\ | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) & - & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & - & \left(\frac{1}{2}, 0\right), \end{array} \quad (10)$$

где знак «штрих» введен для различения кратных представлений $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Матрица Γ_4 , соответствующая схеме (10), содержит спиновые блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$\Gamma_4 = (C^{1/2} \otimes I_2) \oplus (C^{3/2} \otimes I_4). \quad (11)$$

Для удобства записи общих выражений блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ используем следующую нумерацию неприводимых компонент, содержащихся в (10):

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{2}\right) &\sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim 2, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)' \sim 3, \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)' &\sim 4, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim 5, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim 6. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ в каноническом базисе принимают вид

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & 0 & c_{15}^{1/2} & 0 \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{26}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & c_{35}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & c_{46}^{1/2} \\ c_{51}^{1/2} & 0 & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & c_{56}^{1/2} \\ 0 & c_{62}^{1/2} & 0 & c_{64}^{1/2} & c_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{56}^{3/2} \\ c_{65}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрица η будет иметь в данном случае вид

$$\eta = (\eta^{1/2} \otimes I_2) \oplus (\eta^{3/2} \otimes I_4), \quad (14)$$

где

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{34}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{34}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{56}^{1/2} \\ -\eta_{56}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Требование инвариантности теории относительно преобразований полной группы Лоренца приводит к соотношениям [3]

$$\begin{aligned} c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \quad c_{15}^{1/2} = c_{26}^{1/2} \\ c_{35}^{1/2} = c_{46}^{1/2}, \quad c_{62}^{1/2} = c_{51}^{1/2}, \quad c_{64}^{1/2} = c_{53}^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку нас интересует только спин $1/2$, необходимо положить

$$c_{56}^{3/2} = c_{65}^{3/2} = 0, \quad (17)$$

откуда следует также, что

$$c_{56}^{1/2} = c_{65}^{1/2} = 0. \quad (18)$$

Равенства (17) и (18) означают, что схема зацеплений (10) трансформируется к виду

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{2}\right)' & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \\ | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) & & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, 0\right). \end{array} \quad (19)$$

Возможность получения РВУ (1) из лагранжиана (6) предполагает в рассматриваемом случае выполнение условий:

$$c_{12}^{1/2}, c_{34}^{1/2} \text{ — вещественные}; \quad (20)$$

$$c_{62}^{1/2} = (\eta_{56}^{1/2} / \eta_{12}^{1/2})(\eta_{15}^{1/2})^*, \quad c_{64}^{1/2} = (\eta_{56}^{1/2} / \eta_{34}^{1/2})(\eta_{35}^{1/2})^*. \quad (21)$$

Вводя для упрощения записи обозначения

$$c_{12}^{1/2} = c_1, \quad c_{34}^{1/2} = c_2, \quad c_{15}^{1/2} = c_3, \quad c_{35}^{1/2} = c_4, \quad (22)$$

$$\eta_{56}^{1/2} / \eta_{12}^{1/2} = f, \quad \eta_{56}^{1/2} / \eta_{34}^{1/2} = g \quad (f = \pm 1, g = \pm 1), \quad (23)$$

с учетом (16) – (21), получим для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 выражения

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_4 \\ fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & fc_3^* & 0 & gc_4^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Характеристическое уравнение матрицы $C^{1/2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^6 - \lambda^4 (c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2) + \\ + \lambda^2 (c_1^2 c_2^2 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2fc_2^2 |c_3|^2 + 2gc_1^2 |c_4|^2 + 2fg|c_3|^2 |c_4|^2) - \\ - c_1^2 |c_4|^4 - c_2^2 |c_3|^4 - 2fgc_1 c_2 |c_3|^2 |c_4|^2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет в общем случае корни $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$. Квадраты этих корней $\mu_1 = \lambda_1^2, \mu_2 = \lambda_2^2, \mu_3 = \lambda_3^2$ являются решениями кубического уравнения

$$\mu^3 - a\mu^2 + b\mu - c = 0, \quad (26)$$

где для удобства использованы обозначения

$$a = c_1^2 + c_2^2 + 2f|c_3|^2 + 2g|c_4|^2, \quad (27)$$

$$b = c_1^2 c_2^2 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2fc_2^2|c_3|^2 + 2gc_1^2|c_4|^2 + 2fg|c_3|^2|c_4|^2, \quad (28)$$

$$c = c_1^2|c_4|^4 + c_2^2|c_3|^4 + 2fgc_1c_2|c_3|^2|c_4|^2. \quad (29)$$

Корни μ_1, μ_2, μ_3 связаны с коэффициентами a, b, c соотношения

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = a, \quad (30)$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = b, \quad (31)$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = c. \quad (32)$$

Не уменьшая общности, один из корней, например, μ_3 , можно положить равным 1:

$$\mu_3 = 1. \quad (33)$$

Тогда соотношения (30) – (32) принимают вид

$$\mu_1 + \mu_2 = a - 1, \quad (34)$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 = b, \quad (35)$$

$$\mu_1\mu_2 = c. \quad (36)$$

Из системы (34) вытекают квадратные уравнения

$$\mu_1^2 - (a-1)\mu_1 + c = 0, \quad (37)$$

$$\mu_2^2 - (a-1)\mu_2 + c = 0,$$

из которых находим

$$\mu_1 = \frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}, \quad \mu_2 = \frac{a-1}{2} - \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4} - c}. \quad (38)$$

Величины μ_1, μ_2 должны быть вещественными и положительными, причем

$$\mu_1 \neq \mu_2 \neq 1. \quad (39)$$

Из (37) вытекают условия, которым должны удовлетворять коэффициенты a, c :

$$c > 0, \quad (40)$$

$$\frac{(a-1)^2}{4} > c. \quad (41)$$

Кроме того, в силу (35) имеем

$$a + c - b = 1. \quad (42)$$

Таким образом, РВУ (1), основанное на схеме зацеплений (19), с матрицей Γ_4 (11), (24), где произвол в выборе параметров c_1, c_2, c_3, c_4 ограничен условиями (40) – (42), описывает микрообъект со спином $s = 1/2$ и тремя различными значениями массы

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{\mu_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{\mu_2}}, \quad m_3 = m. \quad (43)$$

Обсудим выбор знаков величин f и g (23). Поскольку все корни $C^{1/2}$ по условию вещественны, матрица $C^{1/2}$ должна быть эрмитовской. Отсюда следует, что

$$f = g = 1. \quad (44)$$

Значения величин μ_1 , μ_2 в (43), определяемые по формуле (38), зависят от значений коэффициентов a , b , c , которые, в свою очередь, выражаются через элементы c_1 , c_2 , c_3 , c_4 спинового блока $C^{1/2}$ (24). Остающийся после наложения условий (39) – (42) произвол в выборе этих параметров позволяет получить различные (с точки зрения спектра масс) варианты теории.

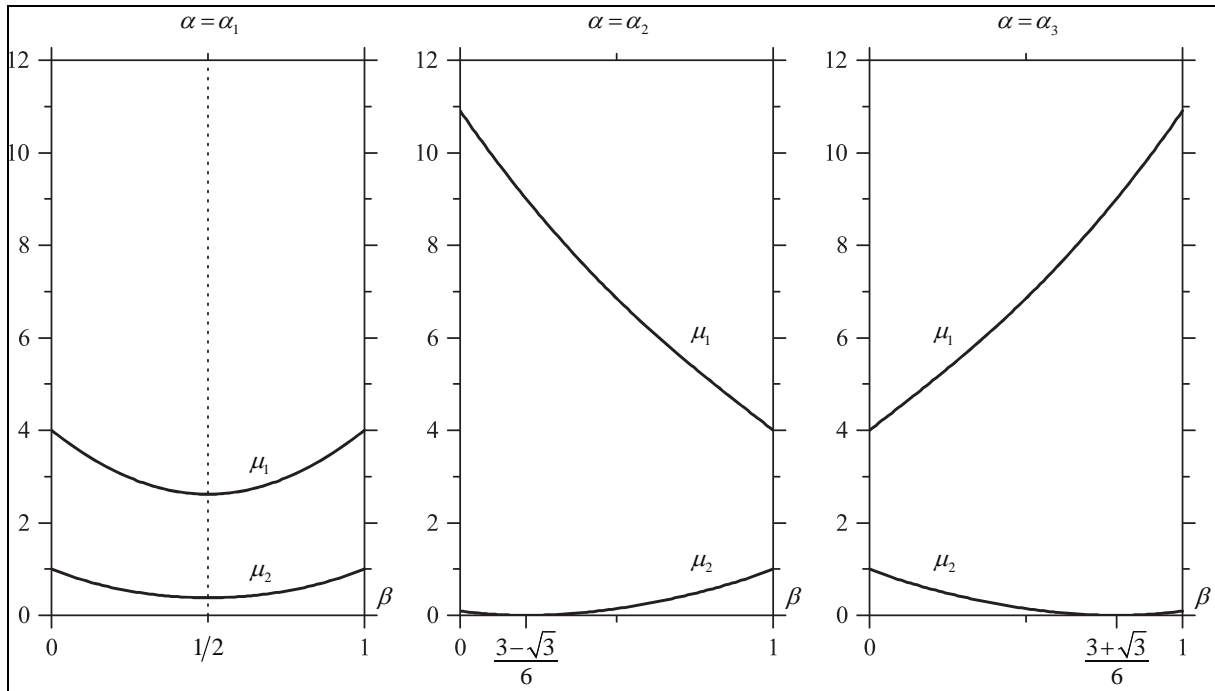


Рисунок. – Графики зависимости величин μ_1 , μ_2 от параметра β

Рассмотрим более подробно имеющиеся возможности. Для этого вместо c_1 , c_2 , c_3 , c_4 введем параметры α , β согласно определению

$$c_1 = 1 + \alpha, \quad c_2 = 1 - \alpha, \quad |c_3| = \sqrt{\beta}, \quad |c_4| = \sqrt{1 - \beta} \quad (0 < \beta < 1). \quad (45)$$

Тогда имеем

$$a = 2\alpha^2 + 4, \quad b = \alpha^4 - 8\alpha\beta + 4\alpha + 4, \quad (46)$$

$$c = 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\alpha + 1. \quad (47)$$

Из условия (42) вытекает уравнение

$$\alpha \left[\alpha^3 - \alpha(4\beta^2 - 4\beta + 3) - 4\beta + 2 \right] = 0. \quad (48)$$

Одно решение уравнения (48) вытекает сразу:

$$\alpha = 0, \quad \beta \in (0, 1). \quad (49)$$

Остальные решения находятся из уравнения

$$\alpha^3 - \alpha(4\beta^2 - 4\beta + 3) - 4\beta + 2 = 0. \quad (50)$$

Рассматривая (50) как кубическое уравнение относительно α с параметром β , получим

$$\alpha_1 = -2\beta + 1, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right); \quad (51)$$

$$\alpha_2 = \frac{2\beta - 1 - \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, 1\right); \quad (52)$$

$$\alpha_3 = \frac{2\beta - 1 + \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}}{2}, \quad \beta \in \left(0, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}, 1\right); \quad (53)$$

Величины μ_1 , μ_2 (38), соответствующие классам решений (49), (51), (52), (53) и определяющие спектр масс (43), принимают вид

$$\mu_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (\alpha = 0); \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5 + \sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \\ \mu_2 &= 4\beta^2 - 4\beta + \frac{5 - \sqrt{16\beta^2 - 16\beta + 9}}{2} \end{aligned} \right\} (\alpha = \alpha_1), \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta - S\beta + \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta - 4S\beta + 2S + 7} \end{aligned} \right\} (\alpha = \alpha_2), \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 + \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \\ \mu_2 &= 2\beta^2 - 2\beta + S\beta - \frac{S}{2} + 4 - \frac{3}{2}\sqrt{8\beta^2 - 8\beta + 4S\beta - 2S + 7} \end{aligned} \right\} (\alpha = \alpha_3), \quad (57)$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$S = \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 9}. \quad (58)$$

Графики зависимостей (55) – (57) показаны на рисунке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feshbach, H. A wave equation for a particle of maximum spin one / H. Feshbach, W. Nichols // *Annals of Physics*. – 1958. – Vol. 4. – P. 448–458.
2. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.
3. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2017

Huhniuk M.L., Pletyukhov V.A. Description of Neutrino Generations in Approach of the Relativistic Wave Equations Theory

To date it is firmly established that all three known sorts of neutrinos possess finite masses. This fact points to a limited character of the Standard Model, in the context of which a neutrino is treated as a massless particle. Obviously, a description of a neutrino by means of the massless Dirac equation is either no longer adequate. In the present paper we propose a relativistic wave equation for a micro-object with spin 1/2 and three different mass values. In our opinion, this equation can be used for describing neutrino generations in frames of the classical field theory.

УДК 548.12

В.А. Лиопо¹, Е.В. Овчинников², С.С. Секержицкий³, Ф.А. Ситкевич⁴¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

²д-р техн. наук, доц., доц. каф. логистики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

³канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

⁴аспирант каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

e-mail: otf@brsu.brest.by

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ НАНОЧАСТИЦ-МОДИФИКАТОРОВ НА ТЕХНОЛОГИЮ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

Изучено влияние электрических зарядов наночастиц-модификаторов на технологию изготовления полимерных композитов. Установлено, что силы электростатического взаимодействия между ними возрастают в процессе перемешивания. Поэтому увеличение его времени приводит к образованию кластеров наночастиц – «комкованию», что существенно ухудшает свойства получаемых материалов.

Введение

Композиционные, или композитные, материалы представляют собой однородную смесь двух веществ. Одна из них представляет собой непрерывную субстанцию, на основе которой строится композит. Другая составляющая композита – это дискретная фракция, состоящая из отдельных частиц, называемых модификатором. Частица модификатора в общем случае представляет собой наполнители различного назначения. Одни из них влияют, например, на твердость, другие на устойчивость к механическим воздействиям, третьи изменяют термические свойства материала основы, четвертые – цвет модифицируемого материала и т.п.

При создании композита учитывают следующее: во-первых, между поверхностью частицы модификатора и основой возникают устойчивые межатомные связи; во-вторых, частицы наполнителя равномерно распределяются по объему вещества основы. Последнее условие достигается путем механического перемешивания исходного полуфабриката в виде вещества основы и внесения в него дисперсного наполнителя. Оказывается, что при увеличении времени перемешивания частицы наполнителя не только распределяются статистически однородно, но и возникают кластерные системы из частиц наполнителя-модификатора, приводящее к эффекту «комкования» наполнителя [1]. Объяснение этого следует искать в наличии электрических зарядов на частицах наполнителя.

Причины возникновения электрических зарядов на частицах наполнителя

Наличие элементарных зарядов на указанных частицах при их получении путем диспергирования крупных объектов обусловлено тремя основными причинами. При дроблении диэлектрических кристаллов плоскости расколов разделяют две поверхности с разными потенциалами. Это приводит к различным значениям вероятностей перехода через возникший потенциальный барьер в противоположных направлениях движения носителей заряда [2]. При создании металлических модификаторов диспергированием поликристаллов возникает контакт плоскостей потенциала между гранями частиц с различными уровнями Ферми. Это приводит к перетеканию электронов от частиц с более высоким уровнем Ферми на частицы с пониженным уровнем. Кроме того, при получении наночастиц очень мала вероятность того, что количество отрицатель-

ных и положительных зарядов было одинаковым. Заряды частиц будут иметь значения $m \cdot e$, где e – заряд электрона, m – целое число. Если общее число электронов в нейтральной частице предположить равным M , то относительное уменьшение заряда при наличии флуктуаций их распределения равно:

$$(\Delta Q)_{i\bar{i}} = \frac{m}{M} e. \quad (1)$$

При $M \gg m$ величина $(\Delta Q)_{i\bar{i}}$ пренебрежимо мала и не влияет на взаимодействие частиц. Однако при малых размерах частиц электрическое взаимодействие между ними может играть заметную роль. Следовательно, надо рассмотреть геометрические параметры композитов с наноразмерными частицами модификатора.

Геометрические параметры распределения частиц модификатора в композитах и их электростатическое взаимодействие

Рассмотрим простейшую модель композита, состоящего из вещества матрицы-основы с введенными в него частицами наполнителя сферической формы (рисунок).

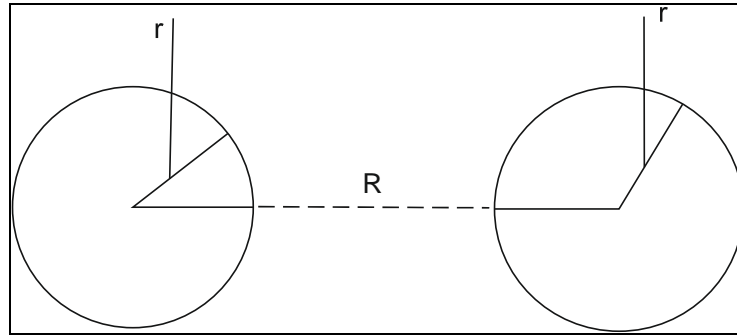


Рисунок. – Схема, поясняющая параметры r и R на примере двух соседних частиц наполнителя-модификатора

Выделим две соседние частицы. R – расстояние между ними, r – радиус частиц, h – толщина модифицированного слоя. Обозначим необходимые параметры: C_V – объемная концентрация наполнителя, $\rho_i, \rho_{i\bar{i}}$ – плотности вещества наполнителя и основы. Соответственно q_1, q_2 – электрические заряды на частицах наполнителя. Считаем эти параметры известными.

Число частиц модификатора в единице объема (N) равно

$$N = \frac{C_V}{V_1} = \frac{3C_V}{4\pi r^3},$$

где V_1 – объем частицы наполнителя.

Объем композита, приходящийся на одну частицу наполнителя (W_1), равен

$$W_1 = \frac{1}{N} = \frac{4\pi r^3}{3C_V}. \quad (2)$$

Расстояние между центрами соседних частиц (R) равно:

$$R = (W_1)^{\frac{1}{3}} = r \left(\frac{4\pi}{3C_V} \right)^{1/3}. \quad (3)$$

Очевидно, что для композиционного материала r, R, h – это усредненные величины, которые характеризуются соответствующими функциями распределения, причем в процессе изготовления композита эти распределения меняются со временем. Предлагаемая модель не позволяет находить строгие характеристики указанных величин, но, на наш взгляд, объясняет возникновение кластеров (комков) из частиц наполнителя.

Каждая из рассмотренных частиц несет заряд (q_1 и q_2). Сила электростатического (кулоновского) взаимодействия F_k частиц с зарядами q_1, q_2 имеет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon R^2}. \quad (4)$$

Так как q кратно элементарному заряду (e), то (4) можно представить в форме:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{mnC_V^{2/3}}{\epsilon \left(\frac{4}{3}\pi \right)^{2/3} r^2} = \frac{\sqrt{27}e^2}{(4\pi)^{5/3} \epsilon_0} \frac{mnC_V^{2/3}}{r^2} = Q \frac{mnC_V^{2/3}}{r^2}, \quad (5)$$

где m, n – целые числа.

Так как e и ϵ_0 – табличные величины (в системе СИ): $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Ёё}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ќ}}{\text{і}}$, то численное значение Q равно:

$$Q = \frac{\sqrt{27}e^2}{(4\pi)^{5/3} \epsilon_0} \approx 3,5 \cdot 10^{-27} \text{ Ѐ} \cdot \text{і}^2. \quad (6)$$

Следовательно, величина кулоновского взаимодействия между заряженными частицами наполнителя определяется выражением:

$$F_k = 3,5 \cdot 10^{-27} \frac{mnC_V^{2/3}}{r^2}. \quad (7)$$

Для оценки величины силы кулоновского взаимодействия частиц рассмотрим численный пример для достаточно типичного случая [3] и сравним силу F_k (7) с силой тяжести частицы (F_T).

Пусть $C_V = 5\% \rightarrow (0,05)^{2/3} = 0,14$.

Рассмотрим предельно малые заряды на частицах, то есть $m = n = 1$. Размер частицы примем 100 і , то есть $r = 50 \text{ і}$, что, кстати, для всех металлов превышает границу между нано- и макросостоянием. Плотность частицы примем равной $\rho = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{ёё}}{\text{і}^3}$. В этом случае (7):

$$\frac{F_K}{F_T} = \frac{3,5 \cdot 0,14 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3} \pi \cdot 10^{-35}} = 2,1 \cdot 10^7.$$

Очевидно, что такая сила не вызовет ускорение частиц, намного превышающее ускорение земного тяготения, так как эти частицы зажаты в матрице основы. Однако в процессе создания композита, когда частицы находятся в разжиженном полимере, эта сила может сыграть весьма существенную роль. В процессе приготовления расстояние между частицами может быть менее среднего R . Уменьшение расстояния в 2 раза вызовет увеличение кулоновской силы в 4 раза. При перемешивании частиц с разными знаками, если $m \neq n$ в условии (5), то при взаимодействии двух частиц возникает их пара с ненулевым зарядом. В этом случае происходит дальнейшее объединение этого объекта с новой частицей. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока объемная плотность заряда, образованного из частиц наполнителя, станет достаточно малой. Кроме этого в процессе создания композита уменьшается температура системы основы с частицами наполнителя, то есть увеличивается вязкость матрицы.

При установлении связи между массовой (C_M) и объемной (C_V) концентрацией наполнителя используем обозначение $M = m_i + m_{\tilde{N}A}$ – масса композита, в котором m_i – масса наполнителя, $m_{\tilde{N}A}$ – масса связующего, ρ_i , $\rho_{\tilde{N}A}$ – плотности веществ наполнителя и связующего соответственно, $V = V_i + V_{\tilde{N}A}$ – объем композита. Значения \tilde{N}_M и C_V определяются условием:

$$C_M = \frac{m_i}{M} = \frac{m_i}{m_i + m_{\tilde{N}A}} = \frac{1}{1 + \frac{m_{\tilde{N}A}}{m_i}}, \quad (8)$$

$$C_V = \frac{V_i}{V} = \frac{1}{1 + \frac{V_{\tilde{N}A}}{V_i}} = \frac{1}{1 + \frac{m_{\tilde{N}A} \rho_i}{m_i \rho_{\tilde{N}A}}}. \quad (9)$$

Из условия (1) следует

$$\frac{m_{\tilde{N}A}}{m_i} = \frac{1 - C_m}{C_m}. \quad (10)$$

Следовательно, после подстановки (10) в (9) получим

$$C_V = \frac{1}{1 + \frac{\rho_{\tilde{N}A}}{\rho_i} \cdot \frac{1 - \tilde{N}_m}{C_m}}, \quad (11)$$

$$C_m = \frac{1}{1 + \frac{\rho_i}{\rho_{\tilde{N}A}} \cdot \frac{1 - \tilde{N}_V}{C_V}}, \quad (12)$$

$$\frac{C_m}{C_V} = \frac{\frac{m_{\tilde{N}\tilde{A}} \cdot \rho_i}{m_i} + 1}{\frac{m_{\tilde{N}\tilde{A}}}{m_i} + 1}. \quad (13)$$

При уменьшении температуры увеличивается вязкость материала, что затрудняет равномерное распределение модификатора в объеме композиционного материала.

В формуле (12) учитывается объемная концентрация (C_V). Если задана массовая концентрация (C_M), то переход к C_V осуществляется согласно (11), где индексы «СВ» и «Н» соответствуют модификатору и наполнителю соответственно.

Заклучение

При создании композиционных материалов на основе полимера с наноразмерными частицами наполнителей-модификаторов необходимо добиваться, чтобы эти частицы были распределены равномерно по всему объему композита. Обычно при изготовлении полимерных нанокомпозитов для достижения равномерного распределения разжижают вещество с распределенным в нем модификатором и механическим способом перемешивают.

Объемная концентрация наполнителя невелика и, как правило, не превышает 5%. Но и в этом случае возможно комкование, т.е. на начальных этапах изготовления в определенной степени достигается равномерность распределения частиц наполнителя. Однако в дальнейшем образование кластеров из частиц наполнителя (комков) становится практически неизбежным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лиопо, В. А. Механизмы формирования структуры нанокомпозиционных материалов на основе полимерных и олигомерных матриц / В. А. Лиопо [и др.] // Прогрессивные машиностроительные технологии / А. В. Киричек [и др.] ; под ред. А. В. Киричека. – М., 2012. – Т. II. – С. 159–227.
2. Mitin, V. Quantum Mechanics for Nanostructures / V. Mitin, D. Sementsov, N. Vagidov ; edited by V. Mitin. – Cambridge : University Press, 2010. – 431 p.
3. Лиопо, В. А. Композиционные силикатсодержащие полимерные материалы / В. А. Лиопо [и др.] // Прогрессивные машиностроительные технологии. Оборудование и инструменты : коллективная монография / А. В. Киричек [и др.] ; под ред. А. В. Киричека. – М., 2015. – Т. V. – С. 33–144.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.03.2017

Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich F.A. Influence of Electric Charges of Nanoparticles-Modifiers on Technology of Production of Polymeric Composites

The influence of electrical charges of nanoparticles-modifiers on the technology of polymer composites preparation is studied in the article. It is established that the forces of electrostatic interaction between them increase during the mixing process. Therefore, increasing its time leads to the formation of clusters of nanoparticles – «clumping», which significantly degrades the properties of the resulting materials.

УДК 539.12

Е.М. Овсиюк¹, О.В. Веко², Я.А. Войнова³, В.В. Кисель⁴, В.М. Редьков⁵¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

²учитель физики гимназии г. Калинковичи³учитель физики Качищанской средней школы Ельского района⁴канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

⁵д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики

Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

ЧАСТИЦА ДИРАКА С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА, ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Исследована задача о частице со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом (дополнительно учтено взаимодействие Паули) во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных задача сведена к дифференциальным уравнениям второго порядка для двух радиальных функций с одной регулярной особой точкой и двумя нерегулярными в $r=0, \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса около точек $r=0$ и $r=\infty$. По методу Пуанкаре – Перрона показана сходимость возникающих при этом степенных рядов с 5-членными рекуррентными соотношениями; ряды сходятся соответственно внутри и вне круга радиуса 1. На границе двух областей поведение решения вполне регулярное. Вычислены относительные коэффициенты в двух парах решений системы уравнений в зависимости от знака \pm при параметре аномального магнитного момента. Развита еще один способ анализа системы, основанный на полученных дифференциальных уравнениях 4-го порядка, которые имеют в качестве особых точек только точки $r=0$ и $r=\infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса для этих уравнений около точки $r=0$, возникающие степенные ряды с 7-членными рекуррентными соотношениями для коэффициентов сходятся согласно методу Пуанкаре – Перрона во всей области изменения переменной $r \in [0, \infty)$. Качественный анализ поведения эффективного обобщенного радиального импульса показывает, что финитные движения (т.е. связанные состояния) в такой системе возможны.

Введение

Общепринятым является использование простейших уравнений для фундаментальных частиц со спином 0, $1/2$, 1. Между тем известно, что для этого могут быть также предложены уравнения, заданные в пространствах расширенных наборов неприводимых представлений собственной группы Лоренца [1–18]. Такие обобщенные (или расширенные) уравнения позволяют ввести в теорию более сложные объекты, обладающие помимо спина и массы некоторыми дополнительными физическими характеристиками, проявляющими себя в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей. Так, в частности, этот подход позволяет получить волновое уравнение (Петраш и др.) для частицы со спином $S = 1/2$, ненулевой массой и аномальным магнитным моментом.

В недавних работах [19–21] уравнение Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом было решено для случаев присутствия внешних однородного магнитного и однородного электрического полей. В настоящей работе исследуется задача о спинорной частице с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле; некоторые предварительные результаты были получены также в [23–25]. Используемый формализм позволяет легко выделить представляющий специальный интерес случай незаряженной частицы с аномальным магнитным моментом (нейтрон). В частности, в [23–25] для уравнения Дирака для нейтральной частицы с аномальным магнитным

моментом во внешнем кулоновском поле были получены следующие результаты. После разделения переменных задача была приведена к дифференциальному уравнению второго порядка с двумя нерегулярными особыми точками ранга 2 (дважды вырожденному уравнению Гойна). Качественный анализ уравнений показывает, что связанные состояния для нейтрона в кулоновском поле могут существовать только при одном знаке величины аномального магнитного момента. В настоящей работе детально исследуется случай заряженной частицы (электрон) с аномальным магнитным моментом в кулоновском поле.

1. Разделение переменных

Уравнение Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом (в рамках подхода Петраша [3]) при использовании тетрадного формализма может быть представлено так [26]:

$$\left\{ \gamma^c \left[i(e_{(c)}^\beta \partial_\beta + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc}) - \frac{e}{\hbar c} A_c \right] - i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{\alpha\beta} (x) F_{\alpha\beta} (x) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0. \quad (1.1)$$

Отметим размерности входящих в уравнение величин:

$$\left[\frac{Mc}{\hbar} \right] = l^{-1}, \quad \left[\frac{e}{\hbar c} A \right] = l^{-1}, \quad \left[\frac{e}{\hbar c} F \right] = l^{-2}, \quad \left[\frac{eF}{Mc^2} \right] = l^{-1}; \quad (1.2)$$

свободный параметр λ является безразмерным. С учетом равенств

$$A_t = -\frac{e}{r}, \quad F_r = -\frac{e}{r^2}, \quad -i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{\alpha\beta} (x) F_{\alpha\beta} (x) = 2i\lambda \gamma^0 \gamma^3 \frac{e^2}{r^2} \frac{1}{Mc^2}$$

получаем следующее представление обобщенного уравнения Дирака (пусть $\Psi = r^{-1}\psi$):

$$\left(\gamma^0 (i\partial_t - \frac{e}{\hbar c} A_t) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - \frac{Mc}{\hbar} + 2i\lambda \gamma^0 \gamma^3 \frac{e^2}{r^2} \frac{1}{Mc^2} \right) \psi = 0. \quad (1.3)$$

Удобно использовать более простые обозначения:

$$\frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M, \quad \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}, \quad \frac{\varepsilon}{\hbar c} \Rightarrow \varepsilon, \quad 2\lambda \frac{e^2}{Mc^2} \Rightarrow \Gamma, \quad (1.4)$$

тогда уравнение (1.3) запишется так:

$$\left(\gamma^0 (i\partial_t - \frac{\alpha}{r}) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - M + \frac{i\Gamma}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \right) \psi = 0. \quad (1.5)$$

Подстановка для волновой функции с использованием аппарата функций Вигнера [27] имеет вид [28]

$$\psi_{\varepsilon jm}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{pmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ f_3(r) D_{-1/2} \\ f_4(r) D_{+1/2} \end{pmatrix}, \quad D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0). \quad (1.6)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном представлении, получаем 4 радиальных уравнения:

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_3 - i \frac{d}{dr} f_3 - i \frac{v}{r} f_4 - M f_1 + \frac{i\Gamma}{r^2} f_1 &= 0, \\ (\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_4 + i \frac{d}{dr} f_4 + i \frac{v}{r} f_3 - M f_2 - \frac{i\Gamma}{r^2} f_2 &= 0, \\ (\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_1 + i \frac{d}{dr} f_1 + i \frac{v}{r} f_2 - M f_3 - \frac{i\Gamma}{r^2} f_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - i\frac{d}{dr}f_2 - i\frac{\nu}{r}f_1 - Mf_4 + \frac{i\Gamma}{r^2}f_4 = 0. \quad (1.7)$$

Уравнения допускают наложение условий [28], вытекающих из требования диагонализации оператора пространственной четности: $f_3 = \delta f_2, f_4 = \delta f_1, \delta = \pm 1$; в результате получаем систему из двух уравнений. Чтобы исключить присутствие мнимой единицы в уравнениях, вместо f_1 и f_2 используем другие комбинации функций:

$$f = (f_2 + f_1), g = i(f_2 - f_1).$$

Так получим

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\delta\Gamma}{r^2}\right)f + \left(\delta M + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)g = 0, \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\delta\Gamma}{r^2}\right)g + \left(\delta M - \varepsilon - \frac{\alpha}{r}\right)f = 0. \quad (1.8)$$

Отмечаем симметрию в этой системе:

$$g \rightarrow f, \nu \rightarrow -\nu, \Gamma \rightarrow -\Gamma, \varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \alpha \rightarrow -\alpha. \quad (1.9)$$

Для определенности дальше будем анализировать случай $\delta = +1$:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2}\right)f + \left(M + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)g = 0, \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\Gamma}{r^2}\right)g + \left(M - \varepsilon - \frac{\alpha}{r}\right)f = 0, \quad (1.10)$$

чтобы перейти ко второй возможности $\delta = -1$, достаточно сделать формальные замены: $M \Rightarrow -M, \Gamma \Rightarrow -\Gamma$. Из (1.10) находим уравнение второго порядка для функции $g(r)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 g}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r - e^2/(M - \varepsilon)}\right) \frac{dg}{dr} + \\ & + \left(-M^2 + \varepsilon^2 - \frac{\Gamma^2}{r^4} + \frac{\Gamma(2\nu - 1)}{r^3} + \frac{e^6 - e^2\nu^2 + \Gamma(M - \varepsilon)}{e^2 r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{M - \varepsilon}{e^2} \frac{\Gamma(M - \varepsilon)/e^2 - \nu}{r - e^2/(M - \varepsilon)} + \frac{2e^6 \varepsilon - e^2\nu(M - \varepsilon) + \Gamma(M - \varepsilon)^2}{e^4 r}\right) g = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

которое имеет три особые точки. Уравнение для $f(r)$ будет иметь похожий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + e^2/(M + \varepsilon)}\right) \frac{df}{dr} + \\ & + \left(-M^2 + \varepsilon^2 - \frac{\Gamma^2}{r^4} + \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{r^3} + \frac{e^6 - e^2\nu^2 + \Gamma(M + \varepsilon)}{e^2 r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{M + \varepsilon}{e^2} \frac{\Gamma(M + \varepsilon)/e^2 + \nu}{r + e^2/(M + \varepsilon)} + \frac{2e^6 \varepsilon - e^2\nu(M + \varepsilon) - \Gamma(M + \varepsilon)^2}{e^4 r}\right) f = 0; \end{aligned} \quad (1.12)$$

здесь также имеем три особые точки.

