

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецюхоў

А.Ф. Равінскі

Я.В. Радыно

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2016

У адпаведнасці з Загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь № 84 ад 31.03.2016 г. часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Ворсин Н.Н. Многоприемниковые СВЧ-радиометры	5
Ворсин Н.Н., Гладковский В.И. Концепция модернизации физического лабораторного практикума	10
Липо В.А., Овчинников Е.В., Секержицкий С.С., Ситкевич А.Л. Модифицирующее действие наполнителей с различной наноразмерностью их частиц.....	14
Овсюк Е.М., Веко О.В., Войнова Я.А., Кисель В.В., Редьков В.М. Частица со спином $\frac{1}{2}$ с аномальным магнитным моментом в однородном электрическом поле.....	22
Плетюхов В.А. Теория релятивистских волновых уравнений и электрослабое поле	29
Сендер Н.Н. Определение оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов на основе разложения в ряд коэффициентов отражения.....	38

МАТЭМАТЫКА

Басик А.И., Гацкевич О.А., Грицук Е.В. Вычисление индекса краевой задачи Римана – Гильберта для эллиптических кососимметрических систем в \mathbf{R}^3	46
Грицук Д.В., Даудов Д.Д., Трофимук А.А. Инварианты π -разрешимых групп с силовскими подгруппами малого нормального ранга	53
Грицук Е.В., Мартинович А.Н. Исследование иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве	59
Довгий Б.П., Вакал Е.С., Вакал Ю.Е. Численное решение осесимметричной краевой задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера	66
Завадский А.Ф., Юдов А.А. Инвариантные характеристики подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства.....	71
Мадорский В.М. К вопросу о ряде квазиньютоновских методов решения нелинейных уравнений с гладкими операторами.....	76
Матысик О.В. Итерационная регуляризация некорректно поставленных задач в энергетической норме гильбертова пространства.....	81



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:

A.M. Sender

Deputy Editor-in-chief:

S.A. Marzan

International Board:

V.A. Glavan (Moldova)

V.G. Samoilenka (Ukraine)

V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:

M.M. Sender

(managing editor)

M.I. Lyavchuk

I.P. Martynov

V.S. Monakhov

Y.A. Pletsukhov

A.F. Ravinski

Y.V. Radyno

V.M. Rad'kov

Y.S. Sekyazhytski

M.M. Trush

A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:

224665, Brest,

Boulevard Cosmonauts, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2016

According to the order of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus № 84 from March 31, 2016, the journal
«Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

Vorsin N.N. Multireceivers Microwave Radiometers	5
Vorsin N.N., Gladkovsky V.I. The Modernization Concept of Physical Laboratory Practical Works	10
Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L. Charge Fluctuations by Dispersing and Modifying Active Nanoparticles	14
Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. Spin $\frac{1}{2}$ Particle with Anomalous Magnetic Moment in Uniform Electric Field.....	22
Pletyukhov V.A. The Theory of Relativistic Wave Equations and the Electroweak Field.....	29
Sender N.N. Determining the Optical Constants of Anisotropic Absorbing Crystals Based on Series Expansion of Coefficients of Reflection	38

MATHEMATICS

Basik A.I., Hatskevich V.A., Gritsuk E.V. Calculation of the Index of the Riemann – Hilbert Boundary Value Problem for Elliptic Systems in \mathbf{R}^3 of Skew-Symmetric Type.....	46
Gritsuk D.V., Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Invariants of π -Solvable Groups with Sylow Subgroups of Small Normal Rank	53
Gritsuk E.V., Martinovich A.N. The Study of the Hierarchy of the Equation of Rikkati on the Painleve Property	59
Dovgiy B.P., Vakal E.S., Vakal Y.E. Numerical Solution of the Axisymmetric Boundary Value Problem for Quasi Nonlinear Schrödinger-Type Equation.....	66
Zavadski A.F., Judov A.A. Invariant Characteristics of Subgroup Li of group Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space	71
Madorskiy V.M. To the Problem of Some Quasi-Newton Method for Solving Nonlinear Equations with Smooth Operator	76
Matysik O.V. The Iterative Regularization of Ill-posed Problems in Energy Norm of Hilbert Space.....	81

Н.Н. Ворсин

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

МНОГОПРИЕМНИКОВЫЕ СВЧ-РАДИОМЕТРЫ

Предложена структура многоприемникового СВЧ-радиометра и решена задача определения его чувствительности. Показано, что при существующем уровне радиоэлектроники многоприемниковое построение радиометров является целесообразным по соображениям достижения их максимальной чувствительности и надежности.

Традиционно в качестве чувствительности СВЧ радиометра принимается среднеквадратичное значение флуктуаций его выходного сигнала, приведенное к антенному входу и выраженное в градусах шумовой температуры [1]. Чувствительность является важнейшей характеристикой радиометра и определяется, главным образом, шумовыми параметрами используемого в нем СВЧ-приемника.

Приемником мы считаем селективный СВЧ-усилитель с квадратичным детектором на выходе. В случае идеально стабильного приемника, коэффициент передачи и другие параметры которого строго постоянны, реализуется наилучшая чувствительность, определяемая простой формулой [1]:

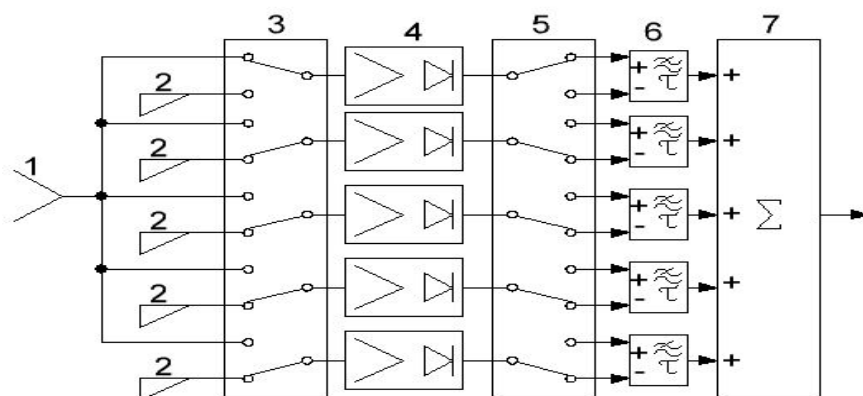
$$\Delta T_0 = \frac{T_{ш}}{\sqrt{2\Delta f_{сч}\tau}}, \quad (1)$$

где $T_{ш}$ – суммарная шумовая температура приемника, входного устройства и антенны, $\Delta f_{сч}$ – радиометрическая полоса пропускания приемника, τ – постоянная времени накопительного фильтра, который для простоты принимается в виде однозвенной интегрирующей RC-цепочки.

Однако на практике идеально стабильных приемников не существует. Флуктуации коэффициента передачи приемника приводят к появлению на выходе радиометра дополнительных флуктуаций сигнала, что очень сильно ухудшает чувствительность и вынуждает принимать меры для ослабления этого ухудшения. Одной из самых действенных мер стал модуляционный метод приема, который в том или ином виде используется во всех создаваемых на практике СВЧ-радиометрах. Суть его состоит в том, что через приемник с периодическим разделением по времени пропускаются два сигнала. Один из них – полезный принимаемый антенной сигнал, а другой – эталонный сигнал радиояркости, создаваемый тем или иным генератором шума со стабильной и известной шумовой температурой. Соответствующие им выходные сигналы приемника вычитаются друг из друга, образуя выходной сигнал радиометра. Период коммутации сигналов выбирается настолько малым, что в течение его параметры приемника не успевают заметно измениться. Следовательно, при вычитании выходных сигналов приемника продукты флуктуации его параметров, будучи одинаковыми в обоих сигналах, уничтожаются, и влияние их на чувствительность пропадет.

Однако эта мера все же ухудшает чувствительность за счет действия двух факторов: а) потери времени приема полезного сигнала и б) добавления шума в сигнальный тракт при вычитании сигналов. Каждый из этих факторов ухудшает чувствительность в $\sqrt{2}$ раз. В результате в числителе (1) появляется двойка, выражающая т.н. методический проигрыш в чувствительности.

Возможность уменьшения «методического проигрыша» вытекает из осознания его причин. Первая из них – потеря времени приема – устраняется применением в составе радиометра двух приемников, входы которых коммутируются в противофазе, так что один из них в любой момент времени подключен к антенне. Эта мера уменьшает методический проигрыш в $\sqrt{2}$ раз, но популярностью до последнего времени не пользовалась. Дело в том, что СВЧ-приемник является основной, часто уникальной частью радиометра, и удвоение числа приемников считалось неоправданным. Кроме того, усложняется входной СВЧ-коммутатор.



1 – антенна, 2 – источники эталонных сигналов, 3 – СВЧ-коммутатор, 4 – СВЧ-приемники, 5 – НЧ-коммутатор, 6 – сумматоры-накопители канальных сигналов, 7 – выходной сумматор

Рисунок. – Структура многоприемникового радиометра

Ситуация изменилась в последнее время в связи с появлением общедоступных малощумящих СВЧ-приемников и коммутаторов в виде интегральных или гибридных микросхем, например, [2; 3]. Это дает возможность без существенных затрат увеличивать число приемников в составе радиометра и за счет этого уменьшить «методический проигрыш» почти до его исчезновения. Идея заключается в том, чтобы, имея множество приемников, не только не потерять время приема антенного сигнала, но также уменьшить шумовой вклад эталонных сигналов в выходной продукт радиометра. Это возможно, поскольку каждый из приёмников может быть снабжён собственным источником эталонного сигнала и использовать его без потери времени. В [4] описывается 6-приемниковый радиометр и приводится формула чувствительности, которая, по нашему мнению, является неверной. В связи с этим ниже рассматривается задача определения чувствительности многоприемникового СВЧ-радиометра.

Структурная схема N -приемникового радиометра для $N = 5$ показана на рисунке. В течение периода коммутации t_0 каждый из приемников на время $t_1 = t_0/N$ поочередно подключается входом к антенне 1, а выходом – к накопительному фильтру 6. Остальное время $t_2 = t_0(1 - 1/N)$ приемник подключен к источнику своего эталонного сигнала 2 и накапливает его со знаком минус в том же фильтре 6. Затем выходные сигналы накопительных фильтров складываются в сумматоре 7, образуя выходной сигнал радиометра. Поскольку послеприемниковая обработка сигналов состоит только из линейных операций, возможны иные комбинирования узлов, дающие тот же результат. В показанном на рисунке варианте многоприемниковый радиометр разделен на отдельные радиометрические каналы, работающие с т.н. несимметричной модуляцией [5]. Сложение канальных сигналов в выходном сумматоре 7 приведет к увеличению мощности шума

в выходном сигнале в N раз, так как каналные шумы взаимно не коррелированы, и одновременно увеличит мощность полезного сигнала, идущего от общей антенны, в N^2 раз. В результате отношение сигнал/шум возрастет в N раз, что означает улучшение чувствительности радиометра.

Для оценки этого улучшения рассмотрим отдельно один из каналов с накопительным фильтром и определим параметры его выходного сигнала. Период коммутации t_0 включает в себя неодинаковые времена приема антенного сигнала t_1 и компенсирующего сигнала t_2 . Сигнал на выходе канального накопителя (во временном представлении) определяется следующим выражением:

$$S(t) = \int_0^{\infty} \{ [T_1 G(t-\theta) + n_1(t-\theta)] M_1(t-\theta) H_1(\theta) - [T_2 G(t-\theta) + n_2(t-\theta)] M_2(t-\theta) H_2(\theta) \} d\theta. \quad (2)$$

В (2) T_1 и T_2 – суммы шумовой температуры приемника соответственно с шумовой температурой антенны и эталонного ГШ; G – коэффициент передачи приемника, равный отношению постоянной составляющей его выходного сигнала к шумовой температуре входного сигнала, включающего и собственный шум приемника; $n(t)$ – шумовой компонент выходного сигнала приемника, обусловленный шумовым характером принимаемых сигналов; $M_1(t)$ и $M_2(t)$ – функции модуляции сигнала (в течение временных интервалов приема антенного сигнала t_1 $M_1 = 1$, $M_2 = 0$, в течение же интервалов приема компенсирующего сигнала t_2 $M_1 = 0$, $M_2 = 1$); $H_1(\theta)$ и $H_2(\theta)$ – импульсные характеристики накопительного фильтра b для антенного и компенсирующего сигналов.

Для разделения постоянного и флуктуационного компонентов выходного сигнала представим коэффициент передачи приемника в виде суммы среднего значения G_0 и флуктуирующей части $g(t)$ с нулевым средним. При этом постоянная составляющая выходного сигнала выделится из (2) в следующем виде:

$$S_1 = G_0 T_1 \int_0^{\infty} M_1(t-\theta) H_1(\theta) d\theta - G_0 T_2 \int_0^{\infty} M_2(t-\theta) H_2(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Поскольку постоянная времени накопительного фильтра существенно больше периода коммутации (периода функций M_1 и M_2), можно вместо M_1 и M_2 записать их средние значения. Тогда

$$S_1 = G_0 T_1 \frac{t_1}{t_0} \int_0^{\infty} H_1(\theta) d\theta - G_0 T_2 \frac{t_2}{t_0} \int_0^{\infty} H_2(\theta) d\theta. \quad (4)$$

Принцип компенсации вклада в S_1 сигнала собственного шума приемника требует равенства коэффициентов при T_1 и T_2 в (4). Следовательно, если принять в качестве накопительного фильтра однозвенный резистивно-емкостный ФНЧ с постоянной времени τ , импульсные характеристики $H(\theta)$ следует записать в виде:

$$H_1(\theta) = \frac{t_0}{t_1} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\theta}{\tau}}, \quad H_2(\theta) = \frac{t_0}{t_2} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\theta}{\tau}}. \quad (5)$$

Тогда получим

$$S_1 = G_0 (T_1 - T_2). \quad (6)$$

Согласно структурной схеме (рисунок) сигналы канальных накопителей складываются, образуя выходной сигнал радиометра $S_{\text{вых}}$. Полагая для простоты все каналы одинаковыми, получим

$$S_{\text{вых}} = N S_1 = N G_0 (T_1 - T_2). \quad (7)$$

Флуктуационная часть выходного сигнала радиометрического канала определится из (2) заменой $G(t)$ на $g(t)$. При вычислении σ^2 – дисперсии флуктуационной части – учтем статистическую независимость флуктуаций $g(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$, а также тот факт,

что время корреляции $n(t)$, определяемое полосой пропускания СВЧ тракта приемника, существенно меньше периода коммутации. Вследствие этого $n_1(t)$ и $n_2(t)$ некоррелированы между собой. С учетом этих упрощений получим:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{n_i(t-\theta)n_i(t-\theta')} M_i(t-\theta) M_i(t-\theta') H_i(\theta) H_i(\theta') d\theta d\theta' \right] + \sum_{i,j=1}^2 \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{g(t-\theta)g(t-\theta')} T_i T_j M_i(t-\theta) M_j(t-\theta') H_i(\theta) H_j(\theta') d\theta d\theta' \right]. \quad (8)$$

Автокорреляционную функцию шума $n(t)$ в сравнение с $M(t)$ и $H(t)$ можно считать дельта-функцией с интегральным значением $\overline{n_{1,2}^2} \Delta t_{\text{кор}}$,

где $\overline{n_{1,2}^2} = 2G_0^2 T_{1,2}^2$, а $\Delta t_{\text{кор}} = 1/\Delta f_{\text{вч}}$. С учетом этого первая сумма в (8) будет равна

$$\sigma_1^2 = G_0^2 \left(\frac{T_1^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_1} - \frac{T_2^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_2} \right). \quad (9)$$

Для вычисления второй суммы из (8) необходимо конкретизировать характер флуктуаций коэффициента передачи приемника. Известно, что спектр некоторых процессов, в том числе изменение коэффициента передачи электронных устройств, имеет характер $1/f$ (розовый шум). Однако для конечного времени использования устройства функцию спектральной плотности можно аппроксимировать менее экзотической зависимостью. Примем статистику $g(t)$ неизменной во времени, нормальной с экспоненциальной автокорреляционной функцией:

$$\overline{gg_{\tau}} = \sigma_g^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}.$$

Такая аппроксимация правдоподобно отражает поведение передаточных характеристик усилительных устройств и позволяет получить компактные соотношения. После подстановки $\overline{gg_{\tau}}$ в (8) и весьма громоздких, но очевидных вычислений будем иметь

$$\sigma_2^2 = \sigma_g^2 \left\{ \left[\tau_0 \frac{(T_1 - T_2)^2}{\tau + \tau_0} \right] + \left[\frac{T_1^2 t_2^2 + T_2^2 t_1^2 + 6T_1 T_2 t_1 t_2}{12\tau\tau_0} \right] \right\}. \quad (10)$$

В данном выражении квадратными скобками выделено два слагаемых. Первое из них не зависит от времен коммутации сигналов t_1 и t_2 и выражает шум компенсации, порожденный неравенством шумовых температур антенного и компенсирующего сигналов. Второе слагаемое выражает шум компенсации, обусловленный изменением коэффициента передачи приемника в течение периода коммутации. Если период коммутации достаточно мал в сравнении с τ и τ_0 , а именно на этом основывается метод модуляционного приема, то вторым слагаемым в (10) можно пренебречь.

Сложив (9) и (10) без последнего слагаемого, получим для дисперсии флуктуаций выходного сигнала одного из каналов следующую формулу:

$$\sigma^2 = G_0^2 \left(\frac{T_1^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_1} - \frac{T_2^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_2} \right) + \sigma_g^2 \tau_0 \frac{(T_1 - T_2)^2}{\tau + \tau_0}. \quad (11)$$

Вследствие независимости шумов в канальных сигналах после их сложения и образования выходного сигнала радиометра дисперсия флуктуаций в этом сигнале будет равна (11), умноженному на N . Заменяя также в (11) $t_0/t_1 = N$ и $t_0/t_2 = N/(N-1)$, получим формулу для дисперсии выходных флуктуаций N -приемникового радиометра:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = N G_0^2 \left(\frac{T_1^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_1} - \frac{T_2^2}{2\Delta f_{\text{вч}} \tau} \frac{t_0}{t_2} \right) + N \sigma_g^2 \tau_0 \frac{(T_1 - T_2)^2}{\tau + \tau_0}. \quad (12)$$

В соответствии с определением чувствительности разделим среднеквадратичное значение флуктуаций выходного сигнала, равное $\sqrt{\sigma_{\text{вых}}^2}$, на коэффициент передачи радиометра, который согласно (7) равен NG_0 ; в результате получим формулу для чувствительности многоприемникового радиометра при $N \geq 2$:

$$\Delta T \left[\frac{T_1^2}{2\tau\Delta f_{\text{сч}}} + \frac{T_2^2}{2\tau\Delta f_{\text{сч}}(N-1)} + \frac{\sigma_g^2}{NG_0^2} \frac{\tau_0(T_1 - T_2)^2}{\tau + \tau_0} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Данная формула выражает те качества многоприемникового радиометра, которые были оговорены на основе общих соображений: увеличение числа приемников N приводит к уменьшению вклада второго и третьего слагаемых в (13) и улучшает чувствительность радиометра. При большом N можно отбросить эти слагаемые, и чувствительность достигнет теоретического предела (1). Однако даже при небольших значениях N (например, $N = 4, 5$) методический проигрыш в чувствительности получается небольшим, и можно считать, что почти достигается ее теоретический предел.

Стоит отметить еще одно качество многоприемникового радиометра, вытекающее из (13). Если по каким-то причинам не обеспечивается равенство шумовых температур антенны и эталона, т.е. $T_1 \neq T_2$, то вклад в ухудшение чувствительности третьего слагаемого в (13) оказывается уменьшенным в N раз по сравнению с одноприемниковым радиометром. Это качество «многоприемниковости» было давно замечено и даже положено в основу построения классического компенсационного радиометра [6].

Кроме того, надёжность многоприемникового радиометра несомненно лучше, чем одноприемникового. Отказ одного или нескольких приемников в многоприемниковой системе не прекращает ее функционирование, а только ухудшает чувствительность. На практике не составит труда организовать управление многоприемниковым радиометром таким образом, чтобы автоматически исключать из него неработоспособные приемники. При этом потери чувствительности будут минимальными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – 2 изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.
2. Дьяконов, В. П. Монолитные СВЧ-микросхемы аттенуаторов и усилителей компании Nittite Microwave / В. П. Дьяконов // Компоненты и технологии. – 2011. – № 10.
3. Дьяконов, В. П. Монолитные микросхемы коммутаторов СВЧ сигналов компании Nittite Microwave / В. П. Дьяконов // Компоненты и технологии. – 2012. – № 2.
4. Убайчин, А. В. Многоприемниковые микроволновые радиометрические системы на основе модификации нулевого метода измерений / А. В. Убайчин, А. В. Филатов. – Томск : ТУСУР. – 2014. – 154 с.
5. Thomsen, F. / IEEE Trans., 1984, MTT-32, № 2. – P. 145.
6. Компенсационный радиометр : пат. SU 1538150. / В.С. Аблязов ; дата опубл. 23.01.1990.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2016

Vorsin N.N. Multireceivers Microwave Radiometers

The structure Multireceivers microwave radiometer and solved the problem of determining its sensitivity. It is shown that with the current level electronics Multireceivers-constructing of radiometers is advisable for reasons of their achievements, the maximum sensitivity and reliability.

УДК 621.37

Н.Н. Ворсин¹, В.И. Гладковский²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики
Брестского государственного технического университета²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики
Брестского государственного технического университета**КОНЦЕПЦИЯ МОДЕРНИЗАЦИИ
ФИЗИЧЕСКОГО ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА**

В данной работе предложена концепция модернизации физического лабораторного практикума, в основу которой положена идея компьютерного мониторинга данных, характеризующих изучаемый физический процесс с дальнейшей математической и графической обработкой данных. Концепция обладает следующими преимуществами: а) более полный и подробный мониторинг физических процессов, б) обусловленная этим более высокая точность определения его характеристик, в) освобождение экспериментатора от рутинных операций и высвобождение его времени для продуктивной работы, г) удобная форма сохранения информации для быстрого ее использования в будущем, д) упрощение лабораторных стендов за счет замены множества приборов с собственными блоками питания и индикаторами одним компьютером и уз-лом сопряжения с датчиками.

Можно утверждать, что лабораторный практикум является потенциально наиболее значимым и результативным компонентом естественнонаучной и профессиональной подготовки специалистов в области техники и технологий. Он предназначен для того, чтобы сформировать у студентов должное представление об экспериментальном характере физики и привить навыки работы с реальным оборудованием, которое, возможно, будет использоваться ими в будущей деятельности. Однако ученые, промышленники и преподаватели уже на протяжении многих лет высказывают неудовлетворенность результатами лабораторной работы студентов, в частности, в курсе физики [1]. Несмотря на усилия, предпринимаемые отдельными энтузиастами, разрыв между учебным экспериментом и характером научной или производственной деятельности продолжает увеличиваться. По нашему мнению, это обусловлено тем, что даже в наше время концепция развития физического лабораторного практикума по-прежнему опирается на традиционно сложившиеся представления об учебных экспериментальных исследованиях. И это несмотря на то, что необходимость их пересмотра давно назрела. Поэтому остро встает вопрос о создании лабораторного практикума нового поколения.

Под словами «традиционно сложившиеся представления об учебных экспериментальных исследованиях» мы подразумеваем тот способ проведения экспериментов, который (с успехом) использовался в прошлом веке. Мониторинг исследуемого явления осуществлялся с помощью какого-то числа автономных приборов, показания которых вручную переписывались экспериментатором в сводные таблицы. Затем эти таблицы использовались для количественных оценок параметров изучаемого явления. Если рассмотреть описание функционирующих сегодня лабораторных практикумов, в большом количестве представленных в литературе [2–4] (от небольших ВУЗов до МГУ), то мы увидим именно эту модель их осуществления.

В тоже время в исследовательских лабораториях и на производственных предприятиях применяются совершенно другие методы организации экспериментов, в которых широко используются современные компьютерные технологии. К достоинствам этих методов относятся:

- а) более полный и подробный мониторинг физических процессов;
- б) обусловленная этим более высокая точность определения его характеристик;

в) освобождение экспериментатора от рутинных операций и высвобождение его времени для продуктивной работы;

г) удобная форма хранения информации и возможность ее использования в будущем;

д) упрощение лабораторных стендов за счет замены множества приборов с собственными блоками питания и индикаторами одним компьютером и узлом сопряжения с датчиками.

Процесс модернизации учебных лабораторных практикумов, видимо, будет проходить в два этапа. На первом сохраняются средства реализации изучаемых физических явлений, но аппаратура их мониторинга заменится на современную. Примером построения отдельных лабораторных работ по этому принципу может служить [5]. На втором этапе возможно изменение средств моделирования физических процессов с целью улучшения выразительности и использования новых способов мониторинга.

Рассмотрим реализацию первого этапа модернизации на примере лабораторного цикла «Механика». В свое время для исследования простого механического движения был разработан ряд удобных лабораторных его моделей, таких как наклонная плоскость, машина Автвуда, маятник Обербека и др. Естественно сохранить данные модели и соответствующие лабораторные установки неизменными, дополнив их современными средствами мониторинга движения и передачи данных в компьютер. Для этого можно использовать датчики положения (энкодеры) или датчики перемещения, выпускаемые промышленностью. Многие датчики имеют узел сопряжения с компьютером.

Однако в учебных опытах, где требования к точности менее жесткие в сравнении с научными и производственными опытами, можно применить гораздо более простые и, соответственно, более дешевые решения. Во многих случаях есть возможность использовать имеющиеся на модернизируемой установке датчики с некоторыми дополнениями к ним. Например, в установках с элементами вращательного движения достаточно расположить на оси вращения равномерно перфорированный диск с малыми инерционными свойствами и использовать для формирования сигналов имеющийся фотоэлектрический датчик событий. Фиксируемыми событиями будут пересечения светового луча перфорациями диска. Подобное решение зачастую возможно и в тех случаях, когда установка не создает вращательного движения (например, в опытах с наклонной плоскостью). Вращение можно ввести искусственно с помощью нити и дополнительного блока с минимальным трением и инерционностью. В результате действия датчиков перемещения учащиеся фиксируют в компьютере информацию о мгновенных положениях движущегося тела. Эта информация гораздо более полная и обстоятельная, чем полученная на старых установках, где измерялось только время движения и длина пути. Дальнейшая обработка накопленной информации базируется на известных учащимся изучаемых физических законах, а также на знаниях по информатике, необходимых для использования прикладных расчетных программ. В результате в сознании учащихся актуализируются и связываются в решение экспериментальной задачи множество знаний и навыков, что способствует их взаимному укреплению и удержанию в памяти.

