

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

А.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецюхоў

А.Ф. Равінскі

Я.В. Радына

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2015

У адпаведнасці з Загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь № 81 ад 20.03.2015 г. часопіс
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Овсюк Е.М., Редько А.Н., Редьков В.М. Исследование релятивистской скалярной частицы в поле осциллятора в терминах функций Гойна	5
Лиопо В.А., Овчинников Е.В., Секержицкий С.С., Ситкевич А.Л., Ситкевич Ф.А. Флуктуация зарядов при диспергировании и модифицирующая активность наночастиц.....	16
Пашкевич Г.А., Лапчук А.С., Крючин А.А., Прыгун А.В., Юрлов В.И. Влияние параметров оптической системы на эффективность подавления спеклов движущимся дифракционным оптическим элементом	22
Савенко В.С. Влияние динамического пинч-эффекта на деформацию кристаллов Sb в условиях электропластичности.....	35
Сендер Н.Н. Иммерсионный метод определения оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов	40
Серый А.И. К проблеме нагрева белого карлика при аккреции.....	49

МАТЭМАТЫКА

Бабич Е.Р., Мартынов И.П. Аналитические свойства решений одной системы четвертого порядка	54
Басик А.И., Шарманов А.А. О краевых задачах для одной эллиптической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в \mathbb{R}^4	57
Волков В.М., Буяльская Ю.В. О спектральных методах численного анализа встречного взаимодействия оптических волн в нелинейной среде.....	62
Волошина Т.В. Точные подстановочные представления полугруппы частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства	69
Даудов Д.Д., Трофимук А.А. Назрешимые группы, у которых силовские подгруппы кофакторов имеют малый нормальный ранг.....	74
Марзан С.А. итеративный метод приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто.....	79
И.П. Черняк И.П., Товкач Р.В. Линейные методы суммирования рядов Фурье и их насыщения.....	88



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:

A.M. Sender

Deputy Editor-in-chief:

S.A. Marzan

International Board:

V.A. Glavan (Moldova)

V.G. Samoilenka (Ukraine)

V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:

M.M. Sender

(managing editor)

M.I. Lyavchuk

I.P. Martynov

V.S. Monakhov

Y.A. Pletsukhov

A.F. Ravinski

Y.V. Radyna

V.M. Rad'kov

Y.S. Sekyazhytski

M.M. Trush

A.V. Chychuryn

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:

224665, Brest,

Boulevard Cosmonauts, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2015

According to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus № 81 from March 20, 2015, the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

Ovsiyuk E.M., Red'ko A.N., Red'kov V.M. Relativistic Scalar Particle in Oscillator Field, Studying in Terms of Heun Functions	5
Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L., Sitkevich F.A. Charge Fluctuations by Dispersing and Modifying Active Nanoparticles	16
Pashkevich G.A., Lapchuk A.S., Kryuchin A.A., Prygun A.V., Yurlov V.I. Impact of the Optical System Parameters on Speckle Suppression Efficiency by the Diffractive Optical Element	22
Savenko V.S. Dynamic Effect on the Pinch Effect Crystal Deformation Sb Under Elektroplastichnosti	35
Sender N.N. Immersion Method for Determining Optical Constants of Anisotropic Absorbing Crystals	40
Sery A.I. To the Problem of White Dwarf Heating at Accretion	49

MATHEMATICS

Babich E.R., Martynov I.P. Analytical Properties of Solutions of a Fourth Order System	54
Basik A.I., Sharmanau A.A. About Boundary-Value Problems for One Elliptic System of Partial Differential Equations of the First Order in \mathbf{R}^4	57
Volkov V.M., Buyalskaya Yu.V. On Spectral Methods for Numerical Analysis of Counterpropagating Optical Waves Interaction in Nonlinear Media	62
Voloshyna T.V. Exact Representations of Semigroup of Partial Linear Transformations Finite-dimensional Vector Space by Partial Permutations	69
Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Solvable Groups with Small Normal Rank of Sylow Subgroups of the Cofactors Subgroup	74
Marzan S.A. Iterative Learning Method of Approximate Computation of Cauchy Problem for non-linear Differentiation Equation with Kaputo Fractional Derivative	79
Chernyak I.P., Tovkach R.V. Linear Methods of Summation of Fourier's Series and their Saturation	88

Е.М. Овсюк¹, А.Н. Редько², В.М. Редьков³

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

²преподватель каф. физики и методики преподавания физики

Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка

³д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории
теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ
В ПОЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ГОЙНА**

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z = \infty$. Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями.

Теоретические достижения в физике связаны с разработанностью применяемого математического аппарата. Многие результаты, полученные в классической и квантовой физике, в значительной степени основаны на применении теории гипергеометрических функций – решений дифференциального уравнения с тремя особыми точками. В последние десятилетия растет число физических задач, в которых надо решать дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками – уравнение Гойна [1; 2].

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Лобачевского

Обратимся к аналитическому исследованию задачи о поведении релятивистской скалярной частицы во внешнем поле осциллятора при равном нулю квантовом числе углового момента $j = 0$. Сначала рассмотрим эту систему на фоне пространства Лобачевского, затем сравним ее с аналогичной системой в пространстве Минковского. После разделения переменных в уравнении Клейна – Фока – Гордона в пространстве Лобачевского задача сводится [3] к уравнению следующего вида (приводим его сначала в обычных единицах измерения; радиус кривизны пространства обозначаем как ρ ; радиальная переменная r получена делением на радиус кривизны $r = R/\rho$):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{\varepsilon \rho}{\hbar c} - \frac{1}{2} \frac{k \rho^3}{\hbar c} \operatorname{th}^2 r \right)^2 - \frac{m^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \right] F = 0. \quad (1)$$

Явное представление этого уравнения можно упростить, если использовать энергию покоя как единицу измерения энергии:

$$\frac{\varepsilon \rho}{\hbar c} \frac{\hbar}{m c \rho} = \frac{\varepsilon}{m c^2} = E, \quad \frac{k \rho^3}{\hbar c} \frac{\hbar}{m c \rho} = \frac{k \rho^2}{m c^2} = K, \quad (2)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(E - \frac{K \operatorname{th}^2 r}{2} \right)^2 - 1 \right] F = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) определяет квадрат обобщенного импульса в виде:

$$p^2 = \left(E - \frac{K \operatorname{th}^2 r}{2} \right)^2 - 1. \quad (4)$$

Этот полином 4-й степени раскладывается на множители (требуем, чтобы точки поворота лежали в физической области изменения переменной r):

$$\begin{aligned} \operatorname{th} r_1 &= \sqrt{\frac{E-1}{K/2}} < 1, & \operatorname{th} r_2 &= \sqrt{\frac{E+1}{K/2}} < 1, \\ \operatorname{th} r'_1 &= -\sqrt{\frac{E-1}{K/2}} > -1, & \operatorname{th} r'_2 &= -\sqrt{\frac{E+1}{K/2}} > -1; \\ p^2 &= \frac{K^2}{4} (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r_1) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r_2) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r'_1) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r'_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Из требования, чтобы положительные точки поворота лежали в физической области координаты r , следует (рисунок 1):

$$E > 1, \quad E - 1 < \frac{K}{2}, \quad E + 1 < \frac{K}{2}. \quad (6)$$

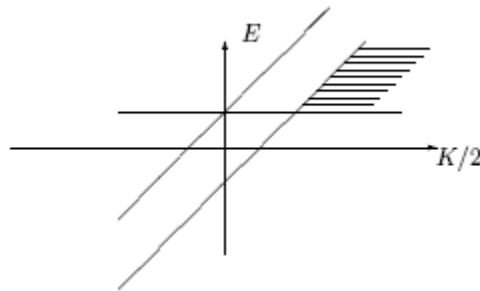


Рисунок 1. – Две положительные точки поворота

При этом значение $p^2(r = \infty)$ следующее:

$$p^2(r = \infty) = \left(E - \frac{K}{2} - 1 \right) \left(E - \frac{K}{2} + 1 \right) > 0. \quad (7)$$

Другими словами, имеем квантово-механическую систему с возможностью туннельного эффекта. Типичный график функции $p^2(r)$ показан на рисунке 2 (пусть $K = 8$, $E = 2$ – это согласуется с (6)). Поведение кривой обобщенного импульса говорит, что здесь с точки зрения квантовой механики реализуется ситуация возможного туннельного эффекта.

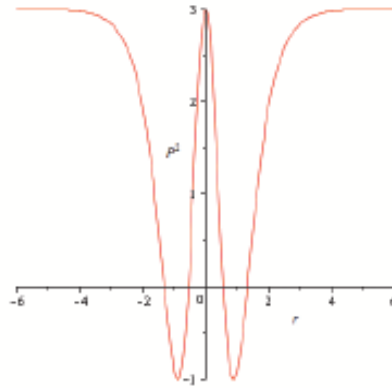


Рисунок 2. – График кривой $p^2(r)$, физическая область $r > 0$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3) с точки зрения принадлежности его к известному классу уравнений. Для этого вводим новую переменную

$$z = \text{th}^2 r, \quad \frac{dz}{dr} = 2 \tanh r \frac{1}{\cosh^2 r} = 2\sqrt{z}(1-z), \quad \frac{d}{dr} = 2\sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz},$$

$$\left(4\sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz} \sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz} + E^2 - 1 - EKz + z^2 \frac{K^2}{4} \right) F = 0;$$

в результате получаем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{dF}{dz} + \left(\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{(z-1)^2} \right) F = 0,$$

$$\alpha = \frac{E^2 - 1}{4}, \quad \beta = \frac{K^2/4 - E^2 - 1}{4}, \quad \gamma = \frac{-1 + (E - K/2)^2}{4}. \quad (8)$$

С использованием подстановки $F(z) = z^A (z-1)^B f(z)$ уравнение (8) принимает вид:

$$f'' + \left(\frac{2A+1/2}{z} + \frac{2B+1}{z-1} \right) f' + \left(\frac{A(A-1/2)}{z^2} + \frac{B^2 + \gamma}{(z-1)^2} + \frac{\alpha - 2AB - B/2 - A}{z} + \frac{\beta + 2AB + B/2 + A}{z-1} \right) f = 0. \quad (9)$$

При A и B , выбранных согласно (обращаем внимание, что под корнем стоят положительные параметры – см. (6))

$$A = 0, \frac{1}{2}, \quad B = \pm \sqrt{-\gamma} = \pm \frac{\sqrt{1 - (E - K/2)^2}}{2}, \quad (10)$$

уравнение (9) упрощается

$$f'' + \left(\frac{2A+1/2}{z} + \frac{2B+1}{z-1} \right) f' + \left(\frac{\alpha - 2AB - B/2 - A}{z} + \frac{\beta + 2AB + B/2 + A}{z-1} \right) f = 0 \quad (11)$$

и является вырожденным уравнением Гойна [1; 2]

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{\lambda - az}{z(z-1)} H = 0 \quad (12)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} t=0, \quad c=2A+1/2, \quad d=2B+1, \\ a=-(\alpha+\beta), \quad \lambda=2AB+A+B/2-\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что уравнение (8) определяет квадрат обобщенного импульса

$$p^2(z) = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{(z-1)^2} \quad (14)$$

со следующим поведением около особых точек:

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0 (r \rightarrow 0), \quad p^2 \sim \frac{E^2-1}{z} \rightarrow +\infty (E^2 > 1); \\ z \rightarrow 1 (r \rightarrow \infty), \quad p^2 \sim \frac{\gamma}{(z-1)^2} = \frac{[(E-\frac{K}{2})^2-1]}{4(1-z)^2} \rightarrow +\infty \left(\left(E - \frac{K}{2} \right)^2 > 1 \right) \end{aligned}$$

Исследуем поведение кривой для (эффе́ктивного) квадрата обобщенного импульса

$$p^2(z) = \frac{(E - Kz/2)^2 - 1}{4z(1-z)^2}. \quad (15)$$

Точки поворота – решения уравнения $p^2(z) = 0$ – задаются равенствами

$$z_1 = \frac{2(E-1)}{K}, \quad z_2 = \frac{2(E+1)}{K}. \quad (16)$$

Отмечаем, что два положительных корня могут возникнуть только при $E > 1$ – это согласуется с тем, что уровни энергии в нерелятивистском приближении положительные.

Найдем условия того, что точки поворота лежат в физической области переменной y :

$$y_1 = \frac{2(E-1)}{K} < 1 \Rightarrow (E-1) < \frac{K}{2}, \quad y_2 = \frac{2(E+1)}{K} > 1 \Rightarrow (E+1) < \frac{K}{2}.$$

На рисунке 3 приведен типичный график квадрата обобщенного импульса.

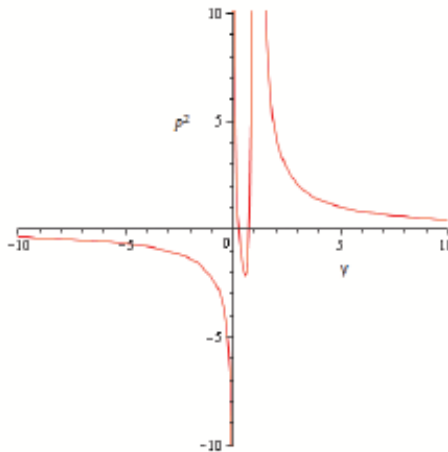


Рисунок 3. – График функции $p^2(r)$, $K=8$, $E=2$

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Минковского

Для сравнения рассмотрим аналогичную задачу в плоском пространстве. В безразмерных единицах ее можно описать уравнением

$$p^2 = \left(E - \frac{Kr^2}{2}\right)^2 - 1. \quad (17)$$

Соответствующий полином 4-й степени раскладывается на множители

$$p^2 = \left(E - \frac{Kr^2}{2} - 1\right) \left(E - \frac{Kr^2}{2} + 1\right).$$

Будем исследовать область $E > 1$ (так как в нерелятивистском пределе уровни энергии положительные). Точки поворота обозначим как

$$r_1 = \sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \quad r'_1 = -\sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r'_2 = -\sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \quad (18)$$

$$p^2 = \frac{K^2}{4} (r - r_1)(r - r_2)(r - r'_1)(r - r'_2).$$

Опишем точки локального экстремума (см. рисунок 4):

$$\frac{d}{dr} p^2 = 2 \left(E - \frac{Kr^2}{2}\right) (-Kr) = 0, \quad r_{extr} = 0, \pm \sqrt{\frac{2E}{K}}.$$

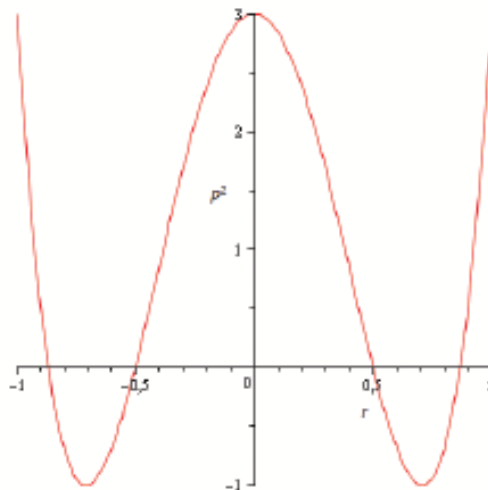


Рисунок 4. – Кривая $p^2(r)$ в плоском пространстве

Здесь мы также имеем квантово-механическую систему с квазистационарными состояниями и возможностью туннельного эффекта. Выясним принадлежность этого уравнения к известным классам. Уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - \frac{kr^2}{2}\right)^2 - M^2 \right) F_2 = 0$$

в переменной $y = r^2$ примет вид:

$$\left(4y \frac{d^2}{dy^2} + 2 \frac{d}{dy} + \varepsilon^2 - M^2 - \varepsilon ky + \frac{k^2 y^2}{4} \right) F_2 = 0. \quad (19)$$

Пусть для простоты $k=1$ (в общем случае замена переменной и решение выглядят сложнее). Сделаем замену переменной $y = 3^{-1/3} ir$:

$$\frac{d^2 F_2}{dy^2} - 3^{2/3} \left[\left(\varepsilon + \frac{3^{2/3} y^2}{2} \right)^2 - M^2 \right] F_2 = 0. \quad (20)$$

Ищем решение в виде:

$$F_2(y) = e^{Ay} e^{By^3} f(y), \quad \frac{d^2 f}{dy^2} - (-2A - 6By^2) \frac{df}{dy} + \left[A^2 - 3^{2/3} \varepsilon^2 + 3^{2/3} M^2 + (6AB - 3^{4/3} \varepsilon) y^2 + 6By + \left(-\frac{9}{4} + 9B^2 \right) y^4 \right] f = 0.$$

При A, B , выбранных согласно $A = -3^{1/3} \varepsilon$, $B = -\frac{1}{2}$, уравнение упрощается

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - (3y^2 + 2 \cdot 3^{1/3} \varepsilon) \frac{df}{dy} - [3y - 3^{2/3} M^2] f = 0 \quad (21)$$

и является уравнением для трижды вырожденной функции Гойна $H(\alpha, \beta, \gamma; z)$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - (3z^2 + \gamma) \frac{dH}{dz} - [(3 - \beta)z - \alpha] H = 0$$

с параметрами

$$\alpha = 3^{2/3} M^2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2 \cdot 3^{1/3} \varepsilon; \quad (22)$$

при других значениях $k \neq 1$ также будем иметь равенство $\beta = 0$.

Можно проследить за переходом от релятивистского описания к нерелятивистскому. Ограничимся случаем плоского пространства. Релятивистский обобщенный импульс в квадрате равен

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(\varepsilon - \frac{Kr^2}{2} \right)^2 - M^2 = \left[M + E - \frac{Kr^2}{2} \right]^2 - M^2 = \\ &= 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right) + 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right) \frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нерелятивистская величина квадрата импульса равна

$$p_0^2 = 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right).$$

Чтобы две величины мало различались около $r = 0$, необходимо требовать

$$2ME + 2ME \frac{E}{2M} \approx 2ME \quad \Rightarrow \quad E \ll 2M. \quad (24)$$

Чтобы две величины мало различались при других значениях переменной r , нужно предполагать (учитываем и предыдущее неравенство)

$$\frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 \ll \frac{4M}{K}. \quad (25)$$

Конфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы уравнения

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{-az + \lambda}{z(z-1)} H = 0. \quad (26)$$

Точки $z = 0, 1$ – регулярные особенности. Точка $z = \infty$ – иррегулярная особенность, ее ранг равен $R(z = \infty) = 2$.

Построим основной степенной ряд в окрестности точки $z = 0$. Для этого запишем уравнение в виде:

$$(z^2 - z) \frac{d^2 H}{dz^2} + [-t z^2 + (t + d + c) z - c] \frac{dH}{dz} + (\lambda - a z) H = 0. \quad (27)$$

При построении решений в виде степенного ряда в уравнении возникнут следующие степени переменной z : z^{k+1}, z^k, z^{k-1} ; т. е. возникнут 3-членные рекуррентные соотношения. Найдем их. Для этого учтем равенства:

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad H' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k z^{k-1}, \quad H'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k z^{k-2};$$

тогда уравнение для H дает

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n d_{n+1} z^n - \\ & -t \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} z^n + (t+d+c) \sum_{n=1}^{\infty} n d_n z^n - c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} z^n + \\ & + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - a \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} z^n = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях переменной z , получаем трехчленные рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} n=0, \quad & c d_1 + \lambda d_0 = 0, \\ n=1, \quad & -a d_0 + (t+c+d+\lambda) d_1 - 2(1+c) d_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & [t(n-1)+a] d_{n-1} - [n(n-1+t+d+c) + \lambda] d_n + (n+1)(n+c) d_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что случай $n=1$ уже описывается общей рекуррентной формулой. Таким образом, основной ряд конфлюэнтного уравнения Гойна определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} & c d_1 + \lambda d_0 = 0, \\ & -a d_0 + (t+c+d+\lambda) d_1 - 2(1+c) d_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & P_n d_n - (Q_n + \lambda) d_{n+1} + R_n d_{n+2} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$P_n = t(n-1+a), \quad Q_n = n(n-1+t+d+c), \quad R_n = (n+1)(n+c). \quad (29)$$

Рекуррентное соотношение переписывается в форме:

$$\frac{1}{n^2} P_n - \frac{1}{n^2} (Q_n + \lambda) \frac{d_{n+1}}{d_n} + \frac{1}{n^2} R_n \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 0;$$

отсюда при устремлении $n \rightarrow \infty$, получаем квадратичное уравнение

$$-r + r^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = r.$$

Отсюда заключаем, что согласно методу Пуанкаре–Перрона (гарантированный) радиус сходимости степенного ряда равен $R_{conv} = 1$. Существует возможность обрывания ряда до полинома. Пусть

$$P_{n+1} = 0, \quad a = -n, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (30)$$

Тогда, если λ выбран так, что $d_{n+1} = 0$, то из рекуррентных соотношений получаем

$$0 \cdot d_n - (Q_{n+1} + \lambda) \cdot 0 + R_{n+1} d_{n+2} = 0 \Rightarrow d_{n+2} = 0;$$

следовательно, все последующие коэффициенты при степенях ряда обращаются в ноль, т.е. ряд превращается в полином степени n . Если ограничиться только наложением требования $a = -n$, не добавляя условия $d_{n+1} = 0$, получим (неполиномиальные) трансцендентные конфлюэнтные функции Гойна. Можно убедиться, что второе условие $d_{n+1} = 0$ эквивалентно полиномиальному уравнению степени $(n+1)$ относительно параметра λ . Действительно,

$$\begin{aligned} n=0, \quad c d_1 - \lambda d_0 &= 0, \\ P_1 d_0 - (Q_1 + \lambda) d_1 + R_1 d_2 &= 0, \\ P_2 d_1 - (Q_2 + \lambda) d_2 + R_2 d_3 &= 0, \\ P_3 d_2 - (Q_3 + \lambda) d_3 + R_3 d_4 &= 0, \\ P_4 d_3 - (Q_4 + \lambda) d_4 + R_4 d_5 &= 0, \\ &\dots \\ P_n d_{n-1} - (Q_n + \lambda) d_n + R_n d_{n+1} &= 0, \\ P_{n+1} d_n - (Q_{n+1} + \lambda) d_{n+1} + R_{n+1} d_{n+2} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть $a = -n$, $P_{n+1} = 0$, пусть дополнительно $d_{n+1} = 0 \Rightarrow d_{n+2} = 0$. Это обеспечивает обрывание ряда до полинома степени n . Возникающую систему уравнений можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ P_1 & -(Q_1 + \lambda) & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & P_2 & -(Q_2 + \lambda) & R_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & P_3 & -(Q_3 + \lambda) & R_3 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & -(Q_4 + \lambda) & R_4 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-2} & -(Q_{n-2} + \lambda) & R_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-1} & -(Q_{n-1} + \lambda) & R_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_n & -(Q_n + \lambda) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

Условие существования нетривиальных решений у линейной однородной системы имеет вид равенства нулю ее определителя, что дает алгебраическое уравнение степени $(n+1)$ относительно параметра λ .

Триконфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы триконфлюэнтного уравнения Гойна [3]:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + (-z^2 - t) \frac{dH}{dz} + (\lambda - az)H = 0. \quad (33)$$

Здесь имеем единственную особую точку $z = \infty$. Пусть $z = y^{-1}$, тогда

$$\frac{d^2 H}{dy^2} + \left(\frac{1}{y^4} + \frac{t}{y^2} + \frac{2}{y} \right) \frac{dH}{dy} + \left(\frac{\lambda}{y^4} - \frac{a}{y^5} \right) H = 0. \quad (34)$$

Ранг этой сингулярности равен

$$R(z = \infty) = \max \left\{ 4, \frac{5}{2} \right\} = 4.$$

Делаем подстановку

$$H(y) = y^A \exp^{[By^{-1} + Cy^{-2} + Dy^{-3}]} f(y). \quad (35)$$

Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & y^5 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[2(A+1)y^4 + (t-2B)y^3 - 4Cy^2 + (1-6D)y \right] \frac{df}{dy} + \\ & + \left[A(A+1)y^3 + A(t-2B)y^2 + (-4AC + B^2 - tB + 2C + \lambda)y + \right. \\ & \quad \left. + (-6AD + 4BC - 2tC + A + 6D - a) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{6BD + 4C^2 - 3Dt - B}{y} + \frac{2C(6D-1)}{y^2} + \frac{3D(3D-1)}{y^3} \right] f = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Занулим коэффициенты при $y^{-3}, y^{-2}, y^{-1}, y^0$:

$$\begin{aligned} D(3D-1) &= 0, & C(6D-1) &= 0, \\ 6BD + 4C^2 - 3Dt - B &= 0, \\ -6AD + 4BC - 2tC + A + 6D - a &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следуют два решения:

$$1) C_1 = 0, D_1 = 0, \quad 2) C_2 = 0, D_2 = 1/3.$$

Третье уравнение дает $B_1 = 0, B_2 = t$; четвертое уравнение дает $A_1 = a, A_2 = 2 - a$.

Таким образом, находим два решения:

$$1) A = a, B = 0, C = 0, D = 0, H(y) = y^a f(y); \quad (37)$$

$$2) A = 2 - a, B = t, C = 0, D = 1/3,$$

$$H(y) = y^{2-a} \exp^{[ty^{-1} + \frac{1}{3}y^{-3}]} f(y). \quad (38)$$

При этом уравнение для $f(y)$ упрощается и принимает соответственно вид:

$$1) y^4 f'' + [2(a+1)y^3 + ty^2 + 1]f' + [a(a+1)y^2 + aty + \lambda]f = 0; \quad (39)$$

$$2) y^4 f'' + [2(3-a)y^3 - ty^2 - 1]f' + [(2-a)(3-a)y^2 - t(2-a)y + \lambda]f = 0. \quad (40)$$

Если раскладывать функцию $f(y)$ в степенной ряд, то в уравнениях (39) и (40) возникнут степени

$$y^{n+2}, y^{n+1}, y^n, y^{n-1},$$

что приведет к 4-членным рекуррентным соотношениям. Получим эти соотношения.

Для сокращения записи и большей общности рассмотрим уравнение со структурой (обрашаем внимание, что в уравнениях (39) и (40) параметр $\gamma = 0$):

$$y^4 f'' + (\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta) f' + (\mu y^2 + \sigma y + \lambda) f = 0.$$

Ищем решение в виде ряда:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k, \quad f' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k-1}, \quad f'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^{k-2};$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3) d_{n-2} y^n + \\ & + \alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} y^n + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} y^n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n y^n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} y^n + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} y^n + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} y^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n = 0. \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3) d_{n-2} + \\ & + \alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0, \end{aligned}$$

далее находим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} n=0, & \quad \lambda d_0 + \delta d_1 = 0, \\ n=1, & \quad \sigma d_0 + (\gamma + \lambda) d_1 + 2\delta d_2 = 0, \\ n=2, & \quad \mu d_0 + (\beta + \sigma) d_1 + (2\gamma + \lambda) d_2 + 3\delta d_3 = 0, \\ n=3, & \quad (\alpha + \mu) d_1 + (2\beta + \sigma) d_2 + (3\gamma + \lambda) d_3 + 4\delta d_4 = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

т.е.

$$\begin{aligned} n \geq 2, & \quad [(n-2)(n-3) + \alpha(n-2) + \mu] d_{n-2} + \\ & + [\beta(n-1) + \sigma] d_{n-1} + (\gamma n + \lambda) d_n + \delta(n+1) d_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

При $n \rightarrow \infty$ рекуррентное соотношение дает

$$R^3 = 0, \quad R^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \frac{d_{n-1}}{d_n} \frac{d_n}{d_{n+1}}.$$

Это означает, что радиус сходимости степенного ряда равен бесконечности.

Таким образом, в окрестности точки $z = \infty$ строятся два линейно независимых решения ($i = 1, 2$):

$$H_i(z) = \frac{1}{z^A} \exp^{(Bz + Cz^2 + Dz^3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_k}{z^n}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = a, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad D_1 = 0; \\ A_2 = 2-a, \quad B_2 = t, \quad C_2 = 0, \quad D_2 = 1/3. \end{aligned} \quad (44)$$

Эти ряды сходятся везде, кроме точки $z = 0$.

Заклучение

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z = \infty$. Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями. Выполненный анализ распространен также на случай сферической геометрии Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1995.
2. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2000.
3. Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера / О. В. Веко [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2015. – 560 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.09.2015

Ovsiyuk E.M., Red'ko A.N., Red'kov V.M. Relativistic Scalar Particle in Oscillator Field, Studying in Terms of Heun Functions

On the basis of the Klein – Gordon – Fock equation performed analytical study of relativistic quantum-mechanical problem of a particle (with spin zero) in the oscillator on a background of flat Minkowski space. The problem is reduced to triply degenerate Heun equation with one irregular singular point of rank 4 in $z = \infty$. Shows the basic properties of local solutions in a neighborhood of this singular point, described 34-membered recurrence relations for the emerging power series. Qualitative analysis showed that this system can only be quasi-stationary states of the particle with the ability of tunneling through the potential barrier. A similar analysis was done in the case of the hyperbolic geometry of Lobachevsky space. In this system also possible only quasi-stationary bound states, its analytical description is reduced to degenerate Heun equation with two regular and one irregular rank 2 singularities.

УДК 538.9

**В.А. Лиопо¹, Е.В. Овчинников², С.С. Секержицкий³,
А.Л. Ситкевич⁴, Ф.А. Ситкевич⁵**

¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

²канд. тех. наук, доц., зам. декана фак. инновационных технологий
машиностроения Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

³канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

⁴аспирантка каф. теоретической физики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

⁵аспирант каф. теоретической физики и теплотехники

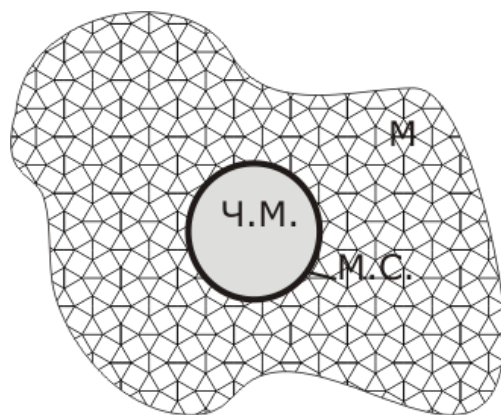
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

ФЛУКТУАЦИЯ ЗАРЯДОВ ПРИ ДИСПЕРГИРОВАНИИ И МОДИФИЦИРУЮЩАЯ АКТИВНОСТЬ НАНОЧАСТИЦ

При изготовлении композиционных материалов у них появляются новые физические и технологические свойства. Это обусловлено высокой модифицирующей активностью используемых наночастиц. Причиной модифицирующего действия являются активные заряженные центры. Увеличение концентрации наполнителя улучшает свойства композита, но до определенного предела. Установлены причины ухудшения качества композита при достижении ее барьерного значения.