В уравнении (1.11) переходим к новой переменной x и вводим специальные обозначения:

$$x = \frac{r}{R} = \frac{r}{e^2/(M - \varepsilon)}, \quad \frac{M - \varepsilon}{\alpha} = K, \quad \frac{M + \varepsilon}{\alpha} = L, \quad (1.13)$$

в результате получим уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1}\right) \frac{dg}{dx} + \left(-\alpha^2 \frac{L}{K} + \frac{\nu - \Gamma K}{x - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{x} \left(\frac{2\alpha\varepsilon}{K} - \nu + \Gamma K\right) + \frac{\alpha^2 - \nu^2 + \Gamma K}{x^2} + \frac{\Gamma K(2\nu - 1)}{x^3} - \frac{K^2 \Gamma^2}{x^4}\right) g = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Сопутствующая функция f должна устанавливаться из соотношения

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} + \frac{\Gamma K}{x^2}\right)g + \alpha \frac{x-1}{x} f = 0. \quad (1.15)$$

За основную можно выбрать и функцию $f(r)$; при этом нужно вводить другую переменную:

$$z = -\frac{r}{e^2/(M+\varepsilon)} = -rL, \quad z = -\frac{L}{K} x. \quad (1.16)$$

Уравнение второго порядка для функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \frac{df}{dz} + \left(-\alpha^2 \frac{K}{L} + \frac{-\nu - \Gamma L}{z-1} + \frac{1}{z} \left(\frac{-2\alpha\varepsilon}{L} + \nu + \Gamma L\right) + \frac{\alpha^2 - \nu^2 + \Gamma L}{z^2} - \frac{\Gamma L(2\nu+1)}{z^3} - \frac{L^2 \Gamma^2}{z^4}\right) f = 0. \quad (1.17)$$

Отмечаем простую симметрию между уравнениями для $g(x)$ и $f(z)$:

$$x \rightarrow z, \quad g(x) \rightarrow f(z), \quad \nu \rightarrow -\nu, \quad \Gamma \rightarrow -\Gamma, \quad L \rightarrow -K, \quad K \rightarrow -L. \quad (1.18)$$

Это позволяет ограничиться анализом одного уравнения, например, для $g(x)$, а результаты для второго находить с помощью формальных замен (1.18).

Отметим, что в исходном уравнении можно предельным переходом получить описание ситуации с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом [23–25]:

$$e^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad e^2 \lambda \rightarrow \Lambda = \text{const}; \quad (1.19)$$

параметр Λ теперь размерный. Этот случай будет исследован в другой работе.

2. Решения Фробениуса

Обратимся к общим математическим свойствам уравнения (1.17) для функции $g(x)$:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) \frac{dg}{dx} + \left(\frac{\nu - \Gamma K}{x-1} - \alpha^2 \frac{L}{K} + \frac{1}{x} \left(\frac{2\alpha\varepsilon}{K} - \nu + \Gamma K\right) + \frac{\alpha^2 - \nu^2 + \Gamma K}{x^2} + \frac{\Gamma K(2\nu-1)}{x^3} - \frac{K^2 \Gamma^2}{x^4}\right) g = 0, \quad (2.1)$$

где

$$x = \frac{r}{e^2/(M-\varepsilon)}, \quad x \in (0, +\infty), \quad \nu = j + \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \frac{M-\varepsilon}{\alpha} = K, \quad \frac{M+\varepsilon}{\alpha} = L; \quad (2.2)$$

связанным состояниям отвечают значения ε из интервала $0 < \varepsilon < M$. Уравнение (2.1) имеет три особые точки: регулярную $x=1$ и две нерегулярные $x=0, x=\infty$ (обе ранга 2; [29, 30]), уравнение относится к типу $[1_1, 0_2, \infty_2]$. Для проведения анализа уравнения (2.1) перейдем к обобщенной записи:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) \frac{dg}{dx} + \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{A}{x-1}\right) g = 0. \quad (2.3)$$

Отметим, что около регулярной сингулярности $x=1$ решение ведет себя так: $g(x) = (x-1)^\rho$, $\rho = 0, 2$. В соответствии с характером сингулярных точек будем искать локальные решения около точки $x=0$ в следующем виде: $g(x) = x^a e^{bx^{-1}} G(x)$; для функции $G(x)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \left(\frac{1+2a}{x} - \frac{2b}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{dG}{dx} + \left(A_0 + \frac{A_1+a-b}{x} + \frac{A_2+a^2-b}{x^2} + \frac{A_3-2ab+b}{x^3} + \frac{A_4+b^2}{x^4} + \frac{A-a+b}{x-1} \right) G = 0.$$

Накладываем ограничения $A_3 - 2ab + b = 0$, $A_4 + b^2 = 0$; отсюда находим две возможности (отмечаем, что $A_4 = -K^2\Gamma^2 < 0$)

$$\begin{aligned} 1, \quad b_1 &= +\sqrt{-A_4}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3}{b} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(+\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}} + 1 \right); \\ 2, \quad b_2 &= -\sqrt{-A_4}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3}{b} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В явном виде эти два линейно независимых решения строятся так:

$$g_1(x) = x^\nu e^{+K\Gamma/x} G_1(x), \quad g_2(x) = x^{-\nu+1} e^{-K\Gamma/x} G_2(x); \quad (2.5)$$

конечным в нуле решениям (связанным состояниям) отвечают решения типа $g_1(x)$ (при $\Gamma < 0$) и $g_2(x)$ (при $\Gamma > 0$).

Уже отмечалось, что за основную можно выбрать и функцию $f(r)$, но при этом нужно вводить другую переменную z :

$$z = -\frac{L}{K}x, \quad x = -\frac{K}{L}z, \quad z \in (-\infty, 0);$$

уравнение для $f(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \frac{df}{dz} + \left(-\alpha^2 \frac{K}{L} + \frac{-\nu - \Gamma L}{z-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{z} \left(\frac{-2\alpha\varepsilon}{L} + \nu + \Gamma L \right) + \frac{\alpha^2 - \nu^2 + \Gamma L}{z^2} - \frac{\Gamma L(2\nu+1)}{z^3} - \frac{L^2\Gamma^2}{z^4} \right) f = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

или в краткой записи:

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \frac{df}{dz} + \left(A'_0 + \frac{A'_1}{z} + \frac{A'_2}{z^2} + \frac{A'_3}{z^3} + \frac{A'_4}{z^4} + \frac{A'}{z-1} \right) f = 0. \quad (2.7)$$

Уравнения для $g(x)$ и $f(z)$ связаны преобразованием симметрии

$$x \rightarrow z, \quad g(x) \rightarrow f(z), \quad \nu \rightarrow -\nu, \quad \Gamma \rightarrow -\Gamma, \quad L \rightarrow -K, \quad K \rightarrow -L. \quad (2.8)$$

Поэтому без дополнительных ограничений вычислением можно описать структуру двух линейно независимых решений для функции $f(z)$:

$$f_1(z) = z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} F_1(z), \quad f_2(z) = x^{\nu+1} e^{-L\Gamma/z} F_2(z). \quad (2.9)$$

Обращаемся к уравнению для функции $G(x)$ (следим сразу за двумя вариантами G_1, G_2):

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \left(\frac{1+2a}{x} - \frac{2b}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{dG}{dx} + \left(A_0 + \frac{A_1+a-b}{x} + \frac{A_2+a^2-b}{x^2} + \frac{A-a+b}{x-1} \right) G = 0.$$

Удобно использовать сокращенную запись уравнения (2.10):

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \left(\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x^2} + \frac{n_3}{x-1} \right) \frac{dG}{dx} + \left(m + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x-1} \right) G = 0.$$

Умножим уравнение на $x^2(x-1)$:

$$x^3 \frac{d^2 G}{dx^2} - x^2 \frac{d^2 G}{dx^2} + [x^2(n_1 + n_3) - x(n_1 - n_2) - n_2] \frac{dG}{dx} + [x^3 m - x^2 m + x^2(m_1 + m_3) - x(m_1 - m_2) - m_2] G = 0.$$

Будем строить решения уравнения в виде степенного ряда:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad G'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad G''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Из уравнения для $G(x)$ получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) c_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \\ & + (n_1 + n_3) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) c_{n-1} x^n - (n_1 - n_2) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - n_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \\ & + m \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} x^n + (-m + m_1 + m_3) \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n - (m_1 - m_2) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - m_2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x^n :

$$\begin{aligned} n=0, \quad & -n_2 c_1 - m_2 c_0 = 0, \\ n=1, \quad & -(n_1 - n_2) c_1 - n_2 2c_2 - (m_1 - m_2) c_0 - m_2 c_1 = 0, \\ n=2, \quad & -2c_2 + (n_1 + n_3) c_1 - (n_1 - n_2) 2c_2 - n_2 3c_3 + \\ & + (-m + m_1 + m_3) c_0 - (m_1 - m_2) c_1 - m_2 c_2 = 0, \\ n=3, \quad & 2c_2 - 3 \cdot 2c_3 + (n_1 + n_3) 2c_2 - (n_1 - n_2) 3c_3 - n_2 4c_4 + \\ & + m c_0 + (-m + m_1 + m_3) c_1 - (m_1 - m_2) c_2 - m_2 c_3 = 0, \end{aligned}$$

.....
 $n = 4, 5, 6, \dots$

$$\begin{aligned} & (n-1)(n-2) c_{n-1} - n(n-1) c_n + \\ & + (n_1 + n_3)(n-1) c_{n-1} - (n_1 - n_2) n c_n - n_2 (n+1) c_{n+1} + \\ & + m c_{n-3} + (-m + m_1 + m_3) c_{n-2} - (m_1 - m_2) c_{n-1} - m_2 c_n = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к 5-членным рекуррентным соотношениям

$n = 4, 5, 6, \dots$

$$\begin{aligned} & m c_{n-3} + (-m + m_1 + m_3) c_{n-2} + \\ & + [(n-1)(n-2) + (n_1 + n_3)(n-1) - (m_1 - m_2)] c_{n-1} + \\ & + [-n(n-1) - (n_1 - n_2)n - m_2] c_n - n_2 (n+1) c_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре – Перрона [30]. Для этого разделим рекуррентное соотношение (2.10) на c_{n-3} :

$$\begin{aligned} & m + (-m + m_1 + m_3) \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + \\ & + [(n-1)(n-2) + (n_1 + n_3)(n-1) - (m_1 - m_2)] \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + \\ & + [-n(n-1) - (n_1 - n_2)n - m_2] \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} - n_2 (n+1) \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} = 0. \end{aligned}$$

Радиус сходимости степенного ряда R_{conv} – это величина, обратная к $|R|$:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_n}, \quad R_{conv} = \frac{1}{|R|}. \quad (2.11)$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для r , полученное равенство умножаем на n^{-2} и устремляем $n \rightarrow \infty$. В результате находим уравнение

$$R^2 - R^3 = 0 \Rightarrow R = 0, \quad R = 1. \quad (2.12)$$

Следовательно, радиус сходимости ряда равен либо 1, либо бесконечности. Гарантированный радиус сходимости равен $R_{conv} = 1$ (до ближайшей особой точки в $x = 1$). В случае уравнения для функции $f(z)$ анализ полностью аналогичен.

Выполним аналогичное исследование локальных решений Фробениуса около точки $x = \infty$. Для этого возвратимся к уравнению (2.3):

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{dg}{dx} + \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{A}{x-1} \right) g = 0;$$

установим вид этого уравнения в переменной $y = 1/x$:

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{d}{dy} = -y^2 \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = y^2 \frac{d}{dy} y^2 \frac{d}{dy} = y^4 \frac{d^2}{dy^2} + 2y^3 \frac{d}{dy}.$$

Уравнение преобразуется в следующее:

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y-1} \right) \frac{dg}{dy} + \left(A_4 + \frac{A_3 + A}{y} + \frac{A_2 + A}{y^2} + \frac{A_1 + A}{y^3} + \frac{A_0}{y^4} - \frac{A}{y-1} \right) g = 0;$$

вид уравнения означает, что точка $x = \infty$ ($y = 0$) является нерегулярной особенностью ранга 2. Делаем подстановку $G(y) = y^\alpha e^{\beta y} G(y)$, уравнение для $G(y)$ имеет вид:

$$G'' + \left(\frac{2\alpha + 2}{y} - \frac{2\beta}{y^2} - \frac{1}{y-1} \right) G' + \left(A_4 + \frac{A_3 + A + \alpha - \beta}{y} + \frac{A_2 + A + \alpha(\alpha + 1) - \beta}{y^2} + \frac{A_1 + A - 2\alpha\beta}{y^3} + \frac{A_0 + \beta^2}{y^4} + \frac{\beta - \alpha - A}{y-1} \right) G = 0. \quad (2.13)$$

Накладываем ограничения

$$A_1 + A - 2\alpha\beta = 0, \quad A_0 + \beta^2 = 0;$$

отсюда находим две возможности (отмечаем, что $A_0 = \varepsilon^2 - M^2 < 0$):

$$\beta_1 = +\sqrt{-A_0} = +\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(+\frac{A_1 + A}{\sqrt{-A_0}} \right) = +\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}; \quad (2.14)$$

$$\beta_2 = -\sqrt{-A_0} = -(\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{A_1 + A}{\sqrt{-A_0}} \right) = -\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}. \quad (2.15)$$

Учитывая, что исходная подстановка имеет вид

$$g = x^{-\alpha} e^{\beta x} G(y),$$

закключаем, что для описания связанных состояний годится только случай α_2, β_2 :

$$g_2 = x^{\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}} e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} x} G_2(y). \quad (2.16)$$

При указанном выборе параметров α, β (в первую очередь, интересен относящийся к связанным состояниям случай α_2, β_2) уравнение для функции G упрощается (формально следим сразу за двумя вариантами):

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left(\frac{2\alpha + 2}{y} - \frac{2\beta}{y^2} - \frac{1}{y-1} \right) \frac{dG}{dy} + \left(A_4 + \frac{A_3 + A + \alpha - \beta}{y} + \frac{A_2 + A + \alpha(\alpha + 1) - \beta}{y^2} + \frac{\beta - \alpha - A}{(y-1)} \right) G = 0.$$

Удобно использовать сокращенную запись уравнения:

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left(\frac{N_1}{y} + \frac{N_2}{y^2} + \frac{N_3}{y-1} \right) \frac{dG}{dy} + \left(M + \frac{M_1}{y} + \frac{M_2}{y^2} + \frac{M_3}{y-1} \right) G = 0.$$

Повторять заново проделанные выше вычисления при построении локальных решений Фробениуса около точки $r = 0$ нет необходимости. Можно сразу воспользоваться полученными ранее результатами, изменив обозначения. В частности, приходим к 5-членным рекуррентным соотношениям:

$$n = 4, 5, 6, \dots$$

$$\begin{aligned} & M c_{n-3} + (-M + M_1 + M_3) c_{n-2} + \\ & + [(n-1)(n-2) + (N_1 + N_3)(n-1) - (M_1 - M_2)] c_{n-1} + \\ & + [-n(n-1) - (N_1 - N_2)n - M_2] c_n - N_2(n+1) c_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применяем метод Пуанкаре – Перрона [30]. Для этого разделим рекуррентное соотношение на c_{n-3} :

$$\begin{aligned} & M + (-M + M_1 + M_3) \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + \\ & + [(n-1)(n-2) + (N_1 + N_3)(n-1) - (M_1 - M_2)] \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + \\ & + [-n(n-1) - (N_1 - N_2)n - M_2] \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} - N_2(n+1) \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} = 0. \end{aligned}$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для R , полученное равенство умножаем на n^{-2} и устремляем $n \rightarrow \infty$. В результате получим:

$$R^2 - R^3 = 0 \Rightarrow R = 0, \quad R = 1. \quad (2.18)$$

Следовательно, радиус сходимости ряда для функции $G(y)$ равен либо 1, либо бесконечности. Выбираем гарантированный радиус сходимости $R_{conv}(y) = 1$.

Таким образом, локальные решения Фробениуса около точки $x = 0$ гарантированно сходятся внутри круга радиуса 1, в то время как локальные решения Фробениуса около точки $x = \infty$ гарантированно сходятся в кольце $|x| \in (1, +\infty)$. На границе между двумя областями решения ведут себя следующим образом: $(x-1)^\rho$, $\rho = 0$, $\rho = 2$.

3. Вычисление относительных коэффициентов для функций $f - g$

Для функций $g(x)$ и $f(z)$ имеем по два решения:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^\nu e^{+K\Gamma/x} G_1(x), & g_2(x) &= x^{-\nu+1} e^{-K\Gamma/x} G_2(x), \\ f_1(z) &= z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} F_1(z), & f_2(z) &= z^{\nu+1} e^{-L\Gamma/z} F_2(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вторая пара решений может быть преобразована к переменной x :

$$f_1(z) = \left(-\frac{L}{K}x\right)^{-\nu} e^{-K\Gamma/x} F_1\left(-\frac{L}{K}x\right), \quad f_2(z) = \left(-\frac{L}{K}x\right)^{\nu+1} e^{+K\Gamma/x} F_2\left(-\frac{L}{K}x\right). \quad (3.2)$$

Сопоставляя полученные соотношения, заключаем, что в пары решений должны связываться следующие функции:

$$g_1(x) \dots \bar{f}_1(z) = Cf_2(z), \quad g_2(x) \dots \bar{f}_2(z) = Df_1(z).$$

Будем из $g_1(x)$ находить выражение для $\bar{f}_1(z)$ – пользуемся уравнением

$$\left(-\frac{K}{L} \frac{d}{dx} + \nu \frac{K}{L} \frac{1}{x} - \frac{\Gamma K^2}{x^2} \right) g_1(x) = \alpha \left(\frac{K}{L} + \frac{1}{z} \right) Cf_2(z).$$

После простого вычисления получаем

$$-\frac{K}{L} x^{\nu+1} e^{+K\Gamma/x} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = \alpha \left(\frac{K}{L} + \frac{1}{z} \right) C \left(-\frac{L}{K} x \right)^{\nu+1} e^{+K\Gamma/x} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \left(-\frac{L}{K} x \right)^n,$$

что после сокращения на общий множитель дает

$$-\frac{K}{L} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n-1} = \alpha C \left(\frac{K}{L} + \frac{1}{z} \right) \left(-\frac{L}{K} \right)^{\nu+1} e \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \left(-\frac{L}{K} \right)^n x^n.$$

Достаточно ограничиться учетом первых нескольких членов рядов (полагаем $c'_0 = 1$):

$$-\frac{K}{L} \left[\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \dots \right] = (-1)^{\nu+1} \alpha C \left(\frac{L}{K} \right)^{\nu} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left[c'_0 - c'_1 \frac{L}{K} x + c'_2 \frac{L^2}{K^2} x^2 + \dots \right];$$

отсюда находим

$$-\frac{K}{L} \left[\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \dots \right] = (-1)^{\nu+1} \alpha C \left(\frac{L}{K} \right)^{\nu} \left[-\frac{1}{x} + \left(c'_0 + c'_1 \frac{L}{K} \right) + \left(-c'_1 \frac{L}{K} - c'_2 \frac{L^2}{K^2} \right) + \dots \right].$$

Для установления коэффициента C достаточно воспользоваться членами x^{-1} – так находим

$$C = (-1)^{\nu+1} (K/L)^{\nu+1} \frac{c_1}{\alpha}. \quad (3.3)$$

Теперь установим относительный коэффициент для пары $g_2(x) \dots f_1(z)$. Исходим из уравнения

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z} + \frac{\Gamma L}{z^2} \right) f_1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{z} \right) D g_2 = 0,$$

где $f_1(z) = z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} F_1(z)$, $g_2(x) = x^{-\nu+1} e^{-K\Gamma/x} G_2(x)$. Вычисляем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z} + \frac{\Gamma L}{z^2} \right) z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} F_1(z) &= -\nu z^{-\nu-1} e^{+L\Gamma/z} F_1(z) - L\Gamma z^{-\nu-2} e^{+L\Gamma/z} F_1(z) + z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} F'_1(z) + \\ &+ \nu z^{-\nu-1} e^{+L\Gamma/z} F_1(z) + \Gamma L z^{-\nu-2} e^{+L\Gamma/z} F_1(z) = z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} \frac{d}{dz} F_1(z); \end{aligned}$$

т.е.

$$z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} \frac{d}{dz} F_1(z) = \alpha \left(1 - \frac{1}{z} \right) D x^{-\nu+1} e^{-K\Gamma/x} G_2(x),$$

или

$$z^{-\nu} e^{+L\Gamma/z} \frac{d}{dz} F_1(z) = \alpha \left(1 - \frac{1}{z} \right) D \left(-\frac{K}{L} z \right)^{-\nu+1} e^{+L\Gamma/z} G_2 \left(-\frac{K}{L} z \right);$$

значит

$$\frac{d}{dz} F_1(z) = \alpha D \left(-\frac{K}{L} \right)^{-\nu+1} (z-1) G_2 \left(-\frac{K}{L} z \right). \quad (3.4)$$

Отсюда, учитывая структуру двух рядов:

$$F_1(z) = (1 + c'_1 z + c'_2 z^2 + \dots), \quad G_2(x) = [1 + c_1 \left(-\frac{K}{L} z \right) + c_2 \left(-\frac{K}{L} z \right)^2 + \dots],$$

получаем

$$c'_1 + 2c'_2 z + \dots = (-1)^{-\nu+1} \alpha D \left(\frac{K}{L}\right)^{-\nu} [-1 + (1 + c_1 \frac{K}{L})Z + \dots];$$

относительный коэффициент D должен удовлетворять равенству

$$c'_1 = (-1)^{-\nu} \alpha D \left(\frac{K}{L}\right)^{-\nu} \Rightarrow D = (-1)^\nu (K/L)^\nu \frac{c'_1}{\alpha}. \quad (3.5)$$

Таким образом, имеем два линейно независимых решения:

$$\{g_1(x), Cf_2(z)\}, \quad \text{где } C = (-1)^{\nu+1} \left(\frac{K}{L}\right)^{\nu+1} \frac{c_1}{\alpha}; \quad (3.6)$$

$$\{g_2(x), Df_1(z)\}, \quad \text{где } D = (-1)^\nu \left(\frac{K}{L}\right)^\nu \frac{c'_1}{\alpha}. \quad (3.7)$$

Из этих двух решений связанным состояниям отвечает в зависимости от знака параметра Γ только одна пара: либо $g_1(z) - Cf_2(z)$, либо $g_2(z) - Df_1(z)$.

4. Сведение задачи к анализу уравнения 4-го порядка

Можно развить другой способ анализа и привести задачу к уравнению 4-го порядка только с двумя особыми точками. Запишем уравнения для функций f_1, f_2

$$\begin{aligned} [i \frac{d}{dr} + (\varepsilon + \frac{\alpha}{r})]f_1 + [i \frac{\nu}{r} - \delta(M + \frac{i\Gamma}{r^2})]f_2 &= 0, \\ [i \frac{d}{dr} - (\varepsilon + \frac{\alpha}{r})]f_2 + [i \frac{\nu}{r} + \delta(M - \frac{i\Gamma}{r^2})]f_1 &= 0; \end{aligned} \quad (4.1)$$

с использованием обозначений

$$\hat{a} = i \frac{d}{dr} + (\varepsilon + \frac{e^2}{r}), \quad \hat{b} = i \frac{d}{dr} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})$$

их можно представить в другом виде:

$$\hat{a}f_1 - \delta(M - i\delta \frac{\nu}{r} + i \frac{\Gamma}{r^2})f_2 = 0, \quad \hat{b}f_2 + \delta(M + i\delta \frac{\nu}{r} - \frac{i\Gamma}{r^2})f_1 = 0. \quad (4.2)$$

На первое уравнение в (4.2) действуем оператором \hat{b} , а на второе – оператором \hat{a} ; получаем

$$\begin{aligned} \hat{b}\hat{a}f_1 + \delta(M - i\delta \frac{\nu}{r} + i \frac{\Gamma}{r^2})\delta(M + i\delta \frac{\nu}{r} - \frac{i\Gamma}{r^2})f_1 + \delta(\delta \frac{\nu}{r^2} - \frac{2\Gamma}{r^3})f_2 &= 0, \\ \hat{a}\hat{b}f_2 + \delta(M + i\delta \frac{\nu}{r} - \frac{i\Gamma}{r^2})\delta(M - i\delta \frac{\nu}{r} + i \frac{\Gamma}{r^2})f_2 + i\delta(-i\delta \frac{\nu}{r^2} + i \frac{2\Gamma}{r^3})f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{aligned} \hat{b}\hat{a}f_1 + [M^2 + (\delta \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2]f_1 + (\frac{\nu}{r^2} - \delta \frac{2\Gamma}{r^3})f_2 &= 0, \\ \hat{a}\hat{b}f_2 + [M^2 + (\delta \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2]f_2 + (\frac{\nu}{r^2} - \delta \frac{2\Gamma}{r^3})f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учитываем равенства

$$\hat{a}\hat{b} = -\frac{d^2}{dr^2} + i \frac{e^2}{r^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2, \quad \hat{b}\hat{a} = -\frac{d^2}{dr^2} - i \frac{e^2}{r^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2,$$

тогда уравнения приводим к виду

$$[-\frac{d^2}{dr^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2 + M^2 + (\delta \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2]f_1 + (-i \frac{e^2}{r^2} f_1 + \frac{\nu}{r^2} f_2) - 2\delta \frac{\Gamma}{r^3} f_2 = 0,$$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)^2 + M^2 + \left(\delta \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2}\right)^2\right] f_2 + \left(+\frac{\nu}{r^2} f_1 + i \frac{e^2}{r^2} f_2\right) - 2\delta \frac{\Gamma}{r^3} f_1 = 0. \quad (4.4)$$

Если перейти к компонентам $F_1 = f_1 + f_2$, $F_2 = i(f_2 - f_1)$, то система (4.4) дает:

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)^2 + M^2 + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{\delta\Gamma}{r^2}\right)^2 + \frac{\nu}{r^2} - 2\frac{\delta\Gamma}{r^3}\right] F_1 + \frac{e^2}{r^2} F_2 = 0, \\ &\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)^2 + M^2 + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{\delta\Gamma}{r^2}\right)^2 - \frac{\nu}{r^2} + 2\frac{\delta\Gamma}{r^3}\right] F_2 - \frac{e^2}{r^2} F_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть для определенности $\delta = +1$:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)^2 + M^2 + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2}\right)^2 + \frac{\nu}{r^2} - 2\frac{\Gamma}{r^3}\right) F_1 + \frac{e^2}{r^2} F_2 = 0, \\ &\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \left(\varepsilon + \frac{e^2}{r}\right)^2 + M^2 + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2}\right)^2 - \frac{\nu}{r^2} + 2\frac{\Gamma}{r^3}\right) F_2 - \frac{e^2}{r^2} F_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сингулярными здесь являются только две точки $r = 0, \infty$, и нет дополнительной сингулярности в физически ничем не мотивированной точке r_0 .