Практическое построение современного лабораторного практикума, по нашему мнению, целесообразно осуществить в следующем виде.

А. На всех рабочих местах лаборатории устанавливаются персональные компьютеры, которые будут нести функции управления опытами, их текущий мониторинг, накопление информации, ее обработку и индикацию, предоставление учащимся необходимых программных средств, теоретического и справочного материала.

Б. К каждой лабораторной работе изготавливается лабораторная установка, для приведения которой в рабочее состояние достаточно установить ее на рабочее место, подключить к электросети и соединить с компьютером единственным кабелем. Таким

образом, средство управления опытами, индикации и обработки результатов оказывается единым для всего практикума. Сменные элементы (лабораторные установки) хранятся отдельно и накапливаются в количествах, необходимых для решения тех или иных дидактических задач, например, для фронтального проведения лабораторных занятий.

Материальные затраты на такую модернизацию практикума будут минимальными, так как требуемые для этого компьютеры могут быть устаревшими и неиспользуемыми в настоящее время (таковые имеются в любом ВУЗе или школе), а лабораторные установки, ядро которых не меняется, оказываются весьма простыми и дешевыми.

Приведем для примера построение лабораторной работы для изучения законов вращательного движения, измерения моментов инерции различных тел и проверке теоремы Штейнера. Внешний вид установки показан на рисунке.

Установка состоит из горизонтально расположенного диска, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси под действием груза, связанного с датчиком движения. В отличие от маятника Обербека такое построение позволяет избежать необходимости балансировки подвижной части и дает возможность исследователю изучать инерционные свойства различных тел, устанавливая их на диск в произвольном месте с помощью простых креплений. В частности, исследуются стержень, цилиндр, параллелепипед, шар.

Датчик движения представляет собой перфорированный диск, дополненный оптопарой. Использована оптопара и усилитель ее сигнала, имевшиеся в модернизированной установке. В присоединенном к этому датчику компьютере подсчитывается количество отверстий диска, проходящих при его вращении через оптопару. Полученное число мгновенно пересчитывается в угол поворота диска и выдается на монитор виде графика зависимости угла поворота от времени. Кроме того, записывается файл данных, представляющий собой таблицу значений угла поворота диска и моментов времени, в которые сделаны отсчеты угла.

Учащиеся по виду графика делают вывод о характере движения и с помощью подходящей программы производят обработку записанной информации. Она заключается в аппроксимации взаимозависимости записанных числовых данных. В данном случае используется метод «наименьших квадратов». При этом получается аналитическое выражение зависимости угла поворота от времени. Первая и вторая производная от полученных законов движения определяют аналитические зависимости скорости движения и ускорения от времени. Значения этих величин используются для вычисления инертных свойств исследуемых тел: определения моментов инерции и проверки теоремы Штейнера.

Как видно из приведенного примера, аппаратные затраты на модернизацию лабораторной установки могут быть почти нулевыми. Некоторые сложности можно ожидать в построении компьютерных программ для подобных установок. Эти сложности усугубляются тем, что современные компьютеры не имеют портов прямого доступа, каковыми были LPT или COM-порт старых компьютеров. Для преодоления этих трудностей видятся два пути. Первый из них заключается в дополнении компьютера адаптером, подключаемым к USB-порту и имитирующим работу какого-либо порта прямого доступа. Второй путь состоит в построении электронного блока лабораторной установ-



ки с внутренним USB-модулем. При наличии современных микроконтроллеров существенного удорожания установки это не вызовет.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ревинская, О. Г. Лабораторный практикум в курсе общей физики как модель научных исследований / О. Г. Ревинская, Н. С. Кравченко // *Международ. журн. экспериментального образования*. – 2012. – № 6. – С. 75–76.
2. *Общая физика: руководство по лабораторному практикуму : учеб. пособие* / под. ред. И. П. Крынецкого и Б. А. Струкова. – М. : ИНФРА-М, 2010. – 596 с.
3. Клавсюк, А. Л. *Лабораторный практикум по механике : учеб. пособие* / А. Л. Клавсюк [и др.]. – М. : ООП физ. факультета МГУ, 2014. – Ч. 1. – 215 с.
4. *Механика: лабораторный практикум для студентов всех специальностей : учеб. пособие* / Н. А. Бахтин [и др.]. – Кемерово : Изд-во КемГИПП, 2006. – 63 с.
5. Матвеев, О. П. *Использование компьютеризированной лабораторной установки для проведения учебного исследования по оптике* / О. П. Матвеев, Е. Э. Фискинд // *Физическое образование в вузах*. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 90–96.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.06.2016

Vorsin N.N., Gladkovsky V.I. The Modernization Concept of Physical Laboratory Practical Works

In this paper, we propose the modernization concept of physical laboratory practical works, which is based on the idea of a computer monitoring data describing the studied physical process with further mathematical and graphical data processing. The concept has the following advantages: a) more complete and detailed monitoring of the physical processes; b) the resulting higher accuracy of determining its characteristics; c) the release of the experimenter from routine operations and the release of its time to be productive; g) a convenient form of storing information for quick future use; d) the simplification of the laboratory benches by replacing many appliances with their own power supplies and indicators in one computer and the node pair with the sensors.

УДК 538.9

В.А. Лионо¹, Е.В. Овчинников², С.С. Секержицкий³, А.Л. Ситкевич⁴¹д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

²канд. тех. наук, доц. каф. логистики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

⁴аспирант каф. теоретической физики и теплотехники

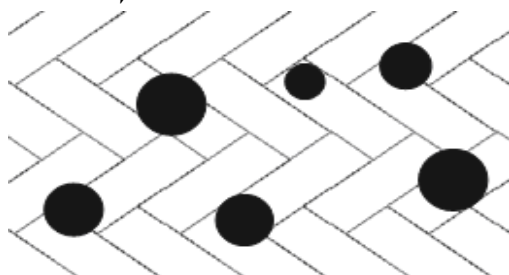
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

**МОДИФИЦИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ НАПОЛНИТЕЛЕЙ
С РАЗЛИЧНОЙ НАНОРАЗМЕРНОСТЬЮ ИХ ЧАСТИЦ**

Анализируются модифицирующие свойства наноразмерных частиц с различной формой. Эти частицы описываются различным числом наноразмерных параметров. Для небольших объемных концентраций наномодификаторов приведены формулы расчета модифицирующего действия частиц в зависимости от их геометрических размеров и толщины модифицированного слоя на поверхности наночастицы. Рассмотрена симметрия тензоров физических свойств композита в зависимости от взаимодействия в нем частиц модификатора.

Введение

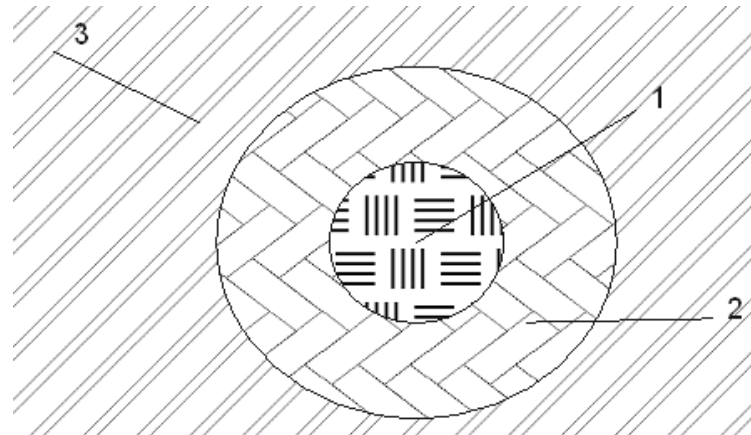
Композиционные материалы различного назначения представляют собой сочетание двух фаз: непрерывного вещества основы (матрицы) и дисперсного распределения частиц наполнителей различного назначения (рисунок 1) [1]. Обычно композиционные материалы характеризуются статистическим равновесным распределением частиц наполнителей-модификаторов. Следовательно, объемная плотность частиц (число частиц в единице объеме композита) $n = \frac{N}{V}$, где N – число частиц, V – объем композита.



— — вещество основы, ● — частица модификатора

Рисунок 1. – Схема строения композиционного материала

Изменение параметров наноразмерных материалов по сравнению с аналогичными значениями для вещества основы обусловлено тем, что в приповерхностном слое частиц наполнителя происходит возникновение межмолекулярного взаимодействия между наполнителем и матрицей. Это приводит к появлению приповерхностного модифицированного слоя (рисунок 2). В композите существует три типа структурно-химических областей: модификатор, частицы вещества основы и модифицированный приповерхностный слой вещества основы. Граница между модифицированным слоем и частицей определяется ее поверхностью.



1 – вещество основы, 2 – модифицированный слой, 3 – матрица основного материала

Рисунок 2. – Три составные части композита

Между модифицированным слоем и веществом основы резкой границы нет. С некоторыми допущениями можно ввести понятие приповерхностного модифицированного слоя.

При небольших концентрациях n модифицированные области не будут соприкасаться. В этом случае объем немодифицированного вещества матрицы-основы $W = V - (\omega + V_p)$, где V_p – объем наполнителя, ω – суммарный объем модифицированных областей частиц, V – суммарный объем модификатора наполнителя.

Отношение $\mu = \frac{(V - W)}{V}$ является коэффициентом модификации. Форма нанокристаллов наполнителя определяется структурой объемного аналога (таблица 1).

Таблица 1. – Возможные габитусы нанокристаллов различных сингоний

Сингония	Габитус нанокристалла				
	С	Э	3-Э	В	Ч
Кубическая	+				
Средние	+	+		+	+
Низкосимметричные	+	+	+	+	+

Примечание – С – сфера, Э – эллипсоид вращения, 3-Э – трехосный эллипсоид, В – вискер, Ч – чешуйка.

Результаты исследований

Для анализа влияния формы наночастиц на коэффициент модифицирования рассмотрим три простых случая: наночастицы имеют форму сферы, наностержня с круговым сечением и нанопластины. Эти частицы являются трех-, двух- и одномерным нанообъектами соответственно, то есть для сферы $r < L_0$, для наностержня радиус сечения $r' < L_0$, для чешуйки $h < L_0$, где L_0 – размерная граница между нано- и макросостоянием равная $L_0 = 230 \Theta_D^{-1/2} [нм]$, где Θ_D – дебаевская температура, коэффициент

$$230 = \frac{\sqrt{1,5h}}{\sqrt{km}}$$

имеет размерность $[нм \cdot K^{1/2}]$, k, h, m – постоянные Больцмана, Планка

и масса электрона соответственно [3]. Рассмотрим модифицирующую активность наночастиц с формами наносфер, наностержней и нанопластинок. Пусть частицы соответст-

вующих форм имеют определенные размеры с одинаковыми для каждого типа наночастиц значениями. Эти геометрические параметры можно рассмотреть как усредненные значения. Геометрические параметры наночастиц их модифицирующей основы приведены в таблице 2.

Таблица 2. – Модифицирующие характеристики сферических, вискерных (наностержней), чешуйчатых частиц наполнителей-модификаторов

2а)

I		II			III	IV
Частица		Геометрические параметры			C_i	$n_i = \frac{C_i}{V_i}$
		НП	ДП	V_i		
1	Сф	r_1	-	$\frac{4}{3}\pi r_1^3$	C_1	h_c
2	Ст	r_2	l	$\pi r_2^2 l$	C_2	h_b
3	Пл	t	S	tS	C_3	h_n

2б)

Параметры модификации				
h_i	$\mu_j^{(i)}$	$v_i^{(i)} = \mu_i^{(i)} + v$	M_i	N_i
h_1	$\mu_1^{(i)} = \frac{4}{3}\pi[(r_1 + h_1)^3 - r_1^3]$	$v_1^{(i)} = \frac{4}{3}\pi(r_1 + h_1)^3$	$M_1 = \left[\left(\frac{h_1}{r_1} \right)^3 - 1 \right] C_1$	$N_1 = \left(\frac{h_1}{r_1} + 1 \right)^3 C_1$
h_2	$\mu_2^{(i)} = \pi l[(r_2 + h_2)^2 - r_2^2]$	$v_2^{(i)} = \pi l(r_2 + h_2)^2$	$M_2 = \left[\left(1 + \frac{h_2}{r_2} \right)^2 - 1 \right] C_2$	$N_2 = \left(\frac{h_2}{r_2} + 1 \right)^2 C_2$
h_3	$\mu_3^{(i)} = 2h_3 S$	$v_3^{(i)} = (2h_3 + t)S$	$M_3 = \frac{2h_3 C_3}{t}$	$N_3 = \left(1 + \frac{2h_3}{t} \right) C_3$

В этой таблице приведены следующие величины: I частица: 1-Сф – наносфера, 2-Ст – наностержень, 3-Пл – наночастица. II Геометрические параметры наночастиц: НП – нанопараметры, r_1 – радиус сферы, r_2 – радиус поперечного сечения наностержня, t – толщина нанопластины. ДП – другие параметры, l – длина наностержня, S – площадь наночастицы, V – объем наночастицы. III – объемная концентрация: C_1, C_2, C_3 – сферических частиц, наностержней, нанопластин соответственно. IV – число частиц наполнителя в единице объема: n_1, n_2, n_3 – сфер, наностержней и нанопластинок соответственно. V – параметры модификации: $h = h_i (i = 1, 2, 3)$ – толщина модифицируемого слоя на поверхности частицы, μ_i – объем основы (матрицы), модифицируемой одной частицей, $v_i^{(i)} = \mu_i^{(i)} + v_i$ – объем модифицирующего кластера с учетом объема расположенной в нем частицы. M – коэффициент модификации без учета объема частиц равен:

$$M_j = \mu_j^{(i)} R_j = \mu_j^{(i)} \frac{C_j}{V_j}. \quad (1)$$

Для наносферических частиц (2), для наностержней (3) и нанопластинок (4) значения M_j (см. таблицу 2) имеют вид:

$$M_1 = C_1 \left[\left(1 + \frac{h_1}{r_1} \right)^3 - 1 \right] = C_1 \alpha_1, \quad (2)$$

$$M_2 = C_2 \left[\left(1 + \frac{h_2}{r_2} \right)^2 - 1 \right] = C_2 \alpha_2, \quad (3)$$

$$M_3 = C_3 \frac{2h}{t} = C_3 \alpha_3. \quad (4)$$

Если рассматривается отношение суммарного объема всех модифицирующих центров к общему объему композита, т.е. объем частицы включен в объем модифицирующего кластера, то коэффициенты модификации для наносфер (2), наностержней (3) и нанопластин (4) имеют вид:

$$N_1 = C_1 \left(1 + \frac{h_1}{r_1} \right)^3 = C_1 \beta_1, \quad (5)$$

$$N_2 = C_2 \left(1 + \frac{h_2}{r_2} \right)^2 = C_2 \beta_2, \quad (6)$$

$$N_3 = C_3 \left(1 + \frac{2h_3}{t} \right) = C_3 \beta_3. \quad (7)$$

Зная величины α_i и $\beta_{i,j}$ и объемную концентрацию наполнителя наномодификатора, коэффициент модификации легко рассчитывается по формулам (2)–(7) для соответствующей наночастицы наполнителя. Для иллюстрации различий параметров модификации частиц с различной формой на рисунке 3 приведены графики функций

$$\alpha_i = f(x_i), i = 1, 2, 3, \text{ где } x_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{r_{1,2}}, x_3 = \frac{2h}{t}.$$

Так как $\alpha - 1 = \beta$, то зависимости коэффициента модификации от концентрации наночастиц легко определить для двух вышеуказанных случаев: с учетом и без учета объема частиц. Если $x_i > 1$, то M_i и N_i также легко определяются по формулам (2)–(7). Указанная методика позволяет определить коэффициенты модификации при небольших концентрациях C_i . В противном случае между модифицированными областями не будет находиться фаза основы. Следовательно, изменения физических свойств композита с увеличением значений C_i наблюдаются только до определенных значений.

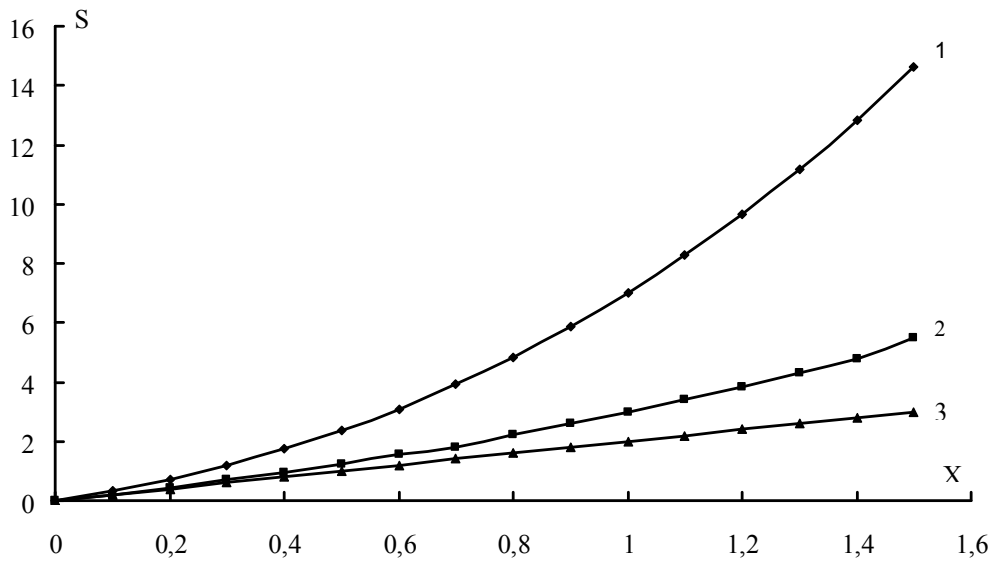


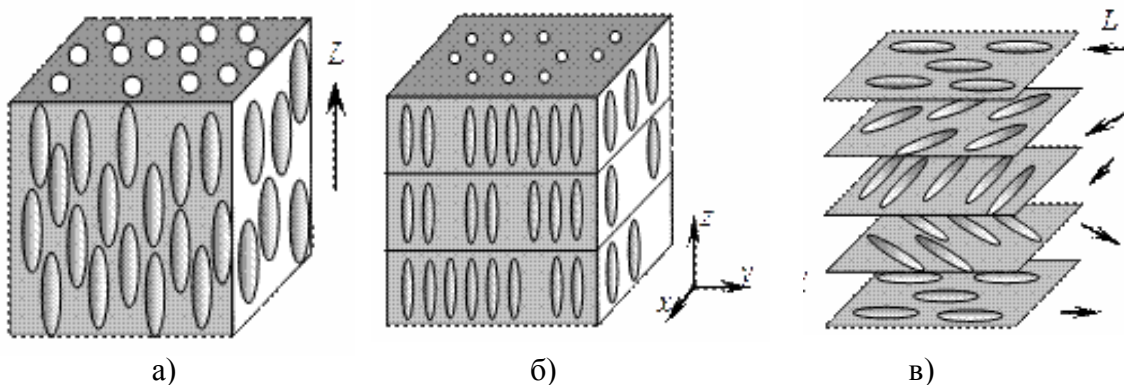
Рисунок 3. – Зависимость α_i от X для частиц различной формы

Дальнейшее увеличение C_i может не улучшить, а резко ухудшить свойства композита [3]. При использовании наполнителей с несферической формой на свойства композита будет оказывать влияние их взаимная ориентация. Для наностержней, а также эллипсоидов ориентация данной частицы может быть описана ориентацией их осей, а для пластинок ориентацией нормалей к их плоскостям. Композиционные материалы могут характеризоваться ориентациями l и n по типу ориентацией молекул в жидких кристаллах (рисунок 4) [4; 5].

Если наноразмерные частицы модификатора распределены по принципу смектических или холестерических жидких кристаллов, то их точечная группа описывается конгруэнтную симметрию. Матрица-генератор этой группы (g) имеет вид:

$$[g] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = g_{ij}, \quad (8)$$

где α – произвольный угол поворота вокруг оси Z .



а) – нематический, б) – смектический, в) – холестерический [4;5].

Рисунок 4. – Схемы жидких кристаллов

Если на объект оказано векторное воздействие $|A\rangle$, а векторный отклик оценивается вектором \vec{B} , то связь между ними определяется условием: $|B\rangle = T|A\rangle$, где $|A\rangle$, $|B\rangle$ описываются матрицами-столбцами, точечная группа $|g_{ij}\rangle$, где $i, j = 1, 2, 3$. Тензор $|T\rangle$ – 3×3 матрица с коэффициентами $|t_{ij}\rangle, i, j = 1, 2, 3$ влияет на симметрию его физических свойств, что проявляется в ограничениях накладываемых на значение коэффициентов тензора $|T\rangle$. Так как точечное преобразование приводит объект к самосовпадению, то после воздействия группой $|g\rangle$ на тензор $|T\rangle$, будет получен тензор $|T'\rangle = |t'_j\rangle$, но его коэффициент должен соответствовать условию $t'_j = t_j$ (a).

Правило преобразования тензора второго ранга операцией точечной симметрии имеет вид:

$$t'_{mn} = \sum_{i,j=1}^3 g_{mi} g_{nj} t_{ij} = t_{mn} .$$

Это преобразование в общем виде и с учетом условия (a) записывается:

$$\begin{aligned} t'_{mn} = & g_{m1}g_{n2}t_{11} + g_{m1}g_{n2}t_{12} + g_{m1}g_{n3}t_{13} + g_{m2}g_{n1}t_{21} + g_{m2}g_{n2}t_{22} + g_{m2}g_{n3}t_{23} + \\ & + g_{m3}g_{n1}t_{31} + g_{m3}g_{n3}t_{33} = t_{mn} . \end{aligned} \quad (b)$$

Учтем (8), что g_{ij} с одним из индексов равным 3 равен нулю, и, рассмотрев t_{mn} попарно t'_{11}, t'_{22} , t'_{12}, t'_{21} , t'_{31}, t'_{32} , t'_{13}, t'_{23} , получим:

$$\begin{aligned} t'_{11} = & g_{11}g_{11}t_{11} + g_{11}g_{12}t_{12} + g_{12}g_{11}t_{21} + g_{12}g_{12}t_{22} = \\ = & \cos^2 \alpha t_{11} + \sin \alpha \cos \alpha (t_{12} + t_{21}) \end{aligned} \quad (9)$$

По аналогичной схеме рассчитывается

$$t'_{22} = \sin^2 \alpha t_{11} + \sin \alpha \cos \alpha (t_{12} + t_{21}) + \cos^2 \alpha t_{22} = t_{22} . \quad (10)$$

Из совместного рассмотрения (9) и (10) следует только одна правдоподобная гипотеза:

$$t_{11} = t_{22}, \quad t_{22} = -t_{21} . \quad (11)$$

Рассмотрим пару t'_{12} и t'_{21} $t'_{12} = t_{12}$ (b):

$$t'_{12} = \cos \alpha \sin \alpha (t_{11} - t_{12}) + \cos^2 \alpha t_{12} - \sin^2 \alpha t_{21} = t_{21}, \quad (12)$$

$$t'_{21} = \sin \alpha \cos \alpha (t_{11} - t_{22}) + \cos^2 \alpha t_{21} - \sin^2 \alpha t_{12} = t_{21} . \quad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает гипотеза $t_{11} = t_{22}$, $t_{12} = -t_{21}$ (см. (11)).

Рассмотрим пару t'_{13} и t'_{23} :

$$\begin{aligned} t'_{13} &= t_{13} = \cos \alpha t_{13} - \sin \alpha t_{23} \\ t'_{23} &= t_{23} = \sin \alpha t_{13} + \cos \alpha t_{23} \end{aligned} \quad (14)$$

Так как α принимает произвольные значения, то из (14) следует $t_{13} = t_{23} = 0$. Аналогично доказываем, что $t_{31} = t_{32} = 0$. На тензорный элемент t_{33} не накладывается никаких ограничений $t'_{33} = g_{33}g_{33}t_{33} = t_{33}$.

Следовательно, тензор второго ранга физических свойств композитов с наполнителями несферической симметрии описывается следующим образом:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ -t_{12} & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Если сферические частицы располагаются статистически равномерно в матрице основы, а несферические распределены по правилу молекул в нематических жидких кристаллах, то тензор (15) их физических свойств определяется тремя ненулевыми элементами $t_{11} = t_{22} = t_{33}$. Все $t_{ij} (i \neq j) = 0$. Однако и в этом случае можно создать анизотропный композит.

Можно, например, построить структуру сэндвичевого типа, когда чередуются слои с различными концентрациями частиц наполнителя. Форма частиц в этом случае роли не играет.

Заклучение

Частицы наномодификаторов композитов могут иметь различную форму в зависимости от структуры их объемного аналога и метода их получения. Точечная группа симметрии кристалла является подгруппой точечной группы формы частиц. Следовательно, в зависимости от сингонии макрокристалла его нанокристаллы могут иметь форму сфер, эллипсоидов, стержней и пластинок. Последние две являются частыми случаями эллипсоидов в зависимости от соотношения их осей: у стержня $c \gg a, b$, у пластинок $c \ll a, b$.

Нанопластины, наностержни и наносферы являются соответственно одномерными, двумерными и трехмерными наноразмерными частицами. Параметр наноразмерности указывается числом наноразмерных величин форм вдоль трех координатных осей. При внесении частицы модификатора в вещество (матрицу) основы на поверхности частицы образуется модифицированный слой, то есть возникают модифицирующий кластер, внутри которого находится частица наномодификатора. На основе геометрических параметров наночастиц и толщины модифицированного слоя рассмотрен метод определения коэффициента модификации для малых объемных концентраций модификатора. Если функциональные свойства улучшаются при увеличении концентрации наполнителя, то это наблюдается до определенного значения этой концентрации. Дальнейшее увеличение этого параметра может резко ухудшить свойства композита. Это будет наблюдаться в случае когда модифицированные объемы начнут соприкасаться друг с другом. При несферических формах частиц нанонаполнителей эти частицы могут формировать структуры по типу жидких кристаллов. Если распределение наностержней или нанопластинок соответствует смектическим или холестерическим аналогам, то свойства таких кристаллов будут анизотропными.