Введение

При создании композиционных материалов обязательно наличие двух типов веществ: вещество основы (или матрица) и частицы наполнителя-модификатора. Основа представляет собой непрерывную (континуальную) среду. Наполнитель – дискретное (дисконтинуальное) распределение частиц различных веществ в матрице. Основное назначение этих частиц заключается в том, что молекулы основы в приповерхностном слое на частице наполнителя имеют молекулярную конфигурацию, отличную от той, что соответствует основе, свободной от наличия в ней других веществ. Таким образом, в системе существуют, по крайней мере, три типа молекулярных конфигураций. На рисунке 1 схематически представлены области композитной зоны. В действительности же эти области не имеют резких границ.



М – матрица-основа, М.С. – модифицированный слой, Ч.М. – частица модификатора

Рисунок 1. – Три области в композитной зоне

Наличие модифицированных областей придает веществу новые, по сравнению с исходной основой, свойства [1]. На рисунке 1 прямолинейные отрезки соответствуют молекулам основы, которые имеют случайную ориентацию. В качестве примера можно рассмотреть полимерный композит. Поверхность частицы модификатора (ЧМ) упорядочивает взаиморасположение молекул полимера, создавая модифицированный слой (МС). Граница между модифицированным слоем и веществом четко выражена и определяется, например, дисперсией угла между осями диполей и нормальными к поверхности частиц. Очевидно, что чем больше толщина модифицированного слоя, тем больше модифицирующая активность частиц модификатора. Эта активность определяется плотностью и силовыми характеристиками активных зарядовых центров (АЗЦ).

Возникновение поверхностных активных зарядовых центров на частицах модификаторов композитов

Активными зарядовыми центрами на поверхности наполнителей-модификаторов являются точки, в которых наблюдается взаимодействие атомов (молекул) вещества матрицы с атомами, молекулами, радикалами прилегающих к ним слоев матрицы. Причины возникновения активных зарядовых центров (АЗЦ) на поверхности кристалла – некомпенсированные атомно-молекулярные связи поверхностных атомов. Поверхность вещества объекта для макроскопических образцов рассматривается как бесконечно тонкая (воображаемая) пленка, по одну сторону от которой находятся атомы и молекулы анализируемого вещества, а по другую они отсутствуют. Поверхность – это двухмерный дефект, который приводит к разрушениям межатомных связей. Взаимодействие между атомами отличается от взаимодействий во внутренних областях образца. Это, во-первых, приводит к возникновению поверхностных сил, а во-вторых, оказывает влияние на атомные слои в приповерхностном слое. Это влияние, в зависимости от свойств образца, может распространяться на 3–7 атомных слоев [2]. Следовательно, при переходе к атомноразмерным масштабам следует говорить не о поверхности, а о поверхностном слое, который, вследствие колебаний атомов, является динамической системой.

Поверхностный энергетический барьер не может рассматриваться как функция

$$U(r) = \begin{cases} U(r) > 0, & \text{в образце} \\ U(r) = 0, & \text{вне образца} \end{cases}$$

т.е. в этом случае на поверхности функция $U(r)$ имеет разрыв первого рода (рисунок 2).

Во внешней области функция $U(r)$ имеет вид:

$$U(r) = U_0 \exp(-\alpha r), \tag{1}$$

где U_0 – значение потенциала на границе, α – коэффициент, зависящий от вещества и его поверхности.

Если молекула или атом другого вещества приближены к поверхности, то он не только испытывает влияние поверхности, но и сам влияет на функцию $U(\vec{r})$.

При диспергировании монокристаллов x -расколы происходят по плоскостям с наибольшей ретикулярной плотностью. Именно поэтому габитус кристаллов соответствует их точечной группе. Кристаллы с весьма совершенной спайностью имеют форму пластин (слоистые силикаты, монокристаллы, частицы и др.).

В начальные моменты раскола в области между вновь образованными ювенильными поверхностями возникает потенциальные барьер. Если концентрации дефектов по обе стороны от области раскола различные, то и энергии кристаллических решеток также будут неодинаковыми (рисунок 3).

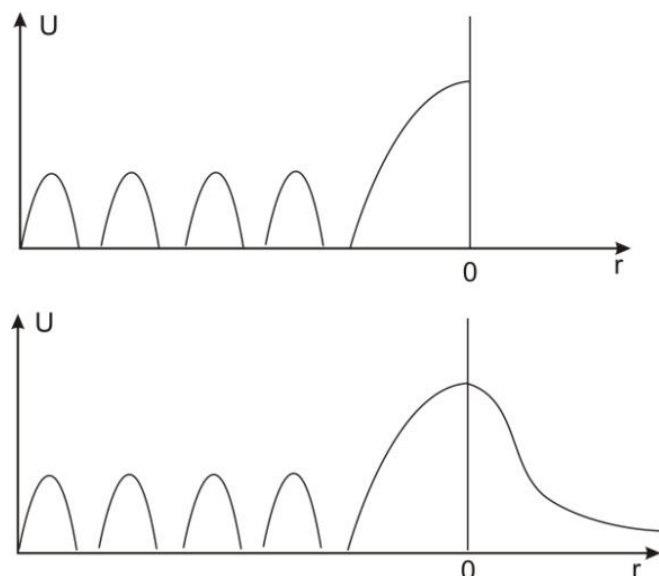


Рисунок 2. – Изменение энергетических характеристик внутренних и внешних приповерхностных областей кристалла при разрыве первого рода (сверху) и непрерывный поверхностный потенциал (снизу)

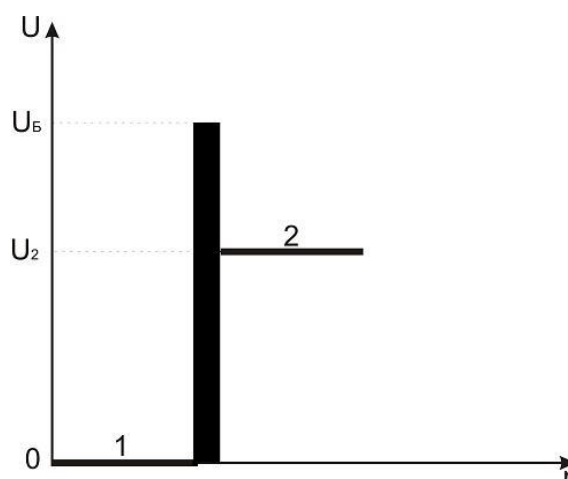


Рисунок 3. – Схема изменения потенциала при разрушении кристалла

Проницаемость барьера при проникновении зарядов из 1 в 2 и из 2 в 1 различная. На ювенильной поверхности возникает электростатическая мозаика, которая для кристаллов и определяет их модифицирующую активность как наполнителей при создании полимерных композитов. Эти заряды на поверхностях имеют электретные свойства. Зарядовая мозаика на поверхности некоторых диэлектриков, например, слоистых силикатов, может сохраняться в течение достаточного временного промежутка [3].

В середине прошлого века Г.И. Дистлером была исследована электростатическая мозаика на поверхностях поликристаллических сталей [4–6]. Этот эффект изучали и другие [7]. Причиной появления ячеек зарядовой мозаики на поверхностях поликристаллов сплавов на основе железа является контакт кристаллита с их различными кристаллографическими поверхностями. Если поверхность Ферми не сферическая, как у железа, то при контакте поверхностей с различными уровнями Ферми (E_F) происхо-

дит притяжение электрона от частиц 1 к частицам 2, если $E_{F1} > E_{F2}$. Именно поэтому электростатическая мозаика практически отсутствует на металлах с поверхностями Ферми со сферической симметрией.

Зарядовые флуктуации на наночастицах металлов

При разделении крупного металлического объекта на две равные по объему части число электронов на этих частях будет одинаковым в исключительно редких случаях. Наиболее вероятным является неравенство этих чисел. Для макрообъектов эти флуктуации в распределении зарядов роли не играют. Однако при переходе к наночастицам флуктуации зарядов наночастиц, полученных как диспергированием макрообъекта (метод «сверху»), так и выращиванием их из расплава, раствора или газовой среды (метод «снизу»), играет существенную роль. Любая наночастица обладает двумя основными свойствами. Во-первых, она должна иметь поверхность, то есть ее можно выделить из смеси с другими частицами механическим способом. Во-вторых, параметры физических свойств наночастиц зависят от их размера. Следовательно, существует размерная граница между наносостоянием и макроскопической фазой (L_0). Если размер частицы $r > L_0$, то этот объект находится в макросостоянии. Если $r < L_0$, то в наносостоянии размерная граница L_0 не является резкой, и соответствующие свойства проявляются тем ярче, чем сильнее указанные неравенства. Значения L_0 , как показано в работе [1], для металлов не превышают 20 нм.

Итак, пусть исходный объект имеет сферическую форму с радиусом R . Примем условие, что после диспергирования частицы имеют сферическую форму с радиусом r . Число полученных частиц равно:

$$N = \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (2)$$

Если объем композита равен V , то среднее число частиц в единице объема (объемная плотность частиц) равна

$$n = \frac{N}{V} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 V^{-1}. \quad (3)$$

Очевидно, что объемная концентрация модификатора равна:

$$\rho_v = \frac{4}{3}\pi R^3 V^{-1}. \quad (4)$$

Среднее расстояние между центрами частиц равно

$$\Delta = n^{-\frac{1}{3}} = \frac{V^{\frac{1}{3}} r}{R}. \quad (5)$$

Если h – средняя толщина модифицированного слоя, то объем модифицированного слоя равен:

$$W = n \frac{4}{3}\pi (r+h)^3 = \frac{4\pi}{3V} \left(\frac{(r+h)R}{r}\right)^3. \quad (6)$$

Степень модификации в этом случае равна:

$$q = \frac{W}{V} = \frac{4\pi}{3V^2} \left(\frac{(r+h)R}{r}\right)^3. \quad (7)$$

В таблице 1 приведены примеры расчета геометрических параметров композитов для нескольких значений ρ_v, h и r при $V = 1 \text{ м}^3$.

Для анализа электрического взаимодействия наночастиц наполнителя в полимере примем условие наличия на частицах электрического заряда, равного e и находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ и $\varepsilon = 5$. В этом случае сила взаимодействия между зарядами равна:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e^2}{\Delta^2}. \quad (8)$$

Для оценки силы электростатического взаимодействия, сравним ее с силой тяжести этих частиц. В качестве примера рассмотрим наночастицы меди $\left(\rho = 8920 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$. Тогда сила тяжести равна:

$$F = mg = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g = 3,67 \cdot 10^{-19} \text{ Н}. \quad (9)$$

Сравнение результатов таблицы 1 и таблицы 2 показывает, что силы электростатического взаимодействия в $10^3 \div 10^4$ раз больше силы гравитационного взаимодействия.

При создании композиционных материалов, например, на основе полимеров, стремятся к тому, чтобы частицы модификатора были распределены равномерно. Для этого осуществляется перемешивание разжиженного полимера вместе с частицами модификатора. В этом случае вследствие флуктуации расстояний между частицами эти частицы с одноименными зарядами будут отталкиваться друг от друга, а с разноименными притягиваться. Был рассмотрен случай, когда каждая частица имеет заряд $|e|$. Очевидно, что этот заряд в общем случае равен $n|e|$, где $n > 1$. В этом случае две частицы с разными по знаку зарядами образуют заряженную пару, которая, в свою очередь, может соединиться с другими частицами, тогда при перемешивании произойдет не равномерное распределение частиц, а образуется кластер (произойдет «комкование»), что и наблюдается экспериментально.

Таблица 1. – Геометрические параметры композитов

$r, \text{нм}$	$h, \text{нм}$	$\rho_V, \%$	$n, \text{м}^{-3}$	$\Delta, \text{м}$	$W, \text{м}^3$	$q, \%$
10	10	1	2,39E+21	7,48E-08	0,08	8
10	15		2,39E+21	7,48E-08	0,16	16
15	10		7,07E+20	1,12E-07	0,05	5
15	15		7,07E+20	1,12E-07	0,08	8
10	10	1,5	3,58E+21	6,54E-08	0,12	12
10	15		3,58E+21	6,54E-08	0,23	23
15	10		1,06E+21	9,80E-08	0,07	7
15	15		1,06E+21	9,80E-08	0,12	12
10	10	2	4,77E+21	5,94E-08	0,16	16
10	15		4,77E+21	5,94E-08	0,31	31
15	10		1,41E+21	8,91E-08	0,09	9
15	15		1,41E+21	8,91E-08	0,16	16
10	10	2,5	5,97E+21	5,51E-08	0,20	20
10	15		5,97E+21	5,51E-08	0,39	39
15	10		1,77E+21	8,27E-08	0,12	12
15	15		1,77E+21	8,27E-08	0,20	20

Таблица 2. – Оценка силы электростатического взаимодействия

$\rho_V, \%$	$h, \text{нм}$	$\Delta, \text{м}$	$F_{\varepsilon=3}, \text{Н}$	$F_{\varepsilon=5}, \text{Н}$	$mg, \text{Н}$	$\frac{F_{\varepsilon=3}}{mg}$	$\frac{F_{\varepsilon=5}}{mg}$
1	0	7,48E-08	1,37E-14	8,22E-15	3,6654E-19	3,74E+04	2,24E+04
2	0	5,94E-08	2,18E-14	1,31E-14	3,6654E-19	5,94E+04	3,56E+04
1	5	7,48E-08	1,37E-14	8,22E-15	3,6654E-19	3,74E+04	2,24E+04
2	15	5,94E-08	2,18E-14	1,31E-14	3,6654E-19	5,94E+04	3,56E+04

Заклучение

Одним из необходимых условий создания композиционных материалов с физическими и технологическими свойствами, отличными от аналогичных для основы, является выбор наполнителя с достаточно высокой модифицирующей активностью. Причина модификации – это наличие активных заряженных центров на поверхности. Эти заряды на диэлектриках обусловлены так называемым барьерным эффектом, когда в плоскости раскола возникают ювенильные плоскости с различными потенциалами. На поверхности поликристаллических металлов зарядовая мозаика возникает в результате контакта с разными уровнями Ферми и при диспергировании создаются металлические частицы с разными зарядами. Наличие электрических зарядов на частицах обусловлено флуктуационными процессами. Показано, что при небольших концентрациях наполнителя и практически стандартных размерах наночастиц и толщины модифицированного поверхностного слоя коэффициент модификации может быть достаточно большим. Если модифицированные области начинают примыкать друг к другу, то свойства композита могут существенно ухудшиться по сравнению с исходной матрицей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механизм формирования структуры нанокоспозиционных материалов на основе полимерных и олигомерных матриц / В. А. Лиопо [и др.] // Прогрессивные машиностроительные технологии : монография / А. Н. Афонин [и др.]. – М. : Спектр, 2012. – Т. 2. – С. 159–248.
2. Дункен, Х. Квантовая химия обструкции на поверхности твердых тел / Х. Дункен, В. Лыгин. – М. : Мир, 1980. – 288 с.
3. Мецик, М. С. Физика диэлектриков : учеб. пособие / М. С. Мецик, Г. Ю. Гладкий. – Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 2001. – 116 с.
4. Дистлер, Г. И. Декорирование поверхности твердых тел / Г. И. Дистлер, В. П. Власов, Ю. М. Герасимов. – М. : Наука, 1976. – 112 с.
5. Дистлер, Г. И. Исследования структуры и свойств твердых тел методами декорирования / Г. И. Дистлер // Изв. АН СССР. Сер. физ. наук. – 1972. – Т. 36. – С. 1846–1851.
6. Дистлер, Г. И. Кристаллизация как матричный репликационный процесс / Г. И. Дистлер // Рост кристаллов. – Ереван : Изд. ЕрГУ, 1975. – Т. XI. – С. 47–62.
7. Полимер-силикатные машиностроительные материалы: физико-химия, технология, применение / С. В. Авдейчик [и др.] ; под ред. В. А. Струка, В. Я. Щербы. – Минск : Тэхналогія, 2007. – 431 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.05.2015

Liopo V.A., Auchynnikaу Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L., Sitkevich F.A. Charge Fluctuations by Dispersing and Modifying Active Nanoparticles

In the manufacture of composite materials in which there are new physical and technological properties. This is due to the high modifying activity of nanoparticles used. The reason for modifying actions are charged active centers. Increasing the concentration of filler improves the properties of the composite, but to a certain limit. The causes of the deterioration of the quality of the composite barrier in achieving its value.

УДК 535.44

Г.А. Пашкевич¹, А.С. Ланчук², А.А. Крючин³, А.В. Прыгун⁴, В.И. Юрлов⁵¹канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник,

зав. лабораторией Института физики НАН Беларуси

² д-р тех. наук, главный науч. сотрудник

Института проблем регистрации информации НАН Украины

³ д-р тех. наук, чл.-кор. НАН Украины,

зам. директора Института проблем регистрации информации НАН Украины

⁴ мл. науч. сотрудник Института проблем регистрации информации НАН Украины⁵ канд. тех. наук, ведущий науч. сотрудник фирмы «Самсунг Элетро-механикс»

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОДАВЛЕНИЯ СПЕКЛОВ ДВИЖУЩИМСЯ ДИФРАКЦИОННЫМ ОПТИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В работе проанализировано влияние aberrаций на эффективность подавления спеклов за счет перемещения дифракционного оптического элемента, размещенного внутри оптической системы на основе аппроксимации Френеля и модели тонкой линзы. Показано, что контраст спеклов в приосевой зоне оптической системы не чувствителен к aberrациям и расфокусировке объектива. Однако эффективность подавления спеклов в периферийной области оптической системы уменьшается для линзы с большими aberrациями. Показано, что размещение движущегося дифракционного оптического элемента непосредственно перед оптическим модулятором обеспечивает простой и эффективный метод подавления спеклов.

Введение

Лазеры имеют высокую оптическую эффективность и излучают световые пучки высокого качества, что позволяет создавать эффективные, экономичные и компактные оптические проекторы и системы освещения [1]. Однако изображение, созданное когерентным освещением, модулируется когерентным шумом, который создает сильную зернистую модуляцию интенсивности света в изображении (субъективные спеклы), возникающую вследствие интерференции лазерного света рассеянного шероховатой поверхностью экрана или освещенного объекта [2]. Поиск методов значительного снижения спекловых шумов является актуальной проблемой в создании лазерных проекторов [2–5] и когерентных систем освещения [6–7]. Спекловый контраст C , который определяет интенсивность спеклового шума и рассчитывается по формуле

$$C = \sigma / \bar{I}, \quad (1)$$

где σ – стандартное отклонение интенсивности, вызванное спекловыми шумами, а \bar{I} – среднее значение интенсивности освещения в изображении (для однородно освещенного экрана). Аппаратные методы уменьшения шумов основаны на усреднении шумового сигнала [2]. Усреднение спекловых шумов, в свою очередь, основано на уменьшении когерентности лазерного пучка, используемого для освещения. Имеется три возможности для снижения когерентности лазерного освещения: снижение поляризационной когерентности (усреднение по поляризации); снижение временной когерентности (усреднение по длинам волн) и снижение пространственной когерентности (усреднение по углам падения) [2].

Снижение поляризационной когерентности уменьшает спекл в небольшом динамическом диапазоне [8; 9] (максимум 30%). Уменьшение временной когерентности [2; 10; 11] требует использования широкополосного лазера или лазеров с различными длинами волн, достаточными, чтобы создать большое количество решеток декоррелированных спеклов, необходимых для уменьшения спеклового шума ниже чувствитель-

ности глаза. Следует отметить, что мощные лазерные диоды могут иметь относительно большой частотный диапазон и в сочетании с угловым разнообразием могут быть успешно использованы для эффективного снижения спеклов [12] за пределами чувствительности глаза. В отличие от этих двух методов, уменьшение пространственной когерентности представляет собой способ эффективного подавления спеклов [2; 13–25], что дает возможность использовать наиболее эффективные источники света, такие как мощные лазеры и лазерные диоды, а также имеет большой динамический диапазон.

Метод подавления спеклов должен сокращать пространственную когерентность лазерного излучения до времени разрешения (один период интеграции) человеческого глаза (или любой оптической системы, создающей изображение). Одним из самых простых способов уменьшения пространственной когерентности является использование нескольких декоррелированных лазерных пучков, падающих на экран под разными углами (углы декорреляции), с разницей в углах достаточной для получения декоррелированных спекловых изображений. Это может быть достигнуто путем деления одного лазерного луча с использованием дифракционного элемента, а затем необходимо применять различные задержки к пучкам (достаточные для декорреляции лазерного пучка) [14]. Кроме того, для пространственной декорреляции можно использовать достаточно длинные многомодовые оптические волокна [15–16] или оптические трубки [12] в режиме декорреляции. Пространственные периоды декорреляции этих двух методов на много порядков меньше, чем время разрешения любой оптической системы (т.е. они практически мгновенны). Однако в этих методах трудно получить большое подавление спеклов в широкой области спектра из-за трудности создания большого количества декоррелированных лазерных лучей с разницей в углах падения, необходимых для декорреляции спекл-структуры.

Один из наиболее перспективных методов уменьшения спекловых шумов основан на использовании подвижного диффузора. Диффузор обычно помещается внутри оптической системы лазерного проектора. Диффузор может быть нерегулярным [17] или регулярным (иметь периодическую или близкую к периодической структуру поверхности), то есть быть дифракционным оптическим элементом (ДОЭ) [18–26]. Использование ДОЭ позволяет точно контролировать параметры оптической системы, что облегчает разработку оптических систем с оптимальными характеристиками.

Целью данной работы является исследование оптической системы с эффективным подавлением спекловых шумов, действие которых основано на мультиплексировании лазерного пучка с помощью бинарного псевдослучайного движущегося ДОЭ. В отличие от предыдущих методов, использующих волокно или несколько декоррелированных лазерных лучей под разными углами, метод, основанный на движущемся ДОЭ, имеет время декорреляции приблизительно равное временному разрешению человеческого глаза или оптической системы создающей изображение. Поскольку структура регулярного ДОЭ является периодической, результат уменьшения спекловых шумов зависит от размера и точности перемещения ДОЭ. Таким образом, структура ДОЭ должны быть разработана так, чтобы позволяла получить все возможные декорреляционные спеклы структур путем простого перемещения ДОЭ. Одномерный ДОЭ с кодом Баркера позволяет получить все возможные для данного объектива декорреляционные углы путем простого линейной перемещения ДОЭ [19–21]. Тем не менее в этом случае угловое разнесение используется только в одной плоскости. Trisnadi предложил двумерный ДОЭ [18] на основе матриц Адамара, что позволяет использовать двумерное угловое разнообразие. Однако этот способ требует точного, быстрого и сложного перемещения ДОЭ в двух ортогональных плоскостях. В работах [22–25] предложен метод с двумерным ДОЭ с кодом Баркера, при котором можно использовать всю апертуру объектива для получения максимального углового разнообразия. В этом случае только

простое линейное смещение ДОЭ на N периодов, где N является длиной кода Баркера (или M -последовательности), необходимо для получения полного подавления спеклов [22–26]. Экспериментальные данные подтвердили высокую эффективность этого метода подавления спекловых шумов [26].

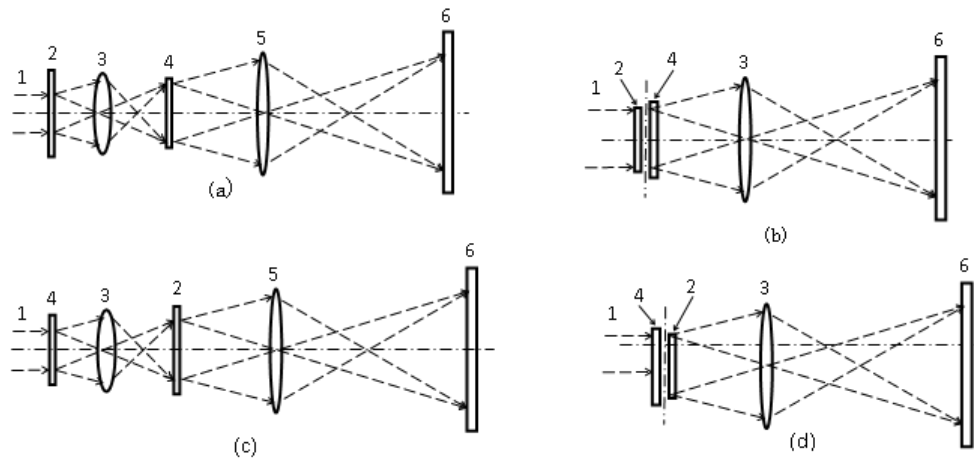
Сложность конструкции и надежность оптического проектора с регулярным ДОЭ зависит от местоположения ДОЭ в оптической системе проектора и механизма смещения ДОЭ. В работах [17–26] исследованы различные типы ДОЭ и методы смещения ДОЭ, влияющие на снижения спеклов. Зависимость статистики спеклов от качества объектива системы изображения были проанализированы в [2; 27–29] для полностью и частично развитых спекловых структур. Было показано, что статистика спеклов зависит только от четных аберраций. Влияние качества объектива на эффективности уменьшения спеклов была проанализирована в [19] для случая 1D сканирующего лазерного проектора. В этом случае аберрации только искажают фазу пространственных частот света. Иная ситуация в случае использования лазерного проектора с 2D оптического модулятора, который может иметь поперечные размеры, примерно равные диаметру объектива.

В этой статье рассмотрены четыре возможных места ДОЭ в оптической системе для получения простой и надежной оптической схемы с оптимальной эффективностью подавления спеклов. Проанализировано влияние аберраций и дефокусировки оптической системы на эффективность подавления спекловых шумов с помощью математической модели тонкой линзы и приближении Френеля с учетом квадратичного фазового множителя в плоскости объекта [30], что является важным для когерентных оптических систем.

Оптическая схема лазерного проектора с подвижным ДОЭ

На рисунке 1 показаны четыре оптические схемы с различным размещением ДОЭ в оптической части лазерного проектора. В этих схемах свет проходит через оптическую систему с оптическим модулятором и проецирует изображение, созданное с помощью оптического модулятора на экране. Предполагается, что без ДОЭ зритель будет видеть полностью развитую спекл-картину на экране. Это допущение используется только для извлечения чистого влияния движения ДОЭ на эффект подавления спеклов. В первой оптической схеме (рисунок 1а) ДОЭ (4) находится в промежуточной плоскости изображения первого объектива (3). Известно, что в этом случае, чтобы сохранить качество изображения, осевое отклонение положения ДОЭ (переход от промежуточной плоскости изображения) не должно превышать глубину фокуса линзы (3); поэтому, ДОЭ должен быть точно расположен. Кроме того, эта схема должна иметь два безаберрационных объектива (3 и 4), имеющих большие числовые апертуры; поэтому, это не самое лучшее техническое решение.

Во второй оптической схеме (рисунок 1б) ДОЭ (4) помещен непосредственно за оптическим модулятором (2). В этом случае расстояние между ДОЭ и оптическим модулятором должно быть меньше глубины фокуса объектива (3), чтобы сохранить качество изображения, потому что ДОЭ должен двигаться, и глубина фокуса не более нескольких десятков микрон, что не является хорошим решением для оптической схемы. Однако, если механическое перемещения ДОЭ заменить электрически переключаемой ЖК-панелью или микро-электромеханическими элементами, то такая оптическая схема может быть приемлемой.



1 – колиммированный лазерный луч; 2 – оптический модулятор;
3 – первый; 4- ДОО; 5 – второй объектив; 6 – экран

Рисунок 1. – Четыре оптические схемы с подвижным ДОО в различных местах в лазерных системах проекторов

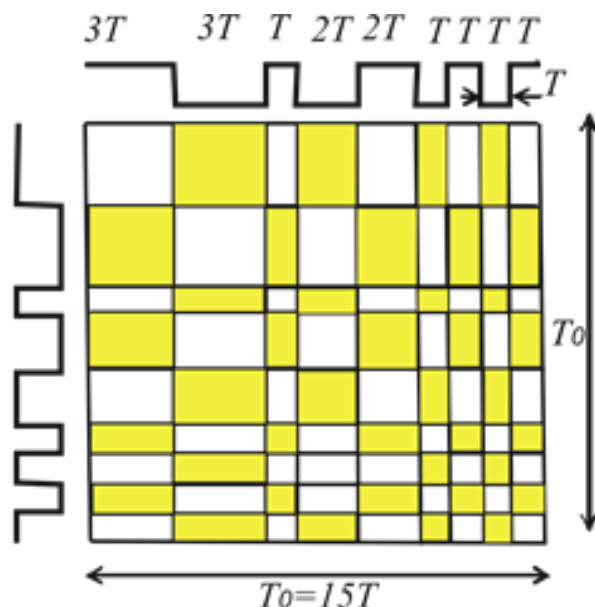
В третьей оптической схеме (рисунок 1с) оптический модулятор (2) расположен в плоскости изображения ДОО (4), созданного (первой) линзой (3). Реализация этой схемы требует теоретического анализа чувствительности уменьшения спеклов от аберраций линз и дополнительного сдвига модулятора по отношению к плоскости изображения ДОО. Входной диаметр объектива (3) предполагается достаточно большим, чтобы собрать почти весь дифрагированный свет (все пространственные частоты) рассеянные ДОО ($NA > \lambda/T$, где NA – числовая апертура, λ – длина волны лазера, а T – минимальный элемент длины ДОО). Эта схема является более громоздкой, чем предыдущая, но имеет одно неоспоримое преимущество, так как она позволяет иметь большее расстояние между ДОО и оптическим модулятором.

В четвертой схеме (рисунок 1d) движущийся ДОО (4) помещают непосредственно перед оптическим модулятором (2). Предполагается, что модулятор освещается всеми пространственными частотами света, выходящими из ДОО. Таким образом, расстояния между ДОО и оптическим модулятором не должны быть очень большими и поперечные размеры ДОО должны быть больше, чем у оптического модулятора. Это простая схема оптической проекционной системы без непосредственной близости ДОО к оптическому модулятору. Тем не менее ее реализация требует дальнейшего изучения влияния расстояния между ДОО и оптическим модулятором на эффективность снижения спеклов.

Ниже мы будем анализировать влияния аберрации, расфокусировки объектива, скорости и направлении движения ДОО по эффективности снижения спекловых шумов для третьей и четвертой оптических схем, при условии, что оптическая система пропускает все пространственные частоты света, которые падают на ДОО.

Математическая модель механизма подавления спеклов.

Оптическая схема с ДОО с кодом Баркера или М-последовательностью [12, 19–26] будет использоваться в нашем анализе. Двумерный ДОО с М-последовательностью с длиной кода $N = 15$ показан на рисунке 2. Однако, поскольку общий математический метод и общие свойства оптической системы будут использоваться в анализе, полученные результаты будут точными для других типов ДОО.



Серые и белые области – выступы и углубления соответственно.

Разница в высоте дает сдвиг фазы волнового фронта лазерного луча на π .