5. Анализ уравнения 4-го порядка с двумя сингулярными точкам

Из (4.6) следует уравнение 4-го порядка для F_2 :

$$\begin{aligned} &\frac{d^4 F_2}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 F_2}{dr^3} + \left[-2M^2 + 2\varepsilon^2 + \frac{4e^2\varepsilon}{r} + \frac{2(e^4 - \nu^2 + 1)}{r^2} + \frac{4\Gamma\nu}{r^3} - \frac{2\Gamma^2}{r^4}\right] \frac{d^2 F_2}{dr^2} + \\ &\quad + \left[\frac{4(\varepsilon^2 - M^2)}{r} + \frac{4e^2\varepsilon}{r^2} - \frac{4\Gamma(\nu - 1)}{r^4} + \frac{4\Gamma^2}{r^5}\right] \frac{dF_2}{dr} + \\ &\quad + \left[\left(M^2 - \varepsilon^2\right)^2 - \frac{4e^2\varepsilon(M^2 - \varepsilon^2)}{r} + \frac{-2M^2e^4 + 6e^4\varepsilon^2 + 2M^2\nu^2 - 2\nu^2\varepsilon^2 - 2M^2 + 2\varepsilon^2}{r^2} + \right. \\ &\quad + \frac{4e^6\varepsilon - 4e^2\nu^2\varepsilon - 4\Gamma M^2\nu + 4\Gamma\nu\varepsilon^2}{r^3} + \frac{e^8 - 2e^4\nu^2 + 8\Gamma e^2\nu\varepsilon + 2\Gamma^2 M^2 - 2\Gamma^2\varepsilon^2 + e^4 + \nu^4 - \nu^2}{r^4} - \\ &\quad \left. - \frac{4\Gamma(-e^4\nu + \Gamma e^2\varepsilon + \nu^3 - 2\nu + 1)}{r^5} - \frac{2\Gamma^2(e^4 - 3\nu^2 + 5)}{r^6} - \frac{4\Gamma^3\nu}{r^7} + \frac{\Gamma^4}{r^8}\right] F_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следует обратить внимание на то, что это уравнение 4-го порядка имеет особенности только в двух точках: $r = 0, \infty$. Уравнение 4-го порядка для функции F_1 выглядит аналогично и получается из приведенного с использованием замен:

$$F_2 \Rightarrow F_1, \quad \Gamma \Rightarrow -\Gamma, \quad \nu \Rightarrow -\nu.$$

Представим два уравнения (для F_2 и F_1) в обобщенной форме так:

$$\frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{d}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} + \left(a_0 + \frac{a_1}{r} + \dots + \frac{a_4}{r^4}\right) \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(b_0 + \frac{b_1}{r} + \dots + \frac{a_5}{r^5}\right) \frac{dF}{dr} + \left(c_0 + \frac{c_1}{r} + \dots + \frac{c_8}{r^8}\right) F = 0.$$

Ищем решение в следующем виде $F = r^A e^{B/r} f(r)$, получаем выражения для производных:

$$F' = r^A e^{B/r} \left(\frac{A}{r} f - \frac{B}{r^2} f + f' \right),$$

$$\begin{aligned}
F'' &= r^A e^{B/r} \left\{ \left(\frac{A(A-1)}{r^2} - \frac{BA+B(A-2)}{r^3} + \frac{B^2}{r^4} \right) f + \left(\frac{2A}{r} - \frac{2B}{r^2} \right) f' + f'' \right\}, \\
F''' &= r^A e^{B/r} \left\{ \left(\frac{A^3-3A^2+2A}{r^3} + \frac{9AB-3A^2B-6B}{r^4} + \frac{3AB^2-6B^2}{r^5} - \frac{B^3}{r^6} \right) f + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3A^2-3A}{r^2} + \frac{-6BA+6B}{r^3} + \frac{3B^2}{r^4} \right) f' + \left(\frac{3A}{r} - \frac{3B}{r^2} \right) f'' + f''' \right\}, \\
F'''' &= r^A e^{B/r} \left\{ f'''' + \left[\frac{4A}{r} - \frac{4B}{r^2} \right] f''' + \left[\frac{6A(A-1)}{r^2} - \frac{12B(A-1)}{r^3} + \frac{6B^2}{r^4} \right] f'' + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{12B^2(A-2)}{r^5} - \frac{4B^3}{r^6} + \frac{4A(A^2-3A+2)}{r^3} - \frac{12B(A^2-3A+2)}{r^4} \right] f' + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{A(A^3-6A^2+11A-6)}{r^4} - \frac{4B(A^3-6A^2+11A-6)}{r^5} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{6B^2(A^2-5A+6)}{r^6} + \frac{B^4}{r^8} - \frac{4B^3(A-3)}{r^7} \right] f \right\}.
\end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в уравнение 4-го порядка и находим:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^4 f}{dr^4} + \left[-\frac{4B}{r^2} + \frac{4(1+A)}{r} \right] \frac{d^3 f}{dr^3} + \\
&+ \left[-2(M^2 - \varepsilon^2) + \frac{4e^2 \varepsilon}{r} + \frac{2e^4 - 2v^2 + 2 + 6A(1+A)}{r^2} + \frac{-12AB + 4\Gamma v}{r^3} + \frac{6B^2 - 2\Gamma^2}{r^4} \right] \frac{d^2 f}{dr^2} + \\
&+ \left[-\frac{(4M^2 - \varepsilon^2)(1+A)}{r} + \frac{4e^2 \varepsilon(2A+1) - 4B(-M^2 + \varepsilon^2)}{r^2} + \frac{4Ae^4 - 8Be^2 \varepsilon + 4A^3 - 4Av^2}{r^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-4e^4 B - 12A^2 B + 8\Gamma v A + 4Bv^2 + 12AB - 4B - 4\Gamma(v-1)}{r^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{12AB^2 - 4A\Gamma^2 - 8B\Gamma v - 12B^2 + 4\Gamma^2}{r^5} - \frac{4B(B^2 - \Gamma^2)}{r^6} \right] \frac{df}{dr} + \\
&+ \left[(M^2 - \varepsilon^2)^2 - \frac{4e^2 \varepsilon(M^2 - \varepsilon^2)}{r} + \frac{2(3e^4 + A(1+A) - v^2 + 1)\varepsilon^2 - 2M^2(e^4 + A(1+A) - v^2 + 1)}{r^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4e^6 \varepsilon + 4A^2 e^2 \varepsilon - 4e^2 v^2 \varepsilon + 4AB(M^2 - \varepsilon^2) - 4\Gamma v(M^2 - \varepsilon^2)}{r^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^4} \left[A^4 - 2A^3 + (2e^4 - 2v^2 + 1)A^2 + (-8Be^2 \varepsilon - 2e^4 + 2v^2)A + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^8 - (2v^2 - 1)e^4 + 4\varepsilon(2\Gamma v + B)e^2 + v^2(v^2 - 1) - 2(M^2 - \varepsilon^2)(B^2 - \Gamma^2) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^5} \left[4B^2 e^2 \varepsilon - 4(A-1)(e^4 + A^2 - v^2 - 2A+1)B + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4(A^2\nu - (2\nu - 1)A + e^4\nu - \Gamma e^2\varepsilon - \nu^3 + 2\nu - 1)\Gamma] + \\
 & + \frac{(2e^4 + 6A^2 - 2\nu^2 - 18A + 14)B^2 - 8(A\nu - 3/2\nu + 1/2)\Gamma B - 2\Gamma^2(e^4 + A^2 - 3\nu^2 - 3A + 5)}{r^6} \\
 & - 4 \left[\frac{((A - 2)B - \Gamma\nu)(B^2 - \Gamma^2)}{r^7} + \frac{(B^2 - \Gamma^2)^2}{r^8} \right] f = 0. \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Отмечаем: при $B = \pm\Gamma$ члены со степенями r^{-8}, r^{-7} исчезают. Пусть $B = +\Gamma$, тогда, приравнявая к нулю коэффициент при степени r^{-6} , получим:

$$\begin{aligned}
 & (2e^4 + 6A^2 - 2\nu^2 - 18A + 14)\Gamma^2 - 8(A\nu - 3/2\nu + 1/2)\Gamma^2 - 2\Gamma^2(e^4 + A^2 - 3\nu^2 - 3A + 5) = 0 \\
 & \Rightarrow 4\Gamma^2(A - \nu)(A - \nu - 3) = 0 \Rightarrow A = \nu, \nu + 3. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Пусть $B = -\Gamma$, тогда для A найдем:

$$A = -\nu + 1, -\nu + 2. \tag{5.4}$$

Таким образом, появляется возможность построить 4 линейно независимых решения:

$$\begin{aligned}
 & F_i(r) = r^{A_i} e^{B_i r^{-1}} f_i(r), \quad i = 1, 2, 3, 4; \\
 & B_1 = -\Gamma, A_1 = -\nu + 1, \quad B_2 = -\Gamma, A_2 = -\nu + 2, \\
 & B_3 = +\Gamma, A_3 = \nu, \quad B_4 = +\Gamma, A_4 = \nu + 3. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

При $\Gamma > 0$ для описания связанных состояний интерес представляют случаи 1 и 2; при $\Gamma < 0$ для описания связанных состояний интерес представляют случаи 3 и 4. Для определенности рассмотрим варианты 1 и 2.

Пусть $B_1 = -\Gamma, A_1 = -\nu + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{df_1^4}{dr^4} + \left[\frac{4(2 - \nu)}{r} + \frac{4\Gamma}{r^2} \right] \frac{df_1^3}{dr^3} + \\
 & + \left[-2(M^2 - \varepsilon^2) + \frac{4e^2\varepsilon}{r} + \frac{2e^4 + 4\nu^2 - 18\nu + 14}{r^2} - \frac{4\Gamma(2\nu - 3)}{r^3} + \frac{4\Gamma^2}{r^4} \right] \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \\
 & + \left[\frac{4(\nu - 2)(M^2 - \varepsilon^2)}{r} + \frac{-4e^2\varepsilon(2\nu - 3) - 4\Gamma(M^2 - \varepsilon^2)}{r^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{-4e^4\nu + 8\Gamma e^2\varepsilon + 4e^4 + 8\nu^2 - 12\nu + 4}{r^3} + \frac{4\Gamma(e^4 - 2\nu + 2)}{r^4} \right] \frac{df_1}{dr} + \\
 & + \left[(M^2 - \varepsilon^2)^2 - \frac{4e^2\varepsilon(M^2 - \varepsilon^2)}{r} + \frac{(6e^4 - 6\nu + 6)\varepsilon^2 - 2M^2(e^4 - 3\nu + 3)}{r^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{4e^6\varepsilon - 8e^2\varepsilon\nu - 4\Gamma M^2 + 4\Gamma\varepsilon^2 + 4e^2\varepsilon}{r^3} + \frac{e^2(e^6 - 2e^2\nu + 4\Gamma\varepsilon + e^2)}{r^4} \right] f_1 = 0. \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

Пусть $B_2 = -\Gamma, A_2 = -\nu + 2$:

$$\frac{df_2^4}{dr^4} + \left[\frac{4(3 - \nu)}{r} + \frac{4\Gamma}{r^2} \right] \frac{df_2^3}{dr^3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-2(M^2 - \varepsilon^2) + \frac{4e^2\varepsilon}{r} + \frac{2e^4 + 4v^2 - 30v + 38}{r^2} - \frac{8\Gamma(-3+v)}{r^3} + \frac{4\Gamma^2}{r^4} \right] \frac{df_2^2}{dr^2} + \\
& + \left[\frac{4(M^2 - \varepsilon^2)(-3+v)}{r} + \frac{-4e^2\varepsilon(2v-5) - 4\Gamma(M^2 - \varepsilon^2)}{r^2} + \right. \\
& + \left. \frac{-4e^4v + 8\Gamma e^2\varepsilon + 8e^4 + 16v^2 - 48v + 32}{r^3} + \frac{4\Gamma(e^4 - 6v + 8)}{r^4} + \frac{8\Gamma^2}{r^5} \right] \frac{df_2}{dr} + \\
& + \left[(M^2 - \varepsilon^2)^2 - \frac{4e^2\varepsilon(M^2 - \varepsilon^2)}{r} + \frac{(6e^4 - 10v + 14)\varepsilon^2 - 2M^2(e^4 - 5v + 7)}{r^2} + \right. \\
& + \left. \frac{4e^6\varepsilon - 16e^2\varepsilon v - 8\Gamma M^2 + 8\Gamma\varepsilon^2 + 16e^2\varepsilon}{r^3} + \right. \\
& + \left. \frac{e^8 - 6e^4v + 12\Gamma e^2\varepsilon + 5e^4 + 8v^2 - 12v + 4}{r^4} + \frac{4\Gamma(e^4 - 2v + 2)}{r^5} \right] f_2 = 0. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Вводим обозначения коэффициентов в виде букв (можно следить за обоими вариантами):

$$f''' + \left(\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}\right)f'' + (b_0 + \frac{b_1}{r} + \dots + \frac{b_4}{r^4})f' + (\frac{c_1}{r} + \dots + \frac{c_5}{r^5})f' + (d_0 + \frac{d_1}{r} + \dots + \frac{d_5}{r^5})f = 0. \quad (5.8)$$

Будем строить решения в виде степенного ряда

$$\begin{aligned}
f(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n, \quad f'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n D_n r^{n-1}, \\
f''(r) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) D_n r^{n-2}, \quad f'''(r) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) D_n r^{n-3}, \\
f''''(r) &= \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) D_n r^{n-4}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Подставляя эти ряды в уравнение 4-го порядка, получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) D_n r^{n-4} + \left(\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}\right) \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) D_n r^{n-3} + \\
& + \left(b_0 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4}\right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) D_n r^{n-2} + \left(c_0 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4} + \frac{c_5}{r^5}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n D_n r^{n-1} + \\
& + \left(d_0 + \frac{d_1}{r} + \frac{d_2}{r^2} + \frac{d_3}{r^3} + \frac{d_4}{r^4} + \frac{d_5}{r^5}\right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n = 0.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, после простых преобразований приходим к уравнению на результирующий степенной ряд:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} c_5 (k+1) D_{k+1} r^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_5 D_k r^k + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} b_4 (k+1) k D_{k+1} r^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_4 k D_k r^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_4 D_{k-1} r^k + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} b_3 k(k-1) D_k r^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_3 (k-1) D_{k-1} r^k + \sum_{k=2}^{\infty} d_3 D_{k-2} r^k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=3}^{\infty} a_2 k(k-1)(k-2)D_k r^k + \sum_{k=3}^{\infty} b_2 (k-1)(k-2)D_{k-1} r^k + \sum_{k=3}^{\infty} c_2 (k-2)D_{k-2} r^k + \sum_{k=3}^{\infty} d_2 D_{k-3} r^k + \\
 & + \sum_{k=4}^{\infty} a_1 (k-1)(k-2)(k-3)D_{k-1} r^k + \sum_{k=4}^{\infty} b_1 (k-2)(k-3)D_{k-2} r^k + \sum_{k=4}^{\infty} c_1 (k-3)D_{k-3} r^k + \sum_{k=4}^{\infty} d_1 D_{k-4} r^k + \\
 & + \sum_{k=5}^{\infty} (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)D_{k-1} r^k + \sum_{k=5}^{\infty} b_0 (k-3)(k-4)D_{k-3} r^k + \\
 & + \sum_{k=5}^{\infty} c_0 (k-4)D_{k-4} r^k + \sum_{k=5}^{\infty} d_0 D_{k-5} r^k = 0.
 \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r^k :

$$\begin{aligned}
 k=0, & \quad c_5 D_1 + d_5 D_0 = 0, \\
 k=1, & \quad c_5 2D_2 + d_5 D_1 + b_4 2D_2 + c_4 D_1 + d_4 D_0 = 0, \\
 k=2, & \quad c_5 3D_3 + d_5 D_2 + b_4 3 \cdot 2D_3 + c_4 2D_2 + d_4 D_1 + b_3 2D_2 + c_3 D_1 + d_3 D_0 = 0, \\
 k=3, & \quad c_5 4D_4 + d_5 D_3 + b_4 4 \cdot 3D_4 + c_4 3D_3 + d_4 D_2 + \\
 & + b_3 3 \cdot 2D_3 + c_3 2D_2 + d_3 D_1 + a_2 3 \cdot 2 \cdot 1D_3 + b_2 2 \cdot 1D_2 + c_2 D_1 + d_2 D_0 r^k = 0, \\
 k=4, & \quad c_5 5D_5 + d_5 D_4 + b_4 5 \cdot 4D_5 + c_4 4D_4 + d_4 D_3 + b_3 4 \cdot 3D_4 + c_3 3D_3 + d_3 D_2 + \\
 & + a_2 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1D_4 + b_2 3 \cdot 2 \cdot 1D_3 + c_2 2D_2 + d_2 D_1 + a_1 3 \cdot 2 \cdot 1D_3 + b_1 2 \cdot 1D_2 + c_1 D_1 + d_1 D_0 r^k; \\
 k=5, 6, \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_5 (k+1)D_{k+1} + d_5 D_k + b_4 (k+1)kD_{k+1} + c_4 kD_k + d_4 D_{k-1} + \\
 & + b_3 k(k-1)D_k + c_3 (k-1)D_{k-1} + d_3 D_{k-2} + \\
 & + a_2 k(k-1)(k-2)D_k + b_2 (k-1)(k-2)D_{k-1} + c_2 (k-2)D_{k-2} + d_2 D_{k-3} + \\
 & + a_1 (k-1)(k-2)(k-3)D_{k-1} + b_1 (k-2)(k-3)D_{k-2} + c_1 (k-3)D_{k-3} + d_1 D_{k-4} + \\
 & + (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)D_{k-1} + b_0 (k-3)(k-4)D_{k-3} + \\
 & + c_0 (k-4)D_{k-4} + d_0 D_{k-5} = 0. \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Таким образом, степенной ряд характеризуется 7-членными рекуррентными соотношениями:

$$\{ D_{k-5}, D_{k-4}, \dots, D_k, D_{k+1} \} \quad (k=5, 6, 7, \dots).$$

Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре – Перрона. Для этого получим алгебраическое уравнение для величины, определяющей возможные радиусы сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{k-4}}{D_{k-5}}, \quad R_{conv} = \frac{1}{|R|}. \tag{5.11}$$

Для величины R находим следующее алгебраическое уравнение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{k^4} \frac{D_{k-1}}{D_{k-2}} \frac{D_{k-2}}{D_{k-3}} \frac{D_{k-3}}{D_{k-4}} \frac{D_{k-4}}{D_{k-5}} = R^4 = 0 \Rightarrow R_{conv} = \infty.$$

Заклучение

Исследована задача о частице со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом (дополнительно учтено взаимодействие Паули) во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных задача сведена к дифференциальным уравнениям второго порядка для двух радиальных функций с одной регулярной особой точкой и двумя не-

регулярными в $r = 0, \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса около точек $r = 0$ и $r = \infty$. По методу Пуанкаре – Перрона показана сходимость возникающих при этом степенных рядов с 5-членными рекуррентными соотношениями; ряды сходятся соответственно внутри и вне круга радиуса 1. На границе двух областей поведение решения вполне регулярное. Вычислены относительные коэффициенты в двух парах решений системы уравнений в зависимости от знака \pm при параметре аномального магнитного момента. Развита еще один способ анализа системы, основанный на полученных дифференциальных уравнениях 4-го порядка, которые имеют в качестве особых точек только точки $r = 0$ и $r = \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса для этих уравнений около точки $r = 0$, возникающие степенные ряды с 7-членными рекуррентными соотношениями для коэффициентов сходятся согласно методу Пуанкаре – Перрона во всей области изменения переменной $r \in [0, \infty)$. Качественный анализ поведения эффективного обобщенного радиального импульса показывает, что финитные движения (т.е. связанные состояния) в этой системе возможны.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20. – С. 27–38.
2. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В. Я. Файнберг // Тр. Физ. ин-та АН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
3. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
4. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином 1/2 / И. Улегла // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.
5. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 6. – С. 81–88; Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин // Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. – № 3. – С. 78–83; Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 // Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. – № 2. – С. 79–85; Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 1 // Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
6. Capri, A. Z. Nonuniqueness of the spin 1/2 equation / A. Z. Capri // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178. – № 5. – P. 1811–1815; First-order wave equations for half-odd-integral spin // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178. – P. 2427–2433; Electromagnetic properties of a new spin-1/2 field // Progr. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 48. – P. 1364–1374.
7. Shamaly, A. First-order wave equations for integral spin / A. Shamaly, A. Z. Capri // Nuovo Cimento. B. – 1971. – Vol. 2. – P. 235–253; Unified theories for massive spin 1 fields // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51. – P. 1467–1470.
8. Khalil, M. A. K. Properties of a 20-component spin 1/2 relativistic wave equation / M. A. K. Khalil // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15. – P. 1532–1539; Barnacle equivalence structure in relativistic wave equation // Progr. Theor. Phys. – 1978. – Vol. 60. – P. 1559–1579; An equivalence of relativistic field equations // Nuovo Cimento. A. – 1978. – Vol. 45. – P. 389–404; Reducible relativistic wave equations // J. Phys. A. Math. and Gen. – 1979. – Vol. 12. – P. 649–663.
9. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

10. Богуш, А. А. Уравнения с кратными представлениями группы Лоренца и взаимодействие типа Паули / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1979. – № 3. – С. 61–65; Описание свободной частицы различными волновыми уравнениями // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28, № 8. – С. 702–705; Уравнение для частицы со спином $1/2$, обладающей аномальным магнитным моментом // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

11. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности / Ин-т физики АН БССР. – Минск, 1981. – С. 81–90.

12. Богуш, А. А. Об интерпретации дополнительных компонент волновых функций при электромагнитном взаимодействии / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 277, № 2. – С. 343–346.

13. Теория Петраша для частицы со спином $1/2$ в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

14. Kisel, V. V. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in a curved space-time, non-relativistic approximation / V. V. Kisel, N. G. Tokarevskaya, V. M. Red'kov // Proceedings of 11-th International School and Conference «Foundation and Advances in Nonlinear Science»; eds.: V. I. Kuvshinov, G. G. Krylov. – Minsk, 2004. – P. 36–42.

15. Petras Theory of a Spin- $1/2$ Particle in Electromagnetic and Gravitational Fields [Electronic resource] / A. A. Bogush [and al.] // ArXiv.org. – 18 Apr 2006. – arXiv:hep-th/0604109. – 44 p.

16. Kisel, V. V. Relativistic wave equations with extended sets of representations : Kandid. dissertation / V. V. Kisel. – Minsk, 1984.

17. Kisel, V. V. Shamaly-Capri equation and additional interaction of a vector particle with gravitational field / V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Covariant methods in theoretical physics. Elementary particles physics and relativity theory / Institute of Physics, NAS of Belarus. – Minsk, 2001. – P. 107–112.

18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. наука, 2015. – 328 с.

19. Кисель, В. В. Частица Дирака с аномальным магнитным моментом во внешнем магнитном поле, построение решений методом квадрирования / В. В. Кисель, Я. А. Войнова, В. М. Редьков // Proceedings of the IX International Conference «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai – Gauss – Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 nov. 2015 / Ed. by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 431–440.

20. Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента / Е. М. Овсюк [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 4. – С. 67–73.

21. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / Е. М. Ovsyuk [and al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.

22. Частица со спином $1/2$ и аномальным моментом в однородном электрическом поле / Е. М. Овсюк [и др.] // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 22–28.

23. Veko, O. V. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in the Coulomb field / O. V. Veko, Y. A. Voynoa, E. M. Ovsyuk // XXIII International Seminar «Nonlinear Phenomena in Complex Systems», Minsk, May 24–27, 2016.

24. Spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment in external fields (uniform magnetic and electric, or Coloumb): exact solutions and physical effects / Е. М. Ovsyuk

[and al.] // The X-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems DGDS-2016, Mangalia, Romania, 28 August – 3 September 2016.

25. Веко, О. В. Частица со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом в кулоновском поле / О. В. Веко, Я. А. Войнова, Е. М. Овсюк // Вес. НАНБ. Сер. фїз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 48–56.

26. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. наука, 2009. – 486 с.

27. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 385 с.

28. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск, 2011. – 339 с.

29. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000.

30. Heun's differential equation / A. Ronveaux (ed.). – Oxford : Oxford University Press, 1995.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.02.2017

Ovsyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. Dirac Particle with Anomalous Magnetic Moment, Properties of Exact Solutions in the Coulomb Field

The problem of a spin $1/2$ particle with anomalous magnetic moment – the Pauli interaction is taken into account – in presence of external Coulomb field is studied. After separation of the variables the task is reduced to 2-nd order differential equations for two functions, with one regular singularity and two irregular singularities at $r = 0, \infty$ of the rank 2. Local Frobenius solutions near the points $r = 0$ and $r = \infty$ are constructed. By Poincaré – Perrone method, convergence of arising power series with 5-term recurrent formulas for coefficients is proved; the series converge inside and outside of the circle of the radius 1; on the boundary of two domains behavior of the solutions is quite regular. The relative coefficients for two pairs of solutions are found, depending on the sign \pm at the parameter of anomalous moment either one or other pair is appropriate to describe bound states in the system. An additional method to examine the problem is developed which is based on deriving two of 4-th order differential equations – they have onto two singular points, irregular and of the rank 2 in $r = 0$ and $r = \infty$. Its Frobenius solutions near the points $r = 0$ are constructed, and their convergence arising power series is proved in the whole interval $r \in [0, \infty)$. Qualitative analysis shows existence of finite motions (bound states) in the system under consideration.

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий¹, Е.М. Хомич²¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²магистрант каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: otf@brsu.brest.by**СВЕРХПЛОТНОЕ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОЕ ВЕЩЕСТВО
В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного замагниченного электронно-протонного вещества. Получено уравнение состояния сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля.

Нахождение уравнений состояния вещества при плотностях, превышающих порог его полной ионизации, имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. В настоящей работе сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле и получены его уравнения состояния.

Рассмотрим сначала вопрос о фазовом состоянии электронно-протонного вещества (водорода при плотностях, превышающих порог полной ионизации). Как отмечалось в [1], вследствие кулоновских взаимодействий ядра такого вещества могут совершать колебания относительно некоторых точек равновесия. В этом случае следует говорить о твердом состоянии. Следуя приближенным оценкам [1], полагаем, что при определенных условиях протоны образуют упорядоченную структуру, обладающую некоторыми свойствами твердого тела (не принципиально в данном случае аморфное или кристаллическое вещество рассматривается).

Оценим области значений массовой плотности, при которых твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества при низких и высоких температурах устойчиво (не переходит в плазменное состояние). Предположим, что в электронно-протонном замагниченном веществе имеет место фаза твердого тела. Воспользуемся для оценки ее границ приближенным методом, изложенным в [1] для немагниченного сверхплотного водорода и использованном в [2] для электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле. Следуя [1; 2], разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним протоном и равномерно распределенным электронным зарядом в каждой, упакованные максимально плотно. Как отмечалось в [1], отклонения от равномерного распределения электронного заряда для предстоящих оценок не существенны. Также пренебрегаем в первом приближении взаимодействием протона с соседними

ячейками [1]. Радиус такой ячейки $R \approx \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$, где m_p – масса протона, ρ – массовая

плотность вещества. Выражение для кулоновского взаимодействия протона с электронным «облаком» своей ячейки в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3}r^2. \quad (1)$$

Протон находится в электростатической трехмерной потенциальной яме, граница которой, определяемая условием $r = R$, выше дна на величину $U_0 = e^2 / (2R)$.

При оценочных расчетах для случая малых колебаний протон в ячейке можно (с определенной степенью точности) отождествить с изотропным гармоническим осциллятором, частота нулевых колебаний которого дается выражением:

$$\omega_0 = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3}} \pi \rho. \quad (2)$$

Средняя энергия рассматриваемого осциллятора при температуре T [1; 3]:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}. \quad (3)$$

Условие малости величины $\langle \varepsilon \rangle$ по сравнению с U_0 принято в [1; 3] в качестве критерия устойчивости твердого состояния вещества. При $T = 0$ из (3) имеем энергию нулевых колебаний протона $\varepsilon_0 = 1,5 \hbar \omega_0$.

Следует заметить, что модель изотропного гармонического осциллятора некорректна при $r \sim R$ (и тем более при $r \geq R$), а электронное «облако» весьма чувствительно к движению протона. Однако даже с помощью такой грубой модели можно провести приближенные оценки границ фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе.

В сверхсильном магнитном поле с индукцией B глубина потенциальной ямы изменяется на величину

$$\Delta U_0 = \frac{e^2 B^2 R^2}{8m_p c^2} \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где φ – угол между направлениями вектора индукции и движения протона. При этом разность высот границы потенциальной ямы и ее дна равна

$$U_0(B) = U_0 + \Delta U_0 \approx U_0 \left(1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2} \sin^2 \varphi \right) = U_0 \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi \right), \quad \omega_B = \frac{eB}{2m_p c}. \quad (5)$$

Энергетический спектр протона, совершающего колебания около положения равновесия в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B , определяется выражением [4]:

$$\varepsilon = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} (2l + |m| + 1) + \hbar \omega_B m + \hbar \omega_0 \left(g + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа. При нулевой температуре $l = m = g = 0$ и энергия нулевых колебаний протона в магнитном поле

$$\varepsilon_0(B) = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \approx \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left(1 + 2 \sqrt{1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}} \right). \quad (7)$$

При $B = 0$ имеем $\varepsilon_0(B) = \varepsilon_0$. Из (4) и (7) следует, что при значениях $\sin^2 \varphi \neq 0$ увеличение $U_0(B)$ с ростом индукции магнитного поля превалирует над увеличением $\varepsilon_0(B)$.

Средняя энергия колеблющегося при температуре T в магнитном поле с индукцией B протона может быть представлена в виде [2]:

$$\langle \varepsilon(B) \rangle = \hbar \omega \cdot \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \cdot \operatorname{cth} \alpha_0. \quad (8)$$

Здесь $\alpha = \frac{\hbar \omega}{2kT}$, $\alpha_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2kT}$. При $B = 0$ имеем $\omega = \omega_0$, и (8) переходит в (3). Для низких температур (если ω_B не превышает значительно ω_0) $\operatorname{cth} \alpha \approx 1$, $\operatorname{cth} \alpha_0 \approx 1$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx \varepsilon_0(B)$. Для высоких температур $\operatorname{cth} \alpha \approx 1/\alpha$, $\operatorname{cth} \alpha_0 \approx 1/\alpha_0$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx 3kT \approx \langle \varepsilon \rangle$.

Твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества является устойчивым и не переходит в плазменное при $\langle \varepsilon(B) \rangle \ll U_0(B)$. Если $\omega_B = u\omega_0$, то условию $\varepsilon_0(B) = 3kT$ соответствует массовая плотность

$$\rho = \rho_0 \approx 1,79 \cdot 10^{-6} \left(\frac{T}{2\sqrt{1+u^2} + 1} \right)^2 \text{ (г/см}^3\text{)}. \quad (9)$$

Критерии устойчивости твердого состояния замагниченного вещества при низких ($\rho \gg \rho_0$) и высоких ($\rho \ll \rho_0$) температурах имеют соответственно вид:

$$\rho^{1/6} \ll 50,5 \frac{1+u^2 \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1+u^2} + 1}, \quad (10)$$

$$\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} \frac{T}{1+u^2 \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

При $B = 0$ из (9)–(11) получаем: $\rho_0 \approx 1,98 \cdot 10^{-7} T^2$ (г/см³), $\rho^{1/6} \ll 16,8$ при $\rho \gg \rho_0$, $\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} T$ при $\rho \ll \rho_0$.

Выражение в правой части неравенства (10) при $B = \text{const}$ имеет наименьшее значение, если $\varphi = 0$. Тогда при оценочных расчетах в качестве критерия устойчивости твердого состояния холодного замагниченного электронно-протонного вещества можно принять условие:

$$\rho^{1/6} \leq 0,1 \frac{50,5}{2\sqrt{1+u^2} + 1}, \text{ или } \rho \leq \frac{1,56 \cdot 10^4}{(2\sqrt{1+u^2} + 1)^6} \text{ (г/см}^3\text{)}. \quad (12)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние является устойчивым: локализуя движение протона в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, магнитное поле одновременно облегчает выход протона из электростатической потенциальной ямы вдоль линий индукции.

Аналогічна для гарячага замагнічанага электронна-протоннага рэчыва из (11) знаходзім:

$$\rho^{1/3} \geq 2,65 \cdot 10^{-4} T, \text{ или } \rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3 \text{ (г/см}^3\text{)}, \quad (13)$$

што супадае з умовам устойлівасці цвёрдага стану ў адсутнасці магнітнага поля.

Отметим, что в веществе сверхплотных сильно замагнічанагах астрафізічных аб'ектаў індукцыя магнітнага поля вядлі можа прывышаць значенне $B_{\max} = 2c\sqrt{2\pi\rho}$, паскольку пры $B > B_{\max}$ плотнасць энергіі магнітнага поля будзе большае плотнасці энергіі покая рэчыва. Гэта азначае, што ў прыведзеных вышэ саотношеніях дапусцімы значення $u^2 < 1,5$.