Например, для тензоров второго ранга эти коэффициенты взаимосвязаны: $t_{11} = t_{22}, t_{12} = -t_{21}, t_{33} \neq 0, t_{13} = t_{23} = t_{31} = t_{32} = 0$. Если несферические частицы различаются по типу нематического жидкого кристалла, а также при статистическом распределении сферических частиц, то композит является изотропным веществом. Следовательно, тензоры второго ранга имеют значения $t_{11} = t_{22} = t_{33}$, а остальные равны нулю. Но и для этих случаев можно создать анизотропные композиты, если они имеют сэндвичевую структуру, в которой чередуются слои с большой и меньшей концентрацией частиц наполнителя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в физику нанокпозиционных машиностроительных материалов / С. В. Авдейчик [и др.] ; под ред. В. А. Лиопо, В. А. Струка. – Гродно : ГГАУ, 2009. – 439 с.
2. Полимер-силикатные машиностроительные материалы: физико-химия, технология, применение / С. В. Авдейчик и [др.] ; под ред. В. А. Струка, В. Я. Щербы. – Минск : Тэхналогія, 2007. – 431 с.
3. Механизм формирования структуры нанокпозиционных материалов на основе полимерных и олигомерных матриц / В. А. Лиопо [и др.] // Прогрессивные машиностроительные технологии : в 2 т. / под ред. А. В. Киричека. – М. : Спектр. – 2012. – Т. 2. – 334 с.
4. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография : в 3 т. / В. Б. Вайнштейн, Л. М. Инденбом, В. М. Фридкин. – М. : Наука, 1979. – Т. 2 : Структура кристаллов. – 360 с.
5. Современная кристаллография : в 4 т. / Л. А. Шувалов [и др.]. – М. : Наука, 1981. – Т. 4 : Физические свойства кристаллов. – 496 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.02.2016

Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L. Charge Fluctuations by Dispersing and Modifying Active Nanoparticles

Analyzes modifying properties of nano-sized particles of different shapes. These particles are described by different numbers of nanoscale parameters. For smaller volume concentrations nano modifiers are the formulas for calculating the modifying action of the particles according to their dimensions and the thickness of the modified layer on the surface of the nanoparticle. The symmetry tensors physical properties of the composite depending on the interaction between the modifier particles therein.

УДК 539.12

Е.М. Овсиук¹, О.В. Веко², Я.А. Войнова³, В.В. Кисель⁴, В.М. Редьков⁵¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

²учитель физики гимназии г. Калинковичи³учитель физики Качищанской средней школы Ельского района⁴канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

⁵д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики

Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

**ЧАСТИЦА СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ
В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Уравнение Дирака для частицы со спином $\frac{1}{2}$ и аномальным магнитным моментом исследовано в присутствии внешнего однородного электрического поля. Построены точные решения этого уравнения, выполнено сравнение со случаем нулевого магнитного момента. Рассмотрен специальный случай частицы с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом (в этой роли может выступать, например, нейтрон); при этом решения уравнения Дирака строятся в виде «плоских» волн, однако с модифицированным соотношением связи между энергией и импульсом частицы $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$, электрическое поле ориентировано вдоль оси x_3 ; $\Gamma \neq 0$ соответствует ненулевому магнитному моменту частицы.

В [1–3] в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка в присутствии внешних электромагнитного и гравитационного полей была исследована 20-компонентная теория Петраша [4] для частицы со спином $\frac{1}{2}$ и аномальным магнитным моментом. В частности, было показано, что после исключения дополнительного вектор-биспинора волновое уравнение для основного биспинора $\Psi(x)$ сводится к обшечковариантному уравнению Дирака, содержащему, помимо минимального и паулиевского членов взаимодействий, дополнительное взаимодействие частицы со спином $\frac{1}{2}$ с внешним гравитационным полем, осуществляемое через скалярную кривизну $R(x)$.

В настоящей работе это обобщенное уравнение Дирака для частицы со спином $\frac{1}{2}$ с аномальным магнитным моментом исследуется в плоском пространстве Минковского в присутствии внешнего однородного электрического поля. Будут построены точные решения этого уравнения, выполнено сравнение со случаем нулевого магнитного момента. Кроме того, будет рассмотрен специальный случай частицы с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом (в роли такой частицы может выступать, например, нейтрон); при этом решения уравнения Дирака строятся в виде «плоских» волн, однако с модифицированным соотношением связи между энергией и импульсом частицы $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$, предполагается ориентация электрического поля вдоль оси x_3 ; $\Gamma \neq 0$ соответствует ненулевому магнитному моменту электрона.

Исходное уравнение имеет вид (используем обозначения из работ [1–3]):

$$\left\{ \gamma^b \left(i\partial_b + \frac{e}{\hbar c} A_b \right) - i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{ab} F_{ab} - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = \Theta. \quad (1)$$

Пусть действует внешнее однородное электрическое поле:

$$A_0 = -E_0 z, \quad F_{03} = E, \quad \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \gamma^0 \gamma^3 E_0. \quad (2)$$

Введем сокращения в обозначениях:

$$\frac{e}{c\hbar} \Rightarrow e, \quad \frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M, \quad \Gamma = \lambda \frac{2eE_0}{Mc^2}, \quad eE_0 = E;$$

тогда уравнение представляется так:

$$\left\{ \gamma^0 \left(i \frac{\partial}{\partial t} - Ez \right) + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - i\Gamma \gamma^0 \gamma^3 - M \right\} \Psi = 0. \quad (3)$$

Используя подстановку

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{pmatrix}, \quad k_1 = a, k_2 = b, \quad (4)$$

с учетом явного вида матриц Дирака в спинорном базисе, находим систему уравнений (представим эти уравнения в виде двух подсистем):

$$(a - ib)f_2 - (i\Gamma - M)f_3 = D_- f_1, \quad -(i\Gamma - M)f_2 - (a + ib)f_3 = D_- f_4; \quad (5)$$

$$-(a + ib)f_1 - (i\Gamma + M)f_4 = D_+ f_2, \quad -(i\Gamma + M)f_1 + (a - ib)f_4 = D_+ f_3, \quad (6)$$

где использованы обозначения $D_+ = i \frac{d}{dz} + Ez - \varepsilon$, $D_- = i \frac{d}{dz} - Ez + \varepsilon$.

Дальше получаем

$$f_2 = \frac{(i\Gamma - M)D_- f_4 - (a + ib)D_- f_1}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = \frac{(i\Gamma - M)D_- f_1 + (a - ib)D_- f_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}; \quad (7)$$

$$f_1 = \frac{(i\Gamma + M)D_+ f_3 + (a - ib)D_+ f_2}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = \frac{(i\Gamma + M)D_+ f_2 - (a + ib)D_+ f_3}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}. \quad (8)$$

Подставим выражения (7) в уравнения (6):

$$\frac{D_+ D_-}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \left[-(a + ib)f_1 + (i\Gamma - M)f_4 \right] = -(a + ib)f_1 - (i\Gamma + M)f_4,$$

$$\frac{D_+ D_-}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \left[(i\Gamma - M)f_1 + (a - ib)f_4 \right] = -(i\Gamma + M)f_1 + (a - ib)f_4. \quad (9)$$

Вводим новые функции:

$$-(a + ib)f_1 + (i\Gamma - M)f_4 = F_1, \quad (i\Gamma - M)f_1 + (a - ib)f_4 = F_4; \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{(a - ib)F_1 - (i\Gamma - M)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_4 = \frac{(i\Gamma - M)F_1 + (a + ib)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}. \quad (11)$$

Затем уравнения (9) представляем так:

$$D_+ D_- F_1 = -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)F_1 + 2i\Gamma(a + ib)F_4,$$

$$D_+ D_- F_4 = -2i\Gamma(a - ib)F_1 - (\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)F_4. \quad (12)$$

Приведем матрицу справа

$$A = \begin{pmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & 2i\Gamma(a + ib) \\ -2i\Gamma(a - ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (13)$$

к диагональному виду:

$$D_+ D_- F = AF, \quad F = P\bar{F},$$

$$D_+ D_- \bar{F} = P^{-1}AP\bar{F}, \quad J = P^{-1}AP, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_4 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib} & \sqrt{a+ib} \\ i\sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a-ib} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, получим раздельные уравнения для функций \bar{F}_1 и \bar{F}_4 :

$$D_+ D_- \bar{F}_1 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right) \bar{F}_1,$$

$$D_+ D_- \bar{F}_4 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right) \bar{F}_4;$$

в явном виде они записываются так:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2\right)\right] \bar{F}_1 = 0, \quad (15)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2\right)\right] \bar{F}_4 = 0. \quad (16)$$

Введем обозначения $\nu = M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2$, $\nu' = M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2$, тогда уравнения примут вид:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \nu\right] \bar{F}_1 = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \nu'\right] \bar{F}_4 = 0; \quad (17)$$

отмечаем различие только в знаке при Γ . Рассмотрим (для определенности) уравнение для \bar{F}_1 . Введем переменную

$$Z = \frac{i(Ez - \varepsilon)^2}{E}, \quad Z \frac{d^2 \bar{F}_1}{dZ^2} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{F}_1}{dZ} - \frac{1}{4} \left(Z - \frac{i\nu}{E} - 1\right) \bar{F}_1 = 0. \quad (18)$$

Сделаем подстановку $\bar{F}_1 = Z^A e^{BZ} \varphi_1$:

$$Z \frac{d^2 \varphi_1}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A + 2BZ\right) \frac{d\varphi_1}{dZ} + \left[\left(B^2 - \frac{1}{4}\right)Z + \frac{(4A+1)B}{2} + \frac{i\nu + E}{4E} + \frac{A(2A-1)}{2Z}\right] \varphi_1 = 0.$$

При A и B , выбранных согласно $A = 0, 1/2$ и $B = -1/2$, уравнение упрощается до вырожденного гипергеометрического уравнения

$$Z \frac{d^2 \varphi_1}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A - Z\right) \frac{d\varphi_1}{dZ} - \left(A - \frac{i\nu}{4E}\right) \varphi_1 = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} + 2A, \quad \alpha = A - \frac{i\nu}{4E}.$$

Для функции $\bar{F}_1^{(1)}$ имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{F}_1^{(1)} = e^{-Z/2} Y_1(Z), \quad Y_1 = \Phi(\alpha, \gamma, Z), \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha = A - \frac{i\nu}{4E}; \quad (19)$$

$$\bar{F}_1^{(2)} = e^{-Z/2} Y_2(Z), \quad Y_2(Z) = Z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; Z). \quad (20)$$

Для функции \bar{F}_4 также имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{F}_4^{(1)} = e^{-Z/2} F(\alpha', \gamma; Z) = e^{-Z/2} Y_1(Z), \quad Y_1 = \Phi(\alpha', \gamma; Z), \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha' = A - \frac{i\nu'}{4E}; \quad (21)$$

$$\bar{F}_4^{(2)} = e^{-Z/2} \sqrt{Z} F(\alpha' + \frac{1}{2}, \gamma + 1; Z) = e^{-Z/2} Y_2(Z) = Z^{1-\gamma} \Phi(\alpha' - \gamma + 1, 2 - \gamma; Z). \quad (22)$$

Поскольку уравнения для функций \bar{F}_1 и \bar{F}_4 несвязанные, то каждая из этих функций порождает соответствующую пару функций $\{F_1, F_4\}$:

$$A) \begin{vmatrix} \bar{F}_1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} F_1 \\ F_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib} \bar{F}_1 \\ i\sqrt{a-ib} \bar{F}_1 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

$$B) \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{F}_4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} F_1 \\ F_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{a+ib} \bar{F}_4 \\ -i\sqrt{a-ib} \bar{F}_4 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Зная F_1 и F_4 , можно найти явные выражения для функций f_1 и f_4 :

$$A) \begin{aligned} f_1 &= \frac{(a-ib)\sqrt{a+ib} - i(i\Gamma - M)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \bar{F}_1 \frac{\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM) - \sqrt{a^2 + b^2}} \bar{F}_1, \\ f_4 &= -\frac{(i\Gamma - M)\sqrt{a+ib} + i(a+ib)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \bar{F}_1 \frac{-i\sqrt{a+ib}}{(\Gamma + iM) - \sqrt{a^2 + b^2}} \bar{F}_1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$B) \begin{aligned} f_1 &= \frac{(a-ib)\sqrt{a+ib} + i(i\Gamma - M)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \bar{F}_4 \frac{-\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM) + \sqrt{a^2 + b^2}} \bar{F}_4, \\ f_4 &= -\frac{(i\Gamma - M)\sqrt{a+ib} - i(a+ib)\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} \bar{F}_4 \frac{-i\sqrt{a+ib}}{(\Gamma + iM) + \sqrt{a^2 + b^2}} \bar{F}_4. \end{aligned} \quad (26)$$

Затем получаем соответствующие представления для функций f_2, f_3 :

$$A) \quad f_2 = \frac{\sqrt{a+ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} D_- \bar{F}_1, \quad f_3 = \frac{i\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} D_- \bar{F}_1; \quad (27)$$

$$B) \quad f_2 = \frac{\sqrt{a+ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} D_- \bar{F}_4, \quad f_3 = -\frac{i\sqrt{a-ib}}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2} D_- \bar{F}_4. \quad (28)$$

Для функций f_2, f_3 можно получить и другие выражения. Для этого возвратимся к равенствам (7), (8) и подставим (8) в уравнения (5):

$$\begin{aligned} \frac{D_- D_+}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2} [(a-ib)f_2 + (i\Gamma + M)f_3] &= (a-ib)f_2 - (i\Gamma - M)f_3, \\ \frac{D_- D_+}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2} [(i\Gamma + M)f_2 - (a+ib)f_3] &= -(i\Gamma - M)f_2 - (a+ib)f_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Вводим новые функции

$$\begin{aligned} (a-ib)f_2 + (i\Gamma + M)f_3 &= G_2, \quad (i\Gamma + M)f_2 - (a+ib)f_3 = G_3; \\ f_2 &= -\frac{(a+ib)G_2 + (M+i\Gamma)G_3}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}, \quad f_3 = \frac{(M+i\Gamma)G_2 - (a-ib)G_3}{(\Gamma - iM)^2 - a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Затем из (29) получим

$$\begin{aligned} D_- D_+ G_2 &= -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)G_2 - 2i\Gamma(a-ib)G_3, \\ D_- D_+ G_3 &= 2i\Gamma(a+ib)G_2 - (\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2)G_3. \end{aligned}$$

Приведем матрицу справа (сравн. с (13))

$$A = \begin{vmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & -2i\Gamma(a-ib) \\ 2i\Gamma(a+ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{vmatrix} \quad (30)$$

к дыяганальнаму выду: $D_+ D_- G = AG, \quad G = P \bar{G},$

$$D_+ D_- \bar{G} = P^{-1} A P \bar{G}, \quad J = P^{-1} A P, \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} \bar{G}_2 \\ \bar{G}_3 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{a - ib} & \sqrt{a - ib} \\ -i\sqrt{a + ib} & i\sqrt{a + ib} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Таким образом, получим раздельные уравнения для функций G_2 и G_3

$$D_- D_+ G_2 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right) \bar{G}_2,$$

$$D_- D_+ G_3 = -\left(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{\Gamma^2 a^2 + \Gamma^2 b^2}\right) \bar{G}_3;$$

в явном виде они представляются так:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2 \right) \right] \bar{G}_2 = 0, \quad (32)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez - \varepsilon)^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2 \right) \right] \bar{G}_3 = 0. \quad (33)$$

С обозначений для v, v' уравнения запишутся короче:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez - \varepsilon)^2 - v \right] \bar{G}_2 = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} - iE + (Ez - \varepsilon)^2 - v' \right] \bar{G}_3 = 0. \quad (34)$$

Они различаются только знаком при Γ , поэтому достаточно исследовать только одно из них. Рассмотрим уравнение для G_2 . Введем переменную $Z = i(Ez - \varepsilon)^2/E$, тогда

$$Z \frac{d^2 G_2}{dZ^2} + \frac{1}{2} \frac{dG_2}{dZ} - \frac{1}{4} \left(Z - \frac{iv}{E} + 1 \right) G_2 = 0. \quad (35)$$

Сделаем подстановку $G_2 = Z^A e^{BZ} \varphi_2$:

$$Z \frac{d^2 \varphi_2}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A + 2BZ \right) \frac{d\varphi_2}{dZ} + \left[\left(B^2 - \frac{1}{4} \right) Z + \frac{(4A+1)B}{2} + \frac{iv - E}{4E} + \frac{A(2A-1)}{2Z} \right] \varphi_2 = 0.$$

При $A = 0, 1/2$ и $B = -1/2$ уравнение упрощается до вырожденного гипергеометрического уравнения

$$Z \frac{d^2 \varphi_2}{dZ^2} + \left(\frac{1}{2} + 2A - Z \right) \frac{d\varphi_2}{dZ} - \left[\frac{4A+1}{4} - \frac{iv - E}{4E} \right] \varphi_2 = 0, \quad a = A \mp \frac{1}{2} - \frac{iv}{4E}, \quad c = \frac{1}{2} + 2A.$$

Имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{G}_2^{(1)} = e^{-Z/2} F(a, c; Z), \quad c = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2} - \frac{iv}{4E}, \quad \bar{G}_2^{(2)} = \sqrt{Z} e^{-Z/2} F\left(a + \frac{1}{2}, c + 1; Z\right); \quad (36)$$

отмечаем равенство $a = \alpha + 1/2, c = \gamma$. Для функции \bar{G}_3 также имеем два линейно независимых решения:

$$\bar{G}_3^{(1)} = e^{-Z/2} F(a', c; Z), \quad c = \frac{1}{2}, \quad a' = \frac{1}{2} - \frac{iv'}{4E}; \quad \bar{G}_3^{(2)} = \sqrt{Z} e^{-Z/2} F\left(a' + \frac{1}{2}, c + 1; Z\right). \quad (37)$$

Поскольку уравнения для функций \bar{G}_2, \bar{G}_3 несвязанные, то каждая из функций порождает соответствующую пару функций G_2, G_3 :

$$\begin{vmatrix} \bar{G}_2 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib} \bar{G}_2 \\ -i\sqrt{a+ib} \bar{G}_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{G}_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} G_2 \\ G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a-ib} \bar{G}_3 \\ i\sqrt{a+ib} \bar{G}_3 \end{vmatrix}. \quad (38)$$

Сопоставим полученные результаты со случаем нулевого магнитного момента. Исходное уравнение Дирака представляем в виде

$$\left\{ \gamma^0(\varepsilon - Ez) - a\gamma^1 - b\gamma^2 + i\gamma^3 \frac{d}{dz} - M \right\} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Система уравнений по переменной z после перехода к новым функциям

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(a-ib)F_1 + MF_4}{-M^2 - a^2 - b^2}, & f_4 &= \frac{-MF_1 + (a+ib)F_4}{-M^2 - a^2 - b^2}, \\ f_2 &= D_- \frac{-M f_4 - (a+ib)f_1}{-M^2 - a^2 - b^2}, & f_3 &= D_- \frac{-Mf_1 + (a-ib)f_4}{-M^2 - a^2 - b^2} \end{aligned} \quad (40)$$

приводит к системе отдельных уравнений второго порядка для основных функций $\{F_1, F_4\}$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - (M^2 + a^2 + b^2) \right] F_1 = 0, \quad (41)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + iE + (Ez - \varepsilon)^2 - (M^2 + a^2 + b^2) \right] F_4 = 0. \quad (42)$$

Отмечаем, что математическая структура разделенных уравнений для случаев $\Gamma \neq 0$ и $\Gamma = 0$ одинаковая (см. (32) и (33)) – различия сводятся лишь к замене одного параметра: $M^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} \pm \Gamma)^2$.

Рассмотрим специальный случай нулевого заряда. Исходное уравнение Дирака для этого специального случая имеет вид:

$$\left\{ \gamma^0 \varepsilon - a\gamma^1 - b\gamma^2 + i\gamma^3 \frac{d}{dz} - i\Gamma \gamma^0 \gamma^3 - M \right\} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix} = 0. \quad (43)$$

Вводим новые функции:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(a-ib)F_1 - (i\Gamma - M)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, & f_4 &= \frac{(i\Gamma - M)F_1 + (a+ib)F_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, \\ f_2 &= D_- \frac{(i\Gamma - M)f_4 - (a+ib)f_1}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}, & f_3 &= D_- \frac{(i\Gamma - M)f_1 + (a-ib)f_4}{(\Gamma + iM)^2 - a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Приводим смешивающую матрицу в системе уравнений для $\{F_1, F_4\}$ к диагональному виду:

$$A = \begin{vmatrix} -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) & 2i\Gamma(a+ib) \\ -2i\Gamma(a-ib) & -(\Gamma^2 + M^2 + a^2 + b^2) \end{vmatrix}, \quad (44)$$

$$J = P^{-1}AP, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \sqrt{a+ib} & \sqrt{a+ib} \\ i\sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a-ib} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2 & 0 \\ 0 & -M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Разделенные уравнения для \bar{F}_1 и \bar{F}_4 имеют вид:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2 \right) \right] \bar{F}_1 = 0,$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \left(M^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2 \right) \right] \bar{F}_4 = 0;$$

их решения такие:

$$\bar{F}_1 = e^{i\sigma z}, \quad \sigma = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} + \Gamma)^2},$$

$$\bar{F}_4 = e^{i\sigma' z}, \quad \sigma' = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - \Gamma)^2}. \quad (46)$$

Обратим внимание на наиболее характерное проявление ненулевого магнитного момента (в отсутствие электрического заряда у частицы; например, это может быть нейтрон) в разделенных дифференциальных уравнениях: решения имеют вид плоских волн, простым образом модифицированных наличием параметра $\Gamma \neq 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисель, В. В. Теория Петраша для частицы со спином $\frac{1}{2}$ в искривленном пространстве-времени / В. В. Кисель, Н. Г. Токаревская, В. М. Редьков. – Минск : Ин-т физики НАНБ, 2002. – 25 с. – (Препринт / Ин-т физики НАНБ ; № 737).
2. Богуш, А. А. Теория Петраша для частицы со спином $\frac{1}{2}$ в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Вестн. НАНБ. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.
3. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.
4. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $3/2$ / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.04.2016

Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. Spin $\frac{1}{2}$ Particle with Anomalous Magnetic Moment in Uniform Electric Field

The Dirac equation for spin $\frac{1}{2}$ particle with anomalous magnetic moment is solved in presence of the uniform electric field. Exact solutions of the equation are constructed. Comparison with the case of vanishing magnetic moment is performed. A special case of vanishing electric charge and non-zero magnetic moment – it may be the neutron – is studied. At this, solutions of plane wave type are found, which are characterized by modified relationship between energy and linear momentum: $\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + (p_1^2 + p_2^2 \pm \Gamma)^2$, electric field is oriented along the axes x_3 ; $\Gamma \neq 0$ corresponds to non-vanishing magnetic moment.

Авторы признательны сотрудникам лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение результатов работы.

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов*д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина***ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ
И ЭЛЕКТРОСЛАБОЕ ПОЛЕ**

Построено релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов: одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории неизбежно возникает скалярная частица с ненулевой массой. Скалярное и векторное поля описываются совместно в рамках одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений и, следовательно, представляют собой единый физический объект. Его векторная составляющая может интерпретироваться как «электро-слабое» поле, а скалярная – как аналог бозона Хиггса. В предлагаемой модели масса скалярного бозона совпадает с массой одного из промежуточных векторных бозонов (Z^0). Ненулевые массы всех частиц выступают в качестве произвольных параметров теории.

Введение

Теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) в своей исходной формулировке предполагает возможность описания только одной, спиновой, внутренней степени свободы элементарных микрообъектов. Математическим отражением этого обстоятельства является использование минимального набора неприводимых представлений группы Лоренца, который необходим для описания микрообъекта с заданным значением спина (спиральности). Однако в 1955–1957 гг. Петрашем и Улеглой [1; 2] было построено уравнение для частицы со спином $\frac{1}{2}$ и аномальным магнитным моментом, которое возникает за счёт привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представления волновой функции. Ещё ранее, в 1928 г., английским физиком Дарвином [3] было предложено РВУ, впоследствии получившее название уравнения Дирака – Кэлера, которое содержит двукратно вырожденные состояния скалярной и векторной компонент. Данное уравнение допускает трактовку как РВУ для спина $\frac{1}{2}$ и дополнительной внутренней степени свободы (см. [4] и цитированную там литературу). Уравнения Петраша – Улеглы и Дирака – Кэлера продемонстрировали, что в подходе теории РВУ при отказе от условия минимальности используемого набора представлений группы Лоренца существенно расширяются возможности пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы микрообъектов.

С конца 1960-х – начала 1970-х гг. данное направление начинает активно развиваться в нашей республике с работ академика Ф.И. Фёдорова и его учеников [5; 6]. За прошедшие десятилетия был накоплен большой материал по развитию теории РВУ с расширенными наборами представлений группы Лоренца [7].

В частности, было показано, что теория РВУ позволяет описывать микрообъекты (поля), кванты которых имеют различные значения массы, а также поля с массивными и безмассовыми квантами на основе не распадающихся в релятивистски-инвариантном смысле уравнений [8; 9]. Такая возможность актуализируется в современных калибровочных теориях фундаментальных частиц и их взаимодействий, например, в модели электрослабых взаимодействий.

Рассмотрим этот вопрос подробно. Возьмём, например, схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (1, 0) & \end{array}, \quad (1)$$

где представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $[(0,1) \oplus (1,0)]$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ сопоставляются вектору ψ_μ , антисимметричным тензорам второго $(\psi_{[\mu\nu]})$ и третьего $(\psi_{[\mu\nu\alpha]})$ рангов соответственно.

Рассмотрим систему линейных однородных тензорных уравнений первого порядка

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + m \psi_{[\mu\nu\bar{\alpha}]} = 0, \quad (3)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (4)$$

базирующуюся на наборе представлений (1). Путём несложных преобразований из уравнений (2)–(4) можно получить уравнения второго порядка

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0, \quad (5)$$

$$\left(\square - m^2\right) \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (6)$$

означающие, что система (2) – (4) описывает свободное векторное поле, квантами которого являются безмассовая частица (ψ_μ) и частица с ненулевой массой m $(\psi_{[\mu\nu\alpha]})$.

При этом, поскольку система (2) – (4) не распадается по группе Лоренца, указанное поле с точки зрения теории РВУ представляет собой единый физический объект.