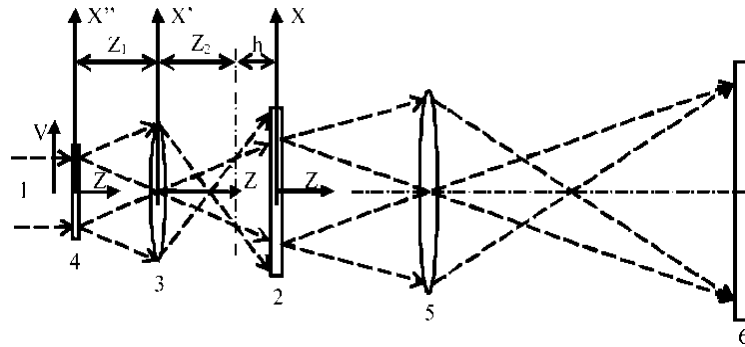
Шаг линий слева и вверху показывает форму М-последовательности 1D ДОО, используемого в качестве основы для 2D ДОО

Рисунок 2. – Один период М-последовательности 2D ДОО структуры с $N = 15$

Было показано [22; 23], что при определенных условиях автокорреляционная функция коллимированного лазерного луча, который проходит через ДОО 2D с кодом Баркера, с хорошей точностью может быть представлена в виде произведения двух узких автокорреляционных функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Такими условиями являются: 1) ДОО смещается (за промежуток времени равный разрешающей способности глаза) ровно один период T_0 в одном направлении (вдоль краев структуры) и на расстоянии нескольких периодов ДОО, умноженное на длину кода в ортогональном направлении, где N является длиной кода Баркера, M – любое положительное число; 2) числовая апертура объектива достаточно большая, чтобы собрать практически весь свет от дифрагированного ДОО (это эквивалентно $NC > \lambda/T$. Эти две автокорреляционные функции являются автокорреляционными функциями 1D ДОО на основе кода Баркера [23]. Это позволило также получить нужное соотношение между смещениями в двух направлениях, если ДОО наклонен под углом к направлению движения $\tan(\alpha) = 1/MN$. 2D-функции рассеяния точки объектива с прямоугольной апертурой является продуктом двух 1D функций рассеяния точки объективом с апертурой, которая является достаточно большой, чтобы поймать все пространственные частоты света, прошедшие через ДОО. При этом условии и с высокой точностью мы можем свести задачу 3D к 2D. Таким образом, с достаточной точностью можно упростить анализ структуры 3D для анализа 2D структуры ДОО с одномерным кодом Баркера. Чтобы избежать громоздких вычислений, этот подход применяется нами ниже, чтобы проанализировать влияние aberrации и расфокусировки на эффективность подавления спеклов.

На рисунке 3 показана оптическая схема, в которой изображение ДОО проецируется на оптический модулятор. Предполагается, что первый объектив проектора имеет aberrации и что плоскость изображения ДОО не в точности совпадает с плоскостью оптического модулятора; т.е. плоскость изображения находится на расстоянии Z_2 от лин-

зы (3), в то время как оптический модулятор (4) дополнительно сдвигается на малое расстояние h , что отражает степень расфокусировки.



1 – коллимированный лазерный луч; 2 – оптический модулятор;
3 – первая линза; 4 – ДОЭ; 5 – вторая линза; 6 – экран.

Рисунок 3. – Оптическая схема с проекцией изображения движущегося ДОЭ с аберрацией и расфокусировкой h на плоскости оптического модулятора

В нашей математической модели мы используем систему координат, связанную с плоскостью модулятора. Субъективный контраст спеклов в изображении на экране может быть вычислен с помощью [20]

$$C = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(x_1 - x_2)|^2 \operatorname{sinc}^2(2\pi x_1/D) \operatorname{sinc}^2(2\pi x_2/D) dx_1 dx_2}{|A(0)|^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(2\pi x/D) dx \right]}}, \quad (2)$$

где $\operatorname{sinc}^2(2\pi x_1/D)$ – интенсивность функции распределения в точке наблюдения на экране; D – ширина элемента разрешения глаза на экране, $D = \lambda / NA_{2in}$ и NA_{2in} входная числовая апертура человеческого глаза. $A(x)$ – автокорреляционная функция светового поля на экране, полученная путем усреднения по времени разрешение человеческого глаза, которая рассчитывается как

$$A(x, x + x') = \langle E(x, t) E^*(x + x', t) \rangle = \int_{t=0}^{t_0} E(x, t) E^*(x + x', t) dt, \quad (3)$$

где t_0 временное разрешение человеческого глаза, x и x' – точки в плоскости экрана. Таким образом, проблема воздействия аберрации и дефокусировки на эффективность снижения спеклов сводится к задаче их воздействия на модуль автокорреляционной функции (МАФ), полученной путем усреднения по времени разрешение глаза.

Анализ оптической схемы проекции изображения ДОЭ с аберрацией и дефокусировкой на оптический модулятор. Анализ с линейной аппроксимацией квадратичного фазового множителя

Предполагается, что ДОЭ с кодом Баркера движется вдоль оси X с постоянной скоростью V и модулирует волновой фронт пучка с периодической последовательностью 1D кодом Баркера. В приближении Френеля и на основе модели тонкой линзы распределение поля в плоскости смещенной на расстоянии h от плоскости изображения может быть записано в виде

$$E(x,t) = K_1 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x'') H(x'' - Vt) \exp[i\{\Phi(x')\}] \exp\left[i\frac{k}{2}\left(\frac{x'^2}{F} - \frac{(x'' - x')^2}{Z_1} - \frac{(x' - x)^2}{Z_2 + h}\right)\right] dx'' dx' \quad (4)$$

Сумма во второй экспоненте может быть представлена следующим образом:

$$x'^2/F - (x'' - x')^2/Z_1 - (x' - x)^2/(Z_2 + h) = (2x'x'' - x''^2)Z_1 - (x^2 - 2xx')/Z_2 + h(x' - x)^2/Z_2(Z_2 + h);$$

Здесь мы учитываем хорошо известное соотношение для оптически сопряженной проекции системы: $(1/Z_1) + (1/Z_2) = 1/F$. Теперь уравнение (4) может быть представлено следующим образом:

$$E(x,t) = E_0 K_1 \iint H(x'' - Vt) \exp[i\{\Phi(x')\}] \exp\left[i\frac{k}{2}\left(-\frac{x''^2 - 2x'x''}{Z_1} - \frac{x^2 - 2xx'}{Z_2} + \frac{h(x' - x)^2}{Z_2(Z_2 + h)}\right)\right] dx'' dx', \quad (5)$$

где K_1 – постоянный множитель, $H(x''_s - Vt)$ – периодически модулируемая функция с кодом Баркера (или М-последовательностью), скорость которой V , и $\Phi(x')$ – искажения фазового фронта из-за аберраций. Поскольку контраст спеклов зависит только от модуля нормированной автокорреляционной функции, мы не будем точно рассчитывать сложные постоянные коэффициенты для автокорреляционной функции. Они просто могут быть записаны в виде K_2, K_3, \dots

Рассмотрим второй показатель в правой части уравнения (4). Последний член в уравнении представляет эффекта дефокусировки. В отсутствие расфокусировки член становится равным нулю, т.к. отсутствует фокусное расстояние во второй экспоненте, а увеличение определяется соотношением между Z_1 и Z_2 . Второй показатель в уравнении представляет собой аберрации свободного объектива, но с возможностью расфокусировки. Аберрация волнового фронта объектива представлена первой экспонентой $\exp[i\Phi(x')]$. Используя уравнение (5), автокорреляционную функцию поля на плоскости оптического модулятора можно записать в виде

$$A(x, x_s) = K_1 E_0 E_0 \iiint \exp[i\{\Phi(x') - \Phi(x'_s)\}] A_0(x'' - x''_s) \times \exp\left[i\frac{k}{2}(\Phi_1(x''_s, x'', x'_s, x') + \Phi_2(x_s, x, x'_s, x') + \Phi_3(x_s, x, x'_s, x'))\right] dx'' dx' dx''_s dx'_s, \quad (6)$$

где x' и x'_s – две точки на плоскости оптического модулятора, а

$$\begin{aligned} \Phi_1(x''_s, x'', x'_s, x') &= (x''_s{}^2 - x''^2 - 2x'_s x'' + 2x'' x') / Z_1, \\ \Phi_2(x, x_s, x', x'_s) &= (x_s^2 - x^2 - 2x'_s x_s + 2xx') / Z_2, \\ \Phi_3(x, x_s, x', x'_s) &= h(x' - x)^2 / Z_2(Z_2 + h) - h(x'_s - x_s)^2 / Z_2(Z_2 + h). \end{aligned} \quad (7)$$

Для любой точки с координатой x'' в плоскости ДОЭ, мы можем сделать приближение $x''^2 = (x_0'' + \Delta x'')^2 \approx x_0''^2 + 2x_0'' \Delta x''$, $x_s^2 = (x_0'' + \Delta x'')^2 \approx x_0''^2 + 2x_0'' \Delta x_s''$,

где x_0'' – точка сопряженная с точкой изображения x на плоскости оптического модулятора, в окрестности которой рассчитывается автокорреляционная функция. $(\Delta x'')^2$ и $(\Delta x_s'')^2$ малы и ими можно пренебречь, когда $k\Delta x''^2 / 2Z_1 \ll \pi$. Только площадь шириной равной разрешению первой линзы на ДОЭ (с учетом аберраций объектива) в окрестности точки x_0'' дает существенный вклад в интеграл в уравнении (6), и следовательно, приближение (8) справедливо при

$$\Delta x'' \approx D_1 \ll \sqrt{\lambda Z_1}, \quad (9)$$

Следовательно, приближение будет точным, если разрешение объектива является существенно меньше $\sqrt{\lambda Z_1}$. Тогда

$$\Phi_1(x_s'', x'', x_s', x') = (x_s''^2 - x''^2 - 2x_s'x_s'' + 2x'x'')Z_1 = 2\{u(x' - x_0'') + (x_0'' + \Delta x''_s)(x' - x_s')\} / Z_1, \quad (10)$$

где $u = \Delta x'' - \Delta x_s''$. Подстановка (10) в уравнение (4) дает

$$A(x - x_s) = K_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u) \exp[i\Phi(x')] \exp[-i\Phi(x'_s)] \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\frac{2u(x' - x_0'') + 2(x_0'' + \Delta x''_s)(x' - x'_s)}{Z_1} + \Phi_2(x, x_s, x', x'_s) + \Phi_3(x, x_s, x', x'_s) \right)\right] dx' dx'_s d\Delta x''_s, \quad (11)$$

интегрирование уравнения (11) по u и $\Delta x''_s$ дает

$$\begin{aligned} A(x - x_s) &= K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} FA_0\left(\frac{(x' - x_0'')k}{Z_1}\right) \exp\left[i[\Phi(x') - \Phi(x'_s)]\right] \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\frac{2x_0'(x' - x'_s)}{Z_1} + \Phi_2(x, x_s, x', x'_s) + \Phi_3(x, x_s, x', x'_s) \right)\right] \delta(x' - x'_s) dx' dx'_s, \\ &= K_2 \int_{-\infty}^{\infty} FA_0\left(\frac{(x' - x_0'')k}{Z_1}\right) \exp\left[-i\frac{k}{2} (\Phi_2(x, x_s, x', x') + \Phi_3(x, x_s, x', x'))\right] dx' \end{aligned} \quad (12)$$

где FA_0 Фурье преобразование $A_0(x)$: $FA_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x) \exp[-i\omega x] dx$.

С использованием выражений

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, x_s, x', x'_s = x') &= (x_s^2 - x^2) / Z_2 + 2x'(x - x_s) / Z_2, \\ \Phi_3(x, x_s, x', x'_s = x') &= 2hx'(x_s - x) / Z_2(Z_2 + h) + h(x_s^2 - x^2) / Z_2(Z_2 + h), \end{aligned} \quad (13)$$

уравнение (12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} A(x - x_s) &= K_2 \int_{-\infty}^{\infty} FA_0\left(\frac{(x' - x_0'')k}{Z_1}\right) \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\frac{x_s^2 - x^2}{Z_2} + 2x' \frac{x - x_s}{Z_2} + \frac{2hx'}{Z_2(Z_2 + h)}(x_s - x) + \frac{h}{Z_2(Z_2 + h)}[(x_s^2 - x^2)] \right)\right] dx' = \\ &= K_3 \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\frac{x_s^2 - x^2}{Z_2} + \frac{h}{Z_2(Z_2 + h)}[(x_s^2 - x^2)] \right)\right] \exp\left[ik(x_s - x)x_0'' \frac{1}{Z_2 + h}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} FA_0\left(\frac{(x' - x_0'')k}{Z_1}\right) \exp\left[ik \frac{Z_1}{Z_2 + h}(x_s - x)(x' - x_0'') \frac{1}{Z_1}\right] dx' \end{aligned} \quad (14)$$

Интеграл в правой части уравнения (14) является обратным преобразованием Фурье. Наконец, после интегрирования уравнения (14) формула для автокорреляционной функции может быть записана в виде

$$A(x - x_s) = K_4 \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\frac{x_s^2 - x^2}{Z_2} + \frac{h}{Z_2(Z_2 + h)}[(x_s^2 - x^2)] \right)\right] \times \exp\left[ik(x_s - x)x_0'' \frac{1}{Z_2 + h}\right] A_0\left((x_s - x) \frac{Z_1}{Z_2 + h}\right), \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что

$$|A(x - x_s)| = K_4 \left| A_0\left((x_s - x)Z_1 / (Z_2 + h)\right) \right|. \quad (16)$$

После интегрирования уравнения (12) коэффициент aberrации $\exp[i\Phi(x')]$ отб-

расыаецца. Паэтым абэрацыі не вліяюць на модуль функцыі автокорреляцыі (16), і, следавальна, эфэктывнасць падаўлення спеклов не залежыць ад абэрацыі першай лінзы (3) ці аб'ектыва (5) (рысунак 3). Із уравнення (16) очевидна, што расфокусіроўка дадатковага аб'ектыва толькі змяняе маштаб модуля нармыванай автокорреляцыйнай функцыі на каэфіцыент $Z_1 / (Z_2 + h)$, які тоўна зменен на велічыну, кгда оптычэская сістэма настраена на новую пазіцыю оптычэскага модулятара. Это падтвэрждае ізнатны факт, што эфэктывнасць падаўлення спеклов оптычэскай сістэмы непасрэдавенна залежыць толькі ад выхаднай лісловай апертуры аб'ектыва [2]. Атаметым, што все палученыя рэзултаты справядлівы для оптычэскай сістэмы пока выконваецца неравенства (9).

Аналіз в прыбліжэнні Френеля

Уравненіе (6) можа быць упрощено путем замены переменных $u = x'' - x_s''; v = x'' + x''$ к виду

$$A(x, x_s) = K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u'') \exp[i\Phi(x'')] \exp[-i\Phi(x_s'')] \exp[-iku''v''/2Z_1] \exp[ikv''(x' - x_s')/2Z_1] \times \exp[ik((x' + x_s')(x' - x_s')/2Z_1)] \exp[ik0.5\Phi_2(x, x_s, x', x_s')] dx' dx_s' dv'' du'' \quad (17)$$

Інтэгрываваанне па u і v в уравненні (17) прамое і абратное преобразования Фурье соответственно, поэтому после интегрирования (17) можно переписать в виде

$$A(x, x_s) = K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x_s' - x') \exp[i\Phi(x')] [-i\Phi(x_s')] \exp\left[-ik \frac{(x' + x_s')(x' - x_s')}{2Z_1}\right] \exp\left[-i \frac{k}{2} (\Phi_2(x, x_s, x', x_s') + \Phi_3(x, x_s, x', x_s'))\right] dx' dx_s', \quad (18)$$

Уравненіе (18) после подстановки уравнения (7) и замены переменных $u_1 = x_s' - x'; v_1 = x_s' + x'$ упрощается до

$$A(x, x_s) = K_3 \exp\left[\frac{k(x_s'^2 - x'^2)}{2(Z_2 + h)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u') \exp\left[i\left(\Phi\left(\frac{u'+v'}{2}\right) - \Phi\left(\frac{v'-u'}{2}\right)\right)\right] \exp\left[i \frac{k}{2} v' \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{h}{Z_2(Z_2+h)}\right) + \frac{(x+x_s)}{Z_2+h}\right] \exp\left[i \frac{k}{2} \frac{v'(x-x_s)}{Z_2+h}\right] du' dv', \quad (19)$$

Для безабэрацыйнай оптычэскай сістэмы МАФ можна запісаць в виде

$$|A(x, x_s)| = \left| K_4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u') \exp\left[i \frac{k}{2} v' \left(1 - Z_1 \left(1 + \frac{1}{M} \frac{h}{Z_2+h}\right) \frac{x+x_s}{Z_2+h}\right) / \left(Z_1 \left(1 + \frac{1}{M} \frac{h}{Z_2+h}\right)\right)\right] \exp\left[i \frac{k(x-x_s)}{2(Z_2+h)} \left(v' - Z_1 \left(1 + \frac{1}{M} \frac{h}{Z_2+h}\right) \frac{x+x_s}{Z_2+h}\right)\right] du' dv' \right|, \quad (20)$$

$$= \left| K_4 A_0 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{1}{M} \frac{h}{Z_2+h}\right) (x-x_s) \right) \right|,$$

где $M = Z_2 / Z_1$ – увелічэнне оптычэскай сістэмы. Із уравнення (20) следует, что расфокусіроўка вліяе на кантраст спеклов толькі пры очень бальных значеннях, кгда $h / (M(Z_2 + h) + 1)$, т.е. $h + M \cdot Z_2$.

Мадэліраванне вліяння абэрацый вазможна толькі для аб'ектыва с канечнай апертурой. Для 2D случая і канечнай апертуры уравненіе (19) преобразуется в (рысунак 4).

$$A(x, x_s) = K_4 \left[\int_{-2a}^0 dv' \exp \left[-i \frac{k}{2Z_2} v' (x - x_s) \right] \int_{-v_1 - 2a}^{2a + v_1} A_s(u', x + x_s) \exp \left\{ i \left(\Phi \left(\frac{v' + u'}{2} \right) - \Phi \left(\frac{v' - u'}{2} \right) \right) \right\} \exp \left[i \frac{k}{2} u' \left(\frac{v'}{Z_1} + \frac{x + x_s}{Z_2} \right) \right] du' \right. \\ \left. + \int_0^{2a} dv' \exp \left[-i \frac{k}{2Z_2} v' (x - x_s) \right] \int_{v_1 - 2a}^{2a - v_1} A_s(u', x + x_s) \exp \left\{ i \left(\Phi \left(\frac{v' + u'}{2} \right) - \Phi \left(\frac{v' - u'}{2} \right) \right) \right\} \exp \left[i \frac{k}{2} u' \left(\frac{v'}{Z_1} + \frac{x + x_s}{Z_2} \right) \right] du' \right], \quad (21)$$

где $2a$ – ширина апертуры

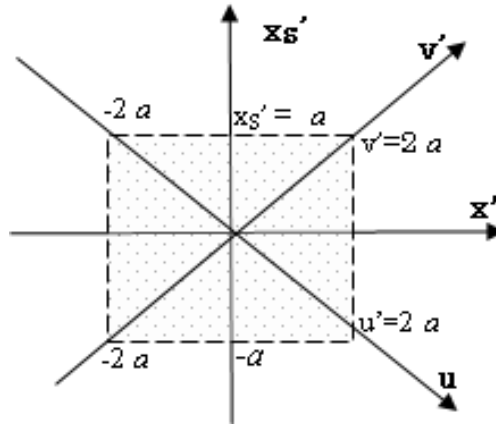
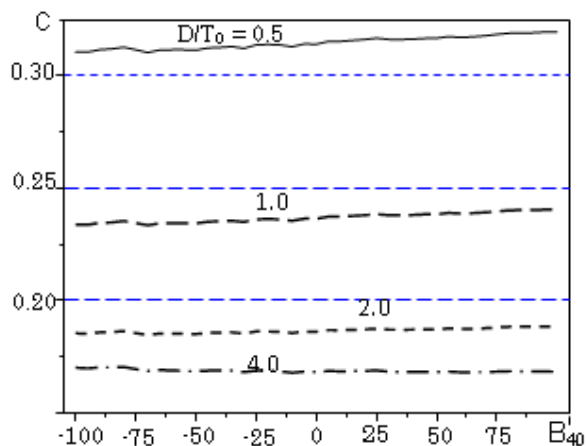


Рисунок 4. – Область интегрирования в уравнении (21)

Для анализа были использованы ДОО с $T = 3$ мкм и лазерный источник, имеющий длину волны $\lambda = 0,5$ мкм. Мы используем уравнение 2 и уравнение 12 для расчета контраста спеклов. Предполагалось, что второй объектив не имеет aberrаций и поэтому функция автокорреляции на экране имеет ту же форму, как на плоскости оптического модулятора, но масштабируется по x оси на увеличении объектива. Только основная сферическая aberrация $\Phi(x) = A_{40} \cdot (x/z_1 \lambda/T)^4$ и $\Phi(x) = A_{31} \cdot (x/(z_1 \lambda/T))^3$ кома (2D случай) используются при анализе.

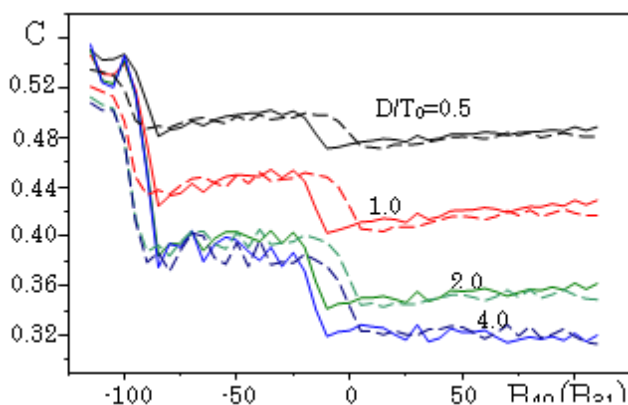
На рисунке 5 показана зависимость контраста спеклов от сферической aberrации для различных соотношений между разрешением глаз и периодом ДОО для приосевой области экрана ($x + x_s = 1,2$ мкм; $(x + x_s)/2a \ll 1$). Результаты моделирования (рисунок 5) показывают, что даже очень большая aberrация с искажением волнового фронта (более чем на 100λ) практически не изменяется эффективность подавления спеклов. Небольшие изменения в контрасте спеклов из-за коэффициента aberrации можно объяснить изменением углов между порядками дифракции.

На рис. 6 показаны зависимости контраста спеклов от сферической aberrации и кома для различных соотношений между разрешением глаза и периодом ДОО для периферийной области оптической системы, когда часть дифрагированного света стерта апертурой объектива. Зависимость контраста спеклов от aberrации имеет аналогичная зависимость при различных соотношениях разрешения глаз и периодом ДОО. Увеличение положительных сферических aberrаций приводит к небольшому увеличению подавления спеклов.



Радиус линзы $r = 2.4$ мм; $Z1 = Z2 = 8$ мм
и $F = 4$ мм; $N = 11$; $x + x_3 = 1,2$

Рисунок 5. – Зависимость контраста спеклов при сферической аберрации для различных соотношений между оптическим разрешением глаза и периодом ДОО D / T_0



Радиус линзы $r = 2.4$ мм; $Z1 = Z2 = 8$ мм и $F = 4$ мм;
 $N = 11$; $x + x_3 = 4,2$.

Сплошная линия – сферическая аберрация,
штриховая – аберрация кома ($x + x_3 = -4.2$ мм)

Рисунок 6. – Зависимость контраста спеклов при сферической аберрации и кома для различных соотношений между оптическим разрешением глаза и периодом ДОО D / T_0

При небольшой отрицательной сферической и кома аберрациях происходит снижение спеклов с увеличением величины аберраций. Последующее увеличение отрицательных значений сферических аберраций приводит к быстрому ступенчатому повышению контраста спеклов с последующими колебаниями. Колебания контраста спеклов вызвано полосами, которые возникают из дифракции света на краях отверстия. Контраст спеклов от аберрации кома похож на зависимость от сферической аберрации, однако эффект зависит от знака области перехода к оптической оси. Ступенчатое изменение контраста спеклов можно объяснить уменьшением числа дифракционных порядков, что освещают область периферии экрана.

Заклучение

Показано, что подавление контраста спеклов за счет перемещения ДОЭ, совмещенного с плоскостью оптического модулятора, практически не чувствительно к абберрациям, если абберрации не изменяют количество порядков дифракции, которые освещают экран. Контраст спеклов в периферийной зоне светового пятна имеет ступенчатое поведение, если абберрации меняют количество дифракционных порядков, которые освещают экран. Одновременно освещенность экрана уменьшается и становится неоднородной из-за дифракции света на краю диафрагмы. В оптической схеме с ДОЭ, расположенным в передней части оптического модулятора, контраст спеклов не чувствителен к расстоянию между модулятором и ДОЭ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coldren, L. Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits / L. Coldren, S. Corzine, M. Mashanovitch // Second ed., John Wiley and Sons. – 2012.
2. Goodman, J. W. Speckle Phenomena in Optics. Theory and Applications / J. W. Goodman // Roberts & Company. – 2006.
3. Trisnadi, J. I. Overview and applications of Grating Light Valve TM based optical write engines for high-speed digital imaging / J. I. Trisnadi, C. B. Carlisle, V. Monteverde // MOEMS Display and Imaging Systems II, edited by Hakan Urey, David L. Dickensheets, Proc. SPIE 5348. – 2004. – P. 52–64.
4. Kowarz, M. W. Conformal grating electromechanical system (GEMS) for high-speed digital light modulation / M. W. Kowarz, J. C. Brazas, J. G. Phalen // IEEE, 15th Int. MEMS Conf. Digest. – 2002. – P. 568–573.
5. Spatial optical modulator (SOM): Samsung's light modulator for the next generation laser display / S. K Yun [et al.]. – 2008. – Vol. 29, № 1. – P. 551–555.
6. Hornberg, A. Handbook of Machine Vision / A. Hornberg // Wiley, – 2005.
7. Planar laser illumination and imaging (PLIIM) based camera system for producing high-resolution 3-D images of moving 3-D objects Planar laser illumination and imaging (PLIIM) based camera system for producing high-resolution 3-D images of moving 3-D objects / C. J. Tsikos [et al.] // US Patent 6988660. – 2002.
8. Reduction of Speckle Noise by Varying the Polarisation of Illuminating Beam / P. C. Kundu [et al.] // XP-002183475, Depart. of Applied Physics – 1975. – P. 63–67.
9. Trisnadi, J. I. Method and apparatus for reducing laser speckle using polarization averaging / J. I. Trisnadi // US Patent 6956878 B1. – 2005.
10. Saloma, C. Speckle reduction by wavelength and space diversity using a semiconductor laser / C. Saloma, S. Kawata, Sh. Minami // Appl. Opt. – 1990. – Vol. 29, № 6. – P. 741–742.
11. Trisnadi, J. I. Speckle contrast reduction in laser projection displays / J. I. Trisnadi // Proc. SPIE 4657, Projection Displays, 2002. – VIII. – 131 p.
12. Speckle reduction in laser projection using a dynamic deformable mirror / T. K. Tran [etal.] // Opt Express. – 2014. – Vol. 22, № 9. – P. 11152–11166.
13. Speckle reduction in laser projection systems by diffractive optical elements / L. Wang [et. al.] // Appl. Opt. – 1998. – Vol. 37. – P. 1770–1775.
14. Speckle suppression in laser display using several partially coherent beams / S. D. An [et al.] // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 92–103.
15. Manni, J. G. Versatile method for achieving 1% speckle contrast in large-venue laser projection displays using a stationary multimode optical fiber / J. G. Manni, J. W. Goodman // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 11288–11312.
16. Laser speckle reduction by multimode optical fiber bundle with combined tem-

poral spatial and angular diversity / Mehta D. S. [et. al.] // Appl. Opt. – 2012. – Vol. 51, № 12. – P. 1894–1904.

17. Kubota, Sh. Very efficient speckle contrast reduction realized by moving diffuser device / Sh. Kubota, J. W. Goodman // Appl. Opt. – 2010. – Vol. 49, № 23. – P. 4385–4391.

18. Trisnadi, J. I. Hadamard speckle contrast reduction / J. I. Trisnadi // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – P. 11–13.

19. Speckle suppression in scanning laser displays: Aberration and defocusing of the projection system / V. Yurlov [et al.] // Appl. Opt. – 2009. – Vol. 48. – P. 80–90.

20. Speckle suppression in scanning laser display / V. Yurlov [et al.] // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47. – P. 179–187.

21. Akram, M. N. Speckle reduction in line-scan laser projectors using binary phase codes / M. N. Akram, V. Kartashov, Zh. Tong // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35, № 3. – P. 444–445.

22. Full speckle suppression in laser projectors using two Barker code-type optical diffractive elements / A. Lapchuk [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 1. – P. 22–31.

23. Optimal speckle suppression in laser projectors using a single two-dimensional Barker code diffractive optical element / A. Lapchuk [et. al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 2. – P. 227–332.

24. Optical schemes for speckle suppression by Barker code diffractive optical elements / G. A. Pashkevich [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 9, 1760–1767.

25. The method of decreasing speckle noise in laser projector system / A. S. Lapchuk [et al.] // Ukraine patent application №. 04828. – 2013.

26. Experimental evaluation of speckle suppression efficiency using a moving 2D Barker code DOE / G. A. Pashkevich [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 11. – P. 2253–2258.

27. Bahuguna, R. D. Speckle patterns of weak diffusers: effect of spherical aberration / R. D. Bahuguna, K. K. Gupta, K. Singh // Appl. Opt. – 1980. – Vol. 19. – P. 1874–1878.

28. Murphy, P. K. Effect of optical aberrations on laser speckle / P. K. Murphy, J. P. Allebach, N. C. Gallagher // J. Opt. Soc. Am. – 1986. – Vol. 3. – P. 215–222.

29. Kang, D. Effect of optical aberration on Gaussian laser speckle / D. Kang, E. Clarkson, T. D. Milster // Opt. Expr. – 2010. – Vol. 17. – P. 3084–3100.

30. Tichenor, D. A. Coherent Transfer Function / D. A. Tichenor, J. W. Goodman // J. Opt. Soc. Am. – 1972. – Vol. 62. – P. 293–295.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.09.2015

Pashkevich G.A., Lapchuk A.S., Kryuchin A.A., Prygun A.V., Yurlov V.I. Impact of the Optical System Parameters on Speckle Suppression Efficiency by the Diffractive Optical Element

The impact of aberration on speckle suppression efficiency of the method based on moving Barker code or M-sequence type DOE placed inside the optical system is analyzed on the basis of Fresnel approximation and the thin lens model. The analysis has shown that the speckle suppression efficiency of the method at paraxial area of optical system is not sensitive to the aberration. The method also is practically not sensitive to defocus of objective lens. However the speckle suppression efficiency of the method at peripheral area of optical system decreases for a lens with large aberration. The properties of optical scheme with different DOE position are analyzed. It is shown that the DOE placed just before optical modulator provides the simple and efficient technical solution for the method.

