

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Галоўны рэдактар:*

А.М. Сендзер

*Намеснік галоўнага рэдактара:*

С.А. Марзан

*Міжнародны савет*

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

*Рэдакцыйная калегія:*

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецюхоў

А.Ф. Равінскі

Я.В. Радына

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

**№ 1 / 2015**

У адпаведнасці з Загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі  
Рэспублікі Беларусь № 81 ад 20.03.2015 г. часопіс  
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

# ЗМЕСТ

## ФІЗИКА

<b>Ворсин Н.Н.</b> Цифровая СВЧ-радиометрия .....	5
<b>Ишханян А.М., Флореа О., Овсиюк Е.М., Редьков В.М.</b> Частица Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана: бозонная интерпретация, точные решения .....	15
<b>Козинский А.А., Цанда А.В.</b> Сетевая система управления метеорологическим состоянием помещения .....	27
<b>Лиопо В.А., Овчинников Е.В., Ситкевич А.Л., Секержицкий С.С., Никитин А.В.</b> Кристаллизация кластерных жидкостей (статистическая модель).....	35
<b>Плетюхов В.А.</b> Об описании струн на основе безмассового уравнения Дирака – Кэлера.....	40
<b>Секержицкий В.С., Герман В.В.</b> Термодинамическое равновесие и запасы ядерной энергии в электронно-нейтронно-ядерном сильно замагниченном веществе .....	48

## МАТЭМАТЫКА

О научной и научно-педагогической деятельности профессора Валерия Григорьевича Самойленко .....	54
<b>Самойленко В.Г., Тищук Т.В.</b> Кусочно-постоянные решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка .....	67
<b>Беть А.В., Юдов А.А.</b> Инвариантные характеристики подгрупп Ли движений пятимерного евклидова пространства.....	79
<b>Мадорский В.М.</b> О существовании и единственности решения нелинейного уравнения.....	87
<b>Пиддубный А.М.</b> Классы аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости.....	93
<b>Савчук В.Ф., Матысик О.В.</b> Апостериорный выбор момента останова в неявном методе итераций решения некорректных задач с несамосопряженным оператором .....	98



# *Vesnik*

*of Brest University*

**Editor-in-chief:**

A.M. Sender

**Deputy Editor-in-chief:**

S.A. Marzan

**International Board:**

V.A. Glavan (Moldova)

V.G. Samoilenka (Ukraine)

V.V. Dzikussar (Russia)

**Editorial Board:**

M.M. Sender

(managing editor)

M.I. Lyavchuk

I.P. Martynov

V.S. Monakhov

Y.A. Pletsukhov

A.F. Ravinski

Y.V. Radyna

V.M. Rad'kov

Y.S. Sekyazhytski

M.M. Trush

A.V. Chychurn

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
№ 1338 from April 28, 2010

**Editorial Office:**

224665, Brest,

Boulevard Cosmonauts, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

## Series 4

## PHYSICS

## MATHEMATICS

### SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution  
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

*№ 1 / 2015*

According to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus № 81 from March 20, 2015, the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

# INDEX

## PHYSICS

<b>Vorsin N.N.</b> Digital Microwave Radiometry .....	5
<b>Ishkhanyan A.M., Florea O., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.</b> Dirac – Kähler Particle in Riemann Spherical Space: Boson Interpretation, Exact Solutions.....	15
<b>Kazinski A.A., Tsanda A.V.</b> Network Management System Weather Condition of the Premises .....	27
<b>Liopo V.A., Auchynnika Y.V., Sitkevich A.L., Sekezhitsky S.S., Nikitin A.V.</b> The Crystallization of Cluster Liquids (Statistical Model).....	35
<b>Pletyukhov V.A.</b> On Description of the Strings by a Massless Dirac – Kähler Equation.....	40
<b>Sekezhitsky V.S., German V.V.</b> Thermodynamics Balance and Reserves of Nuclear Energy in Electron-Neutron-Nuclear Strong Magnetized Matter.....	48

## MATHEMATICS

On the Scientific and Scientific-Pedagogical Activity of Professor Valery Samoylenko .....	54
<b>Samoylenko V.H., Tyshchuk T.V.</b> Piecewise Constant Solutions of the Linear Partial Differential Equation of the First Order .....	67
<b>Bet A.V., Judov A.A.</b> Invariant Characteristics of Subgroups Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space .....	79
<b>Madorski V.M.</b> On the Existence and Uniqueness Solutions of Nonlinear Equations.....	87
<b>Piddubny O.M.</b> Classes of Analytic Functions in the Unit Disk of the Complex Plane.....	93
<b>Savchuk V.F., Matysik O.V.</b> Choosing the Stopping Posteriori in an Implicit Iteration Method for Solution Ill-Posed Problem with Non Self-Adjoint Operator.....	98

---

# ФІЗИКА

---

УДК 621.3969

**Н.Н. Ворсин**

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

## ЦИФРОВАЯ СВЧ РАДИОМЕТРИЯ

*Решена задача определения параметров СВЧ-радиометра с цифровым детектированием ВЧ-сигнала. Определены требования к характеристикам АЦП на основе допустимого проигрыша в чувствительности аналоговому радиометру*

### Введение

Успехи микроэлектроники в улучшении быстродействия и чувствительности аналого-цифрового преобразования сигналов позволяют в настоящее время создавать цифровые радиометры СВЧ-диапазона. Упоминания об этом имеются во многих работах, например, [1–3]. При этом возникает ряд задач о структуре и параметрах узлов такого радиометра, решению которых посвящена данная работа.

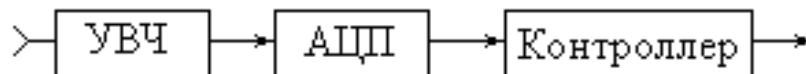


Рисунок 1.

1. Очевидная схема радиометра с цифровым квадратичным детектором показана на рисунке 1. Однако ввиду возможных очень высоких значений несущей частоты радиометрических сигналов СВЧ-диапазона такое построение требует чрезвычайно высоких параметров быстродействия цифровых узлов. В связи с этим оказывается необходимым понизить до нуля несущую частоту принятого сигнала. Таким образом, мы приходим к структуре гетеродинного радиометра, показанной на рисунке 2, с нулевой промежуточной частотой.

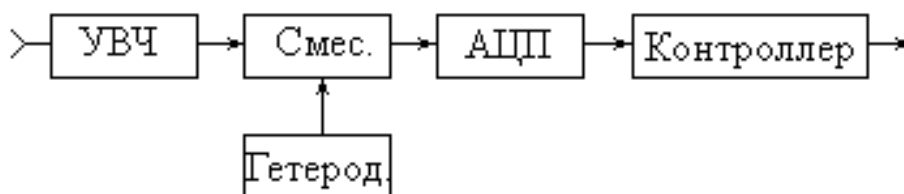


Рисунок 2.

При таком построении радиометра оказывается потерянной компонента сигнала, ортогональная гетеродинному колебанию. Это приводит к ухудшению чувствительности в  $\sqrt{2}$  раз в сравнении с возможной. Для сохранения наилучшей чувствительности требуется квадратурное преобразование несущей частоты принятого сигнала, при которой выделяются обе ортогональные его компоненты. На рисунке 3 показана структура радиометра с квадратурным преобразователем несущей частоты. Выходной сигнал каждой из квадратурных составляющих оцифровывается своим АЦП, после чего циф-

ровые отсчеты возводятся в квадрат и складываются, образуя вновь единый цифровой поток. Дальнейшая обработка этого потока состоит в накоплении квадратов отсчетов, что на несколько порядков снижает его широкополосность. Заметим, что структура радиометра, показанная на рисунке 3, соответствует блок-схеме оптимального измерителя мощности узкополосного сигнала и синтезируется средствами статистической радиотехники [4].

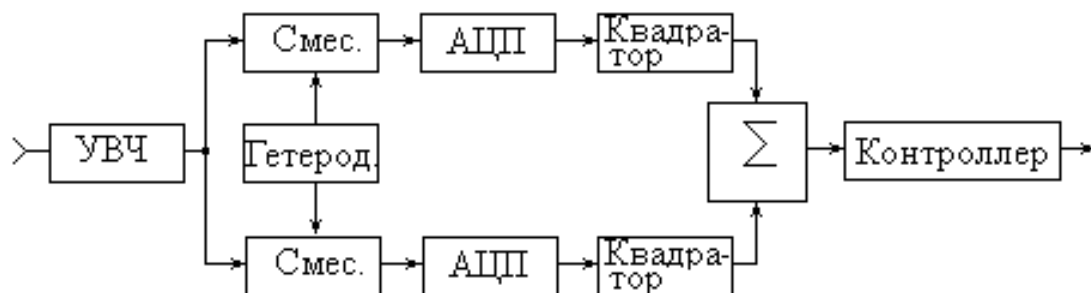


Рисунок 3.

Если за квадраторами сигнальных кодов следуют только линейные операции, то их можно поменять местами с операцией сложения квадратурных составляющих. При практическом построении радиометра такая смена мест операций не выгодна, поскольку требует больших аппаратных затрат, однако при теоретическом анализе позволяет провести вычисления только для одного из двух идентичных каналов. Последующее суммирование канальных сигналов сведется только к умножению на 2 амплитуды сигнального отклика и мощности шумовых флуктуаций. На рисунке 4 показана схема радиометра с цифровым квадратичным детектированием сигнала, для определения чувствительности которого достаточно провести вычисление для одного из каналов и поделить полученный результат на  $\sqrt{2}$ .

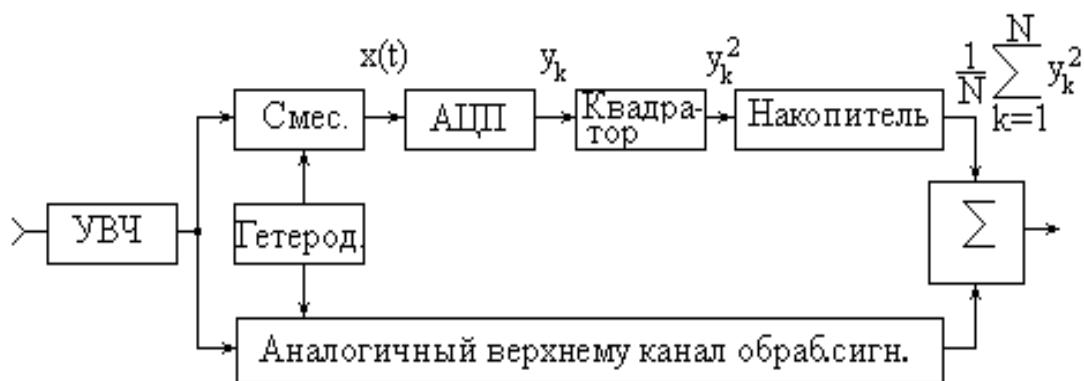


Рисунок 4.

2. При проведении вычислений необходимо учитывать три фактора, свойственных процессам цифровой обработки сигналов: а) квантование сигнальных уровней; б) квантование времени; в) превышение разрядной сетки АЦП – его насыщение. Вычисление чувствительности проведем по следующей схеме: определим среднее значение сигнального кода на выходе канального накопителя:

$$\bar{S} = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 \right) \quad (1)$$

Определим приращение среднего значения сигнального кода, обусловленное изменением шумовой температуры –  $T_u$  на входе радиометра:

$$\Delta \bar{S} = \frac{d\bar{S}}{dT_u} \Delta T_u. \quad (2)$$

Вычислим дисперсию выходного кода:

$$\sigma_S^2 = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 \right) - \bar{S}^2. \quad (3)$$

Приравнявая  $\Delta \bar{S}$  к  $\sigma_S$ , найдем величину  $\Delta T_{u \min}$ , которая является чувствительностью одного из квадратурных каналов.

$$\Delta T_{u \min} = \frac{\sigma_S}{\frac{d\bar{S}}{dT_u}}. \quad (4)$$

Полная чувствительность радиометра с учетом суммирования продуктов обработки обеих квадратурных компонент будет равна  $\Delta T_{u \min} / \sqrt{2}$ .

Следуя намеченному порядку, запишем выражение для мгновенного кода выходного сигнала цифрового накопителя

$$S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2, \quad (5)$$

где  $y_k$  –  $k$ -тый отсчет сигнала  $x(t)$ , выполняемый АЦП. Полагая, что отсчеты делаются мгновенно через одинаковые интервалы времени  $\Delta t$ , можем записать:

$$y_k = x(k\Delta t) + \delta_k, \quad (6)$$

где  $\delta_k$  – ошибка квантования, обусловленная конечностью шага квантования –  $a$ . Как известно из [4], ошибка квантования распределена практически равномерно на интервале шага квантования, вследствие чего

$$\overline{\delta} = 0; \quad \overline{\delta^2} = \frac{a^2}{12}. \quad (7)$$

Таким образом, выражение (6) учитывает конечность шага квантования и квантование времени ( $\Delta t$ ). Для того чтобы учесть последствия насыщения АЦП, конкретизируем раствор его передаточной характеристики, приняв ее симметричной относительно нуля и равной  $2L$ . График принятой передаточной характеристики показан на рисунке 5.

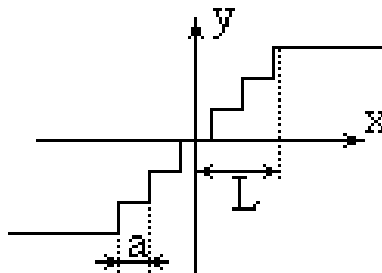


Рисунок 5.

Аналогичную передаточную характеристику будет иметь устройство, состоящее из линейного ограничителя и следующего за ним не насыщающегося АЦП. Поэтому можно принять АЦП не насыщающимся, но его входной сигнал  $x$  – выходным сигналом линейного ограничителя. Входным сигналом этого ограничителя является полосовой гауссовский шум  $\xi(t)$ , с дисперсией  $\sigma_\xi^2$  и корреляционной функцией

$$R_\xi = \sigma_\xi^2 \frac{\sin(\Delta f_{\text{пч}} \pi \tau)}{\Delta f_{\text{пч}} \pi \tau},$$

где  $\Delta f_{\text{пч}}$  – ширина частотной полосы, занимаемой сигналом  $\xi(t)$ , который поступает на вход АЦП с усилителя и фильтра сигнала промежуточной частоты (ПЧ).

Передаточная характеристика линейного ограничителя выражается следующей формулой:

$$x = \begin{cases} -L & \text{при } \xi < -L \\ \xi & \text{при } -L < \xi < L \\ +L & \text{при } \xi > L \end{cases} \quad (8)$$

После подстановки (6) в (5) и осреднения по ансамблю  $x$  и  $\delta$  получим величину выходного сигнала накопителя:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \overline{x^2(k\Delta t)} + 2\overline{x(k\Delta t)\delta_k} + \overline{\delta_k^2} = \overline{x^2} + \overline{\delta^2}. \quad (9)$$

В (9) учтена стационарность процессов  $x$  и  $\delta$ , в связи с чем их средние величины не зависят от времени.

Согласно общему правилу вычисления среднего значения средний квадрат сигнала на входе АЦП выразится следующей формулой:

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) p(\xi) d\xi, \text{ в которой } p(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \text{плотность вероятности гауссовского сигнала на входе воображаемого ограничителя, передаточная характеристика которого задана формулой (8).}$$

Подставив в (9) выражения для  $x$  и  $p$  и выполнив интегрирование, будем иметь:

$$\overline{x^2} = \sigma_\xi^2 \left\{ 2\Phi\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) - 1 - \frac{2L}{\sigma_\xi} \Phi'\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) + 2\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right)^2 \left[ 1 - \Phi\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) \right] \right\}. \quad (10)$$

В данном выражении величина  $\Phi(L/\sigma_\xi)$  – значение интеграла вероятности,  $\Phi'(L/\sigma_\xi)$  – его производная, которая совпадает с  $p(L/\sigma)$ .

Вычислим производную  $d(\overline{x^2})/dT_u$ , входящую в выражение для чувствительности радиометра (4):

$$\frac{d(\overline{x^2})}{dT_u} = \frac{d(\overline{x^2})}{d\sigma_\xi} \frac{d\sigma_\xi}{dT_u} = \frac{d(\overline{x^2})}{d\sigma_\xi} \frac{\sigma_\xi}{2T_u}. \quad (11)$$

В (11) учтено, что  $\sigma_\xi^2 \sim T_u$ , вследствие чего  $d\sigma_\xi^2/dT_u = \sigma_\xi^2/2T_u$ .

Продифференцируем (10) по  $\sigma_\xi$  и подставим производную в (11). В результате получим окончательную формулу для  $d(\overline{x^2})/dT_u$ :

$$\frac{d(\overline{x^2})}{dT_u} = \frac{\sigma_\xi^2}{T_u} \left[ 2\Phi\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) - \frac{2L}{\sigma_\xi} \Phi'\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) \right]. \quad (12)$$



Поскольку ошибка квантования  $\delta$  не связана с  $T_u$ ,  $d\bar{\delta}^2 / dT_u = 0$  и после подстановки (12) в (9) будем иметь:

$$\frac{d\bar{S}}{dT_u} = \frac{d(\bar{x}^2)}{dT_u} = \frac{\sqrt{A_1/2}}{T_u}. \quad (13)$$

В (13) введено обозначение

$$\sqrt{A_1} = \sqrt{2}\sigma_\xi^2 \left[ 2\Phi\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) - 1 - \frac{2L}{\sigma_\xi} \Phi'\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) \right], \quad (14)$$

идея которого будет ясна в последующем.

Вычислим дисперсию выходного кода  $\sigma_s^2$ . Для этого подставим в исходное соотношение (3) формулу для  $y_k$  (6), в результате чего получим:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{(x_k + \delta_k)^2 (x_m + \delta_m)^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{x_k^2 x_m^2} + \frac{4}{N} \overline{x^2 \delta^2} - \overline{(x^2)^2}. \quad (15)$$

Величина  $\overline{x^2}$  определена соотношением (10) через дисперсию шума  $\sigma_\xi^2$  на входе воображаемого линейного ограничителя и отношение  $(L/\sigma_\xi)$ , где  $\pm L$  – пороги ограничения. Как видно из (15), величина  $\sigma_s^2$  выражается через автокорреляционную функцию процесса  $x^2(t)$ :

$$R_{x^2}(\tau) = \overline{x^2(t)x^2(t+\tau)}.$$

Выразим  $R_{x^2}(\tau)$  через те же параметры  $\sigma_\xi$  и  $L$ . Для этого используем т.н. метод дельта-функции [4]. Согласно этому методу корреляционная функция процесса на выходе нелинейного элемента (в нашем случае – на выходе ограничителя) представляется в виде степенного ряда от коэффициента автокорреляции  $r_\xi(\tau)$  процесса на входе нелинейного элемента:

$$R_{x^2}(\tau) = \sigma_\xi^{2(v-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(v)}(z) \Phi^{(n+1-v)}\left(\frac{z}{\sigma_\xi}\right) dz \right] \frac{r_\xi^n(\tau)}{n!}. \quad (16)$$

В формуле (16)  $g^{(v)}(z)$  –  $v$ -ая производная от характеристики нелинейного элемента. В рассматриваемом случае преобразования полосового шума  $\xi(t)$  в ограниченный по амплитуде шум  $x(t)$  и возведения  $x(t)$  в квадрат функция  $g(z)$  определится возведением в квадрат выражения (8):

$$g(z) = \begin{cases} L^2 & \text{при } \xi < -L \\ z^2 & \text{при } -L < \xi < L \\ L^2 & \text{при } \xi > L \end{cases}. \quad (17)$$

На рисунке 6 показаны графики функции  $g$ ,  $g'$  и  $g''$ . Из них видно, что что  $g''$  представляет собой дельта-функции в точках  $\pm L$  и ноль за пределами этого интервала. Это означает, что для удобства вычисления интеграла в (16) следует использовать  $v = 2$ . При этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(2)}(z) \Phi^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_\xi}\right) dz = - \int_{-L}^{+L} 2L\delta(z+L) \Phi^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_\xi}\right) dz + 2 \int_{-L}^{+L} \Phi^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_\xi}\right) dz - \int_{-L}^{+L} 2L\delta(z-L) \Phi^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_\xi}\right) dz \quad (18)$$

Вследствие симметрии функции интеграла вероятности

$$\Phi^{(n-1)}(z) = \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} \int_{-\infty}^z \frac{1}{2\pi} e^{-t^2} dt.$$

Выражение (18) оказывается равным нулю при нечетных  $n$ . С учетом этого формула для коэффициентов ряда  $A_n$  в разложении (16) принимает следующий вид:

$$A_n = \left[ \int_{\frac{-L}{\sigma_\xi}}^{\frac{+L}{\sigma_\xi}} \Phi^{(2n-1)}(z) dz - \frac{2L}{\sigma_\xi} \Phi^{(2n-1)}\left(\frac{L}{\sigma_\xi}\right) \right]^2 \frac{4\sigma_\xi}{(2n)!} \tag{19}$$

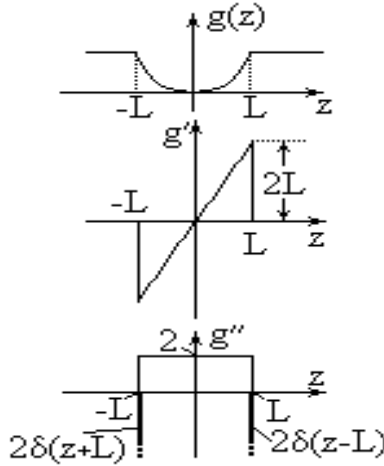


Рисунок 6.

Заметим для проверки, что  $A_1$ , вычисленное из (19), совпадает с  $A_1$ , определенным формулой (14). Имея формулы для коэффициентов разложения корреляционной функции, запишем выражение для нее:

$$R_{x^2}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_\xi^{2n}(\tau). \tag{20}$$

Заменив в (15) индексы суммирования по следующим формулам:  $k+m=j$ ,  $k-m=i$ , и подставив  $x^2(k\Delta t)x^2(m\Delta t) = R_{x^2}(i\Delta t)$ , получим:

$$\sigma_S^2 = \frac{R_{x^2}(0)\Delta t}{t_{\text{накопл}}} 1 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{t_{\text{накопл}}/\Delta t} R_{x^2}(i\Delta t)(N-i) + \frac{a^2 \sqrt{R_{x^2}(0)}}{3N}. \tag{21}$$

В (21) учтено также, что  $\bar{x} = 0$ , вследствие чего  $\overline{x^2} = R_{x^2}(0)$

Для приведения (21) к привычному виду заменим число накапливаемых отсчетов –  $N$  величиной  $t_{\text{накопл}}/\Delta t$ , где  $t_{\text{накопл}}$  – время накопления сигнала. Полагая, что  $t_{\text{накопл}} \gg \Delta t$ , т.е.  $N \gg 1$ , и  $R_{x^2}(i\Delta t) \rightarrow 0$  при больших  $i$  приведем (21) к следующему виду:

$$\sigma_S^2 = \frac{R_{x^2}(0)\Delta t}{t_{\text{накопл}}} \left[ 1 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{t_{\text{накопл}}/\Delta t} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} + \frac{a^2}{3\sqrt{R_{x^2}(0)}} \right]. \tag{22}$$

Все величины, входящие в (22), уже вычислены. В частности,  $R_{x^2}(0)$  согласно (20) будет равен

$$R_{x^2}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{23}$$

Коэффициент корреляции полосового шума на входе АЦП  $r_\xi(\tau)$  определяется известной формулой:

$$r_{\xi} = \frac{\sin(\Delta f \pi \tau)}{\Delta f \pi \tau}, \quad (24)$$

в которой  $\Delta f$  полоса пропускания ВЧ тракта, предшествующего АЦП.

Подставив (13) и (22) в (4), получим формулу, выражающую чувствительность одного из двух каналов радиометра с цифровым детектором и накопителем.

$$\Delta T_{\min} = T_u \left\{ \frac{2R_{x^2}(0)\Delta t}{A_1 t_{\text{накопл}}} \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{t_{\text{накопл}}} \sum_{i=1}^{t_{\text{накопл}}} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} + \frac{a^2}{3\sqrt{R_{x^2}(0)}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Чувствительность двухканального радиометра, построенного по схеме, приведенной на рисунке 3, будет в  $\sqrt{2}$  раз лучше величины, определенной в (25):

$$\Delta T_{\min} = \frac{T_u}{\sqrt{t_{\text{накопл}} \Delta f}} \left\{ \frac{R_{x^2}(0)\Delta t \Delta f}{A_1} \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{t_{\text{накопл}}} \sum_{i=1}^{t_{\text{накопл}}} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} + \frac{a^2}{3\sqrt{R_{x^2}(0)}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

В формуле (26) выделен привычный член  $\frac{T_u}{\sqrt{t_{\text{накопл}} \Delta f}}$ , представляющий чувствительность аналогового радиометра. Последующий коэффициент, выделенный фигурными скобками, отражает эффекты цифровой обработки.

Отношение

$$\sqrt{\frac{R_{x^2}(0)}{A_1}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n}{A_1}} = B,$$

в котором  $A_n$  вычисляются по формуле (19) и определяет ухудшение чувствительности, обусловленное эффектом насыщения АЦП. Для наглядности на рисунке 7 показан график зависимости этого члена от величины  $(L/\sigma_{\xi})$ . Как видно из данного графика, ухудшением чувствительности при  $(L/\sigma_{\xi}) > 3$  можно пренебрегать. Таким образом, раствор передаточной характеристики АЦП может быть всего  $-3\sigma - 3\sigma$ . Можно даже примириться с 5% ухудшением чувствительности и принять  $L=2\sigma$ .