Целесообразно рассмотреть также основанную на схеме зацеплений (1) систему первого порядка

$$\alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m \psi_\mu = 0, \quad (7)$$

$$\beta \left(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} \right) + m \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (8)$$

$$\alpha^* \left(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu \right) + \beta^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (9)$$

где α, β – произвольные комплексные параметры. Переходя опять от системы (7) – (9) к эквивалентным ей уравнениям второго порядка, будем иметь

$$\left(\square - \frac{m^2}{|\alpha|^2} \right) \psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu = 0; \quad (10)$$

$$\left(\square - \frac{m^2}{|\beta|^2} \right) \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) показывают, что система (7) – (9) даёт совместное описание частиц (полей) со спином 1 и ненулевыми массами

$$m_1 = \frac{m}{|\alpha|}, \quad m_2 = \frac{m}{|\beta|}. \quad (12)$$

Тензорная формулировка массивно-безмассового векторного поля

Как известно, в Стандартной модели три типа квантов «электрослабого» поля – промежуточные векторные бозоны – обладают ненулевыми массами и один (фотон) –

нулевой. Очевидно, что при совместном рассмотрении уравнений (2) – (4) и (7) – (9) мы как раз получим систему первого порядка, описывающую массивно-безмассовое векторное поле с тремя массивными и одним безмассовым квантами. Однако при таком механическом объединении это поле не будет представлять единый физический объект, каковым является «электрослабое» поле, поскольку соответствующая ему схема зацеплений

$$\begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (1, 0) & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (1, 0) & \end{array} \quad (13)$$

является распадающейся на два самостоятельных фрагмента вида (1).

Самый естественный и простой способ получения нераспадающейся схемы зацеплений, приводящей к описанию того же набора векторных частиц, заключается во введении в рассмотрение дополнительного скалярного представления $(0, 0)$, обеспечивающего зацепление указанных фрагментов. В результате получается схема зацеплений

$$\begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (1, 0) & \end{array} - (0, 0) - \begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (1, 0) & \end{array}. \quad (14)$$

Соответствующая (14) система уравнений первого порядка имеет общий вид:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (15)$$

$$\alpha \left(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} \right) + \beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m \psi_{[\mu\nu\bar{\alpha}]} = 0, \quad (16)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \alpha^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_{[\bar{\mu}\bar{\nu}]} = 0, \quad (17)$$

$$\beta^* \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \gamma \partial_\mu \varphi_\mu + m \psi_0 = 0, \quad (18)$$

$$\rho \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \gamma^* \partial_\mu \psi_0 + m \varphi_\mu = 0, \quad (19)$$

$$\delta \left(\partial_\mu \varphi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \varphi_{[\alpha\mu]} \right) + \mathfrak{m} \varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (20)$$

$$\rho^* \left(-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu \right) + \delta^* \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (21)$$

где скаляр ψ_0 сопоставляется представлению $(0, 0)$.

Найдём уравнения второго порядка, к которым приводит система (15) – (21). Подействуем на уравнение (17) оператором ∂_ν . Учитывая (1), получим

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0. \quad (22)$$

Применяя к уравнению (16) оператор $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \partial_\gamma$, имеем

$$\beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\gamma \partial_\beta \psi_0 + m \varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \partial_\gamma \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0,$$

$$-6 \beta \delta_{\gamma\beta} \partial_\gamma \partial_\beta \psi_0 + m \varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \partial_\gamma \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \partial_\gamma \psi_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{6\beta}{m} \square \psi_0. \quad (23)$$

Подставляем (23) в (18):

$$\frac{6|\beta|^2}{m} \square \psi_0 + \gamma \partial_\mu \varphi_\mu + m \psi_0 = 0. \quad (24)$$

Действуя на уравнение (19) оператором ∂_μ , находим:

$$\gamma^* \square \psi_0 + m \partial_\mu \varphi_\mu = 0 \quad (25)$$

Сравнивая (24) и (25), получаем уравнение

$$\left(|\gamma|^2 - 6|\beta|^2\right) \square \psi_0 - m^2 \psi_0 = 0,$$

или

$$\square \psi_0 - \frac{m^2}{|\gamma|^2 - 6|\beta|^2} \psi_0 = 0. \quad (26)$$

На параметры γ и β накладывается условие

$$|\gamma|^2 - 6|\beta|^2 > 0. \quad (27)$$

Комбинируя уравнения (20) и (21), нетрудно получить уравнение

$$|\delta|^2 \left(\partial_\mu \partial_\gamma \varphi_{[\nu\alpha\gamma]} + \partial_\alpha \partial_\gamma \varphi_{[\mu\nu\gamma]} + \partial_\nu \partial_\gamma \varphi_{[\alpha\mu\gamma]} \right) - m^2 \varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (28)$$

Кроме того, из уравнения (20) вытекает соотношение

$$\partial_\mu \partial_\gamma \varphi_{[\nu\alpha\gamma]} + \partial_\alpha \partial_\gamma \varphi_{[\mu\nu\gamma]} + \partial_\nu \partial_\gamma \varphi_{[\alpha\mu\gamma]} = \square \varphi_{[\mu\nu\alpha]}, \quad (29)$$

с учётом которого уравнение (28) примет вид:

$$\square \varphi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\delta|^2} \varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (30)$$

Теперь применим оператор ∂_ν к уравнению (21). Это даёт

$$\rho^* \left(-\partial_\mu \partial_\nu \varphi_\nu + \square \varphi_\mu \right) + m \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (31)$$

Выразим из (19) член $\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]}$ и подставим в (31):

$$\square \varphi_\mu - \frac{m^2}{|\rho|^2} \varphi_\mu - \frac{\gamma^* m}{|\rho|^2} \partial_\mu \left(\psi_0 + \frac{m}{\gamma^* |\rho|^2} \varphi_\mu \right). \quad (32)$$

В свою очередь, из уравнения (19) можно получить соотношение

$$\partial_\nu \varphi_\nu = -\frac{\gamma^*}{m} \square \psi_0. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32), находим

$$\square \varphi_\mu - \frac{m^2}{|\rho|^2} \varphi_\mu - \frac{\gamma^*}{m |\rho|^2} \partial_\mu \left(-\square \psi_0 + m^2 \psi_0 \right). \quad (34)$$

Конкретизируем условие (27), положив, например,

$$|\gamma|^2 - 6|\beta|^2 = 1. \quad (35)$$

В результате уравнения (26), (34) принимают соответственно вид

$$\square \psi_0 - m^2 \psi_0 = 0, \quad (36)$$

$$\square \varphi_\mu - \frac{m^2}{|\rho|^2} \varphi_\mu = 0. \quad (37)$$

С целью получения уравнения второго порядка для тензора $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ возьмём производную ∂_α от уравнения (16):

$$\alpha \left(\partial_\alpha \partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \square \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} \right) + m \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (38)$$

Отсюда с учётом (15) находим

$$\partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{\alpha}{m} \square \psi_{[\mu\nu]}. \quad (39)$$

Подставляя (39) в (17), будем иметь

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu - \frac{|\alpha|^2}{m} \square \psi_{[\mu\nu]} + m \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (40)$$

откуда

$$\square \psi_{[\mu\nu]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2} \psi_{[\mu\nu]} + \frac{m}{|\alpha|^2} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) = 0. \quad (41)$$

Из (16) вытекает соотношение

$$\alpha \left(\partial_\mu \square \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \square \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \square \psi_{[\alpha\mu]} \right) + \beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m \square \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (42)$$

Выражая из (41) член $\square \psi_{[\mu\nu]}$ ($\square \psi_{[\nu\alpha]}$, $\square \psi_{[\alpha\mu]}$) и подставляя в (42), придём к уравнению

$$\square \psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2} \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \beta m \left(1 - \frac{1}{|\alpha|^2} \right) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 = 0. \quad (43)$$

Выбирая в (43)

$$|\alpha|^2 = 1, \quad (44)$$

получаем окончательно

$$\square \psi_{[\mu\nu\alpha]} - m^2 \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (45)$$

Уравнение (36) описывает скалярный бозон с массой m . Уравнения (22), (30), (37) и (45) показывают, что в системе (15) – (21) содержится также описание четырёх векторных частиц, одна из которых имеет нулевую массу, а три других – массы $\frac{m}{|\delta|}$, $\frac{m}{|\rho|}$ и m соответственно.

Матричная интерпретация теории

Тензорная система (15)–(21) может быть записана в стандартной матричной форме

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0 \right) \psi = 0, \quad (46)$$

где проективная матрица Γ_0 в базисе $\psi = \left(\psi_\mu, \psi_{[\mu\nu\alpha]}, \psi_{[\mu\nu]}, \psi_0, \varphi_\mu, \varphi_{[\mu\nu\alpha]}, \varphi_{[\mu\nu]} \right)$ имеет вид

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & m I_{25} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где 0_4 – нулевой блок размерности 4×4 , I_{25} – единичная матрица 25×25 .

Как известно (см., например, [10]), основную роль в РВУ (46) наряду с матрицей Γ_0 играет матрица Γ_4 ; напомним, что матрицы Γ_i ($i=1,2,3$) выражаются через Γ_4

и «бусты» I^{i4} лоренцевских преобразований в пространстве представления волновой функции ψ .

Для установления спектра возможных значений массы и спиновых характеристик микрообъекта, описываемого уравнением (46) со схемой зацеплений (14), удобно использовать так называемый канонический базис (базис Гельфанда – Яглома [10]). В этом базисе компоненты волновой функции $\psi = \psi_{s_j}^\tau$ описывают состояния с определённым значением спина s и проекции спина j ; индекс τ указывает на принадлежность данного состояния к неприводимому представлению τ . Матрица Γ_4 имеет вид прямой суммы

$$\Gamma_{\bar{4}} = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2s+1}, \quad (48)$$

где C^s – спиновый блок, соответствующий спину s в том смысле, что если у матрицы C^s имеются ненулевые корни (собственные значения), то частица обладает спином s . Спиновый блок $C^s = c_{\tau\tau'}^s$ формируется неприводимыми представлениями $\tau \sim (l_1, l_2)$, $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$, удовлетворяющими условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2, \quad |l'_1 - l'_2| \leq s \leq l'_1 + l'_2. \quad (49)$$

Ненулевые значения массы $m_k^{(s)}$ микрообъекта, описываемого РВУ (46), вычисляются по формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_k^{(s)}|}, \quad (50)$$

где $\lambda_k^{(s)}$ – ненулевые корни матрицы Γ_4 (блока C^s), отвечающие единичной клетке в структуре (47) матрицы Γ_0 . Корни матрицы Γ_4 , которые «обрезаются» проективной матрицей Γ_0 , соответствуют нулевой массе (как, например, в десятимерной формулировке уравнений Максвелла).

Введём для упрощения дальнейших обозначений следующую нумерацию представлений, содержащихся в схеме (14):

$$\begin{aligned} (0,0) \sim 1 (\psi_0); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2 (\psi_{[\mu\nu\alpha]}); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 3 (\psi_\mu); \\ (0,1), (1,0) \sim 4,5 (\psi_{[\mu\nu]}); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 6 (\varphi_{[\mu\nu\alpha]}); \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 7 (\varphi_\mu); \quad (0,1), (1,0) \sim 8,9 (\varphi_{[\mu\nu]}). \end{aligned} \quad (51)$$

Представления (51) участвуют в формировании только спинов $s = 0,1$. Поэтому матрица Γ_4 РВУ (46), эквивалентного тензорной системе (15) – (21), в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид:

$$\Gamma_{\bar{4}} = C^0 \oplus (C^1 \otimes I_3). \quad (52)$$

Для блоков C^0, C^1 с учётом условия (49), схемы зацеплений (14) и нумерации (51) получаем выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 & 0 & 0 & c_{17}^0 \\ c_{21}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{71}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{25}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{52}^1 & c_{53}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{68}^1 & c_{69}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{78}^1 & c_{79}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{86}^1 & c_{87}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{96}^1 & c_{97}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (53)$$

где ненулевые элементы $c_{\tau\tau}^s$, соответствуют зацепляющимся представлениям в (14).

Инвариантность рассматриваемого РВУ относительно преобразований группы Лоренца никаких дополнительных ограничений на числа $c_{\tau\tau}^s$, не накладывает.

При построении лагранжиана

$$L = -\bar{\psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0)\psi, \quad (54)$$

из которого может быть получено уравнение (46), используется лоренц-инвариантная вещественная билинейная форма $\bar{\psi}\psi = \psi^+\eta\psi$. В базисе Гельфанда – Яглома матрица η имеет структуру, аналогичную (48):

$$\eta = \bigoplus_S \eta^S \otimes I_{2S+1}. \quad (55)$$

В блоках η^S отличными от нуля являются лишь элементы $\eta_{\tau\dot{\tau}}^S$ ($\tau \sim (l_1, l_2), \dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$), причём

$$\eta_{\tau\dot{\tau}}^S = \eta_{\dot{\tau}\tau}^S \quad -\eta_{\tau\dot{\tau}}^{S+1}. \quad (56)$$

Не уменьшая общности, матрицу η можно нормировать так, что в блоках η^S будут встречаться только числа ± 1 .

Требование возможности лагранжевой формулировки РВУ (46) приводит к условию [3]:

$$c_{\tau\dot{\tau}}^S \eta_{\tau'\dot{\tau}'}^S = (c_{\dot{\tau}'\tau'}^S)^* \eta_{\tau\dot{\tau}}^S. \quad (57)$$

Применяя условие (57) к элементам матриц C^0, C^1 (53), получаем соотношения

$$\begin{aligned} c_{21}^0 &= f(c_{12}^0)^*, \quad c_{71}^0 = g(c_{17}^0)^*, \quad c_{42}^1 = h(c_{25}^1)^*, \quad c_{52}^1 = h(c_{24}^1)^*, \\ c_{43}^1 &= p(c_{35}^1)^*, \quad c_{53}^1 = p(c_{34}^1)^*, \quad c_{86}^1 = g(c_{69}^1)^*, \quad c_{96}^1 = q(c_{68}^1)^*, \\ c_{87}^1 &= r(c_{79}^1)^*, \quad c_{97}^1 = r(c_{78}^1)^*, \end{aligned} \quad (58)$$

где для краткости записи введены обозначения

$$\begin{aligned} f &= \eta_{22}^0 / \eta_{11}^0, \quad g = \eta_{77}^0 / \eta_{11}^0, \quad h = \eta_{45}^1 / \eta_{22}^1, \\ p &= \eta_{45}^1 / \eta_{33}^1, \quad q = \eta_{89}^1 / \eta_{66}^1, \quad r = \eta_{89}^1 / \eta_{77}^1. \end{aligned} \quad (59)$$

Чтобы получить матричное РВУ, эквивалентное тензорной системе (15) – (21), можно выбрать, например:

$$\begin{aligned} c_{12}^0 = c_{17}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{24}^1 = c_{25}^1 = c_{34}^1 = -c_{35}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ c_{68}^1 = c_{69}^1 &= \sqrt{\frac{\delta}{2}}, \quad c_{78}^1 = -c_{79}^1 = \sqrt{\frac{\rho}{2}}; \end{aligned} \quad (60)$$

$$\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = \eta_{77}^0 \quad -\eta_{22}^1 = -\eta_{33}^1 \quad \eta_{66}^1 \quad -\eta_{77}^1 \quad -\eta_{45}^1 = \eta_{89}^1 \quad 1. \quad (61)$$

Заметим, что существуют и другие возможности, но все они приводят к унитарно-эквивалентным теориям.

В результате для спиновых блоков C^0 , C^1 (53) получаются выражения

$$C^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} (C^1)' & \\ & (C^1)'' \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$(C^1)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & \delta \\ 0 & 0 & \rho & -\rho \\ \delta^* & \rho^* & 0 & 0 \\ \delta^* & -\rho^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид блоков η^0 , η^1 матрицы билинейной формы η (53) вытекает из (61).

Блок C^0 имеет корни $0, \pm 1$. Ненулевой корень ± 1 соответствует массе m скалярной частицы. Блок $(C^1)'$ имеет двукратно вырожденные корни $\pm 1, \pm 1$, один из которых в силу проективности матрицы Γ_0 описывает безмассовое векторное поле, второй – массивное векторное поле с массой m . Корни $\pm \delta, \pm \rho$ блока $(C^1)''$ соответствуют векторным полям с массами $\frac{m}{|\delta|}$ и $\frac{m}{|\rho|}$.

Обсуждение и выводы

Таким образом, схема зацеплений (14) позволяет построить релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов: одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории неизбежно возникает скалярная частица с ненулевой массой, которая собственно и обеспечивает единство компонент указанного векторного поля.

Скалярное и векторное поля описываются совместно в рамках одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений и, следовательно, с точки зрения положений теории РВУ представляют собой единый физический объект – массивно-безмассовое скалярно-векторное поле. Очевидно, что его векторная составляющая может интерпретироваться как «электрослабое» поле, а скалярная – как аналог бозона Хиггса. Линейный характер уравнения (36), описывающего скалярный бозон, связан в том, что вопрос о происхождении массы находится вне компетенции стандартной теории РВУ, рамками которой мы ограничиваемся, а наличие или отсутствие массы является заданным фактом.

Отметим также, что в предлагаемой модели масса скалярного бозона совпадает с массой одного из промежуточных векторных бозонов (очевидно, Z^0). Массы всех частиц выступают в качестве произвольных параметров теории.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $\frac{3}{2}$ / M. Petraš // *Czech. J. Phys.* – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
2. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином $\frac{1}{2}$ / И. Улегла // *ЖЭТФ.* – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.
3. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
4. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
5. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Фёдоров // *Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1970. – № 2. – С. 79–85.
6. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Фёдоров // *Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1970. – № 3. – С. 84–92.
7. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
8. Плетюхов, В. А. Описание массивных и безмассовых полей в теории обобщённых релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Вучоныя запіскі БрДУ ім. А. С. Пушкіна.* – 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 50–66.
9. Pletyukhov, V. A. Massless and massive gauge-invariant fields in the theory of relativistic wave equations [Electronic resource] / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev. – Mode of access: arXiv:1002.0720v1[hep-th]. – Date of access: 03.02.2010.
10. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2016

Pletyukhov V.A. The Theory of Relativistic Wave Equations and the Electroweak Field

We construct a relativistic wave equation describing a vector field with four types of quanta – one massless and three massive ones. In this construction inevitably appears a scalar particle with nonzero mass. The scalar and vector fields are simultaneously described by the same system of equations which are not being disintegrated under the Lorentz group transformations; for this reason these fields represent a single physical object. Its vector component can be interpreted as an «electroweak» field, while the scalar component is an analogue of the Higgs boson. In the suggested model, mass of the scalar boson coincides with mass of the intermediate Z^0 -vector boson. Nonzero masses of all particles appear to be free parameters of the theory.

УДК 535.012

Н.Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ

Предложен метод определения оптических постоянных поглощающих одноосных кристаллов и низкосимметричных кристаллов ромбической сингонии, основанный на разложении функций в ряд по малым величинам и дающий возможность получить приближенные соотношения, точность которых не превышает погрешностей эксперимента. Достоинствами метода является его простота, так как оптические постоянные рассчитываются подстановкой измеряемых эллипсометрических параметров в аналитические выражения, а не вычисляются сложными численными методами, а также возможность устранить трудности исследования, связанные как с увеличением числа параметров, подлежащих определению (в общем случае ориентации ромбических кристаллов число параметров, характеризующих кристалл девять, три параметра определяют ориентацию кристалла, остальные являются постоянными кристалла при фиксированной длине волны), так и со значительным усложнением соотношений, описывающих распространение света в этих кристаллах.

Рассмотрим методику определения главных значений $\varepsilon_0, \varepsilon_e$ тензора ε или главных показателей преломления $N_0 = N'_0 - iN''_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ и $N_e = N'_e - iN''_e = \sqrt{\varepsilon_e}$. Малость анизотропии в видимом и ближнем ИК диапазонах частот позволяет воспользоваться приближёнными соотношениями для коэффициентов отражения с целью упрощения решения обратной задачи. Такие попытки предпринимались в [1], а для определения оптических постоянных ромбических кристаллов – в [2], эллипсометрическое исследование которых имеют свои особенности. Что касается одноосных кристаллов, то для них значения N_0 и N_e довольно просто могут быть рассчитаны из приближённых соотношений и эллипсометрических измерений на одном срезе кристалла в широком интервале значений угла θ (угол между нормалью \vec{q} к границе раздела и направлением оптической оси \vec{c}). Эффективность использования приближённых соотношений обусловлена, вообще говоря, не только малостью анизотропии кристаллов, а также наличием переходного слоя на любой поверхности кристалла.

Получим исходные расчетные выражения. Для определения двух комплексных величин N_0 и $\Delta N = N_e - N_0$ воспользуемся измерением поляризационных углов ψ и Δ в главной плоскости падения ($\rho_{\parallel} = \text{tg} \psi_{\parallel} e^{i\Delta_{\parallel}}$) и в плоскости ортогональной к ней ($\rho_{\perp} = \text{tg} \psi_{\perp} e^{i\Delta_{\perp}}$). Направление оптической оси \vec{c} считаем произвольным. Её положение можно найти, например, с помощью эллипсометрических измерений при двух азимутах падения.

Поскольку для изотропной среды $\rho_{\parallel} = \rho_{\perp}$, то величина $\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}$ или

$$A = 1 - \frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} \quad (1)$$

является мерой анизотропии кристалла: $A = C \Delta N$, где C зависит от ориентации оптической оси, N_0 и угла падения. Систему уравнений, из которой находятся C и N_0 , получим, раскладывая в ряд по степеням ΔN , выражения для коэффициентов отражения

$r_p^{\parallel,\perp}$ и $r_s^{\parallel,\perp}$ (индексы « p » и « s » соответствуют случаям, когда вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения или перпендикулярен ей). Получающиеся при этом выражения приведём с точностью до членов, пропорциональных ΔN^2 включительно. На основании общих соотношений [1; 3] имеем:

а) для главной плоскости падения

$$\rho_{\parallel} = \frac{r_p^{\parallel}}{r_s^{\parallel}} = \frac{r_p}{r_s} \{1 + \Delta N [B - (a + Bp)\Delta N]\},$$

$$a = \frac{BN_0 \cos^2 \theta}{2\eta_0^2}, \quad p = \frac{(\eta_0\eta + n^2 \cos^2 \theta)N_0}{(N_0^2\eta + n^2\eta_0)\eta_0}, \quad (2)$$

$$B = \frac{2n^2N_0\eta(N_0^2 \sin^2 \theta - \xi^2)}{(N_0^4\eta^2 - n^4\eta_0^2)\eta_0},$$

где $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0 - \xi^2}$, $\xi = n \sin \varphi$, $\eta = n \cos \varphi$, φ – угол падения, n – показатель преломления среды, из которой падает волна, r_p и r_s – коэффициенты отражения для « p » и « s » составляющих волны от изотропной среды с показателем преломления N_0

$$\frac{r_p}{r_s} = \frac{\xi^2 - \eta\eta_0}{\xi^2 + \eta\eta_0} = \rho_0; \quad (3)$$

б) для плоскости падения, перпендикулярной главной плоскости падения (здесь для компактности оставлены члены пропорциональные ΔN^3 и ΔN^4),

$$\frac{1}{\rho_{\perp}} = \frac{r_s^{\perp}}{r_p^{\perp}} = \frac{r_s}{r_p} [1 + D\delta(1 + b\delta)]. \quad (4)$$

В этом выражении двулучепреломлению пропорциональна величина

$$\delta = \eta_e - \eta_0 = \frac{\eta_0}{N_0} (E + N_0 F \Delta N) \Delta N, \quad (5)$$

$$F = -\frac{2\eta_0^2 \cos^2 \theta + \xi^2}{2\eta_0^4} + \frac{3 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta}{2N_0^2}, \quad E = -\cos^2 \theta + \frac{N_0^2}{\eta_0^2}.$$

В (4) коэффициенты D и b имеют вид:

$$D = \frac{2\eta N_0^2 [(\eta\xi \cos \theta - \eta\eta_0 \sin \theta)^2 - \xi^4 \sin^2 \theta]}{(N_0^4\eta^2 - n^4\eta_0^2)(N_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2 \cos^2 \theta)}, \quad (6)$$

$$b = \frac{N_0^2 (N_0^2\eta - n^2\eta_0) \sin \theta - n^2 (\eta + \eta_0) \xi^2 \cos^2 \theta + n\eta\xi N_0^2 \sin 2\theta}{(N_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2 \cos^2 \theta)(\eta + \eta_0)(N_0^2\eta - n^2\eta_0)}.$$

Для многих кристаллов достаточным является учёт членов, пропорциональных ΔN . Разберём процедуру расчёта величин N_0 и ΔN в этом приближении, когда выражения (2) и (4) значительно упрощаются. Подразумевая далее под N_0 и ΔN относительные параметры $\frac{N_0}{n}$ и $\frac{\Delta N}{n}$, из (2) и (4) получаем систему двух уравнений, которая является основной для определения N_0 и ΔN

$$\rho_{\parallel} = \rho_0 (1 + B\Delta N), \quad \Delta N = \frac{A}{C}, \quad (7)$$

где $C = -B - ED \frac{\eta_0}{N_0}$.

Очевидно, что для нахождения ΔN в принятом приближении при вычислении коэффициента C достаточно ограничиться нулевым приближением для комплексного показателя преломления N_0 ; обозначим его $N_0^{(0)}$. Полагая в первом уравнении (7) $\Delta N = 0$, получаем

$$N_0^{(0)} = R \sin \varphi, \quad (8)$$

где $R = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2}$, $\rho = \rho_{\parallel}$.

Затем, подставив во второе уравнение (7) вычисленное значение $C = f(N_0^{(0)})$ и найденную из измерений величину A , определим ΔN . Зная ΔN , из первого уравнения (7) и уравнения (8) находим значение N_0 в первом приближении (обозначим его $N_0^{(1)}$) с учётом членов $\sim \Delta N$. При этом ρ вычисляется через ΔN и B следующим образом:

$$\rho = \rho_{\parallel} (1 - B \Delta N), \quad B = B(N_0^{(0)}). \quad (9)$$

Следовательно, по измеренным эллипсометрическим параметрам на основании приближенных соотношений (7), (8) могут быть просто вычислены главные комплексные показатели преломления кристалла N_0 и $N_e = N_0 + \Delta N$. Существенно, что при этом снимаются трудности, связанные с решением обратной эллипсометрической задачи. Необходимые для расчёта $N_0^{(1)}$ и ΔN величины C и B вычисляются через известные или измеряемые параметры по формулам ($\eta_0 = \sin \varphi \sqrt{R^2 - 1}$)

$$C = B + \frac{2R \cos \varphi \left[\sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta - \left(\cos \theta - \sqrt{R^2 - 1} \cos \varphi \cdot \sin^2 \theta \right) \right]^2}{\sqrt{R^2 - 1} (R^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi - R^2 + 1)}, \quad (10)$$

$$B = \frac{2R (1 - R^2 \sin^2 \theta) \cos \varphi}{\sqrt{R^2 - 1} (R^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi - R^2 + 1)}. \quad (11)$$

Заметим, что поскольку в соотношении $\Delta N = \frac{A}{C}$ слева стоит константа кристалла, не зависящая от φ и θ , то отношение величин A и C не может обращаться в нуль ни при каких значениях φ и θ , т.е. изменять знак при изменении φ и θ . В частности, для прозрачных кристаллов при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем $C > 0$. Откуда следует, что знак ΔN (положительность и отрицательность кристалла) совпадает со знаком введенной величины A (1): при $|\rho_{\parallel}| < |\rho_{\perp}|$ – кристалл оптически отрицателен, при $|\rho_{\parallel}| > |\rho_{\perp}|$ – оптически положительный.