УДК 539.3.620.23

В.С. Савенко

*д-р тех. наук, проф., зав. каф. общей физики и методики преподавания физики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина*

**ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПИНЧ-ЭФФЕКТА НА ДЕФОРМАЦИЮ
КРИСТАЛЛОВ Sb В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧНОСТИ**

Рассмотрены электронные механизмы электропластической деформации металлов. Для кристаллов Sb произведен анализ и расчет повышения пластичности за счет тепловой подготовки и пинч-эффекта, и приведены технологические схемы и приемы применения ортогональных электромагнитных полей в процессах электропластической деформации металлов.

При пропускании электрического импульса тока большой плотности через кристалл во время деформации возникают вторичные пинч- и скин-эффекты, а также термическое разупрочнение кристаллической решетки.

Представления о пинч-эффекте перешли в твердое тело из газовой плазмы [1]. По аналогии с газовой плазмой в твердом теле различают как самостоятельные явления Z – и Θ-пинч-эффекты [2]. Первый из названных эффектов (Z-пинч) возникает при протекании тока большой плотности по образцу и обусловлен сжатием электронной плазмы твердого тела собственным магнитным полем. Вторым эффектом (Θ-пинч) возникает при сжатии электронной плазмы твердого тела в импульсном продольном магнитном поле, нарастающем во времени. Беннетом [3] был сформулирован следующий критерий возникновения Z-пинча в полупроводниках

$$I \geq I_0 = \frac{2c^2 k(T_e - T_h)}{eV_{др}}$$

здесь $V_{др} = (b_e + b_h) E$ – дрейфовая скорость носителей в продольном электрическом поле: b_e, b_h, T_e, T_h – соответственно подвижности и эффективная температура электронов и «дырок». В случае металлов можно воспользоваться выражением для плотности электронного газа:

$$p = \frac{2}{3} n \epsilon_F = \alpha n^{5/3},$$

где $\alpha = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} h^2 \frac{1}{m_e}$, ($\alpha = 2,3 \cdot 10^{-27}$ эрг²/г). В этом случае критический ток запишется в виде:

$$I \geq I_0 = \frac{2c^2 \alpha n^{2/3}}{eV_{др}}$$

Проводя оценку и вклад этих факторов в явление электропластичности при двойниковании кристаллов сурьмы предположим, что на проводник с током прямоугольной формы под влиянием собственного магнитного поля действует сила:

$$F_x = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$

где σ_x – механическое напряжение.

Основное уравнение гидромагнетизма применительно к рассматриваемому случаю имеет вид:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \nabla(\rho \nabla B + \nabla V B).$$

Первый член этого выражения отражает диффузию магнитного поля через проводник с удельным сопротивлением ρ , а второй – изменение магнитного поля, вызванное движением проводника с относительной скоростью V . На поверхности образца собственное магнитное поле тока принимает максимальное значение H_m :

$$H_m = 0,2 \frac{I_a}{r},$$

где I_a – амплитудное значение силы тока в проводнике.

Поскольку $I_a = J_m S = \pi J_m r^2$, где J_m – амплитудная плотность тока и S – сечение образца, то $H_m = 0,63 J_m r$.

Механические напряжения, которые возникают на поверхности образцов под влиянием пинч-эффекта и вызывающие ультразвуковую вибрацию кристалла:

$$P = \mu \frac{H_m^2}{8\pi},$$

или

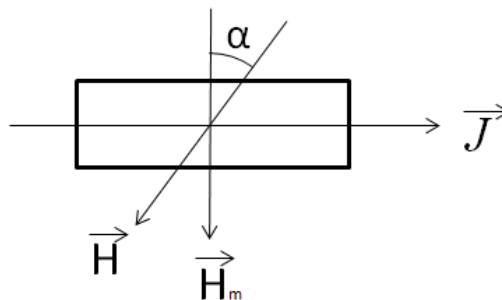
$$p = 1,6 \times 10^{-2} \mu (J_m r)^2.$$

Из последнего выражения следует, что при одной и той же плотности тока, например $J_m = 10^5$ А/см², пинч-эффект будет выражен тем больше, чем больше радиус использованных образцов.

Таким образом, пинч-эффект является масштабным фактором и P квадратично зависит от радиуса образца r и от амплитудной плотности тока J_m . Для тонких образцов он практически не наблюдается, при радиусе образца 0,25 мм этот эффект не оказывает какого-либо действия на деформацию титана с током [4–6].

На примере кристалла Sb при плотности тока $j = 1,5 \times 10^3$ А/см² и радиусе сечения проводника $r = 2$ мм рассчитано собственное магнитное поле тока, возникающее на поверхности проводника $H_m = 3 \times 10^3$ (э). При $r = 5$ мм максимальное значение H_m принимает вид $H_m = 4,5 \times 10^3$ (э).

Рассмотрим реализацию пластической деформации в условиях электропластичности при наложении на зону деформации ортогональных электромагнитных полей (рисунок 1) для оптимального угла α в условиях суперпозиции магнитных полей H и H_m для плотности тока $1,5 \times 10^3$ А/мм² и различных радиусах образцов (таблица).



j – плотность тока, α – угол между магнитными полями,
 H_m – собственное магнитное поле, H – внешнее магнитное поле

Рисунок 1. – Геометрия электромагнитных полей

Скорость упругого деформирования образца в радиальном направлении можно рассчитать по формуле

$$v_r = \left(\frac{B^2}{4\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где γ – плотность металла и B – магнитная индукция. Время упругой деформации образца на величину

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta r}{r} \%,$$

Таким образом, видно, что чем больше радиус образца, тем соответственно больше пинч-эффект, который является масштабным эффектом и квадратично зависит от r (а также от j). Следует отметить, что для образцов малого радиуса он не должен наблюдаться, а в образцах диаметром более 1 мм могут наблюдаться эффекты нагревания за счет джоулева тепла.

В работах [6–8] описан способ повышения пластичности проводящего материала за счет наложения на зону деформации ортогональных электромагнитных полей. При этом реализуется интенсификация механизма электропластического эффекта за счет эффекта Холла. Общий принцип способа, который можно применять при любом виде обработки металлов давлением с участием тока, заключается в том, что к деформируемому образцу во взаимно перпендикулярных направлениях прикладываются постоянные электрическое и магнитное поля. При этом под влиянием эффекта Холла происходит смещение электронной плотности образца в зону деформации, что усиливает электропластический эффект. Сопутствующим эффектом является появление заряда при поляризации образца за счет эффекта Холла.

При наложении на зону электропластической деформации металла ортогональных электромагнитных полей в соответствии с принципом суперпозиции полей усиливается также пинч-действие импульсного тока и вызванная им активная ультразвуковая вибрация металла заготовки, что создает дополнительный механизм и независимый канал пластификации металла.

Рассмотрим технологическую схему и приемы применения ортогональных электромагнитных полей в процессах электропластического волочения трудно деформируемых металлов и сплавов [9–12].

На рисунке приведено устройство для подведения импульсного тока и создания ортогональных электромагнитных полей, имеющее предназначение создавать тепловую подготовку проволоки за счет Джоулева эффекта и активную ультразвуковую вибрацию образца заготовки за счет возникаемого пинч-эффекта перед зоной деформации.

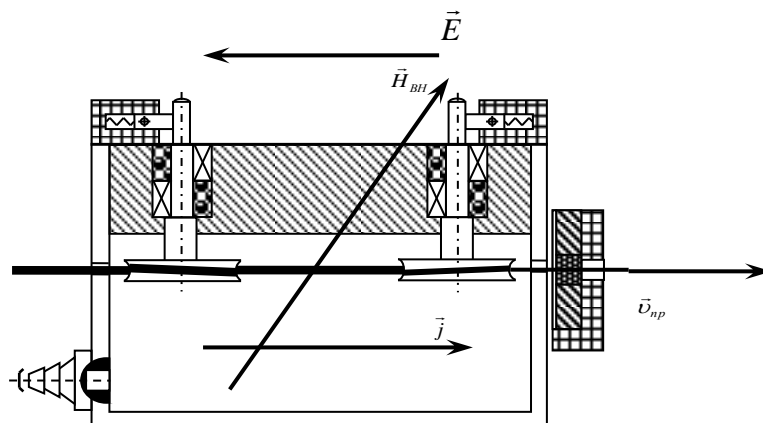


Рисунок 2. – Устройство для проведения импульсного тока и создания ортогональных электромагнитных полей

При таком расположении мест поступления энергии от электрического и магнитных полей по-прежнему исключается электропластическое действие тока, но возможна тепловая подготовка образца, что необходимо в процессе волочения для специальных видов стали, вольфрама, молибдена и ряда сплавов. Кроме того, при таком способе комбинированного воздействия эффективно снижается трение в волоке за счет активной ультразвуковой вибрации металла перед зоной деформации, задаваемой частотой импульсного тока.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арцимович, А. А. Управляемые термоядерные реакции / А. А. Арцимович. – М. : Физматгиз, 1961.
2. Владимиров, В. В. Успехи физических наук / В. В. Владимиров. – 1975. – № 1. – С.79.
3. Bennett, W. H. Magnetically Self-Focussing Streams / W. H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – № 45. – P. 890.
4. Савенко, В. С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий / В. С. Савенко. – Минск, 2003 – 203 с.
5. Баранов, Ю. И. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю. И. Баранов [и др.]. – М. : МГИУ, 2001 – 844 с.
6. Троицкий, О. А. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / О. А. Троицкий, В. С. Савенко. – Минск : ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.
7. Троицкий, О. А. Физические основы и технологии обработки современных металлов : в 2 т. / О. А. Троицкий [и др.]. – Ижевск – М. : Изд-во РХД. – Т. 2.
8. Molotskii, M. Dislocation Paths in a Magnetic Field / M. Molotskii, V. Fleurov // J. Phys. V. Chem. – Israel : Univ. of Tel Aviv, 2000. – V. 104. – P. 3812–3816.
9. Савенко, В.С. Электронно-пластический эффект при двойниковании монокристаллов висмута / В. С. Савенко, В. И. Спицин, О. А. Троицкий // Доклады академии наук СССР. – 1985. – Т. 283. – № 5. – С. 1181–1183.
10. Savenko, V. S. Influence of electroplastic deformation on physicomechanical characteristics of deformation aluminum / V. S. Savenko // First Russia-China Joint Symposium on the electroplasticity effect in metals Shenzhen, China, May, 31 – June, 4, 2007. – P. 218.
11. Савенко, В. С. Эволюция ансамблей клиновидных двойников в монокристаллах висмута, облученных ионами углерода и циркония / В. С. Савенко, О. М. Остриков, В. В. Углов // Кристаллография. – 1999. – № 6. – Т. 44. – С. 1–6.
12. Способ повышения пластичности проводящих материалов на основе эффекта Холла : пат. 2052514 Рос. Фед. / В. С. Савенко, А. И. Пинчук ; дата публ.: 1996.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.03.2014

Savenko V.S. Dynamic Effect on the Pinch Effect Crystal Deformation Sb Under Elektroplastichnosti

The electron deformation mechanisms electroplastic metals. For crystals Sb performed analysis and calculation of ductility by increasing the thermal preparation and pinch – effect, and technological schemes and techniques of application of orthogonal electromagnetic fields in the process of electron roplasticheskoy deformation of metals.

УДК 535.012

Н.Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИММЕРСИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ

Разработан иммерсионный метод определения оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов. Характерной чертой иммерсионного метода является возможность определения матрицы отражения с помощью измерений относительной матрицы отражения. Получены расчетные формулы для определения оптических постоянных анизотропных поглощающих одноосных, ромбических, моноклинных и триклинных кристаллов. Из результатов численного эксперимента следует, что решение обратной задачи для одноосных, ромбических, моноклинных и триклинных кристаллов оказывается устойчивым к ошибкам экспериментального определения углов ψ и Δ . Одно из достоинств данного метода заключается в возможности повысить точность и чувствительность измерений. Это особенно актуально при измерении оптических постоянных кристаллов с малой анизотропией, гиротропных кристаллов и кристаллов с шероховатой поверхностью.

Характерной чертой излагаемого здесь иммерсионного подхода является возможность определения матрицы отражения с помощью измерений относительной матрицы отражения при падении света из среды с показателем преломления n_1 (например, воздуха) и из среды с показателем преломления n_2 (иммерсия). При обычных эллипсометрических измерениях без иммерсии полный набор измеряемых параметров получался при фиксированном угле падения φ (точнее при фиксированном $\xi = n \sin \varphi$) путём вращения кристалла вокруг нормали к границе [1–3]. Этим самым устранялась необходимость в многоугловых измерениях. С использованием иммерсии постоянство ξ достигается при условии

$$\xi = n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = const, \quad (1)$$

где φ_1 и φ_2 – углы падения из среды с показателем преломления n_1 и n_2 соответственно. Используем равенство (1) при определении оптических постоянных кристаллов.

Для одноосного поглощающего кристалла путём его вращения вокруг нормали к границе всегда можно совместить плоскость падения с главной плоскостью падения. Для коэффициентов отражения s и p составляющих в этом случае имеем [4]

$$r_s = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0}, \quad r_p = \frac{\eta \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e} - \varepsilon \sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \theta + \varepsilon_e \cos^2 \theta - \xi^2}}{\eta \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e} + \varepsilon \sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \theta + \varepsilon_e \cos^2 \theta - \xi^2}}, \quad (2)$$

где $\eta = n \cos \varphi$, $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0 - \xi^2}$, θ – угол между нормалью \vec{q} к границе раздела и направлением оптической оси \vec{c} , $\varepsilon = n^2$ – диэлектрическая постоянная изотропной среды.

Проводя измерения в первой среде $\left(\rho_1 = \frac{r_p}{r_s} = \operatorname{tg} \psi_1 e^{i\Delta_1} \right)$ и во второй среде

$\left(\rho_2 = \frac{r_p}{r_s} = \operatorname{tg} \psi_2 e^{i\Delta_2} \right)$, используя (2), приходим к уравнениям

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e} \eta_1 (\eta_1 K_1 + \eta_0) = \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \theta + \varepsilon_e \cos^2 \theta - \xi^2} (\eta_0 K_1 + \eta_1), \quad (3)$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e} \eta_2 (\eta_2 K_2 + \eta_0) = \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \theta + \varepsilon_e \cos^2 \theta - \xi^2} (\eta_0 K_2 + \eta_2), \quad (4)$$

где $K_{1,2} = \frac{1 - \rho_{1,2}}{1 + \rho_{1,2}}$, $\eta_{1,2} = n_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2} = n_{1,2}^2$. Взяв их отношение, с учётом (1) получим

квадратное уравнение относительно неизвестной величины η_0

$$a\eta_0^2 + b\eta_0 + c = 0, \quad (5)$$

$$a = K_2\eta_1\varepsilon_2 - K_1\eta_2\varepsilon_1, \quad c = \eta_1^2\eta_2\varepsilon_2K_1 - \eta_2^2\eta_1\varepsilon_1K_2, \quad (6)$$

$$b = \eta_1^2\varepsilon_2K_1K_2 + \eta_1\eta_2\varepsilon_2 - \eta_2^2\varepsilon_1K_1K_2 - \eta_1\eta_2\varepsilon_1,$$

индексы 1, 2 относятся к первой и второй среде, в которых проводятся измерения.

Квадратное уравнение (5) имеет два решения. Критерием выбора корня чаще всего служит положительность действительной части корня. Затем из $\eta = \sqrt{\varepsilon_0 - \xi^2}$ находим $\varepsilon_0 = N_0^2$ ($N_0 = N_0' - iN_0''$). Отметим, что для определения ε_0 нет необходимости знать угол θ , который может быть найден эллипсометрически из дополнительных измерений [4]. Для определения $\varepsilon_e = N_e^2$ ($N_e = N_e' - iN_e''$) можно воспользоваться одним из уравнений (3) или (4). Возьмём, например, (3), тогда выражение для нахождения ε_e имеет вид:

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_0 \sin^2 \theta - \xi^2)}{\varepsilon_0 \eta_1^2 F - \cos^2 \theta \cdot \varepsilon_1^2}, \quad (7)$$

где $F = \left(\frac{\eta_1 K_1 + \eta_0}{\eta_0 K_1 + \eta_1} \right)^2$.

Если оптическая ось кристалла перпендикулярна границе, нахождение ε_0 и ε_e также осуществляется описанным выше образом.

Найти диэлектрические постоянные ε_0 и ε_e можно несколько по-иному. Как показано в [5] при условии (1) довольно просто вычисляются абсолютные значения коэффициентов отражения r_s и r_p . Так, r_p находится из решения квадратного уравнения [5]

$$\begin{aligned} \alpha r_p^2 + \beta r_p + \gamma &= 0, \\ \alpha &= r_p^0 \rho_2 - r_s^0, \quad \gamma = r_s^0 \rho_1 \rho_2 - r_p^0 \rho_1, \\ \beta &= r_s^0 r_p^0 (1 - \rho_1 \rho_2) + \rho_1 - \rho_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $r_{s,p}^0$ – френелевские коэффициенты отражения при падении света из среды с показателем преломления n_1 на границу её со средой, имеющей показатель преломления n_2 .

Зная r_p , вычисляем $r_s = \frac{r_p}{\rho_1}$, а затем исходя из формул (2), находим N_0 и N_e

$$\begin{aligned} N_0 &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 K_s^2}, \quad K_s = \frac{1 - r_s}{1 + r_s}, \\ N_e &= \sqrt{\frac{\xi^2 - \varepsilon_0 \sin^2 \theta}{\varepsilon^2 \cos^2 \theta - \eta^2 \varepsilon_0 K_p^2}}, \quad K_p = \frac{1 - r_p}{1 + r_p}. \end{aligned} \quad (9)$$

Корень уравнения (8) удовлетворяет условию $|r_p|^2 < 1$. Входящие в (8) френелевские коэффициенты отражения на границе воздух – иммерсия r_p^0 и r_s^0 известны, поскольку известны показатели преломления этих сред.

Знание абсолютных значений элементов матрицы отражения позволяет увеличить число независимых измерений на одном срезе кристалла, но и значительно упрощает решение обратной задачи эллипсоидности. Так, в случае $\vec{c} \parallel \vec{q}$, когда другие методики не дают решения обратной задачи, иммерсионная методика позволяет получить явные выражения для определения ε_0 и ε_e (в (7) необходимо, чтобы $\theta = 0$).

Как и для одноосных кристаллов, использование иммерсионных измерений позволяет решение обратной задачи для ромбических кристаллов получить в аналитическом виде, причем достаточно провести измерения на одной грани кристалла. В этом случае главные значения тензора диэлектрической проницаемости могут быть найдены, когда одна из кристаллографических осей перпендикулярна грани.

Пусть две кристаллографические оси, например, X и Y , лежат в плоскости грани, а третья ось Z перпендикулярна границе, причем ось X перпендикулярна плоскости падения (рисунок 1 $\vec{OX} \parallel \vec{a}$ и $\theta = 0$). Тогда для коэффициентов отражения S и P составляющих имеем [6–8].

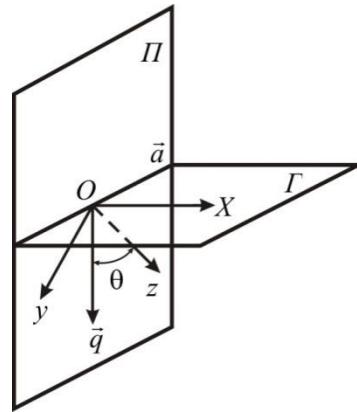


Рисунок. – Ориентация кристаллографических осей ромбического кристалла относительно нормали \vec{q} к плоскости границы Γ

(ось X лежит в плоскости Γ , а оси Y и Z лежат в плоскости Π)

$$r_S = \frac{\eta - \eta_a}{\eta + \eta_a}, \quad r_P = \frac{\varepsilon_y \eta - \varepsilon \eta_b}{\varepsilon_y \eta + \varepsilon \eta_b}, \quad (10)$$

$$\eta_a = \sqrt{\varepsilon_x - \xi^2}, \quad \eta_b = \sqrt{\varepsilon_y (1 - \xi^2 / \varepsilon_z)}, \quad (11)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – главные значения комплексного тензора диэлектрической проницаемости кристалла, $\varepsilon = n^2$ – диэлектрическая постоянная изотропной среды.

Как и в случае одноосных кристаллов, измерения проводим в первой (ρ_1) и второй (ρ_2) среде. Затем, используя (10) и (11), приходим к уравнениям

$$\varepsilon_y \eta_1 (\eta_1 K_1 + \eta_a) = \varepsilon_1 \eta_b (\eta_a K_1 + \eta_1), \quad (12)$$

$$\varepsilon_y \eta_2 (\eta_2 K_2 + \eta_a) = \varepsilon_2 \eta_b (\eta_a K_2 + \eta_2), \quad (13)$$

где $K_{1,2} \cdot \eta_{1,2} \cdot \varepsilon_{1,2}$ имеют такой же вид и для одноосных кристаллов. Далее, беря отношение (12) и (13), с учетом $\xi = n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$ приходим к уравнениям (5), (6), где η_0 заменяется на η_a .

Повернув кристалл на 90° вокруг нормали к границе (при этом в (10), (11) следует провести замену $\varepsilon_x \leftrightarrow \varepsilon_y$) и повторив измерения, приходим к уравнениям (5), (6), где $\eta_o = \eta_a = \sqrt{\varepsilon_y - \xi^2}$. Таким образом мы найдем ε_x и ε_y . Оставшиеся значения ε_z нетрудно найти из любого соотношения (12) или (13), например (12), тогда выражение для нахождения ε_z имеет вид

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_1^2 \xi^2 (\eta_a K_1 + \eta_1)^2}{\varepsilon_1^2 (\eta_a K_1 + \eta_1)^2 - \eta_1^2 \varepsilon_y (\eta_1 K_1 + \eta_a)^2}, \quad (14)$$

который аналогичен (7).

Найти диэлектрические постоянные ε_x , ε_y , ε_z можно по-иному, аналогично тому, как это сделано для одноосных кристаллов. В рассмотренном нами случае ориентации кристалла матрица отражения диагональна. Абсолютное значение r_p находится из уравнения (8). Зная r_p , вычисляем $r_s = r_p / \rho_1$, затем по формулам (10), (11) нетрудно рассчитать $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Рассмотрим более сложный случай, когда в плоскости границы лежит только одна кристаллографическая ось кристалла, например, ось X , а две другие ориентированы произвольно. Обозначим через θ угол между z и нормалью к границе \vec{q} (рисунок 1). Поворачивая кристалл вокруг нормали, по положению гашения скрещенных поляризатора и анализатора, установленных на пропускание S и P компонент, всегда можно совместить плоскость падения с плоскостью, в которой лежат оси Y и Z . Ориентация кристаллографических осей ромбического кристалла относительно нормали \vec{q} к плоскости границы Γ . Ось X лежит в плоскости Γ , а оси Y и Z лежат в плоскости Π . Ось X тогда будет перпендикулярна плоскости падения. В этом случае, как показано в [6–8], коэффициент отражения r_p имеет такой же вид, как и для одноосного кристалла (2), если заменить $\varepsilon_o \rightarrow \varepsilon_y$, $\varepsilon_e \rightarrow \varepsilon_z$. Выражение для r_s совпадает с (10). Для этой плоскости падения можно осуществить два независимых измерения, например, в воздухе и в иммерсионной жидкости, и тем самым найти r_s и r_p . Тогда из (10) определяется ε_x . Второе измерение позволяет выразить ε_z через ε_y

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon^2 (1+r_p)^2 (\xi^2 - \varepsilon_y \sin^2 \theta)}{\varepsilon^2 (1+r_p)^2 \cos^2 \theta - (1-r_p)^2 \eta^2 \varepsilon_y}. \quad (15)$$

Для получения полного набора измеряемых параметров следует воспользоваться какой-либо другой плоскостью падения. Удобно, повернув кристалл на 90° , совместить плоскость падения с осью X . При этом, однако, P и S поляризации уже не являются собственными поляризациями, то есть на границе будет иметь место трансформация P поляризации в S и наоборот. Этот процесс можно описать недиагональными элементами r_{ps}, r_{sp} матрицы отражения r_{ik} , $i, k = s, p$. Опуская детали решения, приведем окончательные выражения, с помощью которых определяются элементы матрицы r_{ik} . В кристалле возникает две преломленные волны, нормальные составляющие векторов рефракции которых (обозначим их η_1 и η_2) находятся из биквадратного уравнения

$$\left[1 - \frac{\eta^2}{\varepsilon_x} - \xi^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_y} + b \cos^2 \theta \right) \right] \left[1 - (\eta^2 + \xi^2) \left(\frac{1}{\varepsilon_y} + b \sin^2 \theta \right) \right] =$$

$$= \xi^2 (\xi^2 + \eta^2) b^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta, \quad (16)$$

где $b = 1/\varepsilon_z - 1/\varepsilon_y$. Векторы магнитного поля преломленных волн $\vec{H}_{1,2}$ удобно представить через единичные векторы фазовой нормали этих волн $\vec{n}_{1,2}$ и нормаль к плоскости падения \vec{a} :

$$\vec{H}_1 = \mu_1 \vec{a} + [\vec{n}_1 \vec{a}], \quad \mu_1 = \frac{\xi (\xi^2 + \eta_1^2)^{1/2}}{1 - \eta_1^2 / \varepsilon_x - \xi^2 (1/\varepsilon_y + b \cos^2 \theta)}, \quad (17)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{a} + \mu_2 [\vec{n}_2 \vec{a}], \quad \mu_2 = \frac{(\xi^2 + \eta_2^2)^{1/2} \xi b \sin \theta \cdot \cos \theta}{1 - (\xi^2 + \eta_2^2) (1/\varepsilon_y + b \cos^2 \theta)}. \quad (18)$$

Здесь для η_1 и η_2 выбираются такие решения уравнения (16), которые дают μ_1 , μ_2 конечные значения. С учетом введенных в (16)–(18) величин имеем

$$r_{SS} = [(\eta_1 - \eta)(\varepsilon \eta_2 / \varepsilon_x + \eta) - \mu_1 \mu_2 (\eta_2 - \eta)(\varepsilon \eta_1 / \varepsilon_x + \eta)] \cdot X^{-1}, \quad (19)$$

$$r_{SP} = 2n\eta\mu_2 (\eta_1 - \eta_2) (Xn_2)^{-1},$$

$$r_{PS} = -2n\eta\mu_1 n_1 (\eta_1 - \eta_2) (\varepsilon_x X)^{-1}, \quad (20)$$

$$r_{PP} = [(\eta_1 + \eta_2)(\varepsilon \eta_2 / \varepsilon_x - \eta) - \mu_1 \mu_2 (\eta_2 + \eta)(\varepsilon \eta_1 / \varepsilon_x - \eta)] \cdot X^{-1},$$

$$X = -(\eta_1 + \eta)(\varepsilon \eta_2 / \varepsilon_x + \eta) + \mu_1 \mu_2 (\eta_2 + \eta)(\varepsilon \eta_1 / \varepsilon_x + \eta).$$

Если теперь воспользоваться измерением в воздухе при азимуте линейной поляризации падающей волны 45° , то найдем величину

$$\rho = \frac{r_{PP} + r_{PS}}{r_{SP} + r_{SS}}. \quad (21)$$

Правая часть этого выражения содержит только ε_y , поскольку ε_z исключается с помощью соотношения (15), а ε_x известно. Найти ε_y численным решением уравнения (21) не представляет трудностей.

Описанный выше подход можно обобщить и на моноклинные и триклинные кристаллы. Причем в случае моноклинных кристаллов получаются аналитические выражения, связывающие оптические постоянные с измеряемыми параметрами [9].

Удобно вести тензор χ , обратный ε : $\chi = \varepsilon^{-1}$. Решая граничную задачу, находим компоненты матрицы отражения R , связывающую S и P компоненты отраженной и падающей волн:

$$r_{SS} = \left\{ \mu_1 (\eta - \eta_1) (n^2 l_2 - \eta) - \mu_2 (\eta - \eta_2) (n^2 l_1 - \eta) \right\} \cdot D^{-1},$$

$$r_{PP} = - \left\{ \mu_1 (\eta + \eta_1) (n^2 l_2 + \eta) - \mu_2 (\eta + \eta_2) (n^2 l_1 + \eta) \right\} \cdot D^{-1},$$

$$r_{SP} = 2n\eta\mu_1\mu_2 (\eta_1 - \eta_2) \cdot D^{-1}, \quad (22)$$

$$r_{PS} = 2n\eta(l_1 - l_2) \cdot D^{-1},$$

$$D = \mu_1 (\eta + \eta_1) (n^2 l_2 - \eta) - \mu_2 (\eta + \eta_2) (n^2 l_1 - \eta).$$

Здесь $\eta = n \cos \varphi$ – нормальная составляющая вектора рефракции падающей волны \vec{m} ($m^2 = n^2$), n – показатель преломления изотропной среды, φ – угол падения. Нормальные составляющие η_i ($i = 1, 2$) векторов рефракции преломленных волн $\vec{m}_{1,2}$

($m_{1,2}^2 = n_{1,2}^2$), $n_{1,2}$ – показатели преломления находятся из уравнения нормалей. В системе координат с осями x_1, x_2, x_3 (x_1 – перпендикулярна плоскости падения, x_3 – границе) оно имеет вид:

$$(1 - n_i^2 / \chi_{11}) \left[1 - (\xi^2 / \chi_{33} + \chi_i^2 / \chi_{22} - 2\eta\xi\chi_{33}) \right] - n_i^2 (\xi\chi_{13} - \eta_i\chi_{12}) = 0. \quad (23)$$

Параметры μ_i ($i = 1, 2$) определяют поляризацию преломленных волн, вектор магнитного поля которых можно представить в виде $\vec{H}_i = \vec{x}_1 + \mu_i [\vec{m}_i \vec{x}_1]$, $l_{1,2}$ – тангенциальные составляющие векторов электрического поля этих волн

$$\mu_i = \frac{\xi\chi_{13} - \eta_i\chi_{12}}{1 - (\eta_i^2 + \xi^2)\chi_{11}}, \quad l_i = \vec{E}\vec{x}_2 = \xi\chi_{23} - \eta_i\chi_{22} + \mu_i m_i^2 \chi_{12}. \quad (24)$$

Пусть вещественная часть χ' комплексного тензора χ диагонализуется в системе координат x, y, z , причем ось z параллельна оси симметрии 2-го порядка (или перпендикулярна плоскости симметрии) и, совпадающая с кристаллографической осью кристалла, лежит в плоскости границы. Мнимая часть χ'' имеет диагональный вид в иной системе координат x', y', z' , развернутой вокруг z на угол ψ , поэтому в осях x, y, z

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 & \tilde{\chi}_{12} & 0 \\ \tilde{\chi}_{12} & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \chi_1 &= \chi'_1 - i(\chi''_1 \cos^2 \psi + \chi''_2 \sin^2 \psi), \\ \chi_2 &= \chi'_2 - i(\chi''_1 \sin^2 \psi + \chi''_2 \cos^2 \psi), \\ \tilde{\chi}_{1,2} &= i(\chi''_1 - \chi''_2) \sin \psi \cdot \cos \psi, \end{aligned} \quad (25)$$

причем $\chi_3 = \chi'_3 - i\chi''_3$ не зависит от ψ . Для измерений на отдельной частоте физически различным ориентациям осей x', y' относительно x, y соответствуют значения ψ .