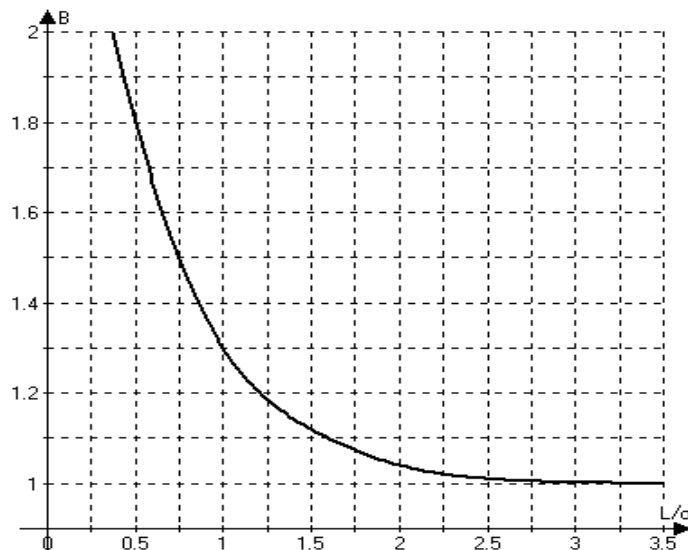


Рисунок 7.

Влияние на чувствительность эффектов квантования времени отражено в (26) слагаемым

$$\Delta t \Delta f \left[ 1 + \frac{2\Delta t}{t_{\text{накоп}}} \sum_{i=1}^{t_{\text{накоп}}/\Delta t} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} \right] = C.$$

Если подставить в (26) выражение (20) для  $R_x(\tau)$ , то получится весьма громоздкое выражение, зависящее от двух параметров: от периода отсчетов  $\Delta t$  и отношения ширины раствора АЦП к дисперсии шума на его входе ( $L/\sigma_\xi$ ). Однако численные расчеты показывают, что зависимость  $C$  от ( $L/\sigma_\xi$ ) очень слабая и ее можно не принимать во внимание ни на практике, ни в теории. Графики для  $C(\Delta t \Delta f)$ , показанные на рисунке 8 при различных величинах ( $L/\sigma_\xi$ ), практически сливаются. Некоторое расхождение графиков существует лишь в интервале значений  $\Delta t \Delta f$  от 0.2 до 0.9, а максимальная величина расхождений не превышает 5%. Данное обстоятельство свидетельствует об удачности выбора метода анализа, благодаря чему в конечной формуле сомножители, отражающие эффекты насыщения АЦП и дискретизации времени, разделились.

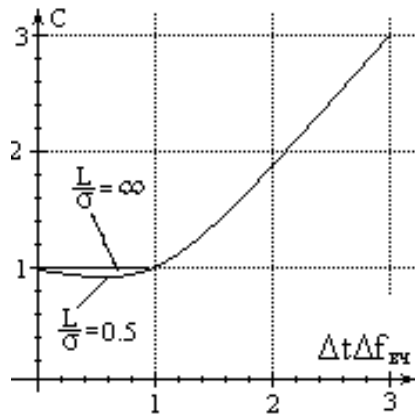


Рисунок 8.

Последнее слагаемое в (26) определяет ухудшение чувствительности, обусловленное квантованием сигнальных уровней (конечностью шага квантования). В проводимом анализе для упрощения расчетов полагалось отсутствие корреляции между погрешностями квантования различных отсчетов. Это допущение справедливо, если шаг квантования существенно меньше дисперсии квантуемого сигнала или если мала корреляция между самими отсчетами. Последнее означает, что сумма, входящая в (26),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} < 0.5.$$

Поэтому вклад слагаемого

$$D = \frac{a^2}{3\sqrt{R_{x^2}(0)}} = \frac{a^2}{3\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{R_{x^2}(0)}{2\sigma_\xi^4}} \sqrt{2}}, \quad (28)$$

определяющего вклад шума квантования, необходимо оценивать при малых значениях данной суммы. Зависимость величины

$$\sqrt{\frac{R_{x^2}(0)}{2\sigma_\xi^4}}$$

от отношения  $(L/\sigma_\xi)$  представлена в виде графика на рисунке 9. При заданном значении  $(L/\sigma_\xi)$  формула (28) позволяет определить вклад шума квантования в общее ухудшение чувствительности радиометра. Относительное увеличение выражения в квадратных скобках (26), обусловленное шумом квантования, будет равно  $1+D$ .

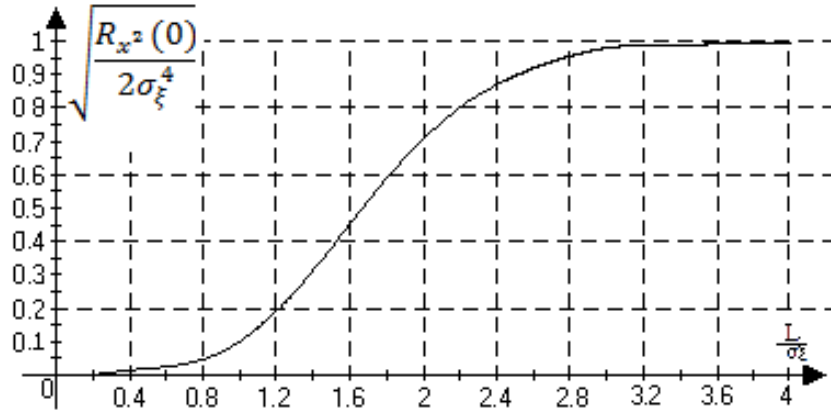


Рисунок 9.

3. Оценим параметры АЦП и последующих узлов обработки сигнала в радиометре с цифровым детектированием, задавшись незначительным ухудшением чувствительности (5%), в сравнении с аналоговым детектированием и накоплением. Поделим (26) на величину чувствительности аналогового радиометра и приравняем это отношение к 1.05. В результате получим

$$\frac{R_{x^2}(0)}{A_1} \left\{ \Delta t \Delta f_{BЧ} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{x^2}(i\Delta t)}{R_{x^2}(0)} \right] + \frac{a^2}{3\sqrt{R_{x^2}(0)}} \right\} = 1.05^2.$$

Или в принятых ранее обозначениях:  $B^2(C + D) = 1.1$ .

Имеется возможность распределить вклад величин  $B, C, D$  в ухудшение чувствительности таким образом, чтобы облегчить техническую реализацию АЦП. В частности, учитывая быстрый рост параметра  $C$  (рисунок 8) с увеличением  $\Delta t$  необходимо принять  $\Delta t \Delta f_{BЧ} = 1$ . Это обеспечит  $C=1$ .

Величина  $B^2$  (рисунок 7) уменьшается с 1.08 до 1.01 при увеличении  $(L/\sigma_\xi)$  от 2 до 2.5. Дальнейшее увеличение  $(L/\sigma_\xi)$  лишь незначительно изменяет  $B^2$ . Следовательно, необходимо обеспечить  $(L/\sigma_\xi) \geq 2.5$ .

Таким образом, основной вклад в ухудшение чувствительности остается за шумом квантования сигнальных уровней.

$$D = \frac{a^2}{3\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{R_{x^2}(0)}{2\sigma_\xi^4}} \sqrt{2}} \approx 0.1.$$

При определенном ранее параметре  $(L/\sigma_\xi) = 2.5$  с помощью рисунка 9 получим:  $a \leq 0.62\sigma_\xi$ . Теперь определится требуемое число уровней квантования:

$$M = \frac{2L}{a} \geq \frac{2.5\sigma_\xi}{0.31\sigma_\xi} = 8.$$

Таким образом, минимальная требуемая разрядность АЦП при описанных условиях равна 3. Построение такого АЦП, работающего с частотой отсчетов 1–2 ГГц не является трудной задачей для современной микроэлектроники [5]. Желательно объеди-

нить на одном кристалле двухканальный АЦП, комбинационные квадраторы и предварительный накопитель сигнала.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wollack, E. J. High-electron-mobility-transistor gain stability and its design implications for wide band / E. J. Wollack // Review of Scientific Instruments. – 1995. – Vol. 66. – P. 4305–4312.
2. Artal, E. LFI 30 and 44 GHz receivers Back-End Modules / E. Artal [et al.] // Journal of Instrumentation. – 2009. – Vol. 12. – T. 12003.
3. Филатов, А. В. Способы реализации модификации метода нулевого приема в сверхвысокочастотных радиометрах / А. В. Филатов // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48, вып. 7. – С. 888–894.
4. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 623 с.
5. Мерзликин, С. Сверхбыстродействующие АЦП, особенности архитектуры / С. Мерзликин // Электроника: НТБ. – 2008. – № 1. С. 30–33.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.03.2015

#### **Vorsin N.N. Digital Microwave Radiometry**

*Solved the problem of determining the parameters of the microwave radiometer D-tion detecting RF signal. The requirements for the characteristic Stick ADC based on allowable loss in sensitivity of the analog radiometer*

УДК 539.12

**А.М. Ишханян<sup>1</sup>, О. Флореа<sup>2</sup>, Е.М. Овсиюк<sup>3</sup>, В.М. Редьков<sup>4</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАН Армении,  
зав. лабораторией Ин-та физических исследований НАН Армении<sup>2</sup>д-р мат., доц. фак-та алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений  
Трансильванского университета (г. Брашув, Румыния)<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики  
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина<sup>4</sup>д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики  
Ин-та физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси**ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА:  
БОЗОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ**

*Построены точные решения уравнения Дирака – Кэлера в случае пространства Римана постоянной положительной кривизны. Для случая минимального значения сохраняющегося углового момента,  $j = 0$ , радиальные уравнения приведены к уравнениям второго порядка, которые решаются в терминах гипергеометрических функций. В случае ненулевых значений углового момента  $j = 1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум сложным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Найденный спектр энергии существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской частицы в сферическом пространстве Римана.*

**Введение**

Понятие об элементарных частицах как неких релятивистски инвариантных объектах в рамках 4-мерного пространства-времени Минковского является надежно установленным и общепризнанным. Для любой частицы предполагаются заданными определенные трансформационные свойства отвечающей ей полевой функции и связанное с этими свойствами релятивистское волновое уравнение. Интересной проблемой, привлекающей долгое время пристальное внимание, является волновое уравнение для частицы Дирака – Кэлера. Этому вопросу посвящена обширная литература [1–33]. Анализ этого вопроса начался уже в ранний период развития теории квантово-механических волновых уравнений сразу же после открытия уравнения Дирака [1]. Фактически уравнение Дирака – Кэлера было получено еще в 1928–1929 гг. Дарвином [2], а также Иваненко и Ландау [3] как альтернатива уравнению Дирака. Основным мотивом при этом было стремление построить уравнение для частицы со спином  $1/2$  на основе тензорных величин без использования спиноров, последние казались тогда мистическими и непонятными в сравнении с более знакомыми тензорными объектами. Поле Дирака – Кэлера состоит из набора тензоров, эквивалентных биспинору второго ранга. Оно содержит 16 независимых компонент, и волновое уравнение для него может быть представлено как формально несвязанные друг с другом четыре уравнения дираковского вида. Главная особенность в понимании тогда этого поля заключалась в том, что оно давало возможность осуществить плавный переход от тензоров к спинорам. В определенном смысле это была попытка устранения спиноров вообще, тем не менее сохранив связь с дираковским фермионом.

Однако упомянутая несвязанность четырех уравнений Дирака, используемых в теории Дирака – Кэлера, имеет место только в случае плоского пространства-времени Минковского, и это свойство не сохраняется в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых с привлечением пространственно-временных моделей с неевкли-

довой геометрией. Таким образом, наиболее интересным является вопрос о физической интерпретации поля Дирака – Кэлера: является ли это поле сложным (составным) бозоном или же эта система эквивалентна набору из четырех фермионов.

### 1. Постановка задачи

В пространстве Минковского частица Дирака – Кэлера описывается 16-компонентной волновой функцией  $U(x)$ , биспинором второго ранга, или эквивалентным набором тензорных полей:  $\{\Phi(x), \Phi_i(x), \tilde{\Phi}(x), \tilde{\Phi}_i(x), \Phi_{mn}(x)\}$ , где  $\Phi(x)$  – скаляр,  $\Phi_i(x)$  – вектор,  $\tilde{\Phi}(x)$  – псевдоскаляр,  $\tilde{\Phi}_i(x)$  – псевдовектор,  $\Phi_{mn}(x)$  – антисимметричный тензор. Связь между этими величинами задается соотношением

$$U = \left( -i\Phi + \gamma^l \Phi_l + i\sigma^{mn} \Phi_{mn} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i \gamma^l \gamma^5 \tilde{\Phi}_l \right) E^{-1}, \quad (1.1)$$

где  $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a)$  и  $E$  – биспинорная метрическая матрица [33]. В искривленном пространстве общековариантное уравнение Дирака – Кэлера в 4-спинорной форме имеет вид:

$$[i\gamma^\alpha(x) (\partial/\partial x^\alpha + B_\alpha(x)) - m] U(x) = 0, \quad (1.2)$$

где  $B_\alpha$  – 2-биспинорная связность,  $B_\alpha = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b)\beta})$ ,  $J^{ab} = \sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \sigma^{ab}$  – генераторы тензора второго ранга относительно группы Лоренца. Это спинорное уравнение эквивалентно системе тензорных уравнений [33]:

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \Psi_\alpha + m\Psi &= 0, & \nabla^\alpha \tilde{\Psi}_\alpha + m\tilde{\Psi} &= 0, \\ \nabla_\alpha \Psi + \nabla^\beta \Psi_{\alpha\beta} - m\Psi_\alpha &= 0, \\ \nabla_\alpha \tilde{\Psi} - \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha^{\beta\rho\sigma}(x) \nabla_\beta \Psi_{\rho\sigma} - m\tilde{\Psi}_\alpha &= 0, \\ \nabla_\alpha \Psi_\beta - \nabla_\beta \Psi_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(x) \nabla_\rho \tilde{\Psi}_\sigma - m\Psi_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ковариантные тензорные полевые переменные связаны локальными тетрадными переменными соотношениями

$$\Psi_\alpha = e_\alpha^{(i)} \Psi_i, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = e_\alpha^{(i)} \tilde{\Psi}_i, \quad \Psi_{\alpha\beta} = e_\alpha^{(m)} e_\beta^{(n)} \Psi_{mn}, \quad (1.4)$$

Левы-Чивита тензор определяется равенством  $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\rho e_{(d)}^\sigma$ .

Большая часть имеющихся работ по теории поля Дирака – Кэлера посвящена в основном исследованию свойств симметрии и других фундаментальных связей с обычными полями Дирака [1–33], однако фактически нет каких-либо нетривиальных рассмотрений вопроса о решениях уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства с неевклидовой геометрией.

В настоящей работе мы строим точное общее решение для уравнения Дирака – Кэлера в случае простейшей неевклидовой геометрической модели – сферического риманова пространства постоянной положительной кривизны. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента,  $j = 0$ , радиальные уравнения приведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в терминах гипергеометрических функций. В случае ненулевых значений углового момента  $j = 1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Дискретные уровни энергии получены наложением требования квази-полиномиальности волновых функций. Найденный спектр энергии существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской ча-



стицы в сферическом пространстве Римана. Ни один из найденных уровней энергии не совпадает с уровнями энергии для обычной частицы Дирака в сферическом пространстве Римана. Все это указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера как поля, эквивалентного четырем полям Дирака.

## 2. Разделение переменных

Изложим кратко результаты по разделению переменных в уравнении Дирака – Кэлера в пространствах Минковского и Римана. Запишем уравнение Дирака в пространстве Минковского [33] в базисе сферической тетрады:

$$\left[ i\gamma^0 \partial_t + i \left( \gamma^3 \partial_r + \frac{\gamma^1 J^{31} + \gamma^2 J^{32}}{r} \right) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta, \phi} - m \right] U(x) = 0, \quad (2.1)$$

$$\Sigma_{\theta, \phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + iJ^{12} \cos \theta}{\sin \theta}, \quad J^{12} = (\sigma^{12} \otimes I + I \otimes \sigma^{12}). \quad (2.2)$$

Диагонализируя оператор общего углового момента

$$J_1 = l_1 + \frac{iJ^{12} \cos \phi}{\sin \theta}, \quad J_2 = l_2 + \frac{iJ^{12} \sin \phi}{\sin \theta}, \quad J_3 = l_3, \quad (2.3)$$

для функции Дирака – Кэлера, получаем следующую общую подстановку:

$$U_{\varepsilon jm}(t, r, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ f_{31} D_{-1} & f_{32} D_0 & f_{33} D_{-1} & f_{34} D_0 \\ f_{41} D_0 & f_{42} D_{+1} & f_{43} D_0 & f_{44} D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

где  $f_{ab} = f_{ab}(r)$ ,  $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$  – функции Вигнера [35], квантовое число  $j$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ . Следующий шаг, существенно упрощающий систему радиальных уравнений, состоит в диагонализации оператора пространственной инверсии. В сферическом тетрадном базисе этот оператор задается выражением

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}. \quad (2.5)$$

Уравнение на собственные значения  $\hat{\Pi} U_{\varepsilon jm} = \Pi U_{\varepsilon jm}$  накладывает ограничения:

$$\begin{aligned} f_{31} &= \pm f_{24}, & f_{32} &= \pm f_{23}, & f_{33} &= \pm f_{22}, & f_{34} &= \pm f_{21}, \\ f_{41} &= \pm f_{14}, & f_{42} &= \pm f_{13}, & f_{43} &= \pm f_{12}, & f_{44} &= \pm f_{11}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где верхний знак относится к собственному значению  $\Pi = (-1)^{j+1}$ , нижний знак относится к  $\Pi = (-1)^j$ . Уравнение (2.4) переписывается как

$$U_{\varepsilon jm\delta}(t, r, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ \delta f_{24} D_{-1} & \delta f_{23} D_0 & \delta f_{22} D_{-1} & \delta f_{21} D_0 \\ \delta f_{14} D_0 & \delta f_{13} D_{+1} & \delta f_{12} D_0 & \delta f_{11} D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

где  $\delta = +1$  относится к случаю  $\Pi = (-1)^j$ ,  $\delta = -1$  – к случаю  $\Pi = (-1)^{j+1}$ .

Система радиальных уравнений для  $\delta = +1$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon f_{24} - i \frac{d}{dr} f_{24} + \frac{i}{r} 0 - \frac{ia}{r} f_{14} - m f_{11} &= 0, & \varepsilon f_{23} - i \frac{d}{dr} f_{23} - \frac{i}{r} f_{14} - \frac{ia}{r} f_{13} - m f_{12} &= 0, \\
\varepsilon f_{14} + i \frac{d}{dr} f_{14} + \frac{i}{r} f_{23} + \frac{ia}{r} f_{24} - m f_{21} &= 0, & \varepsilon f_{13} + i \frac{d}{dr} f_{13} + \frac{i}{r} 0 + \frac{ia}{r} f_{23} - m f_{22} &= 0, \\
\varepsilon f_{22} - i \frac{d}{dr} f_{22} + \frac{i}{r} 0 - \frac{ia}{r} f_{12} - m f_{13} &= 0, & \varepsilon f_{21} - i \frac{d}{dr} f_{21} - \frac{i}{r} f_{12} - \frac{ia}{r} f_{11} - m f_{14} &= 0, \\
\varepsilon f_{12} + i \frac{d}{dr} f_{12} + \frac{i}{r} f_{21} + \frac{ia}{r} f_{22} - m f_{23} &= 0, & \varepsilon f_{11} + i \frac{d}{dr} f_{11} + \frac{i}{r} 0 + \frac{ia}{r} f_{21} - m f_{24} &= 0. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Набор уравнений для случая  $\delta = -1$  следует из приведенной формальной замены  $m \rightarrow -m$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
A &= (f_{11} + f_{22}), & iB &= (f_{11} - f_{22}), & C &= (f_{12} + f_{21}), & iD &= (f_{12} - f_{21}), \\
K &= (f_{13} + f_{24}), & iL &= (f_{13} - f_{24}), & M &= (f_{14} + f_{23}), & iN &= (f_{14} - f_{23}), \quad (2.9)
\end{aligned}$$

уравнения (2.8) приводим к виду без комплексных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\varepsilon K - \frac{dL}{dr} + \frac{a}{r} N - mA &= 0, & \varepsilon A - \frac{dB}{dr} + \frac{a}{r} D - mK &= 0, \\
\varepsilon L + \frac{dK}{dr} + \frac{a}{r} M + mB &= 0, & \varepsilon B + \frac{dA}{dr} + \frac{a}{r} C + mL &= 0, \\
\varepsilon M - \frac{dN}{dr} + \frac{1}{r} N + \frac{a}{r} L - mC &= 0, & \varepsilon C - \frac{dD}{dr} + \frac{1}{r} D + \frac{a}{r} B - mM &= 0, \\
\varepsilon N + \frac{dM}{dr} + \frac{1}{r} M + \frac{a}{r} K + mD &= 0, & \varepsilon D + \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r} C + \frac{a}{r} A + mN &= 0. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Эти уравнения допускают наложение следующих линейных ограничений:

$$A = \lambda K, \quad B = \lambda L, \quad C = \lambda M, \quad D = \lambda N, \quad (2.11)$$

где  $\lambda = \pm 1$ . Для случая  $\lambda = +1$  вместо (2.10) получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dr} + \frac{a}{r} M + (\varepsilon + m)L &= 0, & \frac{dL}{dr} - \frac{a}{r} N - (\varepsilon - m)K &= 0, \\
\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) M + \frac{a}{r} K + (\varepsilon + m)N &= 0, & \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) N - \frac{a}{r} L - (\varepsilon - m)M &= 0. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Если здесь  $m$  заменить на  $-m$ , то получим набор уравнений, соответствующий случаю  $\lambda = -1$ .

Уравнения (2.12) могут быть упрощены дальше наложением определенных линейных ограничений:

$$\begin{aligned}
(i) \quad \sqrt{j+1} K(r) &= f(r), & \sqrt{j+1} L(r) &= g(r), \\
\sqrt{j} M(r) &= f(r), & \sqrt{j} N(r) &= g(r), \\
\left( \frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f + (\varepsilon + m)g &= 0, & \left( \frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) g - (\varepsilon - m)f &= 0; \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \sqrt{j} K(r) &= f(r), & \sqrt{j} L(r) &= g(r), \\
\sqrt{j+1} M(r) &= -f(r), & \sqrt{j+1} N(r) &= -g(r), \\
\left( \frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f + (\varepsilon + m)g &= 0, & \left( \frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) g - (\varepsilon - m)f &= 0. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Полученные уравнения применимы для случаев ненулевого  $j$ . Случай  $j = 0$  требует отдельного рассмотрения, поскольку вигнеровские функции  $D_{0,\pm 1}^j$  при  $j = 0$

не имеют смысла. В этом случае начальная подстановка для волновой функции должна быть выбрана в более простом виде

$$U_{\varepsilon 00}(t, r) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} 0 & f_{12} & 0 & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & 0 \\ 0 & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & 0 & f_{43} & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Оператор пространственной инверсии делит решения (2.15) на два класса:

$$\Pi = +1 \ (\delta = +1), \quad f_{32} = +f_{23}, \quad f_{34} = +f_{21}, \quad f_{41} = +f_{14}, \quad f_{43} = +f_{12}; \quad (2.16)$$

$$\Pi = -1 \ (\delta = -1), \quad f_{32} = -f_{23}, \quad f_{34} = -f_{21}, \quad f_{41} = -f_{14}, \quad f_{43} = -f_{12}. \quad (2.17)$$

Используя тождество  $\Sigma_{\theta, \phi} U_{\varepsilon 00} = 0$ , получаем радиальную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon M - \frac{dN}{dr} + \frac{N}{r} - m C = 0, \quad \varepsilon N + \frac{dM}{dr} + \frac{M}{r} + m D = 0, \\ \varepsilon C - \frac{dD}{dr} + \frac{D}{r} - m M = 0, \quad \varepsilon D + \frac{dC}{dr} + \frac{C}{r} - m N = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Полученную систему можно упростить

$$\begin{aligned} C = +M, \quad D = +N \ (\lambda = +1), \\ \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) M + (\varepsilon + m) N = 0, \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) N - (\varepsilon - m) M = 0; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} C = -M, \quad D = -N \ (\lambda = -1), \\ \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) M + (\varepsilon - m) N = 0, \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) N - (\varepsilon + m) M = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, в пространстве Минковского радиальные уравнения для частицы Дирака – Кэлера по сути сводятся к уравнениям того же вида, что и в теории обычных частиц Дирака. Однако такое упрощение возможно только в пространстве Минковского и невозможно в любом сферически симметричном пространстве с кривизной.

Вышеприведенный анализ легко распространяется (хотя и не полностью) на случай сферического пространства Римана. Метрика этой геометрической модели задается выражением

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.21)$$

уравнение Дирака – Кэлера имеет вид:

$$\left[ i\gamma^0 \partial_t + i \left( \gamma^3 \partial_r + \frac{\gamma^1 J^{31} + \gamma^2 J^{32}}{\tan r} \right) + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta, \phi} - m \right] U(x) = 0, \quad (2.22)$$

квантовое число общего углового момента принимает значения  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Дальнейшие вычисления по разделению переменных в значительной степени совпадают с описанными в [33], различия появляются только в явном виде результирующих радиальных уравнений.