Это весьма простой способ эллипсометрического определения характера (оптически положительных или оптически отрицательных) прозрачных и слабопоглощающих кристаллов. Он даёт возможность определять отрицательность или положительность кристалла непосредственно на эллипсометре, при проведении измерений не привлекая других средств (в отличие, например, от [4]).

Исходя из общих выражений (2), (4), можно получить значения N_0 и N_e с точностью до членов, пропорциональных ΔN^2 включительно. Процедура расчёта здесь точно такая же, как и при учёте членов, пропорциональных ΔN . Отличие заключается в том, что коэффициенты C и B должны быть найдены через измеряемые величины в следующем (с точностью до ΔN) приближении. Обозначим значение ΔN , вычисленное согласно (7), через $\Delta N^{(0)}$. Составляя с помощью (2), (4) разность $1 - \frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}}$, вычисляем в нужном приближении коэффициент C . Его удобно представить в виде

$$C = C_1 + C_2 \Delta N^{(0)}. \quad (12)$$

Здесь через C_1 обозначен коэффициент C , который находится по формуле (10). Теперь он должен быть вычислен не в нулевом приближении, как ранее, а в первом, что осуществляется очень просто. Для этого в (10) следует подставить значение R (8), рассчитанное для ρ (9). Коэффициент C_2 имеет вид:

$$C_2 = \frac{\eta_0}{N_0} \left(bE^2 \frac{\eta_0}{N_0} - BE - N_0 F \right) D + a + Bp. \quad (13)$$

Поскольку C_2 умножается на $\Delta N^{(0)}$, то входящие в (13) величины должны вычисляться в нулевом приближении, величины a и B находятся согласно (2), для остальных на основании (5), (6), (8) получаем:

$$E = -\cos^2 \theta + \frac{R^2}{R^2 - 1}, \quad F = \frac{2(1 - R^2) - 1}{2 \sin^2 \varphi (R^2 - 1)^2} + \frac{3 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta}{2R^2 \sin^2 \varphi},$$

$$b = \frac{R^2 (R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - \eta_0) \sin^2 \theta - (\cos \varphi + \eta_0) \cos^2 \theta + 0.5R^2 \sin 2\theta \cdot \sin 2\varphi}{(R^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\cos \varphi + \eta_0)(R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - \eta_0)}, \quad (14)$$

$$D = \frac{2 \cos \varphi \cdot R^2 \left[(\sin \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \eta_0)^2 - \sin^4 \varphi \cdot \sin^2 \theta \right]}{(1 - R^2 \sin^2 \varphi)(1 - R^2 \cos^2 \varphi)(R^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}.$$

Далее, аналогично тому, как это делалось при учёте членов $\sim \Delta N$, вычисляем N_0 по формуле (8), но при

$$\rho = \rho_{\parallel} \left[1 - B \Delta N + \Delta N^2 (a + Bp + B^2) \right]. \quad (15)$$

Предложенный метод определения оптических постоянных поглощающих одноосных кристаллов, основанный на разложении функций в ряд по малым величинам, дает возможность получить приближенные соотношения, точность которых не превышает погрешностей эксперимента. Достоинством метода является его простота, так как оптические постоянные рассчитываются подстановкой измеряемых эллипсометрических параметров в аналитические выражения, а не вычисляются сложными численными методами.

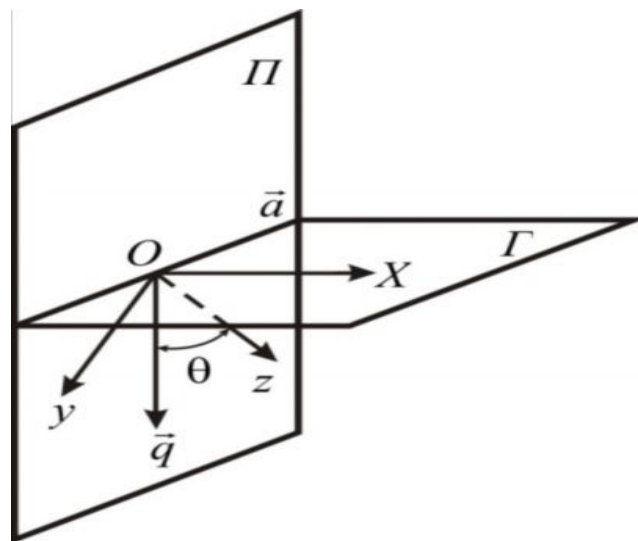
Поглощающие низкосимметричные кристаллы ромбической, моноклинной и триклинной сингонии характеризуются большим числом оптических постоянных. Трудности их исследования связаны как с увеличением числа параметров, подлежащих определению (в общем случае ориентации девять – в ромбических, десять – в моноклинных и двенадцать – в триклинных [1]), так и со значительным усложнением соотношений, описывающих распространение света в этих кристаллах. В ромбических кристаллах вещественная (ε') и мнимая (ε'') части тензора диэлектрической проницаемости крис-

талла диагоналізуецца в кристаллофізічнай сістэме координат. Из общего числа параметров, характеризующих кристалл, три параметра определяют ориентацию кристалла, остальные являются постоянными кристалла (при фиксированной длине волны). Отметим, что если одна из главных осей ромбического кристалла перпендикулярна плоскости падения, то собственные волны в кристалле аналогичны обыкновенной и необыкновенной волнам в одноосном кристалле [1].

В случае ромбических кристаллов для определения трех главных комплексных значений тензора диэлектрической проницаемости необходимо как минимум три комплексных измерения. Получить их можно и на одной грани, но в этом случае следует использовать многоугловые измерения, применение которых малоэффективно. Поэтому, чтобы получить надежные результаты, необходимо использовать две грани кристалла.

В основу излагаемого здесь подхода положена малость величин $\delta_x = (\varepsilon_x - \varepsilon_z) / 2\varepsilon_z$ и $\delta_y = (\varepsilon_y - \varepsilon_z) / 2\varepsilon_z$, (δ_x и δ_y – безразмерные параметры, характеризующие анизотропию кристалла), которые имеют значение не выше 10^{-2} . Если вместо точных выражений воспользоваться приближенными и ограничиться первой степенью по малым параметрам δ_x и δ_y , то отброшенные члены, пропорциональные δ_x^2 , δ_y^2 , порядка 10^{-4} , т.е. превышают точность определения $\varepsilon_{x,y,z}$.

Рассмотрим частную ориентацию, которая реализуется для многих граней роста кристаллов, когда две оси тензора диэлектрической проницаемости лежат в плоскости границы, а третья (ось Z) – параллельна нормали к плоскости границы, $\theta = 0$ (рисунок). Коэффициенты отражения r_p и r_s для P и S составляющих падающей волны имеют вид [1; 3] («||» – означает, что ось Y параллельна плоскости падения):



Ось X лежит в плоскости Γ ,
а оси Y и Z лежат в плоскости Π .

Рисунок. – Ориентация кристаллографических осей ромбического кристалла относительно нормали \vec{q} к плоскости границы Γ

$$r_p^{\parallel} = \frac{\varepsilon_y \eta - \varepsilon \eta_2}{\varepsilon_y \eta + \varepsilon \eta_2}, \quad r_s^{\parallel} = \frac{\eta - \eta_x}{\eta + \eta_x}, \quad (16)$$

$$\eta_x = \sqrt{\varepsilon_x - \xi^2}, \quad \eta_2 = \sqrt{\varepsilon_y (1 - \xi^2 / \varepsilon_z)}, \quad (17)$$

где $\xi = n \sin \varphi$, $\eta = n \cos \varphi$, φ – угол падения, $n = \sqrt{\varepsilon}$ – показатель преломления среды, из которой падает волна.

При повороте кристалла вокруг нормали на 90° коэффициенты отражения r_p^\perp и r_s^\perp (« \perp » – означает, что ось Y перпендикулярна плоскости падения) имеют вид (16), (17) при замене ε_x на ε_y , а ε_y на ε_x . Таким образом мы можем получить два набора измеряемых параметров. Удобно представить ε_x и ε_y в виде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z (1 + 2\delta_x), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z (1 + 2\delta_y). \quad (18)$$

Третий набор измеряемых параметров получим на второй грани. Пусть она ориентирована так, что одна из кристаллографических осей (для определенности ось X) перпендикулярна плоскости падения. Если θ – угол между осью Z и нормалью к плоскости среза (рисунок), то [3]

$$\rho = \operatorname{tg} \psi e^{i\alpha} = \frac{r_p}{r_s} \frac{(\eta \sqrt{\varepsilon_y \varepsilon_z} - \varepsilon \sqrt{A - \xi^2})(\eta + \eta_x)}{(\eta \sqrt{\varepsilon_y \varepsilon_z} + \varepsilon \sqrt{A - \xi^2})(\eta - \eta_x)}, \quad (19)$$

$$A = \varepsilon_z \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta, \quad (20)$$

где при $\theta = 0$ (19) и (20) переходят в (16) и (17).

Как и для одноосных кристаллов, по положениям полного гашения и минимума в интенсивности света, прошедшего через скрещенные поляризатор и анализатор при вращении кристалла вокруг нормали к его границе, определяется положение главной плоскости ZY . Аналогичным образом на втором срезе кристалла может быть найдено положение второй главной плоскости падения ZX или XU . Пересечение этих плоскостей позволяет определить угол θ .

Задачу определения ε_x , ε_y , ε_z сведем к нахождению величин ε_z , δ_x , δ_y , где δ_x , δ_y – малые параметры. Учитывая их малость, получим из отношения r_p/r_s , ограничиваясь членами первого порядка малости, приближенное выражение для измеряемого параметра ρ

$$\rho = \rho_o (1 + \tilde{\rho}), \quad \tilde{\rho} = a\delta_x + b\delta_y, \quad (21)$$

$$a = \frac{2\varepsilon_z \eta}{\eta_z (\varepsilon - \varepsilon_z)}, \quad \eta_z = \sqrt{\varepsilon_z - \xi^2}, \quad (22)$$

$$b = \frac{2\eta \varepsilon_z \varepsilon (\eta_z - \varepsilon_z \sin^2 \theta / \eta_z)}{\varepsilon_z^2 \eta^2 - \varepsilon^2 \eta_z^2}.$$

Здесь индексом « o » отмечено отношение френелевских коэффициентов отражения от изотропной среды с диэлектрической проницаемостью ε_z :

$$\rho_o = \frac{\xi^2 - \eta \eta_z}{\xi^2 + \eta \eta_z}. \quad (23)$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ из (21), (22) следуют выражения для ρ , когда в плоскости границы лежат две кристаллографические оси X и Y или X и Z .

Для определения комплексных значений $\varepsilon_{x,y,z}$ будем проводить измерения при фиксированном угле падения на первой грани в плоскости падения, перпендикулярной оси X (обозначим его ρ_x), затем на второй грани – в плоскостях падения, перпендикулярных осям Y (ρ_y) и Z (ρ_z). Расчетные выражения для ρ_y и ρ_z получим из общих выражений (19) и (20). Положив в них $\theta = \pi/2$, производя замену индексов $X \rightleftharpoons Y$ и раскладывая в ряд, найдем

$$\rho_y = \rho_o (1 + \tilde{\rho}_y),$$

$$\tilde{\rho}_y = c\delta_x + a\delta_y, \quad c = \frac{2\varepsilon\varepsilon_z\eta\eta_z}{(\varepsilon - \varepsilon_z)(\xi^4 - \eta^2\eta_z^2)}, \quad (24)$$

a и ρ_o определены выражениями (22) и (23). Производя в (24) замену индексов $Y \rightleftharpoons Z$, что соответствует повороту кристалла вокруг нормали к грани на 90° , найдем выражение для ρ_z : $\rho_z = a\delta_x + c\delta_y$. Заметим, что если получать ρ_y и ρ_z из (21) – (23) соответствующей перестановкой индексов (при $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$), то переопределяется величина ρ_o , что усложнит дальнейшие выкладки.

Решая систему из трех уравнений, представляющих собой выражения для ρ_x , ρ_y , ρ_z , нетрудно получить

$$\delta_x = \frac{c(\rho_x - \rho_y) + b(\rho_y - \rho_z) + a(\rho_z - \rho_x)}{c(\rho_z b - \rho_x c) + a(\rho_y c - \rho_z a) + a(\rho_x a - \rho_y b)}, \quad (25)$$

$$\delta_y = \delta_x \frac{\rho_x c - \rho_y a}{\rho_y b - \rho_x a} + \frac{\rho_x - \rho_y}{\rho_y b - \rho_x a}. \quad (26)$$

Эти выражения для измеряемых параметров содержат коэффициенты a , b , c , являющиеся функциями неизвестной величины ε_z . Однако из (25), (26) видно, что δ_x и δ_y пропорциональны разностям $\rho_i - \rho_j$ ($i, j = x, y, z$, $i \neq j$), которые малы, поскольку обусловлены анизотропией кристалла. Поэтому в них с принятой выше точностью ε_z достаточно заменить нулевым по δ_x и δ_y приближением $\varepsilon_z^{(0)}$, которое может быть найдено из (23), как и для одноосных кристаллов, оно получается из (18) в [5] (при замене $0 \rightarrow z$)

$$\varepsilon_z^{(0)} = \xi^2 \left[1 + \left(\frac{1 - \rho_o}{1 + \rho_o} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right]. \quad (27)$$

Здесь вместо ρ_o можно подставить любое из ρ_i . Пусть $\rho_i = \rho_y$. Тогда, после того как по формулам (25), (26) будут рассчитаны δ_x и δ_y , постоянную ε_z можно найти с точностью до δ_x , δ_y . Для этого, подставляя в (9) $a(\varepsilon_z^{(0)})$, $c(\varepsilon_z^{(0)})$, δ_x , δ_y , находим величину ρ_y . С ее помощью уточняем ρ_o , исключив в ρ_y вклад анизотропии: $\rho_o = \rho_y / (1 + \tilde{\rho}_y)$. Вернувшись к формуле (27), рассчитываем по ней при новом ρ_o значение ε_z с принятой нами точностью. Затем находим $\varepsilon_x = \varepsilon_z (1 + 2\delta_x)$ и $\varepsilon_y = \varepsilon_z (1 + 2\delta_y)$.

Итак, в нашем подходе определяются малые величины δ_x и δ_y , с помощью которых по определенным формулам вычисляются ε_z путем уточнения (с точностью до δ_x , δ_y) нулевого значения. Это существенный момент, отличающий наш подход от подхода, использованного в работе [2]. В ней вводилось три малых параметра, два из которых выражаются через третий (фактически наши δ_x и δ_y), но ε_z оставалось неопределенным. Эта неопределенность в итоге не позволяла получить замкнутую систему уравнений, и автор вынужден был сузить применимость своего подхода значениями $\varepsilon \geq 10$, которое, естественно, весьма существенно ограничивает предложенный в [2] подход.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 456 с.
2. Aspnes, D. E. Approximate solution of ellipsometric equations for optically biaxial crystals / D. E. Aspnes // J. Opt. Soc. Am. – 1980. – V. 70, № 10. – P. 1275–1277.
3. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.
4. Elshazlu-Zaghloul, M. Specieal-angle-ofincidem-ce ellipsometry for uniaxial crystals : Part 1. Negative crystals / M. Elshazlu-Zaghloul // Opt. Comm. – 1985. – V. 54, № 4. – P. 195–200.
5. Сендер, Н. Н. Определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных поглощающих кристаллов на основе разложения в ряд коэффициентов отражения / Сендер Н. Н. // Актуальные научные проблемы теоретической и экспериментальной физики, астрономии и космонавтики : Сб. материалов межвуз. науч. конф., посвященной 50-летию первого полета в космос, Брест, 11–12 апр. 2011 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого. – Брест : БрГУ, 2011. – С. 81–85.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2016

Sender N.N. Determining the Optical Constants of Anisotropic Absorbing Crystals Based on Series Expansion of Coefficients of Reflection

The method for determining the optical constants of absorbing uniaxial crystals and low-symmetry crystals of the orthorhombic system, based on the expansion of functions in series in small quantities, which makes it possible to obtain approximate ratio, the accuracy of which does not exceed the experimental error is offered. The advantages of this method is its simplicity as the optical constants are calculated by substituting the measured ellipsometric parameters in the analytical expressions, and are not calculated by complex numerical methods, as well as the ability to avoid the difficulties of the research related to both the increase in the number of parameters to be determined (in general case the orientation of rhombic crystals the number of parameters characterizing the crystal-nine, three parameters define the orientation of the crystal, and the rest are permanent crystal at a fixed wavelength), and with a significant complication of relations describing the propagation of light in these crystals.

А.И. Басик¹, О.А. Гацкевич², Е.В. Грицук³

¹канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

³канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ В \mathbf{R}^3

Доказывается, что индекс регуляризуемой краевой задачи Римана – Гильберта для ограниченной односвязной области трехмерного пространства и произвольной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами кососимметрического типа равен минус единице.

Введение

В работе рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными кососимметрического типа. Для систем этого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Я.Б. Лопатинского произвольной краевой задачи Римана – Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе банаховых пространств [1; 2]. Подобный критерий был ранее получен В.И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [3] (см. также [4]) и А.Т. Усом для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5]. Для сравнения отметим, что для четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [6] и псевдосимметрических эллиптических систем в \mathbf{R}^4 [7] такого критерия не существует.

Одной из важных характеристик эллиптической краевой задачи является ее индекс. Доказанный критерий позволяет провести гомотопию произвольной краевой задачи Римана – Гильберта для рассматриваемых систем в классе регуляризуемых краевых задач к простейшему виду, тем самым установить равенство индексов этих задач. Индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску [3], а также для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5] равен минус единице. В настоящей работе мы распространяем этот результат на класс эллиптических кососимметрических систем в \mathbf{R}^3 .

Постановка задачи Римана – Гильберта

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ – неизвестная вектор-функция, A_1, A_2 и A_3 являются кососимметрическими матрицами размера 4×4 вида

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & c_k \\ -a_k & 0 & c_k & -b_k \\ -b_k & -c_k & 0 & a_k \\ -c_k & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, 3.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}^3$ характеристическая матрица системы (1) $A(\xi) := A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$ является невырожденной.

Обозначим $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда нетрудно убедиться, что $\det A(\xi) = (\langle a; \xi \rangle^2 + \langle b; \xi \rangle^2 + \langle c; \xi \rangle^2)^2$, где $\langle x; y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в \mathbf{R}^3 .

Лемма 1. Система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда векторы a, b и c линейно независимы.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существуют числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 , не все равные нулю, такие, что $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$. Последнее означает, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

имеет ненулевое решение, но тогда $\det A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, что противоречит эллиптичности системы (1).

Докажем достаточность. Уравнение $\det A(\xi) = 0$ равносильно системе (2), которая в силу линейной независимости векторов a, b и c имеет только нулевое решение. Таким образом, система (1) является эллиптической. Лемма доказана.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области Ω и непрерывного по Гельдеру на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (3)$$

где B – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 вида

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix},$$

f – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

Условие регуляризуемости

Задача (1), (3) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda v(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (4)$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$. Здесь через $v = v(y)$ обозначен единичный вектор

внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему корень $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) уравнения $\det A(\lambda v(y) + \tau(y)) = 0$.

Отметим, что для максимальности ранга матрицы (4) необходимо, чтобы $\text{rank } B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, что и предполагаем в дальнейшем выполненным.

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$), и рассмотрим векторное поле $L = (L_1, L_2, L_3)$, где

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_1(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_1(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}), \\ L_2 &= a_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_2(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}), \\ L_3 &= a_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_3(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_3(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}). \end{aligned}$$

Теорема 1. *Задача (1), (3) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется условие*

$$\langle v(y); L(y) \rangle \neq 0. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть H_{jk} – минор матрицы Я.Б. Лопатинского (4), составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12} = H_{34}, \quad H_{13} = -H_{24}, \quad H_{14} = H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$\begin{aligned} H_{12} &= \langle a; \xi \rangle (\langle a; \xi \rangle (\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + \langle b; \xi \rangle (\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + \langle c; \xi \rangle (\Lambda_{23} + \Lambda_{14})), \\ H_{13} &= \langle b; \xi \rangle (\langle a; \xi \rangle (\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + \langle b; \xi \rangle (\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + \langle c; \xi \rangle (\Lambda_{23} + \Lambda_{14})), \\ H_{14} &= \langle c; \xi \rangle (\langle a; \xi \rangle (\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + \langle b; \xi \rangle (\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + \langle c; \xi \rangle (\Lambda_{23} + \Lambda_{14})), \end{aligned}$$

где $\xi = (\alpha + i\beta)v(y) + \tau(y)$.

Условие максимальности ранга матрицы Я.Б. Лопатинского (3) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y выполняется условие

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = \\ &= \left(|\langle a; \xi \rangle|^2 + |\langle b; \xi \rangle|^2 + |\langle c; \xi \rangle|^2 \right) \left(\langle a; \xi \rangle (\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + \langle b; \xi \rangle (\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + \langle c; \xi \rangle (\Lambda_{23} + \Lambda_{14}) \right)^2 = \\ &= \left(|\langle a; \xi \rangle|^2 + |\langle b; \xi \rangle|^2 + |\langle c; \xi \rangle|^2 \right) \left(\langle \tau; L \rangle + \alpha \langle v; L \rangle + i\beta \langle v; L \rangle \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем необходимость выполнения неравенства (4). Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in \partial\Omega$ выполняется равенство $\langle v(y_0); L(y_0) \rangle = 0$, т.е. вектор $L(y_0)$ лежит в касательной плоскости $T_{y_0} \partial\Omega$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y_0 . Поэтому найдется единичный вектор $\tilde{\tau} \in T_{y_0} \partial\Omega$ ортогональный $L(y_0)$. Положив в формуле (5) $\tau = \tilde{\tau}$ и $y = y_0$, получим $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$, что противоречит максимальности ранга матрицы (3).

Обратно, пусть выполняется условие (5), однако $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$ в некоторой точке y_0 и при некотором единичном векторе τ , тогда из формулы (6) следует, что $\langle a; \xi \rangle = 0$, $\langle b; \xi \rangle = 0$ и $\langle c; \xi \rangle = 0$, где $\xi = (\alpha + i\beta)v(y_0) + \tau$. Последнее противоречит эллиптичности системы (1). Теорема доказана.

Индекс задачи (1), (3)

При выполнении условия (5), согласно теореме 1, задача (1), (3) является регуляризуемой. Это означает, что однородная задача (1), (3) имеет α линейных независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение β линейно независимых условий разрешимости. Число $\alpha - \beta$ называется индексом задачи (1), (3). Известно, что индекс является гомотопически устойчивым. Вычисление индекса проведем методом гомотопий.

Напомним, что две задачи Римана – Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

В силу непрерывности векторного поля $L(y)$ и связности поверхности $\partial\Omega$ скалярное произведение $\langle v(y); L(y) \rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$. Не ограничивая общности, можно считать, что всюду на $\partial\Omega$ выполняется неравенство $\langle v(y); L(y) \rangle > 0$ (случай $\langle v(y); L(y) \rangle < 0$ сводится к рассматриваемому, например, умножением одного из граничных условий (3) на -1).

Так как $rank B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, то на поверхности $\partial\Omega$ первая строка $m(y) := (m_1(y), m_2(y), m_3(y), m_4(y))$ матрицы $B(y)$ не обращается в нуль. Поэтому существует [8] непрерывное отображение $M : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$, такое, что при каждом $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y) \text{ и } M(y, 1) = (1, 0, 0, 0),$$

и при каждом $t \in [0; 1]$ вектор-функция $M(\cdot, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (3). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки

$$N = (N_1(y, t), N_2(y, t), N_3(y, t), N_4(y, t))$$

$$\Xi(y, t)N^T(y, t) = \tilde{L}(y, t), \tag{7}$$

где матрица $\Xi(y, t)$ имеет вид (для упрощения записей точка $(y, t) \in \partial\Omega \times [0; 1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается):

$$\Xi = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -a_1 M_2 - b_1 M_3 - c_1 M_4 & a_1 M_1 - c_1 M_3 + b_1 M_4 & b_1 M_1 + c_1 M_2 - a_1 M_4 & c_1 M_1 - b_1 M_2 + a_1 M_3 \\ -a_2 M_2 - b_2 M_3 - c_2 M_4 & a_2 M_1 - c_2 M_3 + b_2 M_4 & b_2 M_1 + c_2 M_2 - a_2 M_4 & c_2 M_1 - b_2 M_2 + a_2 M_3 \\ -a_3 M_2 - b_3 M_3 - c_3 M_4 & a_3 M_1 - c_3 M_3 + b_3 M_4 & b_3 M_1 + c_3 M_2 - a_3 M_4 & c_3 M_1 - b_3 M_2 + a_3 M_3 \end{pmatrix},$$

а правая часть системы (7):

$$\tilde{L}(y, t) = \begin{pmatrix} t(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)L_1(y) + tv_1(y) \\ (1-t)L_2(y) + tv_2(y) \\ (1-t)L_3(y) + tv_3(y) \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом $t \in [0; 1]$

$$\det \Xi(y, t) = (a, b, c) (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)^2 \neq 0,$$

то система (7) однозначно разрешима (через (a, b, c) обозначено векторное произведение векторов a, b и c), при этом отображение $N : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4$ непрерывно и, как нетрудно видеть, при каждом фиксированном $t \in [0; 1]$ непрерывно по Гельдеру на $\partial\Omega$. При $t = 0$ решением системы (7) является вторая строка матрицы $B(y)$.

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (3), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y, t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega) \quad (8)$$

имеет вид

$$B(y, t) = \begin{pmatrix} M_1(y, t) & M_2(y, t) & M_3(y, t) & M_4(y, t) \\ N_1(y, t) & N_2(y, t) & N_3(y, t) & N_4(y, t) \end{pmatrix}.$$

Так как векторное поле $L(y, t)$, отвечающее задаче (1), (8), имеет вид

$$L(y, t) = (1-t)L(y) + tv(y),$$

то

$$\langle v(y); L(y, t) \rangle = (1-t)\langle v(y); L(y) \rangle + t > 0$$

при всех $y \in \partial\Omega$ и любом $t \in [0; 1]$. Следовательно, задача (1), (3) в классе регуляризуемых краевых задач гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием ($y \in \partial\Omega$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(v(y), b, c)}{(a, b, c)} & \frac{(a, v(y), c)}{(a, b, c)} & \frac{(a, b, v(y))}{(a, b, c)} \end{pmatrix} U(y) = f(y). \quad (9)$$

Отметим, что задача (1), (9) регуляризуема для любых линейно независимых векторов a, b и c .