Зададим ориентацию оси x относительно нормали к границе кристалла (ось X_3) углом θ . Для определения всех восьми параметров кристалла воспользуемся предложенным в [10] подходом, который позволяет с привлечением эллипсометрических измерений в иммерсии определить 2×2 матрицу отражения R для границы произвольного кристалла.

Вращением кристалла вокруг нормали к границе определим положение плоскости падения, ортогональной оси z , когда матрица R диагональна. Проводя измерения в воздухе и иммерсии при условии постоянства тангенциальной составляющей вектора рефракции падающей волны ξ , найдем комплексные коэффициенты отражения r_{SS} и r_{PP} . Согласно (22)–(24) они определяются через компоненты тензора χ в системе осей x_1, x_2, x_3 связанных с ориентацией границы кристалла и плоскости падения. Последние в свою очередь выражаются, для рассматриваемой ориентации кристалла и плоскости падения, через искомые параметры следующим образом

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \chi_3, \quad \chi_{13} = \chi_{12} = 0, \\ \chi_{22} &= b = b_+ + b_- \cos 2\theta - \tilde{\chi} \sin 2\theta, \quad \chi_{33} = q = b_+ - b_- \cos 2\theta + \tilde{\chi} \sin 2\theta, \\ \chi_{23} &= P = -(b \sin 2\theta + \tilde{\chi} \cos 2\theta), \quad b_{\pm} = \frac{1}{2}(\chi_1 \pm \chi_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда для преломленных в кристалле волн имеем:

$$n_2^2 = 1/b, n_1^2 = \varepsilon_3, \mu_1 = \mu_2 = 0,$$

поэтому

$$r_{SS} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta + \eta_1}, \quad r_{PP} = \frac{\eta - n^2 \sqrt{b - \xi^2 (bq - p^2)}}{\eta + n^2 \sqrt{b - \xi^2 (bq - p^2)}}. \quad (27)$$

Поскольку левые части в этих соотношениях известны, то из первого сразу же находим $\varepsilon_3 = 1/\chi_3 = \xi^2 + \eta^2 K_S^2$, $K_S = (1 - r_{SS})(1 + r_{SS})$, а из второго получаем комплексное уравнение:

$$b - \xi^2 (bq - p^2) = C_0^2, \quad C_0 = K_P \frac{\eta}{n^2}, \quad K_P = \frac{1 - r_{PP}}{1 + r_{PP}}. \quad (28)$$

Дальнейшее определение шести оставшихся параметров удобно свести к нахождению вначале трех комплексных величин b, q, p , затем, на втором этапе, из соотношений (26) могут быть определены $\chi_{1,2}, \tilde{\chi}$ и θ . Таким образом необходимо получить систему трех комплексных уравнений для величин b, q, p . Одно из них – уравнение (28). Два других получим, если проведем измерения, повернув кристалл на 90° вокруг нормали x_3 . При этом кристаллографическая ось z будет параллельна x_2 , а для компонент тензора χ в системе координат x_1, x_2, x_3 имеем $\chi_{12} = \chi_{23} = 0$, $\chi_{11} = b$, $\chi_{22} = \chi_3$, $\chi_{33} = q$, $\chi_{13} = p$. Уравнение нормалей (23) для такой ориентации кристалла имеет довольно сложный вид. Однако, если учесть имеющееся в нашем распоряжении уравнение (28), оно упрощается и из него находим

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{C_0^2 + \chi_3 (1 - b\xi^2) \pm \left\{ \left[C_0^2 + \chi_3 (1 - b\xi^2) \right]^2 - 4b\chi_3 \left[1 - \xi^2 (q + C_0^2) \right] \right\}^{1/2}}{2\chi_3 b}. \quad (29)$$

Остальные величины, через которые выражаются коэффициенты отражения (22), имеют вид: $l_{1,2} = -\chi_3 \eta_{1,2}$, $\mu_{1,2} = \xi P / (1 - n_{1,2}^2 b)$. Определяя r_{SS} и r_{PP} , получим два недостающих уравнения. С учетом (22) после перегруппировки членов запишем их в следующей форме

$$\begin{aligned} \mu_1 (\eta + \mu_2 \tilde{\chi}_3) (\eta K_S'' + \eta_1) &= \mu_2 (\eta + \eta_1 \tilde{\chi}_3) (\eta K_S'' + \eta_2), \\ \mu_1 (\eta + \eta_1) (\eta K_P'' + \tilde{\chi}_3 \eta_2) &= \mu_2 (\eta K_P'' + \tilde{\chi}_3 \eta_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $K_{S,P}'' = (r_{SS,PP} - 1) / (r_{SS,PP} + 1)$, $\tilde{\chi}_3 = n^2 / \varepsilon_3$ – известные величины (знак \parallel означает ориентацию кристалла с $z \parallel x_2$). Система (30) содержит две неизвестные величины – b и q . Однако в (30) они содержатся под знаком радикала, поэтому удобно переписать ее, разделив одно уравнение на второе и вычтя одно из другого. Затем, разрешая получившуюся систему уравнений относительно $\eta_1 \eta_2, \eta_1 + \eta_2$ и избавляясь от радикалов, получим для b квадратное уравнение (31)

$$b^2 \left[\eta^2 N_1 (2N_3 - \xi^2 N_1) - N_2^2 \right] + b \left[\eta^2 N_1^2 (C_0^2 \varepsilon_3 + 1) - 2M (A_+ N_2 - \eta^2 N_1 B) \right] - (A_+ M)^2 = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= A_- B + A_+ F, \quad N_2 = \frac{\eta^2}{\tilde{\chi}_3} A_- D - \xi^2 A_+ (K_P'' - 1), \\ N_3 &= \xi^2 B (1 - K_P'') - \frac{\eta^2}{\tilde{\chi}_3} D F, \quad M = K_P'' - 1 - n^2 (K_S'' - 1) C_0^2, \\ A_\pm &= \tilde{\chi}_3 (K_S'' - 1) \pm (K_P'' - 1), \quad B = K_S'' K_P'' - 1, \\ D &= \tilde{\chi}_3 K_S'' (K_P'' - 1) + K_P'' (K_S'' - 1), \quad F = K_P'' - K_S''. \end{aligned} \quad (32)$$

Зная b , определим q

$$q = \frac{1}{\xi^2} - C_0^2 - \frac{1}{b\varepsilon_3} \left(\frac{bN_3 + MB}{N_1\xi} \right)^2. \quad (33)$$

Величина P находится из (28). Неизвестные $\chi_{1,2}, \tilde{\chi}, \theta$ определяются далее из соотношений (26) элементарно.

На основе разработанных методов иммерсионного определения оптических постоянных поглощающих одноосных, ромбических, моноклиных и триклиных кристаллов был составлен комплекс программ по их определению.

Для проверки устойчивости решения обратной задачи к ошибкам в определении эллипсометрических углов ψ и Δ был проведен численный эксперимент на ЭВМ. В расчетах не учитывался переходной слой на поверхности кристалла. По прямой задаче рассчитывались коэффициенты отражения r_{PP}, r_{SS}, r_{PP}'' и r_{SS}'' , а по ним измеряемые эллипсометрические углы. В качестве модели для расчетов был выбран кристалл $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ [11]. Значения $N_x = \sqrt{\varepsilon_x} = 2,282 - i0,013$, $N_z = \sqrt{\varepsilon_z} = 2,455 - i0,043$, $\psi = 23^\circ 50'$ приведены в [11], а N_y и θ полагали равным $2,233 - i0,022$ и 30° . Затем в эллипсометрические углы ψ и Δ вводилась ошибка измерений, не превышавшая $\pm 1'$. На основе приведенных соотношений (27)–(33) решалась обратная задача и рассчитывались значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, а также углы θ и ψ . Поскольку диэлектрическая постоянная ε_3 вычисляется также, как и ε_0 в одноосных кристаллах, то ε_3 и ε_0 имеют одинаковую точность определения. В модельных расчетах она составила $1 \cdot 10^{-3}$. Значения ε_1 и ε_2 рассчитываются по довольно громоздким формулам, поэтому в расчетах происходит накопление ошибки, что и наблюдалось на численном эксперименте. При выбранной точности измерений эллипсометрических углов $\pm 1'$ значения ε_1 и ε_2 имеют точность не выше $5 \cdot 10^{-2}$.

Хуже всего определяются значения углов θ и ψ . Ошибка в определении θ может достигать несколько градусов и более десяти градусов для ψ , который по программе рассчитывается последним. Отметим, что и для одноосных кристаллов ошибка в определении угла θ составляет также несколько градусов. В то же время такая точность определения θ никак не влияет на точность нахождения значений ε_1 и ε_2 , если угол θ задавался точно, то это мало влияло на вычисление значения ε_1 и ε_2 . С помощью численного эксперимента анализировались также зависимости точности определения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ от угла падения, показателя преломления иммерсии. Как показали расчеты, изменение угла падения и показателя преломления также мало влияют на точность определения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Из результатов численного эксперимента следует, что решение обратной задачи для одноосных, ромбических, моноклиных и триклиных кристаллов оказывается устойчивым к ошибкам экспериментального определения углов ψ и Δ .

Одно из достоинств метода иммерсионной эллипсометрии заключается в возможности повысить точность и чувствительность измерений. Это особенно актуально при измерении оптических постоянных кристаллов с малой анизотропией, гиротропных кристаллов и с шероховатой поверхностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пахомов, А. Г. Определение оптических постоянных одноосных поглощающих кристаллов методом эллипсометрии / А. Г. Пахомов, А. Ф. Константинова, В. Я. Посыльный // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика : сб. ст. / ИФ АН БССР. – Минск, 1981. – С. 147–155.
2. Пахомов, А. Г. Определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных кристаллов методом эллипсометрии / А. Г. Пахомов, В. А. Яковлев, А. Ф. Константинова // ЖТФ. – 1981. – Т. 51, № 5. – С. 1013–1015.
3. Филипов, В. В. Применение иммерсионной эллипсометрии для определения оптических постоянных поглощающих одноосных и ромбических кристаллов / В. В. Филипов, Н. Н. Сендер // Кристаллография. – 1989. – Т. 34, № 4. – С. 905–908.
4. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 456 с.
5. Швец, В. А. О возможности определения комплексных коэффициентов отражения методом эллипсометрии / В. А. Швец // Оптика и спектроскопия. – 1983. – Т. 55, № 3. – С. 558–560.
6. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филипов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.
7. Филипов, В. В. Определение оптических постоянных поглощающих ромбических кристаллов методом иммерсионной эллипсометрии / В. В. Филипов [и др.] // Эллипсометрия – метод исследования поверхности твердых тел : сб. ст. / СО АН СССР. – Новосибирск, 1991. – С. 28–33.
8. Filippov, V. V. Optical constants of TbFeO₃ measured by the immersion ellipsometry method at wavelength 0,63 μm. / V. V. Filippov, I. D. Lomako, N. N. Sender // J. Phys. D. Appl. Phys. – 1994. – № 27. – P. 1964–1967.
9. Филипов, В. В. К эллипсометрии поглощающих низкосимметричных кристаллов / В. В. Филипов // Оптика и спектроскопия – 1989. – Т. 67, № 1. – С. 84–86.
10. Филипов, В. В. Определение 2×2 матрицы отражения с помощью иммерсионных эллипсометрических измерений / В. В. Филипов, М. М. Карпук // Оптика и спектроскопия – 1987. – Т. 63, № 6. – С. 1392–1394.
11. Emslie, A. G. Determination of the complex dielectric tensor of triclinic / A. G. Emslie, J. R. Aronson // J. Opt. Soc. Am. – 1983. – V. 73, № 16. – P. 916–919.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2015

Sender N.N. Immersion Method for Determining Optical Constants of Anisotropic Absorbing Crystals

The immersion method for determining the optical constants of the anisotropic absorbing crystals is designed. A characteristic feature of the immersion method is the ability to determine the reflection matrix by measuring the relative reflection matrix. The calculating formulas for the determination of the optical constants of absorbing anisotropic uniaxial, orthorhombic, monoclinic and triclinic crystals are got. The results of numerical experiment show that the solution of the inverse problem for uniaxial, orthorhombic, monoclinic and triclinic crystals is stable to errors of experimental determination of the angles ψ and Δ . One advantage of this methods is the ability to increase the accuracy and sensitivity of measurement. This is especially true while measuring the optical constants of crystals with small anisotropy, gyrotropic crystals and crystals with a rough surface.

УДК 524.3+537.6

А.И. Серый*преподаватель каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина***К ПРОБЛЕМЕ НАГРЕВА БЕЛОГО КАРЛИКА ПРИ АККРЕЦИИ**

Рассмотрена постановка задачи о временной эволюции радиального распределения температуры в белом карлике класса DA, который первоначально охладился до температуры, близкой к абсолютному нулю, а затем стал нагреваться извне при аккреции водорода с поверхности более массивного компаньона в тесной двойной системе. Температура белого карлика описывается дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа. Уравнение усложняется при наличии зависимости плотности вещества от радиальной координаты, что приводит к аналогичной зависимости для теплоемкости и коэффициента теплопроводности. При учете излучения, а также функции Дебая для теплоемкости решетки задача становится нелинейной, а уравнение – интегро-дифференциальным.

Введение

В [1, с. 554] был рассмотрен вопрос о происхождении магнитных полей с индукцией $B \sim 10^6\text{--}10^9$ Гс у водородных белых карликов (т.е. класса DA). Сущность предложенного механизма заключается в следующем.

1. Белый карлик остывает и полностью кристаллизуется.
2. На его поверхность начинается аккреция водорода с более массивного компаньона в тесной двойной системе.
3. Внешние слои нагреваются и расплавляются, водород переходит в жидкую металлическую фазу, в которой становится энергетически выгодной спиновая поляризация протонов.
4. В результате спиновой поляризации возникает магнитное поле с индукцией $B \sim 10^3\text{--}10^4$ Гс, проникающее в более глубокие слои.
5. Поскольку протоны в более глубоких слоях находятся в узлах кристаллической решетки и могут рассматриваться как совокупность осцилляторов, подчиняющихся статистике Бозе (в силу того, что волновые функции протонов локализованы вблизи узлов кристаллической решетки и практически не перекрываются), то протоны могут независимо друг от друга поляризоваться в указанном магнитном поле, усиливая его в целом.
6. Все это должно произойти быстрее, чем тепло с поверхности дойдет до внутренних слоев.

Последний пункт следует рассмотреть более строго математически. В рассматриваемом приближении будем пренебрегать конвекцией. Задачу можно разделить на 3 этапа:

I. Вывод уравнения для нахождения пространственно-временного распределения температуры.

II. Вывод краевых условий.

III. Математическая запись требования пункта 6. Прежде чем перейти к более подробному рассмотрению этих этапов, следует отметить, что главная трудность приведенной выше цепочки рассуждений заключается в том, что усиление магнитного поля внутри белого карлика возможно лишь при условии $kT < 2.79\mu_{\text{я}}B$ ($\mu_{\text{я}}$ – ядерный магнетон), что при $B \sim 10^4$ Гс соответствует $T < 10^{-3}$ К, а время необходимое для остывания до таких температур, скорее всего, превосходит возраст белых карликов, оцениваемый из наблюдательных данных.

Вывод уравнения для распределения температуры

Количество тепла, втекающее в сферический слой толщиной dr за время dt за счет теплопроводности, равно [2, с. 167]

$$4\pi[(jr^2)_r - (jr^2)_{r+dr}]dt = -4\pi \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j)drdt. \quad (1)$$

Аналогичным образом можно учесть и диффузию излучения [3, с. 96]

$$L = -4\pi r^2 \frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)} \frac{d}{dr}(aT^4), \quad (2)$$

$$[L_r - L_{r+dr}]dt = 4\pi \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)} \frac{\partial}{\partial r}(aT^4) \right) drdt, \quad (3)$$

где $a = 7.56 \cdot 10^{-15}$ эрг/(см³·К⁴) [4, с. 609], $\kappa(r,t)$ – непрозрачность, в приближении Крамера зависящая от температуры и плотности следующим образом [3, с. 96]:

$$\kappa(r,t) = \kappa_0 \rho(r) T^{-7/2}(r,t), \quad (4)$$

где $\kappa_0 = 8.68 \cdot 10^{24}$ см²/г в случае водорода [3, с. 97].

С другой стороны, изменение количества тепла в сферическом слое толщиной dr за время dt можно представить в виде [2, с. 167]

$$d^2Q = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \cdot C_v(r,t) dT. \quad (5)$$

Приравнявая (5) к сумме выражений (1) и (3) и учитывая (4), а также соотношение [2, с. 168]

$$j = -\lambda(r,t) \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (6)$$

разделяя полученное соотношение на $4\pi r^2 drdt$, получаем:

$$\rho(r) C_v(r,t) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r,t) r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{c}{3\kappa_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{T^{7/2}}{\rho^2(r)} \frac{\partial}{\partial r}(aT^4) \right). \quad (7)$$

В уравнении (7) необходимо уточнить выражения для $\rho(r)$, $C_v(r,t)$ и $\lambda(r,t)$. Плотность $\rho(r)$ в случае водорода связана с концентрацией соотношением

$$\rho(r) \approx m_p n(r). \quad (8)$$

Это соотношение, однако, не выполняется в более глубоких слоях, где водород отсутствует. Поэтому условие равновесия между давлением гравитационных сил (которое выражается через $\rho(r)$) и давлением вырожденных электронов (которое выражается через $n(r)$) вместе с (8) не является достаточным для нахождения $\rho(r)$ либо $n(r)$.

Теплоемкость $C_v(r,t)$ складывается из теплоемкости кристаллической решетки $C_{\text{реши}}$ и электронного газа $C_{\text{эл}}$. При этом теплоемкость решетки равна [3, с. 106]

$$C_{\text{реши}}(r,t) = \frac{9R}{M_H y^3} \int_0^y \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2}, y = \frac{\theta_D(r)}{T(r,t)}, \theta_D(r) = A_1 \rho^{1/2}(r), \quad (9)$$

где $A_1 = 4 \cdot 10^3$ К·см^{3/2}/г^{1/2} [3, с. 104], R – универсальная газовая постоянная. Теплоемкость электронного газа при низких температурах в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях равна, соответственно [5, с. 203, 212].

$$C_{\text{эл}}^{n/p}(r,t) = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{m_e}{M_H \hbar^2 n^{2/3}(r)} RkT(r,t), \quad (10)$$

$$C_{эл}^{y/p}(r,t) = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{3M_H \hbar c n^{1/3}(r)} RkT(r,t), \quad (11)$$

где $M_H = 1$ г/моль – молярная масса водорода. При более строгом вычислении выражение для теплоемкости электронного газа в общем случае существенно усложняется, например, из-за наличия интегралов и бесконечных сумм.

Коэффициент теплопроводности $\lambda(r,t)$ можно найти через удельную электропроводность, используя закон Видемана–Франца [6, с. 80]:

$$\lambda(r,t) = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e}\right)^2 \tilde{\sigma}_{эл}(r,t) T(r,t), \quad \tilde{\sigma}_{эл}(r,t) = A_2 \frac{\rho(r)}{T(r,t)} \left(1 + A_3 \frac{\rho(r)}{T^2(r,t)}\right)^{1/2}, \quad (12)$$

где (в СГС) $A_2 = 6 \cdot 10^{21}$ К·см³/(Г·с), $A_3 = 0.24 \cdot 10^6$ К²·см³/Г [7, с. 2].

Вывод краевых условий

Будем считать, что на поверхности белого карлика поток тепла обусловлен теплопроводностью, излучением и кинетической энергией падающего вещества, которая преобразуется в тепло.

$$j(r,t)|_{r=R_{WD}} = \frac{\dot{M}_S v^2}{2} - \sigma T^4(r,t)|_{r=R_{WD}}, \quad (13)$$

$$\dot{M}_S = \frac{\dot{M}}{4\pi R_{WD}^2}, \quad v^2 = \frac{2GM_{WD}}{R_{WD}}. \quad (14)$$

С учетом (6) и (14) можно переписать (13) в виде:

$$\frac{\sigma T^4(r,t)|_{r=R_{WD}}}{\lambda(R_{WD},t)} - \frac{GM_{WD}}{4\pi R_{WD}^3 \lambda(R_{WD},t)} = \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} |_{r=R_{WD}}. \quad (15)$$

При этом уровень аккреции \dot{M} можно задавать в пределах от $10^{-11} M_\odot/\text{год}$ до $10^{-8} M_\odot/\text{год}$ [8, с. 10], где M_\odot – масса Солнца. С учетом предела Чандрасекара, для массы белого карлика M_{WD} можно задавать значения, не превышающие $1.4 M_\odot$. При низких плотностях, когда электронный газ нерелятивистский, имеется взаимосвязь между M_{WD} и радиусом R_{WD} белого карлика [3, с. 77]:

$$M_{WD} \sim R_{WD}^{-3}. \quad (16)$$

При высоких плотностях, когда электронный газ ультрарелятивистский, указанная взаимосвязь отсутствует, поэтому для определения R_{WD} нужно задавать значение центральной плотности [3, с. 77].

Математическая запись требования, изложенного в пункте 6 во введении

Значения концентрации n_1 , при которых уже возможна спонтанная спиновая поляризация (после расплавления), можно задавать, например, в пределах от 10^{25} до 10^{26} см⁻³. Каждое из этих значений достигается на некоторой глубине x_1 или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD} - x_1$. Плавление происходит в некоторый момент времени t_1 при достижении температуры T_{melt} . Значение концентрации n_2 , соответствующее максимально возможной плотности водорода (у порога нейтронизации), можно задать равным приблизительно $7.4 \cdot 10^{30}$ см⁻³. Оно достигается на некоторой глубине $x_2 > x_1$ или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD} - x_2 < R_{WD} - x_1$.

Тепло доходит до этого слоя в некоторый момент времени t_2 , а до этого можно считать, что температура слоя $T = 0$ К. С учетом п. 6 (в 1-м абзаце статьи) все это можно математически записать в следующем виде:

$$T(R_{WD} - x_1, t_1) = T_{melt}, \quad n(R_{WD} - x_1) = n_1, \quad (17)$$

$$T(x_2, t) = 0, t \in (0, t_2), \quad n(R_{WD} - x_2) = n_2, \quad (18)$$

$$t_2 > t_1. \quad (19)$$

Температура плавления водорода зависит от плотности (либо от давления, т.к. эти величины взаимосвязаны), причем в разных источниках предлагаются разные формулы (таблица 1).

Таблица. – Формулы для температуры плавления водорода

Источник	Формула для T_{melt}	Значения коэффициентов
[9, с. 670]	$T_0(1 + P/a)^b \exp(-cP)$	$T_0 = 14.025$ К, $a = 0.030355$ ГПа, $b = 0.59991$, $c = 0.0072997$ ГПа ⁻¹
[10, с. 12802]	$T_0(1 + P/a)^b \exp(-P/c)$	$T_0 = 14.025$ К, $a = 0.1129$ ГПа, $b = 0.7155$, $c = 149$ ГПа
[3, с. 104; 7, с. 2]	$A_4 \rho^{1/3}$	$A_4 = 3 \cdot 10^4$ К·см/г ^{1/3}

Заклучение

Рассмотрена постановка задачи о временной эволюции радиального распределения температуры в водородном белом карлике, который первоначально охладился до температуры, близкой к абсолютному нулю, а затем стал нагреваться извне при аккреции водорода с поверхности более массивного компаньона, находясь в тесной двойной системе. Температура белого карлика описывается дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа. Уравнение усложняется при наличии зависимости плотности вещества от радиальной координаты, что приводит к аналогичной зависимости для теплоемкости и коэффициента теплопроводности. При учете излучения, а также функции Дебая для теплоемкости решетки задача становится нелинейной, а уравнение – интегро-дифференциальным. Оно не может быть решено каким-либо из аналитических методов, предлагаемых в литературе по уравнениям сходного типа [11; 12].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А. И. Спиновая поляризация нуклонов. Пределы низких и высоких температур / А. И. Серый // Известия РАН. Серия физическая. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 549–555.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1975. – Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика. – 552 с.
3. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. ; пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 1. – 256 с.
4. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. ; пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 2. – 257–656 с.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика. Ч. I. – 616 с.

6. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1998. – Т. 5. Стробоскопические приборы – Яркость. – 691 с.
7. Cumming, A. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs [Electronic resource] / A. Cumming. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0202079>. – Date of access: 10.03.2015.
8. Gänsicke, Boris T. Heating and cooling of accreting white dwarfs: Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg–August Universität zu Göttingen / Boris T. Gänsicke // Göttingen, 1997. – P. 1–119.
9. Bonev, S. A. A quantum fluid of metallic hydrogen suggested by first-principles calculations / S. A. Bonev [et al.] // Nature. – 2004. – Vol. 431. – P. 669–672.
10. Morales, M. A. Evidence for a first-order liquid-liquid transition in high-pressure hydrogen from ab initio simulations / M. A. Morales [et al.] // PNAS – July 20, 2010. – Vol. 107, № 29. – P. 12799–12803.
11. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
12. Владимиров, В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.10.2014

Sery A.I. To the Problem of White Dwarf Heating at Accretion

The statement of a problem is considered for the time evolution of the radial distribution of temperature in a DA type white dwarf which initially cooled down to a temperature close to absolute zero and then started warming up from without at accretion of hydrogen from the surface of a more massive partner in a close binary system. The temperature of a white dwarf is described by a partial differential equation of parabolic type. The equation gets complicated at the presence of the dependence of the density of matter on radial coordinate, which leads to similar dependence for heat capacity and heat conductivity coefficient. Considering radiation as well as Debye function for lattice heat capacity the problem becomes non-linear and the equation becomes an integral-differential one.

УДК 517.925

Е.Р. Бабич¹, И.П. Мартынов²

¹аспирант Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

²д-р физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и алгебры

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Объектом исследования является система двух дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением второго порядка. Цель исследования – изучение аналитических свойств решений данной системы и решений уравнений с ней связанных. В данной статье построен первый интеграл рассматриваемой системы, а также первые интегралы для уравнений с ней связанных. Установлена мероморфность компонент общего решения данной системы.

Введение

Если уравнение $f(x^{(n)}, \dots, x, z) = 0$ имеет решение $x = \sum_{k=0}^{\infty} h_k (z - z_0)^{k-s}$, то этому

решению будем сопоставлять набор $(s; h_0; r_1, r_2, \dots, r_n)$, где $k = r_m$ – резонансы, h_{r_m} – резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один равный -1 . Остальные резонансы должны быть целыми и различными [1].

Следуя методике нахождения точных решений системы двух дифференциальных уравнений, являющейся моделью Хенона-Хейлеса [2, с. 235], проведем исследование аналитических свойств решений системы

$$\begin{cases} 2xx'' = x'^2 + 3x^2y, \\ y'' = 6y^2 + 2x + a, a'' = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и связанных с ней уравнений.

Пусть производная Шварца $\{\varphi, t\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} = -24p,$$

а функция ω такова, что

$$\omega = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\omega' = -\omega^2 + 12p.$$

Будем искать решение системы (1) в виде

$$x = -v\omega + b, y = \omega^2 + c. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях φ (т.е. при одинаковых степенях ω), получим условия

$$b = v', v = -12p', c = -8p, p'' = 6p^2 + \frac{1}{16}a, v'' = 12pv. \quad (3)$$

Учитывая (3), (2) можно записать в виде

$$x = -\nu\omega + \nu', y = \omega^2 - 8\rho.$$

Пусть $\omega = \frac{u'}{u}$, тогда $u'' = 12\rho u$. Значит, u, ν – два линейно независимые ре-

шения уравнения $w'' = 12\rho w$, т.е. $\begin{vmatrix} u & \nu \\ u' & \nu' \end{vmatrix} = h \neq 0$. Можно считать $h = 1$, тогда для x и y получим

$$x = \frac{1}{u}, \tag{4}$$

$$y = \frac{u'^2}{u^2} - \frac{2u''}{3u}. \tag{5}$$

Для u имеем

$$u^{IV} = 5\frac{u'u'''}{u} - 5\frac{u'^2u''}{u^2} - \frac{3}{2}au - 3. \tag{6}$$

Уравнению (6) соответствуют наборы $(2; h_0; -1, 0, 2, 3)$, $(3; h_0; -1, 0, -2, 6)$.

Полагая $u' = -wu$, получим

$$w^{IV} = 5w'w'' + 5w^2w'' + 5ww'^2 - w^5 - \frac{3}{2}aw + \frac{3}{2}a'. \tag{7}$$

Уравнение (7) обладает свойством Пенлеве [3], при этом ему соответствуют наборы $(1; -1; -1, 2, 3, 6)$, $(1; 2; -1, 2, 3, 6)$, $(1; 3; -1, -2, 6, 7)$, $(1; -4; -1, -7, 6, 12)$. Таким образом, вычеты функции w – целые числа, а значит, согласно лемме, изложенной в работе [4], функция u – мероморфна. Учитывая (4), (5), получаем, что справедлива

Теорема 1. Компаненты x, y общего решения системы (1) являются мероморфными функциями.

При

$$u = \frac{2}{y'' - 6y^2 - a} \tag{8}$$

получим уравнение для y

$$y^{IV} = \frac{1}{2} \frac{(y''' - 12yy' - a')^2}{y'' - 6y^2 - a} + \frac{27}{2} yy'' + 12y'^2 - 9y^3 - \frac{3}{2} ay. \tag{9}$$

Теорема 2. Уравнения (6), (9) связаны между собой преобразованием Бэклунда (5), (8).

Учитывая (4) и (6), для x получим уравнение

$$x^3 x^{IV} = 3x^2 x'x''' + 6x^2 x''^2 - 10xx'^2 x'' + 4x'^4 + 3x^5 + \frac{3}{2} ax^4. \tag{10}$$

Если $a = \alpha, \alpha' = 0$, то система (1) имеет первый интеграл

$$4x'^2 + 3xy'^2 = 12xy^3 + 12x^2y + 6\alpha xy + H_1x, \tag{11}$$

уравнение (10) при этом имеет первый интеграл

$$x^2 x'x''' = \frac{1}{2} x^2 x''^2 + 3xx'^2 x'' - 2x'^4 + x^5 + \frac{3}{4} \alpha x^4 + Hx^2, \tag{12}$$

а уравнение (6) имеет первый интеграл

$$u^2 u' u''' = \frac{1}{2} u^2 u''^2 + u u'^2 u'' + u^3 + \frac{3}{4} \alpha u^4 + H u^6. \quad (13)$$

Заклучение

Установлена мероморфность компонент общего решения системы (1). При $a = \text{const}$ построены первые интегралы (11), (12), (13) соответственно для системы (1) и уравнений (10), (6). Изучены аналитические свойства решений уравнений (6), (7), (9).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванькова, Т. Н. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т. Н. Ванькова [и др.] // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 1 (64). – С. 8–16.
2. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
3. Cosgrove, C. M. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variables / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2000. – P. 1–76.
4. Колесникова, Н. С. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка с неподвижными критическими точками / Н. С. Колесникова, Н. А. Лукашевич // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 11. – С. 2082–2086.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.09.2015

Babich E.R., Martynov I.P. Analytical Properties of Solutions of a Fourth Order System

Object of study is system of two differential equations, each of which is a second-order equation. The aim is to study the analytic properties of the solutions of the given system and the solutions of the equations associated with it. This article is built first integral of the system, and first integrals for the equations associated with it. Proven the meromorphic property of the common solutions of this system.