Пры тэрмадынамічным апісанні свэрхплотнага замагнічанага вадорада неабходімо ўчытаваць возмозжність рэалізацыі как цвёрдага, так і плазменнага становішчя электронна-протоннага рэчыва. Мы расматрым здысь ураўненія становішчя іанізаванага замагнічанага вадорада пры рэзлічных значеніях масовай плотнасці для мадэлі «неподвільных» пратонаў і фермі-газаў астальных кампанентаў (прыбліжанае апісанне фазы цвёрдага тэла). Частічна гэты вопрос абсуджана ў [5; 6].

Пры плотнасці рэчыва $\rho \leq 10^6$ г/см³ (канцэнтрасія пратонаў $n_p \leq 10^{30}$ см⁻³) электронаў нерэлятывістыкі. В гэтым случае даўленіе і плотнасць энергіі рэчыва звязаны з саответствуючымі характэрыстыкамі яго электроннага і протоннага кампанентаў саотношеніямі:

$$P = P_e; \quad w = w_p + w_e, \quad (14)$$

где

$$P_e(B) = P_e(0) \frac{R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \quad w_e(B) = m_e c^2 n_e + P_e(0) \frac{2,5x_e R_{3/2}(x_e) - R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \quad (15)$$

$$P_e(0) = \frac{2}{5} n_e \zeta_e(0), \quad \zeta_e(0) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_e} n_e^{2/3}, \quad x_e = \frac{\zeta_e(B)}{\mu_B B}, \quad \zeta_e(B) = \zeta_e(0) \frac{x_e}{R_{3/2}^{2/3}(x_e)}, \quad (16)$$

$$R_a(x_e) = a \sum_{n=0}^l \left((x_q - 2n - 2)^{a-1} + (x_e - 2n)^{a-1} \right), \quad (17)$$

$a = 3/2, 5/2$, B – індукцыя магнітнага поля, n_e – канцэнтрасія электронаў, m_e – маса электрона, $\zeta_e = \chi_e - m_e c^2$, χ_e – хімічыскі патенцыял, μ_B – магнетон Бора, n – нумар квантавага ўрэння Ландау, $w_p = m_p c^2 n_p$ (энергіяй калябательнага двільжэння пратонаў пренебрегаем). В сілу свойстваў функцыі распрелеленія Фермі – Дірака сумміраваніе в (17) вэдэцца да тэх пар, пока выражэнне под знакам саответствуючага радікала не-отрыцатэльно. Пры вычысленіях палагаем сряду электронеітральной ($n_p = n_e$).

Тогда ураўненіе становішчя краіне вырожденнага замагнічанага электронна-протоннага рэчыва мажно прадставіть в вуде:

$$w = K_{11} P + K_{12} P^{3/5}. \quad (18)$$

Здысь

$$K_{11} = \frac{5}{2} \frac{x_e R_{3/2}(x_e)}{R_{5/2}(x_e)} - 1, \quad K_{12} = \frac{5^{3/5} R_{3/2}(x_e) \cdot (m_p + m_e) c^2 \left(\frac{m_e}{R_{5/2}(x_e)} \right)^{3/5}}{(3\pi^2 \hbar^3)^{2/5}}. \quad (19)$$

Для описания термодинамических свойств нерелятивистской водородной плазмы целесообразно вести отсчет энергии от величины энергии покоя фермиона и рассматривать лишь первое слагаемое уравнения (18). Тогда уравнение состояния

$$P = D_{11} w, \quad D_{11} = 1 / K_{11}. \quad (20)$$

Для астрофизических расчетов, связанных с оценками интегральных параметров плотных магнитных звезд, в (18) можно пренебречь первым слагаемым, учитывая, что энергия покоя нерелятивистского фермиона много больше его кинетической энергии. Тогда уравнение состояния

$$P = D_{12} w^{5/3}, \quad D_{12} = K_{12}^{-5/3}. \quad (21)$$

Уравнение состояния (21) записано в виде, удобном для непосредственной подстановки в формулы теории тяготения, с помощью которых можно установить, в частности, оценочную зависимость между массой и радиусом астрофизической конфигурации с магнитным полем.

При плотности вещества ($10^6 \leq \rho \leq 10^7$) г/см³ электроны релятивистские. Уравнение состояния определяется в этом случае следующим выражением:

$$w = K_{51} P + K_{52} P^{3/4}, \quad (22)$$

где

$$K_{51} = 2\sqrt{X_e^2 + Y_e} \frac{R_2}{R_1} - 1, \quad K_{52} = \frac{2^{3/4} m_p c^2 R_2}{(3\pi^2 \hbar^3 c^3)^{1/4} R_1^{3/4}}. \quad (23)$$

$$X_e^2 = \frac{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4}{2m_e c^2 \mu_B B}; \quad Y_e = \frac{m_e c^2}{2\mu_B B}, \quad (24)$$

$$\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 \equiv \xi_e(B) = \xi_e(0) \frac{X_e}{R_2^{1/3}(X_e)} = (3\pi^2)^{1/3} c \hbar n_e^{1/3} \frac{X_e}{R_2^{1/3}(X_e)}, \quad (25)$$

$$R_2(X_e) = \frac{3}{2} \left(X_e + 2 \sum_{n=1}^l \sqrt{X_e^2 - 2n} \right),$$

$$R_1(X_e, Y_e) = \frac{3}{2} \left(X_e \sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e} \right| + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^l \left(\sqrt{X_e^2 + Y_e} \sqrt{X_e^2 - 2n} - \frac{Y_e + 2n}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2n}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2n}} \right| \right) \right). \quad (26)$$

При этом суммирование в (26) ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

Как показано в [7], с ростом индукции сверхсильного магнитного поля порог нейтронизации водорода смещается в сторону более высоких плотностей. При плотностях, незначительно превышающих этот порог, необходимо учитывать парциальное давление и плотность энергии нейтронного компонента вещества:

$$P = P_e + P_n; \quad w = w_p + w_e + w_n; \quad (27)$$

нуклонные газы нерелятивистские. Записать уравнение состояния в форме, аналогичной (18) или (22), не представляется возможным: оно определяется системой параметрических уравнений.

При плотностях, существенно превышающих порог нейтронизации, основной вклад в концентрацию нуклонов среды вносят нейтроны, и уравнение состояния вещества (нейтронного газа) в магнитном поле можно записать следующим образом:

$$w = K_{31}P + K_{32}P^{3/5}, \quad (28)$$

где

$$K_{31} = \frac{5}{2} \frac{x_n R_{3/2}(x_n)}{R_{5/2}(x_n)} - 1, \quad K_{32} = \frac{5^{3/5} m_n c^2 R_{3/2}(x_n)}{(3\pi^2 \hbar^3)^{2/5}} \left(\frac{m_n}{R_{5/2}(x_n)} \right)^{3/5}, \quad (29)$$

$$P_n(0) = \frac{2}{5} n_n \zeta_n(0), \quad \zeta_n(0) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} n_n^{2/3}, \quad x_n = \frac{\zeta_n(B)}{\mu_y B}, \quad \zeta_n(B) = \zeta_n(0) \frac{x_n}{R_{3/2}^{2/3}(x_n)}, \quad (30)$$

$$R_a(x_n) = \frac{1}{2} \left((x_n - \sigma_n)^a + (x_n + \sigma_n)^a \right), \quad (31)$$

$a = 3/2, 5/2$, $\sigma_n = 1,913$, n_n – концентрация нейтронов, m_n – масса нейтрона, μ_y – ядерный магнетон, $\zeta_n = \chi_n - m_n c^2$, χ_n – химический потенциал нейтронов.

Наличие внешнего магнитного поля вносит коррективы в критерий устойчивости фазы твердого тела для холодного электронно-протонного вещества и практически не оказывает влияния на соответствующий критерий для горячего вещества.

Поскольку некоторые энергетические характеристики невырожденных ферми-газов зависят от индукции магнитного поля, целесообразно все же рассмотреть влияние последнего на уравнения состояния горячего электронно-протонного вещества. Здесь мы ограничимся случаем нерелятивистских электронов.

Расчеты показывают, что фаза твердого тела в горячем нерелятивистском электронно-протонном веществе может быть реализована при $T \ll 10^6$ К, если при этом массовая плотность $\rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3$ г/см³. Давление в этом случае определяется электронным газом и при заданной концентрации от индукции магнитного поля не зависит:

$$P = P_e = n_e kT, \quad (32)$$

а кинетическая энергия колебательного движения протона значительно меньше энергии покоя:

$$w(B) = n_p (m_p + m_e) c^2 + n_p kT \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \operatorname{cth} \alpha_e - \alpha_e \operatorname{th} \alpha_e \right) \approx n_p m_p c^2 + n_p kT \left(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha_e}{\operatorname{sh}(2\alpha_e)} \right). \quad (33)$$

Если $B \neq 0$, то $\operatorname{sh}(2\alpha_e) > 2\alpha_e$. При $T < 10^6$ К $\frac{3}{2} kT < 2 \cdot 10^{-10}$ эрг $\ll m_p c^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ эрг

и

$$w(B) \approx w(0) \approx n_p m_p c^2. \quad (34)$$

Уравнение состояния замагниченного электронно-протонного вещества в этом случае такое же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$P = \frac{kT}{m_p c^2} w. \quad (35)$$

Для любых значений массовой плотности, соответствующих электронно-протонному веществу, при $T > 10^6$ К имеет место плазменная фаза.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц, Д. А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д. А. Киржниц // Журн. эксперим. и теор. физ. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
2. Секержицкий, В. С. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле / В. С. Секержицкий, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 44–47.
3. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Дубнер, В. М. Заряженный осциллятор в магнитном поле / В. М. Дубнер // Изв. вузов. Физика. – 1966. – № 4. – С. 167–168.
5. Секержицкий, В. С. Об уравнении состояния сверхплотного водорода в сильном магнитном поле / В. С. Секержицкий // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та. – 2010. – Вып. 6, ч. 2. – С. 47–56.
6. Секержицкий, В. С. К вопросу об уравнении состояния холодного нерелятивистского электронно-протонного вещества в сверхсильном магнитном поле / В. С. Секержицкий, В. В. Климович, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 29–32.
7. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.03.2017

Sekerzhitsky V.S., Khomich E.M. Superdense Electron-Proton Matter in Strong Magnetic Field

An appreciation of criterions of stability solid state of magnetized electron-proton matter is formulated. The states equation of superdense electron-proton matter in presence magnetic field is receive.

УДК 535.012

Н.Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: sender@brsu.brest.by

ПРОЯВЛЕНИЕ ГИРОТРОПИИ ПРИ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА ОТ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Показано, что гиротропия кристаллов планальных классов средних сингоний проявляется не только в эллиптичности отраженного света, но и в дополнительном скачке фаз отраженных волн, особенно заметном вблизи угла Брюстера. Гиротропия таких кристаллов проявляется тем заметнее, чем ближе показатель преломления окружающей среды к показателям преломления кристалла. Приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла, но переходный слой может оказывать влияние на эллиптичность отраженного света, на скачки фаз, а также на модули недиагональных элементов. Оценено влияние переходного слоя при моделировании его тонким поглощающим изотропным слоем и рассчитано отражение от такой системы. Для кристаллов, обладающих «планальной» гиротропией, например, кварца, при толщине слоя 50 ангстрем и поглощении 0,001 также происходит скачок фазы, особенно заметный вблизи псевдобрюстеровского угла падения. Величина этого скачка одного порядка со скачком фазы, который возникает из-за «планальной» гиротропии (но без поверхностного слоя), поэтому довольно сложно отделить вклад гиротропии от поглощения поверхностным слоем и тем более измерить ее экспериментально.

Рассмотрим граничную задачу для главной плоскости падения с учетом материальных уравнений

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\alpha \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - i\tilde{\alpha} \vec{E},$$

где ε , μ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, $\tilde{\alpha}$ – тензор, полученный транспонированием тензора α , \vec{E} , \vec{H} – векторы напряженностей электрического и магнитных полей, \vec{D} , \vec{B} – векторы индукции тех же полей [1]. Для кристаллов планальных классов средних сингоний тензор гирации имеет вид:

$$\varepsilon^{-1} = 1/\varepsilon_0 + (1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0) \vec{c} \cdot \vec{c}, \quad \alpha = -\tilde{\alpha} = \alpha_0 \vec{c}^{\times},$$

где \vec{c} – единичный вектор, направленный вдоль оптической оси кристалла, \vec{c}^{\times} – антисимметричный тензор, дуальный вектору \vec{c} , $\varepsilon_0 = n_0^2$, где n_0 – показатели преломления квазиобыкновенной волны, $\varepsilon_e = n_e^2$, где n_e – показатели преломления квазиобыкновенной волны [1].

Поле в граничащей с кристаллом среде, которую считаем изотропной, разложим на s - и p -составляющие:

$$\vec{E} = A_s \vec{a} + A_p \left[\vec{n} \vec{a} \right], \quad \vec{H} = \left[\vec{m} \vec{E} \right], \quad (1)$$

где $\vec{m} = n\vec{n}$ – вектор рефракции, n – показатель преломления среды, из которой падает волна, \vec{n} – волновая нормаль, $\vec{a} = \left[\vec{m} \vec{q} \right]$, \vec{q} – нормаль к границе раздела двух сред, $\vec{b} = \left[\vec{q} \vec{a} \right]$ (рисунок 1).

В кристалле распространяются две собственные волны, поляризация которых оказывается специфической. Вектор магнитного поля в квазиобыкновенной волне \vec{h}_0 и вектор электрического поля в квазиобыкновенной волне \vec{e}_e описывают эллипсы в главной плоскости падения

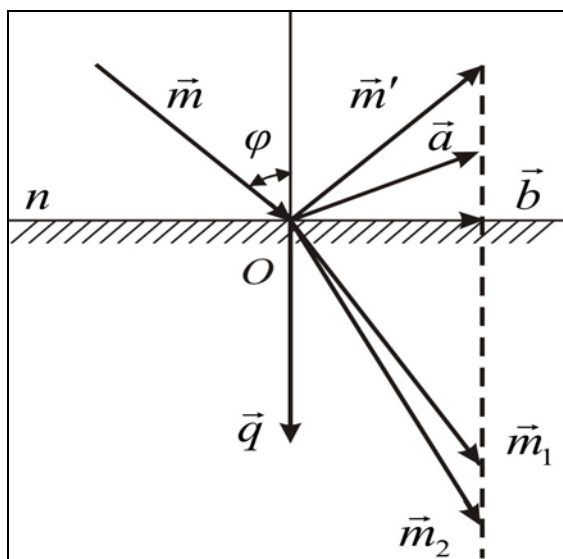


Рисунок 1. – Преломление и отражение света на границе изотропная среда кристалл

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 \rightarrow \vec{h}_+ = \vec{h}_e = \varepsilon_0 [\vec{m}_e \vec{c}], \quad \vec{e}_e = \varepsilon_0 \vec{c} - \vec{m}_e \vec{c} \vec{m}_e, \\ \vec{h}_2 \rightarrow \vec{h}_- = \vec{h}_0 = [\vec{m}_0 [\vec{m}_0 \vec{c}]], \quad \vec{e}_0 = [\vec{m}_0 \vec{c}], \end{aligned} \quad (2)$$

а их тангенциальные составляющие имеют вид:

$$\begin{aligned} r_0 = \vec{h}_0 \vec{b} = \eta_0 (\xi \vec{q} \vec{c} - \eta_0 \vec{b} \vec{c}) - \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \xi [\vec{m}_0 \vec{c}]^2, \\ l_0 = \vec{l}_0 \vec{a} = \left(1 + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \vec{m}_0 \vec{c} \right) \vec{a} [\vec{m}_0 \vec{c}], \\ r_e = \vec{h}_e \vec{a} = \varepsilon_0 (\xi \vec{q} \vec{c} - \eta_e \vec{b} \vec{c}) = \varepsilon_0 \vec{a} [\vec{m}_e \vec{c}], \\ l_e = \vec{l}_e \vec{b} = \varepsilon_0 \vec{b} \vec{c} - \xi \vec{m}_e \vec{c} - i \alpha_0 (\xi - \vec{m}_e \vec{c} \cdot \vec{b} \vec{c}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\xi = n \sin \varphi$, φ – угол падения, n – показатель преломления окружающей среды, $\vec{m}_{0,e} = \xi \vec{b} + \eta_{0,e} \vec{q}$ – векторы рефракции волн в кристалле, \vec{n} – вектор волновой нормали падающей волны, $\vec{a} = [\vec{m} \vec{q}]$, $\vec{b} = [\vec{q} \vec{a}]$ – единичные векторы (рисунок 1).

Рассмотрим отражение в главной плоскости падения для двух случаев.

1. Волна падает из изотропной среды на кристалл. Решая граничную задачу для амплитуд отраженной (A'_s, A'_p) и преломленных (A_0, A_e) волн, получим

$$A'_s = \frac{\eta l_0 - r_0}{\eta l_0 + r_0} A_s, \quad A'_p = \frac{\eta r_e + n^2 l_e}{\eta r_e - n^2 l_e}, \quad (4)$$

$$A_0 = \frac{2\eta}{\eta l_0 + r_0} A_s, \quad A_e = \frac{2\eta}{n(\eta r_e - n^2 l_e)}, \quad (5)$$

где $\eta = n \cos \varphi$. Упростим полученные выражения, учитывая, что для η_e справедливо выражение [1; 2]

$$\eta_e = \frac{1}{q\varepsilon q} (R - \bar{b}\varepsilon\bar{q}), \quad R = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_e (\bar{q}\varepsilon\bar{q} - \xi^2)},$$

поэтому

$$(\eta r_e \pm n^2 l_e) = \left[\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta \mp n^2 (R + i\alpha_0 \varepsilon_e \bar{q}\bar{c}) \right] (r_e / \varepsilon_0 \varepsilon_e).$$

Выражения для амплитудных коэффициентов отражения $r_s = A'_s / A_s$ и $r_p = A'_p / A_p$ можно привести к виду:

$$r_s = \frac{\varepsilon_0 (\eta - \eta_0) + i\alpha_0 \left[\xi (\eta + \eta_0) \bar{b}\bar{c} + (\eta\eta_0 - \xi^2) \bar{q}\bar{c} \right]}{\varepsilon_0 (\eta + \eta_0) - i\alpha_0 \left[\xi (\eta - \eta_0) \bar{b}\bar{c} + (\eta\eta_0 - \xi^2) \bar{q}\bar{c} \right]}, \quad (6)$$

$$r_p = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta - n^2 R - i\alpha_0 n^2 \varepsilon_e \bar{q}\bar{c}}{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R + i\alpha_0 n^2 \varepsilon_e \bar{q}\bar{c}}. \quad (7)$$

2. Волна падает из кристалла на границу с изотропной средой. В случае падения квазиобыкновенной волны ($\eta_0 = n_0 \cos \varphi$, $\xi = n \sin \varphi$)

$$A'_0 = \frac{\eta l_0 - r_0}{\eta l'_0 - r'_0} A_0, \quad A_s = \frac{r_0 l'_0 - r'_0 l_0}{\eta l'_0 + r'_0} A_0. \quad (8)$$

Здесь штрихами отмечены величины, относящиеся к отраженной волне. Если на границу падает квазиобыкновенная волна ($\eta_e = n_e \cos \varphi$, $\eta'_e = -(\eta_e + 2\xi \bar{b}\varepsilon\bar{q} / \bar{q}\varepsilon\bar{q})$), то решение граничной задачи имеет вид:

$$A'_e = -\frac{\eta r_e + n^2 l_e}{\eta r'_e + n^2 l'_e} A_e, \quad A_p = \frac{n(r'_e l_e - r_e l'_e)}{\eta r'_e + n^2 l'_e} A_e. \quad (9)$$

Для коэффициентов отражения $R_0 = A'_0 / A_0$ и $R_e = A'_e / A_e$ имеем

$$R_0 = \frac{\bar{a} \left[\bar{m}_0 \bar{c} \right] \left\{ (\eta_0 - \eta) - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \left[\xi (\eta_0 - \eta) \bar{b}\bar{c} + (\xi^2 + \eta\eta_0) \bar{q}\bar{c} \right] \right\}}{\bar{a} \left[\bar{m}'_0 \bar{c} \right] \left\{ (\eta_0 - \eta) + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \left[\xi (\eta_0 + \eta) \bar{b}\bar{c} + (\xi^2 - \eta\eta_0) \bar{q}\bar{c} \right] \right\}}, \quad (10)$$

$$R_e = \frac{r_e}{r'_e} \cdot \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R + i\alpha_0 n^2 \varepsilon_e \bar{q}\bar{c}}{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R - i\alpha_0 n^2 \varepsilon_e \bar{q}\bar{c}}.$$

Случай, когда оптическая ось \bar{c} перпендикулярна плоскости падения ($\bar{c} \parallel \bar{a}$), рассмотрен в [3]

$$A'_s = \frac{\eta - \eta_e}{\eta + \eta_e} A_s + \frac{2i\alpha_0 n \xi \eta}{(\eta + \eta_e)(\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0)} A_p, \quad (11)$$

$$A'_p = \frac{2i\alpha_0 n \xi \eta}{(\eta + \eta_e)(\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0)} A_s + \frac{\varepsilon_0 \eta - n^2 \eta_0}{\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0} A_p. \quad (12)$$

Проанализируем влияние гиротропии на характеристики света, отраженного кристаллом. Как следует из (6), (7), (11), (12), при падении на кристалл линейно поляризованного света отраженный свет оказывается поляризованным эллиптически, причем эллиптичность $k \sim \text{Im} \omega \sim \alpha_0 / (\eta - \eta_0)$ ($\omega = A'_p / A'_s$). Таким образом, для обеих ориентаций кристалла при $n^2 \rightarrow \varepsilon_0$ эллиптичность отраженного света увеличивается. Однако если при ориентации оптической оси перпендикулярно плоскости падения отра-

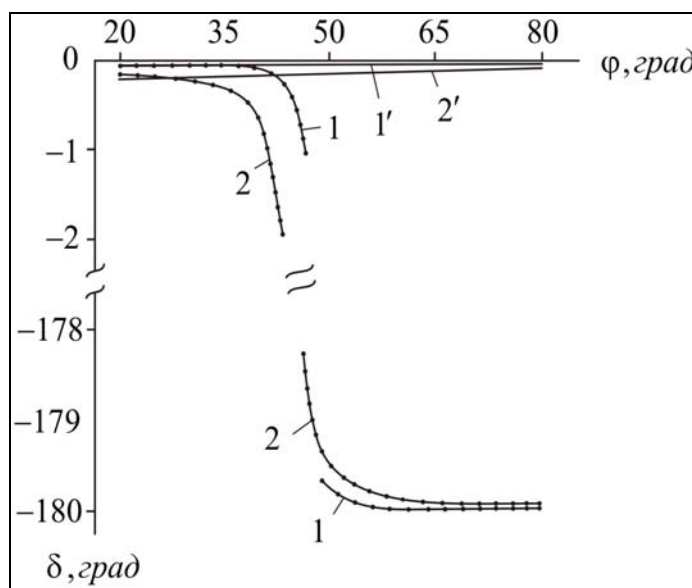
женная волна поляризована эллиптически при любых вещественных A_p и A_s , то в случае главной плоскости падения при A_p или A_s коэффициент равен нулю, отраженная волна будет поляризована линейно.

Гиротропия кристаллов планальных классов проявляется также в различных сдвигах фаз s - и p -компонент отраженного света относительно s - и p -компонент падающего. Для главной плоскости падения сдвиги фаз δ_s и δ_p определяются выражениями:

$$\operatorname{tg} \delta_s = \frac{\operatorname{Im} r_s}{\operatorname{Re} r_s} = \frac{2\alpha_0 \left[(\eta^2 + \eta_0^2) \xi \vec{b} \vec{c} + \eta_0 (\eta^2 - \xi^2) \vec{q} \vec{c} \right]}{\varepsilon_0 (\eta^2 - \eta_0^2)}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \delta_p = \frac{\operatorname{Im} r_p}{\operatorname{Re} r_p} = \frac{2\alpha_0 \eta n^2 \varepsilon_0 \varepsilon_e^2 \vec{q} \vec{c}}{n^4 R^2 - \varepsilon_0^2 \varepsilon_e^2 \eta^2}. \quad (14)$$

Если кристалл не обладает гиротропией, то до угла Брюстера $\Delta = \delta_p - \delta_s = 0$, а при угле Брюстера происходит скачок фаз, равный $-\pi$. Из полученных выражений видно, что при отражении от гиротропных кристаллов сдвиг фаз s - и p -компонент происходит при любых углах падения, причем особенно он заметен вблизи угла Брюстера. По мере приближения показателя преломления окружающей среды к показателю преломления кристалла (точнее, при $\eta \rightarrow \eta_0$, или при $n^4 R^2 \rightarrow \varepsilon_0^2 \varepsilon_e^2 \eta$) изменение сдвига фазы Δ увеличивается и может достигать значительной величины. Зависимость сдвига фаз Δ от угла падения φ показана на рисунке 2 для двух значений показателей преломления окружающей среды.



Для кристалла $n_0 = 1,7643$, $n_e = 1,7655$;
 для окружающей среды $n = 1,6$ (1,1'),
 $n = 1,72$ (2,2'); 1', 2' – s -компонента,
 1, 2 – p -компонента

Рисунок 2. – Зависимость сдвига фаз δ s - и p -компонент от угла падения φ

Аналогичные зависимости Δ характерны и для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости падения. Сказанное остается справедливым также при падении света из кристалла на границу с изотропной средой (10).

Таким образом, гиротропия кристаллов планальных классов средних сингоний проявляется не только в эллиптичности отраженного света, но и в дополнительном скачке фаз отраженных волн, особенно заметном вблизи угла Брюстера. Гиротропия таких кристаллов проявляется тем заметнее, чем ближе показатель преломления окружающей среды к показателям преломления кристалла.

Все приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла. Но следует иметь в виду, что переходный слой может оказывать влияние как на эллиптичность отраженного света, так и на скачки фаз [2; 4; 5].

Влияние переходного слоя и гиротропии неодинаково, но этот вопрос требует специального рассмотрения. С этой целью далее проанализируем коэффициенты отражения от гиротропного кристалла, на поверхности которого находится тонкий аморфизированный слабопоглощающий слой.

Теперь рассмотрим вклад различных членов тензора гирации для случая отражения в главной плоскости падения. Поэтому получим вначале выражения для векторов поля собственных волн в гиротропных одноосных кристаллах.

Обозначим через \vec{m} , $\vec{m}_{1,2}$ векторы рефракции соответственно падающей и преломленных волн (при отсутствии гиротропии $\vec{m}_1 \rightarrow \vec{m}_e$, $\vec{m}_2 \rightarrow \vec{m}_o$, \vec{m}_e, \vec{m}_o – векторы рефракции необыкновенной и обыкновенной волн), $\xi \vec{a} = [\vec{m} \vec{q}]$, $\xi = n \sin \varphi$, φ – угол падения, n – показатель преломления изотропной среды, граничащей с кристаллом, причем

$$\vec{m}_i = \xi \vec{b} + \eta_i \vec{q} \quad (i = 1, 2), \quad \vec{m}_{0,e} = \xi \vec{b} + \eta_{0,e} \vec{b}. \quad (15)$$

Величины $\eta_{0,e}$ вычисляются по известным соотношениям и являются нулевым приближением для расчета $\eta_{1,2}$, которые находятся из решения полного уравнения четвертой степени (формула (22.48) [1]).

При наличии гиротропии в каждом направлении в кристалле распространяются эллиптически поляризованные волны с векторами магнитного поля $\vec{h}_{1,2}$, в которых o - и e -волны связаны через параметры

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 &= \vec{h}_{e_1} + ib_1 \vec{h}_{o_1} + ip_1 \vec{m}_1, \\ \vec{h}_2 &= \vec{h}_{o_2} + ib_2 \vec{h}_{e_2} + ip_2 \vec{m}_2, \end{aligned} \quad (16)$$

причем появляется мнимая составляющая векторов магнитного поля по направлению волновой нормали.

В (16) сразу учтено, что волны 1 и 2 при преломлении распространяются в различных направлениях, поэтому \vec{h}_{e_i} и \vec{h}_{o_i} , из которых комбинируются решения h_i , $i = 1, 2$ (так же, как и векторы электрического поля $\vec{e}_{o_i}, \vec{e}_{e_i}$) для них различны.

В главной плоскости одноосного кристалла $\vec{h}_{e_i} = \vec{e}_{o_i} = \vec{a}$, $\vec{h}_{o_i} = [\vec{m}_{0,i} \vec{a}]$, причем при вычислении $\vec{h}_{0_1}, \vec{m}_{0_1} = \sqrt{\varepsilon_0} \vec{n}_1$, где \vec{n}_1 – фазовая нормаль волны 1. При вычислении $\vec{h}_{0_2}, \vec{m}_{0_2} = \sqrt{\varepsilon_0} \vec{n}_2$.

Наконец, $\vec{e}_{e_i} = -\varepsilon^{-1} [\vec{m}_{e_i} \vec{a}] = -\left\{ (1/\varepsilon_0) [\vec{m}_{e_i} \vec{a}] - \beta \vec{a} [\vec{m}_{0_i} \vec{c}] \vec{c} \right\}$, где $\beta = 1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_o$. Учтем, что для одноосных кристаллов тензор гирации имеет вид [1]

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \vec{c} \cdot \vec{c} + \alpha_0 \vec{c}^{\times}, \quad (17)$$

где \vec{c}^{\times} – тензор, дуальный вектору \vec{c} .

Для векторов электрического поля $\vec{e}_{1,2}$ из уравнений Максвелла

$$\vec{D} = -\left[\vec{m} \vec{H} \right], \quad \vec{B} = \left[\vec{m} \vec{E} \right], \quad (18)$$

$$\vec{m} \vec{D} = \vec{m} \vec{B} = 0$$

и выражений (15) – (17) получаем

$$\vec{e}_1 = \frac{n_1}{\varepsilon_0 n_e} \left[\vec{m}_1 \vec{a} \right] - \beta \frac{n_1}{n_e} \vec{a} \left[\vec{m}_1 \vec{c} \right] \vec{c} - i \varepsilon^{-1} \alpha \vec{a}, \quad (19)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{n_2^2}{\varepsilon_0} \vec{a} - i k_2 \frac{n_2}{n_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \left[\vec{m}_2 \vec{a} \right] - \beta \vec{a} \left[\vec{m}_2 \vec{c} \right] \vec{c} \right) - i \varepsilon^{-1} \alpha \left[\vec{m}_0 \vec{a} \right],$$

где ε^{-1} – тензор, обратный тензору диэлектрической проницаемости кристалла, а параметры b_i и p_i ($i=1,2$) имеют вид

$$k_1 = - \frac{n_1^2 \left(g_1 - g_2 \left(\vec{n} \vec{c} \right)_1^2 \right)}{\varepsilon_0 - n_1^2 - \varepsilon_0 \delta_1 - \delta_2 \left(\vec{a} \left[\vec{m}_0 \vec{c} \right] \right)^2}, \quad (20)$$

$$k_2 = - \frac{n_2^2 n_e^2 \left(g_1 - g_2 \left(\vec{n} \vec{c} \right)_2^2 \right)}{n_2^2 - n_{e_2}^2 + n_{e_2}^2 \delta_1},$$

$$p_1 = g_2 \vec{n}_1 \vec{c} \vec{a} \left[\vec{n}_1 \vec{c} \right] - k_1 \frac{\alpha_0}{n_0} \vec{a} \left[\vec{n}_1 \vec{c} \right], \quad (21)$$

$$p_2 = - \frac{\alpha_0}{n_0} \vec{a} \left[\vec{n}_2 \vec{c} \right] + k_2 g_2 \vec{n}_2 \vec{c} \vec{a} \left[\vec{n}_2 \vec{c} \right],$$

где

$$g_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\varepsilon_e}, \quad g_2 = g_1 - \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_0},$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\alpha_1^2 + \alpha_0^2 \right), \quad \delta_2 = \frac{1}{\varepsilon_e} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right)^2 - \delta_1.$$

При вычислении $k_{1,2}$ (так же, как и $\eta_{1,2}$) следует удерживать члены второго порядка малости [6], поскольку, как видно из (20), в направлениях, близких к оптической оси $\varepsilon_0 - n_1^2 \sim n_2^2 - n_{e_2}^2 \sim \alpha_i$ (α_i члены порядка параметров гирации $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$).