Проведем теперь гомотопию эллиптической системы задачи (1), (9). Если a, b, c образует правую тройку векторов, то непрерывной деформацией в \mathbf{R}^3 с сохранением условия линейной независимости она может быть сгомотопирована в стандартный базис e_1, e_2, e_3 пространства \mathbf{R}^3 (см., например, [9, с. 211]). В этом случае задача (1), (9) гомотопна задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega), \quad (10)$$

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (11)$$

Заменой $V = (-u_2, -u_3, -u_4)$ и $W = u_1$ (10), (11) приводится к виду

$$\operatorname{div} V(x) = 0, \quad \operatorname{rot} V(x) = \operatorname{grad} W(x), \quad (12)$$

$$W|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad \langle V; \nu \rangle|_{\partial\Omega} = -f_2(y). \quad (13)$$

Индекс последней задачи вычислен в работе [8] и равен минус единице.

Левая тройка векторов a, b, c непрерывной деформацией в \mathbf{R}^3 может быть переведена в базис $-e_1, e_2, e_3$ пространства \mathbf{R}^3 (см., например, [9, с. 211]). Тогда (1), (9) гомотопна задаче

$$\begin{cases} -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega), \quad (13)$$

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (14)$$

Задача (13), (14) заменой $V = (-u_2, u_3, u_4)$ и $W = u_1$ также приводится к виду (12), (13) и, следовательно, имеет индекс равный минус единице. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта (1), (3) равен минус единице.*

Заключение

В работе рассмотрены вопросы регуляризуемости и индекса краевой задачи Римана – Гильберта в произвольной односвязной области трехмерного пространства и произвольной эллиптической системы четырех уравнений кососимметрического типа. В частности, установлено, что индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для рассматриваемых систем равен минус единице.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
2. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
4. Полуниин, В. А. Об условии Шапиро – Лопатинского в задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В. А. Полуниин, А. П. Солдатов //

Науч. ведомости сб. «Матем. физика». – Белгород, 2010. – № 17 (88). – Вып. 20. – С. 91–99.

5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

6. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

7. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

8. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.

9. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров ; с прил. собр. задач, снабженных решениями, сост. А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1968. – 911 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.06.2016

Basik A.I., Hatskevich V.A., Gritsuk E.V. Calculation of the Index of the Riemann – Hilbert Boundary Value Problem for Elliptic Systems in \mathbf{R}^3 of Skew-Symmetric Type

The class of elliptic systems of four differential equations of the first order with three variables skew-symmetric type is considered in this paper. The questions of the regularizability and the index of Riemann – Hilbert boundary value problem are studied for this class of systems. In particular, it is proved that the index of a regularizable Riemann – Hilbert boundary value problem does not depend on a choice of elliptic system of the indicated type, it is equal -1.

УДК 512.542

Д.В. Грицук¹, Д.Д. Даудов², А.А. Трофимук³
¹канд. физ.-мат. наук,

старший преподаватель каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²магистрант специальности «Математика»

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

³канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИНВАРИАНТЫ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ МАЛОГО НОРМАЛЬНОГО РАНГА

Получены оценки производной π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы G , у которой нормальный ранг силовских p -подгрупп, $p \in \pi$ не превышает 2. В частности, производная π -длина такой группы G не превышает 9, а нильпотентная π -длина группы G не превышает 6.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π' . Группа называется π -группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π , и π' -группой – в противном случае.

Напомним, что группа G называется π -разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами. Данный ряд будем называть (π', π) -рядом группы G . Наименьшее число π -факторов среди всех нормальных (π', π) -рядов группы G называется π -длиной π -разрешимой группы и обозначается через $l_\pi(G)$.

Очевидно, что всякая π -разрешимая группа G обладает нормальным (π', π) -рядом, у которого все π -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π -факторов среди всех таких нормальных рядов группы G называется нильпотентной π -длиной и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то π -разрешимая группа разрешима и нильпотентная π -длина группы G совпадает с нильпотентной длиной группы G . Здесь $\pi(G)$ – это множество простых делителей порядка группы G .

Одной из первых работ по нильпотентной π -длине π -разрешимой группы была статья М. Нумата [2]. В.С. Монахов и О.А. Шпырко [3] для нильпотентной π -длины получили аналог результата К. Дёрка ($n(G) - n(M) \leq 2$, где G – произвольная разрешимая группа, а M – ее максимальная подгруппа). Обзор результатов по нильпотентной π -длине и другим инвариантам частично разрешимых групп приведен в работе [4].

Аналог производной длины для π -разрешимой группы был предложен В.С. Монаховым. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами для всех i . Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G

и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G .

В работах [5; 6] изучены свойства производной π -длины π -разрешимой группы и получены ее оценки в зависимости от строения силовских p -подгрупп, $p \in \pi$. В частности, если G – π -разрешимая группа с бициклическими силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 6$, $l_\pi^n(G) \leq 4$, $l_\pi(G) \leq 4$.

Из этого результата вытекают оценки производной и нильпотентной длин для разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами. В частности, такие группы имеют нильпотентную длину не выше 4, а производную длину не выше 6.

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p -группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P , в том числе и P . Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X .

В работе [7] было установлено, что если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2 , то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Очевидно, что p -группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [8] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, из леммы 5 всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Развитием результатов работ [6; 7] является следующая

Теорема. Пусть G – π -разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской p -подгруппы P , $p \in \pi$. Тогда:

1) если $\{2,3\} \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$, $l_\pi^n(G) \leq 2$, $l_\pi(G) \leq 2$;

2) если $\{2,3\} \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 9$, $l_\pi^n(G) \leq 6$, $l_\pi(G) \leq 6$.

1. Вспомогательные результаты

Из определений π -длины, нильпотентной и производной π -длин вытекает, что $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G)$.

В леммах 1 и 2 под $l_\pi^*(G)$ можно понимать либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$, либо всюду $l_\pi^a(G)$.

Лемма 1. Если G – π -разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l_\pi^*(G) \leq l_{\pi_1}^*(G) + l_{\pi_2}^*(G)$.

Лемма 2. ([6, лемма 2.3]). Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G , то $l_\pi^*(H) \leq l_\pi^*(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_\pi^*(G/N) \leq l_\pi^*(G)$ и $l_\pi^*(G) \leq l_\pi^*(G/N) + l_\pi^*(N)$;

3) если N – нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G)$;

4) если G и V – π -разрешимые группы, то $l_\pi^*(G \times V) = \max\{l_\pi^*(G), l_\pi^*(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то

$$l_\pi^*(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^*(G/N_1), l_\pi^*(G/N_2)\}.$$

В монографии Хупперта [8] получено описание p -групп G , у которых каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Эти результаты отражены в леммах 3 и 4.

Лемма 3 ([8, теорема III.7.6]). Пусть G – p -группа и каждая абелева нормальная подгруппа циклическая. Тогда:

- 1) если $p > 2$, то G циклическая;
- 2) если $p = 2$, то P имеет нормальную циклическую подгруппу индекса 2.

Лемма 4. ([8, теорема III.12.4, замечание III.12.5], [9]). Пусть G – p -группа, $|G| = p^n$ и каждая абелева нормальная подгруппа порождается двумя элементами. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

I. Если $p \geq 3$, то:

- 1) G метациклическая;
- 2) либо $G = A \times B$, где A – неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p , а B – циклическая группа порядка p^{n-2} , либо $G = [A]B$, где $A = Z_p \times Z_{p^{n-2}}$ – абелева группа, а B – циклическая группа порядка p ;
- 3) $G = [A]B$, где A – абелева группа, $A = C_G(G')$, а B – циклическая группа порядка p ;

4) G – 3-группа максимального класса.

II. Если $p = 2$, то:

- 1) G – группа кватернионов порядка 8;
- 2) G – центральное произведение двух подгрупп Q_8 и D_8 , где D_8 – диэдральная группа порядка 8;
- 3) G – специальная группа такая, что $|G/Z(G)| = 2^4$ и $|Z(G)| = 2^2$.

Лемма 5. Пусть P – p -группа и $r_n(P) \leq 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 2. В частности, если $p = 2$, то P бициклическая.

Доказательство. Так как $r_n(P) \leq 2$, то каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Если каждая абелева нормальная подгруппа циклическая, то из леммы 3 следует, что P бициклическая и производная длина группы P не превышает 2. Для случая, когда число порождающих элементов каждой абелевой нормальной подгруппы равно двум, будем использовать лемму 4. Очевидно, что группы из п. I_1 , I_3 и II_1 являются метабелевыми. Так как неабелева группа A порядка p^3 и экспоненты p является метабелевой, то группа P из п. I_2 метабелева. Из теоремы 14.17 [8] производная длина 3-группы максимального класса (п. I_4) равна 2. Группа P из п. II_2 имеет порядок 16 и номер 8 в библиотеке SmallGroups [10]. Кроме того, эта группа является бициклической и имеет производную длину равную 2. Вычисления в компьютерной системе GAP [10] показывают, что группа из п. II_3 имеет нормальный ранг равный 4, поэтому исключается из рассмотрения.

Таким образом, производная длина группы P не превышает 2. Кроме того, при $p = 2$ группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть G – p -разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$, где P – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$, а $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . По лемме VI.6.9 [8] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G)$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(\Phi(G))$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } F$. Так как $|F/\Phi(F)| \leq p^2$ и $\Phi(F) = 1$, то $|F| \leq p^2$.

Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы $\text{Aut } F$, порядок которой равен $p-1$. Поэтому $l_p(G) \leq 1$. Если $|F| = p^2$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Тогда в группе G силовская p -подгруппа имеет порядок либо p^2 , либо p^3 . Если силовская p -подгруппа абелева, то $l_p(G) \leq 1$. Если G_p неабелева, то порядок силовской подгруппы G_p равен p^3 и $l_p(G) \leq 2$ по теореме VI.6.6 [8].

По теореме I.14.10 [8] G_p изоморфна либо метациклической группе $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle$, либо группе экспоненты p . В первом случае $l_p(G) \leq 1$ для $p \geq 3$. Пусть G_p – группа экспоненты p . Если порядок группы нечетен или p – не простое число Ферма, то, по теореме IX.4.8 [11], $l_p(G) \leq 1$. Но теперь, согласно утверждению b) теоремы IX.5.5 [11], $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Лемма 7 ([8, леммы VI.8.1]). Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$. Тогда H циклическая и $|H|$ делит $(p^2 - 1)$.

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^δ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{H} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{H} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через \mathfrak{N} и \mathfrak{A} соответственно.

Лемма 8. Пусть G – группа нечетного порядка $r_n(P) \leq 2$, P – силовская p -подгруппа. Тогда коммутант группы G нильпотентен.

Доказательство. Очевидно, что условие «коммутант группы нильпотентен» равносильно принадлежности группы к произведению формаций $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы, но не принадлежащая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Очевидно, что всякая фактор-группа наследует условия теоремы. Тогда $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$. Так как G разрешима, то $F = C_G(\Phi(G))$. Кроме того, $|F| = p^n$ и т.к. $F \leq P$, то $\Phi(F) = 1$ и $|F| \leq p^2$.

Если $|F| = p$, то G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. По лемме 7, G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Значит, предположение о группе G неверное и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, т.е. коммутант группы G нильпотентен.

Лемма 9. Пусть G – разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$, P – силовская p -подгруппа, $p \in \{2, 3\}$. Тогда $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 6$ и $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 4$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $O_{\{2,3\}'}(G) = 1$, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $|N| = p^n$, где $p \in \{2,3\}$. Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G) = O_p(G)$ и $F(G) \leq G_p$. Так как $r_n(G_p) \leq 2$, то $|F(G)/\Phi(F(G))| \leq p^2$.

Рассмотрим фактор-группу $F(G)/\Phi(G)$. Очевидно, что

$$F(G)/\Phi(G) \cong (F(G)/\Phi(F(G)))/(\Phi(G)/\Phi(F(G))).$$

Тогда $|F(G)/\Phi(G)| \leq p^2$. Так как G – разрешима, то $F(G)/\Phi(G)$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

Если $|F(G)/\Phi(G)| = p$, то $C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ и $G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))$ изоморфна подгруппе группы $\text{Aut } F(G)/\Phi(G)$. Поэтому $G/F(G)$ – циклическая и $l_{\{2,3\}}^a(G/F(G)) \leq 1$. Так как по лемме 5 $d(G_p) \leq 2$, то $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 2+1 = 3$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 2$.

Пусть $|F(G)/\Phi(G)| = p^2$. Тогда $G/F(G)$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. Если $p = 2$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_3 \cong GL(2, 2)$ степени 3, а значит, G – $\{2,3\}$ -группа и $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq l_{\{2,3\}}^a(F(G)) + l_{\{2,3\}}^a(S_3) = 2+2 = 4$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 1+2 = 3$. Если $p = 3$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ и $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq l_{\{2,3\}}^a(F(G)) + l_{\{2,3\}}^a(GL(2, 3)) = 2+4 = 6$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 1+3 = 4$.

2. Доказательство теоремы

1) Применим индукцию по порядку G . Все фактор-группы наследуют условие теоремы. Поэтому $O_{\pi'}(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N . Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда $F = F(G) \leq G_p$.

Так как $p > 3$, то по лемме 6 $l_p(G) \leq 1$. Тогда $F(G) = G_p$.

Так как холлова π -подгруппа G_{π} имеет нечётный порядок, то, по лемме 8, ее коммутант $(G_{\pi})'$ нильпотентен и $(G_{\pi})' \leq F(G_{\pi})$. Тогда

$$G_{\pi}/F(G_{\pi}) \cong (G_{\pi}/(G_{\pi})')/(F(G_{\pi})/(G_{\pi})')$$

и $G_{\pi}/F(G_{\pi})$ абелева. Очевидно, что $F(G_{\pi}) = F(G)$. Таким образом, $G_{\pi}/F(G)$ – абелева, а значит, $l_{\pi}^a(G/F(G)) \leq 1$. Так как $F(G) = G_p$ и $d(G_p) \leq 2$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 3$, а $l_{\pi}^n(G) \leq 2$. В частности, $l_{\pi}(G) \leq 2$.

2) Из леммы 1 и леммы 9 следует, что $l_{\pi}^a(G) \leq l_{\{2,3\}'}^a(G) + l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 3+6 = 9$, $l_{\pi}^n(G) \leq l_{\{2,3\}'}^n(G) + l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 2+4 = 6$. В частности, $l_{\pi}(G) \leq 6$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышс. шк., 2006.
2. Numata, M. On the π -nilpotent length of π -solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

3. Monakhov, V. S. The nilpotent π -length of maximum subgroups in finite π -soluble groups / V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2009. – Vol. 64, № 6. – P. 229–234.
4. Монахов, В. С. Инварианты конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 63–81.
5. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д. В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
7. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
9. Blackburn, N. Generalizations of certain elementary theorems on p -groups / N. Blackburn // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 11. – P. 1–22.
10. GAP (Groups, Algorithms, and Programming) (2014), Version 4.7.6. [Electronic resource]. – Mode access: www.gap-system.org.
11. Huppert, B. Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1982.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.05.2016

Gritsuk D.V., Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Invariants of π -Solvable Groups with Sylow Subgroups of Small Normal Rank

We obtain estimates of the derived π -length and the nilpotent π -length of a π -solvable group G whose normal rank of Sylow p -subgroups, $p \in \pi$ is at most 2. In particular, the derived π -length of such group does not exceed 9 and the nilpotent π -length of such group does not exceed 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф15PM-025).

УДК 517.925

Е.В. Грицук¹, А.Н. Мартинович²¹канд. физ.-мат. наук,доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ
НА СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ**

В работе проводится исследование иерархии дифференциальных уравнений Риккати методом резонансов. Получена структура уравнений иерархии, найден порядок подвижного полюса решения, указан явный вид резонансного многочлена и определены его корни. Для первых пяти уравнений найдены ряды Лорана с необходимым числом произвольных параметров.

Введение

Задача определения условий наличия свойства Пенлеве [1; 2] у обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше двух является актуальной в связи с гипотезой о возможности применения к задачам с уравнениями в частных производных метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] в случае их редукции к уравнениям Пенлеве типа. При возрастании порядка дифференцирования самый универсальный метод – метод малого параметра – приводит к многочисленным уравнениям, требующих дальнейших исследований.

Поэтому возник способ построения дифференциальных уравнений высших порядков посредством воздействия специальных операторов на уравнения Пенлеве типа в надежде получить уравнения того же свойства. Однако получаемые уравнения, хотя и сохраняют из-за специфики применяемых операторов некоторые свойства стартовых уравнений, требуют исследований на свойство Пенлеве. Одной из таких последовательностей уравнений является иерархия уравнения Риккати.

1. Структура уравнений иерархии Риккати

Иерархия уравнений Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dx} + w. \quad (2)$$

Получаем:

при $n = 1$

$$w' + w^2 = 0, \quad (3)$$

при $n = 2$

$$w'' + w^3 + 3ww' = 0, \quad (4)$$

при $n = 3$

$$w''' + w^4 + 6w^2w' + 4ww'' + 3w'^2 = 0, \quad (5)$$

при $n = 4$

$$w^{(4)} + w^5 + 10w^3w' + 10w^2w'' + 15ww'^2 + 5ww''' + 10w'w'' = 0. \quad (6)$$

Относительно вида уравнения (1) можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема 1. Уравнение (1) при $n \geq 2$ имеет вид:

$$w^{(n)} + w^{n+1} + P_n(w, w', \dots, w^{(n-1)}) = 0, \quad (7)$$

где P_n – полином от $w, w', \dots, w^{(n-1)}$ степени n вида

$$P_n(w, w', \dots, w^{(n-1)}) = \sum_{k_{0 \leq n-1 \langle k \rangle = n+1}} a_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}} w^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(n-1)})^{k_{n-1}}, \quad (8)$$

$a_{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}$ – константы, через k обозначен мульти индекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ с нормой

$$\langle k \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)k_p. \quad (9)$$

Доказательство. Осуществим доказательство теоремы методом математической индукции по n -порядку дифференциального уравнения (1). Для случая $n = 2$ первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое уравнения (4) представляет собой полином $P_2 = 3ww'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома, входящего в P_2 , равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$, т.е. $n + 1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m$, докажем её истинность при $n = m + 1$. При $n = m + 1$ из формул (1) и (7) получим

$$\begin{aligned} D_R^{m+1} w &= \left(\frac{d}{dz} + w \right) \left(w^{(m)} + w^{m+1} + P_m(w, w', \dots, w^{(m-1)}) \right) = \\ &= w^{(m+1)} + w^{m+2} + ww^{(m)} + (m+1)w^m w' + wP_m + P_m'. \end{aligned} \quad (10)$$

Первые два слагаемые из (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m + 1$. Остаётся показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1} . Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формуле (9), равна $1 \cdot 1 + (m+1) \cdot 1 = m+2 = (m+1) + 1$, т.е. третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы входящие в полином P_{m+1} . Четвёртое слагаемое имеет норму $1 \cdot m + (1+1) \cdot 1 = m+2 = (m+1) + 1$, а значит, также подходит.

Слагаемое wP_m' имеет мономы с нормой мультииндекса равной $1 \cdot (k_0 + 1) + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot k_m = 1 + 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot k_m = 1 + \langle k \rangle = 1 + (m+1)$, т.е. удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома P_m' также удовлетворяют требованию индукции. Среди мономов полинома P_m' присутствуют два различных типа:

$$k_j a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} w^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(j)})^{k_{j-1}} (w^{(j+1)})^{k_{j+1}+1} \dots (w^{(m-1)})^{k_{m-1}}, \quad j=0, \dots, m-2, \quad (11)$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} (w)^{k_0} (w')^{k_1} \dots (w^{(m-1)})^{k_{m-1}-1} w^{(m)}. \quad (12)$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11); она равна

$$\begin{aligned} &1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + (j+1) \cdot (k_j - 1) + (j+2) \cdot (k_{j+1} + 1) + \dots + m \cdot k_{m-1} = \\ &= 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + (j+1) \cdot k_j + (j+2) \cdot k_{j+1} + \dots + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1. \end{aligned}$$

Остаётся найти норму мультииндекса монома из формулы (12); она равна

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot (k_{m-1} - 1) + (m+1) \cdot 1 = 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0 . Из условия $\langle k \rangle = m+2$ теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1} , получаем

$k_0 = m+2 - 2 \cdot k_1 - \dots - (m+1) \cdot k_m$; так как целые $k_j \geq 0$, то отсюда следует, что максимально возможное значение $k_0 = m+2$. Но моном с мультииндексом $k = (m+2, 0, \dots, 0)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), т.е. в полином P_{m+1} не входит. Значит,

ние $k_0 = m + 1$ в принципе невозможно, так как не существует мультииндекса k , удовлетворяющего условию $\langle k \rangle = m + 2$. Таким образом, максимальное значение $k_0 = m = (m + 1) - 1$. Теорема доказана.

Лемма. Если решение уравнения (1) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведём замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются $w^{(n)}$, слагаемые полинома (8) и, возможно, слагаемое w^{n+1} . В первом случае имеем $q + n = qk_0 + (q + 1)k_1 + \dots + (q + n - 1)k_{n-1}$, или $q + n = (q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2}) + \langle k \rangle$. Так как $\langle k \rangle = n + 1$, то имеем $(q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = n + 1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае получаем условие $q + n = q(n + 1)$. Откуда находим $q = 1$.

Покажем, что существует $c_0 \neq 0$. Подставим в формулу (1) $w \sim c_0 (z - z_0)^{-1}$. Пусть $D_R^n w \sim S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+1)}$. Тогда

$$D_R^{n+1} w = D_R(D_R^n w) \sim D_R(S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+1)}) = S_n(c_0)(-(n+1))(z - z_0)^{-(n+2)} + c_0 S_n(c_0)(z - z_0)^{-(n+2)} - S_n(c_0)(c_0 - n - 1)(z - z_0)^{-(n+2)}.$$

Значит, $S_n(c_0)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению с

$$S_{n+1}(c_0) = (c_0 - n - 1)S_n(c_0), S_1(c_0) = c_0(c_0 - 1). \tag{13}$$

Из (13) находим условие на c_0 :

$$\prod_{j=0}^n (c_0 - j) = 0 \tag{14}$$

Очевидно, что в (14) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

2. Исследование решений уравнений иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса

Получение уравнений иерархии Риккати в случае $n \geq 5$ в силу формул (1) и (2) сводится к нахождению производной от полинома и не представляет технической сложности.

Получим рекуррентное соотношение на резонансный многочлен уравнений иерархии Риккати. Для этого в формулу (1) подставим $w \sim c_0 t^{-1} + \beta t^{r-1}$, получим $D_R^n w \sim S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r)t^{r-n-1}$. Тогда

$$D_R^{n+1} w = \left(\frac{d}{dz} + w \right) D_R^n(w) \sim \left(\frac{d}{dz} + c_0 t^{-1} + \beta t^{(r-1)} \right) (S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0, r)t^{r-n-1}) = (c_0 - n - 1)S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta (S_n(c_0) + (r - n - 1 + c_0)R_n(c_0, r))t^{r-n-2}$$

Это с одной стороны, а с другой — $D_R^{n+1} w \sim S_{n+1}(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_{n+1}(c_0, r)t^{r-n-2}$, т.е.

$$R_{n+1}(c_0, r) = S_n(c_0) + (r - n - 1 + c_0)R_n(c_0, r) \tag{15}$$

Теорема 2. Резонансный многочлен уравнений иерархии Риккати имеет вид

$$R_n(c_0, r) = \prod_{j=1}^n (r + j) \prod_{s=1}^{n-m} (r - s). \tag{16}$$

Доказательство. В зависимости от c_0 можно убедиться, например, с помощью пакета символьных вычислений Maple 9, что рекуррентному соотношению (15) удовлетворяет многочлен (16). Так как при фиксированном c_0 резонансный многочлен дифференциального уравнения единственный, то указанный и есть искомым. Теорема доказана.

Таким образом, все резонансы, соответствующие паре $(c_0, 1)$, являются целыми и однократными. Количество положительных равно $n - m$.

Для определения номеров коэффициентов c_j , которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-1}, \text{ где } t = z - z_0, z_0 \in C,$$

требуется выписать корни многочлена (16).

Исследуем уравнение (4). В окрестности особой точки z_0 уравнение (4) имеет вид:

$$w'' + w^3 + 3ww' = 0,$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем $R_2(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)$. Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и один положительный $r_2 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (4), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + \dots, \quad (17)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2$, $c_3 = h_1^3$, $c_4 = -h_1^4$, $c_5 = h_1^5$, коэффициенты c_j , $j > 5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 . В силу теоремы 2 [4] ряд (17) является сходящимся.

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 2$ получаем

$$R_2(c_0, r) = (r + 1)(r + 2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$ и $r_2 = -2$. Решение, удовлетворяющее уравнению (4), имеет вид:

$$w = 2t^{-1}, \quad (18)$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (5). В окрестности особой точки z_0 уравнение (5) имеет вид:

$$w''' + w^4 + 6w^2 w' + 4w w'' + 3w'^2 = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем $R_2(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)(r - 2)$. Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и два положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots, \quad (19)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{3}{2}h_1 h_2 - \frac{1}{2}h_1^3$, коэффициенты c_j , $j > 3$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2 .

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r - 1).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и один положительный $r_3 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид:

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 + c_5 t^4 + \dots, \quad (20)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2$, $c_3 = h_1^3$, $c_4 = -h_1^4$, коэффициенты c_j , $j > 4$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В силу теоремы 2 [4] ряды (19) и (20) являются сходящимися.
В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем

$$R_3(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$. Решение, удовлетворяющее уравнению (5), имеет вид:

$$w = 3t^{-1}, \quad (21)$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (6). В окрестности особой точки z_0 уравнение (6) имеет вид:

$$w^{(4)} + w^5 + 10w^3w' + 10w^2w'' + 15ww'^2 + 5ww''' + 10w'w'' = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем:

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r - 1)(r - 2)(r - 3).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и три положительных $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \dots, \quad (22)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}h_1^4 - h_1^2h_2 - \frac{4}{3}h_1h_3 - \frac{1}{2}h_2^2$, коэффициенты $c_j, j > 4$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3 .