УДК 517.95

А.И. Басик¹, А.А. Шарманов²

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
²магистр физ.-мат. наук, учитель математики
гимназии № 3 имени В.З. Коржа г. Пинска

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В \mathbb{R}^4

В статье доказывается невыполненность условия регуляризуемости Я.Б. Лопатинского произвольной внутренней краевой задачи для одной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя переменными. При этом в случае задачи Дирихле для рассматриваемой системы устанавливается, что нарушение условия регуляризуемости вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

Введение

Краевая задача для эллиптической системы в классической постановке заключается в том, что требуется найти решение системы в области по заданным на границе линейным комбинациям неизвестных функций и их производных. Случай существования и единственности решения задачи при любых правых частях оказывается достаточно редким, поэтому обычно рассматривается вопрос о разрешимости задачи с точностью до конечномерных пространств, т.е. вопрос о существовании решения, зависящего от конечного числа произвольных постоянных при наложении конечного числа условий на правые части. Известно [1], что свойство разрешимости краевой задачи с точностью до конечномерных пространств эквивалентно ее регуляризуемости – возможности сведения задачи к интегральному уравнению второго рода.

Для эллиптических систем в отличие от задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа возможны качественно другие картины разрешимости краевых задач. В частности, еще в 1948 г. А. В. Бицадзе обнаружил эллиптическую систему, для которой однородная задача Дирихле имеет бесконечно много линейно независимых решений [2]. Позднее для этой системы А.Т. Уссом была найдена регуляризуемая постановка краевой задачи [3].

В 1963 г. М.З. Соломяк доказал, что для известной эллиптической системы Фьютера вообще нет регуляризуемых краевых задач в классической постановке [4]. Поэтому для каждого класса систем возникает естественный вопрос о существовании регуляризуемых краевых задач.

В настоящей работе изучается возможность постановки регуляризуемых краевых условий для одной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя переменными.

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ – ограниченная односвязная область, границей которой является достаточно гладкая трехмерная поверхность $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $U(x) = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$ эллиптической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad (1)$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$\left(\sum_{k=0}^{s_1} B_{1k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}; \sum_{k=0}^{s_2} B_{2k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k} \right) = g(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (2)$$

Здесь $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^4$ – заданная в области Ω четырехкомпонентная вектор-функция, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ – заданная на границе $\partial\Omega$ области Ω двухкомпонентная вектор-функция, $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}_+$, B_{jk} ($j = 1, 2; k = 0, 1, \dots, s_j$) – псевдодифференциальные 1×4 -матричные операторы (т.е. строки из скалярных псевдодифференциальных операторов) на $\partial\Omega$ порядка $s_j - k$, $\partial/\partial\nu$ – оператор дифференцирования по нормали к $\partial\Omega$. Отметим, что матричные коэффициенты системы (1) удовлетворяют соотношениям

$$A_j A_k^{-1} + A_k A_j^{-1} = 2E \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, 4),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Согласно результатам работы [5], последнее означает, что однородная система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, т.е. каждая компонента $u_k(x)$ ($k = \overline{1, 4}$) произвольного непрерывно дифференцируемого решения $U(x) = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$ этой системы удовлетворяет уравнению Лапласа в \mathbf{R}^4 .

О задаче Дирихле для системы (1)

Под задачей Дирихле в классической постановке понимается задача отыскания гармонической в односвязной области функции, совпадающей на границе области с заданной функцией. Известно, что в случае непрерывности по Гельдеру граничного значения гармоническая функция находится однозначно, т.е. задача Дирихле имеет притом единственное решение.

Для голоморфных функций, в отличие от гармонических, подобный факт места не имеет. Голоморфная функция восстанавливается с точностью до постоянной при задании на границе либо действительной, либо мнимой ее части. Это объясняется тем, что по граничным значениям, например действительной части, однозначно находится действительная часть голоморфной функции, по которой, в силу условий Коши – Римана, с точностью до аддитивной постоянной восстанавливается ее мнимая часть.

Высказанные соображения заставляют считать задачей Дирихле (первой краевой задачей) задачу нахождения голоморфной функции в области по задаваемой на границе области половине всех действительных компонент искомой функции.

Рассматриваемая нами система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана и четырехкомпонентное решение ее является аналогом классической голоморфной функции. Естественно поэтому под задачей Дирихле для системы (1) понимать задачу отыскания в области четырехкомпонентного решения (1) по заданным на границе половине всех ее искомым компонент.

В этом разделе докажем бесконечномерность пространства решений однородной системы (1), удовлетворяющих однородным граничным условиям Дирихле

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_3|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Так как система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, то каждая компонента непрерывно дифференцируемого решения является гармонической функцией в области Ω . Поскольку существует единственная гармоническая в области Ω функция, принимающая заданное граничное значение, то $u_1 \equiv 0$ и $u_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Тогда функции u_2 и u_4 удовлетворяют в Ω системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Будем искать решение системы (4) в виде $u_2 = u_2(x_3, x_4)$, $u_4 = u_4(x_3, x_4)$. Тогда (4) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Если $f(x_3 + ix_4)$ – произвольная голоморфная функция, то функции

$$u_2 = \text{Im} f(x_3 + ix_4), \quad u_4 = \text{Re} f(x_3 + ix_4)$$

удовлетворяют системе (5). В частности, при каждом натуральном k , вектор-функция

$$U_k(x) = (0, \text{Im}(x_3 + ix_4)^k, 0, \text{Re}(x_3 + ix_4)^k)^T$$

является решением однородной задачи Дирихле (1), (3).

Таким образом, однородная задача Дирихле (1), (3) имеет бесконечно много линейно независимых решений в произвольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^4$, т.е. задача Дирихле для системы (1) не является регуляризуемой.

Нерегуляризуемость краевых условий для системы (1)

Я.Б. Лопатинским было доказано утверждение о том, что регуляризуемость задачи эквивалентна выполнению некоторых алгебраических соотношений, связывающих ко-эффекты эллиптической системы с коэффициентами, задающими краевые условия [1].

Для краевой задачи (1), (2) условие Я.Б. Лопатинского состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном векторе τ касательном к $\partial\Omega$ в точке y ранг матрицы

$$\int_{\gamma} \sigma(B)(y; \lambda \nu + \tau) \cdot A^{-1}(\lambda \nu + \tau) d\lambda$$

равен 2. Здесь $A(\xi) = \sum_{j=1}^4 A_j \xi_j$ – характеристическая матрица системы (1), $\sigma(B)$ – символ старшей части граничного оператора B , ν и τ – соответственно вектор внутрен-

ней нормали и касательный вектор к поверхности $\partial\Omega$ в точке $y \in \partial\Omega$, γ – контур, лежащий в верхней λ -полуплоскости и охватывающий все находящиеся там λ -корни уравнения $\det A(\lambda\nu + \tau) = 0$.

Теорема 1. Для произвольного граничного оператора (2) краевая задача (1), (2) не является регуляризуемой.

Доказательство. Достаточно установить невыполненность условия Лопатинского для краевой задачи в полупространстве

$$\mathbf{R}_+^4 := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_4 > 0\},$$

получаемом из задачи (1), (2) «замораживанием коэффициентов» в той точке многообразия $\partial\Omega$, в которой нормаль к $\partial\Omega$ параллельна вектору $(0, 0, 0, 1)$. Поэтому при доказательстве теоремы можно считать, что $\Omega = \mathbf{R}_+^4$ и символ главной части граничного оператора (2) не зависит от точки $y \in \partial\Omega$. Далее, поскольку система (1) позволяет выразить $\frac{\partial U}{\partial x_4}$ через частные производные от U по другим переменным, без ограничения

общности можно предполагать, что граничные условия (2) не содержат дифференцирования по x_4 . Пусть $B(\tau)$ – символ главной части граничного оператора (2). Тогда для доказательства теоремы нам остается доказать, что существует ненулевой набор $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, при котором ранг матрицы

$$(\pi)^{-1} B(\tau) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda\nu + \tau) d\lambda \quad (6)$$

строго меньше двух (здесь γ – простой гладкий замкнутый контур, лежащий в верхней λ -полуплоскости и охватывающий точку $\lambda = i$).

Матрица $B(\tau)$ представляет собой 2×4 -матрицу, элементами которой являются действительнзначные непрерывные однородные функции переменных τ_1, τ_2, τ_3 . Будем предполагать, что ее ранг равен двум при каждом $\tau \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, поскольку в противном случае ранг матрицы (6) заведомо меньше двух хотя бы при одном $\tau \neq 0$. Обозначим через Λ_{jk} и H_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) миноры второго порядка, составленные из j -ых и k -ых столбцов соответственно матрицы $B(\tau)$ и матрицы (4), и положим:

$$L_1 = -\Lambda_{12} + \Lambda_{34}; \quad L_2 = \Lambda_{14} - \Lambda_{23}; \quad L_3 = \Lambda_{13} - \Lambda_{14} - \Lambda_{23} + 2\Lambda_{24}.$$

Тогда непосредственным вычислением миноров H_{jk} ($1 \leq j < k \leq 4$) матрицы (6) получим, что в каждой точке $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ единичной сферы

$$S^2 = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \right\}$$

выполняются равенства:

$$\begin{aligned} H_{12} &= -\tau_2(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) - \tau_3(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + i(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2), \\ H_{13} &= 2(\tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + i(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)), \\ H_{14} &= \tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + \tau_1(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) - \tau_3(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + \\ &\quad + i(-(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + (\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)), \\ H_{23} &= \tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) - \tau_1(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) + \tau_3(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + \\ &\quad + i((\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + (\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)), \\ H_{12} &= -H_{34}, \quad H_{13} = 2H_{24}. \end{aligned}$$

Согласно теореме «о еже» [6, с. 584] на сфере S^2 найдется точка $\tau \in S^2$, в которой поле L либо вырождается, либо направлено по нормали к S^2 . В первом случае все компоненты поля $L(\tau)$ нулевые, во втором – пропорциональны соответствующим компонентам вектора нормали $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ к сфере S^2 , т.е.

$$\frac{\tau_1}{L_1(\tau)} = \frac{\tau_2}{L_2(\tau)} = \frac{\tau_3}{L_3(\tau)}.$$

Таким образом, в этой точке сферы S^2 все миноры второго порядка матрицы (6) обращаются в нуль, т.е. в этой точке её ранг строго меньше двух. Теорема доказана.

Заключение

Из теоремы 1 следует, что оператор, отвечающий краевой задаче (1), (2) и действующий в определенных банаховых пространствах [7; 8], не является нётеровым. Это означает, что указанный оператор имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро. Например, в случае задачи Дирихле для рассматриваемой системы установлено, что нарушение условия регуляризуемости вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
2. Бицадзе, А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными / А. В. Бицадзе // УМН. – 1948. – Т. 3, вып. 6. – С. 211–212.
3. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация простейших краевых задач для эллиптических систем двух уравнений второго порядка на плоскости / А. Т. Усс // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 4. – С. 296–298.
4. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.
5. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.
6. Александров, П. С. Комбинаторная топология / П. С. Александров. – М. – Л. : ГИИТЭДИЗДАТ, 1947. – 660 с.
7. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
8. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 373–416.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Basik A.I., Sharmanau A.A. About Boundary-Value Problems for One Elliptic System of Partial Differential Equations of the First Order in R^4

It is proved that a regularizable boundary-value problem for one elliptic system of four partial differential equations of the first order in R^4 does not exist. In addition it is shown, that the operator corresponding to Dirichlet's problem for this system has an infinite-dimensional kernel.

УДК 519.63

В.М. Волков¹, Ю.В. Буяльская²¹д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры веб-технологий
и компьютерного моделирования

Белорусского государственного университета

²аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования

Белорусского государственного университета

**О СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ**

Рассмотрен спектральный метод Чебышева для модельной задачи встречного взаимодействия оптических волн в среде с кубической нелинейностью. Продемонстрированы существенные преимущества спектрального метода по сравнению с методами сплайн-коллокации 4-5-го порядков. Предложен консервативный итерационный алгоритм реализации спектральной модели, обеспечивающий более высокую скорость сходимости по сравнению с методом Ньютона в условиях сильной связи взаимодействующих волн.

Введение

Интерес к развитию методов численного моделирования эффектов встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах обусловлен прежде всего тем, что схема встречного взаимодействия является типичной для большинства типов лазеров и оптических усилителей. В зависимости от конкретной ситуации и выбора соответствующего приближения задачи данного класса могут приводить как к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 2], так и к системам дифференциальных уравнений в частных производных [3]. И в первом и во втором случаях для исчерпывающего анализа задачи требуется привлечение численных методик. Для решения данного класса краевых задач используются различные подходы, основанные на методах конечных разностей [3] коллокации [4], методе стрельбы [5] и др. В последние годы большие успехи получены в использовании спектральных методов применительно к задачам численного моделирования оптоволоконных усилителей [6; 7]. Одна из проблем в использовании спектральных методов решения нелинейных краевых задач связана реализацией такого рода дискретных моделей, представляющих собой системы нелинейных алгебраических уравнений. Для этих целей используют, как правило, итерационный метод Ньютона, который при надлежащем выборе начального приближения обеспечивает высокую скорость сходимости итераций. В данной работе предлагается альтернативная итерационная методика реализации спектральных моделей, обеспечивающая высокую эффективность вне зависимости от выбора начального приближения. На примере модельной задачи показано, что при использовании предлагаемой методики достигается уменьшение числа итераций в 2–3 раза по сравнению с методом Ньютона. Показано также, что спектральный метод на основе полиномов Чебышева на порядок превосходит в эффективности стандартные средства численного анализа двухточечных краевых задач, предлагаемых современными математическими пакетами, например, Matlab.

Постановка задачи

Математическая модель встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах в простейшем случае представляет собой краевую задачу для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию нормированных

комплексных огибающих амплитуды поля волн $E_{\pm} = E_{\pm}(z)$, распространяющихся в прямом и противоположном направлении координатной оси z :

$$\frac{dE_{\pm}}{dz} = G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}), \quad -1 < z < 1, \quad (1)$$

$$E_{+}(-1) = E_p, \quad E_{-}(1) = E_m. \quad (2)$$

Функция $G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp})$ определяется механизмами взаимодействия волн. Для описания эффекта вынужденного комбинационного рассеяния функция нелинейного взаимодействия имеет вид

$$G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}) = -\gamma |E_{\mp}|^2 E_{\pm}, \quad (3)$$

где постоянная γ характеризует интенсивность энергетического обмена взаимодействующих волн.

Для задачи (1)–(3) имеет место закон сохранения

$$\frac{d}{dz} |E_{+}|^2 - |E_{-}|^2 = 0. \quad (4)$$

Аналогичным инвариантом обладает и задача о распространении волн в средах с периодической модуляцией коэффициента преломления [7, с. 144], для которой функции $G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp})$ имеет вид:

$$G_{\pm}(E_{\pm}, E_{\mp}) = \mp i\kappa \exp(\pm i2\Delta z) E_{\mp}, \quad (5)$$

где действительные постоянные κ и Δ характеризуют амплитуду и отстройку периода модуляции коэффициента преломления среды от длины волны.

Спектральный метод Чебышева

В основе спектральных методов лежит представление искомого решения дифференциальной задачи в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, в качестве которых традиционно выступают системы ортогональных алгебраических или тригонометрических полиномов. Для алгебраических полиномов наиболее удобно интерполяционное представление вида

$$f(z) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varphi_n(z), \quad (6)$$

где значения коэффициентов f_n в узлах сетки z_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, совпадает с интерполируемой функцией, $f(z_n) = f_n$, а базисные функции удовлетворяют условию $\varphi_n(z_m) = \delta_{nm}$. В этом случае удается достаточно компактно выразить производные интерполируемой функции в узлах сетки:

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z_m) \cong \sum_{n=0}^{N-1} f_n \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Выражение (7) для приближенного вычисления производных сеточной функции $f(z_m)$ представляет собой не что иное, как произведение некоторой матрицы $D \in R^{N \times N}$ (спектральной матрицы дифференцирования) на заданный вектор $f \in R^N$:

$$f^{(k)} \cong D^{(k)} f, \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T, \quad d_{nm}^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} \varphi_n(z_m). \quad (8)$$

Подробную информацию о вычислении спектральных матриц дифференцирования для различных базисных функций можно найти в работах [8; 9]. Мы использовали спектральную матрицу дифференцирования Чебышёва для системы узлов

$$z_j = \cos \frac{j\pi}{N-1}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (9)$$

которые являются экстремумами полиномов Чебышева первого рода степени $N-1$: $T_{N-1}(z) \equiv \cos((N-1) \arccos(z))$. Матрица спектрального дифференцирования Чебышева произвольной размерности для отрезка $z \in [-1, 1]$ может быть сгенерирована стандартными функциями Matlab.

Использование формализма матрицы спектрального дифференцирования позволяет весьма просто перейти от дифференциальной модели к спектральному аналогу путем замены неизвестных функций и их производных на соответствующие векторы и матрицы с учетом краевых условий задачи. В нашем случае спектральная модель приводит к системе алгебраических уравнений, которая может быть представлена в виде

$$A \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (10)$$

где $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_+ \\ \mathbf{u}_- \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_\pm = (u_\pm(z_0), u_\pm(z_1), \dots, u_\pm(z_{N-1}))^T$, $u_\pm(z_n)$ – приближенные значения иско-

мого решения в узлах сетки, $A = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix}$ – блочно-диагональная матрица размерности $2(N-1) \times 2(N-1)$, блоки которой строятся из спектральной матрицы дифференци-

рования с учетом краевых условий задачи, $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} G_+(\mathbf{u}) \\ G_-(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ – вектор-функция размерности $2(N-1)$, описывающая нелинейную часть задачи. В случае линейной задачи, например (1), (2), (5), функции $G_\pm(E_\pm, E_\mp)$ могут быть учтены в виде соответствующих блоков матрицы A ,

$$A = \begin{pmatrix} D_+ & G_+ \\ G_- & D_- \end{pmatrix},$$

$G_+ = \text{diag}(0, g_1^+, \dots, g_{N-1}^+)$, $G_- = \text{diag}(g_0^-, \dots, g_{N-2}^-, 0)$, $g_n^\pm = \pm i\kappa \exp(\pm i2\Delta z_n)$. Заметим, что первая и последняя строки матрицы A отвечают краевым условиям задачи, в связи с чем все компоненты данных строк, за исключением $a_{11} = a_{2(N-1), 2(N-1)} = 1$, полагаются равными нулю. Первая и последняя компоненты вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ также полагаются равными нулю. В соответствии с краевыми условиями вектор правой части системы $\mathbf{f} \in R^{2(N-1)}$ имеет вид

$$\mathbf{f} = (E_p, 0, \dots, 0, E_m). \quad (11)$$

Отметим, что в отличие от разностных методов [3] спектральная модель не обладает свойством консервативности. В частности, для нее не удастся получить дискретного аналога закона сохранения (4), поскольку необходимое для этого свойство дифференцирования $(u \cdot g)' = u' \cdot g + u \cdot g'$ не выполняется в строгом смысле для формул спектрального дифференцирования. Тем не менее, для аналитических функций спектральные производные обладают весьма высокой точностью, что при достаточном разрешении сетки гарантируют в рамках спектральной модели соответствующую точность передачи всех качественных характеристик решения [10], включая и законы сохранения вида (4).

В качестве иллюстрации преимуществ спектрального метода (10) на рисунке 1 представлены результаты численных экспериментов по оценке эффективности данного

подхода в сравнении со стандартными функциями Matlab для решения двухточечных краевых задач. В качестве тестового примера рассмотрена линейная задача (1), (2), (5) при значениях параметров: $\kappa = 1$, $\Delta = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 0$. Погрешность приближенных решений оценивалась с использованием значения амплитуды отраженной волны $E_-(-1)$, для которого известно точное выражение [7, с. 146]:

$$|E_-(-1)| = \frac{|\operatorname{sh}(2\alpha)|}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(2\alpha - \chi^2)}}, \quad \alpha = \kappa^2 - \Delta^2, \quad \chi = \frac{\Delta}{\kappa}. \quad (12)$$

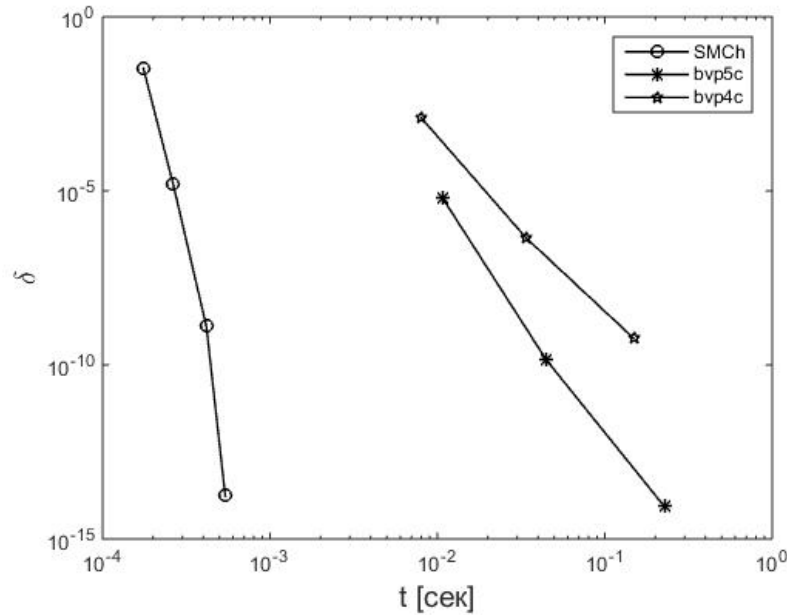


Рисунок 1.

На рисунке 1 представлены зависимости погрешности приближенного решения $\delta = \|E_-(-1) - |u_-(-1)|\|$ от времени решения задачи при использовании спектрального метода Чебышева (10) и методов сплайн-коллокации четвертого и пятого порядков точности [11], реализованных в функциях Matlab *tpbvp4c* и *tpbvp5c*, соответственно. Увеличение точности результатов достигалось за счет увеличения размерности сетки от $N = 21$, до $N = 47$ в спектральном методе и от $N = 17$ до $N = 700$ в методах сплайн-коллокации. С ростом размерности сетки соответственно возрастали вычислительные затраты на решение задачи. Представленные на рисунке 1 результаты показывают, что спектральный метод Чебышева позволяет сократить время решения задачи на один–два порядка для получения заданной относительной погрешности в диапазоне от $\delta = 10^{-4}$ до $\delta = 10^{-12}$, причем с ростом требований к точности приближенного решения преимущества спектрального метода возрастают.

Говоря о преимуществах спектрального метода Чебышева для рассмотренного класса задач следует отметить естественную адаптацию расчетной сетки к характеру типичных решений. Пример решения задачи (1)–(3), $\gamma = 10$, $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$ представлен на рисунке 2. При возрастании значения параметра $\gamma \gg 1$ решение приобретает структуру пограничного слоя, для описания которого требуется лучшее разрешение сетки вблизи границ области, что естественным образом обеспечивается расчетной сеткой (9).

В случае линейной задачи спектральный метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей блочного вида. При решении нелинейных задач соответствующая спектральная модель (10) также нелинейная, поэтому для ее реализации потребуется использование итерационных методов.

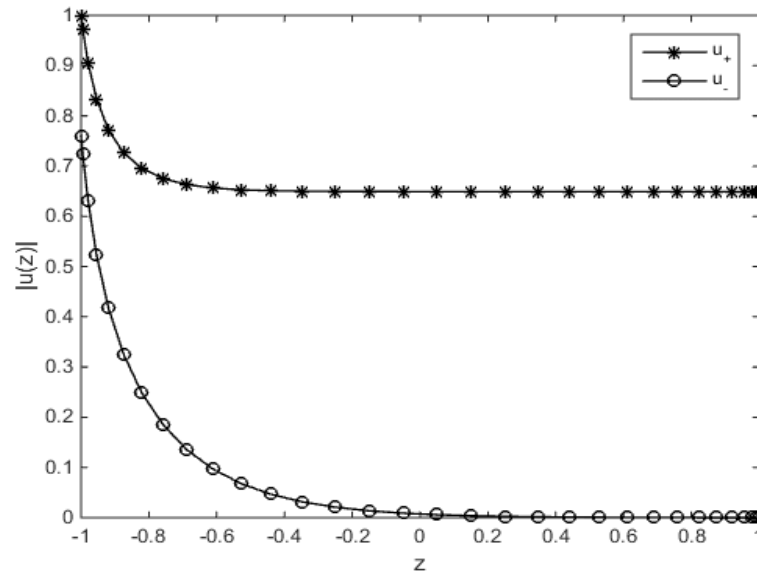


Рисунок 2.

Итерационные методы реализации спектральной модели

Рассмотрим итерационный метод Ньютона, который для задачи (1)–(3), (10) будет иметь следующий вид:

$$J^s \mathbf{u}^{s+1} = J^s \mathbf{u}^s - \tau \cdot F(\mathbf{u}^s), \quad (13)$$

$$J^s = J(\mathbf{u}^s) = A + \gamma \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

$$G_{11} = \text{diag}(0, |u_-^s(z_1)|^2, \dots, |u_-^s(z_{N-1})|^2),$$

$$G_{22} = \text{diag}(|u_+^s(z_0)|^2, \dots, |u_+^s(z_{N-2})|^2, 0),$$

$$G_{12} = \text{diag}(0, u_+^{*s}(z_1)u_-^s(z_1), \dots, u_+^{*s}(z_{N-1})u_-^s(z_{N-1})), \quad (14)$$

$$G_{21} = \text{diag}(u_-^{*s}(z_0)u_+^s(z_0), \dots, u_-^{*s}(z_{N-2})u_+^s(z_{N-2}), 0),$$

$$F(\mathbf{u}^s) = A\mathbf{u}^s + \mathbf{g}(\mathbf{u}^s) - \mathbf{f}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь u_{\pm}^* означает комплексно-сопряженное значение u_{\pm} , $0 < \tau \leq 1$ – итерационный параметр, обеспечивающий глобальную сходимость метода Ньютона в пространстве начальных приближений вне зависимости от попадания в достаточно малую окрестность искомого решения. Максимальная скорость сходимости достигается при $\tau = 1$. При отсутствии сходимости итерационного метода (13), (14) в случае $\tau = 1$ следует повторить процедуру с меньшим значением τ . Использование модифицированного метода Ньютона с параметром позволяет достичь сходимости при произвольном, например, нулевом начальном приближении, $\mathbf{u}_{\pm}^0 = 0$.

Наряду с итерационным методом Ньютона (13), (14) рассмотрим также итерационный процесс, аналогичный консервативному методу, успешно использованному ранее для реализации разностных моделей аналогичных нелинейных задач встречного взаимодействия оптических волн [12]:

$$C^s \mathbf{u}^{s+1} = f, \quad (15)$$

$$C^s = C(\mathbf{u}^s) = \begin{pmatrix} D_+ & \gamma G_{12} \\ \gamma G_{21} & D_- \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формулах (13), (14). Структура матрицы C в итерационном методе (15) совпадает со структурой матрицы Якоби в методе Ньютона, что позволяет говорить о сопоставимой вычислительной сложности одной итерации в рассмотренных двух итерационных процедурах.

Отличительной особенностью итерационного метода (15), (16) является то, что в пределах спектральной точности он является консервативным, т.е. приближенное решение на каждой итерации удовлетворяет закону сохранения (4) не хуже, чем в пределе сходимости итераций. Иными словами, консервативность итерационного метода выполняется настолько, насколько спектральная производная обеспечивает точность дифференцирования квадрата сеточных функций на текущей итерации.

Результаты численных экспериментов показывают, что скорость сходимости итерационных методов (13), (14) и (15), (16) существенно зависит от интенсивности взаимодействия волн, однако для консервативного итерационного метода (КИМ) замедление скорости сходимости с ростом параметра γ существенно ниже по сравнению с методом Ньютона (13), (14). В частности, на рисунке 3 представлены результаты сравнительного анализа эффективности рассмотренных численных методов, а именно, зависимости числа итераций для достижения показателя точности $\varepsilon = 10^{-8}$, который оценивался по относительной норме невязки приближенного решения. Рассмотрен пример решения задачи (1)–(3) в диапазоне значений параметра $\gamma = 2 \div 7$ при $E_p = 1$, $E_m = 10^{-4}$. Как видно из рисунка, консервативный итерационный метод требует до трех раз меньше итераций по сравнению с методом Ньютона. При этом, как отмечалось выше, вычислительные затраты на отдельную итерацию в рассмотренных методах приблизительно одинаковы.

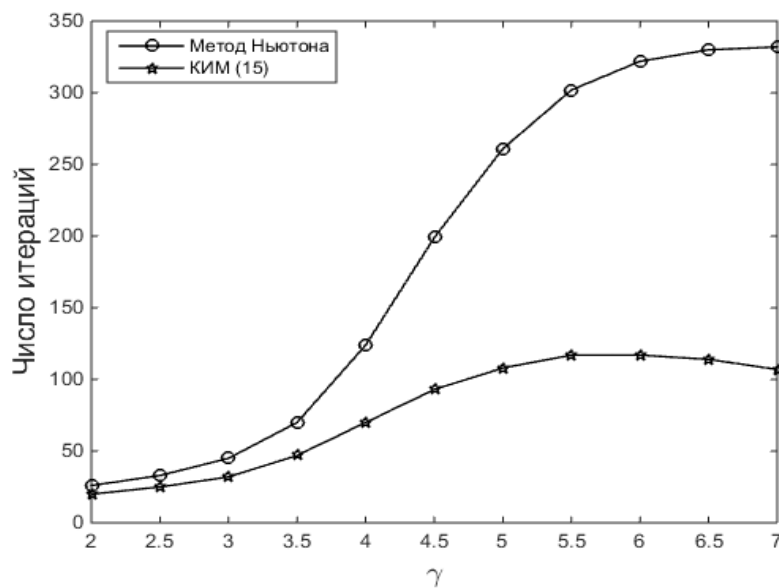


Рисунок 3.