При отражении p - или s - линейно поляризованного света возникает соответственно s - и p - компоненты, которые описываются недиагональными компонентами матрицы отражения

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad r_{12} \neq r_{21}. \quad (22)$$

При наличии гиротропии все компоненты матрицы R в общем случае комплексны: $r_{ik} = |r_{ik}| e^{i\delta_{ik}}$, где $|r_{ik}| = \sqrt{R_e(r_{ik})^2 + \text{Im}(r_{ik})^2}$, $\text{tg} \delta_{ik} = \text{Im}(r_{ik}) / R_e(r_{ik})$.

Коефіцієнты R імяюць від

$$\begin{aligned} r_{11} &= (\alpha_2^- \beta_1^- - \alpha_1^- \beta_2^-) / 3, \\ r_{22} &= (\alpha_2^+ \beta_1^+ - \alpha_1^+ \beta_2^+) / 3, \\ r_{12} &= 2n\eta (a_2 d_1 - a_1 d_2) / 3, \\ r_{21} &= 2n\eta (b_1 c_2 - b_2 c_1) / 3, \\ 3 &= \alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^-, \end{aligned} \quad (23)$$

дзе

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \eta a_{1,2} + \alpha_{1,2}, \quad \beta_{1,2} = \varepsilon b_{1,2} - \eta c_{1,2}, \\ \alpha_{1,2}^\pm &= \alpha_{1,2} \pm \eta a_{1,2}, \quad \beta_{1,2}^\pm = \varepsilon b_{1,2} \pm \eta c_{1,2}, \\ a_1 &= \frac{n_1}{n_0} k_1 - i \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}, \\ a_2 &= \frac{n_2}{n_0} + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\xi \sin \theta + \eta_{0_2} \cos \theta), \\ b_1 &= - \left(\frac{1}{\varepsilon_e} \eta_1 - \beta (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta \right) - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \cos \theta, \\ b_2 &= - \left(\frac{1}{\varepsilon_e} \eta_2 - \beta (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta \right) (k_2 + i \alpha_1) + \\ &\quad + i \frac{\alpha_2}{\varepsilon_e} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta, \\ e_1 &= 1, \quad c_2 = k_2, \quad d_1 = k_1 \eta_{0_1} + i p_1 \xi, \quad d_2 = \eta_{0_2} + i p_2 \xi, \\ \eta_{0_{1,2}} &= \frac{n_0 \eta_{1,2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2}}, \\ k_1 &= - \frac{i \varepsilon_0 n_1^2 \left(\gamma_1 - \gamma_2 \left(\overline{\overline{nc}} \right)_1^2 \right)}{n_0 n_1 \left(\varepsilon_0 - n_1^2 - g_{22} \right)}, \\ k_2 &= - \frac{i n_0 n_2 \left(\gamma_1 - \gamma_2 \left(\overline{\overline{nc}} \right)_2^2 \right) n_{e_2}^2}{n_2^2 - n_{e_2}^2 + n_{e_2}^2 \delta_1}, \\ p_1 &= \gamma_2 \left(\overline{\overline{nc}} \right)_1 (\xi \cos \theta - \eta_1 \sin \theta) / n_1 - k_1 \frac{\alpha_0}{n_1 n_0} (\xi \cos \theta - \eta_1 \sin \theta), \\ p_2 &= - \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) + k_2 \gamma_2 \frac{\left(\overline{\overline{nc}} \right)_2 n_2}{\varepsilon_0} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta), \\ g_{22} &= \varepsilon_0 \delta_1 + \delta_2 (\xi \cos \theta - \eta_{0_1} \sin \theta)^2, \\ \delta_1 &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\alpha_1^2 + \alpha_0^2), \quad \delta_2 = \frac{1}{\varepsilon_e} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \delta_1, \\ \left(\overline{\overline{nc}} \right)_{1,2} &= \frac{\xi \sin \theta + \eta_{1,2} \cos \theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2}}, \end{aligned}$$

$$n_{1,2} = \sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\varepsilon_e},$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 \beta + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_e} = \gamma_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0},$$

$$\beta = 1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0,$$

$$\xi = n \sin \varphi, \quad \eta = n \cos \varphi, \quad \varepsilon_0 = n_0^2, \quad \varepsilon_e = n_e^2,$$

где n – показатель преломления среды, из которой падает волна, φ – угол падения, θ – угол между направлением волновой нормали \vec{n} и оптической оси \vec{c} , η_1, η_2 , как указывалось выше, находятся из решения полного уравнения четвертой степени (формула (22.48) [1].

Эти выражения анализировались численно для кристалла кварца ($\alpha_1 = -3,54 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_2 = 10,84 \cdot 10^{-5}$ [7], α_0 полагалось равным 10^{-5}). Результаты анализа представлены в виде зависимости модулей $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ от угла падения φ (рисунки 3, 4).

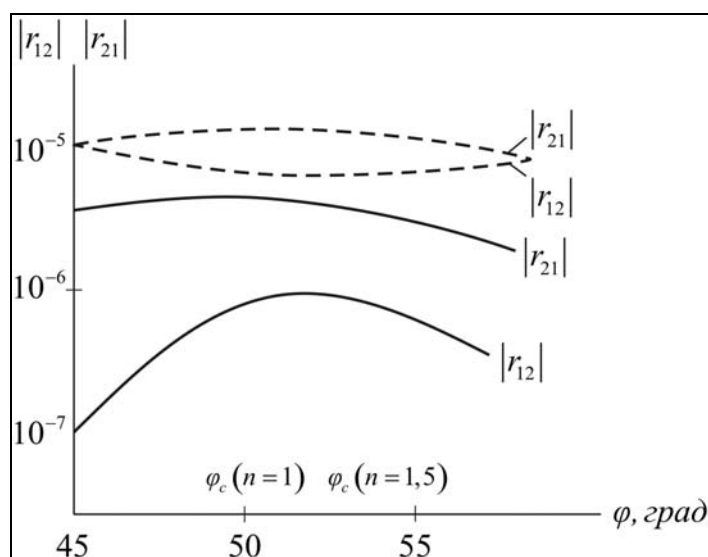
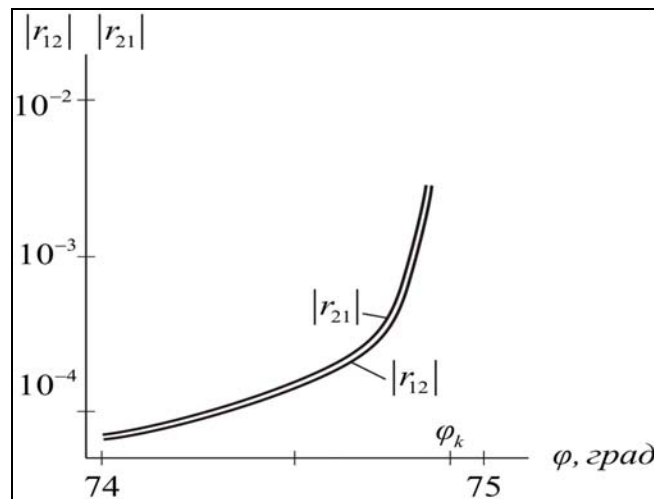


Рисунок 3. — — — Зависимость $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ от угла падения φ для кварца при $\alpha_0 = 0$ ($n = 1$, $n_0 = 1,554246$, $n_e = 1,553355$), φ_c – угол падения при котором преломленная волна в отсутствии гиротропии выходит на оптическую ось.
 - - - то же самое при $n = 1,5$

Наличие гиротропии, описываемой в (3) членом $\alpha_0 \vec{c}^{\times}$ (называемой иногда «планальной» гиротропией), не приводит к вращению плоскости поляризации и не дает вклад в недиагональные компоненты матрицы R . Диагональные компоненты r_{11} и r_{22} содержит мнимые добавки $\sim \alpha_0$. Для главной плоскости падения наличие этого члена проявляется таким же образом, как и малое поглощение, т.е. в дополнительном скачке фаз особенно заметном вблизи псевдобрюстеровского угла падения.

Как следует из рисунков 3 и 4, модули $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ увеличиваются на порядок, когда показатель преломления граничащей с кристаллом среды близок к показателям преломления кристалла n_0 и n_e . Особенно значительный рост $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ имеет место тогда, когда показатель преломления иммерсионной жидкости n больше n_0 и n_e . Так, для кварца модули $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ становятся почти на три порядка больше вблизи критического угла отражения, чем для границы воздух-кристалл.



Для кварца $n = 1,6$, $n_0 = 1,554246$, $n_e = 1,553355$

Рисунок 4. – Зависимость $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ от угла падения φ

Приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла. Но переходный слой может оказывать влияние на эллиптичность отраженного света, на скачки фаз [2; 4; 5], а также на модули недиагональных элементов. Оценим это влияние. Про моделируем его тонким поглощающим изотропным слоем и рассчитаем отражение от такой системы. Поскольку выражения довольно громоздки, проводился численный анализ на ЭВМ. Была составлена программа расчета компонент матрицы отражения от системы изотропный поглощающий слой на гиротропном кристалле.

Для кристаллов, обладающих «планальной» гиротропией, например, кварца, при толщине слоя $h = 50^\circ \text{A}$ и поглощении 0,001 также происходит скачок фазы, особенно заметный вблизи псевдобрюстеровского угла падения. Величина этого скачка одного порядка со скачком фазы, который возникает из-за «планальной» гиротропии (но без поверхностного слоя), поэтому довольно сложно отделить вклад гиротропии от поглощения в поверхности слоем и тем более измерить ее на эксперименте.

Численно анализировать также влияние переходного слоя на модули недиагональных элементов кристалла кварца. Коэффициент поглощения слоя и его толщина h (слабое поглощение $\sim 10^{-3}$ и h до десятков ангстрем) незначительно влияют на значения недиагональных элементов. Проведенные расчеты показывают, что наибольшее влияние на недиагональные элементы матрицы отражения оказывает показатель преломления слоя. Если он больше показателя преломления кристалла (n_0 и n_e), то модули недиагональных элементов вблизи критического угла имеют величину $\sim 10^{-3} \div 10^{-2}$, т.е. в этом случае влияние его незначительно. В случае же, когда показатель преломле-

ния слоя меньше n_0 и n_e , из-за наличия слоя значения модулей недиагональных элементов уменьшаются до значений $\sim 10^{-4}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
2. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.
3. Бокуть, Б. В. Электромагнитные волны в оптически активных и нелинейных кристаллах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.05 / Б. В. Бокуть. – Минск, 1972. – 270 л.
4. Скалецкая, М. И. О возможности применения метода эллипсометрии к исследованию прозрачных материалов / М. И. Скалецкая, Г. Т. Петровский, Е. К. Скалецкий // Оптика твердого тела : сб. ст. / Ин-т кристаллографии АН СССР. – М., 1983. – С. 143–155.
5. Гусев, С. С. К учету поверхностного переходного слоя на полимерных пленках в методе ИК эллипсометрии / С. С. Гусев, Н. И. Стаськов, В. В. Филиппов // Эллипсометрия – метод исследования физико-химических процессов на поверхности твердых тел : сб. ст. / Сиб. отделение АН СССР. – М., 1981. – С. 22.
6. Филиппов, В. В. К учету членов второго порядка малости в теории гиротропии / В. В. Филиппов // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 5. – С. 409–411.
7. Константинова, А. Ф. Оптическая активность кристаллов в направлениях отличных от направления оптической оси. Одноосные кристаллы / А. Ф. Константинова, Н. Р. Иванов, В. Н. Гречушников // Кристаллография. – 1969. – Т. 14, № 2. – С. 283–292.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.03.2017

Sender N.N. The Manifestation of Gyrotropy at the Reflection of Light from Uniaxial Crystals

It is shown that gyrotropy of crystals of planal class of middle syngony manifests itself not only in ellipticity of the reflected light, but also in the additional phase jump of the reflected waves, especially near the Brewster angle. Gyrotropy of such crystals manifests itself the more noticeable the closer the refractive index of the environment to the refractive indices of the crystal. The calculations correct for a perfect crystal surface, but the transition layer can affect the ellipticity of the reflected light, jump phases and modules of the nondiagonal elements. The influence of the transition layer, simulating it by isotropic thin absorbing layer is defined, and the reflection from such a system is calculated. For crystals with «planel» gyrotropy, for example quartz, with a layer thickness of 50 angstroms and the absorption of 0.001 also there is a jump phase, especially noticeable near pseudobrewster angle of incidence. The magnitude of this jump is of the same order with the jump phase, which arises from the «planel» gyrotropy (without surface layer), so it is quite difficult to separate the contribution of gyrotropy from absorbing by surface layer, and especially to measure it experimentally.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

Т.А. Артюшеня¹, А.А. Трофимук²

¹ассистент каф. высшей математики

Брестского государственного технического университета

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ СО СВОБОДНЫМИ ОТ N-х СТЕПЕНЕЙ ИНДЕКСАМИ P-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В СВОИХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ

Рассматриваются конечные группы. Пусть $k_p(G) = \max_{H \text{ P-sn } G} \{j \mid p^j \parallel |H^G : H|\}$

и $k(G) = \max_p k_p(G)$, где P-sn G – обозначение P-субнормальной подгруппы в группе G . Для разрешимой группы G установлена зависимость производной длины и нильпотентной длины от значений $k(G)$. Уточнены данные оценки инвариантов для малых значений $k(G)$. В частности, для разрешимой группы G с $k(G) \leq 2$ нильпотентная длина не превышает 4, а p -длина не превышает 1 для всех $p > 3$, 2-длина не выше 2, 3-длина не выше 2.

Введение

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева и В.Н. Тютянов в [1] предложили следующее определение: пусть P – множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется P-субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Обозначается H – P-sn G .

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является P-субнормальной.

Так, в работе [2] Л.С. Казарин описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является P-субнормальной в группе G . Группы, у которых P-субнормальны все максимальные подгруппы, являются сверхразрешимыми. Группы с P-субнормальными 2-максимальными подгруппами, силовскими подгруппами, примарными циклическими подгруппами, подгруппами Шмидта исследованы в работах [3–6].

Мы продолжим исследование в данном направлении. Для формулировки основного результата введем следующую функцию: пусть p – простое число. Для натурального числа n запись $p^j \parallel n$ означает, что p^j делит n , но p^{j+1} не делит n . Для группы G и простого числа p мы полагаем:

$$k_p(G) = \max_{H \text{ P-sn } G} \{j \mid p^j \parallel |H^G : H|\};$$
$$k(G) = \max_p k_p(G).$$

Теорема 1.

Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $k_p(G)=0$, то $l_p(G) \leq 1$; если $k_p(G)=1$, то $l_p(G) \leq 2$; если $k_p(G) \geq 2$, то $l_p(G) \leq k_p(G)$.

2. Производная длина группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает $4+k(G)$.

Очевидно, что теорема 1 дает неточные оценки нильпотентной и p -длины при малых значениях $k(G)$. Эти оценки уточняются в теореме 2 и следствии 2.

Если $k(G)=0$, то, по лемме 4, группа G является сверхразрешимой группой. Поэтому коммутант группы G нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Теорема 2.

Пусть G – разрешимая группа и $k(G) \leq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G) \leq 4$;

2) $d(G/\Phi(G)) \leq 6$;

3) $l_p(G) \leq 1$, если $p > 3$, и $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$.

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Следствие 1.

Если G – разрешима, A_4 -свободная группа и $k(G) \leq 2$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Следствие 2.

Если G – разрешимая группа и $k(G) \leq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G) \leq 4$;

2) $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Следствие 3.

Если G – разрешимая, A_4 -свободная группа и $k(G) \leq 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$ и $n(G) \leq 3$.

Пример.

При помощи компьютерной системы GAP построена группа $G = [E_{3^2}]GL(2,3)$ порядка 432 с единичной подгруппой Фраттини. Здесь E_{3^2} – элементарная абелева группа порядка 3^2 . Легко проверить, что $k(G) \leq 1$. Кроме того G имеет производную длину, равную 5, нильпотентную длину, равную 4, 2- и 3-длину, равную 2. Таким образом, оценки инвариантов, полученные в Следствии 2, являются точными.

1. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, используемые в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $N \triangleleft G$ – N минимальная нормальная подгруппа группы G , $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G для некоторого простого числа p ; G_p – силовская p -подгруппа группы G ; $G_{p'}$ – дополнение к силовской p -подгруппе

в группе G ; т.е. холлова p' -подгруппа группы G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ; $n(G)$ – нильпотентная длина группы G ; $d(G)$ – производная длина группы G , $l_p(G)$ – p -длина группы G .

Лемма 1.

Если $H \leq G$ и $N \triangleleft G$, тогда $(HN/N)^{G/N} = H^G N/N$ и $|H^G : H| = |(HN/N)^{G/N} : HN/N| |H^G \cap N : H \cap N|$. Более того, если $N \leq H$, тогда $|H^G : H| = |(H/N)^{G/N} : (H/N)|$.

Лемма 2 ([1, лемма 2.1]).

Пусть H – подгруппа группы G , $N \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если H P -sn G , то $(H \cap N)$ P -sn N и HN/N P -sn G/N .
2. Если $N \subseteq H$ и H/N P -sn G/N , то H P -sn G .
3. Если HN_i P -sn G , $N_i \triangleleft G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ P -sn G .
4. Если H P -sn K и K P -sn G , то H P -sn G .
5. Если H P -sn G , то H^x P -sn G для любого $x \in G$.

Лемма 3.

Пусть G группа и $N \triangleleft G$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ выполняются следующие условия:

- 1) $k_p(G/N) \leq k_p(G)$ и $k(G/N) \leq k(G)$;
- 2) $k_p(N) \leq k_p(G)$ и $k(N) \leq k(G)$;
- 3) если K P -sn G , то $k_p(K) \leq k_p(G)$ и $k(K) \leq k(G)$.

Доказательство.

1. Пусть H/N P -sn G/N , для которой $p^{k_p(G/N)} \parallel |(H/N)^{G/N} : (H/N)|$. Тогда, по лемме 2 (п. 2), H P -sn G . По лемме 1, $|(H/N)^{G/N} : H/N| = |H^G : H|$, следовательно, $p^{k_p(G/N)} \parallel |H^G : H|$. Так как $p^{k_p(G/N)}$ делит $|(H/N)^{G/N} : H/N|$, то $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(G/N)}$. Следовательно, $k_p(G/N) \leq k_p(G)$ и $k(G/N) \leq k(G)$.

2. Пусть K P -sn N , для которой $p^{k_p(N)} \parallel |K^N : K|$. В виду того, что $N \triangleleft G$, то N P -sn G . По лемме 2 (п. 4), K P -sn G . Так как $|K^G : K| = |K^G : K^N| |K^N : K|$ и $p^{k_p(N)}$ делит $|K^N : K|$, то $p^{k_p(N)}$ делит $|K^G : K|$. Следовательно, $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(N)}$. Таким образом, $k_p(N) \leq k_p(G)$ и $k(N) \leq k(G)$.

3. Пусть H P -sn K , для которой $p^{k_p(K)} \parallel |H^K : H|$. По лемме 2 (п. 4), H P -sn G . Так как $|H^G : H| = |H^G : H^K| |H^K : H|$, то $p^{k_p(K)}$ делит $|H^G : H|$. По определению $k_p(G)$ будет следовать, что $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(K)}$. Поэтому $k_p(G) \geq k_p(K)$. Очевидно, что $k(K) \leq k(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.

Если $N \triangleleft G$ и $|N| = p^n$, тогда $n \leq 1 + k_p(G)$.

Доказательство.

Пусть K – подгруппа простого порядка группы N . Так как N – p -группа, то N – нильпотентная группа. По теореме 3.13 п. 5 [7], всякая подгруппа из N будет субнормальной, а следовательно, P -субнормальной в N .

Таким образом, K P -сн N . Так как $N \triangleleft G$, то N P -сн G . По лемме 2 (п. 4), K P -сн G и $K^G = N$. Тогда $p^{1+k_p(G)}$ не делит $|K^G : K| = p^{n-1}$; таким образом, $n-1 < 1 + k_p(G)$. Отсюда следует, что $n \leq 1 + k_p(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 5 ([7, лемма 4.21, теорема 4.24]).

1. $\Phi(G) \leq F(G)$; если G разрешима и $G \neq 1$, то $\Phi(G) \neq F(G)$.
2. $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$.
3. Если $N \triangleleft G$, то $F(G) \leq G_G(N)$; если, кроме того, N абелева, то $N \leq Z(F(G))$.
4. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.
5. В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 6 ([8, лемма 12]).

Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

- 1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$;
- 2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$;
- 3) если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 7 ([8, лемма 7]).

Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^{k-1}$.

Лемма 8 ([7, теорема 2.8]).

Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 9 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть G – p -разрешимая группа такая, что $l_p(G/K) \leq k$ для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G , но $l_p(G) > k$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- 2) в группе G максимальная p -нильпотентная нормальная подгруппа $F_p(G)$ является элементарной абелевой p -группой;
- 3) $F_p(G)$ – единственная минимальная подгруппа группы G , имеющая добавление, т.е. $G = [F_p(G)]M$;
- 4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

Лемма 10 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть G p -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_p(G/N) \leq l_p(G)$;
- 2) если H – подгруппа группы G , то $l_p(H) \leq l_p(G)$;
- 3) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то $l_p(N_1 \cdot N_2) = \text{Max}\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$; в частности, $l_p(N_1 \times N_2) = \text{Max}\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$;
- 4) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то $l_p(G/(N_1 \cap N_2)) = \text{Max}\{l_p(G/N_1), l_p(G/N_2)\}$;
- 5) $l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G)$.

Лемма 11 ([8, лемма 13]).

1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathcal{U}^4$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

1. Пусть $K/N \triangleleft G/N$ такая, что $|K/N| = p^{r_p(G)}$. По лемме 4, $r_p(G) \leq 1 + k_p(G/N) \leq 1 + k_p(G)$. Если $k_p(G) = 0$, то $r_p(G) \leq 1$ и G p -сверхразрешима. Поэтому $l_p(G) \leq 1$. Если $k_p(G) = 1$, то $r_p(G) \leq 2$ и, по теореме 4 [8], $l_p(G) \leq 2$. Если $k_p(G) \geq 2$, то $r_p(G) \leq 2$ или $r_p(G) \geq 3$. В первом случае, по теореме 4 [8], $l_p(G) \leq 2$, а во втором, по следствию 1 [8], $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$. Таким образом, $l_p(G) \leq k_p(G)$.

2. Покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$. По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуют все фактор-группы. Тогда по индукции в группе G подгруппа Фраттини единичная и существует минимальная нормальная подгруппа N , совпадающая с подгруппой Фиттинга.

Пусть $|N| = p^\alpha$. Тогда фактор-группа G/N изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(\alpha, p)$. Тогда, по определению функции $\rho(n)$, фактор-группа $G/N \in \mathcal{U}^{\rho(\alpha)}$. Так как $\rho(n) \leq n + 2$, то $G/N \in \mathcal{U}^{\alpha+2}$. По лемме 4, $\alpha \leq 1 + k_p(G)$. Тогда $G/N \in \mathcal{U}^{k_p(G)+3}$.

В общем случае $G/N \in \mathcal{U}^{k(G)+3}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$. По лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathcal{U}^{4+k(G)}$. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 4 + k(G)$. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^{3+k(G)}$, то $n(G) \leq 4 + k(G)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

1–2. Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathcal{U}^5 \cap \mathcal{U}^4$.

По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуются всеми фактор-группами группы G .

Пусть $\Phi(G) \neq 1$, тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что \mathfrak{F} является насыщенной формацией, $G \in \mathfrak{F}$. В дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Предположим противное. Пусть $N_1 \triangleleft G$ и $N_2 \triangleleft G$, тогда $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.33 [7], $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Так как N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы, то $N_1 \cap N_2 = 1$. Таким образом, G изоморфна подгруппе группы $G/N_1 \times G/N_2$. Так как \mathfrak{F} – формация, то \mathfrak{F} замкнуто относительно подпрямых произведений. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Значит, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N .

По лемме 5 п. 5, подгруппа Фиттинга совпадает с подгруппой N , т.е. $F(G) = N$. По следствию [7, с. 86], N является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого p . Пусть $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 2$, то $n \leq 3$.

Так как N – абелева группа, то, по п. 3 леммы 5, $F(G) = C_G F(G)$. Так как $F(G) \triangleleft G$, то $N_G(F(G)) = G$. Поэтому $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } F(G)$ по лемме 8.

Если $n = 1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p - 1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{M}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N} \mathfrak{M}^4 \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 3$, то, по лемме 6 (п. 2), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{M}^5$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то $n(G) \leq 4$. Т.к. $G \in \mathfrak{N} \mathfrak{M}^5$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{M}^6$. Значит, $d(G/\Phi(G)) \leq 6$.

3. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$ и всякая метанильпотентная группа имеет p -длину, не превосходящую 1, то $l_p(G) \leq 2$ для любого простого $p \in \pi(G)$.

Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой условие $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$ не выполняется. Так как условие теоремы наследуют все фактор группы, то, по лемме 9, можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а, по лемме 10, подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа и $|F| \leq p^3$ по лемме 4.

Если $|F| \leq p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut } F$ группы F , порядок которой равен $p - 1$. Отсюда, силовская p – подгруппа группы G совпадает с подгруппой Фиттинга. Значит, $l_p(G) \leq 1$. Противоречие.

Если $|F| = p^2$ или $|F| = p^3$, то $\text{Aut } F = GL(2, p)$ или $\text{Aut } F = GL(3, p)$ и G/F – неприводимая подгруппа группы $GL(n, p)$, $n = \{2, 3\}$ и $O_p(G/F) = 1$. Тогда, по лемме 6, G/F – p' -группа. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$. Противоречие с предположением.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F| \leq p^3$.

Если $n=1$, то $G/F(G) \in \mathfrak{U}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Если $n=2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G)$ изоморфна A_4 -свободной подгруппе группы $GL(2, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{U}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Если $n=3$, то, по лемме 11 (п. 2), $G/F(G)$ изоморфна A_4 -свободной подгруппе группы $GL(3, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{U}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^5$. Поэтому $d(G/\Phi(G)) \leq 5$.

Доказательство следствия 2.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 1$, то $n \leq 2$.

Если $n=1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p-1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}^4$.

Если $n=2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{U}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство следствия 3.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$. Повторяя большую часть доказательства следствия 1, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \leq 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \leq 1$, то $n \leq 2$.

Если $n=1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p-1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Если $n=2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{U}^2$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, А. Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // ПФМТ. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
2. Казарин, Л. С. О группах с факторизацией / Л. С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
3. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal 2-maximal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1105.3663.pdf, 18 May 2011.

4. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal primary cyclic subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1110.4720, 18 Nov. 2011.
5. Vasilyev, A. F. On the finite groups of supersoluble type / A. F. Vasilyev, T. I. Vasilyeva, V. N. Tyutyaynov // Sib. Math. J. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1004–1012.
6. Kniagina, V. N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
7. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
8. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.02.2017

Artiushenia T.A., Trofimuk A.A. Solvable Group with N-Free Degrees of Indexes of P-Subnormal Subgroups in its Normal Closures

We consider only finite groups. Let $k_p(G) = \max_{H \text{ P-sn } G} \{j \mid p^j \parallel |H^G : H|\}$ and $k(G) = \max_p k_p(G)$, where

P-sn G is the designation of P-subnormal subgroups in the group G. For solvable group G, the dependence of the derived length and the nilpotent length of values of k(G) is obtained. The estimations of this invariants for small values of k(G) are refined. In particular, the nilpotent length of group G with $k(G) \leq 2$ does not exceed 4 and the p-length is at most 1 for all $p > 3$, 2-length is at most 2, 3-length is at most 2.

УДК 519.63

В.М. Волков¹, Ю.В. Буяльская², И.Д. Врублевский³, О.П. Коленченко⁴¹д-р физ.-мат. наук, проф. каф. веб-технологий и компьютерного моделирования
Белорусского государственного университета²аспирант каф. веб-технологий и компьютерного моделирования
Белорусского государственного университета³аспирант каф. веб-технологий и компьютерного моделирования
Белорусского государственного университета⁴магистрант каф. веб-технологий и компьютерного моделирования
Белорусского государственного университета

e-mail: v.volkov@tut.by

ПРЯМЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ GPGPU В СРЕДЕ MATLAB

Представлен сравнительный численный анализ эффективности стандартных прямых и итерационных алгоритмов реализации спектральных методов Чебышева для многомерных дифференциальных краевых задач с использованием технологии GPGPU в системе Матлаб. Показано, что итерационные методы семейства сопряженных градиентов с переобусловливателем Якоби превосходят в эффективности прямые методы даже при сравнительно небольших размерностях сетки. Кроме того, при использовании GPU бюджетного сегмента доступно многократное (2–4 раза) ускорение итерационных методов, при этом преимущество в эффективности реализации арифметических операций с разреженными матрицами возрастает с ростом их размерности.

Введение

Комплексы программных и аппаратных средств поддержки параллельных вычислений в настоящее время имеют тенденцию стать неотъемлемой составляющей современной среды разработки и функционирования прикладных программ для ресурсоемких научных и инженерных расчетов. Существенный прогресс в области практического использования преимуществ параллельного программирования в последнее десятилетие связан с внедрением данной технологии в программные пакеты и такие системы научно-технических расчетов, как Matlab, Maple, Mathematica и др. Например, в продуктах компании Mathworks [1–2] реализован широкий спектр возможностей параллельного программирования с использованием многоядерных процессоров, кластеров и графических процессоров (GPU), при этом поддержка параллельных алгоритмов во многих случаях реализована на уровне базовых функций (например, функций решения задач линейной алгебры, оптимизации и др.), составляющих ядро системы Matlab.

В данной работе мы остановимся на сравнительном анализе некоторых новых возможностей реализации спектральных методов решения дифференциальных краевых задач на примере задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона и краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в среде Matlab с использованием технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture) – программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений с использованием GPU.

Постановка задачи и численный метод

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в двумерной прямоугольной области:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad x, y \in [-1, 1], \tag{1}$$

$$u(-1, y) = u(1, y) = u(x, -1) = u(x, 1) = 0.$$

Спектральный метод Чебышева (см., например, [3]) для вычисления приближенного решения задачи (1) во внутренних узлах сетки (x_i, y_j) :

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{N}, \quad y_j = \cos \frac{j\pi}{N}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$AU = F. \tag{2}$$

Здесь компоненты вектора $U = (U_1, U_2, \dots, U_M)^T$ – приближенное решение в узлах сетки: $u(x_i, y_j) \simeq U_m$, $m = N(j-1) + i$, $M = (N-1)^2$, $A \in R^{M \times M}$,

$$A = I \otimes D + D \otimes I, \tag{3}$$

где $I \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ – единичная матрица, $D \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева [4], в которой удалены первые и последние строки и столбцы в соответствии с нулевыми краевыми условиями задачи (1). Матрица системы уравнений (2) имеет разреженную блочную структуру, пример которой для случая $N = 9$ представлен на рисунке 1.