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r - 1)(r - 2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и два положительных $r_3 = 1$, $r_4 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + \dots, \quad (23)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{1}{2}h_1^3 - \frac{3}{2}h_1h_2$, коэффициенты $c_j, j > 3$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2 .

В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем $R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3)(r - 1)$. Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ и один положительный $r_4 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = 3t^{-1} + c_1 + c_2t + \dots, \quad (24)$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -h_1^2$, коэффициенты $c_j, j > 2$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В силу теоремы 2 [4] ряды (22) – (24) являются сходящимися.

В четвертом случае $c_0 = 4$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r + 1)(r + 2)(r + 3)(r + 4).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$. Решение, удовлетворяющее уравнению (6), имеет вид

$$w = 4t^{-1}, \quad (25)$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (1) при $n = 5$. В окрестности особой точки z_0 имеет вид

$$w^{(5)} + w^6 + 15w^4w' + 20w^3w'' + 45w^2(w')^2 + 15w^2w''' + 60ww'w'' + 6ww^{(4)} + 15(w')^3 + 15w'w''' + 10(w'')^2 = 0. \quad (26)$$

В первом случае $c_0 = 1$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2)(r-3)(r-4).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и четыре положительных $r_2 = 1, r_3 = 2, r_4 = 3, r_5 = 4$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \dots, \quad (27)$$

где $t = z - z_0, c_1 = h_1, c_2 = h_2, c_3 = h_3, c_4 = h_4, c_5 = -\frac{25}{42}h_1^2h_3 - \frac{5}{6}h_2h_3 - \frac{5}{21}h_1^3h_2 - \frac{15}{28}h_1h_2^2 - \frac{1}{84}h_1^5$,

коэффициенты $c_j, j > 5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3, h_4 .

Во втором случае $c_0 = 2$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -2$ и три положительных $r_3 = 1, r_4 = 2, r_5 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 2t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + \dots, \quad (28)$$

где $t = z - z_0, c_1 = h_1, c_2 = h_2, c_3 = h_3, c_4 = -h_1^2h_2 - \frac{1}{2}h_2^2 - \frac{1}{6}h_1^4 - \frac{4}{3}h_1h_3$,

$c_5 = -\frac{5}{6}h_2h_3 + \frac{5}{6}h_1^2h_3 + \frac{5}{6}h_1^3h_2 + \frac{1}{6}h_1^5$, коэффициенты $c_j, j > 5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3 .

В третьем случае $c_0 = 3$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = -3$ два положительных $r_4 = 1, r_5 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (23), имеет вид

$$w = 3t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + \dots, \quad (29)$$

где $t = z - z_0, c_1 = h_1, c_2 = h_2, c_3 = -\frac{3}{2}h_1h_2 - \frac{1}{2}h_1^3, c_4 = \frac{1}{2}h_1^4 + h_1^2h_2 - \frac{1}{2}h_2^2$, коэффициенты $c_j, j > 4$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2 .

В четвертом случае $c_0 = 4$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r-1).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = -3, r_4 = -4$ и один положительный $r_5 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w = 4t^{-1} + c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + \dots, \quad (30)$$

где $t = z - z_0, c_1 = h_1, c_2 = -h_1^2, c_3 = h_1^3, c_4 = -h_1^4$, коэффициенты $c_j, j > 4$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1 .

В силу теоремы 2 [4] ряды (27) – (30) являются сходящимися.

В пятом случае $c_0 = 5$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5).$$

Т.е. имеем пять отрицательных резонансов $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$, $r_5 = -5$. Решение, удовлетворяющее уравнению (23), имеет вид:

$$w = 5t^{-1}, \quad (28)$$

где $t = z - z_0$.

Заключение

В работе доказывается, что порядок подвижного полюса решения каждого уравнения иерархии Риккати равен единице; все резонансы уравнений иерархии Риккати являются целыми и однократными; у первых пяти уравнений иерархии формальные ряды Лорана содержат нужное количество произвольных постоянных; все указанные ряды Лорана являются сходящимися.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.
4. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.06.2016

Gritsuk E.V., Martinovich A.N. The Study of the Hierarchy of the Equation of Rikkati on the Painleve Property

The paper deals with the study of the hierarchy of differential Riccati equations, the resonant method. The resulting structure equations of the hierarchy, found order movable pole solutions, specified the explicit form of the resonance and the polynomial defined by its roots. For the first five equations was found the Laurent series with the desired number of arbitrary parameters.

УДК 517.944:532.546

Б.П. Довгий¹, Е.С. Вакал², Ю.Е. Вакал³¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математической физики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математической физики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

³канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. вычислительной математики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ КВАЗИНЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА**

Рассмотрена задача нелинейной оптики о распространении волн с учетом дифракции и неоднородностей среды при условии медленного изменения комплексной амплитуды волны. Математическая модель сформулирована в виде краевой задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера в цилиндрической области при нелинейности определенного вида. Задача решена методом конечных разностей с использованием сходящегося метода последовательных приближений для системы консервативных разностных уравнений. Приведены численные расчеты для различных значений параметров задачи.

Введение

При рассмотрении процесса распространения квазиплоских и квазимонохроматических волн используют приближенные уравнения, полученные из уравнений Максвелла. Для распространяющихся волновых пучков с учетом дифракции, а также неоднородностей среды, при условии медленного изменения комплексной амплитуды приходят к уравнению или системе уравнений типа Шредингера. Именно таким образом при исследовании нелинейных явлений формулируют математические модели ряда прикладных задач нелинейной оптики [1–6].

В данной статье рассмотрено численное решение краевой задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера в цилиндрической области при условии, что нелинейность обладает определенным свойством.

Постановка задачи

Пусть цилиндрическая область $\bar{G} = [0, a] \times [0, Z]$ заполнена оптически нелинейной средой со слабой дисперсией и малым поглощением (здесь a – радиус цилиндра, Z – длина области). Рассмотрим процесс распространения квазиплоской монохроматической волны в указанной среде с учетом дифракционных эффектов и осевой симметрии. Медленно изменяющаяся комплексная амплитуда волны описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i dLu + f(u)u, \quad (r, z) \in G, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad r \in [0, a], \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\frac{\partial u(0, z)}{\partial r} = 0, \quad u(a, z) = 0, \quad z \in [0, Z], \quad (3)$$

где $Lu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$, $d > 0$, i – мнимая единица.

Процессы взаимодействия волны с нелинейной средой определяются функцией $f(u)$, обладающей свойством

$$(f(u))^* = -f(u). \quad (4)$$

Покажем, что при выполнении условия (4) для задачи (1) – (3) имеет место следующий закон сохранения

$$\|u(r, z)\|^2 = \|u_0(r)\|^2 \quad \forall z \in [0, Z], \quad (5)$$

где норма определяется по формуле

$$\|v(r)\|^2 = (v, v) = 2\pi \int_0^a rv(r)v^*(r)dr. \quad (6)$$

Действительно, умножим уравнение (1) на $u^*(r, z)$, а уравнение, сопряженное уравнению (1), – на $u(r, z)$. Сложим полученные равенства, умножим результат на $2\pi r$ и проинтегрируем по r . В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dz} \|u(r, z)\|^2 = id[(Lu, u) - (u, Lu)].$$

Учитывая краевые условия (3) и самосопряженность оператора L , проведем интегрирование по z с учетом начального условия (2), в результате чего получим закон сохранения (5). Это соотношение, с физической точки зрения, говорит о неизменности энергетической характеристики – интенсивности волны (6), для произвольной точки направления распространения вдоль оси цилиндрической области.

Численное решение задачи

Для получения приближенного решения задачи (1) – (5) используем конечно-разностный метод. Область \bar{G} заменим сеточной областью с равномерной сеткой $\bar{\omega}_{h_r, h_z} = \bar{\omega}_{h_r} \times \bar{\omega}_{h_z}$, где h_r, h_z – шаги сетки по r и z соответственно,

$$\bar{\omega}_{h_r} = \{r_k = (k - 0.5)h_r, k = \overline{1, N_r}, a = (N_r - 0.5)h_r\}, \quad \bar{\omega}_{h_z} = \{z_j = jh_z, j = \overline{0, N_z}, h_z > 0\}.$$

Используя интегро-интерполяционный метод [6], задаче (1) – (3) поставим в соответствие следующую однопараметрическую нелинейную разностную схему с весом σ

$$y_{z,j} = id\Lambda Y_k + f(Y_k)Y_k, \quad k = \overline{1, N_r - 1}, \quad j = \overline{0, N_z - 1}, \quad (7)$$

$$y_k^0 = u_0(r_k), \quad k = \overline{1, N_r}, \quad (8)$$

$$y_{\bar{r},1}^{j+1} = 0, \quad y_{N_r}^{j+1} = 0, \quad j = \overline{0, N_z - 1}, \quad (9)$$

где

$$\Lambda Y_k = \frac{1}{r_k} (r_{k-0.5} Y_{\bar{r},k})_{r,k}, \quad Y_{\bar{r},k} = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{h_r}, \quad Y_{r,k} = \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h_r},$$

$$Y_k \equiv y_k^{(\sigma)} = \sigma y_k^{j+1} + (1 - \sigma) y_k^j \equiv 0.5(y_k^{j+1} + y_k^j) + (\sigma - 0.5)h_z y_{z,j}. \quad (10)$$

Несложно показать, что однопараметрическая схема (7) – (9) аппроксимирует дифференциальную задачу (1) – (3) с локальной погрешностью

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + h_z^p\right), \quad \text{где } p = \begin{cases} 2, & \sigma = 0.5, \\ 1, & 0.5 < \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Известно [7], что для однородного уравнения типа Шредингера схема с весами (7) устойчива при $0.5 \leq \sigma \leq 1$.

Теорема 1. Разностная схема (7) – (9) при $\sigma = 0.5$ полностью консервативна и устойчива.

Доказательство теоремы 1. Умножим уравнение (7) на Y_k^* , а уравнение, сопряженное уравнению (7), – на Y_k , и сложим полученные равенства. Тогда

$$y_{z,j} Y_k^* + Y_k y_{z,j}^* = id (\Lambda Y_k \cdot Y_k^* - Y_k \cdot \Lambda Y_k^*).$$

Умножим это равенство на $2\pi r_k h_r$, просуммируем по $k = \overline{1, N_r - 1}$. С учетом краевых условий (9) получим

$$2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} (y_{z,j} Y_k^* + Y_k y_{z,j}^*) r_k h_r = 0.$$

Преобразуем это равенство с учетом (10). Находим:

$$2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} \left(|y_k|^2_{z,j} + (2\sigma - 1) h_z |y_{z,j}|^2 \right) r_k h_r = 0. \quad (11)$$

Введем сеточную норму для дискретной функции v_k по формуле

$$\|v_k\|_h^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} |y_k|^2 r_k h_r. \quad (12)$$

В соотношении (11) положим $\sigma = 0.5$, далее умножим его на h_z и просуммируем по $j = \overline{0, m - 1}$. В результате получим:

$$\|y_k^m\|_h^2 = \|u_0(r_k)\|_h^2 \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Равенство (13) является разностным аналогом закона сохранения (5) и показывает, что в сеточной норме (12) разностная схема (7) – (9) безусловно устойчива при $\sigma = 0.5$.

Учитывая оценку для локальной погрешности и соотношение (13), несложно показать, что решение разностной задачи (7) – (9) сходится к решению дифференциальной задачи (1) – (3) в сеточной норме $\|\cdot\|_h$ со скоростью $O(h_z^2 + h_r^2 \sqrt{\ln(h_r^{-1})})$.

Для решения нелинейной разностной задачи (7) – (9) на слое $j + 1$ будем использовать итерационный метод последовательных приближений [6]:

$$\frac{\hat{y}_k^{(s)} - y_k}{h_z} = D \left(\Lambda \hat{y}_k^{(s)} + \Lambda y_k \right) + f \left(Y_k^{(s-1)} \right) Y_k^{(s-1)},$$

$$D = id / 2, \quad Y_k^{(s-1)} = 0.5 \left(\hat{y}_k^{(s-1)} + y_k \right), \quad \hat{y}_k \equiv y_k^{j+1}, \quad k = \overline{1, N_r - 1}, \quad (14)$$

$$\hat{y}_{\bar{r},1}^{(s)} = 0, \quad \hat{y}_{N_r}^{(s)} = 0, \quad s = 0, 1, \dots,$$

$$\hat{y}_k^{(0)} = y_k^j, \quad k = \overline{1, N_r},$$

с условием окончания $\left(\max_k \left| \hat{y}_k^{(s)} - \hat{y}_k^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon \right) \vee (s > S_{\max})$, где $\varepsilon > 0$ – заданная точность,

S_{\max} – максимальное число итераций.

На каждом шаге s процесса (14) система линейных уравнений решается устойчивым методом монотонной прогонки с комплекснозначными коэффициентами.

Для реализации полученных алгоритмов разработано программное обеспечение с использованием системы компьютерной математики MATLAB [8].

Результаты численных расчетов

Для иллюстрации эффективности разработанных алгоритмов применим их к решению некоторой прикладной задачи нелинейной оптики. С этой целью исследуем влияние дифракционного параметра d на распространение волны в нелинейной среде,

которая моделируется функцией $f(u) = \frac{i\gamma|u|^2}{\alpha + \beta|u|^2}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in R$), а на входе в нелинейную

среду задается плоский гауссов пучок $u_0(r) = A \exp(-Br^2)$.

Рассмотрим следующие варианты: $d = 0.005, d = 0.05, d = 0.5$ при $\gamma = 0.3$, $\alpha, \beta = 1, A = 1.7 + 1i, B = 50, a = 1, N_r = 100, h_z = 0.01, Z = 20, \varepsilon = 10^{-8}, S_{\max} = 2 \cdot 10^4$.

На рисунках 1–3 приведены результаты расчета в виде графиков распределения $|u(r, z)|$ для $z = 0, Z/2, Z$ при $d = 0.005, 0.05, 0.5$. На рисунке 4 представлена зависимость от d величины $|u(r, Z)|$. На рисунке 5 представлена зависимость $|u(r, z)|$ при $d = 0.005$. Изменение энергетической характеристики решения (12) вдоль оси z при $d = 0.005$ по отношению к значению $\|u_0(r_k)\|_h^2$ показано на рисунке 6.

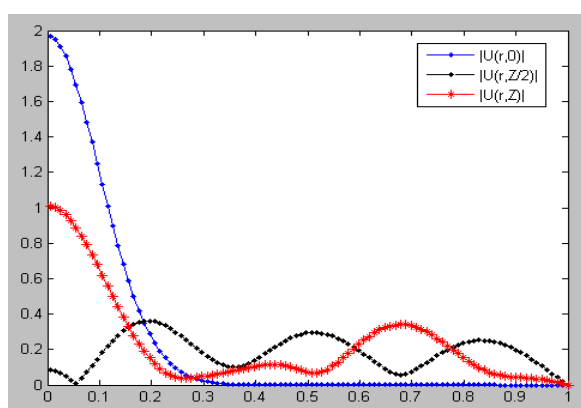


Рисунок 1.

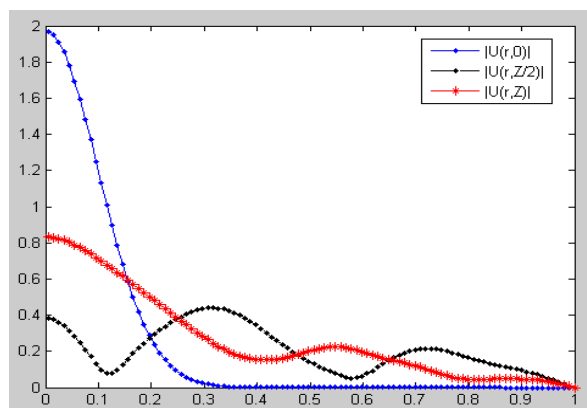


Рисунок 2.

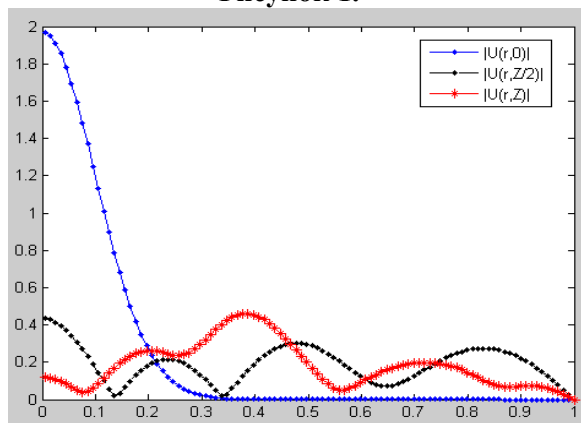


Рисунок 3.

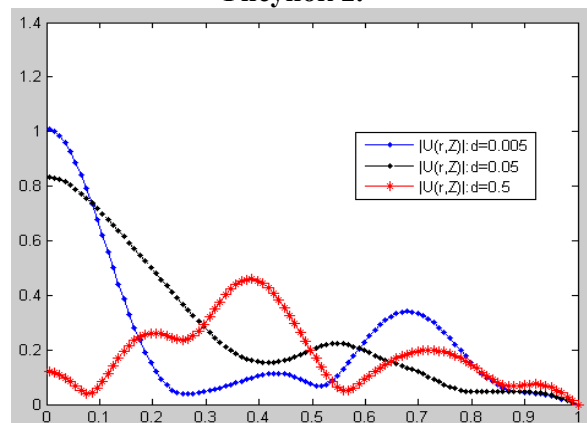


Рисунок 4.

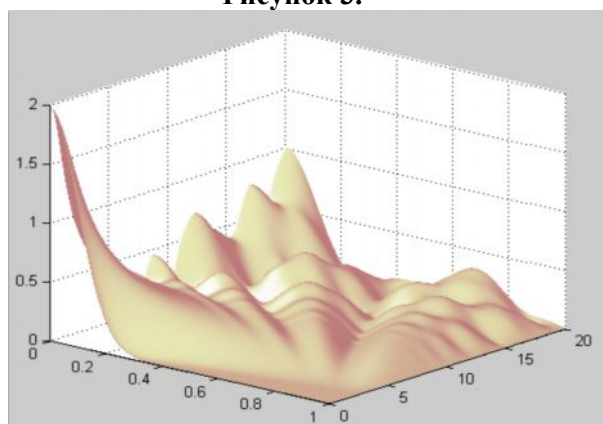


Рисунок 5.

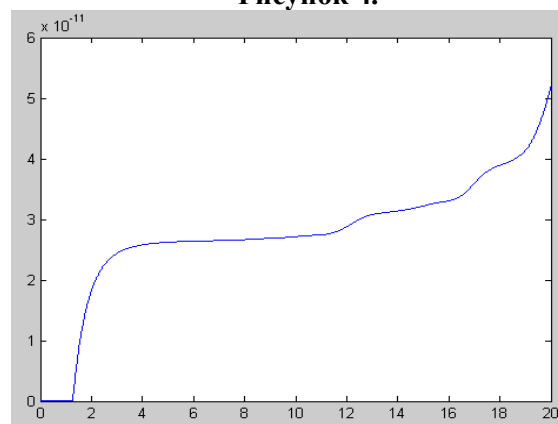


Рисунок 6.

Заклучение

Полученные в работе результаты соответствуют характерному поведению решения дифференциальной задачи, а выполнение закона сохранения с точностью не хуже погрешности аппроксимации свидетельствует о практической надежности предложенной методики для решения такого класса задач. Использованное в данной работе программное обеспечение на основе системы компьютерной математики MATLAB [8] может быть применено (с соответствующей модификацией) для получения численных решений других краевых задач математической физики, в которых имеют место законы сохранения, например, для системы уравнений распространения импульса в двухуровневой среде без диссипации, почти периодические и солитонные решения которой получены в [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов, С. А. Проблемы нелинейной оптики. 1961–1963. (Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах) / С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. – М. : ВИНТИ, 1965. – 298 с.
2. Луговой, В. И. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде / В. И. Луговой, А. М. Прохоров // Успехи физ. наук. – 1973. – Т. 111, вып. 2. – С. 203–247.
3. Насибов, Ш. М. Об одном нелинейном уравнении типа Шредингера / Ш. М. Насибов // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 660–670.
4. Gajewski, H. On an Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equation / H. Gajewski // Int. J. Math. Math. Sc. – 1979. – VI. 2, № 3. – P. 503–531.
5. Довгий, Б. П. Математические модели внутрирезонаторного преобразования частот в нелинейной оптике и их реализация на ЭВМ / Б. П. Довгий // Вычисл. и приклад. математика. – 1990. – Вып. 70. – С. 61–67.
6. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Обратная периодическая задача для дискретного приближения нелинейного уравнения Шредингера / Н. Н. Боголюбов, А. К. Прикарпатский // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 262, № 5. – С. 1103–1108.
7. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
8. Применение математического пакета MATLAB для решения прикладных задач : учеб. пособие / Е. С. Вакал [и др.]. – Киев : Украин. фитосоциоцентр, 2012. – 78 с.
9. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Точные почти периодические и солитонные решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации / Н. Н. Боголюбов, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 4. – С. 5–9.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 08.06.2016

Dovgiy B.P., Vakal E.S., Vakal Y.E. Numerical Solution of the Axisymmetric Boundary Value Problem for Quasi Nonlinear Schrödinger-Type Equation

A nonlinear optics problem on wave propagation taking into account diffraction and medium heterogeneity under condition of slow change of the complex wave amplitude is considered. The mathematical model is formulated as a boundary value problem for quasi nonlinear Schrödinger-type equation in a cylindrical domain with a certain type of nonlinearity. The problem is solved by the finite difference method using convergent successive approximations method for systems of conservative difference equations. Numerical calculations for different values parameters of the problem are given.

УДК 513.82

А.Ф. Завадский¹, А.А. Юдов²¹магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
²канд. физ.-мат. наук,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4 . Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k -плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп Ли преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и др. В данной работе исследуется группа Ли движений четырехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство, т.е. пространство R_4 . Пусть G – группа Ли движений пространства R_4 , H – группа Ли вращений пространства R_4 , \bar{G} – алгебра Ли группы Ли G , \bar{H} – алгебра Ли группы Ли H .

Рассмотрим в пространстве R_4 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$$\bar{e}_1^2 = \bar{e}_2^2 = \bar{e}_3^2 = \bar{e}_4^2 = 1, (\bar{e}_i = \bar{e}_j) = 0, i \neq j.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H вращений пространства R_4 и группы T_4 параллельных переносов этого пространства: $G = H * T_4$. Алгебра Ли \bar{G} является прямой суммой алгебр Ли \bar{H} и τ_4 , где τ_4 алгебра Ли группы Ли T_4 : $\bar{G} = \bar{H} \oplus \tau_4$. Для векторов пространства \bar{H} определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором. Операция коммутирования в алгебре Ли \bar{G} определяется по правилу

$$[A, B] = AB - BA, \quad (1)$$

где $A, B \in \bar{G}$.

Рассмотрим в алгебре Ли \bar{G} базис:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} - E_{32}, i_6 = E_{24} - E_{42}, i_7 = E_{25} - E_{52}, i_8 = E_{34} - E_{43}, \\ i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) – матрицы, у которых в α -й строке, β -м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ задают базис алгебры Ли \bar{H} группы Ли H вращений пространства R_4 .

Получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$. Согласно формуле (1), получаем:

$$\begin{aligned} [i_5, i_6] &= -i_8, & [i_6, i_7] &= -i_{10}, & [i_7, i_9] &= -i_5, \\ [i_5, i_7] &= -i_9, & [i_6, i_8] &= -i_5, & [i_7, i_{10}] &= -i_6, \\ [i_5, i_8] &= i_6, & [i_6, i_9] &= 0, & [i_8, i_9] &= -i_{10}, \\ [i_5, i_9] &= i_7, & [i_6, i_{10}] &= i_7, & [i_8, i_{10}] &= i_9, \\ [i_5, i_{10}] &= 0, & [i_7, i_8] &= 0, & [i_9, i_{10}] &= -i_8. \end{aligned}$$

Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли \overline{G}_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot c$, где c – любое из \overline{G}_i . В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса \overline{G}_i .

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b,$$

$$b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b.$$

Все подгруппы Ли группы Ли G классифицированы. С точностью до сопряженности существует 6 подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 : $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, которые соответствуют алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$, задаваемых соответственно базисами: $\overline{G}_1 = \{i_5\}, \overline{G}_2 = \{i_5 + \omega i_{10}\}, \overline{G}_3 = \{i_5, i_{10}\}, \overline{G}_4 = \{i_8, i_9, i_{10}\}, \overline{G}_5 = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 - \lambda i_9\}, \overline{G}_6 = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$.

В данной работе для каждой из групп $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ находятся все инвариантные одно-, дву- и трехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости и 3-плоскости.

Рассмотрим группу G_1 . Найдем одномерные инвариантные подпространства.

Условие инвариантности имеет вид:

$$a \cdot i_5 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot i_5 = (-a_2, a_1, 0, 0) = \mu \cdot a.$$

Отсюда следует система

$$\begin{cases} -a_2 = \mu a_1, \\ a_1 = \mu a_2, \\ 0 = \mu a_3, \\ 0 = \mu a_4 \end{cases}$$

Из первого и второго уравнения системы следует:

$$-a_2 = \mu^2 a_2.$$

Решая данную систему, можно сделать вывод, что при $\mu = 0$ получим: $a_1 = 0, a_2 = 0$.

Значит, инвариантные подпространства имеют вид: $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$

При $\mu \neq 0$ получим $a_3 = 0, a_4 = 0$. Из первого и второго уравнения системы следует: $-a_2 = \mu^2 a_2$. Значит, $a_2 = 0$, иначе $\mu^2 = -1$, что является противоречием. А если $a_2 = 0$, то и $a_1 = 0$, а значит, ненулевых решений нет.

Таким образом, инвариантные подпространства относительно оператора i_5 имеют вид $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора i_5 .