Для случая минимального  $j = 0$  задача сводится к системе:

$$\begin{aligned} \varepsilon M - \frac{dN}{dr} + \frac{N}{\tan r} - m C = 0, \quad \varepsilon N + \frac{dM}{dr} + \frac{M}{\tan r} + m D = 0, \\ \varepsilon C - \frac{dD}{dr} + \frac{D}{\tan r} - m M = 0, \quad \varepsilon D + \frac{dC}{dr} + \frac{C}{\tan r} - m N = 0; \end{aligned} \quad (2.23)$$

для больших значений  $j = 1, 2, 3, \dots$  задача сводится к более сложным уравнениям ( $a = \sqrt{j(j+1)}$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dr} + \frac{a}{\sin r} M + (\varepsilon + m)L &= 0, \\
\frac{dL}{dr} - \frac{a}{\sin r} N - (\varepsilon - m)K &= 0, \\
\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{\tan r} \right) M + \frac{a}{\sin r} K + (\varepsilon + m)N &= 0, \\
\left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{\tan r} \right) N - \frac{a}{\sin r} L - (\varepsilon - m)M &= 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

### 3. Случай минимального значения полного момента $j = 0$

Для  $j = 0$  система (2.23) упрощается с использованием двух подстановок:

$$C = +M, \quad D = +N \quad (\lambda = +1),$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{\tan r} \right) M + (\varepsilon + m)N = 0, \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{\tan r} \right) N - (\varepsilon - m)M = 0, \tag{3.1}$$

$$C = -M, \quad D = -N \quad (\lambda = -1),$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{\tan r} \right) M + (\varepsilon - m)N = 0, \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{\tan r} \right) N - (\varepsilon + m)M = 0. \tag{3.2}$$

Уравнения первого порядка (3.1) дают уравнения второго порядка для  $M$  и  $N$ :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - m^2 - \frac{1 + \cos^2 r}{\sin^2 r} \right) M = 0, \tag{3.3}$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - m^2 + 1 \right) N = 0, \quad N = \text{const } e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + 1}r}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) решается в терминах гипергеометрических функций. Действительно, переходя к новой переменной  $x = (1 - \cos r)/2$ , получим

$$x(1-x) \frac{d^2 M}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} - x \right) \frac{dM}{dx} + \left( \varepsilon^2 - m^2 + 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(1-x)} \right) M = 0, \tag{3.5}$$

далее с использованием подстановки  $M(x) = x^A (1-x)^B F(x)$

при  $A = -1/2, 1$ ;  $B = -1/2, 1$  приходим к гипергеометрическому уравнению для  $F(x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  с параметрами

$$\alpha = 2 - \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + 1}, \quad \beta = 2 + \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + 1}, \quad \gamma = \frac{5}{2}. \tag{3.6}$$

Чтобы получить решение, конечное в сферическом пространстве (напоминаем, что  $r \in [0, \pi]$ ), следует использовать положительные значения  $A = 1$ ,  $B = 1$ . Требование полиномиальности  $\alpha = -n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  дает спектр энергии для состояний с  $j = 0$ :

$$\varepsilon^2 - m^2 + 1 = (2+n)^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3.7}$$

Чтобы завершить анализ этого случая, следует определить относительный коэффициент между функциями  $M(r)$  и  $N(r)$ :

$$\begin{aligned}
N &= N_0 \sqrt{x(1-x)} F(-n-1, 3+n; 3/2; x), \\
M &= M_0 x(1-x) F(-n, 4+n; 5/2; x), \quad M_0/N_0 = -(2/3)(\varepsilon - m).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 4. Анализ радиальных уравнений для $j = 1, 2, \dots$

С помощью первых двух уравнений системы (2.24) исключим функции  $L$  и  $N$ :

$$L = -\frac{1}{\varepsilon + m} \left( \frac{d}{dx} K + \frac{a}{\sin x} M \right), \quad N = -\frac{1}{\varepsilon + m} \left( \frac{d}{dx} M + \frac{1}{\tan x} M + \frac{a}{\sin x} K \right), \quad (4.1)$$

в результате получим два уравнения второго порядка, связывающие функции  $K$  и  $M$  (используем обозначение  $\varepsilon^2 - m^2 = p^2$ ,  $p > 0$ ):

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + p^2 - \frac{a^2}{\sin^2 x} \right) K = \frac{2a \cos x}{\sin^2 x} M, \quad \left( \frac{d^2}{dx^2} + p^2 + 1 - \frac{a^2 + 2}{\sin^2 x} \right) M = \frac{2a \cos x}{\sin^2 x} K. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) преобразуем к переменной  $x = \cos^2 r$ :

$$\left( (1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} + p^2 - \frac{a^2}{1-x} \right) K = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} M, \quad (4.3)$$

$$\left( (1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} + p^2 + 1 - \frac{a^2 + 2}{1-x} \right) M = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} K. \quad (4.4)$$

Около точки  $x = 1$  асимптотическое поведение решений задается формулами

$$M = M_0(1-x)^\gamma, \quad K = K_0(1-x)^\gamma;$$

при этом (4.3) и (4.4) дают алгебраическое уравнение

$$(4\gamma^2 - 2\gamma - a^2)K_0 - 2aM_0 = 0, \quad -2aK_0 + (4\gamma^2 - 2\gamma - a^2 - 2)M_0 = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда находим четыре возможных значения для  $\gamma$ :  $\gamma = j/2$ ,  $(j+2)/2$ ,  $(-j+1)/2$ ,  $(-j-1)/2$ . Только положительные значения  $\gamma = j/2$ ,  $(j+2)/2$  могут соответствовать связанным состояниям (т.е. конечным и непрерывным в сферическом пространстве функциям).

Исключая  $M(x)$  из (4.3)–(4.4), найдем уравнение для функции  $K(x)$ :

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^4 K}{dx^4} + \left( 7x + 5 - \frac{5}{1-x} \right) \frac{d^3 K}{dx^3} + \left( 10 - \frac{1}{2} p^2 + \frac{p^2 + a^2 - 28}{2(1-x)} + \frac{15 - 2a^2}{4(1-x)^2} \right) \frac{d^2 K}{dx^2} + \\ + \left( \frac{1}{4x} + \frac{3p^2 - 7}{4(1-x)} - \frac{3p^2 + a^2 - 9}{4(1-x)^2} + \frac{a^2}{4(1-x)^3} \right) \frac{dK}{dx} + \\ + \left( \frac{p^2 - a^2}{8x} + \frac{p^2 - a^2}{8(1-x)} + \frac{p^4 + 2p^2 - 2a^2}{16(1-x)^2} - \frac{a^2(p^2 - 1)}{8(1-x)^3} + \frac{a^2(a^2 - 2)}{16(1-x)^4} \right) K = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогично, исключая  $K(x)$ , получим уравнение для  $M(x)$ :

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^4 M}{dx^4} + \left( 7x + 5 - \frac{5}{1-x} \right) \frac{d^3 M}{dx^3} + \left( 10 - \frac{1}{2} p^2 + \frac{p^2 + a^2 - 28}{2(1-x)} + \frac{15 - 2a^2}{4(1-x)^2} \right) \frac{d^2 M}{dx^2} + \\ + \left( \frac{1}{4x} + \frac{3p^2 - 6}{4(1-x)} - \frac{3p^2 + a^2 - 9}{4(1-x)^2} + \frac{a^2}{4(1-x)^3} \right) \frac{dM}{dx} + \\ + \left( \frac{p^2 - a^2 - 1}{8x} + \frac{p^2 - a^2 - 1}{8(1-x)} + \frac{p^4 + 2p^2 - 2a^2 - 3}{16(1-x)^2} - \frac{a^2(p^2 - 1)}{8(1-x)^3} + \frac{a^2(a^2 - 2)}{16(1-x)^4} \right) M = 0. \end{aligned}$$

### 5. Общее решение

Полученные сложные уравнения 4-го порядка можно решить, применив метод факторизации. Оба дифференциальных оператора 4-го порядка можно единственным способом разложить в произведения двух операторов первого порядка.

Уравнение (4.6) для  $K(x)$  факторизуется следующим образом:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{p^2 - a^2 - 10}{x} + \frac{p^2 - a^2 - 10}{1-x} - \frac{a^2 - 6}{(1-x)^2} \right) \right] f(x) = 0, \quad (5.1)$$

где

$$f(x) \equiv \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{p^2 - a^2}{x} + \frac{p^2 - a^2}{1-x} - \frac{a^2}{(1-x)^2} \right) \right] K(x). \quad (5.2)$$

Можно построить некоторые решения  $K(x)$ , наложим требование  $f(x)=0$ . Делаем подстановку  $K(x) = x^A(1-x)^B F(x)$ :

$$A = 0, \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 + 1}, \quad F(x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x), \quad (5.3)$$

$$\alpha = A + B + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, \quad \beta = A + B + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + 2A. \quad (5.4)$$

Каждая пара значений  $(A, B)$  дает некоторое решение уравнения (4.6) в гипергеометрических функциях. Поскольку по физическим соображениям интересны конечные и непрерывные решения в точках  $x=0$  и  $x=1$ , дальше анализируем только два следующих независимых решения уравнения (4.6),  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$ :

$$(i) \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 + 1} = +\frac{j}{2} > 0, \\ K_1 = x^{1/2} (1-x)^{j/2} F \left( 1 + j/2 - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, 1 + j/2 + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, 3/2, x \right); \quad (5.5)$$

$$(ii) \quad A = 0, \quad B = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 + 1} = +\frac{j}{2} > 0, \\ K_2 = (1-x)^{j/2} F \left( j/2 + 1/2 - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, j/2 + 1/2 + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1}, 1/2, x \right). \quad (5.6)$$

Можно проверить, что если  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$  подставить в уравнение (4.3), то в результате получим две независимые функции  $M_1(x)$  и  $M_2(x)$  соответственно, которые удовлетворяют уравнению (4.7) для  $M(x)$ .

В свою очередь, уравнение (4.7) для  $M(x)$  факторизуется так:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{p^2 - a^2 - 9}{x} + \frac{p^2 - a^2 - 9}{1-x} - \frac{a^2 - 6}{(1-x)^2} \right) \right] g(x) = 0, \quad (5.7)$$

где

$$g(x) = \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{p^2 - a^2 - 1}{x} + \frac{p^2 - a^2 - 1}{1-x} - \frac{a^2}{(1-x)^2} \right) \right] M(x). \quad (5.8)$$

Уравнение  $g(x)=0$  также решается в гипергеометрических функциях. С использованием подстановки  $M(x) = x^C(1-x)^D F(x)$  получаем:

$$C = 0, \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 + 1}, \quad F(x) = F(\alpha', \beta'; \gamma'; x), \quad (5.9)$$

$$\alpha' = C + D + \frac{1}{2} - \frac{p}{2}, \quad \beta' = C + D + \frac{1}{2} + \frac{p}{2}, \quad \gamma' = \frac{1}{2} + 2C. \quad (5.10)$$

Только два выбора параметров ведут к конечным в точках  $x=0, 1$  решениям:

$$C = 1/2, D = +j/2,$$

$$M_3 = x^{1/2} (1-x)^{j/2} F\left(1 + j/2 - \frac{p}{2}, 1 + j/2 + \frac{p}{2}, 3/2, x\right), \quad (5.11)$$

$$(iv) \quad C = 0, \quad D = +j/2,$$

$$M_4 = (1-x)^{j/2} F\left(j/2 + 1/2 - \frac{p}{2}, j/2 + 1/2 + \frac{p}{2}, 1/2, x\right). \quad (5.12)$$

Легко проверить, что, подставив  $M_3(x)$  и  $M_4(x)$  в уравнение (4.4), получим две независимых функции, соответственно  $K_3(x)$  и  $K_4(x)$ , которые удовлетворяют уравнению (4.6) для  $K(x)$ . Затем можно убедиться, вычисляя вронскиан для четверки решений, что решения  $K_1, K_2, K_3, K_4$  являются линейно независимыми, и, следовательно, они образуют систему фундаментальных решений уравнения (4.6), т.е. дают общее решение задачи. Аналогично утверждение верно и для четверки решений  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , дающих общее решение уравнения (4.7).

Накладывая требования полиномиальности решений (это достигается обрыванием гипергеометрических рядов до полиномов с помощью условия  $\alpha = -n$ ), получаем явное описание четырех типов связанных состояний частицы Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана:

$$(i) \quad p_{(1)}^2 = (j + 2 + 2n)^2 - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$K_1(x) = \sqrt{x} (1-x)^{j/2} F(-n, j + 2 + n; 3/2; x), \quad M_1(x), \quad (5.13)$$

$$(ii) \quad p_{(2)}^2 = (j + 1 + 2n)^2 - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$K_2(x) = (1-x)^{j/2} F(-n, j + 1 + n; 1/2; x), \quad M_2(x), \quad (5.14)$$

$$(iii) \quad p_{(3)}^2 = (j + 2n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M_3(x) = \sqrt{x} (1-x)^{j/2} F(-n, j + 2 + n; 3/2; x), \quad (5.15)$$

$$(iv) \quad p_{(4)}^2 = (j + 1 + 2n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M_4(x) = (1-x)^{j/2} F(-n, j + 1 + n; 1/2; x); \quad (5.16)$$

сопутствующие функции  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$  и  $K_3(x)$ ,  $K_4(x)$  задаются соотношениями:

$$(i) \quad M_1(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}} \left( 2n(x-1) {}_2F_1\left(1-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) - \right. \\ \left. - (jx + 2n(x-1) + x - 1) {}_2F_1\left(-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) \right), \quad (5.17)$$

$$(ii) \quad M_2(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)x}} \left( 2n(x-1) {}_2F_1\left(1-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right) - \right. \\ \left. - (jx + 2n(x-1)) {}_2F_1\left(-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right) \right), \quad (5.18)$$

$$(iii) \quad K_3(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}} \left( 2n(x-1) {}_2F_1\left(1-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) - \right. \\ \left. - ((j+2)x + 2n(x-1) - 1) {}_2F_1\left(-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) \right), \quad (5.19)$$

$$K_4(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}\sqrt{x}} \left( 2n(x-1) {}_2F_1\left(1-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right) - \right.$$

$$-((j+1)x + 2n(x-1)) {}_2F_1\left(-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right). \quad (5.20)$$

Выбранные решения (5.13)–(5.16) определяют четыре набора решений, которым соответствуют дискретные спектры энергии частицы Дирака – Кэлера. Найденные решения (волновые функции и спектр энергии) демонстрируют существенные отличия от случая обычной дираковской частицы в сферическом пространстве Римана.

Явный вид уравнения Дирака в этой геометрической модели следующий:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta\phi} - m\right) \Psi = 0. \quad (5.21)$$

Общая структура волновых функций, отвечающих диагонализации оператора полного момента дираковской частицы, имеет вид

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ f_3(r) D_{-1/2} \\ f_4(r) D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad (5.22)$$

где функции Вигнера [35] обозначены как  $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^J(\phi, \theta, 0)$ ;  $J$  принимает полуцелые значения:  $J = 1/2, 3/2, \dots$ . Опуская детали вычислений [34], приведем спектр энергии для дираковской частицы в сферическом пространстве

$$\epsilon^2 - m^2 = (n + J + 1)^2, \quad (5.23)$$

или в обычных единицах измерения

$$E^2 - m^2 c^4 = \frac{\hbar^2 c^2}{\rho^2} (n + J + 1)^2, \quad (5.24)$$

где  $\rho$  обозначает радиус кривизны сферического пространства Римана.

Все четыре серии энергетических уровней для частицы Дирака – Кэлера (5.13)–(5.16) отличаются от спектра энергии дираковской частицы (5.24). Можно также отметить, что  $p_{(2)}^2 \rightarrow p_{(1)}^2$ ,  $p_{(4)}^2 \rightarrow p_{(3)}^2$ , если  $j$  сдвигается на единицу:  $j \rightarrow j+1$ . Однако соответствующие волновые функции различаются и, следовательно, представляют различные состояния. Таким образом, спектр энергии частицы Дирака – Кэлера состоит из двух различающихся серий уровней энергии. Найденный спектр энергии для частицы Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской частицы в этом пространстве. Спектр энергии для частицы Дирака – Кэлера существенно более сложный. Ни один из найденных уровней энергии не совпадает с уровнем энергии обычной частицы Дирака в сферическом пространстве Римана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. The Quantum Theory of the Electron / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – P. 610–624; The Quantum Theory of the Electron. Part II / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. 1928. – Vol. 118. – P. 351–361.
2. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
3. Ivanenko, D. Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Bd. 48, № 8. – S. 340–348.



4. Lanczos, C. The tensor analytical relationships of Dirac's equation / C. Lanczos // *Zeit. Phys.* – 1929. – Vol. 57. – P. 447–473.
5. Whittaker, E. T. On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus / E. T. Whittaker // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1937. – Vol. 158. – P. 38–46.
6. Ruse, H. S. On the geometry of Dirac's equations and their expression in tensor form / H. S. Ruse // *Proc. Roy. Soc. Edin.* – 1936. – Vol. 57. – P. 97–127.
7. Taub, A. H. Tensorial equations equivalent to the Dirac equations / A. H. Taub // *Ann. Math.* – 1939. – Vol. 40. – P. 937.
8. Taub, A. H. Spinor equations for the meson and their solution when no field is present / A. H. Taub // *Phys. Rev.* – 1939. – Vol. 56, № 8. – P. 799–810.
9. Kähler, E. Innerer and äusserer Differentialkalkül / E. Kähler // *Rendiconti di Mat. (Roma)*. – 1962. – Ser. 5. – S. 425–523.
10. Klauder, J. R. Linear representation of spinor fields by antisymmetric tensors / J. R. Klauder // *J. Math. Phys.* – 1964. – Vol. 5, № 9. – P. 1204–1214.
11. Penney, R. Tensorial description of neutrinos / R. Penney // *J. Math. Phys.* – 1965. – Vol. 6, № 7. – P. 1026–1028.
12. Cereignani, C. Linear representations of spinors by tensors / C. Cereignani // *J. Math. Phys.* – 1967. – Vol. 8, № 3. – P. 417–422.
13. Streater, R. F. Fermion states of a boson field / R. F. Streater, I. F. Wilde // *Nucl. Phys. B.* – 1970. – Vol. 24, № 3. – P. 561–575.
14. Durand, E. 16-component theory of the spin-1 particle and its generalization to arbitrary spin / E. Durand // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 11, № 12. – P. 3405–3416.
15. Strazhev, V. I. On the symmetry group of extended equations for a vector field / V. I. Strazhev // *Izvestiya Vuzov. Fizika.* – 1977. – № 8. – P. 45–48.
16. Kruglov, S. I. Internal symmetries and conservation laws in classical theory of a vector field of general type / S. I. Kruglov, V. I. Strazhev // *Izvestiya Vuzov. Fizika.* – 1978. – № 4. – P. 77–81.
17. Strazhev, V. I. Dirac – Kähler equation, classical theory / V. I. Strazhev, I. A. Sattikov, D. A. Tsionenko. – Minsk : BGU, 2007.
18. Graf, W. Differential forms as spinors / W. Graf // *Ann. Inst. H. Poincaré. A.* – 1978. – Vol. 29, № 1. – P. 85–109.
19. Benn, I. M. Fermions without spinors / I. M. Benn, R. W. Tucker // *Commun. Math. Phys.* – 1983. – Vol. 89, № 3. – P. 341–362.
20. Benn, I. M. Clifford analysis of exterior forms and Fermi-Bose symmetry / I. M. Benn, R. W. Tucker // *J. Phys. A.* – 1983. – Vol. 16, № 17. – P. 4147–4153.
21. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothan, D. Horn // *Phys. Lett. B.* – 1982. – Vol. 117, № 7. – P. 413–417.
22. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in (1+1) and (1+3) dimensions / P. Garbaczewski // *J. Math. Phys.* – 1982. – Vol. 23, № 3. – P. 442–450.
23. Pletyukhov, V. A. Tensorial equations and Dirac particles with internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // *Yadernaya Fizika.* – 1989. – Vol. 49. – P. 1505–1514.
24. Holland, P. R. Tensor conditions for algebraic spinors / P. R. Holland // *J. Phys. A.* – 1983. – Vol. 16, № 11. – P. 2363–2374.
25. Obukhov, Y. N. Reduction of the Dirac equation and its connection to Ivanenko–Landau–Kähler equation / Y. N. Obukhov, S. N. Solodukhin // *TMP.* – 1993. – Vol. 94. – P. 276–295.
26. Bullinaria, J. A. Kähler fermions in arbitrary space-times, their dimensional reduction and relation to spinorial fermions / J. A. Bullinaria // *Ann. Phys. (N.Y.)*. – 1986. – Vol. 168, № 2. – P. 301–343.

27. Krolkowski, W. Dirac equation with hidden extra spin: a generalization of Kähler equation. I, II / W. Krolkowski // Acta Phys. Polon. B. – 1989. – Vol. 20, № 10. – P. 849–858; Acta Phys. Polon. B. – 1990. – Vol. 21, № 3. – P. 201–207.
28. Kruglov, S. I. Symmetry and electromagnetic interactions of Fields with multi-spin / S. I. Kruglov. – N.Y. : Nova Science Pub. Inc., Hauppauge, 2000.
29. Kruglov, S. I. Dirac – Kähler equations / S. I. Kruglov // Intern. J. Theor. Phys. – 2002. – Vol. 41. – P. 653–687.
30. Marchuk, N. G. A tensor form of the Dirac equation / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2001. – Vol. 116, № 10. – P. 1225–1248.
31. Marchuk, N. G. Dirac-type tensor equations with non-Abelian gauge symmetries on pseudo-Riemannian space / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2002. – Vol. 117. – P. 95–120.
32. Marchuk, N. G. The Dirac equation vs. the Dirac type tensor equation / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2002. – Vol. 117. – P. 511–520.
33. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Redkov. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2014. – 486 p.
34. Redkov, V. M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Redkov, E. M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.
35. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 441 с.
36. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2011. – 339 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.01.2015

***Ishkhanyan A.M., Florea O., Ovsyuk E.M., Redkov V.M. Dirac – Kähler Particle in Riemann Spherical Space: Boson Interpretation, Exact Solutions***

*We construct the exact general solution of the Dirac – Kähler equation for the case of the spherical Riemann space of constant positive curvature. In the case of the minimal value of the total angular momentum,  $j=0$ , the radial equations are reduced to second-order ordinary differential equations, which are solved in terms of the hypergeometric functions. For non-zero values of the total angular momentum, the radial equations are reduced to a pair of complicated fourth-order differential equations. Employing the factorization approach, we derive the general solution of these equations involving four independent fundamental solutions written in terms of combinations of the hypergeometric functions. The corresponding discrete energy spectrum is then determined via termination of the involved hypergeometric series, resulting in quasi-polynomial wave-functions. The constructed solutions lead to notable observations when compared with those for the ordinary Dirac particle.*

УДК 004+62-52

**А.А. Козинский<sup>1</sup>, А.В. Цанда<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. пед. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**СЕТЕВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ  
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ ПОМЕЩЕНИЯ**

*В основе настоящей работы лежит концепция вычислительной сети физических объектов, получившая название «Интернет вещей». Работа посвящена управлению микроклиматом на основе микроконтроллерной лаборатории на базе платы Arduino. Микроконтроллерная лаборатория включает две составляющие: аппаратную и программную. Статья содержит описание результатов проектирования некоторых аппаратных компонентов системы управления микроклиматом. В работе представлены: структурная и принципиальные схемы, разработанные в процессе реализации сетевой системы; описан способ подключения шагового двигателя средней мощности к плате Arduino; приведены примеры программных кодов управления модулем нагрузки и шаговым двигателем.*

«Интернет вещей» (Internet of Things, IoT) [1] – одно из наиболее перспективных и популярных сегодня направлений развития информационных технологий. Смысл его заключается в тесной интеграции реального и виртуального миров. Считается, что в будущем вещи станут активными участниками информационных и социальных процессов, смогут взаимодействовать и «общаться» не только с людьми, но и между собой, обмениваясь информацией об окружающем мире без участия человека. Сегодня эта тематика вызывает интерес не только потребителей, но и ведущих ИТ-компаний [2].

Настоящее исследование посвящено проектированию сетевой системы управления метеорологическим состоянием на основе микроконтроллерной лаборатории. В качестве основного управляющего компонента лаборатории выбрана плата Arduino с одноименной интегрированной средой разработки (IDE) [3–5]. Цель работы – создать сетевую программно-аппаратную систему для управления микроклиматом. Для достижения указанной цели необходимо решить ряд задач, связанных с проектированием аппаратной и программной составляющих указанной системы.

Первая составляющая (аппаратная) представлена набором электронных элементов для контроля за температурой, влажностью и другими климатическими параметрами. В качестве дополнительных параметров контроля могут выступать уровень радиации и (или) теплового излучения, состав воздуха и (или) скорость его перемещения, освещенности, давления и др. Кроме Arduino в состав аппаратной составляющей включены платы расширения (Shields). Примером такой платы является Ethernet Shield [6] для поддержания Ethernet интерфейса.

Вторая составляющая (программная) представлена сетевым приложением для управления аппаратной составляющей.

Под «микроконтроллерной лабораторией» будем понимать совокупность аппаратной и программной составляющих единой системы, управление которой осуществляется средствами микроконтроллера(-ов). В общем случае микроконтроллерная лаборатория может быть использована для решения различных практических задач: контроль микроклимата, управление роботами или беспилотными аппаратами, производственными процессами и т.д.

Микроклимат [7] – это метеорологические условия внутренней среды помещения, которые определяются действующими на живой организм физическими факторами (освещенность, атмосферное давление, состав воздуха и др.). Ниже представлены

результаты проектирования компонентов системы обеспечения микроклимата ограниченного пространства. Управление микроклиматом требует анализа многих физических факторов. В отдельном экспериментальном случае такими факторами выбраны температура и влажность.

Таким образом, управление микроклиматом включает контроль за состоянием выбранных параметров. Пусть имеется помещение, в котором нужно поддерживать заданную температуру, влажность в соответствии с программой на протяжении конечного промежутка времени. Контроль параметров должен происходить с использованием вычислительной сети.

Первичный анализ постановки задачи показывает, что функционирование сетевой системы управления микроклиматом сводится к измерению состояния температуры и влажности с помощью соответствующих датчиков и изменению перечисленных параметров при помощи соответствующих устройств. Анализ задач создания микроконтроллерной лаборатории для управления микроклиматом позволил представить ее решение следующей структурной схемой (рисунок 1).

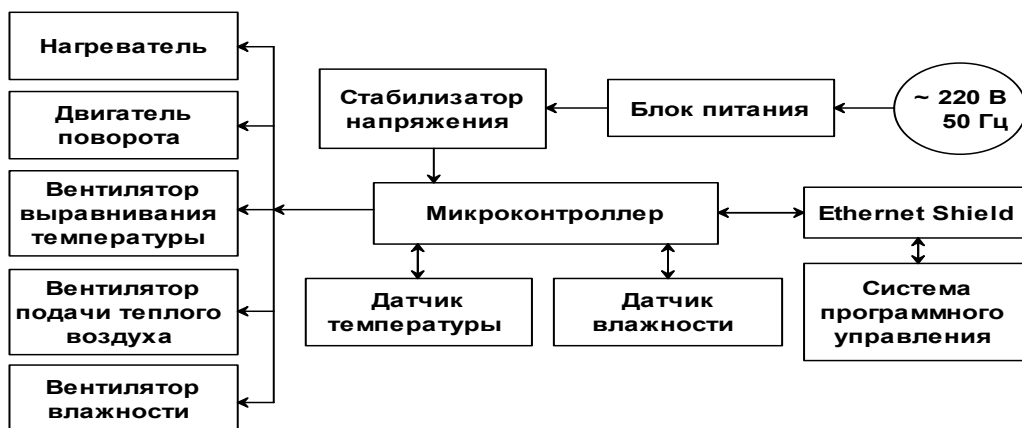


Рисунок 1. – Структурная схема сетевой системы управления микроклиматом помещения

Анализ первоисточников по теме исследования позволил уточнить структурную схему. Детализированная структурная схема микроконтроллерной лаборатории представлена на рисунке 2.