Подводя итог, отметим, что предложенный итерационный метод тестировался также на более сложных примерах многоволновых задач, характерных для моделирования оптоволоконных усилителей на основе эффекта вынужденного комбинационного рассеяния [1; 2]. При этом в подавляющем большинстве случаев консервативный итерационный метод (15), (16) демонстрировал убедительное превосходство по сравнению с методом Ньютона.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Headley, C. Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems / C. Headley, G. Agrawal. – San Diego : Academic Press, 2005. – P. 376.
2. Perlin, V. E. Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers / V. E. Perlin, H. G. Winful // Journal of lightwave technology. – 2002. – Т. 20. – № 2. – P. 250–254.
3. Карамзин, Ю. Н. Математическое моделирование в нелинейной оптике / Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов. – М. : МГУ, 1989. – 160 с.
4. Serdar Gokhan, F. Solution of Raman fiber amplifier equations using MATLAB BVP solvers / F. Serdar Gokhan, G. Yilmaz // COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. – 2011. – Т. 30. – № 2. – P. 398–411.
5. Liu, X. An effective method for two-point boundary value problems in Raman amplifier propagation equations / X. Liu, M. Zhang // Optics communications. – 2004. – Т. 235. – № 1. – P. 75–82.
6. Tarman, H. I. A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations / H. I. Tarman, H. Berberoğlu // Optics Communications. – 2009. – Т. 282. – № 8. – P. 1551–1556.
7. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, А. П. Сухоруков, О. В. Руденко. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
8. Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 160 p.
9. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26. – № 4. – P. 465–519.
10. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.
11. Shampine, L. F. Solving ODEs with matlab / L. F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson. – New York : Cambridge University Press, 2003. – 263 p.
12. Волков, В. М. Итерационные методы решения стационарных задач встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах / В. М. Волков // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 7. – С. 935–941.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Volkov V.M., Buyalskaya Yu.V. On Spectral Methods for Numerical Analysis of Counterpropagating Optical Waves Interaction in Nonlinear Media

Spectral methods for a typical problem of counterpropagating optical wave interaction in nonlinear media are considered. Significant advantages of the spectral technique in comparison with 4-5-order spline-collocation methods are demonstrated. For implementation of nonlinear spectral model a conservative iterative method is proposed. The proposed method demonstrates improved convergence in comparison with the Newton methods in the case of strong nonlinear coupling of the interacting waves.

УДК 512.535

Т.В. Волошина

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры и математического анализа
Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки
(Луцк, Украина)

ТОЧНЫЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ ЧАСТИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается инверсная полугруппа частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства. Описаны все ее точные представления частичными подстановками на множестве правых ω -классов по замкнутым инверсным подполугруппам.

Введение

Пусть V – конечномерное векторное пространство. Множество всех линейных взаимно однозначных отображений вида $s: W_1 \rightarrow W_2$, где W_1, W_2 – его подпространства одинаковой размерности, образует инверсную полугруппу относительно операции композиции. Будем называть ее *полугруппой частичных линейных отображений векторного пространства V* и обозначать $PGL(V)$. Заметим, что в этой полугруппе содержится подгруппа $GL(V)$ всех невырожденных линейных операторов векторного пространства.

На множестве элементов инверсной полугруппы S *естественный частичный порядок ω* задается следующим образом [1; 2]: $a\omega b$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство $aa^{-1} = ab^{-1}$, равносильное равенству $a^{-1}a = a^{-1}b$. Замыканием $H\omega$ множества $H \subseteq S$ называется множество $H\omega := \{h \in S : \exists t \in H \ t\omega h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют *замкнутым*.

Областью определения произвольного идемпотента полугруппы $PGL(V)$ является некоторое подпространство векторного пространства V . Естественный частичный порядок ω на множестве идемпотентов полугруппы $PGL(V)$ совпадает с отношением включения на соответствующем множестве областей определения идемпотентов. Поскольку каждая убывающая цепочка $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_k$ подпространств n -мерного векторного пространства V содержит не более $(n+1)$ -ого элемента, каждая убывающая цепочка идемпотентов полугруппы $PGL(V)$ также содержит конечное число элементов. Каждая замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы $PGL(V)$ содержит наименьший идемпотент.

Подстановочным представлением на множестве X инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм в симметрическую инверсную полугруппу $IS(X)$. Для элемента $a \in S$ через *dom* a и *ran* a обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Представление называется *точным*, если оно инъективно. Для каждой инверсной полугруппы Вагнер [3] и Престон [4] построили точное представление частичными подстановками множества ее элементов. Этот факт является аналогом теоремы Кэли в теории групп.

Пусть $\varphi_i: S \rightarrow IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. *Прямой суммой представлений φ_i* называется представление $\varphi: S \rightarrow IS(X)$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два пред-

ставления $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ и $\psi: S \rightarrow IS(Y)$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y , что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $(\theta(x))^{\psi(s)} = \theta(x')$. Представление $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ инверсной полугруппы S называют *транзитивным*, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X , что $h(x_1) = x_2$, и *эффективным*, если $\bigcup_{x \in \varphi(S)} \text{dom } x = X$.

Мы в работе ограничимся рассмотрением только транзитивных представлений, поскольку каждое эффективное представление разлагается в прямую сумму транзитивных [5]. В 1962 г. Шайном [6] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H = \{(s, t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S . Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности H – единственный π_H -класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [1]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$ и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми ω -классами по замкнутой инверсной подполугруппе H* . Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H: S \rightarrow IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы S на правых ω -классах по замкнутой инверсной подполугруппе H* . Область определения конгруэнции π_H будем обозначать $D_H = \{s \in S \mid ss^{-1} \in H\}$.

Постановка задачи

Описание всех точных представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Представление Вагнера – Престона в общем случае не транзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. В нашей работе описаны все точные транзитивные подстановочные представления полугруппы $PGL(V)$ частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства в терминах ее замкнутых инверсных подполугрупп, а также их представлений.

Вспомогательные результаты

Теорема 1 [7]. Для каждого подпространства W конечномерного векторного пространства V и каждой погруппы $G \leq GL(W)$ множество $\{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$ является замкнутой инверсной подполугруппой полугруппы $PGL(V)$. Каждая замкнутая инверсная подполугруппа полугруппы $PGL(V)$ имеет такой вид.

Шайн [6] показал, что представления φ_{K_1} и φ_{K_2} инверсной полугруппы S на множестве правых ω -классов по замкнутым инверсным подполугруппам K_1 и K_2 будут эквивалентными (а подполугруппы K_1 и K_2 – сопряженными) тогда и только то-

гда, когда существует такой элемент $a \in S$, что $aa^{-1} \in K_1$, $a^{-1}a \in K_2$ и $a^{-1}K_1a \subseteq K_2$, $aK_2a^{-1} \subseteq K_1$.

Теорема 2 [7]. Представления инверсной полугруппы $PGL(V)$ на множестве правых ω -классов по замкнутым инверсным подполугруппам $H_1 = \{s \in PGL(V) \mid s|_{W_1} \in G_1\}$ и $H_2 = \{s \in PGL(V) \mid s|_{W_2} \in G_2\}$, где $G_1 \leq GL(W_1)$, $G_2 \leq GL(W_2)$, будут эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют такой линейный изоморфизм $\tau: W_1 \rightarrow W_2$ и изоморфизм $\psi: G_1 \rightarrow G_2$, для которых равенство $\tau(a^{g_1}) = (\tau(a))^{\psi(g_1)}$ выполняется для всех $g_1 \in G_1$, $a \in W_1$.

Основной результат

Одномерные подпространства векторного пространства V и только они не содержат нетривиальных подпространств. Поэтому множество примитивных идемпотентов инверсной полугруппы $PGL(V)$ совпадает с множеством тех идемпотентов, областью определения которых является одномерное подпространство векторного пространства V .

Теорема 3. Представление φ_H полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$, где $G \leq GL(W)$, является точным тогда и только тогда, когда подпространство W – одномерно, а группа G состоит из одного элемента. Все точные эффективные транзитивные представления полугруппы $PGL(V)$ – эквивалентны.

Доказательство. Предположим сначала, что представление φ_H инверсной полугруппы $PGL(V)$ на множестве правых ω -классов по замкнутой инверсной подполугруппе $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$, где $G \leq GL(W)$, является точным. Поскольку каждая убывающая цепочка идемпотентов из $PGL(V)$ содержит конечное число элементов, каждая замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы $PGL(V)$ в силу леммы 2 из [8] содержит наименьший идемпотент. По теореме 1 из [8] наименьший идемпотент e_H подполугруппы H является примитивным идемпотентом инверсной полугруппы $PGL(V)$. Областью определения такого идемпотента является одномерное подпространство W векторного пространства V . Группа $GL(W)$ при этом совпадает с множеством всех линейных отображений $s: W \rightarrow W$, заданных правилом $s(a) = \lambda a$, $a \in W$, где $\lambda \in P \setminus \{0\}$, и поэтому изоморфна мультипликативной группе поля P .

Пусть $\lambda \in P \setminus \{0\}$ такая, что отображение $s: W \rightarrow W$, заданное $s(a) = \lambda a$ для $a \in W$, содержится в подгруппе $G \leq GL(W)$.

Рассмотрим произвольный правый ω -класс $(Hs)\omega$ инверсной полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и произвольный $t \in PGL(V)$. Элемент s можна выбрать так, чтобы выполнялось равенство $ss^{-1} = e_H$. При этом

$$dom s = dom (ss^{-1}) = dome_H = W.$$

Пусть τ_λ – отображение $a \mapsto \lambda a$, $a \in V$. Тогда выполняется равенство $st(\tau_\lambda \tau_\lambda^{-1})t^{-1}s^{-1} = stt^{-1}s^{-1}$. Отсюда $(Hst)\omega \neq \emptyset \Leftrightarrow stt^{-1}s^{-1} \in H \Leftrightarrow st(\tau_\lambda \tau_\lambda^{-1})t^{-1}s^{-1} \in H \Leftrightarrow (Hs(t\tau_\lambda))\omega \neq \emptyset$. Если идемпотент $stt^{-1}s^{-1} \in H$, то для каждого $a \in W$ выполняется равенство $a^{stt^{-1}s^{-1}} = a$. Поэтому для каждого $a \in W$

$$a^{st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1}} = ((a^{st})^{\tau_\lambda})^{t^{-1}s^{-1}} = (\lambda a^{st})^{t^{-1}s^{-1}} = \lambda a^{st^{-1}s^{-1}} = \lambda a.$$

Следовательно $st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1}|_W \in G$ и $st\tau_\lambda t^{-1}s^{-1} \in H$. Отсюда вытекает равенство $(Hst\tau_\lambda)\omega = (Hst)\omega$. Таким образом, $((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t\tau_\lambda)}$. Поскольку правый ω -класс $(Hs)\omega$ выбран произвольно, $\varphi_H(t) = \varphi_H(t\tau_\lambda)$. Из точности представления φ_H следует, что $t = t\tau_\lambda$. Элемент $t \in PGL(V)$ также выбран произвольно. Поэтому из равенства $t = t\tau_\lambda$ вытекает, что $\lambda = 1$. Таким образом, группа G – единичная, содержит тождественное отображение подпространства W .

По теореме 2, все точные эффективные транзитивные представления инверсной полугруппы $PGL(V)$ – эквивалентны.

Пусть теперь $H = \{s \in PGL(V) \mid s|_W \in G\}$ и подпространство W – одномерно. Докажем, что представление φ_H – точное.

Выберем в подпространстве W произвольный элемент $a \in W$ и зафиксируем его. Тогда

$$W = \{\lambda a \mid \lambda \in P\}.$$

Построим взаимно однозначное соответствие θ между множеством X правых ω -классов инверсной полугруппы $PGL(V)$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и множеством векторов векторного пространства V . Для каждого правого ω -класса $(Hs)\omega$ положим $\theta((Hs)\omega) = s(a) \in V$. Рассмотрим такие $s_1, s_2 \in D_H$, что $s_1(a) \neq s_2(a)$. Тогда $a^{s_1 s_2^{-1}} \neq a$. Отсюда $s_1 s_2^{-1} \notin H$, что равносильно $(Hs_1)\omega \neq (Hs_2)\omega$. Следовательно, θ – задано корректно.

Пусть $(Hs_1)\omega, (Hs_2)\omega$ – разные правые ω -классы. Предположим, что $s_1(a) = s_2(a)$. Тогда $a^{s_1 s_2^{-1}} = s_2^{-1}(s_1(a)) = s_2^{-1}(s_2(a)) = a$ и $(\lambda a)^{s_1 s_2^{-1}} = \lambda a^{s_1 s_2^{-1}} = \lambda a$, $\lambda \in P$. Следовательно, $s_1 s_2^{-1}|_W = 1$ и поэтому $s_1 s_2^{-1} \in H$, что в свою очередь равносильно равенству $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$, а это противоречит выбору $(Hs_1)\omega, (Hs_2)\omega$. Образы разных правых ω -классов при отображении θ разные, поэтому θ – инъективно.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $v \in V$. Для него существует такое $s \in PGL(V)$, что $s(a) = v$. Тогда $s(\lambda a) = \lambda s(a) = \lambda v$, $\lambda \in P$. Следовательно, $W \subseteq \text{dom } s = \text{dom } (ss^{-1})$. Поэтому $e_H \omega ss^{-1}$. Поскольку H – замкнута, $ss^{-1} \in H$. Отсюда имеем $(Hs)\omega \neq \emptyset$. При этом $\theta((Hs)\omega) = s(a) = v$, что доказывает сюръективность отображения θ . Следовательно, $\theta: X \rightarrow V$ – биекция.

Пусть $t_1, t_2 \in PGL(V)$ такие, что $\varphi_H(t_1)$ и $\varphi_H(t_2)$ одинаково действуют на множестве правых ω -классов по H . Докажем, что $t_1(v) = t_2(v)$, для всех $v \in V$.

Пусть $v \in V$ – такой, что $t_1(v) \neq \emptyset$ и $\theta^{-1}(v) = (Hs)\omega$. Тогда $t_1(v) = t_1(s(a)) = a^{s t_1} \neq \emptyset$ и $\theta^{-1}(t_1(v)) = \theta^{-1}(a^{s t_1}) = (Hst_1)\omega \neq \emptyset$. Поскольку $\varphi_H(t_1)$ и $\varphi_H(t_2)$ одинаково действуют на множестве правых ω -классов по H и выполняется равенство $((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_1)} = (Hst_1)\omega \neq \emptyset$, то

$$(Hst_2)\omega = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_2)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t_1)} = (Hst_1)\omega.$$

Отсюда $t_2(v) = t_2(s(a)) = a^{s t_2} = \theta((Hst_2)\omega) = \theta((Hst_1)\omega) = a^{s t_1} = t_1(v)$. Таким образом, из условия $t_1(v) \neq \emptyset$ вытекает равенство $t_1(v) = t_2(v)$. Поскольку $t_1(v) = t_2(v)$, для всех $v \in V$, то $t_1 = t_2$ и представление φ_H – точное.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972. – Т. 1, 2. – 672 с.
2. Артамонов, В. А. Общая алгебра : в 2 т. / В. А. Артамонов [и др.]. – М. : Наука, 1991. – Т. 2. – 395 с.
3. Вагнер, В. В. Обобщенные группы / В. В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – № 84. – С. 1119–1122.
4. Preston, G. V. Representations of inverse semigroups / G. V. Preston // J. London Math. Soc. – 1954. – № 29. – P. 411–419.
5. Понизовский, И. С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И. С. Понизовский // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1964. – Т. 28:5. – С. 989–1002.
6. Шайн, Б. М. Представление обобщенных групп / Б. М. Шайн // Изв. вузов. Матем. – 1962. – № 3. – С. 164–176.
7. Волошина, Т. В. Подстановочные представления полугруппы частичных линейных отображений конечномерного векторного пространства / Т. В. Волошина // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы науч.-практ. конф., Брест, 2015, 22–24 апр.
8. Волошина, Т. В. О точных представлениях инверсных полугрупп / Т. В. Волошина // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фіз. Матэм. – 2012. – № 1. – С. 50–55.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.09.2015

Voloshyna T.V. Exact Representations of Semigroup of Partial Linear Transformations of a Finite-dimensional Vector Space by Partial Permutations

In paper inverse semigroup of partial linear transformations of a finite-dimensional vector space is considered. All exact representations of this semigroup by partial permutations on a set of right ω -classes of the closed inverse subsemigroups are described.

УДК 512.542

Д.Д. Даудов¹, А.А. Трофимук²¹магістрант спецыяльнасці «Матэматыка»

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ
КОФАКТОРОВ ИМЕЮТ МАЛЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ**

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G , у которой нормальный ранг силовских подгрупп кофакторов подгрупп ограничен. В частности, производная длина такой группы G не превышает 6 , а нильпотентная длина группы G не превышает 4 .

Введение

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными. Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $\overline{H^G} = H / \text{core}_G H$, где $\text{core}_G H$ – ядро подгруппы H в группе G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G , содержащаяся в H .

Важным направлением теории групп является изучение групп, у которых определённая система подгрупп обладает заданными свойствами. В данной работе в качестве определяющей системы подгрупп мы выбрали силовские подгруппы кофакторов подгрупп группы, а в качестве определяющего свойства – цикличность, бицикличность, ограничение на нормальный ранг.

Напомним, что группу $G = AB$ называют бициклической, когда она является произведением двух циклических групп A и B .

В.С. Монахов [1] ввел понятие нормального ранга p -группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X , а запись $X \triangleleft P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P .

Очевидно, что для нечетного простого числа p класс p -групп, у которых нормальный ранг ≤ 2 шире, чем класс всех бициклических p -групп. Так, экстраспециальная группа S порядка 27 имеет нормальный ранг равный 2 , но S не является бициклической. Кроме того, существуют бициклические 2 -группы, которые имеют нормальный ранг 3 . Так, группа

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a, b] = c, [b, c] = b^4, [a, c] = 1 \rangle$$

является бициклической и $r_n(G) = 3$. При этом класс 2 -групп, у которых нормальный ранг ≤ 3 шире, чем класс всех бициклических 2 -групп.

Исследованию строения групп, у которых кофакторы подгрупп имеют малые порядки или порядки кофакторов подгрупп имеют известные канонические разложения, посвящены работы С.М. Евтуховой и В.С. Монахова [2; 3].

В работе [4] Говеньбинь изучил строение группы с циклическими кофакторами примарных подгрупп. Из основного результата этой работы вытекают оценки инвариантов групп (производной и нильпотентной длины), у которых порядки кофакторов подгрупп свободны от квадратов.

Естественным является развитие результатов, предложенных выше, за счёт исследования разрешимых групп с силовскими подгруппами кофакторов фиксированного нормального ранга. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G – разрешимая группа и $(\overline{H^G})_p$ имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$, где H – произвольная подгруппа группы G . Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Здесь $(\overline{H^G})_p$ – силовская p -подгруппа кофактора $\overline{H^G}$.

Основные определения и вспомогательные результаты

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [5; 6].

Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через \mathfrak{N} и \mathfrak{A} соответственно.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно ([6], с. 36), произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.2 ([7], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{k-1}$.

Лемма 1.3. ([5], теорема 2.8). Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 1.4. ([5], теорема 1.65). Для каждой группы G и её силовской подгруппы P справедливы следующие утверждения:

- 1) если $K \triangleleft G$, то $P \cap K$ – силовская p -подгруппа в K ;
- 2) если $K \triangleleft G$, то PK/K – силовская p -подгруппа в G/K .

Лемма 1.5. ([7], лемма 13).

1) Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2) Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathfrak{N}^4$.

Лемма 1.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит \mathfrak{F} , но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 1.7. ([5], теорема 4.42). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой группой порядка p^n для некоторого простого p ;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 1.8. Пусть H – разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(4, 2)$. Тогда производная длина подгруппы не превышает 5, а нильпотентная длина не превышает 3.

Доказательство. Заключение леммы проверяется элементарными вычислениями в компьютерной системе GAP.

Лемма 1.9. ([5], следствие из теоремы 4.24). В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 1.10. ([7], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{K}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{K}^5$.

Лемма 1.11. ([5], лемма 2.33). Если N_1 и N_2 нормальные подгруппы группы G , то фактор-группа $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе, являющейся подпрямым произведением прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$.

Лемма 1.12. ([5], следствие, стр. 86). Минимальная нормальная подгруппа группы либо элементарная абелева p -группа для некоторого простого p , либо является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп.

Лемма 1.13. ([2], леммы 1, 2).

1. Если H и K подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $\text{core}_G K \leq \text{core}_G H$.

2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G , H – подгруппа из G и $N \subseteq H$. Тогда $N \leq \text{core}_G H$ и $(\text{core}_G H)/N \leq \text{core}_{G/N}(H/N)$.

Лемма 1.14. ([1], лемма 8). Если N – нормальная подгруппа p -группы P , то $r_n(P/N) \leq r_n(P)$.

Доказательство теоремы

Выделим два вспомогательных результата.

Лемма 2.1. Пусть G – группа и H – произвольная подгруппа в G . Если все силовские подгруппы из $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, то для любой собственной подгруппы X группы G все силовские подгруппы из $\overline{H_1^X}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, где H_1 – произвольная подгруппа в X .

Доказательство. Так как $X < G$ и $H_1 \leq X$, то $H_1 < G$. Из леммы 1.13 следует, что $\text{core}_G H_1 \leq \text{core}_X H_1$. Тогда $\overline{H_1^X} = H_1 / \text{core}_X H_1 \cong (H_1 / \text{core}_G H_1) / (\text{core}_X H_1 / \text{core}_G H_1)$. Пусть $\overline{S} = \text{core}_X H_1 / \text{core}_G H_1$. Поэтому $\overline{H_1^X} \cong \overline{H_1^G} / \overline{S}$ и $(\overline{H_1^X})_p \cong (\overline{H_1^G})_p \overline{S} / \overline{S}$ по лемме 1.4. Так как по условию нормальный ранг $(\overline{H_1^G})_p$ не превышает k , то по лемме 1.14 нормальный ранг $(\overline{H_1^X})_p$ также не превышает k .

Лемма 2.2. Пусть G – разрешимая группа, H – произвольная подгруппа в G и $N \triangleleft G$. Если все силовские подгруппы в $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, то в фактор-группе $\overline{G} = G/N$ группы G все силовские подгруппы из $\overline{H_1^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, где $\overline{H_1}$ – произвольная подгруппа из \overline{G} .

Доказательство. Так как $\overline{H_1} = H_1/N \leq \overline{G} = G/N$, то $N \leq H_1 \leq G$. Тогда $N \leq \text{core}_G H_1$ и $\text{core}_G H_1 / N \leq \text{core}_{\overline{G}} \overline{H_1}$ по лемме 1.13. Таким образом, получаем

$$\overline{H_1^G} = \overline{H_1} / \text{core}_{\overline{G}} \overline{H_1} \cong (H_1/N) / (\text{core}_G H_1 / N) \cong H_1 / \text{core}_G H_1 = \overline{H_1^G}.$$

Очевидно, что $\left(\overline{H_1^G}\right)_p \cong \left(H_1^G\right)_p$. Так как по условию $\left(H_1^G\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$, то $\left(\overline{H_1^G}\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5 \cap \mathfrak{N}^4$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\Phi(G) \neq 1$, то по лемме 2.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду насыщенности формации \mathfrak{F} , получим, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

По лемме 1.9 подгруппа Фиттинга $F(G) = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Предположим, что $k \geq 2$. Тогда из леммы 2.2 следует $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.11. Таким образом, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа G и $F(G) = N$. Тогда N – элементарная абелева группа порядка p^n по лемме 1.12.

Пусть X – максимальная подгруппа в $F = F(G)$, тогда $|F(G) : X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X / \text{core}_G X \cong X$, так как $\text{core}_G X = 1$ ($\text{core}_G X \leq X \leq F(G) = N$). Так как X имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$ и является элементарной абелевой p -группой, то $|X| \leq p^2$ или равен 8. Значит, $|F(G)| \leq p^3$ или равен 16. Таким образом, из леммы 1.3 G/F изоморфна циклической группе порядка $p-1$ либо неприводимой подгруппе группы $GL(2, p) = \text{Aut} F$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(3, p)$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(4, 2)$. Из лемм 1.8, 1.10 следует, что $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5$ и по лемме 1.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^6$. Значит, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Следствие 2.1. Пусть G – разрешимая группа и $\left(H^G\right)_p$ – бициклическая для любого $p \in \pi\left(H^G\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Следствие 2.2. Пусть G – A_4 -свободная разрешимая группа, $\left(H^G\right)_p$ бициклическая для любого $p \in \pi\left(H^G\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство. Учитывая все этапы доказательства теоремы и лемму 1.5, получим заключение следствия.

Следствие 2.3. Если G – разрешимая группа, $(\overline{H^G})_p$ – циклическая для любого $p \in \pi(\overline{H^G})$. Тогда производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. По лемме 1.1 \mathfrak{F} – насыщенная формация. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, не принадлежащая \mathfrak{F} . Из леммы 2.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G . По лемме 1.6 G – примитивная группа. Тогда согласно лемме 1.7 в группе существует единственная минимальная подгруппа $F = F(G)$, F – элементарная абелева порядка p^n и $G = [F]M$, где M – примитиватор группы G . Так как $F \leq G$ и X – максимальная подгруппа в F , то $|F:X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X/\text{core}_G X \cong X$. Так как X – циклическая и элементарная абелева, то $|X| = p$. Значит, $|F| = p^2$. Поэтому из леммы 1.3 $G/F \cong \leq \text{Aut}F$. Так как $\text{Aut}F = GL(2, p)$, то из леммы 1.10 $G/F \in \mathfrak{U}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Следствие 2.4. Пусть G – разрешимая A_4 -свободная группа, $(\overline{H^G})_p$ циклическая для любого $p \in \pi(\overline{H^G})$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3.

Доказательство. Повторяя доказательство следствия 2.3 и учитывая лемму 1.5, получим заключение следствия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
2. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.
3. Евтухова, С. М. О порядках кофакторов подгрупп конечной разрешимой группы / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 15–18.
4. Wenbin, Guo. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Guo Wenbin, Yi Xiaolan, Huang Jianhong // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – 34, № 2. – P. 337–344.
5. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.
6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978.
7. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2015

Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Solvable Groups with Small Normal Rank of Sylow Subgroups of the Cofactors Subgroup

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group G whose normal rank of Sylow subgroups of the cofactors subgroup is fixed. In particular, the derived length of such group does not exceed 6 and the nilpotent length of such group does not exceed 4.

УДК 517.927.21, 517.518.82

С.А. Марзанканд. физ.-мат. наук, доцент, первый проректор
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО**

Разработан алгоритм приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$, основанный на применении модифицированного аппроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка и позволяющий без применения операции интегрирования получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля в пространстве непрерывных функций получена оценка точного и приближенного решений рассматриваемой задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ - дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

($[\text{Re}(\alpha)]$ - целая часть $\text{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4]. Обозначим через ${}^c D_{a+}^{\alpha}y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]\right)(x) \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > 0), \quad (3)$$

$n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) и $y(x) \in C^n[a, b]$ - функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$, то при $\alpha \in \mathbb{N}$ производная ${}^c D_{a+}^{\alpha}y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D^n y\right)(x) \quad \left(n \in \mathbb{N}; D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^c D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n :

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) \quad \left(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}; D = \frac{d}{dx}\right). \quad (4)$$

Конструкция (4) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вискоэластичности [2; 3], и поэтому выражения (3) и (4) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in \mathbb{C}$.

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами (исторические сведения и обзор методов и результатов

в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [4]). Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [5; 6].

Настоящая работа посвящена приближенному решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$:

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y], \quad y^{(j)}(a) = b_j, \quad b_j \in C \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (5)$$

где $n = [\alpha] + 1$ при $\alpha \notin N$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$, посредством приближенного решения равносильного ей [7] интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (6)$$

Положив

$$y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j, \\ y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

и используя метод последовательных приближений, можно показать, что если функция $f[x, y]: [a, b] \times R \rightarrow R$ удовлетворяет условию липшицевости относительно второй переменной

$$|f[x, y] - f[x, y_1]| \leq L|y - y_1|, \quad (8)$$

а также условиям

$$\max_{(x, y) \in [a, b] \times R} |f[x, y]| = M < \infty, \quad L \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \quad (9)$$

то каждая из функций $y_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots$), определяемая равенством (7), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) так, что имеет место неравенство

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{m+1} \frac{ML^m}{1 - L \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}. \quad (10)$$

Неравенство (10) показывает, что функции $y_m(x)$ достаточно быстро сходятся к искомому решению $y(x)$ задачи Коши (5). Вместе с тем из-за содержащейся в процессе вычисления функций $y_m(x)$ операции интегрирования итеративный процесс (7) на практике, как правило, очень трудно использовать для эффективного построения функций $y_m(x)$. В настоящей работе будет изложен алгоритм, построенный на основании аппроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка [8, с. 98–120], который позволит, в частности, без применения операции интегрирования, получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений.

Представим уравнение (6) в виде

$$y(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] K(x, t) dt \quad (\alpha > 1), \quad (11)$$

где

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j,$$

$$K(x, t) = (x - t)^{\alpha - 1}.$$

Далее будем использовать стандартные интерполяционные многочлены Лагранжа $L_n(f; x)$, полученные в результате отображения с отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[a, b]$ стандартного интерполяционного многочлена $L_n^*(f; x)$, построенного по узлам

$$\xi_j^{(l)} = -\cos \frac{j\pi}{l} \quad (j = 0, \dots, l; l \in N),$$

[9, с. 399]. Это отображение осуществляется формулой

$$t = a + \frac{(b - a)(1 + \xi)}{2},$$

и поэтому $L_n(f; x)$ – интерполяционный многочлен, построенный по узлам

$$t_j^{(l)} = a + \frac{(b - a)(1 + \xi_j^{(l)})}{2} \quad (j = 0, \dots, l). \tag{12}$$

Известно, что имеет место соотношение [8, с. 111]

$$\|L_n\| = \|L_n^*\|. \tag{13}$$

Поскольку узлы $\xi_j^{(l)} = -\cos \frac{j\pi}{l} \quad (j = 0, \dots, l)$ служат корнями многочлена

$$U_{l+1}^0(x) = (1 - x^2)U_{l-1}(x) = \sqrt{1 - x^2} \sin l \arccos x,$$

где $U_{l-1}(x)$ – полином Чебышева 2-го рода степени $l - 1$ [8, (I.1.27)], то фундаментальные многочлены $l_j^{*(l)}(\xi)$ могут быть представлены по формуле [8, (I.3.20)]

$$\begin{aligned} l_j^{*(l)}(\xi) &= l_j^{*(l)}(l; \xi) = \frac{U_{l+1}^0(\xi)}{(\xi - \xi_j^{(l)})U_{l+1}^0(\xi_j^{(l)})} = \\ &= \frac{\varepsilon_j}{l} \left[1 - (-1)^{l-j} T_l(\xi) + 2 \sum_{v=1}^l (-1)^v \frac{\cos jv\pi}{l} T_v(\xi) \right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_l = \frac{1}{2}$ и $\varepsilon_j = 1$ для любого $j = 1, 2, \dots, l - 1$ и $T_v(\xi)$ – полином Чебышева первого рода.