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_5 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \\ b \cdot i_5 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b \end{cases}$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1; & -b_2 = \nu \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1; \\ a_1 = \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2; & b_1 = \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2; \\ 0 = \lambda \cdot a_3 + \mu \cdot b_3; & 0 = \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3; \\ 0 = \lambda \cdot a_4 + \mu \cdot b_4; & 0 = \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4. \end{cases}$$

Для решения данной системы достаточно рассмотреть 6 случаев:

$$\begin{aligned} 1^0: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, & 4^0: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \\ 2^0: & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, & 5^0: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3^0: & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & 6^0: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 1^0 . Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & -1 = \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 \\ 0 = \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \gamma & 0 = \nu \cdot \alpha + \sigma \cdot \gamma \\ 0 = \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \delta & 0 = \nu \cdot \beta + \sigma \cdot \delta \end{cases}$$

Решая данную систему, получим $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$. Значит, инвариантным двумерным подпространством для случая 1^0 является $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Аналогичным способом находим двумерные инварианты для случаев $2^0 - 6^0$. Получаем, что для случая 2^0 – система противоречива, для случая 3^0 – система противоречива, для случая 4^0 – система противоречива, для случая 5^0 – система противоречива, для случая 6^0 – инвариантным двумерным подпространством является $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$.

Трехмерными инвариантными подпространствами для группы Ли G_1 являются подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\mu \bar{e}_3 + \lambda \bar{e}_4\}$, которые являются ортогональным дополнением к одномерным подпространствам $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$.

Находя таким образом инвариантные подпространства относительно остальных подгрупп Ли, получим следующие теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные подпространства $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ и следующие трехмерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\mu \bar{e}_3 + \lambda \bar{e}_4\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + \lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4, \bar{e}_2 + \mu \bar{e}_3 - \lambda \bar{e}_4\}$,

$\{\overline{e_1 + \lambda e_3 + \mu e_4}, \overline{e_2 - \mu e_3 + \lambda e_4}\}$, $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 3. Относительно группы G_3 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только одномерные подпространства $\{\overline{e_1}\}$ и следующее трехмерное подпространство $\{\overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, инвариантных двумерных подпространств не существует.

Теорема 5. Относительно группы G_5 нет инвариантных одномерных, двумерных и трехмерных подпространств.

Теорема 6. Относительно группы G_6 нет одномерных инвариантных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Образы стационарности групп Ли

Рассмотрим группу $G_1 = \{i_5\}$, где

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{\lambda \overline{e_3} + \mu \overline{e_4}\}$ и следующие двумерные пространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$.

Зафиксируем $\overline{e_4}$. Рассмотрим вектор $(0,0,0,1)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(0,0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (\gamma, -\varepsilon, -\omega, 0) = \lambda \cdot \overline{e_4} = (0,0,0,\lambda).$$

Из этого следует, что $\gamma = 0, \varepsilon = 0, \omega = 0$.

Зафиксируем $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор $(0,0,1,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен

$$(0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (\beta, -\delta, 0, \omega) = \mu \cdot \overline{e_3} = (0,0,\mu,0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \delta = 0, \omega = 0$.

Таким образом, если зафиксировать плоскость $[0, \overline{e_3}, \overline{e_4}]$ как точно-неподвижную, то определяется оператор i_5 . Это значит, что образом стационарности подгруппы

Ли G_1 является точечно-неподвижная плоскость R_2^0 (значок 0 означает точечно-неподвижную плоскость).

Получим теорему.

Теорема 7. Образом стационарности для подгруппы Ли G_1 является флаг $\left\{O, R_2^0\right\}$.

Аналогичным способом находим образы стационарности для подгрупп Ли $G_2 - G_6$.

Теорема 8. Среди подгрупп Ли $G_1 - G_6$ образы стационарности имеют только следующие подгруппы: G_1, G_3, G_6 . Причем образ стационарности подгруппы Ли G_1 – точечно-неподвижная евклидова плоскость R_2 , т.е. флаг $\left\{O, R_2^0\right\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_3 – инвариантная евклидова двумерная плоскость с фиксированной точкой на ней, т.е. флаг $\left\{O, R_2\right\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_4 – инвариантная евклидова прямая с фиксированной точкой на ней, т.е. образ стационарности флаг $\left\{O, R_1\right\}$.

Замечание 1. Все инвариантные трехмерные подпространства R_4 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам.

Замечание 2. Каждому инвариантному подпространству $\left\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\right\}$ соответствует инвариантная k -плоскость: $\left[O, \alpha_1, \dots, \alpha_k\right]$ и обратно. Таким образом, теоремы 1–6 дают классификацию всех инвариантных прямых и k -плоскостей пространства R_4 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 59–77.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли / И. В. Белько, А. С. Феденько // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 6. – С. 393–395.
3. Зубей, Е. В. Геометрические характеристики связных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского / Е. В. Зубей, А. А. Юдов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 52–59.
4. Юдов, А. А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движения пространства R_4^2 / А. А. Юдов, Е. Е. Гурская // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 35–41.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2016

Zavadski A.F., Judov A.A. Invariant Characteristics of Subgroup Li of group Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space

The work is devoted to the study of the properties of a subgroup of the Lie group of motions of three-dimensional Euclidean space R_4 . For all subgroups of the Lie group of rotations of R_4 are all invariant subspaces invariant and all direct and k -plane.

УДК 517+518.948

В.М. Мадорский

канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**К ВОПРОСУ О РЯДЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ**

Для решения нелинейных уравнений с гладким оператором в статье рассматривается ряд полу-локальных квазиньютоновских итерационных процессов, локально сходящихся с квадратичной скоростью. Доказывается сходимость целого семейства таких процессов неполного и полного прогнозов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

с нелинейным гладким оператором f . Относительно f полагаем, что

$$f \in C_D^{(2)}, \|f'(x)\| \leq K, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B, \forall x \in D, \quad (2)$$

здесь $f'(x), f''(x)$, соответственно, первые и вторые производные оператора f , $[f'(x)]^{-1}$ – оператор, обратный оператору $f'(x)$.

Для решения уравнения (1) применим следующий нерегуляризованный итерационный процесс.

Шаг 1. Решаем СЛАУ относительно Δx_n .

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Шаг 2. Уточняем вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (4)$$

Шаг 3. Проверяем окончание итерационного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$, ($\varepsilon \ll 1$ – параметр останова), то выход из просчетов, иначе переход наШаг 4. Производится пересчет итерационного параметра β_n по одной из формул

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}\right), p = 1, 2, \quad (5)$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}\right), p = 1, 2,$$

γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение $\beta_n \|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^p$ и осуществляется переход на Шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_n)\|^p}$, $\gamma_0 = \beta_0^2, \|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса (3)–(5) используем теорему о среднем для гладких операторов.

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0,5K\|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (6)$$

Пусть $p = 1$, тогда с учетом (2) и (3) имеем из (6)

$$\begin{aligned}
\|f(x_{n+1})\| &\leq (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + 0.5KB^2\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 = \\
&= (1 - \beta_n(1 - 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|))\|f(x_n)\| = \\
&= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \\
\varepsilon_n &= 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n), n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

В связи со свойством (5) все ε_i одинаковы. Пусть x_k, β_k таковы, что $\varepsilon_k = 0.5KB^2\beta_k\|f(x_k)\| < 1$, тогда все $\varepsilon_i < 1$, для $i \geq k$. Из (7) имеем: $\|f(x_{k+1})\| \leq q_k\|f(x_k)\| < \|f(x_k)\|$, а из (5) имеем, что $\beta_k\|f(x_k)\| = \beta_{k+1}\|f(x_{k+1})\|$.

Сравнение двух последних неравенств позволяет утверждать, что $\beta_{k+1} > \beta_k$, в связи с чем $q_{k+1} = 1 - \beta_{k+1}(1 - \varepsilon_{k+1}) = 1 - \beta_{k+1}(1 - \varepsilon_k) < q_k$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность итерационных параметров монотонно возрастает ($\beta_i \nearrow 1$), а последовательность q_i монотонно убывает ($q_i \searrow 0$).

Переходя к пределу в (7) при $n \rightarrow \infty$, имеем, что последовательность элементов x_n , генерируемых итерационным процессом (3) – (5), сходится к решению уравнения (1), если такое решение в области D существует.

Из (5) и (7), переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{i+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_i\|f(x_i)\|}{\|f(x_{i+1})\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0\|f(x_0)\|}{\prod_0^n q_i\|f(x_0)\|} = +\infty. \tag{8}$$

С учетом (5), (8), существует такой номер k , что для $i \geq k$ все $\beta_i := 1$.

Таким образом, в процессе счета наступает момент, когда процесс (3) – (5) переходит в метод Ньютона с характерной для метода Ньютона локальной квадратичной скоростью сходимости.

Стандартным образом легко находится сфера $S(x_k, r) \subset D$, где имеют место условия (2).

Теорема 1. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге итерационного процесса (3) – (5) $\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\| < 1$. Тогда процесс (3) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Пусть $p = 2$. Тогда вместо СЛАУ (3) решается СЛАУ.

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n}f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3a}$$

а условие $\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|$ заменяется на условие $\bar{\varepsilon}_k = 0.5KB^2\sqrt{\beta_k}\|f(x_k)\| < 1$.

Теорема 2. Пусть в области D существует решение x^* уравнения (1), оператор f удовлетворяет условиям (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса $\bar{\varepsilon}_k < 1$. Тогда итерационный процесс (3a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Основным слабым местом рассмотренных выше алгоритмов является требование обратимости оператора $f'(x)$ в области D. Для снятия этого достаточно обременительного условия вводим частичную регуляризацию, рассмотрев при $p = 1$ на шаге 1 СЛАУ

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

$\alpha \ll 1, E$ – единичный оператор.

Пусть

$$\|[\alpha\beta_n \|f(x_n)\|E + f'(x_n)]^{-1}\| \leq B. \quad (10)$$

Применяя теорему о среднем для гладких операторов, имеем с учетом (9), (10):

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \\ &+ 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + \\ &+ \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 B + 0.5KB^2 \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 = \\ &= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \\ \varepsilon_n &= (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_n \|f(x_n)\|, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует при использовании метода математической индукции сходимость последовательности элементов, определяемых процессом (9), (4), (5), к решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Проводя рассуждения, вполне аналогичные тем, которые имели место при доказательстве теоремы 1, нетрудно сформулировать и доказать теорему 3.

Теорема 3. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9), (4) – (5) $\varepsilon_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_k \|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Пусть $p = 2$. Тогда на шаге 1 решается СЛАУ

$$(\alpha\beta_n \|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n - \sqrt{\beta_n} f(x_n) = 0. \quad (9a)$$

В этом случае справедлива

Теорема 4. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9a), (4) – (5) $\bar{\varepsilon}_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\sqrt{\beta_k} \|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Достаточно эффективными являются итерационные процессы, в которых шаговая длина на шаге 4 определяется следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|^p \gamma_n}{\beta_n \|f(x_n + \Delta x_n)\|^p}\right), p = 1, 2, \quad (12)$$

где $\gamma_0 = \beta_0^2$ и γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta_n \|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^p,$$

после чего, как обычно, осуществляется переход на шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу

$$\gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|^p \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|^p \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_n + \Delta x_n)\|^p \|f(x_{n+2})\|^p}, \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0 + \Delta x_0)\|^p}{\|f(x_1)\|^p}.$$

Пусть $p = 1$.

Теорема 5. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k итерационного процесса (3), (4), (12) $\varepsilon_k = 0.5KB^2 \beta_k \|f(x_k)\| < 1$. Тогда процесс (3), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Доказательство теоремы 5 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $p = 2$. Тогда может быть сформулирована

Теорема 6. Пусть в области D существует решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса (3а), (4), (12) справедливо соотношение $\varepsilon_k = 0.5KB^2\sqrt{\beta_k} \|f(x_k)\| < 1$.

Тогда процесс (3а), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

К числу эффективных полулокальных квазиньютоновских итерационных процессов можно отнести следующие итерационные процессы, в которых на шаге 1 решаются системы 3а для нерегуляризованных процессов с шаговыми длинами

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\beta_n \|f(x_n)\|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

или с шаговыми длинами вида

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_{n-1})\| \gamma_n}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_{n-1})\| \|f(x_{n+1})\| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_{n+2})\| \|f(x_n)\|}, \gamma_0 = \beta_0^2, \|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|.$$

Для частично регуляризованных процессов на шаге 1 рассматривается СЛАУ вида (9а).

Ряд других способов введения шаговых длин для квазиньютоновских методов приводится в работах [1; 3–9].

Замечание 1. Поскольку направление $f'(x_n)$ градиентно согласовано с векторами x_n , определяемыми выше итерационными процессами, непременно существует такой номер k , что $\varepsilon_k < 1$ и $\overline{\varepsilon_k} < 1$ [2].

Замечание 2. Условия (2), содержащие глобальные константы B и K , в процессе счёта не используются. Важен лишь факт их существования.

Замечание 3. Частный случай рассмотренного выше алгоритма при $p = 1$ и $\gamma_n = \beta_n^2$ рассмотрен в работе [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
3. Мадорский, В. М. О регуляризованных методах с обратной связью для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 5. – С. 80–91.
4. Мадорский, В. М. Сравнительный анализ эффективности некоторых квазиньютоновских процессов при решении периодических краевых задач / В. М. Мадорский, А. В. Кот // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 64–68.
5. Мадорский, В. М. О регуляризованных квазиньютоновских процессах для решения нелинейных задач / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 69–72.
6. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 11. – С. 96–103.

7. Мадорский, В. М. Гибридизация при решении нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 125–129.
8. Мадорский, В. М. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач / В. М. Мадорский, Н. Н. Стрилец // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 130–132.
9. Мадорский, В. М. Об одном нелокальном итерационном процессе для решения задачи Дуффинга / В. М. Мадорский, А. П. Кондратюк // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – С. 91–93.
10. Приближённые решения операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 455 с.
11. Жанлав, Т. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И. В. Пузынин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 146–156.
12. Ермаков, В. В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона / В. В. Ермаков, Н. Н. Калиткин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1981. – Т. 21, № 2. – С. 491–497.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2016

Madorskiy V.M. To the Problem of Some Quasi-Newton Method for Solving Nonlinear Equations with Smooth Operator

To solve nonlinear equations with a smooth operator in the article deals with a number semilocal quasi-Newton iterative processes converging locally at a quadratic rate. The convergence of a whole family of such processes is incomplete and full forecasts to the "bad" initial approximation.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

канд. физ.-мат. наук, доц.,

зав. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ
ЗАДАЧ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА**

В гильбертовом пространстве для решения некорректных уравнений первого рода с положительно определённым ограниченным самосопряжённым оператором предлагается явный итерационный метод с попеременно чередующимся шагом. Исследована сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства, при этом для получения априорных оценок погрешности не требуется знания истокорпредставимости точного решения. Получены достаточные условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость итерационного метода в обычной норме гильбертова пространства. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

Введение

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным шагом [1–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (1)$$

зависит от итерационного шага, и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы итерационный шаг был как можно большим. Однако на этот шаг накладываются ограничения сверху $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$. Возникла идея попытаться ослабить эти

ограничения. Это удалось сделать, выбирая для шага два значения α и β попеременно, где β уже не обязательно удовлетворять прежним требованиям.

В данной статье исследуется сходимость предлагаемого явного итерационного метода с попеременно чередующимся шагом в случае единственного решения некорректного уравнения в энергетической норме гильбертова пространства.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (2)$$

где A – положительно определённый ограниченный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (2) имеет единственное решение x . Для отыскания этого решения применим явную схему метода итераций с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Здесь E – единичный оператор. В случае приближённой правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ соответствующие методу (3) итерации примут вид:

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Далее, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем вы-

боре n и достаточно малых δ . Иными словами, итерационный метод (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ [7]. Далее будем считать, что $\|A\| = 1$.

2. Сходимость метода в случае априорного и апостериорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства

Методы (3) и (4) были рассмотрены в работе [7], в которой изучена сходимость обоих методов в исходной норме гильбертова пространства. Для их сходимости в [7] требуется, чтобы при $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$ было

$$|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1 \quad (5)$$

для любого $\lambda \in (0, 1]$. Условие (5) равносильно совокупности двух условий

$$(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta, \quad (6)$$

$$\alpha\beta < \alpha + \beta. \quad (7)$$

Для метода (4) изучен априорный выбор числа итераций. Доказано, что итерационный процесс (4) сходится при условиях (6), (7) и $0 < \alpha < 2$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. В предположении, что точное решение x является истокообразно представимым, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$ и при условиях $0 < \alpha < 2$, (6),

$$\alpha + \beta < \frac{3}{2} \alpha\beta, \quad (8)$$

$$\frac{1}{16} + \alpha\beta \leq \alpha + \beta. \quad (9)$$

Получена следующая оценка погрешности метода (4) (см. [7]):

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [n(\alpha + \beta)]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2} (\alpha + \beta) \delta. \quad (10)$$

Для нахождения оптимальной по n оценки погрешности производную по n от правой части неравенства (10) приравняем к нулю. Тогда оптимальная по n оценка погрешности имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + s) 2^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{-1} 2^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка для метода (4) при неточности в правой части уравнения оказывается такой же, как и оценка для метода простой итерации (1). Следовательно, метод (4) не даёт преимуществ в мажорантных оценках по сравнению с методом простой итерации (1). Но он даёт выигрыш в следующем. В методе простой итерации с постоянным шагом (1) $0 < \alpha \leq \frac{5}{4}$, а в методе (4) $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 4$ (см. [7]). Значит, выбирая α и β попеременно соответствующим образом можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (4) примерно втрое меньшим, чем в методе итераций с постоянным шагом (1). Т.е., используя метод (4), для достижения оптимальной точности достаточно сделать итераций в три раза меньше, чем используя метод (1).

В статье [8] для предлагаемого метода при решении уравнения (2) с точным оператором и приближённой правой частью доказана сходимость, получены оценка погрешности и оценка для момента останова в случае апостериорного выбора числа итераций. Справедливы

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ (m – чётное) в методе (4) выбирается по правилу останова по малости невязки $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, ($n < m$), $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = b\delta$, $b > 1$, тогда $x_{m(\delta),\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки $m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$, $\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta}{2} \left\{ 2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta$.

Также в [8] для метода (3) изучен случай неединственного решения уравнения (2): доказана сходимость приближений (3) к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства при приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$, и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (11)$$

По индукции нетрудно показать [7], что $x_n = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m] y$, где l, m – натуральные показатели и $l + m = n$, $l = m = \frac{n}{2}$ или $l = m + 1$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (11) в виде

$$x - x_n = A^{-1} y - A^{-1} [E - (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m] y = (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x.$$

Как было показано в [7] $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряжённого оператора A имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_A^2 &= (A(x - x_n), x - x_n) = (A(E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x, (E - \alpha A)^l (E - \beta A)^m x) = \\ &= (A(E - \alpha A)^{2l} (E - \beta A)^{2m} x, x) = \int_0^1 \lambda (1 - \alpha\lambda)^{2l} (1 - \beta\lambda)^{2m} d(E_\lambda x, x), \end{aligned}$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

В дальнейшем, для простоты, считаем, что $l = m = \frac{n}{2}$ ($n = 2p$, $p \in N$). Для оценки интересующей нас нормы найдём при $\lambda \in [0, 1]$ максимум подынтегральной функции $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2l} (1 - \beta\lambda)^{2m} = \lambda(1 - \alpha\lambda)^n (1 - \beta\lambda)^n$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, 1]$,

положительном β выполнялись условия $0 < \alpha < 2$, (6), (8)–(9). Тогда (см. [7]) для достаточно больших n справедливо $\lambda(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2} \leq [n(\alpha+\beta)]^{-1}$, поэтому имеем $\lambda(1-\alpha\lambda)^n(1-\beta\lambda)^n \leq [2n(\alpha+\beta)]^{-1}$.

Поэтому для таких n справедлива оценка $\max_{\lambda \in [0,1]} |\varphi(\lambda)| \leq [2n(\alpha+\beta)]^{-1}$. Следовательно, при условиях $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$, (6), (8)–(9) получим $\|x - x_n\|_A \leq [2n(\alpha+\beta)]^{-1/2} \|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (11). Как показано в [7], имеет место равенство

$$\begin{aligned} x_n - x_{n,\delta} &= A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/2} (E - \beta A)^{n/2} \right] (y - y_\delta) = \\ &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right] dE_\lambda (y - y_\delta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 &= (A(x_n - x_{n,\delta}), x_n - x_{n,\delta}) = \left(\left[E - (E - \alpha A)^{n/2} (E - \beta A)^{n/2} \right] (y - y_\delta), \right. \\ &\quad \left. A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/2} (E - \beta A)^{n/2} \right] (y - y_\delta) \right) = \\ &= \left(A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/2} (E - \beta A)^{n/2} \right]^2 (y - y_\delta), y - y_\delta \right) = \\ &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta). \end{aligned}$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим её сверху при условии (5). Сначала при (5) докажем, что $|\omega_n(\lambda)| = \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right] \right| \leq \frac{n}{2}(\alpha + \beta)$. Это то же самое, что методом математической

индукции доказать неравенство $\left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_n\lambda) \right] \right| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Обозначим левую часть последнего неравенства через $z_n(\lambda)$.

При $n = 1$ получим $z_1(\lambda) = \alpha_1 \leq \alpha_1$, т.е. при $n = 1$ рассматриваемое неравенство справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n = k$, т.е. выполняется $z_k(\lambda) = \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) \right] \right| \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i$, и докажем его справедливость при $n = k+1$. Итак, получим

$$\begin{aligned} z_{k+1}(\lambda) &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) (1 - \alpha_{k+1}\lambda) \right] \right| = \\ &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) + (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) \alpha_{k+1}\lambda \right] \right| = \\ &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) \right] + (1 - \alpha_1\lambda) \dots (1 - \alpha_k\lambda) \alpha_{k+1} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left| \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha_1 \lambda) \dots (1 - \alpha_k \lambda)] \right| + \alpha_{k+1} |(1 - \alpha_1 \lambda) \dots (1 - \alpha_k \lambda)| \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i + \alpha_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i.$$

Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого неравенства доказана. Следовательно, при (5) выполняется $|\omega_n(\lambda)| \leq \frac{n}{2}(\alpha + \beta)$.

Вернемся к оценке положительной функции $\xi_n(\lambda)$, имеем

$$\begin{aligned} \xi_n(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right]^2 = \\ &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right] \right| \left| 1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right| \leq \\ &\leq \frac{n}{2}(\alpha + \beta) \left(1 + |(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)|^{n/2} \right) \leq n(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

так как при условии (5) справедливо $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)|^{n/2} < 1$. Итак, для любых $n \geq 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq n(\alpha + \beta)\delta^2$, поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq n^{1/2}(\alpha + \beta)^{1/2}\delta$, $n \geq 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + n^{1/2}(\alpha + \beta)^{1/2}\delta$, $n \geq 1$ и при $n \rightarrow \infty$ $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то получим регуляризирующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 3. *Итерационная процедура (4) при условиях $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$, (6), (8) – (9) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать так, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.*

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (4)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq [2n(\alpha + \beta)]^{-1/2} \|x\| + n^{1/2}(\alpha + \beta)^{1/2}\delta, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Оптимизируем полученную оценку (12) по n , т.е. при заданном δ найдём такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части равенства (12), получим $(\alpha + \beta)^{-1/2} 2^{-1/2} \|x\| = (\alpha + \beta)^{1/2} \delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = (\alpha + \beta)^{-1} 2^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|. \quad (13)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (12), найдём её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{3/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α, β . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, β , и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α, β возможно большими, удовлетворяющими условиям $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$, (6), (8) – (9), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *При условиях $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$, (6), (8) – (9) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (4) в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид (14) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (13).*

Сравним метод (4) в энергетической норме с хорошо известным методом (1). В статье [9] для явного метода простой итерации (1) с $0 < \alpha \leq 1,25$ при $n_{\text{опт}} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-1/2} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|$ получена оптимальная оценка $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq \left(\frac{35}{27}\right)^{1/4} e^{-1/4} (2\delta)^{1/2} \|x\|^{1/2}$. Отсюда легко увидеть, что порядки оптимальных оценок погрешности для методов (1) и (4) одинаковы. Более того, используя метод итераций (4), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций (1).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H .

Из этих условий выходит

Теорема 5. Если выполнены условия:

$$1) E_{\tau} x_{n,\delta} = 0,$$

$$2) E_{\tau} x = 0, \text{ где } E_{\tau} = \int_0^{\tau} dE_{\lambda}, \quad \tau - \text{фиксированное положительное число } (0 < \tau < 1),$$

то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Доказательство. Из 1) и 2) имеем $\int_0^{\tau} \frac{1}{\lambda} d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = 0$. Отсюда по-

лучим

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|^2 &= \int_0^1 d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), x - x_{n,\delta}) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_0^{\tau} \frac{1}{\lambda} d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) + \int_{\tau}^1 \frac{1}{\lambda} d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_{\tau}^1 \frac{1}{\lambda} d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^1 d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^1 d(E_{\lambda}(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \frac{1}{\tau} \|x - x_{n,\delta}\|_A^2. \end{aligned}$$

Поэтому из $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ следует $\|x - x_{n,\delta}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^{n/2} (E - \beta A)^{n/2}] y_{\delta}$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_{\tau} x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_{\tau} y_{\delta} = 0$. Таким образом, если решение x и приближённая правая часть y_{δ} таковы, что $E_{\tau} x = 0$ и $E_{\tau} y_{\delta} = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости при-

ближений (4) в исходной норме пространства H не требуется предположения истинности кообразной представимости точного решения.

Замечание 2. Считаем, что $\|A\| = 1$, но на самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда $\|A\| < \infty$.

Замечание 3. Уравнение $Ax = y$ с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряжённости или положительной определённости, может быть сведено к решению уравнения $A^*Ax = A^*y$ уже с положительно определённым и самосопряжённым оператором A^*A . Описанные выше результаты для уравнения (2) аналогичны результатам для уравнений $Ax = y$ уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором A .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
2. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
4. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
5. Bialy, H. Iterative behandlung linearer funktions gleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
6. Samarsky, A. A. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics / A. A. Samarsky, P. N. Vabishchevitch. – Berlin : De Gruyter, 2007. – 480 p.
7. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. – 196 с.
8. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – № 300. – P. 290–299.
9. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.03.2016

Matysik O.V. The Iterative Regularization of Ill-posed Problems in Energy Norm of Hilbert Space

In the Hilbert space for solving Ill-posed equations the first kind with positive definite bounded self-adjoint operator the explicit iteration method with alternating step is proposed. Convergence property of procedure in energy norm of Hilbert space has been investigated; here it is not required to know source representability of exact solution in order to get a priori estimations of error. The sufficient conditions are received when convergence of iteration method in ordinary norm of Hilbert space goes out of the convergence in energy norm. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацыі па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума Дзяржаўнага вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастановы Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасыллак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 27.06.2016. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 10,23. Ул.-выд. арк. 7,46.

Тыраж 100 экз. Заказ № 294.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013
224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.