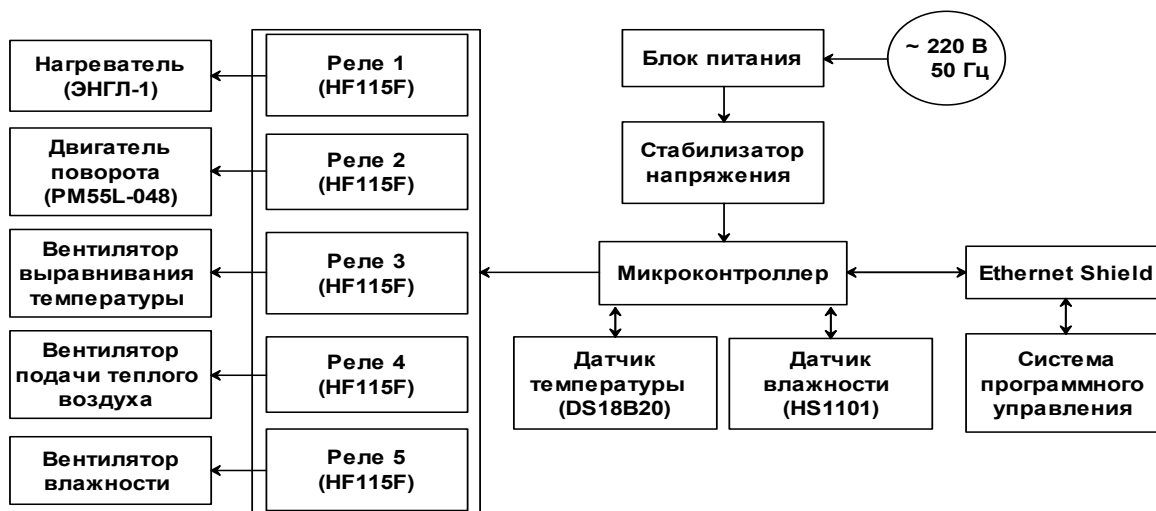


Рисунок 2. – Детализированная структурная схема микроконтроллерной лаборатории

Опишем результаты проектирования отдельных компонентов, представленных на детализированной структурной схеме. Одним из обязательным компонентом лаборатории является блок питания. Блок питания должен обеспечивать выходные напряжения +24 В, +10 В, +12 В и ~230 В. Условия универсальности изготовления блока питания состоит в том, что в его состав должны входить распространенные элементы.

Для реализации блока питания применен обычный понижающий трансформатор, напряжение на вторичной катушке которого равно ~24 В и сила тока составляет 2 А. Для получения напряжения ~13 В на понижающем трансформаторе использована дополнительная катушка из медного провода сечением 0,5 мм с числом витков 80. Принципиальная схема блока питания показана на рисунке 3.

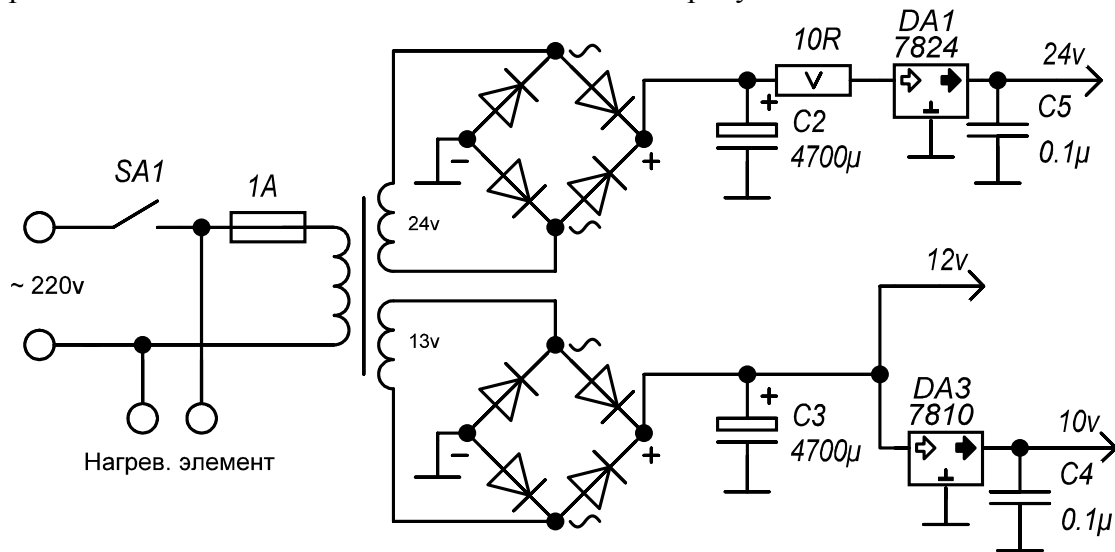


Рисунок 3. – Принципиальная схема блока питания

Как видно из схемы, для получения +10 В из ~13 В использован стабилизатор на микросхеме L7810cv [8], а для получения напряжения +24 В – L7824cv [9].

Результат проектирования блока питания представлен на фото (рисунок 4).

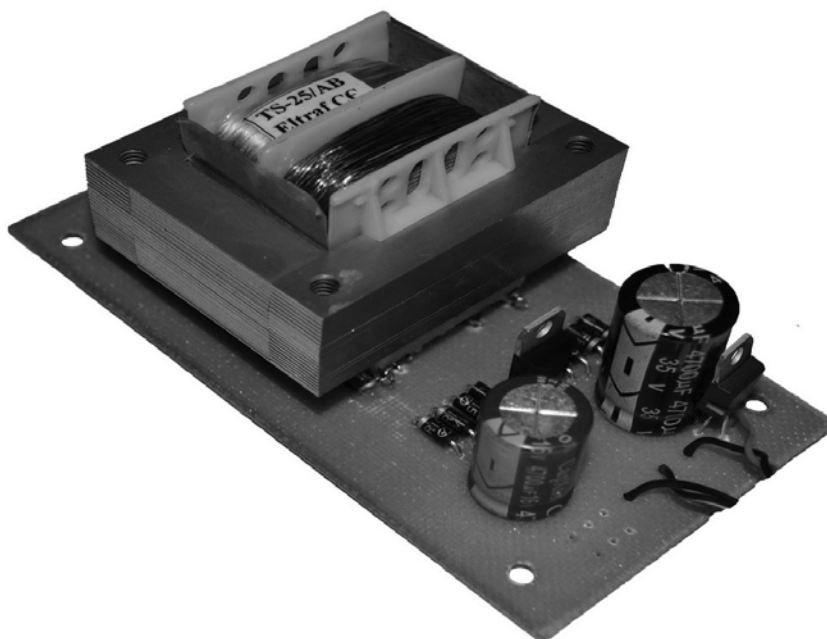


Рисунок 4. – Блок питания

Необходимым узлом микроконтроллерной лаборатории является устройство управления нагрузкой. Устройство управления нагрузкой представлено набором реле. Принципиальная схема модуля управления нагрузкой показана на рисунке 5. Реле имеет управляющее напряжение +5 В и коммутируемое напряжение до 250 В. Приведенным характеристикам удовлетворяет реле HF115F [10]. Управляющий сигнал поступает через биполярный р-п-р транзистор КТ3107 (аналог BC556, BC307) [11], который используется в качестве ключа. Модуль управления нагрузкой снабжен светодиодной индикацией, которая показывает состояние каждого реле.

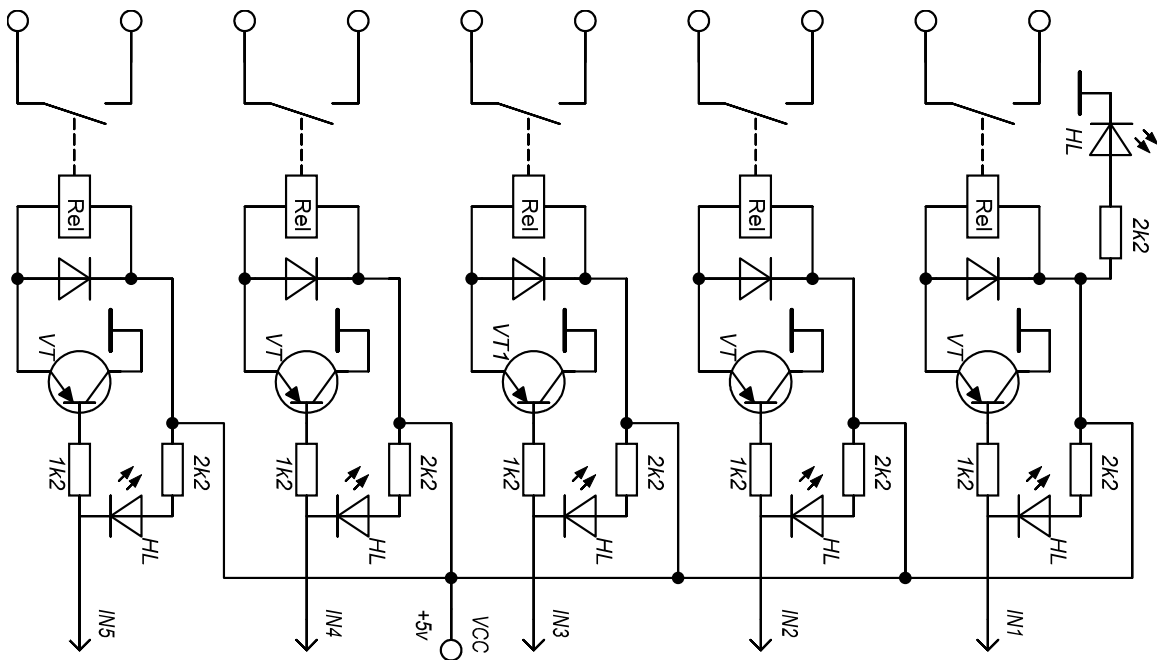


Рисунок 5. – Принципиальная схема модуля управления нагрузкой

Изготовленный модуль управления нагрузкой представлен на фото (рисунок 6).

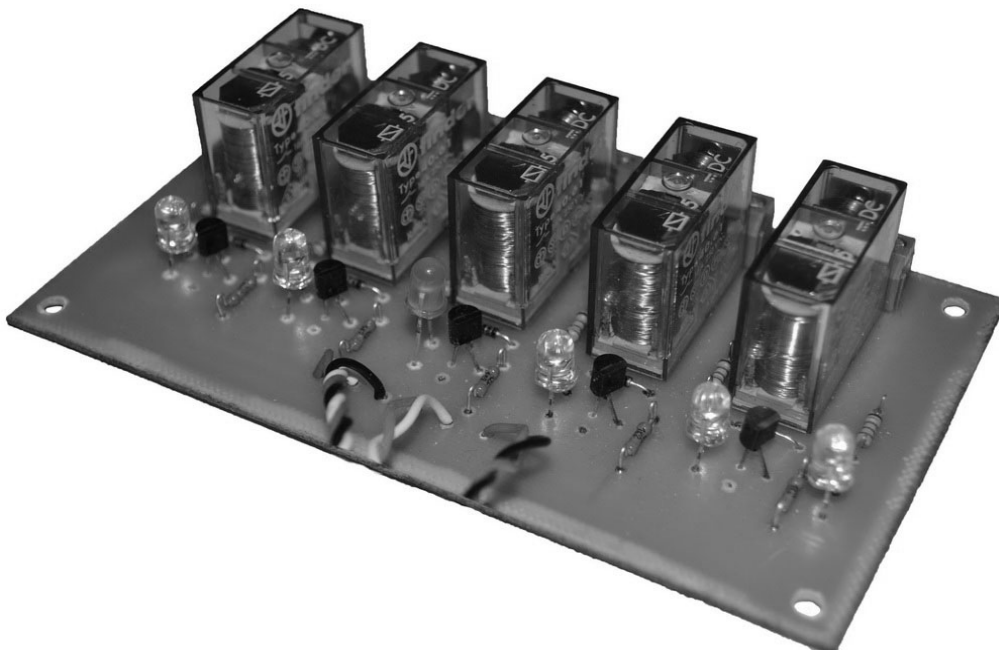


Рисунок 6. – Модуль управления нагрузкой

Управление каждым компонентом аппаратной составляющей микроконтроллерной лаборатории предполагает написание соответствующих программ. Программа, написанная в среде программирования Arduino, называется скетч (sketch) [12].

Пример кода скетча для управления нагрузкой приведен в листинге 1.

*Листинг 1. – Пример программного кода управления нагрузкой.*

```
int Relay1 = 3;
int Relay2 = 4;
int Relay3 = 5;
int Relay4 = 6;
int Relay5 = 7;

void setup() {
    pinMode(Relay1, OUTPUT);
    pinMode(Relay2, OUTPUT);
    pinMode(Relay3, OUTPUT);
    pinMode(Relay4, OUTPUT);
    pinMode(Relay5, OUTPUT);
}
void loop() {
    digitalWrite(Relay1, LOW); // реле1 включено
    digitalWrite(Relay3, LOW); // реле3 включено
    digitalWrite(Relay5, LOW); // реле5 включено
    delay(2000);
    digitalWrite(Relay1, HIGH); // реле1 выключено
    digitalWrite(Relay3, HIGH); // реле3 выключено
    digitalWrite(Relay5, HIGH); // реле5 выключено
    delay(2000);
    digitalWrite(Relay2, LOW);
    digitalWrite(Relay4, LOW)
    delay(2000);
    digitalWrite(Relay2, HIGH);
    digitalWrite(Relay4, HIGH);
    delay(2000);
}
```

Еще одним элементом лаборатории, требующим программного управления, является шаговый двигатель. Для управления шаговым двигателем необходимо сформировать управляющие напряжения, с заданной временной зависимостью, которое поступает на выводы его обмоток. Задачу формирования управляющих напряжений выполняет микроконтроллер ATmega328p [13]. Он является основной микросхемой платы Arduino [14].

Сформированные микроконтроллером управляющие напряжения поступают на контроллер шагового двигателя. В качестве контроллера могут быть использованы L293, ULN2003, A3967SBL и т.д. [15]. Нами выбран контроллер ULN2003A [16; 17]. Разработанная принципиальная схема подключения шагового двигателя показана на рисунке 7.

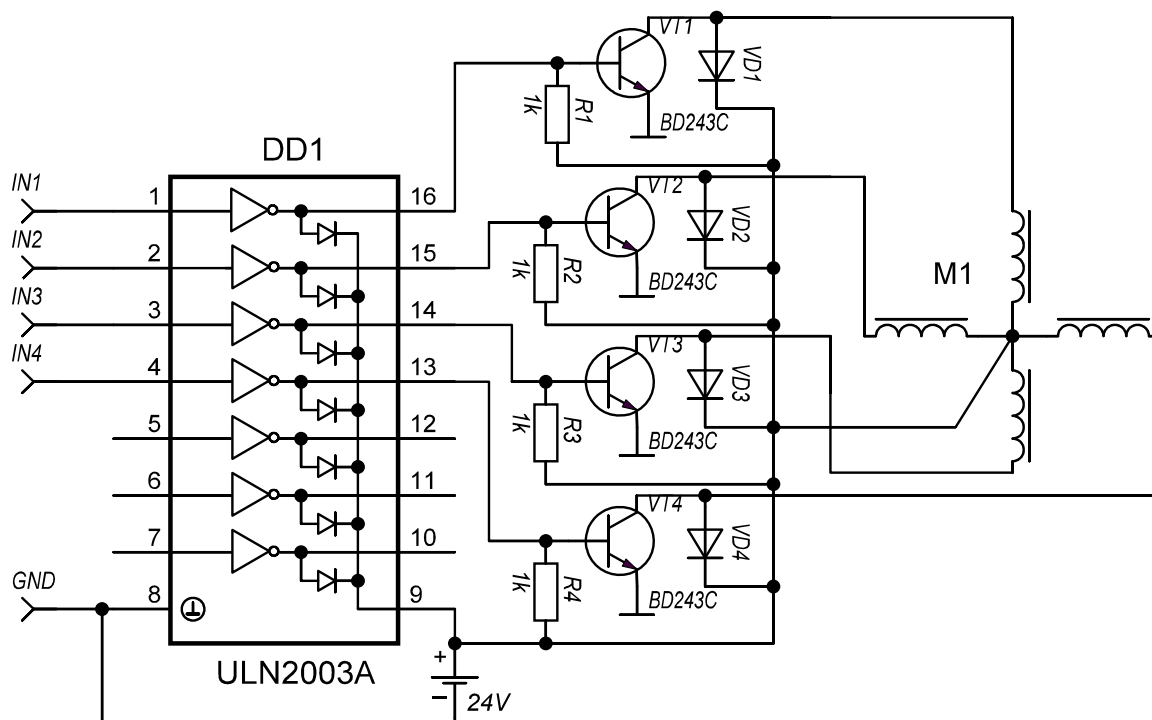


Рисунок 7. – Принципиальная схема контроллера шагового двигателя

Шаговый двигатель и контроллер представлен на фото (рисунок 8).

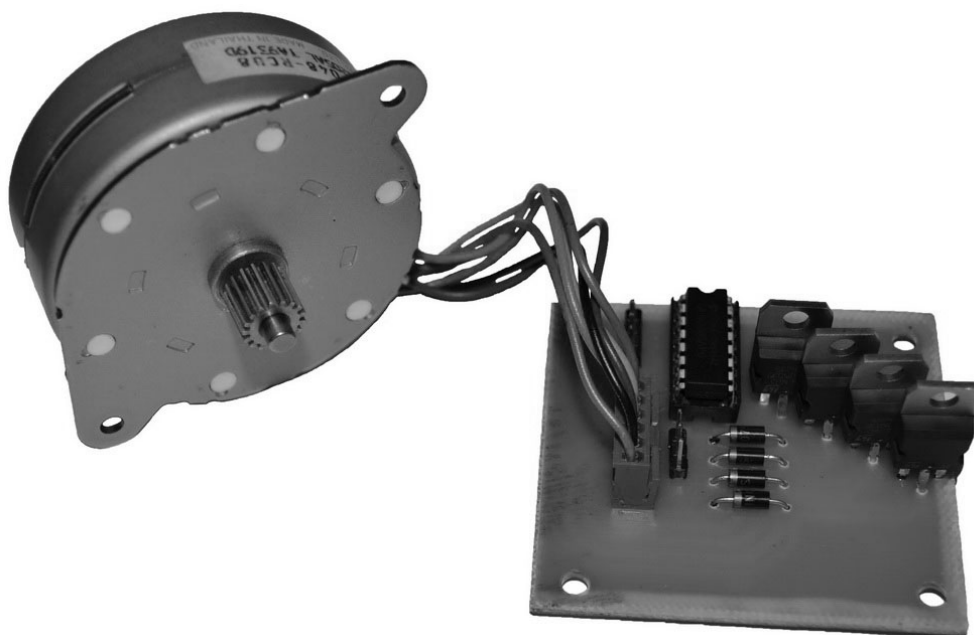


Рисунок 8. – Шаговый двигатель и контроллер в сборе

Пример кода скетча для управления шаговым двигателем приведен в листниге 2.



*Листинг 2. – Пример программного кода управления шаговым двигателем.*

```
#include <Stepper.h>
const int stepsPerRevolution = 500; //количество шагов
Stepper myStepper(stepsPerRevolution, 8,9,10,11);
void setup() {
  myStepper.setSpeed(10);
  Serial.begin(9600);
}
void loop() {
  Serial.println("clockwise");
  myStepper.step(stepsPerRevolution); //вращение по часовой стрелке
  delay(1000);
  Serial.println("counterclockwise");
  myStepper.step(-stepsPerRevolution); // против часовой стрелки
  delay(1000);
}
```

Реализацию аппаратной составляющей микроконтроллерной лаборатории управления микроклиматом можно считать в основном законченной. Для достижения конечной цели требуется представить программные коды управления отдельными компонентами. Весьма перспективным, по нашему мнению, может быть включение в состав микроконтроллерной лаборатории компонентов контроля и управления такими физическими параметрами, как радиация, тепловое излучение, состав и скорость перемещения воздуха, освещенность и т.д. Эти задачи решаются увеличением количества датчиков и не требуют принципиальных изменений в составе описанной системы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Internet of Things [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://itunews.itu.int/ru/Note.aspx?Note=4373>. – Дата доступа : 26.02.2015.
2. «Умная» теплица [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://dev.by/lenta/main/razrabotchiki-eram-sozdali-umnuyu-teplitsu-revolyutsiya-v-selskom-hozyaystve-ne-za-orami>. – Дата доступа: 26.02.2015.
3. Гололобов, В. Н. С чего начинаются роботы. О проекте Arduino / В. Н. Гололобов. – М., 2011. – 189 с.
4. Руководство по освоению Arduino / [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://solarbotics.com/download.php?file=1540>. – Дата доступа: 26.02.2015.
5. Цанда, А. В. Структурная схема сетевой системы управления метеорологическим состоянием / А. В. Цанда // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 15–16 окт. 2014 г. – Брест : БрГУ, 2014. – С. 170–172.
6. Arduino [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arduino.cc/en/Main/ArduinoEthernetShield>. – Дата доступа: 24.02.2015.
7. Яндекс словарь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://slovari.yandex.ru/~книги/Охрана%20труда/Микроклимат%20производственных%20помещений/>. – Дата доступа: 24.02.2015.

8. Datasheet L7810cv [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.alldatasheet.com/datasheetpdf-pdf/22677/STMICROELECTRONICS/L7810CV.html>. – Дата доступа: 24.02.2015).
9. Datasheet L7824cv [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/22644/STMICROELECTRONICS/L7824CV.html>. – Дата доступа: 24.02.2015.
10. Datasheet HF115F [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/194106/HONGFA/HF115F.html>. – Дата доступа: 24.02.2015.
11. Справочник по транзисторам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.5v.ru/ds/trnz/kt3107.htm>. – Дата доступа: 24.02.2015.
12. Среда разработки Arduino [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://arduino.ru/Arduino\\_environment](http://arduino.ru/Arduino_environment). – Дата доступа: 24.02.2015.
13. Datasheet ATmega328p [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.atmel.com/Images/doc8161.pdf>. – Дата доступа: 16.02.2015.
14. Arduino Uno [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardUno>. – Дата доступа: 16.02.2015.
15. Цифровая электроника [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://digitrode.ru/computing-devices/mcu\\_cpu/196-arduino-i-shagovyuy-dvigatel-byj48.html](http://digitrode.ru/computing-devices/mcu_cpu/196-arduino-i-shagovyuy-dvigatel-byj48.html). – Дата доступа: 16.02.2015.
16. Datasheet ULN2003A [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/25566/STMICROELECTRONICS/ULN2003A.html>. – Дата доступа: 16.02.2015.
17. Поэлементный разбор ULN2003A [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://habrahabr.ru/company/zeptobars/blog/189388>. – Дата доступа: 16.02.2015.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 16.03.2015

**Kazinski A.A., Tsanda A.V. Network Management System Weather Condition of the Premises**

*At the core of this work is the concept of the computer network of physical objects, called «Internet of Things». The work is devoted to the climate control on the basis of laboratory microcontroller board based on Arduino. Microcontroller lab includes two components: hardware and software. The article contains a description of the results of designing some hardware components of the system for climate control. The paper presents: the structure and concepts developed during the implementation of the network system; describes a method for connecting stepper motor average power to the board Arduino; examples of program code module control a stepper motor and load.*

УДК 620.022 (075.8)

**В.А. Лиопо<sup>1</sup>, Е.В. Овчинников<sup>2</sup>, А.Л. Ситкевич<sup>3</sup>,  
С.С. Секержицкий<sup>4</sup>, А.В. Никитин<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, профессор каф. теоретической физики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

<sup>2</sup>канд. техн. наук, доц., зам. декана фак-та инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

<sup>3</sup>аспирант каф. теоретической физики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

<sup>5</sup>канд. техн. наук, доц., зав. каф. теоретической физики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

### **КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ КЛАСТЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ (СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)**

*Кластерными системами называются жидкости (газы), в которых имеются области (кластеры) с атомно-молекулярным взаиморасположением с симметрией существенно более высокой, чем в среднем объеме. Отношение числа всех атомов, находящихся в кластерах, к общему числу атомов называется степенью кластеризации. Рассмотрена зависимость степени кластеризации от температуры расплава и потенциала межатомного взаимодействия.*

#### **Введение**

Конденсированные состояния как атомно-молекулярные системы (АМС), в которых расстояния между атомами соизмеримы с размерами атомов, до недавнего времени подразделялись на 2 группы: кристаллы и некристаллы. Последние часто называли аморфными веществами. В настоящее время известно гораздо больше АМС. Кристаллы – это объекты с трансляционным (регулярным) расположением атомов по всем направлениям. Если регулярность сохраняется во всем объеме атома, то он называется монокристаллом. Если монокристалл диспергирован на достаточно большое число мелких кристаллов, ориентация кристаллографических направлений  $[uvw]$  и нормалей к плоскостям  $(hkl)$  ориентированы независимо, то такие объекты – поликристаллы. Если в поликристаллах  $[uvw]$  и нормали к  $(hkl)$  имеют преимущественное направление, то говорят о текстурах.