Отправляясь от этих фундаментальных многочленов, построим при фиксированных натуральных l и m , матрицу чисел

$$a_{ij}^{(l,m)} = \int_{-1}^{\xi_i^{(l)}} l_j^{*(l)}(\xi) d\xi \quad (i = 0, \dots, l; j = 0, \dots, m),$$

явные выражения для которых будут получены ниже.

Обозначим через A интегральный оператор в правой части уравнения (11):

$$(Ay)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] K(x, t) dt. \tag{15}$$

Будем считать, что $K(x, t) \equiv 0$ при $x \leq t$, и определим оператор (интерполяционный многочлен) \tilde{A} формулой

$$(\tilde{A}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \int_a^{t_i^{(l)}} \sum_{j=0}^m f[t_j^{(m)}, y(t_j^{(m)})] K(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}) I_j^{(m)} dt \cdot l_i^{(l)}(x). \quad (16)$$

Здесь узлы $t_i^{(l)}$ и $t_j^{(m)}$ определяются по формуле (12), а $l_i^{(l)}(x)$ и $l_j^{(m)}(x)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_i^{(l)}$ и $t_j^{(m)}$ соответственно.

Построим при помощи итерационного процесса по ν функции $\tilde{y}_\nu(x)$ вида

$$\tilde{y}_0 = g(x), \tilde{y}_\nu = g(x) + \tilde{A}\tilde{y}_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Лемма 1. *Функции $\tilde{y}_\nu(x)$ являются алгебраическими многочленами вида*

$$\tilde{y}_0(x) = g(x), \tilde{y}_\nu(x) = g(x) + \frac{b-a}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m a_{ij}^{(l,m)} f[t_j^{(m)}, \tilde{y}_{\nu-1}(t_j^{(m)})] K(x_i^{(l)}, t_j^{(m)}) l_i^{(l)}(x), \quad (18)$$

где $l_i^{(l)}, l_j^{(m)}$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_i^{(l)}$ и $t_j^{(m)}$ соответственно.

Доказательство. При $\nu = 0$ утверждение леммы вытекает из (17) и (13).

Осуществляя замену

$$t = a + \frac{b-a}{2}(\xi + 1)$$

и введя обозначение $l_j^{(m)}(t) := l_j^{*(m)} \left[-1 + \frac{2}{b-a}(t-a) \right]$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i^{(l)}} l_j^{(m)}(t) dt &= \int_a^{t_i^{(l)}} l_j^{*(m)} \left[-1 + \frac{2}{b-a}(t-a) \right] dt = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{\xi_i^{(l)}} l_j^{*(m)}(\xi) d\xi = \frac{b-a}{2} a_{ij}^{(l,m)}, \quad i = 0, \dots, l, j = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (19)$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение устанавливает явный вид чисел $a_{ij}^{(l,m)}$.

Лемма 2. *Пусть $l, m \in \mathbb{N}$, $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$. Тогда*

$$a_{ij}^{(l,m)} = \frac{\varepsilon_j}{m} \left\{ 1 - C_i^{(l)} + \frac{1}{2} C_j^{(m)} (1 - C_{2i}^{(l)}) + \sum_{\nu=2}^m \varepsilon_\nu C_{j\nu}^{(m)} \left[\frac{C_{(v-1)i}^{(l)}}{v-1} - \frac{C_{(v+1)i}^{(l)}}{v+1} - \frac{2}{v^2-1} \right] \right\},$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_m = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_\nu = 1$ при $\nu = 1, \dots, m-1$ и $C_k^{(s)} = \cos \frac{k\pi}{s}$.

Доказательство. Учитывая (18) и тот факт, что при каждом $\nu = 2, 3, \dots$ имеет место равенство [8, с. 105]

$$\int_0^x T_\nu(\xi) d\xi = \int_{\arccos x}^{\frac{\pi}{2}} \cos \nu s \sin s ds = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_{\nu+1}(x)}{\nu+1} - \frac{T_{\nu-1}(x)}{\nu-1} \right\} + c_\nu, \quad c_\nu = const,$$

получаем:

$$a_{ij}^{(l,m)} = \int_{-1}^{\xi_i^{(l)}} l_j^{*(m)}(\xi) d\xi = \frac{\varepsilon_j}{m} \left\{ \xi - \xi^2 \cos \frac{j\pi}{m} + \sum_{\nu=2}^m (-1)^\nu \frac{\cos j\pi\nu}{m} \left(\frac{T_{\nu+1}(\xi)}{\nu+1} - \frac{T_{\nu-1}(\xi)}{\nu-1} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(-1)^{m-j}}{2} \left[\frac{T_{m+1}(\xi)}{m+1} - \frac{T_{m-1}(\xi)}{m-1} \right] \Bigg|_{-1}^{\xi_i^{(l)}} = \left\{ 1 - \cos \frac{i\pi}{l} - \cos \frac{j\pi}{m} \left(\cos^2 \frac{i\pi}{l} - 1 \right) + \right. \\
 & \quad + \sum_{v=2}^m (-1)^v \frac{\cos jv\pi}{m} \left[\frac{\cos \left[(v+1) \left(1 - \frac{i}{\pi} \right) \pi \right]}{v+1} - \frac{\cos \left[(v-1) \left(1 - \frac{i}{\pi} \right) \pi \right]}{v-1} - \right. \\
 & \quad \left. \left. - (-1)^{v+1} \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v-1} \right) \right] - \frac{(-1)^{m-j}}{2} \left[\frac{\cos \left[(m+1) \left(1 - \frac{i}{\pi} \right) \pi \right]}{m+1} - \frac{\cos \left[(m-1) \left(1 - \frac{i}{\pi} \right) \pi \right]}{m-1} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^m \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1} \right) \right\} = \frac{\varepsilon_j}{m} \left\{ 1 - \cos \frac{i\pi}{l} - \cos \frac{j\pi}{m} \left(\cos^2 \frac{i\pi}{l} - 1 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{v=2}^m \cos \frac{v\pi}{m} \left[\frac{\cos \frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1} - \frac{\cos \frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1} + \frac{2}{v^2-1} \right] - \frac{(-1)^j}{2} \left[\frac{\cos \frac{(m-1)i\pi}{l}}{m-1} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\cos \frac{(m+1)i\pi}{l}}{m+1} - \frac{2}{m^2-1} \right] \right\} = \frac{\varepsilon_j}{m} \left\{ 1 - \cos \frac{i\pi}{l} - \frac{1}{2} \cos \frac{j\pi}{m} \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{v=2}^m \varepsilon_v \cos \frac{j\pi v}{m} \left[\frac{\cos \frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1} - \frac{\cos \frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1} - \frac{2}{v^2-1} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим через $W^r = W^r C[a, b]$ ($r > 1$) класс функций $F(x)$, заданных на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси R и представимых интегралом

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-t)^{r-1} h(t) dt, \quad \max_{a \leq x \leq b} |h(t)| = \mu < \infty. \tag{20}$$

Оценим модуль непрерывности функции $F(x) \in W^r$.

$$\begin{aligned}
 |F(x+\delta) - F(x)| &= \frac{1}{\Gamma(r)} \left| \int_a^{x+\delta} \frac{h(t) dt}{(x+\delta-t)^{1-r}} - \int_a^x \frac{h(t) dt}{(x-t)^{1-r}} \right| \leq \\
 &\leq \frac{\|h(t)\|_C}{\Gamma(r)} \left(\int_a^x |(x+\delta-t)^{r-1} - (x-t)^{r-1}| dt + \int_x^{x+\delta} (x+\delta-t)^{r-1} dt \right) \leq \\
 &\leq \frac{\mu}{\Gamma(r)} (\delta(b-a+\delta)^{r-1}). \tag{21}
 \end{aligned}$$

В силу неравенства Лебега для интерполяционных операторов, прямой теоремы Джексона для алгебраических многочленов [10], с учетом неравенства (21) получим:

$$\sup_{F \in W^r} |F(x) - L_m(F; x)| \leq \frac{\mu(\ln m + \pi)(b-a)^r}{\Gamma(r)(m+1)} \left(1 + \frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}, \quad (22)$$

где $L_m(F; x)$ – интерполяционный полином Лагранжа функции $F(x)$, построенный по узлам (12).

Для $\alpha > 1$, $r > 1$ и $l, m \in N$ обозначим:

$$\delta_{lm} = S(l, \alpha) + \left(\frac{2}{\pi} \ln l + 1\right) S(m, r), \quad (23)$$

$$S(m, r) = \frac{r(\ln m + \pi)}{m+1} \left(1 + \frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}. \quad (24)$$

Теорема. Пусть $\alpha > 1$, $K_H = \{y \in R, |y| < H\}$ ($H > 0$), функция $f[t, y]: [a, b] \times K_H \rightarrow R$ удовлетворяет условиям (8), (9) и такая, что при любых фиксированных $x \in [a, b]$, $y \in K_H$ и некоторых $r > 1$, $\mu > 0$

$$f[t, y](x-t)^{\alpha-1} \in W^r C[a, b]. \quad (25)$$

Пусть

$$q = \frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \quad (26)$$

где L определяется условием (8), и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\max \left\{ \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (1+\varepsilon), \frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \right\} \leq H, \quad (27)$$

где M определяется условием (9).

Последовательность многочленов $\tilde{y}_v(x)$, определяемых условием (18), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) таким образом, что при всех натуральных l и m , таких, что $\delta_{lm} < \varepsilon$, выполняется неравенство:

$$\|y(x) - \tilde{y}_v(x)\|_C \leq D \frac{q^v + \delta_{lm}(1-q^v)}{1-q},$$

где

$$D = \max \left\{ \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $C_H[a, b] = \{y(x) \in C[a, b], \|y(x)\|_C \leq H\}$. В силу (15) и (16) для любой функции $y(x) \in C_H[a, b]$ имеем:

$$|(Ay)(x) - (\tilde{A}y)(x)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] K(x, t) dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \int_a^{t_i^{(l)}} \sum_{j=0}^m f[t_j^{(m)}, y(t_j^{(m)})] K(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}) \Big|_j^{(m)}(t) dt \cdot l_i^{(l)}(x) \right| \leq \\
 & \leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] K(x, t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \int_a^{t_i^{(l)}} f[t, y(t)] K(t_i^{(l)}, t) dt \cdot l_i^{(l)}(x) \right| + \\
 & \quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \int_a^{t_i^{(l)}} f[t, y(t)] K(t_i^{(l)}, t) dt \cdot l_i^{(l)}(x) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^l \int_a^{t_i^{(l)}} \sum_{j=0}^m f[t_j^{(m)}, y(t_j^{(m)})] K(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}) \Big|_j^{(m)}(t) dt \cdot l_i^{(l)}(x) \right| = I_1 + I_2. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Обозначим через $L_l(F; x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам (12), функции $F(x)$, определяемой равенством

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Используя обозначение (24) и неравенство (22), имеем:

$$I_1 = |F(x) - L_l(F, x)| \leq \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l, \alpha). \quad (29)$$

Далее, используя (25), (22) и (24), находим:

$$\begin{aligned}
 I_2 & \leq \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \|L_l\|_C \max_{0 \leq i \leq l, a \leq t \leq b} \left| f[t, y(t)] K(t_i^{(l)}, t) - L_m(f \cdot K, t) \right| \leq \\
 & \leq \frac{(b-a) \|L_l\|_C}{\Gamma(\alpha)} \frac{\mu(b-a)^r}{\Gamma(r+1)} S(m, r) \leq \frac{(b-a)^{r+1} \mu}{\Gamma(\alpha) \Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi} \ln l + 1 \right) S(m, r). \quad (30)
 \end{aligned}$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получаем:

$$\|(Ay)(x) - (\tilde{A}y)(x)\|_C \leq \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l, \alpha) + \frac{(b-a)^{r+1} \mu}{\Gamma(\alpha) \Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi} \ln l + 1 \right) S(m, r). \quad (31)$$

Докажем, что A – сжимающий оператор. В силу свойств дробных интегралов Римана – Лиувилля имеем:

$$\|(Ay_1)(t) - (Ay_2)(t)\|_C = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_1(t)] - f[t, y_2(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\| \leq \frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1(x) - y_2(x)\|_C.$$

С учетом (26) заключаем, что A – сжимающий оператор.

Из (31) следует оценка

$$\delta = \sup_{y \in C_H[a, b]} \|Ay - \tilde{A}y\|_C \leq \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l, \alpha) + \frac{(b-a)^{r+1} \mu}{\Gamma(\alpha) \Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi} \ln l + 1 \right) S(m, r). \quad (32)$$

Используя (9) и (31), для любой $y(x) \in C_H[a, b]$ имеем:

$$\|\tilde{A}y\|_C \leq \|Ay\|_C + \|\tilde{A}y - Ay\|_C \leq \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} S(l, \alpha) +$$

$$+ \frac{(b-a)^{r+1} \mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \left(\frac{2}{\pi} \ln l + 1 \right) S(m, r) \leq D(1 + \delta_{lm}).$$

Отсюда в силу предположения (27) при всех l и m , удовлетворяющих условию $\delta_{lm} < \varepsilon$, получим неравенство $\|\tilde{A}y\|_C \leq D(1 + \varepsilon) \leq H$, т.е. $\tilde{A}(C_H[a, b]) \subset C_H[a, b]$. Поэтому с учетом [8, с. 113] (26) и (32) получаем:

$$\|y_\nu - \tilde{y}_\nu\|_C \leq D\delta_{lm} \frac{1 - q^\nu}{1 - q}. \quad (33)$$

Применяя (10) и (33), получим:

$$\|y - \tilde{y}_\nu\|_C \leq \|y - y_\nu\|_C + \|y_\nu - \tilde{y}_\nu\|_C \leq \frac{(b-a)^\alpha M q^\nu}{\Gamma(\alpha+1) 1-q} + D\delta_{lm} \frac{1 - q^\nu}{1 - q} \leq D \frac{q^\nu + \delta_{lm}(1 - q^\nu)}{1 - q}.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто

$$\left({}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} y \right) (x) = y^2(x) + \frac{105\sqrt{\pi}}{16} x - x^7, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \quad (34)$$

В результате применения рассмотренного выше итеративного метода получен полином, приближающий решение $y(x) = \sqrt{x^7}$ задачи типа Коши (34):

$$y_4(x) = 8,90217 \cdot 10^{-8} x - 0,000112757 x^2 + 0,0691963 x^3 + 4,11891 x^4.$$

В таблице приведены значения точного и приближенного решения, а также модули их разностей.

Таблица. – Сравнение точного и приближённого решений

x	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y(x)$	$3,57777 \cdot 10^{-9}$	$4,04772 \cdot 10^{-9}$	$1,67313 \cdot 10^{-8}$	$4,57947 \cdot 10^{-8}$	$\approx 1 \cdot 10^{-7}$
$y_4(x)$	$3,46489 \cdot 10^{-9}$	$4,03498 \cdot 10^{-9}$	$1,67594 \cdot 10^{-8}$	$4,57953 \cdot 10^{-8}$	$\approx 1 \cdot 10^{-7}$
$ y(x) - y_4(x) $	$1,12816 \cdot 10^{-11}$	$1,27323 \cdot 10^{-11}$	$2,81094 \cdot 10^{-11}$	$6,38602 \cdot 10^{-13}$	$3,62857 \cdot 10^{-14}$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mcinardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.
4. Kilbas, A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.

5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. *Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics* / R. Gorenflo, F. Mainardi // Viena : Springer. – 1997. – P. 223–276.
6. Oldham, K. B. *The fractional calculus* / K. B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.
7. Килбас, А. А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.
8. Дзядык, В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К. : Наук. думка, 1988. – 302 с.
9. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1970. – 420 с.
10. Даугавет, И. К. Введение в теорию приближения функций / И. К. Даугавет. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Marzan S.A. Iterative Learning Method of Approximate Computation of Cauchy Problem for non-linear Differentiation Equation with Caputo Fractional Derivative

The algorithm of approximate solution to the Cauchy problem for non-linear differential equation with Caputo fractional derivative is worked out. The algorithm is based on the modified Dzyadyko approximate-integrative method. It allows getting the same results as by the method of successive approximations. The assessed value of exact and approximate solutions to the problem in question is valid for application of fractional integral qualities and Riemann-Liouville derivatives in the space of continuous functions.

УДК 517.5

И.П. Черняк¹, Р.В. Товкач²¹студентка 2 курса математического факультета

Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений и математической физики

Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки

(Луцк, Украина)

**ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ
И ИХ НАСЫЩЕНИЯ**

Работа посвящена вопросам сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$, которые определяются линейными методами суммирования для бесконечных треугольных матриц чисел. Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ к $f(x)$ на классе C 2π -периодических непрерывных функций.

Равномерная сходимость полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ на классе 2π -периодических непрерывных функций

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций, в котором норма задается с помощью равенства $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L – пространство 2π -периодических суммируемых на периоде функций, в котором задана норма $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Введем класс функций

$$Lip\alpha = \{f \in C : |f(x+h) - f(x)| \leq h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1\},$$

который называют классом Липшица порядка α ; очевидно, что, положив $\alpha = 1$, получим класс функций

$$Lip1 = \{f \in C : |f(x+h) - f(x)| \leq h\}.$$

Пусть

$$T_n = \left\{ \tau_n(t) : \tau_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad i = \overline{1, n} \right\} -$$

пространство тригонометрических полиномов степени, что не превышает n для C, L .

Как уже было отмечено, простым примером аппроксимирующих многочленов выступают частные суммы ряда Фурье, то есть тригонометрические полиномы вида

$$S_n[f; x] = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f .

Однако в связи с тем, что существуют примеры функций, ряды Фурье которых сходятся к функции очень медленно или же вообще расходятся в пространстве C , возникает вопрос о нахождении последовательностей полиномов, которые были бы равномерно сходящимися к данной функции f на всем пространстве C .

Каждому такому способу соответствует последовательность операторов $U_n(f)$, что отображают C в его конечно-измеримое подпространство T_n тригонометрических полиномов $U_n(f; x)$ степени, что не превышает n .

Разумеется, что наилучшее приближение функции f пространства C будет осуществлять последовательность операторов $U_n^*(f)$, что ставит в соответствие каждой функции f полином ее наилучшего приближения, то есть многочлен, который удовлетворяет условию

$$\inf_{P_n \in T_n} \|f(x) - P_n(x)\|_C = \|f(x) - U_n^*(f; x)\|_C. \quad (1)$$

Однако операторы $U_n^*(f)$ в пространстве C не всегда являются линейными, что затрудняет их построение, а также исследование, поэтому часто рассматривают случай линейных операторов $U_n(f; x)$. Таким образом, широкий класс методов суммирования рядов Фурье можно получить, используя, например, так называемое матричное суммирование рядов Фурье, смысл которого заключается в следующем.

Рассмотрим пространство L . Пусть $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, – произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in L$, соответственно к ее разложению в ряд Фурье, поставим в соответствие полином $U_n(f; x; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Таким образом, всякая треугольная матрица Λ задает метод построения полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$, или, другими словами, конкретную последовательность полиномиальных операторов $U_n(f; \Lambda)$, определенных на множестве L . В этом случае также говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ -метод) суммирования рядов Фурье. Легко увидеть, что при каждом фиксированном n операторы $U_n(f; \Lambda)$ являются линейными. Поэтому Λ -методы называют линейными методами (процессами) суммирования рядов Фурье.

Подставляя в (2) значения коэффициентов a_k , b_k , получим

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(t+x) \right) dt \stackrel{df}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) U_n(t; \Lambda) dt. \quad (3)$$

Тригонометрический полином $U_n(t; \Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos k(x+t)$ называют ядром оператора (метода) $U_n(f; \Lambda)$.

Приведем примеры Λ -методов.

1. Если матрица Λ такова, что $\lambda_k^{(n)} \equiv 1$, то в этом случае, очевидно, полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ совпадают с частными суммами $S_n(f; x)$ порядка n ряда Фурье функции $f(x)$. Следуя принятой терминологии, такой метод называют методом частных сумм Фурье.

2. Метод средних арифметических (метод Фейера) определяется матрицей Λ , в которой $\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ для этого метода имеют вид

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x) \stackrel{df}{=} \sigma_n(f; x)$$

и называются суммами Фейера.

3. Если в матрице Λ положим

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{êî ääà } k = 0, 1, \dots, n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p+1}, & \text{êî ääà } k = n-p+1, \dots, n, \quad 0 \leq p \leq n, \end{cases}$$

то

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f; x) \stackrel{df}{=} V_{n-p}^n(f; x).$$

Такой метод называется методом Валле – Пуссена, а полиномы $V_{n-p+1}^n(f; x)$ – суммами Валле – Пусена. Если $p = 0$, то $V_{n-p}^n(f; x) = S_n(f; x)$; если же $p = n$, то

$$V_{n-p}^n(f; x) = V_0^n(f; x) = \sigma_{n+1}(f; x).$$

4. В случае, когда $\lambda_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаем метод Рогозинского.

При этом

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{2} \left[S_n \left(f; x + \frac{\pi}{2n} \right) + S_n \left(f; x - \frac{\pi}{2n} \right) \right] = R_n(f; x).$$

Многочлены $R_n(f; x)$ называют суммами Рогозинского.

5. Если же $\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $s > 0$, то

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^s \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = Z_n^{(s)}(f; x).$$

Полиномы $Z_n^{(s)}(f; x)$ называют суммами Зигмунда. При $s = 1$ суммы $Z_n^{(s)}(f; x)$ совпадают с суммами Фейера $\sigma_n(f; x)$.

Понятно, что аппроксимативные свойства полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ полностью определяются элементами $\lambda_k^{(n)}$ матрицы Λ . В связи с этим возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять числа $\lambda_k^{(n)}$, чтобы последовательности полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходились на всем пространстве C .

Если предположить, что полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходятся на всем пространстве C , то в таком случае они наверняка должны равномерно сходиться на пространстве T_m тригонометрических полиномов $P_m(x)$ порядка не выше m , т.е. для любого полинома $P_m(x) \in T_m$ равномерно по всем $x \in [-\pi; \pi]$ должно выполняться равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n(P_m; x; \Lambda) - P_m(x)| = 0.$$

Но это, очевидно, возможно лишь тогда, когда для любого фиксированного $k = 0, 1, \dots, n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1. \quad (4)$$

Это означает, что условие (4) является необходимым для равномерной сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ на всем пространстве C .

Далее, согласно классической теореме Вейерштрасса, любую функцию из C можно сколь угодно точно приблизить тригонометрическими полиномами. Другими словами, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой функции $f \in C$ можно указать такой тригонометрический полином $P_m^{(\varepsilon)}(f; x)$, что

$$\|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C < \varepsilon. \tag{5}$$

Следовательно, при любых Λ и n

$$\begin{aligned} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C &\leq \|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x)\|_C + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C \leq \\ &\leq \varepsilon + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(P_m^{(\varepsilon)}; x; \Lambda)\|_C + \|U_n(P_m^{(\varepsilon)} - f; x; \Lambda)\|_C. \end{aligned}$$

Но в силу (3) и (5)

$$\|U_n(P_m^{(\varepsilon)} - f; x; \Lambda)\|_C = \max_x \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P_m^{(\varepsilon)}(t) - f(t)] U_n(x-t; \Lambda) dt \right| \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt.$$

Значит,

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt \right) + \|P_m^{(\varepsilon)}(f; x) - U_n(P_m^{(\varepsilon)}; x; \Lambda)\|_C.$$

Отсюда заключаем, что последовательность $U_n(f; x; \Lambda)$ будет равномерно сходиться к $f(x)$ всякий раз, когда выполнено условие (4) и, кроме того, если последовательность чисел

$$L_n(\Lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |U_n(t; \Lambda)| dt,$$

называемых константами Лебега данного метода, является ограниченной:

$$L_n(\Lambda) = O(1), \quad n \rightarrow \infty \tag{6}$$

Таким образом, условия (4) и (6) являются достаточными для того, чтобы последовательность $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходилась для любой функции из C . Но для этого условия (4) и (6) являются также и необходимыми. Действительно, необходимость условия (4) мы уже доказали, а необходимость ограниченности констант Лебега следует, например, из известной теоремы Банаха:

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность линейных операторов $U_n(f)$, отображающих полное линейное нормированное пространство в свою часть, обладала свойством*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - U_n(f)\|_F = 0,$$

необходимо, чтобы, какой бы ни была функция $f \in F$, выполнялось условие

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \|U_n(f)\|_F = O(1).$$

В рассматриваемом случае пространство C является полным и, очевидно,

$$\|U_n\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) U_n(t-x; \Lambda) dt \right\|_C = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t)| dt = L_n(\Lambda).$$

Отсюда немедленно получаем необходимость условия (6). Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы последовательность полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ равномерно сходилась к $f(x)$ на всем классе C 2π -периодических непрерывных функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (4) и (6).

Насыщение линейных методов. Постановка задачи

К общим вопросам теории линейных методов суммирования рядов Фурье относится понятие насыщения линейного метода.

Если при некотором $k \in N$ выполняется соотношение

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C = O\left(|1 - \lambda_k^{(n)}|\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(x)$ равны нулю. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_n(f; x; \Lambda)] e^{-ikx} dx = (1 - \lambda_k^{(n)})(a_k - ib_k), \quad (8)$$

то

$$|1 - \lambda_k^{(n)}| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq 2 \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C$$

и, следовательно, (7) возможно лишь в случае $a_k = b_k = 0$. Отсюда следует, что если для данного метода $U_n(\Lambda)$ выполняется соотношение (7) для всех значений k , начиная с некоторого номера k_0 , то $f(x)$ является тригонометрическим полиномом степени, не выше $k_0 - 1$. В частности, если $k_0 = 1$, то $f(x)$ – некоторая постоянная. Следовательно, если $f(x)$ отлична от тождественной постоянной, то порядок стремления к нулю величины $\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C$ при $n \rightarrow \infty$ не может превышать максимального порядка убывания к нулю любой из разностей $1 - \lambda_k^{(n)}$, $k \in N$. Так, для сумм Фейера $1 - \lambda_k^{(n)} = k/n$, и значит, $\min_k (1 - \lambda_k^{(n)}) = n^{-1}$. Поэтому выполнение соотношения

$$\|f(x) - \sigma_n(f; x)\|_C = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

возможно лишь в случае $f(x) \equiv \text{const}$. Другими словами, $\forall f \in C, f \neq \text{const}$, $\|f(x) - \sigma_n(f; x)\|_C > Kn^{-1}$, где K – некоторая не зависящая от n величина.

Аналогично заключаем, что в случае приближения суммами Зигмунда

$$\|f(x) - Z_n^{(s)}(f; x)\|_C > Kn^{-s}, \quad f \neq \text{const},$$

в случае приближения суммами Рогозинского –

$$\|f(x) - R_n(f; x)\|_C > Kn^{-2}, \quad f \neq \text{const}.$$

Для частных сумм Фурье $1 - \lambda_k^{(n)} = 0$. Поэтому из равенства (7) никаких ограничений на величину $\|f(x) - S_n(f; x)\|_C$ по существу не следует. Что же касается сумм Валле – Пуссена, то все зависит от выбора чисел p .

Таким образом, для сумм Фейера, Рогозинского, Зигмунда и ряда других линейных методов можно указать функцию $\varphi_\Lambda(n)$ такую, что приближения, доставляемые данным методом, не могут убывать быстрее, чем $\varphi_\Lambda(n)$.

В связи с этим в теории линейных методов суммирования рядов Фурье возникла т.н. задача о насыщении, заключающаяся в том, чтобы для конкретного Λ -метода по свойствам элементов матрицы Λ сделать вывод о существовании такой функции

$\varphi_\Lambda(n)$, определить ее и описать класс функций, на котором порядки приближений данным методом совпадают с $\varphi_\Lambda(n)$.

Приведем основное определение. Пусть L_p , $p \geq 1$, – пространство 2π -периодических функций $\varphi(\cdot)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_{L_p} = \|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (9)$$

при $p = \infty$ $\|\varphi\|_\infty = \text{ess sup} |\varphi(t)|$, т.о. $L_1 = L$. Как и выше, через C будем обозначать множество 2π -периодических непрерывных функций $\varphi(t)$ с нормой $\|\varphi(t)\|_C = \max |\varphi(t)|$.

Определение. Пусть X – одно из пространств C или L_p , $p \in [1, \infty)$, и $U_n(\Lambda)$ – линейный метод суммирования рядов Фурье, порождающий полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ вида (2). Если существует положительная, монотонно убывающая к нулю функция $\varphi_\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что из соотношения

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

следует, что $f(x) \equiv \text{const}$ при $X = C$ и $f(x) = \text{const}$ почти всюду при $X = L_p$, и найдется хотя бы одна функция $f(x)$, отличная от постоянной, для которой

$$\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

то говорят, что метод $U_n(\Lambda)$ является насыщенным в пространстве X . Множество функций $\Phi(\Lambda)_X$, для которых выполняется соотношение (11), называется классом насыщения, а функция $\varphi_\Lambda(n)$ – порядком насыщения метода $U_n(\Lambda)$.

С учетом этого определения задача о насыщении конкретного метода $U_n(\Lambda)$ заключается, прежде всего, в выяснении вопроса, является ли он насыщенным в данном пространстве X , и если он насыщен, то каков порядок и класс его насыщения?

Отметим, что исследованию асимптотических свойств различных линейных методов суммирования рядов Фурье и их насыщения посвящено множество работ, например, работы А.Н. Колмогорова [3], С.М. Никольского [4], А.И. Степанца [5], С.А. Теляковского [6] и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнейчук, Н. П. Об экстремальных свойствах периодических функций / Н. П. Корнейчук // Докл. АН УССР. – 1962. – № 8. – С. 993–998.
2. Степанец, А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы / А. И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
3. Kolmogoroff, A. Zur GrJossenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen / A. Kolmogoroff // Ann. Math. – 1935. – 36. – S. 521–526.
4. Никольский, С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1948. – 12, № 3. – С. 191–193.
5. Степанец, А. И. Методы теории приближения / А. И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
6. Теляковский, С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Мат. заметки. – 1968. – 4, № 3. – С. 291–300.

7. Zhyhallo, K. M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 9. – P. 1462–1470.

8. Zhyhallo, K. M., Kharkevych Yu. I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.

9. Kharkevych, Yu. I. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Weierstrass integrals / Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – 59, № 7. – P. 1059–1087.

10. Zhyhallo, K. M. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals / K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2011. – 53, № 12. – P. 1607–1629.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2015

Chernyak I.P., Tovkach R.V. Linear Methods of Summation of Fourier's Series and their Saturation

Work focuses to the questions of convergence of the polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$, which determined by linear summation methods for infinite triangular matrices of numbers. Necessary and sufficient conditions for uniform convergence of polynomials $U_n(f; x; \Lambda)$ to function $f(x)$ on the class $C_{2\pi}$ -continuous periodic functions are obtained.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацыі па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума Дзяржаўнага вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастановы Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 14.12.2015. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 11,16. Ул.-выд. арк. 7,70.

Тыраж 100 экз. Заказ № 421

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.