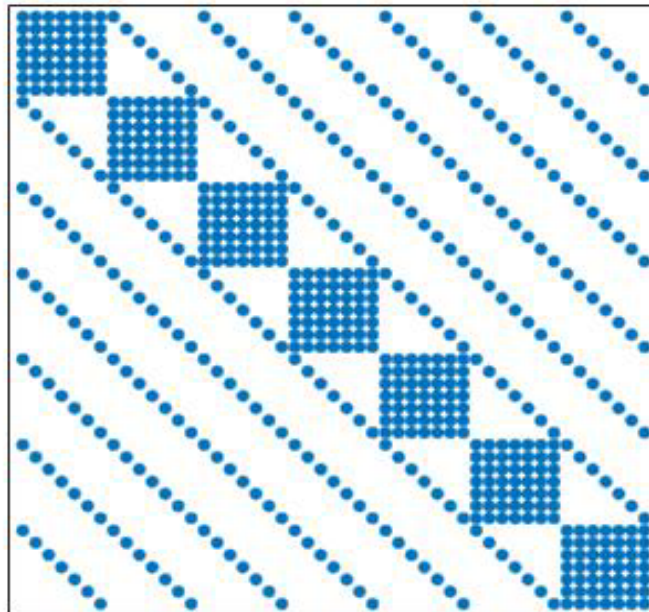


Рисунок 1. – Структура матрицы спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области с однородными краевыми условиями

В отличие от разностных и конечно-элементных методов матрицы спектральных моделей имеют более сильную зависимость числа обусловленности от количества узлов сетки, $K_A = O(N^4)$. Кроме того, структура матриц спектральных методов характеризуются меньшей степенью разреженности. Отмеченные недостатки спектральных методов, как правило, компенсируются их высокой точностью, которая допускает использование относительно грубых сеток. Тем не менее реализация спектральных методов составляет отдельную проблему.

Эффективность использования стандартных прямых методов решения систем алгебраических уравнений (2) с матрицами вида (3), несмотря на их разреженность, практически ничем не отличается от решения систем с полными матрицами. При использовании итерационных методов основная проблема связана с выбором переобусловливателя в силу быстрого роста числа обусловленности матрицы системы с увеличением числа узлов сетки и, как следствие, практической невозможностью применения явных итерационных алгоритмов для данного класса задач.

Стоит отметить, что к матрицам аналогичной структуры приводит спектральный метод Чебышева применительно к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику встречного взаимодействия световых волн в оптоволоконных усилителях [5]:

$$M \frac{dE}{dz} = -[\gamma - G(E)]E, \quad -1 < z < 1, \quad (4)$$

где $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)^T$.

Ниже представлены результаты сравнения эффективности стандартных прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей такого вида и возможности ускорения методов решения данных задач при использовании графических процессоров.

Сравнение эффективности прямых и итерационных методов

Несмотря на разреженную структуру, матрица двумерной спектральной модели в процессе LU декомпозиции приводит к практически полным треугольным матрицам. По этой причине вычислительная сложность стандартной процедуры метода Гаусса по порядку величины близка к вычислительной сложности обработки полных матриц. В силу отмеченных обстоятельств представляет интерес поиск подходящих итерационных методов реализации спектральных моделей данного типа.

Как уже отмечалось выше, число обусловленности матрицы спектральной модели имеет сильную зависимость от числа узлов сетки по каждому направлению, $K_A = O(N^4)$, что определяет как минимум квадратичный рост числа итераций при увеличении N для явных итерационных методов. Неплохие результаты в плане ускорения сходимости дает использование переобусловливателя в виде матрицы P , полученной в результате конечно-элементной или конечно-разностной аппроксимации рассматриваемой дифференциальной задачи (см., например, [6]). Для данного типа переобусловливателя $K_{P^{-1}A} = O(N^2)$. В случае спектрального метода Чебышева аналогичные по порядку величины результаты дает использование диагонального переобусловливателя Якоби, несомненным достоинством которого является то, что он не требует дополнительных вычислительных затрат по сравнению со стандартной явной итерационной процедурой. В ряде случаев представляется перспективным использование

блочного метода Якоби, когда для построения переобусловливателя вместо диагонали системной матрицы используются ее блочно-диагональная часть. В частности, блочный метод Якоби показал существенное преимущество при решении краевых задач для нелинейной системы (4).

Для выяснения вопроса о наиболее эффективном способе реализации спектральной модели (2), (3) для краевой задачи (1) рассмотрим штатный набор функций Matlab, предназначенных для решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью прямых и итерационных методов. Представленные на рисунке 2 результаты сравнения показывают, что с увеличением числа узлов сетки преимущества итерационных методов становится все более очевидным.

Среди итерационных методов наиболее привлекательные результаты по числу итераций демонстрирует стабилизированный метод бисопряженных градиентов с переобусловливателем в виде неполной LU-факторизации. Использование диагонального переобусловливателя Якоби требует большего числа итераций, однако в данном случае за счет минимальной вычислительной сложности отдельной итерации общее время решения задачи оказывается минимальным. Стабилизированный метод сопряженных градиентов с переобусловливателем Якоби на порядок превосходит прямой метод при размерности сетки в 80 узлов по каждому направлению.

Для задачи встречного взаимодействия волн (4) использование итерационного метода обобщенных невязок с блочным переобусловливателем Якоби также дает многократное превосходство в эффективности в сравнении с прямым методом уже для случая системы шести уравнений и $N > 10$.

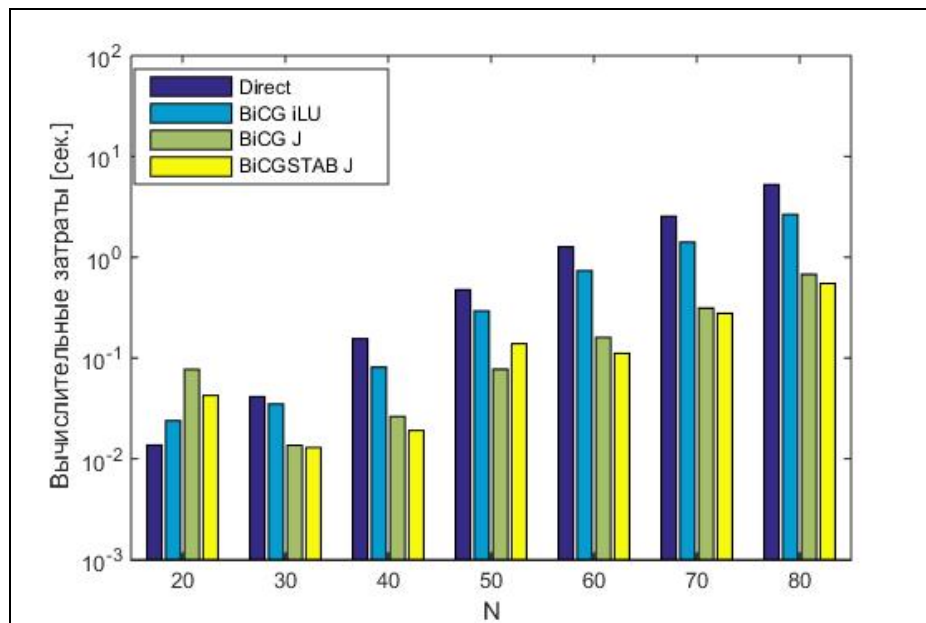


Рисунок 2. – Время реализации спектральной модели с помощью прямого (Direct) и итерационного метода бисопряженных градиентов (BiCG) с переобусловливателем Якоби (J) и неполной LU факторизации (iLU) в зависимости от числа узлов сетки

Рассмотрим возможности ускорения итерационного метода бисопряженных градиентов при реализации на графических процессорах.

Эффективность реализации итерационных методов на графических процессорах

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений сводятся к последовательности операций умножения больших разреженных матриц на вектор, а также сложение и скалярное умножение векторов. Для оценки потенциальных возможностей ускорения итерационных алгоритмов сравним эффективность использования графических процессоров при умножении матрицы на вектор в зависимости от размерности матрицы. Сравним также производительность процессоров при выполнении умножения полных и разреженных матриц. Результаты численных экспериментов для разных аппаратных платформ представлены в таблице.

Таблица. – Ускорение производительности умножения матрицы на графическом процессоре

	GeForce GT 555M (i5-2410M 2.3 GHz)	GeForce GTX 650 (i5-3570 3.4GHz)	GeForce GTX 960 (AMD FX4350 4.2 GHz)
Full	1.9	2.1	12.3
Sparse	1.6	1.9	14.0

Заметим, что ускорения матричных операций для класса разреженных матриц близки к аналогичным показателям для полных матриц. Однако производительность при выполнении операций умножения для разреженных матриц примерно в четыре раза ниже, чем в случае полных, что, по-видимому, связано с дополнительными накладными расходами при обработке разреженных матриц. Зависимости производительности умножения матрицы на вектор от размерности M представлены на рисунке 3. В качестве разреженной матрицы использована пятидиагональная матрица Пуассона. Умножение данной матрицы на вектор требует $10N$ операций умножения и сложения чисел с плавающей запятой. Для полных матриц вычислительные затраты составляют $2N^2$ арифметических операций. Для сравнения производительности оценивалась скорость выполнения арифметических операций с плавающей запятой в секунду (FLOPS). Представленные на рисунке 3 результаты получены на системе графического процессора GeForce GT 555M и CPU i5-2410M 2.3 GHz. Аналогичные результаты наблюдаются и при умножении матрицы двумерной спектральной модели уравнения Пуассона.

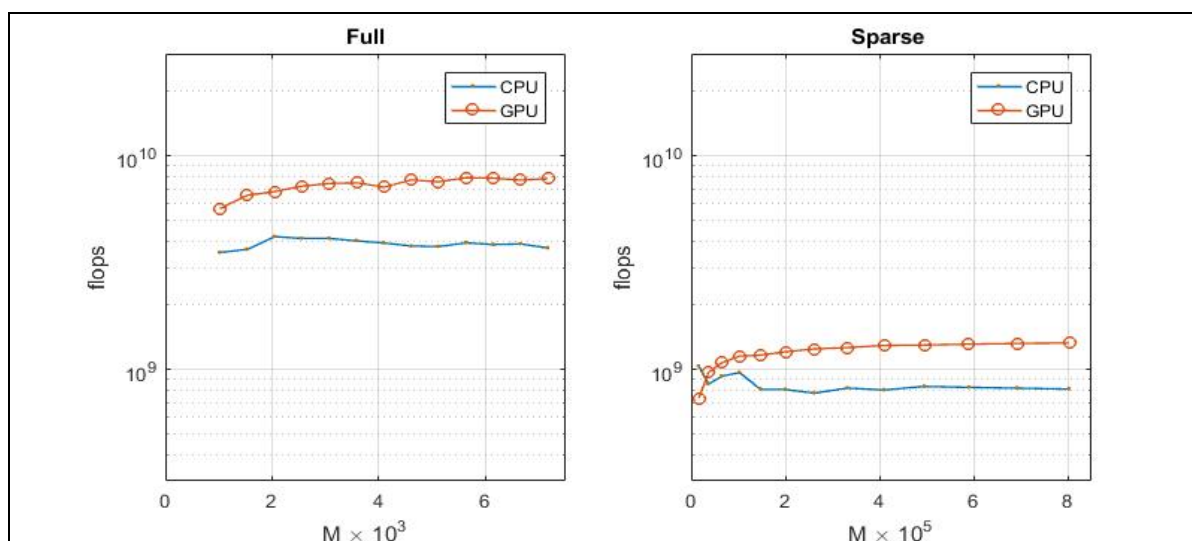


Рисунок 3. – Производительность процессоров GPU GeForce GT 555M и CPU i5-2410M 2.3 GHz при умножении полных и разреженных матриц на вектор

Представленные результаты позволяют ожидать, что реализация итерационных методов на графических процессорах бюджетного сегмента может по эффективности многократно превосходить соответствующие показатели основного процессора. Для примера на рисунке 4 представлены результаты сравнения зависимости времени итерационной реализации спектральной модели от размерности сетки.

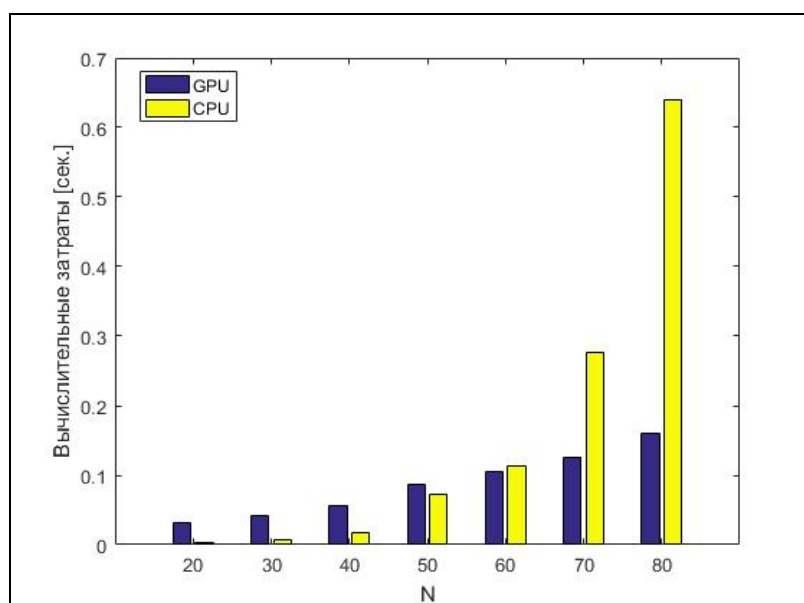


Рисунок 4. – Временные затраты на итерационную реализацию спектрального метода

В рассмотренном случае использован стабилизированный метод бисопряженных градиентов с переобусловливателем Якоби, реализованный на самой эффективной из рассмотренных платформ GeForce GTX 960 / AMD FX4350 4.2 GHz. Как видно из представленных результатов сравнения, эффективность реализации спектрального метода на GPU возрастает с ростом числа узлов сетки и при размерности сеточной области 80×80 примерно в четыре раза превосходит эффективность основного процессора. Для больших размерностей сетки ускорение может быть еще значительнее в силу роста производительности матричных операций на GPU с ростом их размерности.

Заключение

Итерационные методы при надлежащем выборе переобусловливателя имеют заметное преимущество по сравнению со стандартными прямыми методами при реализации спектральных методов Чебышева решения многомерных краевых задач для уравнений в частных производных и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, итерационные алгоритмы реализации спектральных методов в среде Matlab с использованием технологии CUDA позволяют существенно повысить эффективность вычислений на графических процессорах.

Примечательно, что производительность основного процессора при работе с большими разреженными матрицами замедляется с ростом размерности матриц, в то время как для графических процессоров, напротив, именно при максимальных размерностях реализуются преимущества в скорости вычислений. Представленные в работе результаты демонстрируют примерно четырехкратное ускорение итерационных методов при вычислении на графическом процессоре с разреженными матрицами размерностью $N = 10^3 \div 10^4$.

Полученные оценки производительности показывают, что для современных GPU бюджетного сегмента потенциально достижимы ускорения на порядок и более. Что касается прямых методов, то для рассмотренного класса задач здесь следует отметить перспективность блочных алгоритмов, программная реализация которых пока не получила широкого распространения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sharma, G. MATLAB®: a language for parallel computing / G. Sharma, J. Martin // International Journal of Parallel Programming. – 2009. – Т. 37, № 1. – С. 3–36.
2. Parallel computing toolbox [Электронный ресурс]. – Официальный сайт компании Mathworks. – Режим доступа: <http://www.mathworks.com/products/parallel-computing/index.html>.
3. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, Inc., 2000. – 665 p.
4. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26, № 4. – С. 465–519.
5. Волков, В. М. О спектральных методах численного анализа встречного взаимодействия оптических волн в нелинейной среде / В. М. Волков, Ю. В. Буяльская // Вісн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2015. – № 2. – С. 62–68.
6. Canuto, C. Preconditioned minimal residual methods for Chebyshev spectral calculations / C. Canuto, A. Quarteroni // Journal of Computational Physics. – 1985. – Т. 60, № 2. – С. 315–337.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.05.2017

Volkov V.M., Buyalskaya Yu.V., Vrubleuski I.D., Kalenchanka A.P. Direct and Iterative Algorithms Implementing Spectral Chebyshev Methods for Multidimensional Boundary Value Problems Using GPGPU Technology in Matlab

A comparative numerical analysis of the efficiency of standard direct and iterative algorithms implementing Chebyshev spectral methods for multidimensional boundary value problems using GPGPU technology in the Matlab is presented. It is shown that the iterative methods of the conjugate gradients type with Jacobi preconditioners outperform the direct methods at even comparatively small grid size. Moreover, when using GPU, there is 2-4 times acceleration of iterative methods, and the advantages in the implementation of sparse matrix arithmetics increase with the increase in their dimension.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик¹, С.В. Сидак²¹канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики
и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²ассистент каф. информатики и прикладной математики
Брестского государственного технического университета,
магистрант Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
ПРИ ПОМОЩИ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ
В СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛА ОСТАНОВА ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ**

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, x_0 = 0, k \in N. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0.$$

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешно-

сти [1]. Эта априорная оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова.

В [2] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1) и исследована сходимость метода (3) в энергетической («ослабленной») норме гильбертова пространства.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [3–6].

2. Правило останова по малости невязки

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha\lambda^2)^n}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} \right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 4(n\alpha)^{1/2}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \left(\frac{s}{2n\alpha e} \right)^{s/2}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \left(\frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n$ и $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$,

$$\text{то } \left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из (6) имеем $\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{\frac{s}{2}} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Доказательство. Так как верно неравенство (8), то получим

$$n^{\frac{s}{2}} \|A^s (E - Ag_n(A))\| \leq n^{\frac{s}{2}} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{\frac{s}{2}} \gamma_s n^{-\frac{s}{2}} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{2\alpha e} \right)^{\frac{s}{2}}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [7, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow Bu$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$, ограничены независимой от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{2}} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| = n^{\frac{s}{2}} \|A^{s+1} (E - Ag_n(A))\omega\| \leq n^{\frac{s}{2}} \left(\frac{s+1}{2\alpha e} \right)^{\frac{s+1}{2}} * \\ * n^{-\frac{(s+1)}{2}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{-\frac{1}{2}} \|\omega\| \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \gamma_0 \|v_0\|$, $\gamma_0 = 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \rightharpoonup v$, ($p \in N' \subseteq N$), тогда $Av_p \rightharpoonup Av$, ($p \in N'$). Но по условию $\omega_p = Av_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0) = (v_p, v_0) - (v_p, Ag_{n_p}(A)v_0) = \\ &= (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)v_0) \rightarrow (v, v_0), \end{aligned}$$

так как $\omega_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, $v = 0$ и, по условию (5), $\|g_{n_p}(A)\| \leq 4(n_p \alpha)^{1/2} < 4(n\alpha)^{1/2}$. Следовательно, $\|v_p\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $t = t(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. По индукции легко показать [1], что выполняется равенство $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A^2)^n (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/2} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 4(n\alpha)^{1/2} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/2}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$,

или $(m-1)^{1/2}\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ (так как из (12) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$ то, используя (9), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 4(m\alpha)^{1/2}\delta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда, по лемме 3, получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 4(m(\delta_n)\alpha)^{1/2}\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z, s > 0$. Тогда

справедливы оценки $m \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha\varepsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 4\alpha^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2\alpha\varepsilon} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \delta. \quad (17)$$

Доказательство. Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} \left(\frac{1 - \alpha\lambda^2}{1 + \alpha\lambda^2} \right)^{m-1} dE_\lambda z \right\| \leq \\ &\leq (s+1)^{\frac{s+1}{2}} (2(m-1)\alpha e)^{\frac{-(s+1)}{2}} \|z\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{\frac{s+1}{2}} [2(m-1)\alpha e]^{\frac{-(s+1)}{2}} \|z\|$, отсюда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}}. \text{ При помощи неравенства моментов оценим}$$

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (15)).} \end{aligned}$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \\ &+ 4\alpha^{1/2} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}} \right\}^{1/2} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, и, как следует из [4],

он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка $s > 0$ истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останова по малости невязки (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысык, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысык, С. В. Сидак // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 2. – С. 71–76.
2. Матысык, О. В. Регуляризация некорректных задач I рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысык, С. В. Сидак // Весн. Брєсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. Вылічальная тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 13–21.

3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
4. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.
6. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
7. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.02.2017

Matysik O.V., Sidak S.V. On the Regularization of Operator Equations of First Kind by Implicit Iteration Method Rules in the Case of Stop in Smallness of the Inviscid

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self-conjugate operator the implicate iteration method is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.

УДК 517+518.948

В.М. Мадорский

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: priclmath@brsu.brest.by

**О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ**

Рассматриваются линейные и нелинейные периодические и почти периодические оптимизационные задачи с квадратичным критерием качества. Даются способы получения оптимальных управлений регулярных оптимизационных задач, задач с вырождающейся платой управляющего воздействия, а также нелинейных оптимизационных задач.

Ниже мы будем рассматривать оптимизационные задачи с квадратным критерием качества, которым посвящена обширная литература (см. [1] и приведенную там библиографию). Тем не менее периодический и почти периодический случай (почти периодические колебания – это наложение простых гармонических колебаний с несоизмеримыми частотами) изучены в меньшей степени [2; 3].

Синтез оптимального управления периодических задач с квадратным критерием качества подробно исследован в [4] для случая, когда в функционале стоит положительно определенная матрица платы за управляющее воздействие, то есть критерий качества является невыраженным. Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T (u^* K u + u^* L^* x + x^* L u + x^* M x) dt \quad (1)$$

на траекториях системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad (2)$$

где $f(t)$ – непрерывная T -периодическая функция, $x(t)$ – T -периодический n -мерный вектор, $u(t)$ – T -периодический m -мерный вектор ($m < n$), $x \in R^n, u \in R^m$, $A(t), B(t), K(t), L(t), M(t)$ – T -периодические непрерывные матрицы соответствующих размерностей, M – симметричная, K – симметричная и положительно определенная матрица (* – знак транспонирования). К классу допустимых будем относить такие управления $u \in U$, для которых уравнение (2) имеет решение и функционал (1) конечен. Допустимое управление \bar{u} будем называть оптимальным, если для $\forall u \in U$ имеет место соотношение

$$J(u) \equiv J(u, x) \geq J(\bar{u}, \bar{x}) \equiv J(\bar{u}).$$

Вводим вспомогательные уравнения типа Риккати и линейное

$$dN/dt = NBK^{-1}B^*N^* + N(BK^{-1}L^* - A) + \quad (3)$$

$$+ (LK^{-1}B^* - A^*)N^* + LK^{-1}L^* - M; N(0) = N(T),$$

$$dr/dt = (LK^{-1}B^* - A^* + NBK^{-1}B^*)r + Nf; r(0) = r(T). \quad (4)$$

Полагаем, что уравнение (3) имеет T -периодическое решение и соответствующее этому решению существует T -периодическое решение уравнения (4).

Имеет место

Теорема 1 [4]. Пусть уравнение $dy/dt = (A - BK^{-1}L^* - BK^{-1}B^*N)y$ не имеет T -периодических решений, кроме нулевого. Тогда оптимальная пара (\bar{u}, \bar{x}) находится из соотношений

$$\bar{u} = -K^{-1}[(L^* + B^*N)x - B^*r], \tag{5}$$

$$dx/dt = (A - BK^{-1}L - BK^{-1}B^*N)x + BK^{-1}B^*r + f, x(0) = x(T),$$

при этом N, r являются T -периодическими решениями задач (3) – (4).

Пример. Оптимизационная задача

$$dx/dt = -x + u + \sin t; x(0) = x(2\pi);$$

$$J(u, x) = \int_0^{2\pi} (u^2(t) + x^2(t))dt \rightarrow \min$$

описывает процесс в электрической цепи переменного тока с индуктивностью и сопротивлением, в цепи действует электродвижущая сила $E = \sin t$, x – сила тока, u – управляющее воздействие. Решаем задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Гамильтониан имеет вид

$$H(x, u, \varphi) = \varphi_0(u^2 + x^2) + \varphi(-x + u + \sin t),$$

$$d\varphi_0/dt = 0, d\varphi/dt = -2\varphi_0x + \varphi; \varphi(0) = \varphi(2\pi),$$

из последних соотношений следует, что $\varphi_0 \neq 0$, так как в противном случае и $\varphi \equiv 0$.

Пусть $\varphi_0 = -1$. Тогда необходимые условия оптимальности дают

$$\partial H / \partial u = -2u + \varphi = 0, \begin{cases} dx/dt = -x + \varphi/2 + \sin t, \\ d\varphi/dt = 2x + \varphi. \end{cases}$$

Решением системы будет вектор $(x, \varphi) = ((\sin t - \cos t)/3; -2(\sin t)/3)$. Подозрительным на оптимальность будет управление $u = -(\sin t)/3$. Для решения задачи применим описанную в [4] методику, дающую достаточные условия оптимальности. В нашем случае

$$A = -1; D = 1; f(t) = \sin t; K = 1; L = 0; M = 1; T = 2\pi.$$

Уравнения (3), (4) и (2) имеют вид

$$dN/dt = N^2 + 2N - 1; N(0) = N(2\pi).$$

$$dr/dt = (1 + N)r + N \sin t; r(0) = r(2\pi). \tag{6}$$

$$dx/dt = (-1 - N)x + r + \sin t; x(0) = x(2\pi).$$

Система (6) имеет 2π -периодические решения

$$N_1 = -1 + \sqrt{2}; N_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

а) 2π -периодическому решению $N = -1 + \sqrt{2}$ соответствуют 2π -периодические решения

$$r = ((\sqrt{2} - 2)\sin t + (1 - \sqrt{2})\cos t)/3 \text{ и } \bar{x} = (\sin t - \cos t)/3.$$

По формуле (5) находим $u = -(\sin t)/3$.

б) 2π -периодическому решению $N = -1 - \sqrt{2}$ соответствуют 2π -периодические решения

$$r = ((-2 - \sqrt{2})\sin t + (\sqrt{2} + 1)\cos t)/3 \text{ и } \bar{x} = (\sin t - \cos t)/3.$$

Из формулы (5) следует, что $\bar{u} = -(\sin t)/3$.

Задача оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием достаточно хорошо исследована для случая, когда в функционале стоит положительно-определенная матрица платы за управляющее воздействие [4; 7], то есть критерий качества является невырожденным. Но в некоторых задачах автоматического регулирования, например, при синтезе следящих систем высокой точности [8] или при синтезе системы инвариантной по отношению к некоторому классу входных воздействий, критерий качества может быть вырождающимся, то есть матрица платы за управляющее воздействие становится лишь положительной (неотрицательной) в некоторые моменты или на некоторых отрезках времени.

Способ нахождения оптимального управления, описанный в работах [4; 6], оказывается некорректным, так как управления, содержащие обращение положительной матрицы, теряют смысл. В настоящей работе изучается линейная краевая задача с периодическими коэффициентами и сингулярной квадратичной формой и синтезируются субоптимальные в некотором смысле, а также оптимальные управления.

Постановка задачи

Рассматривается задача минимизации функционала

$$I(u) = \int_0^T (u^* K u + x^* M x) dt \quad (7)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx + f(t), \quad x(0) = x(T), \quad (8)$$

где $f(t) \in R^n$ – непрерывная T -периодическая вектор-функция, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ – соответственно T -периодические n - и m -мерные вектор-функции ($m < n$), $A(t)$, $B(t)$, $K(t)$, $M(t)$ – T -периодические непрерывные матрицы соответствующих размерностей, M – симметричная, K – симметричная неотрицательная матрица (* – знак транспонирования). Заметим, что мы не требуем неотрицательной определенности матрицы M , как это традиционно делается [4; 7].

К классу допустимых управлений U будем относить такие управления u , для которых уравнение (8) имеет решение. Допустимое управление \bar{u} будем называть оптимальным, если выполняется соотношение $I(u) \equiv I(x, u) \geq I(\bar{x}, \bar{u}) \equiv I(\bar{u}) \quad \forall u \in U$.

При сделанных выше предположениях оптимальное управление может не существовать.

В связи с этим рассмотрим вспомогательные ε – задачи (10), (12) и (11), (13) с функционалом (9)

$$I_\varepsilon(u) = \int_0^T [u^* (K + \varepsilon E) u + x^* M x] dt \quad (9)$$

$\varepsilon > 0$, E – единичная матрица.

Вводим уравнение типа Рикатти

$$\frac{dN_\varepsilon}{dt} = N_\varepsilon B (K + \varepsilon E)^{-1} B^* N_\varepsilon^* - N_\varepsilon^* A - A^* N_\varepsilon - M, \quad (10)$$

$$N_\varepsilon(0) = N_\varepsilon(T).$$

$$\frac{dN}{dt} = NBK^+ B^* N^* - N^* A - A^* N - M, \quad (11)$$

$$N(0) = N(T)$$

и линейные уравнения

$$\frac{dr_\varepsilon}{dt} = (N_\varepsilon B(K + \varepsilon E)^{-1} B^* - A^*) r_\varepsilon + N_\varepsilon f, \quad (12)$$

$$r_\varepsilon(0) = r_\varepsilon(T).$$

$$\frac{dr}{dt} = (NBK + B^* - A^*) r + Nf, \quad r(0) = r(T). \quad (13)$$

Полагая, что уравнения (10) и (12) и соответствующие им уравнения (11), (13) имеют по крайней мере одно T -периодическое решение (вопрос существования T -периодических решений рассматривается в работах [9; 10]), и используя симметрию матриц $N_\varepsilon(t)$, следуя методике работы [4], проводим преобразование подынтегрального выражения: выразим M из (10), N_ε, f из (12), Ax из (8) и подставляя в подынтегральное выражение (9), получим соотношение

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u) = & \int_0^T \left\{ u^* + x^* N_\varepsilon B(K + \varepsilon E)^{-1} - r_\varepsilon^* B(K + \varepsilon E)^{-1} \right\} (K + \varepsilon E) \times \\ & \times \left\{ u + (K + \varepsilon E)^{-1} x N_\varepsilon B - (K + \varepsilon E)^{-1} r_\varepsilon B^* \right\} dt - \\ & - \int_0^T \left[r_\varepsilon^* B(K + \varepsilon E)^{-1} B^* r_\varepsilon + f^* r_\varepsilon + r_\varepsilon^* f \right] dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Из неотрицательности матрицы K и независимости последнего интеграла от управления следует, что оптимальное управление ε – задачи имеет вид

$$U_\varepsilon^{onm} = -(K + \varepsilon E)^{-1} \left[B^* N_\varepsilon x - B^* r_\varepsilon \right] \quad (15)$$

Определение. Пусть существует конечный инфимум $I^0 = \inf I$, а функционалы I_ε таковы, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_u I_\varepsilon = I^0$. Если для последовательности $\{u_\varepsilon\}$ справедливо предельное соотношение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_u I_\varepsilon = I^0$, то назовём $\{u_\varepsilon\}$ последовательностью субоптимальных управлений (это не совпадает с определением субоптимальных управлений в [7]). Если для задачи (7), (8) инфимум I^0 конечен (а для этого достаточно сделанные ранее предположения дополнить требованием не отрицательности матриц $M(t)$), то стандартными рассуждениями нетрудно проверить, что построенные $\{U_\varepsilon^{onm}\}$ образуют последовательность субоптимальных управлений. Действительно, в нашем случае $I_\varepsilon(u) \geq I(u) \quad \forall u \in U$, так что $\inf_u I_\varepsilon \geq \inf_u I$. Далее, $\inf_u I_\varepsilon \leq I_\varepsilon(u) = I(u) + \varepsilon \|u\|^2 \quad \forall u \in U$, поэтому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_u I_\varepsilon \leq \inf_u I$.