Среди некристаллических объектов сейчас известны следующие. Стекла – это АМС, затвердевшая без кристаллизации. Если регулярность расположения атомов сохраняется только для одного или двух направлений в пространстве, то говорят об OD-структурах (от order-disorder – порядок-беспорядок). Если АМС в жидкостях соответствуют OD-структурам, то говорят о жидких кристаллах, которые подразделяют на нематические, смектические и холестерические типы. В жидкостях могут возникнуть объединения атомов (молекул) со взаимным упорядочением более высоким, чем в среднем по всему объему объекта. Такие более симметричные области называются кластерами (от англ. cluster – гроздь), а соответствующая жидкость (или стекло) называется кластерной системой.

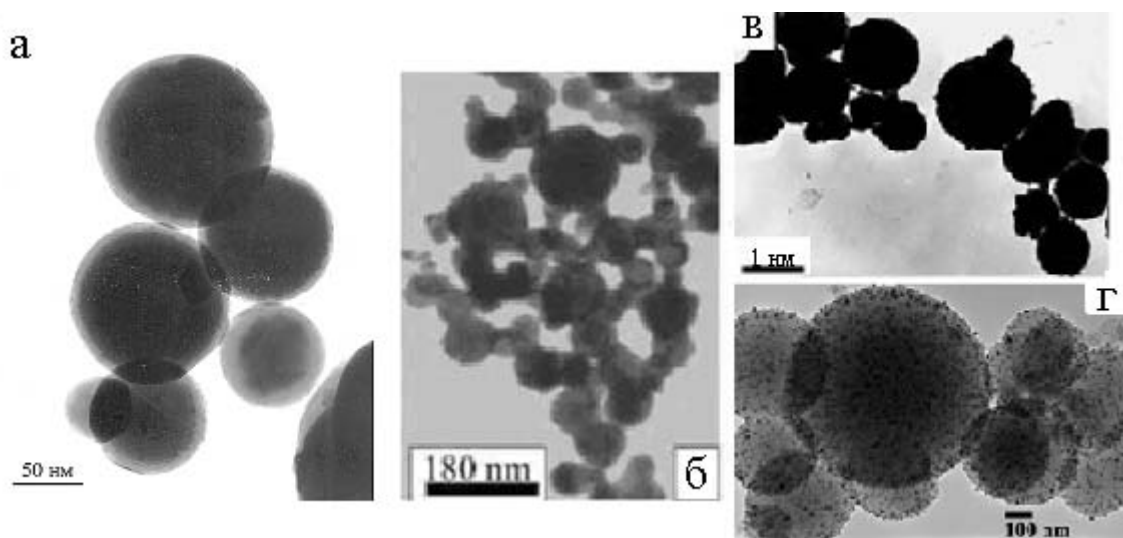
Межатомная взаимоконфигурация в жидкостях отличается от той, что соответствует закристаллизованной фазе. При резком охлаждении (капельная или спиннинговая методики) возникают АМС с некристаллографической локальной симметрией и с псевдодальним порядком. Эти вещества получили название квазикристаллов.

При низкотемпературной сублимации углеродных паров возникает новая фаза углерода с молекулами сферического типа, на внешней координационной сфере которых расположены гексагональные и пентагональные углеродные кольца. Эти АМС получили названия фуллеренов.

АМС, атомы в которых расположены регулярно вдоль прямолинейных ветвящихся ломаных отрезков, получили название фронтальных кластеров или фракталов. Если при диспергировании макроразмерных полуфабрикатов размеры частиц находятся в наноразмерном диапазоне (метод сверху) или выращиванием из раствора, расплава (метод снизу) получена новая фаза АМС, названная наночастицами. Наночастица обладает двумя свойствами. Первое – наличие поверхности, второе – численное значение параметров физических свойств начинает зависеть от размера частиц. Не всякий наноразмерный объект можно отнести к наночастице. Например, кластеры, квантовые точки, ямы, нити и т.п. наночастицами не являются.

### Кристаллизация кластерных жидкостей

Вода, водные растворы, расплавы различных металлов являются типичными кластерными системами. Кластеры не являются устойчивыми системами. Возникший кластер может разрушаться, но при этом в других участках жидкости возникает новый кластер. Для описания кластерных систем рассмотрим следующие параметры. Число атомов в единице объема обозначим  $N$ , среднее число атомов в кластере равно  $m$ , а число кластеров в единице объема равно  $n$ . На рисунке 1 приведены примеры микрофотографий металлических и полупроводниковых закристаллизованных пленок.



а – сферические частицы металлического висмута, б – частицы меди, в – порошок оксида алюминия, г – однородные наночастицы серебра

Рисунок 1. – Электронно-микроскопические фотографии

Используя статистическую модель, можно рассчитать зависимость степени кластеризации ( $q$ ) от температуры и параметров межатомного взаимодействия. Коэффициент  $Q$  определяется из условия:

$$q = \frac{m \cdot n}{N}. \quad (1)$$

Рассмотрим кластерную жидкость, т.е.  $T_C \leq T \leq T_V$ , где  $T_C$ ,  $T_V$  – температуры кристаллизации и испарения (кипения) жидкости. Если  $F$  – свободная энергия едини-

цы объема кластерной системы,  $E$  – внутренняя энергия,  $T$  – температура объекта,  $S$  – энтропия системы, то для анализируемой АМС применимо уравнение:

$$F = E - TS. \quad (2)$$

Рассмотрим наиболее, на наш взгляд, сложный параметр – энтропию, которая определяется условием [1]:

$$S = k \ln \Omega, \quad (3)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $\Omega$  – общее число состояний системы.

Общее число состояний определяется следующим условием:

$$\Omega = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4. \quad (4)$$

Число состояний  $\omega_1$  определяет число вариантов размещения  $N$  атомов в кластерной системе, равной  $mn$ .

$$\omega_1 = C_N^{mn} = \frac{N!}{(mn)!(N - mn)!} \quad (5)$$

В одном кластере размещается  $m$  атомов. Число вариантов таких размещений равно  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = C_{mn}^m = \frac{(mn)!}{m!(mn - m)!} \quad (6)$$

Образовавшиеся  $n$  кластеров могут создавать различные конфигурации в объеме (единичном). Число таких состояний:

$$\omega_3 = P_n = n!. \quad (7)$$

Число вариантов размещения атомов в кластере равно:

$$\omega_4 = P_m = m!. \quad (8)$$

Подставим (5–8) в (4):

$$\Omega = \frac{N!n!}{(N - mn)!(mn - m)!}. \quad (9)$$

Следовательно, энтропия:

$$S = k \ln \left( \frac{N!n!}{(N - mn)!(mn - m)!} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим  $\ln(M!)$  при условии  $M \gg 1$ . В этом случае применима формула Стирлинга:

$$\ln(M!) = M(\ln M - 1). \quad (11)$$

Условие (10) с учетом (11) примет вид:

$$S = k \{ N(\ln N - 1) + n(\ln n - 1) - (N - mn)(\ln(N - nm) - 1) - (mn - m)(\ln(mn - m) - 1) \} \quad (12)$$

Внутренняя энергия системы определяется суммой кинетических  $K$  и потенциальных ( $P$ ) энергий атомов

$$E = K + P. \quad (13)$$

Так как кинетическая энергия атома в кластерном расплаве равна  $3kT$ , то:

$$K = 3NkT. \quad (14)$$

Потенциальная энергия определяется потенциалом парного взаимодействия между атомами в кластере ( $U_0$ ), потому что для атомов, находящихся в некластерном состоянии, кинетическая энергия превышает потенциал взаимодействия. Кроме того, учтем, что потенциал взаимодействия имеет знаки «минус». Т.е. при использовании модуля  $U_0$  формула (13) примет вид [2]:

$$E = 3Nkt - \frac{1}{2}mnU_0. \quad (15)$$

Формула (2) с учетом (12-15) примет вид:

$$F = 3NkT - \frac{mn}{2}U_0 - kT\{N(\ln N - 1) + n(\ln n - 1) - (N - mn)(\ln(N - mn) - 1) - (mn - m)(\ln(mn - m) - 1)\} \quad (16)$$

Введем обозначения для слагаемых, не зависящих от  $m, n$ :  $A = 3NkT$ ,  $B = \frac{1}{2}U_0$ ,

$C = N(N - 1)$ . В этом случае формула (3) примет вид:

$$F = A - mnB - kT[C + n(\ln n - 1) - (N - mn)(\ln(N - mn) - 1) - (mn - n)(\ln(mn - n) - 1)] \quad (17)$$

При фиксированной температуре равновесие системы достигается вследствие вариации параметров  $(m, n)$ . Следовательно, для равновесного расплава выполняется соотношение (при  $T = const$ ):

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -Bm - kT\{\ln n + m \ln(N - mn) - (m - 1)\ln(mn - n)\} = 0. \quad (19)$$

Так как  $m \gg 1$  и  $m \gg \ln n$ , то (19) можно представить в виде

$$-\frac{1}{kT}B - \ln(N - mn) + \ln mn \approx 0. \quad (20)$$

Поскольку:  $\ln(N - mn) - \ln mn = \ln \frac{N - mn}{mn} = \ln \frac{1 - q}{q}$ , где  $q$  введено (1) и определяет степень кластеризации расплава. Тогда условие (20) примет вид:

$$-\frac{B}{kT} = \ln \frac{1 - q}{q}. \quad (21)$$

С другой стороны,  $\frac{\partial F}{\partial m} = -\frac{Bn}{kT} - n \ln(N - mn) + n \ln(mn - n) = 0$ . С учетом  $(mn - n) = n(m - 1) \approx mn$ :

$$-\frac{B}{kT} = \ln \frac{N - mn}{mn} = \ln \frac{1 - q}{q}. \quad (22)$$

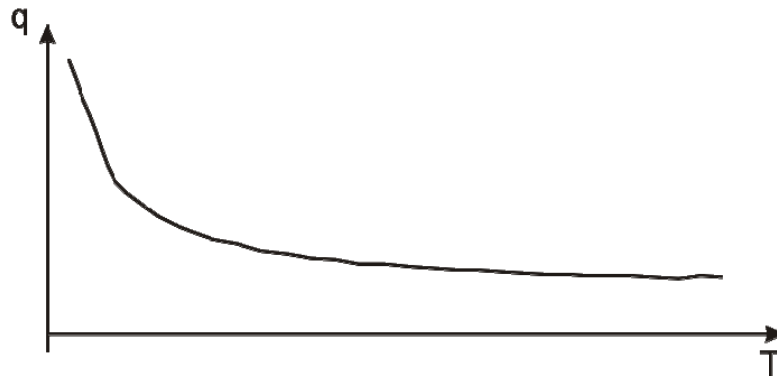
Полученная формула полностью совпадает с выражением (21). Это говорит о непротиворечивости рассматриваемой статистической модели кластеризации.

Итак, связь между степенью кластеризации  $q$ , энергией межатомного взаимодействия и температурой расплава имеет вид

$$\frac{1 - q}{q} = \exp\left(-\frac{U_0}{2kT}\right), \quad (23)$$

или 
$$q = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{U_0}{2kT}\right)}. \quad (24)$$

Из этой формулы следует, что наибольшая степень кластеризации наблюдается при  $T$  близких к  $T_c$ , а наименьшее при  $T \approx T_v$ . Изменения  $q = q(T)$  носят монотонный характер и схемы изменений указанной функции приведена на рисунке 2.

Рисунок 2. – Схема функции  $q(T)$ 

Из рисунка 2 следует, что эта функция является монотонно убывающей с ростом температуры. В работе [3] на основе несколько иной модели описания потенциала межатомного взаимодействия была получена аналогичная зависимость, из которой следовало, что  $q(T_V)$ . Однако кластеры могут существовать не только в расплавах с температурами, близкими к точке кипения, но и в газовой среде [4]. Так как в кластерах атомы находятся в состоянии плотнейшей упаковки, причем степень кластеризации уменьшается с ростом температуры, то становится понятным, почему можно получить квазикристаллы при резком неполном охлаждении. Кластеризация металлических расплавов, как и других кластерных жидкостей (например, воды), приводит к возникновению поликристаллических систем. Монокристаллы этих объектов с размерами порядка  $10^{-2}$   $\mu\text{m}$  получить очень трудно [5].

### Заключение

Предложенная статистическая модель расчета изменения степени кластеризации ( $q$ ) может быть использована для анализа любых кластерных жидкостей. Модель позволяет найти максимальное и минимальное значения  $q$ , выбрать наиболее оптимальную температуру расплава для получения объектов методом резкого охлаждения и объясняет, почему при таких методах можно получить квазикристаллические объекты.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исихара, А. Статистическая физика / А. Исихара : пер. с англ. под ред. Д. Н. Зубарева, А. Г. Башкирова. – М. : Мир, 1973. – 472 с.
2. Гей, С. Л. Особенности процесса кристаллизации расплавов металлов / С. Л. Гей [и др.] // Весн. ГрДУ. Сер. 6. Тэхніка. – 2012. – № 2 (133). – С. 36–43.
3. Войтович, А. П. Диффузия радиационных дефектов в кристаллах и нанокристаллах фторида лития / А. П. Войтович // ФТТ–2011: Актуальные проблемы физики твердого тела : материалы конф., Минск, 18–21 окт. 2011 г. – Минск, 2011. – С. 15.
4. Сидоров, Л. Н. Газовые кластеры и фуллерены / Л. Н. Сидоров // Соросовский образовательный журнал. – 1988. – № 3. – С. 65–71.
5. Шульце, Г. Металлофизика / Г. Шульце. – М. : Мир, 1971. – 503 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.03.2015

### *Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sitkevich A.L., Sekezhitsky S.S., Nikitin A.V. The Crystallization of Cluster Liquids (Statistical Model)*

*Cluster system called liquid (gas) in which there are areas (clusters) with the atomic and molecular symmetry with the interposition of a significantly higher than average volume. The ratio of the number of atoms in the clusters to the total number of atoms is called the degree of clustering. Was considered the degree of clustering of the temperature of the melt and the interatomic interaction potential.*

УДК 539.12:530.145

**В.А. Плетюхов***д-р физ.-мат. наук, профессор каф. теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина***ОБ ОПИСАНИИ СТРУН  
НА ОСНОВЕ БЕЗМАССОВОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА – КЭЛЛЕРА**

*Даны тензорная и матричная формулировки релятивистского волнового уравнения, обеспечивающего совместное описание электромагнитного поля (фотона) и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью (нотифа). Показано, что данное уравнение является частным случаем системы уравнений Дирака – Кэллера. Этот результат открывает новые возможности применения поля Дирака – Кэллера в теории струн.*

**1. Введение**

Как известно (например, [1]), в теории струн рассматриваются два типа струн: открытые и замкнутые. Взаимодействие замкнутых струн осуществляется посредством безмассового поля с нулевой спиральностью. Концы открытых струн представляют собой точечные электрические заряды противоположного знака (полюса). Следовательно, взаимодействие открытых струн должно осуществляться посредством скалярного и векторного полей, последнее из которых отождествляется с обычным электромагнитным полем. А поскольку струна является единым физическим объектом, создаваемые ею поля должны описываться совместно, т.е. на основе не распадающейся по группе Лоренца системе уравнений.

В настоящей работе исследуется возможный способ такого описания в пространстве размерности  $d = 4$ .

**2. Тензорная формулировка**

Простейшим претендентом на феноменологическое описание объединенного поля открытой струны в четырехмерном пространстве может служить следующая система тензорных уравнений первого порядка:

$$\partial_{\mu}\varphi_{\mu} + \varphi_0 = 0, \quad (1)$$

$$\partial_{\nu}\varphi_{[\mu\nu]} + \partial_{\mu}\varphi_0 = j_{\mu}, \quad (2)$$

$$-\partial_{\mu}\varphi_{\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\mu} + \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (3)$$

где скалярная  $\varphi_0$  и векторная  $\varphi_{\mu}$  функции являются потенциалами поля; антисимметричный тензор второго ранга  $\varphi_{[\mu\nu]}$  – напряжённость;  $j_{\mu}$  – вектор плотности тока, соответствующего концам струны.

Очевидно, что систему (1)–(3) можно трактовать как десятимерную формулировку уравнений Максвелла, дополненную скалярной функцией  $\varphi_0$  и, соответственно, уравнением (1), которое имеет здесь смысл условия калибровки Фейнмана, содержащегося непосредственно в самой системе.

Поддействуем на уравнение (2) оператором  $\partial_{\mu}$ . Учитывая антисимметрию тензора  $\varphi_{[\mu\nu]}$ , получим уравнение второго порядка для скалярной функции

$$\square\varphi_0 = \partial_{\mu}j_{\mu}. \quad (4)$$



Однако поскольку ток, создаваемый движением точечных зарядов, сохраняется ( $\partial_\mu j_\mu = 0$ ), уравнение (4) принимает вид

$$\square \varphi_0 = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что поле  $\varphi_0$  не «чувствует» источника  $j_\mu$ , не зависит от него. Поэтому для описания электромагнитного взаимодействия точечных зарядов присутствие функции  $\varphi_0$  в системе (1)–(3) является излишним.

Данный вывод находится в соответствии с результатами работы [2], где на вторично-квантованном уровне показано, что функция  $\varphi_0$  в свободной (в отсутствие источников) системе (1)–(3) играет роль калибровочной функции и физического поля не описывает.

Если же иметь в виду струну, то ситуация становится существенно иной. В случае взаимодействия открытых струн мы имеем два типа источников [1]: векторный  $j_\mu$  и тензорный  $j_{[\mu\nu]}$ , создаваемый телом струны (body string). При этом между ними существует связь [1]

$$j_\nu = \partial_\mu j_{[\mu\nu]}, \quad (6)$$

и ток  $j_{[\mu\nu]}$ , как следует из (6), вообще говоря, не сохраняется:

$$\partial_\mu j_{[\mu\nu]} \neq 0, \text{ если } j_\nu \neq 0. \quad (7)$$

В случае же замкнутых струн

$$j_\nu = 0, \quad \partial_\mu j_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8)$$

Для того, чтобы струны в уравнениях (1)–(3) стали реальностью, необходимо ввести в эти уравнения источник  $j_{[\mu\nu]}$ . Но при этом возникает затруднение, связанное с тем, что поле  $\varphi_0$  является скалярным, а источник  $j_{[\mu\nu]}$  – тензорным.

Решение данной проблемы мы найдём, если обратимся к работе сорокалетней давности Огиевецкого и Полубаринова [3]. В этой работе было показано, что безмассовое поле со спиральностью 0 может описываться тензор-потенциалом  $\psi_{[\mu\nu]}$ . Не приводя явного вида уравнений, которым подчиняется  $\psi_{[\mu\nu]}$ , отметим главное: из шести компонент квантованного поля  $\psi_{[\mu\nu]}$  независимой остаётся лишь одна, например,  $\psi_{[12]}$ . Квант этого поля был назван в [3] нотофом. Физических приложений для нотофа в то время найдено не было. Впоследствии поле нотофа получило в литературе название поля Кальба – Рамонда, так как было «переоткрыто» в иной формулировке и иной связи в работе [1].

Таким образом, между описаниями безмассового поля со спиральностью 0 посредством скалярной функции  $\varphi_0$  и тензор-потенциалом  $\psi_{[\mu\nu]}$  существует определённый дуализм. Отсюда напрашивается идея перейти от системы (1)–(3) к дуально сопряжённой системе, в которой роль скалярного поля будет выполнять тензор-потенциал  $\psi_{[\mu\nu]}$ . Такую систему для случая отсутствия источников можно получить, если в тензорной формулировке обобщённого уравнения Дирака – Кэлера [4]

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + p \psi_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \beta \left( \partial_\mu \psi_{[\nu\alpha\beta]} - \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\beta\mu\nu]} - \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta\mu]} \right) + q \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0, \\ & \gamma^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + r \psi_\mu = 0, \\ & \delta \left( \partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} \right) + \beta^* \partial_\beta \psi_{[\beta\mu\nu\alpha]} + s \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \\ & \gamma \left( -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu \right) + \delta^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_{[\mu\nu]} = 0 \end{aligned}$$

выбрать параметры

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = r = s = 1, \quad p = q = m = 0.$$

В результате имеем уравнения

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (9)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha\beta]} - \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\beta\mu\nu]} - \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta\mu]} = 0, \quad (10)$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + \psi_\mu = 0, \quad (11)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \partial_\beta \psi_{[\beta\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (12)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (13)$$

Будем рассматривать функции  $\psi_\mu$  и  $\psi_{[\mu\nu]}$  здесь в качестве потенциалов, а  $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$  как напряжённость.

Важно отметить, что система (9)–(13) исследовалась в ряде других работ (например, [5; 6]), но не в связи с описанием струн, поскольку вектор  $\psi_\mu$  в этих работах рассматривался как напряжённость. Предлагаемая нами трактовка величин  $\psi_\mu$  в качестве потенциалов имеет принципиальное значение, если мы хотим описывать с помощью (9)–(13) именно струны. В данной трактовке потенциал  $\psi_\mu$  описывает поле полюсов открытой струны, а  $\psi_{[\mu\nu]}$  – поле, создаваемое телом струны.

Выясним теперь смысл скалярной функции  $\psi_0$  в системе (9)–(13). Нетрудно убедиться, что данная система, как и напряжённость  $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ , остаётся инвариантной относительно калибровочных преобразований

$$\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (14)$$

$$\psi_0 \rightarrow \psi_0 - \Lambda(x), \quad (15)$$

где калибровочная функция  $\Lambda(x)$  удовлетворяет свободному уравнению Даламбера

$$\square \Lambda(x) = 0. \quad (16)$$

Действуя на уравнение (11) оператором  $\partial_\mu$  и учитывая (9), получим, что функция  $\psi_0$  удовлетворяет аналогичному уравнению

$$\square \psi_0 = 0. \quad (17)$$

Введение источников  $j_\mu$ ,  $j_{[\mu\nu]}$  в систему (9)–(13) не влияет на эти результаты. Следовательно, не уменьшая общности, можно рассматривать функцию  $\psi_0$  как калибровочную и выбрать

$$\psi_0 = 0. \quad (18)$$

При выборе калибровки (18) система (9)–(13) с учётом наличия источников принимает вид:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \quad (19)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha\beta]} - \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\beta\mu\nu]} - \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta\mu]} = 0, \quad (20)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\mu\alpha]} + \partial_\beta \psi_{[\beta\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (21)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \quad (22)$$

Уравнение (9) исчезло из системы (19)–(22), поскольку оно автоматически вытекает из уравнения (19).

Выражая из уравнения (21) тензор  $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$  и подставляя его в (20), получаем уравнение второго порядка

$$\partial_\mu \partial_\eta \psi_{[\eta\nu\alpha\beta]} - \partial_\beta \partial_\eta \psi_{[\eta\mu\nu\alpha]} + \partial_\alpha \partial_\eta \psi_{[\eta\beta\mu\nu]} - \partial_\nu \partial_\eta \psi_{[\eta\alpha\beta\mu]} = 0,$$

эквивалентное уравнению Даламбера

$$\square \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) показывает, что поле  $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$  не реагирует на наличие источников струнного типа. Следовательно, если ограничиться рассмотрением только струн, то поле  $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$  также можно исключить из системы (19)–(22). Вместе с ним исключается уравнение (20), автоматически вытекающее из (21) при условии

$$\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0. \quad (24)$$

В результате получаем систему уравнений

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \quad (25)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (26)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \quad (27)$$

Система (25)–(27) не распадается в смысле группы Лоренца. Уравнение (27) здесь трактуется как уравнение движения; (26) – выражение для напряжённости  $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$  через потенциалы  $\psi_{[\mu\nu]}$ ; уравнение (25) устанавливает связь между потенциалами  $\psi_{[\mu\nu]}$  и  $\psi_\mu$ , т.е. выступает как своего рода условие калибровки, включенное на равных в исходную систему уравнений.

Здесь необходимо сделать следующие два замечания.

Во-первых, в системе (25)–(27) отсутствует в явном виде составляющая напряжённости поля открытой струны, которая соответствует полюсам струны. Её можно ввести посредством обозначения

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu. \quad (28)$$

В этом случае уравнение (27) принимает вид

$$-F_{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]} \quad (29)$$

и содержит только наблюдаемые величины (напряжённости и ток), как и должно быть в уравнении движения.

Во-вторых, в (25)–(27) не фигурирует явно ток  $j_\mu$ , соответствующий полюсам. Он появляется при переходе к уравнениям второго порядка. Действуя на уравнение (26) оператором  $\partial_\alpha$  и подставляя полученное таким образом выражение для производной  $\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]}$  через потенциалы  $\Psi_{[\mu\nu]}$  в уравнение (27), получим

$$\square \Psi_{[\mu\nu]} = -j_{[\mu\nu]}. \quad (30)$$

Аналогично, действуя на уравнение (27) оператором  $\partial_\nu$ , с учётом соотношения  $\partial_\mu \Psi_\mu = 0$ , вытекающего из (25), и определения (6), будем иметь

$$\square \Psi_\mu = -j_\mu. \quad (31)$$

Рассмотрим частные случаи системы (25)–(27). Для замкнутой струны имеем  $\Psi_\mu = 0$ . В результате находим:

$$\partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]} + \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (32)$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \quad (33)$$

Уравнение

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (34)$$

вытекающее из (25) при  $\Psi_\mu = 0$ , приобретает статус условия калибровки, связанного с инвариантностью системы (32), (33) относительно калибровочных преобразований

$$\Psi_{[\mu\nu]} \rightarrow \Psi_{[\mu\nu]} - \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (35)$$

и поэтому не включается в систему (32), (33) в качестве независимого уравнения.

Наконец, если в (25)–(27) отбросить тензор-потенциал  $\Psi_{[\mu\nu]}$  и, соответственно, напряжённость  $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$ , то останется уравнение

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]},$$

которое после свёртки с оператором  $\partial_\nu$ , с учётом обозначения (28) принимает вид

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = j_\mu. \quad (36)$$

Совместно с (28), рассматриваемым уже как уравнение, (36) образует обычную десятимерную формулировку уравнений Максвелла, как и должно быть.

Выпишем ещё лагранжиан системы (25)–(27):

$$L = -\frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu) - \frac{1}{2} \Psi_\mu^2 - \frac{1}{6} \Psi_{[\mu\nu\alpha]} (\partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]}) - \frac{1}{12} \Psi_{[\mu\nu\alpha]}^2 - \Psi_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]}. \quad (37)$$

### 3. Матричная формулировка

Любая линейная система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами может быть представлена в матричной форме. Сказанное относится и к системам уравнений, описывающим элементарные частицы. В работах [7; 8] показано, что свободные безмассовые частицы (поля) описываются универсальной формой

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_0) \psi_{(x)} = 0, \quad (38)$$

где  $\gamma_\mu, \gamma_0$  – квадратные матрицы ( $\det \gamma_0 = 0$ );  $\psi(x)$  – многокомпонентная волновая функция, преобразующаяся по некоторому приводимому представлению группы Лоренца. Матричная форма удобна, в частности, при исследовании спиновых свойств (спиральности) частиц.

Для того, чтобы представить систему (25)–(27) в виде (38), перепишем её предварительно следующим образом:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \quad (40)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0 \quad (41)$$

(ограничимся случаем отсутствия источников). Здесь

$$\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]} - \quad (42)$$

аксиальный вектор, дуальный тензору  $\psi_{[\nu\alpha\beta]}$ ;  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  – тензор Леви-Чивита ( $\varepsilon_{1234} = -i$ ).

В тензорном базисе

$$\psi = (\psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}) - \text{столбец} \quad (43)$$

матрицы  $\gamma_\mu, \gamma_0$  системы (39)–(41), записанной в форме (38), имеют вид

$$\gamma_\mu = e^{[\nu\mu]} + e^{[\nu\mu]\nu} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} (e^{\tilde{\nu}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\nu}}), \quad (44)$$

$$\gamma_0 = e^{\nu\nu} + e^{\tilde{\nu}\tilde{\nu}}, \quad (45)$$

где  $e^{AB}$  – элементы полной матричной алгебры [9];  $A, B = \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$  – собирательные индексы, пробегающие значения от 1 до 14.

Для установления спиновой структуры релятивистского волнового уравнения (РВУ) с волновой функцией (43) и матрицами  $\gamma_\mu$  (44),  $\gamma_0$  (45) перейдём в канонический базис [10]. Схема зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца, на которой базируется рассматриваемое РВУ, такова:

$$\begin{array}{ccc} & \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (0, 1) & & (1, 0) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)' & \end{array} \quad (46)$$

В схеме (46) представления  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)', (0,1) \oplus (1,0)$  отвечают вектору  $\psi_\mu$ , псевдовектору  $\tilde{\psi}_\mu$  и антисимметричному тензору  $\psi_{[\mu\nu]}$ . В каноническом базисе для матрицы  $\gamma_4$ , играющей основную роль в РВУ (38), будем иметь выражение

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & \\ & C^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где  $C^0$  и  $C^1$  – спиновые блоки, соответствующие спинам 0 и 1:

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{14}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & c_{24}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ c_{41}^1 & c_{42}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Налагая на элементы  $c_{ij}^1$  блока  $C^1$  ограничения, вытекающие из требований инвариантности уравнения относительно преобразований полной группы Лоренца и возможности лагранжевой формулировки теории, получим

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Из (49) следует, что безмассовое поле, описываемое РВУ (38), (43)–(49), переносит спин 1. При этом собственные значения  $\pm 1$  блока  $C^1$  двукратно вырождены. Проективная матрица  $\gamma_0$  (45) обеспечивает «вырезание» трёх из шести максимально возможных здесь состояний со спином 1, оставляя в совокупности три степени свободы: две на фотон ( $s = \pm 1$ ) и одну на нотоф ( $s = 0$ ). Нераспадение теории по группе Лоренца означает, что речь здесь идёт не просто о совместном описании соответствующих полей (электромагнитного и поля Кальба – Рамонда), а о едином безмассовом поле с возможными значениями спиральности  $0, \pm 1$ , посредством которого реализуется взаимодействие открытых струн. Важно подчеркнуть, что во взаимодействиях это поле переносит спин 1 [3].

#### 4. Заключение

В работах [5; 6] было установлено, что безмассовые бозонные пределы уравнения Дирака – Кэлера содержат в себе в качестве частных случаев теорию электромагнитного поля (фотона), т.е. безмассового векторного поля со спиральностью  $\pm 1$ , и поля Кальба – Рамонда (нотифа) – безмассового поля со спиральностью 0, но переносящего во взаимодействиях спин 1. В настоящей работе показано, что данное уравнение позволяет описывать указанные поля совместно, трактуя их как единый физический объект (аналогично тому, как электромагнитная волна объединяет электрическую и магнитную составляющие). С точки зрения физических приложений указанное поле может

претендовать на роль переносчика взаимодействия открытых струн применительно к пространству размерности  $d = 4$ .

Однако окончательные выводы относительно физического содержания системы уравнений (25)–(27) можно будет сделать после осуществления процедуры вторичного квантования, над чем в настоящее время работает автор.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – Vol. D9, № 8. – P. 2273–2284.
2. Плетюхов, В. А. О квантовании одной системы уравнений максвелловского типа / В. А. Плетюхов, П. П. Андрусевич // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2008. – № 1. – С. 50–54.
3. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. И. Полубарин // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 216–223.
4. Feshbach, H. A wave equation for a particle of maximum spin one / H. Feshbach, W. Nichols // Annals of physics. – 1958. – Vol. 4. – P. 448–458.
5. Pletyukhov, V. A. Quantization of massless fields of the Dirac – Kähler type / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev / Nonlinear dynamics and Applications: Proceeding of the Fifteenth annual seminar NPCPS, Minsk, 22–23 may, 2008 / Minsk : BSU. – 2008. – Vol. 15. – P. 133–141.
6. Pletyukhov, V. A. Dirac – Kähler theory and massless fields / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // AIP conference proceeding. – 2010. – Vol. 1205. – P. 120–126 (Italy). Conference in honour of Y. B. Zeldovich, April 20–23, 2009, Minsk.
7. Фёдоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Фёдоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
8. Богуш, А. А. Введение в теорию классических полей / А. А. Богуш, Л. Г. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 388 с.
9. Богуш, А. А. Обобщённые символы Кронекера / А. А. Богуш, Ф. И. Фёдоров // Доклады АН БССР. – 1968. – Т. 12, № 1. – С. 21–24.
10. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.02.2015

#### ***Pletyukhov V.A. On Description of the Strings by a Massless Dirac – Kähler Equation***

*Tensor and matrix formulations of the relativistic wave equation providing description both an electromagnetic field (photon) and a massless Kalb – Ramond field with the zero helicity (notoph) are given. It is shown that this equation is a particular case of the Dirac – Kähler system. It opens new possibilities for applications of the Dirac–Kähler field in the string theory.*

УДК 524.354.6-33

**В.С. Секержицкий<sup>1</sup>, В.В. Герман<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант физико-математического фак-та  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ЗАПАСЫ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГИИ  
В ЭЛЕКТРОННО-НЕЙТРОННО-ЯДЕРНОМ  
СИЛЬНО ЗАМАГНИЧЕННОМ ВЕЩЕСТВЕ**

*Рассчитаны равновесные термодинамические и ядерные параметры холодного сверхплотного электронно-нейтронно-ядерного вещества при наличии сверхсильного магнитного поля. Исследовано влияние сверхсильного магнитного поля на параметры, соответствующие границам электронно-нейтронно-ядерной фазы такого вещества. Показано, что в сильном магнитном поле возможно увеличение энергетического выхода процессов перехода от относительно к абсолютно равновесному состоянию холодного электронно-нейтронно-ядерного вещества.*

1. Согласно существующим представлениям, при плотностях, меньших ядерной плотности и характерных для оболочек нейтронных звезд и недр белых карликов, должны быть условия для реализации электронно-ядерной ( $Ae$ ), электронно-нейтронно-ядерной ( $Aen$ ) или электронно-нуклонной ( $enp$ ) фаз сверхплотного крайне вырожденного вещества [1]. В любой из перечисленных фаз одним из компонентов вещества является газ свободных электронов, который при плотностях  $\rho > 10^6$  г/см<sup>3</sup> является релятивистским; при этом температура его вырождения превышает  $10^{10}$  К, что значительно больше предполагаемых температур в недрах указанных астрофизических объектов. В веществе, находящемся в  $Aen$ - и  $enp$ -фазах, имеются свободные нерелятивистские нейтроны, а в  $enp$ -фазе еще и свободные нерелятивистские протоны. Известно, что сверхплотное вещество может находиться в относительно и абсолютно устойчивых состояниях термодинамического равновесия по отношению к бета-процессам и пикно-ядерным реакциям [1]. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества.

В настоящей работе мы проведем вычисление равновесных параметров  $Aen$ -фазы замагниченного вещества и проведем оценку влияния магнитного поля на энергетический выход процесса перехода вещества от относительно к абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия. Следует заметить, что в [2] ставится под сомнение сама возможность существования  $Aen$ -фазы вещества из-за альтернативного нейтронизации процесса пионизации ядер. Проведенные нами исследования (например, [3]) дают, однако, основание полагать, что сверхсильные магнитные поля подавляют процесс пионизации более интенсивно, чем процесс нейтронизации, приводящий к образованию  $Aen$ -фазы, и поставленная в настоящей работе задача вполне корректна и актуальна.

При численных расчетах и оценках не будет учитываться зависимость величины магнитного момента нейтрона от индукции магнитного поля; не будет учитываться также малая величина аномального магнитного момента электрона.

2. Представим энергию электронно-нейтронно-ядерного вещества в виде суммы энергий ядер, электронов и свободных нейтронов:



$$E = E_A + E_e + E_n ; \quad (1)$$

при этом мы пренебрегаем кинетической энергией ядер и считаем, что электроны образуют крайне вырожденный идеальный газ. Числа частиц компонентов вещества связаны соотношением:

$$N = N_n + AN_A = N_n + \frac{A}{Z} N_e, \quad (2)$$

где  $N, N_A, N_n, N_e$  – соответственно числа всех нуклонов, ядер, свободных нейтронов и электронов в объеме  $V$  рассматриваемой электронейтральной среды,  $A$  и  $Z$  – массовое и зарядовое числа ядра. Концентрация всех нуклонов связана с концентрациями компонентов среды и ядерными параметрами соотношением:

$$n = n_n \frac{n_0 - n}{n_0 - n_n} + n_e \frac{A}{Z}, \quad (3)$$

где  $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$  – концентрация нуклонов в ядре.

Энергию покоя ядра будем вычислять с помощью модифицированной следующим образом формулы Бете – Вайцзеккера:

$$Mc^2 = (A - Z)m_n c^2 + Zm_p c^2 + W, \quad (4)$$

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{3n_A^{1/3}}{2n_0^{1/3}}\right) + c_3 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + c_4 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^4 + c_5 B^2 Z A^{2/3}. \quad (5)$$

Здесь  $m_n$  и  $m_p$  – массы нейтрона и протона,  $W$  – энергия связи ядра,  $B$  – индукция магнитного поля;  $c_0 = 15,75 \text{ МэВ}$ ,  $c_1 = 17,8 \text{ МэВ}$ ,  $c_2 = 0,71 \text{ МэВ}$ ,  $c_3 = 23,7 \text{ МэВ}$  (значения взяты из [1]),  $c_4 = 7,7 \text{ МэВ}$  [4],  $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38} \text{ МэВ/Гс}^2$  [5]. Заметим, что в [6] при решении аналогичной задачи при  $B = 0$  с использованием модели невзаимодействующих свободных нейтронов берется  $c_4 = c_3/27 \approx 0,878 \text{ МэВ}$ . Поправка в третьем слагаемом (5) связана с учетом кулоновского взаимодействия протонов ядра с окружающими ядрами (так называемая «кулоновская энергия решетки» [7]).

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме  $V$  равны [4]

$$E_n = w_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n = n_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (6)$$

где (например, [8], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы)

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (7)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left( (\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} \right), \quad (8)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{Я} = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} n_n^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad (10)$$

$n_n$  и  $P_n$  – концентрация и давление свободных нейтронов,  $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$  – их химический потенциал,  $\mu_n$  – ядерный магнетон,  $\sigma_n = 1,913$ .

Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [9]:

$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2 m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (11)$$

где  $n_e, P_e, \chi_e$  – концентрация, давление и химический потенциал электронов,  $m_e$  – масса электрона,  $\mu_B$  – магнетон Бора.

Относительно и абсолютно устойчивым состояниям термодинамического равновесия соответствуют минимумы энергии среды  $E$  относительно независимых параметров при фиксированных  $N$  и  $B$ :

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, имеем системы уравнений, которые позволяют выразить химические потенциалы электронного и нейтронного газов в относительно устойчивом состоянии:

$$\chi_e = \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = m_n c^2 - m_p c^2 + 4c_3 - \frac{2Z}{A} (4c_3 + c_2 A^{2/3} (2J - 1)) + 8c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 - c_5 B^2 A^{2/3}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{\partial w_n}{\partial n_n}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \left( \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} = \\ &= m_n c^2 + c_3 - c_0 - \frac{Z^2}{A^2} \left( 4c_3 + c_2 A^{2/3} \frac{4J - 1}{3} \right) + c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 \left(1 + \frac{6Z}{A}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

а в абсолютно устойчивом состоянии позволяют установить однозначное соответствие между массовым числом  $A$  и зарядовым числом  $Z$  наиболее устойчивого ядра при фиксированном значении индукции магнитного поля  $B$ :

$$Z = \sqrt{\frac{c_1 A}{2c_2 J} + \frac{c_5^2 B^4 A^2}{4c_2^2 J^2}} - \frac{c_5 B^2 A}{2c_2 J}, \quad J = 1 - \frac{3n_A^{1/3}}{4n_0^{1/3}}. \quad (15)$$

Полученные соотношения дают возможность, задавая значения  $B$  и  $n = N/V$  (или значение массовой плотности  $\rho \approx m_n n$  вместо концентрации нуклонов  $n$ ), вычислять равновесные термодинамические и ядерные параметры электронно-нейтронно-ядерного и электронно-ядерного замагниченного вещества (в последнем случае применимы все приведенные выше формулы при условии  $n_n = 0$ ). Порог развала ядер и образования сплошной ядерной материи (электронно-нуклонной *enp*-фазы) можно оценить из условия равенства нулю энергии связи ядра.

Численные оценки показывают, что в сверхсильном магнитном поле границы электронно-нейтронно-ядерной фазы относительно и абсолютно равновесного вещества смещаются в сторону более высоких плотностей, и заметно изменяются пороговые значения термодинамических и ядерных параметров вещества. В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчетов значений массового числа  $A$  наиболее устойчивого ядра, зарядового числа  $Z$ , модуля удельной энергии связи ядра  $b$ , химического потенциала

Таблица 1. – Параметры абсолютно равновесного вещества у нижнего порога  $Aen$ -фазы

Параметры	$B = 0$	$B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 6 \cdot 10^{17}$ Гс
$A$	112	110	105	97
$Z$	37	37	36	33
$b$ , МэВ	7,53	7,52	7,49	7,44
$\chi_e$ , МэВ	23,8	23,7	23,4	23,0
$n_e$ , см <sup>-3</sup>	$5,9 \cdot 10^{34}$	$1,8 \cdot 10^{35}$	$3,6 \cdot 10^{35}$	$5,4 \cdot 10^{35}$
$w_e$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$1,1 \cdot 10^{36}$	$2,2 \cdot 10^{36}$	$4,1 \cdot 10^{36}$	$5,7 \cdot 10^{36}$
$P_e$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$3,5 \cdot 10^{36}$	$2,2 \cdot 10^{36}$	$4,1 \cdot 10^{36}$	$5,7 \cdot 10^{36}$
$n$ , см <sup>-3</sup>	$1,8 \cdot 10^{35}$	$5,5 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,5 \cdot 10^{36}$
$w$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$1,7 \cdot 10^{38}$	$5,1 \cdot 10^{38}$	$1,0 \cdot 10^{39}$	$1,4 \cdot 10^{39}$
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$2,9 \cdot 10^{11}$	$9,2 \cdot 10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{12}$	$2,6 \cdot 10^{12}$

Таблица 2. – Параметры абсолютно равновесного вещества у верхнего порога  $Aen$ -фазы

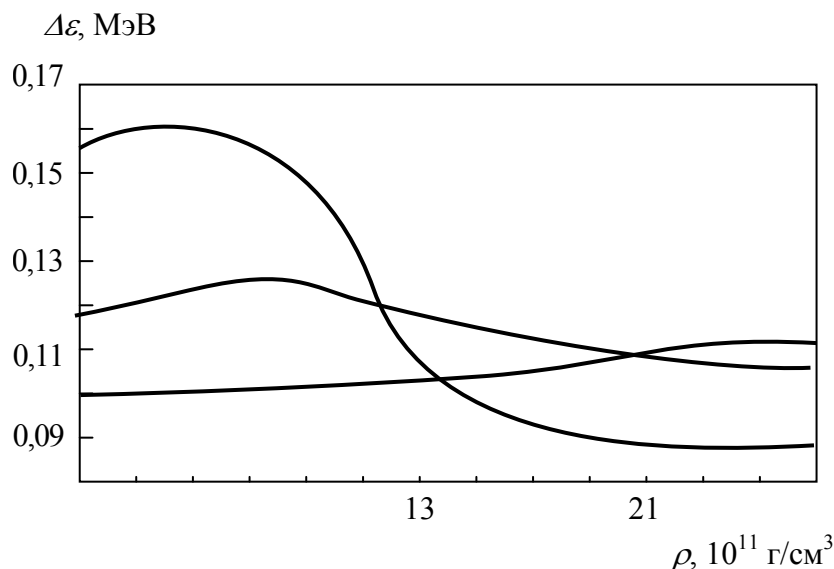
Параметры	$B = 0$	$B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B = 6 \cdot 10^{17}$ Гс
$A$	469	456	421	372
$Z$	77	75	69	62
$\chi_e$ , МэВ	69,9	69,7	69,5	69,1
$n_e$ , см <sup>-3</sup>	$1,5 \cdot 10^{36}$	$5,4 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,6 \cdot 10^{36}$
$w_e$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$7,8 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
$P_e$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$2,6 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
$n_n$ , см <sup>-3</sup>	$2,9 \cdot 10^{37}$	$2,9 \cdot 10^{37}$	$3,0 \cdot 10^{37}$	$3,1 \cdot 10^{37}$
$w_n$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$2,7 \cdot 10^{40}$	$2,8 \cdot 10^{40}$	$2,8 \cdot 10^{40}$	$2,9 \cdot 10^{40}$
$P_n$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$2,2 \cdot 10^{38}$	$2,2 \cdot 10^{38}$	$2,3 \cdot 10^{38}$	$2,5 \cdot 10^{38}$
$n$ , см <sup>-3</sup>	$3,6 \cdot 10^{37}$	$3,2 \cdot 10^{37}$	$3,5 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$
$w$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$3,6 \cdot 10^{40}$	$3,1 \cdot 10^{40}$	$3,5 \cdot 10^{40}$	$3,9 \cdot 10^{40}$
$P$ , МэВ/см <sup>3</sup>	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,7 \cdot 10^{38}$	$3,1 \cdot 10^{38}$
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$6,0 \cdot 10^{13}$	$5,3 \cdot 10^{13}$	$5,9 \cdot 10^{13}$	$6,4 \cdot 10^{13}$

электронов  $\chi_e$ , концентраций  $n_e$ ,  $n_n$ ,  $n$  соответственно электронов, свободных нейтронов и всех нуклонов вещества, давлений  $P_e$ ,  $P_n$  и  $P$ , плотностей энергии  $w_e$ ,  $w_n$  и  $w$ , массовой плотности  $\rho$  для фиксированных значений индукции магнитного поля  $B$ . Заметим, что учет кулоновского взаимодействия мало влияет на значения равновесных параметров электронно-нейтронно-ядерного вещества.

3. Приведенные выше соотношения позволяют оценить влияние сверхсильного магнитного поля на запасы ядерной энергии в холодном сверхплотном веществе, выделяемой в процессе перехода от относительно к абсолютно устойчивому состоянию.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов величины  $\Delta\varepsilon = (w_{\text{отн}} - w_{\text{абс}}) / n$  в зависимости от плотности вещества  $\rho$  при  $B = 0$  и  $B = \text{const} > B^{(e)}$ , где  $B^{(e)}$  – нижняя граница сверхсильного магнитного поля для ультрарелятивистских электронов,  $w_{\text{отн}}$  и  $w_{\text{абс}}$  – плотности энергии среды соответственно в относительно и абсолютно устойчивых состояниях. При этом рассматриваются значения массовой плотности в окрестностях порога перехода фаз  $Ae \rightarrow Aen$ . Выбранный диапазон плотностей сравнительно невелик, что позволяет пренебречь имеющейся в реальных астрофизических объектах возможностью изменения индукции магнитного поля в веществе с изменением плотно-

сти и проводить расчеты для случая постоянного поля. При более высоких плотностях рассматриваемые магнитные поля не являются сверхсильными для электронов, при меньших плотностях данные значения  $B > 2c\sqrt{2\pi\rho}$ , что вряд ли возможно в реальных астрофизических объектах. Для относительно равновесного состояния вещества принято  $A = 64$ .



1 –  $B = 0$ ; 2 –  $B = 1,5 \cdot 10^{17}$  Гс; 3 –  $B = 2,0 \cdot 10^{17}$  Гс

**Рисунок 1.** – Зависимость величины запасов ядерной энергии в расчете на один нуклон от массовой плотности для Ae- и Aep-фаз холодного сверхплотного вещества

В Ae-фазе сверхсильное магнитное поле уменьшает величину  $\Delta\varepsilon$  при любых значениях  $\rho$ . Препятствуя образованию свободных нейтронов и смещая порог перехода фаз Ae→Aep в сторону более высоких плотностей, сверхсильное магнитное поле в Aep-фазе при заданном значении массовой плотности может увеличивать энергетический выход пикноядерных реакций.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.
2. Саакян, Г. С. Физика нейтронных звезд / Г. С. Саакян. – Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1995. – 347 с.
3. Секержицкий, В. С. О влиянии магнитного поля на пионизацию ядер / В. С. Секержицкий // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 2. – С. 39–44.
4. Саакян, Г. С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г. С. Саакян, Л. Ш. Григорян // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
5. Леинсон, Л. Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский // Ядерная физика. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
6. Вартамян, Ю. Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю. Л. Вартамян, Н. К. Овакимова // Астрономический журнал. – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.

7. Володин, В. А. Влияние кристаллической решетки на ядерные свойства сверхплотного вещества / В. А. Володин, Д. А. Киржниц // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т. 13, № 8. – С. 450–452.
8. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
9. Шульман, Г. А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г. А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.03.2015

***Sekerzhitsky V.S., German V.V. Thermodynamics Balance and Reserves of Nuclear Energy in Electron-Neutron-Nuclear Strong Magnetized Matter***

*We have calculated the equilibrium thermodynamic and nuclear parameters of cold superdense electron-neutron-nuclear matter during superstrong magnetic field. Influence of a superstrong magnetic field on parameters that correspond to bounds of electron-neutron-nuclear phase of such matter is investigated. In strong magnetic field may be increase energy exit of processes crossing from relatively to absolute balance state of cold electron-neutron-nuclear matter is show.*

---

## МАТЭМАТЫКА

---

### О НАУЧНОЙ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОФЕССОРА ВАЛЕРИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА САМОЙЛЕНКО

15 января 2015 г. исполнилось 60 лет члену редколлегии журнала «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» Самойленко Валерию Григорьевичу.

В.Г. Самойленко работает заведующим кафедрой математической физики Киевского национального университета имени Т. Шевченко. Он доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии высшей школы Украины, известный и признанный в научных кругах стран СНГ и далекого зарубежья украинский ученый в области обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными. В.Г. Самойленко – автор двух фундаментальных монографий [1; 2], одна из которых была опубликована авторитетным научным издательством World Scientific Publishing, и более 250 научных статей в таких известных научных изданиях, как «Journal of Mathematical Physics», «Nonlinear Analysis», «Reports on Mathematical Physics», «Доклады АН СССР», «Теоретическая и математическая физика», «Дифференциальные уравнения», «Украинский математический журнал», «Нелинейные колебания» и др. Он удостоен звания лауреата Республиканской премии в области науки и техники, премий Национальной Академии Наук Украины имени В.М. Хрущева и имени М.В. Остроградского. Профессор Самойленко подготовил 10 кандидатов физико-математических наук.



Валерий Григорьевич родился в селе Большая Благовещенка Херсонской области (Украина). Его родители не были математиками: отец работал инженером, а мама – агрономом в колхозе, но как будто сама судьба привела Валерия Самойленко в науку. С 1962 по 1972 гг. он обучался в средней школе. Уже в раннем возрасте проявились его способности к точным наукам. В пятом классе учитель математики П.П. Мосеенко, предвидя призвание своего ученика, дал ему для самостоятельного изучения книгу, посвященную методу координат, которую ученик внимательно прочитал. С этого момента, можно сказать, начался путь В.Г. Самойленко в математику. Будучи учеником седьмого класса средней школы № 1 Цюрупинска, маленького городка, находящегося недалеко от Херсона, Валерий Самойленко стал призером областной математической олимпиады среди учеников восьмых классов. Затем в летнем математическом лагере, орга-

низованном Херсонской областной станцией юных техников, он прослушал курс лекций преподавателей Херсонского педагогического института и познакомился с элементами теории булевых алгебр и теории множеств. За успехи в учебе в 1967 г. его избрали делегатом III-го Всесоюзного слета пионеров от Херсонской области, который проходил в Международном пионерском лагере «Артек». А в 1969 г. Валерий Самойленко был принят в 8 клас Киевской специализированной школы-интерната физико-математического профиля при Киевском государственном университете имени Т.Г. Шевченко (в то время в бывшем СССР действовали четыре такие специализированные школы: в Москве, Ленинграде, Киеве и Новосибирске).