Вместе с предыдущим это дает равенство $\inf_u I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_u I_\varepsilon$, и так как по определению $I_\varepsilon(U_\varepsilon^{onm}) = \inf_u I_\varepsilon$, то последовательность $\{U_\varepsilon^{onm}\}$ субоптимальна в определенном выше смысле.

Хотя субоптимальные управления существуют и могут быть определены по формуле (15), однако без дополнительных условий нельзя утверждать существование решения задач (10), (12) при $\varepsilon \rightarrow 0$, как ничего нельзя сказать и о существовании оптимального управления в исходной задаче (7), (8), а следовательно, и о сходимости к нему субоптимальных управлений. Такие дополнительные требования указаны в следующих пунктах.

Построение оптимального управления для сингулярного случая

Пусть для матриц K и B , определенных выше, выполняется соотношение

$$sp \int_0^T B(t)K^+(t)B^*(t)dt < +\infty. \quad (16)$$

Система с такими матрицами рассматривались в работах Б.М. Миллера, А.П. Серебровского [8] для задач, исследуемых в монографии А.М. Летова [11]. Как показано в [8], при выполнении условия (16) существует единственное решение уравнения Рикатти вида (10).

При невыполнении условия (16) проверяем выполнимость условий, предложенных в работе [10], и при выполнении этих условий будет следовать единственность решения задачи (10) и, следовательно, единственность решения редуцированной к ней задачи Коши.

Пусть при всех t совместна система алгебраических уравнений относительно y

$$K(t)y + B^*(t) = 0. \quad (17)$$

Здесь $K^+(t)$ – псевдообратная матрица относительно матрицы $K(t)$.

Из совместности (17) следует, что

$$B^*(t) = K(t)K^*(t)B^*(t). \quad (18)$$

Условие (18) вместе с соотношением

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K^2(t)} \right)^* \left[\frac{1}{K^2(t)} \left(\frac{1}{K^2(t)} \right)^* + \varepsilon E \right]^{-1} = K^+(t) \quad (19)$$

дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K + \varepsilon E)^{-1} B^*(t) = K^+(t) B^*(t). \quad (20)$$

Поскольку выполняется условие теоремы о предельном переходе по параметру, становится законным предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (10), (12), (14). Правые части предельных соотношений (10), (12) существуют и равны правым частям (11), (13), следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dN_\varepsilon}{dt} = \frac{dN}{dt}$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dr_\varepsilon}{dt} = \frac{dr}{dt}$. Таким образом, $N(t)$, $r(t)$ находим как решение задач

$$\frac{dN}{dt} = NBK^+B^*N^* - N^*A - A^*N, \quad N(0) = N(T), \quad (21)$$

$$\frac{dr}{dt} = (NBK^+B^* - A^*)r + Nf, \quad r(0) = r(T), \quad (22)$$

а $I(u)$ получаем как предел

$$I(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_0^T \left\{ u + K^+ B^* N x - K^+ B^* r \right\}^* K^+ \left(u + K^+ B^* N x - K^+ B^* r \right) dt - \int_0^T \left(r^* B K^+ B^* r + f^* r + r^* f \right) dt. \tag{23}$$

Из неотрицательности K следует, что

$$u^{onm} = -K^+ (B^* N x - B^* r). \tag{24}$$

Поскольку $u^{onm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^{onm}$ и при этом $I^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^0$, то последовательности субоптимальных управлений $\{u_\varepsilon^{onm}\}$ сходятся к u^{onm} задачи (7), (8) точно. Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть для задачи (7), (8) с вырождающейся платой за управляющее воздействие выполняются условие (16), соотношение (17) и существует хотя бы одно T -периодическое решение задачи (21) и соответствующее ему T -периодическое решение задачи (22). Тогда существуют оптимальные управления исходной задачи, одно из которых определяется по формуле (24).

Замечание 1. Подставляя (24) в (8), получим уравнение для определения x^{onm} , через которое выражается u^{onm} .

Замечание 2. Аналогичные результаты получаются, если в функционале I имеются дополнительные слагаемые $u^* L x + x^* L u$, где $L = L(t)$ есть T -периодическая непрерывная $(n \times m)$ - матрица. Задачи (21), (22) принимают при этом вид

$$\frac{dN}{dt} = NBK^+ B^* N^* + (LK^+ B^* - A^*)N + N^*(BK^+ L^* - A) + LK^+ L^* - M, N(0) = N(T),$$

$$\frac{dr}{dt} = (LK^+ B^* - A^* + NBK^+ B^*)r + Nf, r(0) = r(T).$$

Подобным же образом изменятся задачи (10), (12), а вид функционалов (14), (23), субоптимальных управлений (15) и оптимального управления (24) остается неизменным.

Регуляризация задачи с приближенными данными

В дополнении к условиям, рассмотренным выше, предположим, что при всех t матрицы $M = M(t) = M^*(t)$ неотрицательны. Пусть вместо точных матриц $K = K(t)$ заданы их симметричные (но не обязательно неотрицательные) δ -приближения $K = K_\delta(t) = K_\delta^*(t)$, $\|K_{\delta(t)} - K(t)\| \leq \delta \quad \forall t$ и требуется построить субоптимальные управления исходной задачи (7), (8). В силу линейности дифференциальной системы (8) и неотрицательности матриц K и M исходный точный дифференциал (7) выпукл и, следовательно, ввиду рефлексивности гильбертова пространства L_2^m , слабо полунепрерывен, снизу в этом пространстве [12, с. 107]. Из последнего свойства функционала (7) и его выпуклости очевидным образом вытекает выпуклость и замкнутость множества оптимальных управлений задачи (7), (8). Поскольку гильбертово пространство L_2^m рефлексивно и строго выпукло, то в этом множестве оптимальных управлений имеется и при-

том ровно одно оптимальное управление u^0 минимальной нормы, именуемое нормальным.

Рассмотрим приближенный сглаживающий функционал А.Н. Тихонова

$$I_\delta(u) = \int_0^T \left(u^* (K_\delta + \alpha(\delta)E) u + x^* M x \right) dt \quad (25)$$

на траекториях системы (8) при $\alpha(\delta) > \delta$. Поскольку матрицы $K_\delta + \alpha(\delta)E$ положительно определены, то для задачи (25), (8), как показано выше в формуле (15), можно синтезировать оптимальное управление u_δ . Для этих управлений оказывается справедливой

Теорема 3. В условиях теоремы 1 при неотрицательных матрицах M , приближенных симметричных матрицах K_δ и соотношениях

$$\alpha(\delta) > \delta, \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0 \quad (26)$$

регуляризованные оптимальные управления задач (25), (8) субоптимальны для исходной задачи (7), (8) и сильно (по L_2^m -норме) сходятся при $\delta \rightarrow 0$ к нормальному оптимальному управлению u^0 .

Доказательство. По определению имеем

$$I_\delta(u) = \min_u I_\delta \leq I_\delta(u^0) \leq I(u^0) + (\alpha(\delta) - \delta) \|u^0\|^2$$

С другой стороны, $I_\delta(u_\delta) \geq I(u_\delta) + (\alpha(\delta) - \delta) \|u_\delta\|^2$. Так что

$$I(u_\delta) + (\alpha(\delta) - \delta) \|u_\delta\|^2 \leq I(u^0) + (\alpha(\delta) - \delta) \|u^0\|^2. \quad (27)$$

По определению оптимального управления $I(u^0) \leq I(u_\delta)$ и из неравенства (27) получаем, что

$$(\alpha(\delta) - \delta) \|u_\delta\|^2 \leq (\alpha(\delta) - \delta) \|u^0\|^2, \quad \|u_\delta\|^2 \leq \left(1 + \frac{2\delta}{\alpha(\delta) - \delta} \right) \|u^0\|^2,$$

откуда в силу условий (26)

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| \leq \|u^0\|. \quad (28)$$

Поскольку пространство L_2^m рефлексивно, то ограниченность последовательности $\{u_\delta\}$ влечёт наличие слабых предельных её точек при $\delta \rightarrow 0$. Возьмём какую-либо из этих слабых предельных точек u_0 и слабо сходящуюся к ней подпоследовательность, которую ради простоты обозначений тоже запишем как $\{u_\delta\}$. Тогда из (26) и (27) следуют соотношения

$$0 \leq I(u_\delta) - I(u^0) \leq (\alpha(\delta) + \delta) \|u^0\|^2 \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Так что

$$u_\delta \rightarrow u_0 \text{ (слабо)}, I(u_\delta) \rightarrow I(u^0) = \min_u I, \delta \rightarrow 0. \quad (29)$$

Ввиду слабой полунепрерывности функционала I снизу из соотношений (29) вытекает, что $I(u_0) = \min_u I$, откуда u_0 – оптимальное управление. Кроме того, поскольку $I_\delta(u) - I(u) \leq (\alpha(\delta) + \delta)\|u\|$ и последовательность $\{u_\delta\}$ ограничена в силу (28), то из (29) видно, что $\{u_\delta\}$ – субоптимальная последовательность управлений.

По свойству слабой сходимости,

$$\|u_0\| \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|,$$

что вместе с неравенством (28) даёт неравенства

$$\|u_0\| \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| \leq \|u^0\|. \quad (30)$$

Поскольку u_0 и u^0 – оптимальные управления исходной задачи, u^0 – единственное управление с минимальной нормой, то неравенства (30) возможны лишь при совпадении $u_0 = u^0$, так что все слабые предельные точки последовательности $\{u_\delta\}$ совпадают с управлением u^0 , и поэтому вся последовательность $\{u_\delta\}$ (а не только её подпоследовательность) слабо сходится к управлению u^0 . Теперь из соотношения (30) вытекают равенства

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\| = \|u^0\|,$$

а это вместе со слабой сходимостью $u_\delta \rightarrow u^0$ (слабо), $\delta \rightarrow 0$ ввиду гильбертовости пространства L_2^m даёт сильную сходимость в L_2^m -норме: $\|u_\delta - u^0\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Поскольку предельное равенство (19) сохраняет силу при замене единичной матрицы E на любую симметричную положительно определенную матрицу, то с помощью предельного перехода нетрудно проверить, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta = u^{onm}$, где u_δ определяется по формуле (15), а u^{onm} является единственным нормальным оптимальным управлением исходной задачи.

Замечание 4. Неотрицательность матриц M использовалась лишь как условие, достаточное для выпуклости исходного функционала $I(u)$. Если решение системы (8) записывают в виде $x = Hu + x_0$, с матрицей H , то для выпуклости функционала $I(u)$ достаточно более слабое условие неотрицательности матриц $K + H^*MH$, а при наличии в функционале $I(u)$ дополнительных членов $x^*Lu + u^*L^*x$ (см. замечание 2) – неотрицательности матриц $K + H^*MH + L^*H + H^*L$.

Замечание 5. Выпуклость исходного функционала I тоже использовалась нами не по существу, а лишь как достаточное его слабой полунепрерывности снизу. Если таковая может быть получена из иных соображений, то выпуклость исходного функционала не нужна. При этом нормальные управления могут образовывать неодноточечное подмножество N_0 , к которому и будут сильно β -сходиться [13] субоптимальные управления u_δ при $\delta \rightarrow 0$, то есть непременно будут существовать и притом именно в подмножестве N_0 сильные предельные точки субоптимальных управлений u_δ .

Замечание 6. Симметричность возмущений матриц K_δ существенна, поскольку речь идет об эффективном синтезе управлений, основанном на результатах, полученных выше. Точно так же можно исследовать и случай симметричных малых возмущений матриц M и произвольных малых возмущений прочих данных задачи, и если мы ограничились рассмотрением возмущений только матриц K , то исключительно ради простоты и краткости изложения. При несимметричных возмущениях матриц K или M неизвестен способ эффективного синтеза субоптимальных управлений, хотя для управлений, минимизирующих точно или даже приближенно функционал $I_\delta(u)$, остаются в силе результаты, подобные теореме 3 (см. [13]).

Рассмотренная в начале статьи оптимизационная задача являлась линейной по фазовой координате. Переходим к рассмотрению случая, когда оптимизационная задача нелинейна по фазовой координате.

Рассмотрим управляемый почти периодический процесс:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(x,t)u, t \in (-\infty, \infty) \quad (31)$$

с критерием качества:

$$J(x, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (u^* K u + x^* L^* u + u^* L x + x^* M x) dt. \quad (32)$$

Будем осуществлять поиск оптимального управления для нелинейной по фазовой координате системе с квадратичным критерием качества.

Относительно системы (31) – (32) полагаем: $x(t)$ почти периодическая n -мерная вектор-функция, $x(t) \in E^n$, $u(t)$ – непрерывная почти периодическая p -мерная вектор-функция, $u(t) \in E^p$, $B(x, t)$ – непрерывная по x, t , почти периодическая по t равномерно по x матрица размерности $n \times p$ со свойством $B(0, t) = 0$; $A(t)$, $\hat{E}(t)$, $L(t)$, $M(t)$ – непрерывные почти периодические матрицы соответствующих размерностей, при этом $\hat{E}(t)$, $M(t)$ – симметричные, а $\hat{E}(t)$ – положительно определенная матрица. Символ $*$ – символ транспонирования.

Из всего множества почти периодических $u(t) \in E^p$ будем рассматривать такие $u(t) \in U \in E^p$, которым соответствует по крайней мере одно почти периодическое решение $x(t)$ уравнения (1), и функционал (2) принимает конечное значение. Будем искать такие $\bar{u}(t) \in U$ и соответствующие им решения $x(t)$ уравнения (1), чтобы выполнялось условие:

$$j(\bar{x}, \bar{u}) = \inf j(x, u). \quad (33)$$

Определенные таким образом $\bar{u}(t)$ будем называть оптимальным управлением.

Наиболее интересен случай синтеза оптимального управления, когда оптимальное управление является функцией соответствующего ему решения $x(t)$.

Для нахождения оптимального управления $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$ задачи (31) – (32) используем технику, предложенную нами в работах [4; 6]. Для этого сделаем естественные предположения:

- 1) множество управлений U не пусто,
- 2) система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial t} = NB(x, t)K^{-1}B^*(x, t)N^* + N[B(x, t)K^{-1}L^* - A] + [LK^{-1}B^*(x, t) - A^*]N + LK^{-1}L^* - M$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax - B(x, t)K^{-1}B^*(x, t)Nx - B(x, t)K^{-1}L^*x \quad (34)$$

имеют хотя бы одно почти периодическое решение $(\bar{x}(t), \bar{N}(t))$.

Покажем, что матрица $N(t)$, фигурирующая в (34), является симметричной, для чего рассмотрим первое уравнение системы (34). Транспонируя ей обе части этого уравнения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{dt} = & NB(x, t)K^{-1}B^*(x, t)N^* + N[B(x, t)K^{-1}L^* - A] + \\ & + [LK^{-1}B^*(x, t) - A^*]N + LK^{-1}L^* - M. \end{aligned} \quad (35)$$

Полагаем, что уравнение (35) имеет хотя бы одно почти периодическое решение. Пусть $\tilde{N}(t)$ – решение уравнения (35). Вычитая (34) из (35), имеем что $\tilde{N}(t) = \tilde{N}^*(t) + P$, где P – постоянная матрица со свойствами $P + P^* = 0$.

Так как этому свойству удовлетворяет нуль-матрица, то одним из решений уравнения (35) будет $\tilde{N}(t) = \tilde{N}^*(t)$

Симметричность матрицы $N(t)$ используем для преобразования подынтегрального выражения, для чего, следуя методике работы [6], выразим M из первого уравнения системы (34), Ax из (31) и, учитывая симметричность матриц K , M , N , после несложных преобразований [4] имеем

$$\begin{aligned} x^*Mx = & x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBK^{-1}L^*x + x^*NBu + x^*LK^{-1}B^*Nx + \\ & + u^*B^*Nx + x^*LK^{-1}L^*x - \frac{d(x^*Nx)}{dt}. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя (6) и условие равномерной ограниченности почти периодической функции $x^*(t)N(x, t)x$ на всей действительной оси [3], перепишем $j(x, u)$ в виде

$$\begin{aligned} j(x, u) = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[[u + K^{-1}](L^* + B^*N)x \right] \times \\ & \times K[u + K^{-1}(L^* + B^*N)x] dt. \end{aligned} \quad (37)$$

В силу положительной определенности матрицы из соотношения (37) следует, что $j(x, u) \geq 0$ и $\inf j(x, u) = j(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ достигается на векторе, определяемом из соотношения

$$\bar{u} + K^{-1}[L^* + B^*N]\bar{x} = 0. \quad (38)$$

то есть

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = K^{-1}[L^* + B^*(\bar{x}, t)N]\bar{x}. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (31), получим второе уравнение системы (34), дающее возможность определить оптимальное решение $\bar{x}(t)$, соответствующее оптимальному управлению $\bar{u}(t)$.

Таким образом, нами может быть сформулирована

Теорема 4. Пусть относительно системы нелинейных уравнений (34) справедливы приведенные выше условия. Тогда синтезирующее оптимальное управление задачи (31) – (32) существует и вычисляется по правилу (39).

Замечание 7. Условие $B(0, t) = 0$ дает условия существования сопряженного оператора $B^*(x, t)$.

Замечание 8. Результат, приведенный выше, относительно синтеза оптимального управления в задаче (31) – (33) рассмотрен в [14], однако при условии существования единственного решения нелинейной системы дифференциальных уравнений во всем функциональном пространстве, что является практически нереальным требованием.

Замечание 9. Нелинейную систему (4) дифференциальных уравнений будем решать разностными методами. После дискретизации дифференциальная задача сводится к разностной задаче, которую можно эффективно решать с помощью полукальных алгоритмов, описанных в [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ройтенберг, Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1978. – 551 с.
2. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 455 с.
3. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1975. – 376 с.
4. Мадорский, В. М. О синтезе оптимального управления некоторыми периодическими решениями / Б. И. Крюков, В. М. Мадорский // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 8. – С. 28–32.
5. Halanay, A. Optimal Control of Periodic Solutions / A. Halanay // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1974. – Vol. XIX, № 1. – P. 3–16.
6. Мадорский, В. М. Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В. М. Мадорский, В. В. Анисович, Б. И. Крюков // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.
7. Брайсон, А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 432 с.
8. Миллер, Б. М. Задача оптимального управления линейной системой с вырожденным квадратичным критерием качества / Б. М. Миллер, А. П. Серебровский // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 3. – С. 23–34.
9. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 11. – С. 84–90.
10. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2005. – 186 с.
11. Летов, А. М. Динамика полета и управления / А. М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 342 с.
12. Лисковец, О. А. Вариационные методы решение неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 343 с.
13. Данилин, Ю. М. О методах минимизации с ускоренной сходимостью / Ю. М. Данилин, Б. Н. Пшеничный // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1970. – Т. 10, № 6. – С. 1342–1353.

14. Анисович, В. В. Об оптимизации нелинейных почти периодических колебательных процессов / В. В. Анисович // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 190–192.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.03.2017

Madorsky V.M. On the Synthesis of Optimum Control of Some Optimization Problems

Linear and nonlinear periodic and almost periodic optimization problems with a quadratic quality criterion are considered. Methods are given for obtaining optimal controls for regular optimization problems, for problems with a degenerate control board, and for nonlinear optimization problems.

УДК 519.65 + 517.548.5

А.П. Худяков¹, О.В. Матысик²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкинаe-mail: priclmath@brsu.brest.by**ФОРМУЛЫ ОБОБЩЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЭРМИТА – БИРКГОФА
ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА***

Для функций матричного аргумента построены обобщенные тригонометрические интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа. Одна из интерполяционных формул получена для целых функций матричной переменной. Во второй формуле дифференциальный оператор, значение которого входит в ее структуру, задан посредством дифференциалов Гаю. Доказаны теоремы о выполнении интерполяционных условий. Построен иллюстрационный пример, в котором сравнивается точность приближения конкретной функции матричного аргумента интерполяционными многочленами Эрмита – Биркгофа разных степеней.

Введение

В теории интерполирования функций скалярных аргументов строятся интерполяционные многочлены различных видов относительно произвольных чебышевских систем функций и их многих частных случаев. Такого вида интерполяционные формулы также находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

В данной работе построены интерполяционные тригонометрические матричные многочлены эрмитова типа. Такого вида формулы содержат кроме значений интерполируемой функции, также и значения ее производных во всех или только в отдельных узлах интерполирования. При построении обобщенных вариантов этих формул требуется совпадение заданных в узлах значений дифференциальных операторов интерполяционного полинома и интерполируемой функции. Ряд таких формул для функций скалярного аргумента получен и исследован в [1; 2].

1. Интерполяционная формула для целых функций

В [1] для 2π -периодической функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ построен обобщенный тригонометрический интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t)L_{2n+1}(f; t_j)}{\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)}, \quad (1)$$

где $H_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(t)}{\sin \frac{1}{2}(t-t_k) l'_n(t_k)} f(t_k)$, $l_n(t) = \sin \frac{1}{2}(t-t_0) \sin \frac{1}{2}(t-t_1) \cdots \sin \frac{1}{2}(t-t_{2n})$,

*Работа выполнена в рамках темы «Приближённые методы интерполяционного и других типов для функций скалярного аргумента, функций матричного аргумента, а также операторов, заданных в функциональных пространствах, и их приложения» (зарегистрирована в БелИСА 25.04.2015 № ГР 20150517).

$$\Omega_{n+1}(t) = \cos \frac{1}{2}(t - t_j) l_n(t), \quad \cos \frac{1}{2} \left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right) \neq 0, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} < 2\pi,$$

а дифференциальный оператор $L_{2n+1}f(t)$ имеет вид

$$L_{2n+1}f(t) = (D^2 + n^2) \dots (D^2 + 1^2) Df(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Формула (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$T_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1}; t_j) = L_{2n+1}(f; t_j).$$

Построим матричный вариант формулы (1). Пусть X – множество квадратных матриц, $F(z)$ – целая 2π -периодическая функция, $z \in \mathbb{C}$, также задана совокупность различных матричных узлов $A_k \in X$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$). В этих точках известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, $A \in X$. Кроме этого, в одном из узлов A_j известно значение $L_{2n+1}(F; A_j) \equiv L_{2n+1}F(A_j)$ дифференциального матричного оператора вида

$$L_{2n+1}F(A) = (D^2 + n^2) \dots (D^2 + 1^2) DF(z) \Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Причем значение данного оператора, примененного к функции вида $B_1F(A)B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X , вычисляется по правилу

$$L_{2n+1}(B_1F(A)B_2; A) = B_1L_{2n+1}F(A)B_2.$$

Далее указан тригонометрический полином $T_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполняются условия

$$T_{n+1}(A_i) = F(A_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1}; A_j) = L_{2n+1}(F; A_j). \quad (2)$$

Теорема 1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(F; A) = H_n(A) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \Omega_{n+1}(A) \cos^{-1} \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) L_{2n+1}(F; A_j), \quad (3)$$

где

$$H_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} \Psi_k(A) \Psi_k^{-1}(A_k) F(A_k), \quad (4)$$

$$\Psi_k(A) = \sin \frac{A - A_0}{2} \dots \sin \frac{A - A_{k-1}}{2} \sin \frac{A - A_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{A - A_{2n}}{2},$$

$$\Omega_{n+1}(A) = \cos \frac{A - A_j}{2} \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{A - A_k}{2},$$

матрицы $\sin \frac{A_k - A_v}{2}$ ($k \neq v$) и $\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right)$ обратимы, удовлетворяет первой группе условий (2). Если матрицы A_0, A_1, \dots, A_{2n} попарно перестановочны, то многочлен (3) удовлетворяет также второму условию (2).

Доказательство. Очевидно, что $H_n(A_i) = F(A_i)$ при $i = 0, 1, \dots, 2n$. Так как в произведении $\Omega_{n+1}(A)$ входят множители вида $\sin \frac{A - A_i}{2}$ ($i = \overline{0, 2n}$), то $\Omega_{n+1}(A_i) = 0$ для данных значений i . Таким образом, первая группа условий (2) выполняется.

В силу попарной перестановочности матриц A_0, A_1, \dots, A_{2n} , матричные многочлены $\Psi_k(A)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$), а следовательно и многочлен $H_n(A)$ при $A = A_j$ будут представимы в виде

$$H_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^n ((\cos kA)B_{2k-1} + (\sin kA)B_{2k}), \quad (5)$$

где B_0, B_1, \dots, B_{2n} – соответствующие фиксированные матрицы из множества X .

Поскольку

$$L_{2n+1} \cos kA = L_{2n+1} \sin kA = 0 \quad (k = \overline{0, n}),$$

то и $L_{2n+1}H_n(A) = 0$ при $A = A_j$.

При этих же условиях попарной коммутативности матриц A_0, A_1, \dots, A_{2n} методом математической индукции можно показать, что при $A = A_j$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1}(A) = \tilde{T}_n(A) + \\ + \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \left(-\sin \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \cos(n+1)A + \cos \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \sin(n+1)A \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{T}_n(A)$ – тригонометрический матричный многочлен степени не выше n вида (5).

Далее, так как

$$L_{2n+1}(\cos(n+1)A; A_j) = (-1)^{n+1} (2n+1)! \sin(n+1)A_j,$$

$$L_{2n+1}(\sin(n+1)A; A_j) = (-1)^n (2n+1)! \cos(n+1)A_j$$

и, кроме того, $L_{2n+1}\tilde{T}_n(A) = 0$, то

$$L_{2n+1}(\Omega_{n+1}; A_j) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \left(\sin \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \sin(n+1)A_j + \right. \\ \left. + \cos \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \cos(n+1)A_j \right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \cos \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right).$$

Таким образом, получили, что второе равенство в (2) справедливо.

Теорема 1 доказана.

Замечание. В данной теореме условие попарной перестановочности узлов можно заменить более слабым условием перестановочности матрицы A_j с каждым из узлов A_0, A_1, \dots, A_{2n} , но тогда матрица $\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right)$ в формуле (3) заменится более громоздким выражением и доказательство теоремы значительно усложнится.

2. Интерполяционная формула, в которой дифференциальный оператор задается посредством дифференциалов Гато

Пусть, как и ранее, X и Y – множества квадратных матриц, $F: X \rightarrow Y$ – матричная функция, дифференцируемая по Гато $2n+1$ раз в точке $A_j \in X$. Далее построим формулу, аналогичную (3), в которой оператор $L_{2n+1}F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A)$, $A \in X$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{L}_1 F(A) \equiv \tilde{L}_1 F(A; H_1) \equiv \tilde{D}_{H_1} F(A) = \delta F[A; H_1], \quad \tilde{L}_3 F(A) \equiv \tilde{L}_3 F(A; H_3 H_2 H_1) = \\ = (\tilde{D}_{H_3 H_2}^2 + H_3 H_2) \tilde{D}_{H_1} F(A) = \delta^3 F[A; H_3 H_2 H_1] + H_3 H_2 \delta F[A; H_1],$$

где $\delta F[A; H_1]$ – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_1 \in X$, а $\delta^3 F[A; H_3 H_2 H_1]$ – дифференциал Гато третьего порядка от $F(A)$ в той же точке по направлениям $H_1, H_2, H_3 \in X$. Обозначим $\psi_0(A) = I$, где I – единичная матрица, $\varphi_n(A) = \sin nA$, $\psi_n(A) = \cos nA$, $n \geq 1$. Тогда если матрицы A и H из множества X перестановочны, то для дифференциалов Гато функций $\varphi_n(A)$ и $\psi_n(A)$ по направлению H справедливы равенства $\delta \varphi_n[A; H] = n \psi_n(A) H$; $\delta \psi_n[A; H] = -n \varphi_n(A) H$. Легко убедиться, что если матрицы A, H_1, H_2, H_3 попарно перестановочны, то решением уравнения $\tilde{L}_3 F(A) = 0$ являются функции $F(A) = \varphi_1(A)$ и $F(A) = \psi_1(A)$, а также любая матричная функция, не зависящая от A .

Аналогично рассмотрим дифференциально-матричный оператор общего вида

$$\tilde{L}_{2n+1} F(A) = \tilde{L}_{2n+1} F(A; H_{2n+1} H_{2n} \dots H_1) = \\ = (\tilde{D}_{H_{2n+1} H_{2n}}^2 + n^2 H_{2n+1} H_{2n}) \dots (\tilde{D}_{H_5 H_4}^2 + 2^2 H_5 H_4) (\tilde{D}_{H_3 H_2}^2 + 1^2 H_3 H_2) \tilde{D}_{H_1} F(A), \quad (7)$$

где $(\tilde{D}_{H_{2k+1}H_{2k}}^2 + k^2 H_{2k+1}H_{2k})F_k(A) = \delta^2 F_k[A; H_{2k+1}H_{2k}] + k^2 H_{2k+1}H_{2k}F_k(A)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, а функции $F_k(A)$ являются результатом применения оператора $\tilde{D}_{H_1}F(A)$ и $(k-1)$ -кратного последовательного применения операторов, указанных в скобках выражения (7). Как и ранее, уравнение $\tilde{L}_{2n+1}F(A) = 0$ имеет решения $\psi_0(A) = I$, $\phi_k(A) = \sin kA$ и $\psi_k(A) = \cos kA$ ($k = 1, 2, \dots, n$), при условии попарной перестановочности матриц $A, H_1, H_2, \dots, H_{2n+1} \in X$.

Построим далее тригонометрический полином $\tilde{T}_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$\tilde{T}_{n+1}(A_i) = F(A_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \quad \tilde{L}_{2n+1}(\tilde{T}_{n+1}; A_j) = \tilde{L}_{2n+1}(F; A_j). \quad (8)$$

Теорема 2. *Тригонометрический многочлен*

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{n+1}(F; A) = & H_n(A) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \Omega_{n+1}(A)(H_{2n+1}H_{2n} \cdots H_1)^{-1} \times \\ & \times \cos^{-1} \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \tilde{L}_{2n+1}(F; A_j), \end{aligned} \quad (9)$$

где $H_n(A)$ – матричный многочлен (4), а матрицы $\cos \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right)$ и $H_{2n+1}H_{2n} \cdots H_1$ обратимы, удовлетворяет первой группе условий (8). Если узлы A_0, A_1, \dots, A_{2n} и направления $H_1, H_2, \dots, H_{2n+1}$ попарно перестановочны, то многочлен (9) удовлетворяет также второму условию (8).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 и структуры многочлена (9) следует, что он удовлетворяет первой группе условий (8).

При условии попарной перестановочности матриц $A, A_0, A_1, \dots, A_{2n}$ многочлены $H_n(A)$ и $\Omega_{n+1}(A)$ можно представить в виде (5) и (6) соответственно. Далее, так как матрица A_j перестановочна с направлениями H_1, H_2, \dots, H_{n+1} , то при $v = 0, 1, \dots, n+1$ и $k = 1, 2, \dots, n$

$$\tilde{D}_{H_1} \psi_v(A) \Big|_{A=A_j} = \delta \psi_v[A_j; H_1] = -v \varphi_v(A_j) H_1,$$

$$\tilde{D}_{H_{2k+1}H_{2k}}^2 \psi_v(A) \Big|_{A=A_j} = \delta^2 \psi_v[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] = -v^2 \psi_v(A_j) H_{2k+1}H_{2k},$$

а при $v = 1, 2, \dots, n+1$ и тех же значениях k

$$\tilde{D}_{H_1} \varphi_v(A) \Big|_{A=A_j} = \delta \varphi_v[A_j; H_1] = v \psi_v(A_j) H_1,$$

$$\tilde{D}_{H_{2k+1}H_{2k}}^2 \varphi_v(A) \Big|_{A=A_j} = \delta^2 \varphi_v[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] = -v^2 \varphi_v(A_j) H_{2k+1}H_{2k}.$$

Из данных равенств, с учетом попарной перестановочности матриц $A_j, H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$, следует, что $\tilde{L}_{2n+1}(\psi_0; A_j) = \tilde{L}_{2n+1}(\psi_k; A_j) = \tilde{L}_{2n+1}(\varphi_k; A_j) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, в силу попарной перестановочности интерполяционных узлов и направлений $H_1, H_2, \dots, H_{2n+1}$, и ввиду представления (5) будем иметь $\tilde{L}_{2n+1}(H_n; A_j) = 0$.

Так как при $k = 1, 2, \dots, n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_{H_{2k+1}H_{2k}}^2 + k^2 H_{2k+1}H_{2k}) \psi_{n+1}(A) \Big|_{A=A_j} &= \delta^2 \psi_{n+1}[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] + \\ &+ k^2 \psi_{n+1}(A_j) H_{2k+1}H_{2k} = -[(n+1)^2 - k^2] \psi_{n+1}(A_j) H_{2k+1}H_{2k}, \\ (\tilde{D}_{H_{2k+1}H_{2k}}^2 + k^2 H_{2k+1}H_{2k}) \phi_{n+1}(A) \Big|_{A=A_j} &= \delta^2 \phi_{n+1}[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] + \\ &+ k^2 \phi_{n+1}(A_j) H_{2k+1}H_{2k} = -[(n+1)^2 - k^2] \phi_{n+1}(A_j) H_{2k+1}H_{2k}, \end{aligned}$$

то будем соответственно иметь

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2n+1}(\psi_{n+1}; A_j) &= (-1)^{n+1} (2n+1)! \phi_{n+1}(A_j) H_{2n+1} \cdots H_2 H_1, \\ \tilde{L}_{2n+1}(\phi_{n+1}; A_j) &= (-1)^n (2n+1)! \psi_{n+1}(A_j) H_{2n+1} \cdots H_2 H_1. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая соотношение (6), получим

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2n+1}(\Omega_{n+1}; A_j) &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \left[\sin \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \sin(n+1)A_j + \cos \frac{1}{2} \left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \times \right. \\ &\times \left. \cos(n+1)A_j \right] H_{2n+1} \cdots H_2 H_1 = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \cos \frac{1}{2} \left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) H_{2n+1} \cdots H_2 H_1. \end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что второе равенство в (8) справедливо.

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что формула (3) является частным случаем многочлена (9), когда $F(z)$ является целой функцией и $H_1 = H_2 = \dots = H_{2n+1} = I$.

Интерполяционные формулы аналогичного типа для функций матричного аргумента построены также в [3–7].

3. Пример. Для функции $F(A) = e^{\sin A}$ построим многочлен $T_2(A) = T_2(F; A)$ второй степени вида (3) в случае узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{12} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \frac{\pi}{72} \begin{bmatrix} 65 & 85 \\ 102 & 48 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{\pi}{72} \begin{bmatrix} 131 & 115 \\ 138 & 108 \end{bmatrix}.$$

Данная функция в узлах интерполирования принимает значения

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 1,382 & 0,6462 \\ 0,775 & 1,253 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} 0,8740 & 0,4214 \\ 0,5057 & 0,790 \end{bmatrix}, \quad F(A_2) = \begin{bmatrix} 0,5441 & -0,1635 \\ -0,1962 & 0,5768 \end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_3F(A)$ в точке A_1 равно

$$L_3(F; A_1) = \begin{bmatrix} 0,08495 & 0,1109 \\ 0,1331 & 0,06277 \end{bmatrix}.$$

Здесь приводятся приближенные значения интерполируемой функции и соответствующих дифференциальных операторов с округлением их точных значений до последних указанных разрядов.

В этом случае интерполяционный многочлен $T_2(F; A)$ имеет вид

$$T_2(F; A) = H_1(A) + \Omega_2(A)B_3,$$

где

$$H_1(A) = \Psi_0(A)B_0 + \Psi_1(A)B_1 + \Psi_2(A)B_2,$$

$$\Psi_0(A) = \sin \frac{A-A_1}{2} \sin \frac{A-A_2}{2}, \quad \Psi_1(A) = \sin \frac{A-A_0}{2} \sin \frac{A-A_2}{2},$$

$$\Psi_2(A) = \sin \frac{A-A_0}{2} \sin \frac{A-A_1}{2}, \quad \Omega_2(A) = \cos \frac{A-A_1}{2} \prod_{k=0}^2 \sin \frac{A-A_k}{2}.$$

Матрицы B_0, B_1, B_2, B_3 для данного конкретного случая будут такими

$$B_0 = \begin{bmatrix} -6,357 & 3,652 \\ 4,383 & -7,087 \end{bmatrix}, \quad B_1 = -\begin{bmatrix} 0,4121 & 1,315 \\ 1,578 & 0,1491 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 4,801 & -5,308 \\ -6,370 & 5,862 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0,06192 & 0,1993 \\ 0,2391 & 0,02206 \end{bmatrix}.$$

Фробениусовы нормы матриц погрешности приближения в средних точках $A_{01} = (A_0 + A_1)/2$ и $A_{12} = (A_1 + A_2)/2$ здесь принимают значения

$$\|F(A_{01}) - T_2(A_{01})\|_2 = 0,03652, \quad \|F(A_{12}) - T_2(A_{12})\|_2 = 0,03107.$$

Для той же функции построим многочлен $T_3(A) = T_3(F; A)$ третьей степени в случае узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \frac{\pi}{45} \begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{\pi}{45} \begin{bmatrix} 45 & 26 \\ 39 & 45 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \frac{\pi}{45} \begin{bmatrix} 54 & 28 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \frac{\pi}{45} \begin{bmatrix} 81 & 50 \\ 75 & 81 \end{bmatrix}.$$

Интерполируемая функция в узлах принимает значения

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 2,191 & 0,4304 \\ 0,6456 & 2,191 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} 2,554 & -0,07307 \\ -0,1096 & 2,554 \end{bmatrix},$$

$$F(A_2) = \begin{bmatrix} 1,333 & -0,7194 \\ -1,079 & 1,333 \end{bmatrix}, \quad F(A_3) = \begin{bmatrix} 1,778 & -0,7264 \\ -1,090 & 1,778 \end{bmatrix}, \quad F(A_4) = \begin{bmatrix} 1,643 & -0,8381 \\ -1,257 & 1,643 \end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_5 F(A)$ в точке A_2 равно

$$L_5(F; A_2) = \begin{bmatrix} 4,717 & -1,457 \\ -2,186 & 4,717 \end{bmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен $T_3(F; A)$ задается равенством

$$T_3(F; A) = H_2(A) + \Omega_3(A)B_5,$$

$$\text{где } H_2(A) = \sum_{k=0}^4 \Psi_k(A)B_k, \quad \Omega_3(A) = \cos \frac{A-A_2}{2} \prod_{k=0}^4 \sin \frac{A-A_k}{2},$$

$$\Psi_k(A) = \sin \frac{A-A_0}{2} \dots \sin \frac{A-A_{k-1}}{2} \sin \frac{A-A_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{A-A_4}{2}, \quad (k=0,1,\dots,4).$$

Матрицы B_0, B_1, \dots, B_5 в данном случае равны

$$B_0 = \begin{bmatrix} 56,94 & -62,59 \\ -93,88 & 56,94 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 10 \begin{bmatrix} 3375 & -2754 \\ -4131 & 3375 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -542,2 & 444,1 \\ 666,1 & -542,2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = 100 \begin{bmatrix} -3507 & 2863 \\ 4295 & -3507 \end{bmatrix}, \quad B_4 = 100 \begin{bmatrix} 3174 & -2592 \\ -3888 & 3174 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 1,599 & -0,2864 \\ -0,4296 & 1,599 \end{bmatrix}.$$

Нормы матричных погрешностей приближения в средних точках $A_{kk+1} = (A_k + A_{k+1})/2$ ($k=0,1,2,3$) для рассматриваемого случая равны

$$\|F(A_{01}) - T_3(A_{01})\|_2 = 0,007354, \quad \|F(A_{12}) - T_3(A_{12})\|_2 = 0,004345,$$

$$\|F(A_{23}) - T_3(A_{23})\|_2 = 0,001873, \quad \|F(A_{34}) - T_3(A_{34})\|_2 = 0,007293.$$

Погрешность приближения функции $F(A) = e^{\sin A}$ многочленом $T_3(A)$ в этих средних точках выше в сравнении с приближением многочленом $T_2(A)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.

2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.

3. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

4. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.

5. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 с.

6. Худяков, А. П. Обобщенные экспоненциальные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для функций скалярного и матричного аргумента / А. П. Худяков // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 98–109.

7. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 281 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.03.2017

Khudyakov A.P., Matysik O.V. Formulas of the Generalized Trigonometric Interpolation of the Hermite – Birkhoff Type for the Functions of a Matrix Argument

For the functions of the matrix argument, generalized trigonometric interpolation polynomials of Hermite – Birkhoff type are constructed. One of the interpolation formulas is obtained for entire functions of the matrix variable. In the second formula, the differential operator whose value is included in its structure is given by means of the Gateaux differentials. Theorems on the fulfillment of interpolation conditions are proved. An illustrative example in which the accuracy of the approximation of a specific function of the matrix argument by the Hermite – Birkhoff interpolation polynomials of different degrees compares is constructed.

УДК 513.82

А.А. Юдов¹, А.О. Волкова², Е.В. Арабчик³, Д.С. Арабчик⁴¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²преподаватель-стажер каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина³магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина⁴магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 2R_4 И ИХ ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

В работе классифицируются связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства 2R_4 . Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгрупп Ли и их образы стационарности.

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редуцированных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуцированными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкие исследования редуцированных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуцированных однородных пространствах.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается группа $G_0 = T_4 \cdot O(4,2)$ движений пространства 2R_4 . Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы G_0 с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, то есть до сопряженности. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движения пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства 2R_4 .

Как известно [3], задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры \bar{G}_0 с точностью до присоединённого представления Ad группы G_0 . Присоединённая группа действует в \bar{G}_0 по формуле:

$$Ad B(C) = B^{-1}CB, \quad B \in G_0, C \in \bar{G}_0. \quad (1)$$

Следуя И. В. Белько [1], введем следующие определения:

Определение 1. Пусть $\bar{T} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{H} – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$, $I_1 = \bar{I} \cap \bar{T}$, $I_2 = \partial r_2 \bar{I}$. Подалгебра \bar{H} называется полупрямой, если $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$, то есть $pr_1 \bar{I} = I_1$, $\bar{I} \cap \hat{E} = I_2$.

Определение 2. Подалгебра I алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$ называется расширением полупрямой подалгебры $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$, если $\bar{I} \cap \bar{T} = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$.

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2]

Лемма 1. Пусть $\bar{T} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{H} – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$. Тогда 1) $\bar{H} \cap \bar{T} = I_1$ – подалгебра алгебры \bar{T} , 2) $\partial r_2 \bar{I} = I_2$ – подалгебра алгебры K , 3) если идеал \bar{T} абелев, то $I_1 \oplus I_2$ – подалгебра алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$.

Лемма 2. Пусть $\bar{T} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала \bar{T} и подалгебры K , \bar{P} – подалгебра алгебры \bar{T} , \bar{H} – подалгебра алгебры K . Подпространство $\bar{D} \oplus \bar{I}$ тогда и только тогда является подалгеброй алгебры $\bar{T} \oplus \hat{E}$, когда подпространство \bar{P} инвариантно относительно adX для любого $X \in \bar{I}$.

Лемма 3. Пусть $\bar{I} = I_1 \oplus I_2$ – полупрямая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$, \bar{I} – произвольное расширение подалгебры \bar{H} , Adh – элемент присоединённой группы $Ad(O(4,2))$. Тогда $Adh(\bar{H})$ – полупрямая подалгебра, $Adh(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\bar{H})$.

Доказательство. Пусть $h \in O(4,2)$. Из определения действия присоединённой группы AdG_0 (1) получаем, что выполняются равенства:

$$\partial r_1 \circ Adh = Adh \circ \partial r_1, \quad \partial r_2 \circ Adh = Adh \circ \partial r_2, \quad (2)$$

где ∂r_i – проекция на i -е слагаемое в сумме $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$. Так как \bar{H} – полупрямая подалгебра, то $\partial r_1 \bar{I} = \bar{I} \cap \bar{T}_4$, $\partial r_2 \bar{I} = \bar{I} \cap \mathcal{A}(4,2)$. Рассмотрим $Adh(\bar{I}) = Adh(I_1 \oplus I_2)$. Из (2) следует, что $\partial r_1(Adh(\bar{I})) = Adh \circ \partial r_1(\bar{I}) = Adh(I_1)$. С другой стороны, поскольку \bar{T}_4 инвариантно относительно Adh , то $Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(I_1)$. Таким образом, $\partial r_1(Adh(\bar{I})) = Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(I_1)$.

Аналогично доказывается равенство $\partial r_2(Adh(\bar{I})) = Adh(\bar{I}) \cap \mathcal{A}(4,2) = Adh(I_2)$. Таким образом, алгебра $Adh(\bar{I}) = Adh(I_1) \oplus Adh(I_2)$ – полупрямая.

Подалгебра \bar{I} – расширение полупрямой подалгебры \bar{H} , значит, $\bar{I} \cap \bar{T}_4 = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$. Рассмотрим соотношения: $Adh(\bar{I}) \cap \bar{T}_4 = Adh(\bar{I}) \cap Adh(\bar{T}_4) = Adh(\bar{I} \cap \bar{T}_4) = Adh(I_1)$, $\partial r_2 \circ Adh(\bar{I}) = Adh \circ \partial r_2(\bar{I}) = Adh(I_2)$.

Значит, $Adh(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\bar{I})$. Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. Всякая подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$ с помощью Adh , $h \in O(4,2)$ сопряжена некоторому расширению подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$, где – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$, I_1 – подпространство пространства \bar{T}_4 , инвариантное относительно adI_2 .

Доказательство. Пусть \bar{I} – произвольная подалгебра алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$, $\bar{I}_1 = \bar{I} \cap \bar{T}_4$, $\bar{I}_2 = \partial r_2 \bar{I}$.

В силу леммы 1, \bar{I}_2 – подалгебра алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. Значит, существует элемент $h \in \mathcal{O}(4,2)$, такой, что $Adh(\bar{I}_2)I_2$, где \bar{I}_2 – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. В силу определения 2, \bar{I} является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $Adh(\bar{I}_1) \oplus Adh(\bar{I}_2) = Adh(\bar{I}_1) \oplus I_2$. В силу леммы 2, подпространство $Adh(\bar{I}_1)$ инвариантно относительно AdX для любого $X \in I_2$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры \bar{G}_0 должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$. В настоящей работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли $\mathcal{A}(4,2)$, приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А.П. Широковым [4].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{A}(4,2)$ к трём следующим задачам:

1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида $I_1 \oplus I_2$, где I_2 прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\mathcal{A}(4,2)$;

2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр;

3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры $I_2 \in \mathcal{A}(4,2)$ находятся подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно AdH_2 .

Пусть $A \in \bar{T}_4, B \in \mathcal{A}(4,2)$. Тогда

$$ad B(A) = AB - BA = AB. \tag{3}$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in R$ – произвольное число, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2 . Аналогично

для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \mu, \nu, \delta$ – произвольные числа, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2 .

Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим

утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть I_2 – алгебра Ли связной группы Ли I_2 .

Тогда из $AdH_2(K) \subset K$ следует $adH_2(K) \subset K$ и обратно, где K – подпространство алгебры Ли G_0 . Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа $AdO(4,2)$ сохраняет метрику в пространстве \bar{T}_4 (изоморфном V_4). Таким образом, если $Adh(\bar{P}) \subset \bar{P}$, то $Adh(\bar{P}_0) \subset \bar{P}_0$, где $h \in O(4,2)$, \bar{P}_0 – ортогональное дополнение пространства \bar{P} . Значит, из $adK(\bar{P}) \subset \bar{P}$ следует, что $adK(\bar{P}_0) \subset \bar{P}_0$. Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры $I_1 \oplus I_2$, необходимо из множества $\{\bar{I}\}$ всех векторных подпространств алгебры $\bar{T}_4 \oplus \mathcal{G}(4,2)$, удовлетворяющих условию $\bar{I} \cap \bar{T} = I_1$, $\partial r_2 \bar{I} = I_2$, выбрать подалгебры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре $I_2 \subset \mathcal{G}(4,2)$, подпространства I_1 пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно adI_2 , нужно искать с точностью до преобразований Adh , $h \in O(4,2)$, таких, что $Adh(I_2) = I_2$.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы $O(4,2)$:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & h_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, & h_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 h_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\varphi & 0 & sh\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sh\varphi & 0 & ch\varphi \end{pmatrix}, & h_5 &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 - \lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1 + \lambda^2/2 \end{pmatrix}, \\
 h_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1 - \lambda^2/2 \end{pmatrix}, & h_7 &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 \\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1 \end{pmatrix}, & h_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 h_9 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & h_{10} &= \begin{pmatrix} ch\varphi & 0 & sh\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\varphi & 0 & ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & h_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & h_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{13} &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2/2 & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 1 + \lambda^2/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & h_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & h_{15} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & h_{16} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Полупрямые подалгебры алгебры $\bar{G}_0 = \bar{T}_4 \oplus \mathcal{G}(4,2)$

Приведём некоторые сведения о k -плоскостях пространства 2R_4 . В зависимости от метрики, которая индуцируется на k -плоскостях, все k -плоскости пространства 2R_4 разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полуевклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость $\beta = \{0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$, где $O \in {}^2R_4$, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – попарно ортогональные векторы из V_4 , определяющие k -плоскость β . Произвольный вектор $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, k$ имеет длину $|\vec{a}|$, определяемую по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\lambda^1)^2 a_1^2 + (\lambda^2)^2 a_2^2 + \dots + (\lambda^k)^2 a_k^2}.$$

Если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, то k -плоскость β называется евклидовой, если $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$, – мнимоевклидовой. Если $\vec{a}_1^2 > 0, \dots, \vec{a}_e^2 > 0, \vec{a}_{e+1}^2 < 0, \dots, \vec{a}_{e+p}^2 < 0, \vec{a}_{e+p+1}^2 = 0, \dots, \vec{a}_k^2 = 0$, то k -плоскость β называется полуевклидовой k -плоскостью индекса l дефекта $k - (l + p)$. Если все $\vec{a}_i^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$, то k -плоскость β называется изотропной k -плоскостью.

Евклидову k -плоскость будем обозначать R_k , мнимоевклидову k -плоскость будем обозначать ${}^k R_k$, полуевклидову k -плоскость индекса l дефекта r будем обозначать ${}^e R_k^r$, изотропную k -плоскость будем обозначать R_k^k .

В пространстве 2R_4 существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых): $R_1 = \{0, \vec{e}_1\}$, ${}^1R_1 = \{0, \vec{e}_3\}$, $R_1^1 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3\}$ – и все возможные виды 2-плоскостей: $R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, ${}^1R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$, ${}^2R_2 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, $R_2^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$, ${}^1R_2^1 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$, $R_2^2 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$.

В пространстве 2R_4 существует только три типа 3-плоскостей: ${}^1R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, ${}^2R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, ${}^1R_3^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}$.

3-плоскостей $R_3^1, {}^2R_3^1, R_3, {}^3R_3, {}^1R_3^2, R_3^2, R_3^3$ в пространстве 2R_4 не существует.

Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства 2R_4 прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Перечислим теперь подалгебры алгебры $O(4,2)$ [4], обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= \{i_{10}\}, \bar{G}_2 = \{i_5\}, \bar{G}_3 = \{i_6\}, \bar{G}_4 = \{i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_5 = \{i_5 - i_7\}, \bar{G}_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\} \\ \bar{G}_7 &= \{i_5 + i_{10}\}, \bar{G}_8 = \{i_6 - i_9\}, \bar{G}_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \bar{G}_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \\ \bar{G}_{11} &= \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}, \bar{G}_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}, \lambda \neq 0, \bar{G}_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}, \\ \bar{G}_{14} &= \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{15} = \{i_5, i_{10}\}, \bar{G}_{16} = \{i_6, i_9\}, \bar{G}_{17} = \{i_9, i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{18} = \{i_9, i_5 - i_7\}, \\ \bar{G}_{19} &= \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \bar{G}_{20} = \{i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \bar{G}_{21} = \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\ \bar{G}_{22} &= \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10}\}, \bar{G}_{23} = \{i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{24} &= \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9\}, \quad \bar{G}_{25} = \{i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\
\bar{G}_{26} &= \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_{10}), i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\} \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \quad \bar{G}_{27} = \{i_5 - i_{10}, i_6 - i_9\}, \quad \bar{G}_{28} = \{i_8, i_9, i_{10}\}, \\
\bar{G}_{29} &= \{i_5, i_7, i_9\}, \quad \bar{G}_{30} = \{i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{31} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \\
\bar{G}_{32} &= \{i_5 + i_{10}, i_6 - i_9, i_7 + i_8\}, \quad \bar{G}_{33} = \{i_5 - i_7, i_6 - i_9, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{34} = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 + \lambda i_9\} \\
\lambda \neq 0, \pm 1, \quad \bar{G}_{35} &= \{i_5 - i_{10}, i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \quad \bar{G}_{36} = \{i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \\
\bar{G}_{37} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{38} = \{i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8\}, \\
\bar{G}_{39} &= \{i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}, \quad \bar{G}_{40} = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 + i_8\}, \\
\bar{G}_{41} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10}\}, \quad \bar{G}_{42} = \{i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}.
\end{aligned}$$

Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства \bar{T}_4 , инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры $O(4, 2)$. Элементы пространства $\bar{T}_4 = V_4$ будем записывать в виде: $a = (0, a^1, a^2, a^3, a^4)$. Инвариантность подпространства $K \subset \bar{T}_4$ относительно присоединенного представления некоторой алгебры $\bar{G}_i, i = 1, \dots, 42$ эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представления базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление $adi, i \in J$ в нашем случае определяется формулой

$$adi(a) = ai. \quad (I)$$

Подпространства \bar{K} , инвариантные относительно adG_i , достаточно искать с точностью до Adh , где $Adh(G_i), h \subset O(4, 2)$.

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры adG_i , будем пользоваться матрицами $h_1 - h_{16}$. Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно Adh , выпишем формулы действия Adh_i на базисы данных алгебр.

Имеют место формулы:

$$\begin{aligned}
Adh_1(i_{10}) &= i_{10}, \quad Adh_1(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_2(i_5) = i_5, \quad Adh_3(i_6) = -i_6, \quad Adh_3(i_6 - i_9) = \\
&= i_9 - i_6, \quad Adh_3(i_6 + \lambda i_9) = -i_6 - \lambda i_9, \quad Adh_3(i_9) = -i_9, \quad Adh_3(i_5 - i_{10}) = i_5 - i_{10}, \quad Adh_3(i_7 - i_8) = \\
&= i_8 - i_7, \quad Adh_4(i_6) = i_6, \quad Adh_4(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = (chJ + shJ)(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}), \quad Adh_4(i_6 - i_9) = \\
&= i_6 - i_9, \quad Adh_5(i_8 - i_{10}) = i_8 - i_{10}, \quad Adh_6(i_5 - i_7) = i_5 - i_7, \quad Adh_7(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \\
Adh_7(i_6 - i_9) &= i_6 - i_9, \quad Adh_8(i_6) = -i_9, \quad Adh_8(i_9) = -i_6, \quad Adh_8(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_8(i_6 + i_8) = \\
&= i_7 + i_8, \quad Adh_9(i_6) = i_9, \quad Adh_9(i_9) = i_6, \quad Adh_9(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \quad Adh_9(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = \\
&= i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}, \quad Adh_{10}(i_5 - i_7) = chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{10}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + \\
&+ chJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{11}(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_{11}(i_7 + i_8) = i_9 - i_6, \quad Adh_{11}(i_6 - i_9) = i_7 + i_8, \quad Adh_{12}(i_6) = \\
&= -i_6, \quad Adh_{12}(i_9) = i_9, \quad Adh_{12}(i_8 - i_{10}) = -i_8 + i_{10}, \quad Adh_{12}(i_5 - i_7) = i_5 - i_7, \quad Adh_{13}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \\
Adh_{13}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) &= i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \quad Adh_{14}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - \\
&- 2i_6 + 2i_9, \quad Adh_{15}(i_6) = i_6, \quad Adh_{15}(i_9) = -i_9, \quad Adh_{16}(i_6 + \lambda i_9) = i_6 + \lambda i_9, \quad Adh_{16}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \\
Adh_{16}(i_5 - i_7) &= chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10}), \quad Adh_{16}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + chJ(i_8 - i_{10}), \\
Adh_{16}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) &= -i_5 + i_7 + i_8 - i_{10}, \quad Adh_{16}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подалгебру \bar{G}_{14} . Относительно adG_{14} инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим двумерную подалгебру $\overline{G}_{15} = \{i_5, i_{10}\}$. Подпространства, инвариантные относительно adG_{15} , находятся как такие подпространства, которые инвариантны одновременно относительно adi_5 и относительно adi_{10} . Получаем, что таковыми будут только подпространства $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{16} . Поступая, как в предыдущем случае, получим, что инвариантными относительно adG_{16} будут подпространства: $\{i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_2, i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 \pm i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$ и $\{i_2, i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 - i_3\}$, $\{i_2 + i_4\}$ и $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_{15} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При этом \overline{G}_{16} инвариантна относительно Adh_3 , Adh_9 , Adh_{15} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_1 - i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{17} . Относительно adG_{17} инвариантны подпространства $\{i_1\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{18} . Относительно adG_{18} инвариантны подпространства $\{i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{19} . Относительно adG_{19} инвариантны подпространства $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{10} пространство $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$ переводится в пространство $\{i_2 - i_4, i_1\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$ или $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$. При помощи Adh_{12} пространства $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}$ сопряжены. При этом подалгебра \overline{G}_{19} инвариантна относительно Adh_{10} , Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2 - i_4\}$, $\{i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{20} . Относительно adG_{20} инвариантны подпространства $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_4 подпространство $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$ переводится в одно из подпространств $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$. Подалгебра \overline{G}_{20} инвариантна относительно Adh_4 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{21} . Относительно adG_{21} инвариантны подпространства: $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$, $\{i_1 \pm i_4, i_2 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_7 подпространство $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$ переводится в $\{i_1 + i_3\}$ или $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$. При помощи Adh_{13} пространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены, а при помощи Adh_{16} сопряжены пространства $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$ и $\{i_1 - i_4, i_2 + i_3\}$. Подалгебра

\overline{G}_{21} інварыянтна адносна $Adh_7, Adh_8, Adh_{13}, Adh_{16}$ (2). Такім образом, інварыянтныя падпрастранствы прыводзяцца к вяду: $\{i_1 + i_3\}, \{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{22} . Относительно adG_{22} инвариантны подпространства: $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3\}^\perp, \{i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1 - i_3\}$ и $\{i_2 - i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{22} инвариантна относительно Adh_9 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 - i_3\}, \{i_1 - i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{23} . Относительно adG_{23} инвариантны подпространства $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2, i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{16} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{23} инвариантна относительно Adh_{16} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 - i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно \overline{G}_{24} инварианты подпространства: $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно \overline{G}_{25} инварианты подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно \overline{G}_{26} инварианты подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно \overline{G}_{27} инвариантно только одно подпространство: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{28} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$. Относительно $ad\overline{G}_{28}$ инвариантны те и только те подпространства, которые инвариантны относительно adi_8, adi_9 и adi_{10} . Таковыми являются только подпространства $\{i_1\}, \{i_2, i_3, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{29} и, как в предыдущем случае, устанавливаем, что относительно \overline{G}_{29} инвариантны подпространства $\{i_3\}, \{i_1, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{30} . Относительно $ad\overline{G}_{30}$ инвариантны подпространства $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{30} инвариантна относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}^\perp, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{31} . Относительно $ad\overline{G}_{31}$ инвариантны подпространства $\{i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1, i_3\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3\}, \{i_2 - i_4\}, \{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}, \{i_2 + i_4, i_1 + i_3\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{31} инвариантна относительно Adh_8 (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}, \{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}, \{i_1 + i_3, i_2, i_4\}, \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{32} . Относительно $ad\overline{G}_{32}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_4, i_2 \mp i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$, $\{i_1 - i_4, i_2 - i_3\}$ сопряжены.

При помощи Adh_{11} подпространства $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{32} инвариантна относительно Adh_8 и Adh_{11} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{33} . Относительно $ad\overline{G}_{33}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{34}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{35}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{36}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_2\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{37} . Относительно $ad\overline{G}_{37}$ инвариантны подпространства: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^\perp$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{36} инвариантна относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру \overline{G}_{38} . Относительно $ad\overline{G}_{38}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 \pm i_3, i_2 \mp i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. Подалгебра \overline{G}_{38} инвариантна относительно Adh_3 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{39}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{40}$ инвариантны подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{41}$ инвариантны подпространства: $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{42}$ инвариантны подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Предположим теперь, что мы хотим выписать все полупрямые подалгебры $H_1 \oplus H_2$ алгебры $G_0 = \tau_4 \oplus \mathcal{G}(4,2)$. Рассмотрим некоторую подалгебру $G_i, i \in \overline{1,42}$. Выпишем все (с точностью до сопряжённости) такие полупрямые подалгебры H , что $\partial r_2 H = G_i$. Пусть $i = 1$. Инвариантные подпространства τ_4 относительно $ad\overline{G}_1$ приводятся (п. 4) к виду: $\{i_1\}$, $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Тогда все полупрямые подалгебры H со свойством $\partial r_2 H = G_i$ с точностью до сопряжённости запишутся в виде $\{i_{10}, i_1\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2\}$, $\{i_{10}, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Аналогично выписываются полупрямые подалгебры для любой подалгебры $G_i, i \in \overline{1,42}$. Таким образом, нами классифицированы с точностью до сопряжённости все полупрямые подалгебры алгебры G_0 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 5. – С. 393–395.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
3. Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.
4. Хабибулина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибулина, А. П. Широков // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3, вып. 3. – С. 154–163.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.03.2017

Yudov A.A., Volkova A.O., Arabchik E.V., Arabchik D.S. Classification of Lie Subgroup of a Group of Movements Spaces 2R_4 and their Invariant Characteristics

In this paper, the related Lie subgroups of the Lie group of motions of the four-dimensional pseudo-Euclidean space of the zero signature-space 2R_4 . Invariant planes and lines for such Lie subgroups and their images of stationarity are found.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацый артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *С.Ф. Бут-Гусаім, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 09.06.2017. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,32. Ул.-выд. арк. 7,00.

Тыраж 100 экз. Заказ № 240.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.