Физику и математику в Киевской физико-математической школе преподавали опытные доценты и профессора Киевского университета, а ученики выполняли много лабораторных работ по физике, требовавших от них творческого мышления и способствовавших развитию навыков самостоятельной научно-исследовательской работы, решали множество различных математических задач, как правило, олимпиадного характера. Учебный процесс в школе был построен так, чтобы ученики не только получали более глубокие, чем в обычной школе, знания по физике и математике, но и знакомились и приобрели навыки самостоятельной научно-исследовательской работы. В это время большое влияние на формирование математической культуры В.Г. Самойленко оказал известный украинский математик-педагог В.А. Вышенский. Обучаясь в Киевской физико-математической школе, Валера Самойленко ежегодно участвовал в олимпиадах г. Киева и Республиканских олимпиадах для школьников по физике и математике, где неоднократно занимал призовые места.

После окончания школы в 1972 г. В.Г. Самойленко поступил на I курс механико-математического факультета Киевского государственного университета имени Т.Г. Шевченко, где учился исключительно на «отлично», был Ленинским стипендиатом, победителем Республиканской студенческой олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике (1977 г.). Он специализировался по кафедре интегральных и дифференциальных уравнений, которой в то время руководил член-корреспондент АН УССР А.М. Самойленко (ныне – академик НАН Украины, директор Института математики НАН Украины). Именно он предложил студенту IV курса Валерию Самойленко тему будущей дипломной работы, связанной с исследованием системы двух слабо связанных осцилляторов типа Ван дер Поля. В дальнейшем по результатам этих исследований Валерий Григорьевич самостоятельно написал свою первую научную статью будучи еще студентом университета.

После окончания в 1977 г. с отличием Киевского университета В.Г. Самойленко, как молодой перспективный специалист, получил направление в Институт математики АН УССР, которым в то время руководил академик АН УССР Ю.А. Митропольский. Здесь Валерий Григорьевич продолжил свою научную деятельность под руководством академика Митропольского в отделе математической физики и теории нелинейных колебаний: Юрий Алексеевич предложил ему задачу о построении в общем виде асимптотических решений для слабо нелинейных дифференциальных уравнений с медленноменяющимися коэффициентами и с запаздыванием, которая молодым математиком была успешно решена.

В Институте математики Валерий Григорьевич проработал почти 20 лет: с 1 августа 1977 г. по 3 февраля 1997 г. – и прошел путь от инженера до ведущего научного сотрудника института. Здесь без отрыва от производства он обучался в аспирантуре (с ноября 1977 г. по ноябрь 1981 г.). В. Самойленко был командирован для участия в работе Международного математического конгресса (1983 г., Варшава) и ряда других международных конференций, а также для прохождения трехмесячной стажировки в Международном математическом центре имени С. Банаха (1986 г., Варшава), годич-

ной стажировки в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР (1990–1991 гг.), годичной стажировки в Технологическом институте штата Нью-Джерси (США) в рамках программы Cooperation in Science and Technology (1993–1994 гг.).

В Институте математики АН УССР В.Г. Самойленко в 1982 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» на тему «Исследование обратной периодической задачи для нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений и метод усреднения» (научный руководитель – академик АН УССР Ю.А. Митропольский), а в 1992 г. – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения» на тему «Анализ нелинейных динамических систем и их малых деформаций на функциональных многообразиях». В 1988 г. ему было присвоено ученое звание «старший научный сотрудник» по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

С февраля 1997 г. и по настоящее время В.Г. Самойленко работает на кафедре математической физики механико-математического факультета Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, сначала на должности профессора, а с июня 1998 г. – заведующим кафедрой. В 2001 г. ему присвоено ученое звание «профессор».

Благодаря работе в Институте математики АН УССР, а в дальнейшем – в Киевском университете, участию в различных научных конференциях и школах круг научных интересов В.Г. Самойленко постоянно расширялся и стал включать не только теорию асимптотических методов, но и большое число разнообразных современных направлений теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными: теория аналитических и качественных методов, теория интегрируемых систем, теория систем с импульсным воздействием, теория сингулярно возмущенных уравнений, теория систем с вырожденной матрицей при старшей производной и малым параметром, системы с запаздыванием, история математики, – где им получен ряд важных научных результатов.

В.Г. Самойленко вместе со своими учениками (Ю.И. Каплун, В.В. Потороча, Л.В. Хомченко) разработал методы асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием как для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, для систем дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при старших производных, так и для дифференциальных уравнений с частными производными, для которых при помощи метода пограничного слоя Васильевой – Бутузова и метода Вишика – Люстерника ими построены асимптотические решения и получены оценки точности для этих решений. Вместе с Ю.И. Каплун, В.В. Потороча он также получил достаточные условия существования периодических асимптотических решений упомянутых выше уравнений и достаточные условия существования решений т.н. гибридных (алгебро-дифференциальных) систем уравнений и условия зависимости от параметра их решений. Он также разработал общий алгоритм построения асимптотических решений систем слабо нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и медленно меняющимися коэффициентами.

В.Г. Самойленко получил ряд новых интересных и важных результатов в теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, в частности, относительно влияния условий импульсного воздействия на качественное поведение решений таких систем. Им лично и в сотрудничестве с его учеником К.К. Елгондыевым показано, что наличие условий импульсного воздействия, даже в случае линейных дифференциальных уравнений, может обусловить качественное поведение решений указанных систем, свойственное только сильно нелинейным системам. В работах В.Г. Самойленко и его последователей (К.К. Елгондыев, В.В. Собчук) впервые дано применение знаменитой



теоремы А.Н. Шарковского (о сосуществовании периодических траекторий непрерывного отображения отрезка в себя) в теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и, в частности, показана возможность существования принципиально нового свойства решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, связанным с сосуществованием бесконечного числа периодических решений, периоды которых не являются соизмеримыми. Эти результаты в последующем были обобщены ими для уравнения математического маятника и уравнения Дюффинга.

Большой цикл научных работ по теории интегрируемых систем выполнен В.Г. Самойленко совместно с членом-корреспондентом Академии наук СССР Н.Н. Боголюбовым (младшим) и профессором А.К. Прикарпатским. В этом направлении его научные работы касаются как дискретных систем (системы Тоды, Ленгмюра и дискретные аналоги уравнений Кортевега – де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера и ряда других), так и классических интегрируемых систем, таких как уравнение Кортевега – де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, инверсное уравнение Кортевега – де Фриза и др. В этом важном разделе современной математики им получен ряд интересных научных результатов, в частности, предложен дискретный аналог периодического варианта метода обратной задачи рассеяния, при помощи которого построены точные решения уравнений периодических цепочек Тоды, Ленгмюра и разностного аналога уравнения Кортевега – де Фриза.

На основе использования специальных операторов в сотрудничестве с А.К. Прикарпатским разработан эффективный операторно-функциональный подход для исследования полной интегрируемости и построения гамильтоновой структуры нелинейных динамических систем, при помощи которого ими изучен широкий класс нелинейных динамических систем, включающих дискретные системы Тоды, Ленгмюра и Шредингера, инверсное уравнение Кортевега – де Фриза, уравнение типа Мельникова, систему Буссинеска, системы осцилляторов типа Неймана и Неймана – Россохатиуса на сфере, для которых доказана их гамильтоновость и полная интегрируемость по Лаксу, а также получены их точные (конечнозонные) решения.

В.Г. Самойленко рассмотрел задачу о деформации инвариантных подмногообразий гамильтоновых динамических систем, заданных на функциональных многообразиях, и получил условия их квазиинвариантности, вместе с А.К. Прикарпатским при помощи метода усреднения Боголюбова – Уизема исследовал модуляцию почти периодических волн (решений) нелинейного уравнения Шредингера. Совместно с Ю.А. Митропольским, А.К. Прикарпатским и И.О. Антонишиным Самойленко предложил новый подход в теории адиабатических инвариантов слабо возмущенных нелинейных вполне интегрируемых динамических систем, базирующийся на идеях Пуанкаре – Картана и методах гамильтонового анализа нелинейных динамических систем.

Новые важные результаты в последнее время получены В.Г. Самойленко (вместе с учениками-единомышленниками) по теории асимптотических солитоноподобных решений сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами, в частности, относительно условий существования таких решений, разработки алгоритмов построения одно- двух- и многофазовых решений указанного типа, а также их обоснования.

Совместно с учеными Института электродинамики НАН Украины В.Г. Самойленко выполнил цикл научных исследований по теории электрических цепей, результаты которых получили признание специалистов. Он опубликовал также серию научных и научно-популярных статей по истории математики в Киевском университете, в частности, цикл работ о научной и научно-педагогической деятельности академика Н.Н. Боголюбова в Киевском университете.

Указанные научные результаты В.Г. Самойленко получили национальное и международное признание. Общее количество цитирований его работ составляет: 424 (согласно данным Google Scholar Citation), 87 (согласно MathSciNet), 49 (согласно Scopus); индекс Хирша равен: 11 (согласно Google Scholar Citation), 4 (согласно MathSciNet), 5 (согласно Scopus).

В 1984 г. за разработку дискретного аналога периодического варианта метода обратной задачи рассеяния В.Г. Самойленко был удостоен звания лауреата Республиканской премии имени Николая Островского (в составе авторского коллектива), а в 2005 г. за цикл научных работ, посвященных аналитическим методам анализа нелинейных электрических цепей, стал лауреатом премии Национальной Академии Наук Украины имени В.М. Хрущева (в составе авторского коллектива). В 2012 г. В.Г. Самойленко также в составе авторского коллектива был отмечен премией Национальной Академии Наук Украины имени М.В. Остроградского за цикл научных работ, посвященных аналитическим и асимптотическим методам в теории интегрируемых систем, в 2014 г. за цикл научных работ по теории дифференциальных уравнений с частными производными стал лауреатом награды Ярослава Мудрого в области науки и техники.

В.Г. Самойленко также награжден медалью «В память 1 500-летия г. Киева», Грамотой Верховного Совета Украины, нагрудным знаком Академии педагогических наук Украины «Ушинский К.Д.», почетными грамотами Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, грамотами Президиума Национальной Академии Наук Украины, грамотами Высшей атестационной коллегии Украины и грамотами Комитета по Государственным премиям Украины в области науки и техники.

В.Г. Самойленко активно развивает международное сотрудничество. Он неоднократно выезжает по приглашениям зарубежных коллег для чтения лекций в университетах Италии, Германии, США, Польши, Беларуси, Узбекистана, Казахстана и для участия в работе и выступлениях с научными докладами на престижных международных математических форумах. Он постоянно участвует в работе оргкомитетов по подготовке и проведению международных научных конференций и симпозиумов, ряд из которых проходят в Беларуси и, в частности, в Брестском государственном университете имени А.С. Пушкина.

В.Г. Самойленко уделяет большое внимание подготовке научных кадров высшей квалификации: им подготовлено 10 кандидатов наук. Его ученики за научные достижения отмечены Премией Президента Украины для молодых ученых, награждены Грамотой ректора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, грамотами Президиума Национальной Академии Наук Украины, стипендиями фонда имени В. Пинчука «Завтра.UA».

Плодотворную научную работу В.Г. Самойленко успешно сочетает с педагогической и научно-методической деятельностью. На протяжении многих лет для студентов механико-математического факультета он читает нормативные курсы лекций «Комплексный анализ», «Уравнения математической физики», «Обобщенные функции и их применение в математической физике», а также специальные курсы по современным вопросам теории дифференциальных уравнений с частными производными. Им написаны 6 учебных пособий и 7 научно-методических разработок для студентов механико-математического факультета.

Самойленко В.Г. ведет активную научно-организационную работу: он заместитель ответственного редактора научного издания «Вестник Киевского национального университета имени Т. Шевченко. Математика. Механика», член редколлегии журналов «Нелинейные колебания», «Математические студии», «Математический вестник Научного общества имени Т. Шевченко», «Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика» и ряда других научных изданий, ученый секретарь секции мате-

матики и механики Комитета по Государственным премиям Украины в области науки и техники (с 1998 г.), ученый секретарь экспертного совета по математике и механике Министерства образования и науки Украины (с 2003 г.), член ученого совета механико-математического факультета Киевского национального университета имени Т. Шевченко, член специализированного ученого совета по защите докторских диссертаций Д 26.001.37 при Киевском национальном университете имени Т. Шевченко, неоднократно привлекался для экспертной оценки научных проектов и рецензирования учебников, учебных пособий и отчетов по завершённым темам научно-исследовательских работ учреждений НАН Украины.

Валерий Григорьевич полон сил и новых творческих планов. Пожелаем ему удачи и новых успехов в его научно-педагогической деятельности!

*И.В. Гайшун, академик НАН Беларуси; В.И. Корзюк, академик НАН Беларуси; Н.А. Перестюк, академик НАН Украины; М.Ф. Городний, профессор; И.П. Мартынов, профессор; А.Н. Прокопеня, профессор; А.В. Чичурин, профессор; Г.Ч. Шушкевич, профессор; Н.Н. Сендер, доцент*

### Список основных научных работ Валерия Григорьевича Самойленко

#### Монографии

1. Интегрируемые динамические системы: спектральные и алгебро-геометрические аспекты. – Киев: Наукова думка, 1987. – 296 с. (соавторы: Ю.А.Митропольский, Н.Н.Боголюбов (мл.), А.К.Прикарпатский).

2. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and symplectic integrability analysis. – New Jersey – London – Singapore – Beijing – Shanghai – Hong Kong – Taipei – Chennai : World Scientific Publishing. – 564 p. (coauthors: D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky).

#### Научные статьи

1. Исследование одной системы двух слабосвязанных уравнений типа Ван дер Поля // Матем. физика. – 1978. – Вып. 24. – С. 52–58.

2. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 253, № 3. – С. 575–580 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).

3. Точные почти периодические и солитонные решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двух уровневой среде без диссипации // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – №4. – С. 5–9 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).

4. Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза // Теор. и матем. физика. – 1982. – Т. 50, № 3. – С. 118–126 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).

5. Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений Ленгмюровской цепочки // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34, № 3. – С. 322–327.

6. Периодическая задача для цепочки Тода // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34, № 4. – С. 469–475 (соавтор А.К. Прикарпатский).

7. Геометрична структура перетворень Беклунда цілком інтегровних динамічних систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 21–23 (соавтор А.К. Прикарпатский).

8. Об интегрируемости идеалов в алгебрах Грассмана на дифференцируемых многообразиях и некоторые их приложения // Укр. матем. журн. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 451–456 (соавторы: Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский).

9. Повна інтегровність динамічних систем типу Неймана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 52–54 (соавторы: М.М. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).

10. Дифференциально-разностные динамические системы, ассоциированные с разностным оператором Дирака, и их полная интегрируемость // Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37, № 2. – С. 180–186 (соавтор Ю.А. Митропольский).
11. Прямі методи знаходження представлень типу Лакса для динамічних систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 52–54 (соавторы: А.К. Прикарпатский, А.И. Скрипник).
12. Нелинейная модель типа Шредингера. Законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость // Теор. и матем. физика. – 1985. – Т. 65, № 2. – С. 271–284 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).
13. Преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза с алгебро-геометрической точки зрения // Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 670–673 (соавтор А.К. Прикарпатский).
14. О динамических системах типа Неймана и их полной интегрируемости // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 285, № 4. – С. 853–859 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).
15. Полная интегрируемость дифференциальных уравнений, ассоциированных с задачей о нелинейных колебаниях однородной продольно сжатой балки // Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37, № 6. – С. 723–729 (соавторы: Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский).
16. Асимптотический метод построения имплектических и рекурсионных операторов вполне интегрируемых динамических систем // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 287, № 6. – С. 1312–1317 (соавторы: Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский).
17. Функциональное уравнение Н.Н. Боголюбова и ассоциированная с ним имплектическая структура Ли – Пуассона – Власова // Укр. матем. журн. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 774–778 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).
18. Метод построения имплектических и рекурсионных операторов вполне интегрируемых динамических систем // Матем. физика и нелинейные колебания. – 1987. – Вып. 7. – С. 64–67.
19. Алгебры симметрий вполне интегрируемых динамических систем // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40, № 2. – С. 192–198 (соавтор Б. Филь).
20. Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40, № 4. – С. 453–458 (соавторы: Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский).
21. Неавтономные бесконечномерные динамические системы и их полная интегрируемость // Матем. физика и нелинейная механика. – 1989. – Вып. 12. – С. 85–90.
22. Абелевы интегралы, интегрируемые динамические системы типа Неймана – Россохатиуса и представление типа Лакса // Укр. матем. журн. – 1989. – Т. 41, № 8. – С. 1094–1100 (соавторы: А.К. Прикарпатский, И.В. Микитюк).
23. Двумеризованные бесконечномерные динамические системы: симметрии, законы сохранения и полная интегрируемость // Матем. физика и нелинейная механ. – 1990. – Вып. 13. – С. 59–63.
24. Дифференциально-геометрическая структура и спектральные свойства нелинейных вполне интегрируемых динамических систем // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42, № 5. – С. 655–659.
25. Периодические и почти-периодические решения линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. физика и нелинейная механ. – 1991. – Вып. 15. – С. 13–19 (соавтор К.К. Елгондыев).
26. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега – де Фриза // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43, № 9. – С. 1239–1248 (соавторы: Н.Н. Притула, У.С. Суяров).

27. Гамильтонова структура гидродинамических уравнений типа Бенни и ассоциированных с ними уравнений // Укр. физ. журн. – 1992. – Т. 37, № 1. – С. 147–156 (соавторы: Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский).
28. Симплектичний аналіз слабо збурених динамічних систем. Новий критерій стабілізації гомоклінічних сепаратрис та його застосування // Укр. матем. журн. – 1992. – Т. 44, № 1. – С. 46–66 (соавторы: Ю.А. Митропольский, И.О. Антонишин, А.К. Прикарпатский).
29. Полная интегрируемость одной гидродинамической модели Навье – Стокса течения двумерной несжимаемой идеальной жидкости со свободной поверхностью // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45, № 1. – С. 86–90 (соавтор У.С. Суяров).
30. Интегрируемые динамические системы и дифференциально-геометрические аспекты // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45, № 2. – С. 419–427.
31. The complete integrability analysis of the inverse Korteweg – de Vries equation // Nonlinear vibration problems. – 1993. – Vol. 25. – P. 411–422 (coauthors: M.M. Prytula, U.S. Suyarov).
32. Geometric quantization of Neumann type completely integrable Hamiltonian systems // Journal of Mathematical Physics. – 1994. – Vol. 35, № 4. – P. 1532–1548 (coauthors: R.I. Andrushkiw, I.V. Mykytiuk, A.K. Prykarpatskiy).
33. Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear dynamical systems. I. // Journal of Mathematical Physics. – 1994. – Vol. 35, № 4. – P. 1763–1777 (coauthors: R.I. Andrushkiw, Y.A. Mytropolskiy, N.N. Prytula, A.K. Prykarpatskiy).
34. Квазиинвариантные деформации инвариантных подмногообразий гамильтоновых динамических систем // Укр. матем. журн. – 1994. – Т. 46, № 8. – С. 1043–1054.
35. Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear dynamical systems. II. The reduction via Dirac and canonical quantization procedure // Journal of Mathematical Physics. – 1994. – Vol. 35, № 8. – P. 4088–4115 (coauthors: R.I. Andrushkiw, A.K. Prykarpatskiy).
36. Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49, № 1. – С. 140–147 (соавтор К.К. Елгондыев).
37. Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві – Стюардсона // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50, № 2. – С. 252–264 (соавтор Ю.Н. Сидоренко).
38. Отображение последования и периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелинейные колебания. – 1998. – № 1. – С. 44–50 (соавторы: Н.А. Перестюк, К.К. Елгондыев).
39. On existence of periodical solutions for differential equations with impulse effects // Facta Universitatis. Series: Mechanics, autonomic control and robotics. – 1998. – Vol. 2, № 8. – P. 635–640 (coauthor K.K. Yelgondyev).
40. Ієрархія рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями: багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих рівнянь // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, № 1. – С. 78–97 (соавторы: А.М. Самойленко, Ю.Н. Сидоренко).
41. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 827–834 (соавторы: А.М. Самойленко, В.В. Собчук).
42. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Докл. НАН України. – 1999. – № 8. – С. 19–23 (соавторы: Ю.А. Митропольский, Ю.Н. Сидоренко).
43. On the Hamiltonian structure of Benney type hydrodynamic and Boltzmann – Vlasov axial kinetic equations // Nonlinear Oscillations. – 1999. – Vol. 2, № 1. – P. 59–82 (coauthors: N.N. Bogoliubov (jr.), A.K. Prykarpatsy, D. Blackmore).

44. Качественное поведение решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифф. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 852 (соавтор К.К. Елгондыев).
45. Существование периодических решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифф. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 853–854 (соавтор К.К. Елгондыев).
46. The Lie-algebraic structure of Lax integrable nonlocal differential-difference equations // Nonlinear Oscillations. – 2000. – Vol. 3, № 1. – P. 84–94 (coauthors: A.K. Prykarpatsky, O.Y. Hentosh).
47. Algebraic-analytic aspects of integrable via the Liouville – Arnold theorem of Hamiltonian system on cotangent spaces: a symplectic theory approach // Nonlinear Oscillations. – 2000. – Vol. 3, № 1. – P. 103–123 (coauthors: A.M. Samoilenko, A.K. Prykarpatsky).
48. Періодичні розв’язки рівняння Льєнара з імпульсною дією // Нелинейные колебания. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 256–265 (соавтор В.В. Собчук).
49. Поєднання різних методів для аналізу процесів у нелінійних колах // Техн. електродинаміка. – 2000. – № 6. – С. 28–32 (соавторы: Н.А. Шидловская, О.П. Кравченко).
50. О глобальных решениях функциональных уравнений // Дифф. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1578 (соавтор Ю.И. Каплун).
51. Існування періодичних розв’язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією в околі складних особливих точок // Докл. НАН України. – 2000. – № 8. – С. 29–32 (соавтор В.В. Собчук).
52. Періодичні розв’язки рівняння Дюфінга з імпульсною дією // Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика. – 2000. – Вып. 5. – С. 47–51 (соавторы: К.К. Елгондыев, В.В. Собчук).
53. On a Dirac type quatization algorithm for the Neumann – Bogoliubov oscillatory system // Nonlinear Oscillations. – 2001. – Vol. 4, № 1. – P. 106–111 (coauthors: Y.A. Prykarpatsky, M. Pytel-Kudela).
54. The canonical reduction method for symplectic structures and its applications // Nonlinear Oscillations. – 2001. – Vol. 4, № 3. – С. 354–367 (coauthor Y.A. Prykarpatsky).
55. Functional equations with discontinuous trajectories // Mathematical notes Miscels. – 2001. – Vol. 2, № 2. – P. 145–157 (coauthors: M.O. Perestyuk, Y.I. Kaplun).
56. Finite dimensional reductions of conservative dynamical systems and numerical analysis // Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – Vol. 53, № 2. – P. 220–228 (coauthors: A. Prykarpatsky, S. Brzychczy).
57. About a finite dimensional reduction method for conservative dynamical systems and its applications // Collections of papers «Scientific computing, validated numerics, internal methods. Kluwer Academ». – New York ; Boston ; London ; Moscow : Plenum Publishers. – 2001. – P. 293–303 (coauthors: A. Prykarpatsky, S. Brzychczy).
58. Рівняння  $g(t,x)=0$  існування та продовжуваність його розв’язків // Укр. матем. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 372–382 (соавтор Ю.И. Каплун).
59. Сингулярно збурені рівняння з імпульсною дією // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 8. – С. 1089–1099 (соавторы: Ю.И. Каплун, А.М. Самойленко).
60. Розривні розв’язки рівнянь, що не розв’язані стосовно невідомої функції // Докл. НАН України. – 2002. – № 9. – С. 39–41 (соавторы: Н.А. Перестюк, Ю.И. Каплун).
61. Сингулярное множество и продолжимость решений дифференциальных уравнений // Докл. НАН Украины. – 2002. – № 10. – С. 17–21 (соавторы: Н.А. Перестюк, Ю.И. Каплун, М. Стрианезе).
62. Глобальна теорема про неявну функцію для  $n \times m$ -вимірною випадку // Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика. – 2002. – Вып. 7–8. – С. 86–88 (соавтор Ю.И. Каплун).

63. The Lyapunov – Schmidt approach to studying homoclinics splitting of weakly perturbed Lagrangian and Hamiltonian systems // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2003. – Vol. 55, № 1. – P. 66–74 (coauthors: A.M. Samoilenko, A.K. Prykarpatsky).
64. The reduction method in the theory of Lie-algebraically integrable oscillatory Hamiltonian systems // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2003. – Vol. 55, № 2. – С. 232–240 (coauthors: A.K. Prykarpatsky, U. Taheri).
65. О продолжимости решений на сингулярное множество // *Укр. матем. журн.* – 2003. – Т. 55, № 3. – С. 356–360 (соавтор Ю.И. Каплун).
66. On asymptotic solutions to de-lay differential equations with slowly varying coefficients // *Nonlinear Analysis*. – 2003. – Vol. 52. – P. 971–988 (coauthors: Y.A. Mitropolsky, G. Matarazzo).
67. Про дослідження адиабатичних інваріантів нелінійних динамічних систем // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика.* – 2003. – Вып. 9–10. – С. 130–132.
68. Структура бінарних перетворень типу Дарбу та їх застосування в теорії солітонів // *Укр. матем. журн.* – 2003. – Т. 55, № 12. – С. 1704–1719 (соавторы: А.М. Самойленко, А.К. Прикарпатский).
69. Теорема про властивості розв’язків узагальненого рівняння теплового балансу при променистому теплообміні // *Техн. електродинаміка.* – 2003. – № 1. – С. 8–10 (соавтор Н.А. Шидловская).
70. Структура бінарних перетворень типу Дарбу для ермітово спряжених диференціальних операторів // *Укр. матем. журн.* – 2004. – Т. 56, № 2. – С. 271–275 (соавтор А.К. Прикарпатский).
71. Георгій Миколайович Положий // *Укр. матем. журн.* – 2004. – Т. 56, № 4. – С. 560–561 (соавторы: Ю.А. Митропольский, И.И. Ляшко, А.М. Самойленко, А.А. Глущенко, И.О. Парасюк).
72. One-frequency asymptotic solutions to differential equations with deviated argument and slowly varying coefficients // *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. – 2004. – Vol. 50, part 3. – P. 1423–1428 (coauthors: G. Matarazzo, A. Pompei).
73. Вплив імпульсної дії на асимптотичні властивості розв’язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика.* – 2004. – Вып. 11–12. – С. 30–35 (соавтор В.А. Бородин).
74. Сингулярно збурені диференціальні рівняння з імпульсною дією // *Науч. записки Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко.* – 2004. – Т. 8. – С. 123–131.
75. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією // *Журн. вычислительной и прикладной матем.* – 2004. – Т. 90, № 1. – С. 99–104 (соавтор Л.В. Хомченко).
76. Асимптотичні властивості розв’язків неавтономного рівняння  $n$ -го порядку з імпульсною дією // *Журн. вычислительной и прикладной матем.* – 2004. – Т. 91, № 2. – С. 14–18 (соавтор В.А. Бородин).
77. Асимптотичні властивості розв’язків диференціального рівняння  $n$ -го порядку з імпульсною дією // *Матем. методы и физико-механические поля.* – 2004. – Т. 51, № 4. – С. 76–81 (соавтор В.А. Бородин).
78. Asymptotic solutions to the first order differential equations with deviated argument and slowly varying coefficients // *Nonlinear Oscillations*. – 2004. – Vol. 7, № 4. – P. 475 – 486 (coauthors: Y. Mitropolskiy, G. Matarazzo, A. Pompei).
79. Асимптотичні розв’язки для однофазових солітонно-подібних розв’язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // *Укр. матем. журн.* – 2005. – Т. 57, № 1. – С. 111–124 (соавтор Ю.И. Самойленко).

80. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рївняння теплопровідності з імпульсною дією // Докл. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 32–38. (соавтор Л.В. Хомченко).

81. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рївняння теплопровідності з імпульсною дією // Нелинейные колебания. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 89–123 (соавтор Л.В. Хомченко).

82. Асимптотичні властивості розв'язків рївняння  $n$ -го по-ряду з майже сталими коефіцієнтами з імпульсною дією // Нелинейные колебания. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 544–555 (соавтор В.А. Бородин).

83. Асимптотична оцінка для сингулярно збурених систем диференціальних рївнянь з виродженням та імпульсною дією // Докл. НАН України. – 2005. – № 12. – С. 45–50 (соавтор В.В. Потороча).

84. Новий алгоритм дослідження процесів в нелїнійних розрядних колах // Техн. електродинаміка. – 2005. – № 5. – С. 3–6 (соавторы: Н.А. Шидловская, О.П. Кравченко, В.В. Потороча).

85. О расщеплении вырожденной сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений // Нелинейные колебания. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 401–415 (соавтор В.В. Потороча).

86. Asymptotical solutions to singularly perturbed systems of differential equations with degenerations and impulsive influence // Матем. вестн. НТШ. – 2006. – № 3. – С. 261–277 (coauthor V.V. Potorocha).

87. Неперервно диференційовна залежність розв'язку виродженої системи диференціальних рївнянь від параметра // Докл. НАН України. – 2006. – № 12 – С. 19–24 (соавторы: В.В. Потороча, Ю.І. Самойленко).

88. Хвиля трансляції та математична теорія солітонів // Матем. вестн. НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 126–148 (соавтор Ю.І. Самойленко).

89. Аналіз нелїнійного електричного кола за допомогою методу усереднення Боголюбова // Докл. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 88–92 (соавторы: Н.А. Шидловская, О.П. Кравченко).

90. Юрій Олексійович Митропольський // Матем. вестн. НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 302–306.

91. Застосування методу усереднення Боголюбова до аналізу процесів в нелїнійних електричних колах з втратами // Проблемы современной электродинамики. – 2006. – Ч. 2. – С. 3–6 (соавторы: Н.А. Шидловская, О.П. Кравченко, И.Н. Кучерявая).

92. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рївняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. матем. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122–132 (соавтор Ю.І. Самойленко).

93. Asymptotic solution to Cauchy problem for Korteweg – de Vries equation with varying coefficients and a small dispersion // Proceedings of the 4-th International Workshops CASTR 2007. – Siedlce, Poland. – 2007. – P. 272–280 (coauthor Y.I. Samoilenko).

94. Залежність розв'язку виродженої системи диференціальних рївнянь від параметра // Докл. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 45–53 (соавторы: В.В. Потороча, Ю.І. Самойленко).

95. The Cartan – Monge geometric approach to the characteristic method for nonlinear partial differential equations of the first and higher orders // Nonlinear Oscillations. – 2007. – Vol. 10, № 1. – P. 22–31 (coauthors: D.L. Blackmore, N.K. Prykarpatska, E. Wachnichki, M. Pytel-Kudela).

96. Асимптотические решения сингулярно возмущенных нелинейных систем дифференциальных уравнений с вырождением и импульсным воздействием // Дифф. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 3. – С. 356–367 (соавтор В.В. Потороча).



97. On kinetic Boltzmann equations and related hydrodynamic flows with dry viscosity // *Opuscula Mathematica*. – 2007. – Vol. 27, № 2. – P. 187–195 (coauthors: N.N. Bogoliubov (jr.), D.L. Blackmore, A.K. Prykarpatsky).
98. До 90-річчя від дня народження Юрія Олексійовича Митропольського // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика*. – 2007. – Вып. 17–18. – С. 106–107 (соавторы: И.О. Парасюк, Н.А. Перестюк).
99. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // *Укр. матем. журн.* – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 388–397 (соавтор Ю.И. Самойленко).
100. Asymptotic two phase soliton type solutions to singular perturbed Korteweg – de Vries equation // *Proceedings of the 5-th Intern. Workshops CAST*. – Siedlce, Poland. – 2009. – P. 156–164 (coauthor Y.I. Samoilenko).
101. Дослідження нелінійних розрядних кіл в режимах роботи, близьких до резонансних // *Техн. електродинаміка*. – 2009. – № 6. – С. 3–7 (соавторы: О.П. Кравченко, Н.А. Шидловская).
102. Вплив зовнішнього збурення на властивості розв'язків рівняння гармонійних коливань з імпульсною дією // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика*. – 2009. – Вып. 22. – С. 20–25 (соавтор И.В. Лакоза).
103. До сторіччя від дня народження академіка Миколи Миколайовича Боголюбова // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика*. – 2009. – Вып. 22. – С. 57–59 (соавторы: В.И. Герасименко, М.Ф. Городний, А.Г. Загородний, И.О. Парасюк, Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко).
104. Метод погранслоя и условие типа Гюгонио для уравнения Кортевега – де Фриза // *Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4. Физика. Математика*. – 2010. – № 2. – С. 113–132 (соавтор Ю.И. Самойленко).
105. Оригінальний метод дослідження слабо нелінійних RLC-кіл // *Техн. електродинаміка*. – 2010. – Ч. 1. – С. 159–164 (соавторы: О.П. Кравченко, Н.А. Шидловская).
106. Неперервні розв'язки нерівності  $f(xy) \leq f(x)f(y)$  // *Матем. вестн. НТШ*. – 2010. – Т. 7. – С. 215–226 (соавтор Т. Тищук).
107. Діяльність М.М. Боголюбова з підготовки наукових кадрів у Київському університеті // *Матем. вестн. НТШ*. – 2010. – Т. 7. – С. 423–455 (соавтор М.Л. Граб).
108. Про науково-організаційну діяльність академіка М.М. Боголюбова в Київському університеті // *Вестн. Киев. нац. ун-та имени Т. Шевченко. Математика. Механика*. – 2010. – Вып. 24. – С. 54–59 (соавтор М.Л. Граб).
109. On the complete integrability of nonlinear dynamical systems on functional manifolds within the gradient-holonomic approach // *Reports on Mathematical Physics*. – 2011. – Vol. 68, № 3. – P. 289–318 (coauthors: Y.A. Prykarpatsky, N.N. Bogoliubov, A.K. Prykarpatsky).
110. On Cauchy Problem for Korteweg – de Vries Equation with variable coefficients and small parameter // *Collection of papers «Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics»*. – Siedlce : Wyd-wo Collegium Mazovia, 2011. – P. 128–135 (coauthor Y.I. Samoilenko).
111. Існування розв'язку неоднорідного диференціального рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій // *Укр. матем. вестн.* – 2012. – Т. 9, № 2. – С. 226–234 (соавтор Ю.И. Самойленко).
112. Асимптотичні багатофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами. I // *Укр. матем. журн.* – 2012. – Т. 64, № 7. – С. 970–987 (соавтор Ю.И. Самойленко).

113. Асимптотичні багатофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами. II // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, № 8. – С. 1090–1106 (соавтор Ю.И. Самойленко).

114. Many phase soliton type solutions to singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients // Collection of papers «Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics». – Siedlce : Wyd-wo WSFiZ, 2013. – P. 91–99 (coauthor Y.I. Samoilenko).

115. Двофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. матем. журн. – 2013. – Т. 65, № 11. – С. 1515–1530 (соавтор Ю.И. Самойленко).

116. Асимптотичні багатофазові  $\Sigma$ -розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. матем. вестн. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 87–108 (соавтор Ю.И. Самойленко).

117. Асимптотичні багатофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. матем. журн. – 2014. – Т. 66, № 12. – С. 1640–1657 (соавтор Ю.И. Самойленко).

118. Кусочно-постоянные решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 67–78 (соавтор Т.В. Тыщук).

#### Учебные пособия

1. Диференціювання функцій комплексної змінної. Конформні відображення. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2002. – 84 с. (соавторы: А.М. Кириченко, А.В. Ловейкин, И.Б. Романенко, Г.В. Верьовкина).

2. Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. – Київ, 2003. – 36 с. (соавторы: В.М. Гончаренко, И.Б. Романенко).

3. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду. – Київ, 2003. – 36 с. (соавторы: В.М. Гончаренко, И.Б. Романенко).

4. Ряди та інтеграли в комплексній площині. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2005. – 77 с. (соавторы: Г.В. Верьовкина, А.В. Ловейкин).

5. Постановка крайових задач. Зведення рівнянь до канонічного вигляду. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2005. – 48 с. (соавтор И.Б. Романенко).

6. Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними. – Київ, 2006. – 55 с. (соавтор И.Б. Романенко).

7. Застосування методу відокремлення змінних для розв'язання одновимірних задач. – Київ, 2006. – 54 с. (соавтор И.Б. Романенко).

8. Операційне числення. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. – 32 с. (соавторы: А.В. Ловейкин, В.А. Бородин).

9. Обчислення інтегралів у сенсі головного значення. – Київ, 2008. – 20 с. (соавтор И.Б. Романенко).

10. Інтеграл типу Коші. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2009. – 24 с. (соавтор И.Б. Романенко).

11. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. – 224 с. (соавторы: В.И. Бородин, Г.В. Верьовкина, А.В. Ловейкин, И.Б. Романенко).

12. Застосування методу відокремлення змінних для розв'язання задач із багатьма просторовими змінними. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2011. – 80 с. (соавтор И.Б. Романенко).

13. Рівняння математичної фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 224 с. (соавтор И.М. Конет).

УДК 517.9

**В.Г. Самойленко<sup>1</sup>, Т.В. Тищук<sup>2</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. математической физики

Киевского национального университета имени Т. Шевченко

<sup>2</sup>аспирант каф. математической физики

Киевского национального университета имени Т. Шевченко

**КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЕ РЕШЕНИЯ  
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

*В качестве феноменологической модели широкополосного генератора цифровых сигналов рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения первого порядка с частными производными и нелинейным краевым условием. Введено понятие типа обобщенного кусочно-постоянного  $n$ -периодического решения этой задачи и исследован вопрос о сосуществовании таких решений. Для некоторого класса краевых задач получен аналитический вид обобщенного кусочно-постоянного  $n$ -периодического решения.*

**Введение**

На сегодняшний день основными типами генерируемых, передаваемых и принимаемых различными средствами связи сигналов являются аналоговые и цифровые (digital) сигналы. Если в конце XIX столетия для передачи информации применялся аналоговый сигнал, то с 70-х гг. XX в. для этой цели все чаще используется цифровой сигнал. Это же касается и средств хранения информации. Основное различие между аналоговым и цифровым сигналами заключается в структуре сигнального потока [1]. Если аналоговый сигнал можно представить в виде непрерывной волны, то графиком цифрового сигнала является кусочно-постоянная функция.

В связи с широким распространением цифровых сигналов приобретает важное значение задача построения широкополосных генераторов таких сигналов, причем простейших как с инженерной точки зрения, так и с точки зрения возможности полного исследования математических моделей этих генераторов. Естественно ограничить класс рассматриваемых кусочно-постоянных функций периодическими. Тогда функции из этого класса могут быть определены подстановками, с помощью которых можно классифицировать периодические кусочно-постоянные функции. Классификация дискретных периодических функций с помощью перестановок широко используется в теории одномерных динамических систем, в частности, для изучения сосуществования циклов одномерных непрерывных отображений [2]. Хотя периодические кусочно-постоянные функции определены на действительной оси, а дискретные периодические функции определены на множестве натуральных чисел, но и для первого, и для второго класса функций применима классификация по циклическим перестановкам. Поскольку традиционными моделями генераторов сигналов являются дифференциальные уравнения, феноменологические модели генераторов цифровых сигналов будем искать в классе дифференциальных уравнений, исследование которых редуцируется [3–6] к изучению свойств одномерных динамических систем. Но при этом, поскольку кусочно-постоянные функции разрывные, их надо рассматривать не как классические решения дифференциальных уравнений, а в качестве обобщенных решений уравнений. Хорошо известно, что существуют классы краевых задач для уравнений в частных производных, исследование которых редуцируется к разностным уравнениям первого порядка с непрерывным аргументом, а свойства решений последних определяются динамической системой порожденной одномерным непрерывным отображением [3; 5–8].

Одномерным динамическим системам, теория которых является одним из наиболее эффективных инструментов нелинейной динамики, с одной стороны, свойственен широкий спектр динамического поведения траекторий, в частности, система может иметь много различных циклов одновременно, а с другой стороны, свойства таких систем могут быть детально исследованы [2]. Именно эти особенности одномерных динамических систем позволяют использовать их для построения простейших феноменологических моделей генераторов цифровых сигналов.

Поскольку большинство инженерных задач использует устойчивость решений по Ляпунову, применение полученных в данной работе результатов для таких задач требует использования следующего замечания. На устойчивости полученных обобщенных периодических решений в данной работе внимание не акцентируется в связи с тем, что для произвольного отображения с краевым условием рассматриваемой краевой задачи, имеющей неустойчивые обобщенные периодические решения, существует близкое в пространстве непрерывных функций отображения, такое, что краевая задача имеет периодическое решение того же типа, но устойчивое по Ляпунову.

Исследованиями краевых задач для линейных уравнений в частных производных и нелинейными краевыми условиями путем их редукции к разностным уравнениям с непрерывным аргументом уже много лет занимаются в Институте математики НАН Украины [3–4]. Особые успехи достигнуты для уравнений гиперболического типа, что объясняется существованием формулы Д’Аламбера и метода характеристик получения общего решения уравнения. Разностные уравнения с непрерывным аргументом, полученные в результате редукции краевых задач, демонстрируют иногда очень сложное поведение траекторий, в частности, автостохастичность [7]. Найдены классы краевых задач, для которых имеют место те же качественные и количественные универсальные свойства бифуркаций решений, что и для соответствующих одномерных динамических систем [8].

В статье рассмотрена нелинейная краевая задача для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с хаотическим поведением решений, которая допускает широкий спектр кусочно-постоянных периодических решений. Поскольку кусочно-постоянная функция не является дифференцируемой, в статье введено понятие обобщенного кусочно-постоянного  $n$ -периодического решения с очень «разреженным» множеством точек разрыва. Исследование таких обобщенных кусочно-постоянных  $n$ -периодических решений происходит путем сведения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных к разностному уравнению с непрерывным временем, а краевые условия и исходные данные обеспечивают редукцию полученного разностного уравнения к непрерывному отображению интервала. Заметим, что примененный метод позволяет получить решение некоторых классов краевых задач в аналитическом виде. В отличие от асимптотической устойчивости по Ляпунову, при которой спектр решений является узким, ведь все решения в определенной окрестности имеют одинаковые асимптотические свойства, построенные решения имеют разные асимптотические свойства даже в случае близости начальных условий, что связано с хаотичностью системы.

В качестве феноменологической модели генератора кусочно-постоянных сигналов рассмотрим в области нелинейную краевую задачу, состоящую из линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x;t)}{\partial x}, \quad x \in (0;1), \quad t > 0, \quad (1)$$

нелинейного краевого условия:

$$u(1;t) = f(u(0;t)), \quad t \in R^+ \cup \{0\}, \quad (2)$$

и начального условия:

$$u(x;0) = \varphi(x), \quad x \in [0;1]. \quad (3)$$

Здесь  $u : [0;1] \times (R^+ \cup \{0\}) \rightarrow R^1$ ,  $f : R^1 \rightarrow R^1$ ,  $\varphi : [0;1] \rightarrow R^1$ .

Поскольку краевая задача (1)–(3) является феноменологической моделью генератора кусочно-постоянных сигналов, выберем функцию  $\varphi(x)$  постоянной (для любого  $x \in [0;1]$  выполняется равенство  $\varphi(x) = c$ , где  $c \in R$  – фиксированное число) и будем изучать периодические решения задачи (1)–(3).

Введем понятие периодического кусочно-постоянного решения краевой задачи (1)–(3), которое имеет разрывы, т.е. заранее не является гладкой функцией, как обобщенного кусочно-постоянного периодического решения краевой задачи (1)–(3).

Прямые  $x+t = const$  являются характеристиками уравнения (1), однако с краевого условия (2) следует, что поведение решений краевой задачи (1)–(3) определяют прямые  $t = -x + i$ , где  $i \in N$ . Учитывая, что краевая задача (1)–(3) определена в области  $\{(x;t) \in R^1 \times R^1 \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$ , вместо прямых  $t = -x + i$  уместно рассматривать множества вида  $P_i = \{(x;t) \in R^1 \times R^1 \mid 0 < x < 1, t = -x + i\}$ , где  $i \in N$ .

**Определение 1.** Обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется функция  $u : [0;1] \times R^+ \cup \{0\} \rightarrow R$ , удовлетворяющая равенства (1)–(3) для произвольных значений  $(x;t) \in [0;1] \times R^+ \cup \{0\} \setminus \bigcup_{i \in N} P_i$ .

Сформулируем ряд необходимых определений.

**Определение 2.** Функцию  $\psi : R^1 \times R^1 \rightarrow \Omega$  будем называть кусочно-постоянной, если множество  $\Omega$  является конечным.

**Определение 3.** Функцию  $\psi : R^1 \times R^1 \rightarrow \Omega$  будем называть  $n$ -периодической, где  $n \in N$ , если для любого фиксированного значения  $x \in R^1$  выполняется равенство  $\psi(x;t+n) = \psi(x;t)$ , где  $n$  является наименьшим среди чисел, для которых выполняется последнее равенство.

Во множестве кусочно-постоянных  $n$ -периодических функций выделим подмножество функций  $A$  вида  $u : [0;1] \times R^+ \cup \{0\} \rightarrow \Omega$ , где  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество действительных чисел, таких, что для любых  $i \neq j$  выполняется неравенство  $a_i \neq a_j$ , где  $i, j \in N$ . В дальнейшем под обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) будем понимать кусочно-постоянную  $n$ -периодическую функцию, которая принадлежит множеству  $A$  и является обобщенным решением краевой задачи (1)–(3).

Наиболее общий ответ на вопрос сосуществования обобщенных кусочно-постоянных  $n$ -периодических решений краевой задачи (1)–(3) дает следующая теорема, которая является аналогом теоремы Шарковского о сосуществовании циклов непрерывного отображения [12] и использует только период, чего недостаточно для классификации цифровых сигналов и затрудняет их использование для кодирования информации.

**Теорема 1.** Пусть задана краевая задача (1), (2), где  $f \in C^0(I; I)$  – непрерывная функция, с постоянной начальной функцией (3). Если краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное  $n$ -периодическое решение, то она также имеет обобщенное кусочно-постоянное  $n'$ -периодическое решение, такое, что  $n' < n$ , где  $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \dots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \dots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \dots < 9 < 7 < 5 < 3$ .

**Доказательство теоремы 1.** Используя метод характеристик для нахождения решений краевой задачи (1)–(3), сведем ее к разностному уравнению с непрерывным аргументом [10; 11].

Общее решение уравнения (1) можно представить в виде типа Д'Аламбера:

$$u(x;t) = v(x+t), \quad (4)$$

где  $v \in C^1(R^+ \cup \{0\}; R)$  – произвольная функция.

Получив решение уравнения (1) в виде (4), сведем краевую задачу (1)–(3) к разностному уравнению с непрерывным временем. Подставляя (4) в краевое условие (2), получим автономное разностное уравнения с непрерывным аргументом:

$$v(\tau+1) = f(v(\tau)), \quad (5)$$

где  $\tau \in R^+ \cup \{0\}$ . Используя (4) и (3), получим начальное условие для разностного уравнения (5):

$$v(\tau) = \varphi(\tau), \quad (6)$$

где  $\tau \in [0;1)$ .

Общее решение уравнения (5) с начальным условием (6) следующее:

$$v(\tau) = f^n(\varphi(\{\tau\})), \quad (7)$$

где  $\tau \in [n; n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Используя формулу (4), которая связывает решение краевой задачи (1)–(3) и разностного уравнения с непрерывным аргументом (5) с начальным условием (6), из (7) получим общее решение задачи (1)–(3):

$$u(x;t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\})), \quad (8)$$

где  $x \in [0;1]$ ,  $t \in R^+ \cup \{0\}$ .

Поскольку функция  $\varphi$  с начального условия (3) является постоянной, т.е. для любого  $x \in [0;1]$  имеет место равенство  $\varphi(x) = c$ , где  $c \in R$  – фиксированное число, разностное уравнение с непрерывным аргументом (5) с начальным условием (6) определяется дискретным разностным уравнением вида:

$$v(n+1) = f(v(n)), \quad (9)$$

где  $n \in N \cup \{0\}$ , с начальным условием:

$$v(0) = c. \quad (10)$$

Для непрерывной функции  $f$  с правой части уравнения (9) выполняется теорема Шарковского о сосуществовании циклов [12], согласно которой из наличия в непрерывном отображении отрезка цикла порядка  $n$  следует наличие цикла периода  $n'$ , такого, что  $n' \triangleleft n$ , где  $\triangleleft$  обозначает порядок вида  $1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3$  на множестве натуральных чисел. Поскольку разностное уравнение с дискретным аргументом (9) и начальным значением (10) определяет разностное уравнение с непрерывным аргументом (5) и начальной функцией (6), которые являются результатами редукции краевой задачи (1)–(3), то из существования цикла периода  $n'$ , где  $n' \triangleleft n$ , для дискретного отображения следует существование обобщенного кусочно-постоянного  $n'$ -периодического решения краевой задачи (1)–(3), где  $n' \triangleleft n$ .

Теорема 1 доказана.

Информации о том, что краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное  $n$ -периодическое решение, недостаточно для передачи информации с помощью кусочно-постоянных функций. Нам необходима более детальная классификация периодических решений уравнения (9) с начальным условием (10). Эта задача равносильна классификации циклов отображения  $f$ , поэтому для дальнейшего исследования нам

понадобится ряд определений и утверждений из теории циклических перестановок как типов циклов одномерных отображений.

Пусть  $I = [0;1]$ ,  $g \in C^0(I;I)$  – некоторая непрерывная функция. В дальнейшем используются следующие определения [13].

**Определение 4.** Пусть  $B = \{\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta)\}$  – цикл периода  $n$  отображения  $g \in C^0(I;I)$ , где  $\beta = \min_{1 \leq i \leq n} g^{i-1}(\beta)$  и  $g^n(\beta) = \beta$ . Упорядоченный набор чисел  $r = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$ , каждый элемент которого определяется по формуле  $r_i = \#\{k \mid 1 \leq k \leq n, g^{k-1}(\beta) \leq g^{i-1}(\beta)\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , где “ $\#A$ ” обозначает количество элементов множества  $A$ , называется типом цикла  $B$ .

**Определение 5.** Типом произвольной периодической точки цикла называется тип этого цикла.

Из определения 4 следует, что  $r_1 = 1$  и для любых различных номеров  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$  выполняется неравенство  $r_i \neq r_j$ .

Любому циклу одномерного отображения можно поставить в соответствие некоторую циклическую перестановку. Точки цикла  $B$  обозначим теперь  $\beta_1, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n$ , где  $\beta_1 < \dots < \beta_i < \beta_{i+1} < \dots < \beta_n$ . Пусть  $g(\beta_i) = \beta_{j_i}$ , где  $1 \leq j_i \leq n$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда соответствующую циклу  $B$  циклическую перестановку можно записать следующим образом:  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ . Если цикл имеет тип  $\pi$ , то будем

считать  $\pi$  типом любой точки этого цикла.

Циклическое отображения перестановки  $\pi$  имеет следующий вид:  $(1, \pi(1), \pi^{i-1}(1), \dots, \pi^{n-1}(1))$ , следовательно, в силу того, что цикл  $B = \{\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta)\}$ , получим  $r_i = \pi^{i-1}(1)$  для произвольного  $1 \leq i \leq n$ . Из последнего следует, что определение типа цикла через соответствующую циклическую перестановку и упорядоченный набор  $(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$  эквивалентны, т.е. этот упорядоченный набор совпадает с циклическим изображением перестановки  $\pi$  цикла  $B$ . В связи с эквивалентностью циклической перестановки  $\pi$ , что соответствует циклу  $B$ , и типа цикла  $B$  как строки  $(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$ , в дальнейшем под типом цикла мы будем понимать один из этих объектов в зависимости от контекста.

Рассмотрим обобщенное кусочно-постоянное  $n$ -периодическое решение  $u(x;t)$  краевой задачи (1)–(3). Постоянную  $c$  с начального условия (3) выбираем так, чтобы  $c$  была периодической точкой отображения  $f$  с краевым условием (2). Определим области  $D_{i+kn}$ , где  $i, k \in N \cup \{0\}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , следующим образом:  $D_{i+kn} = \{(x;t) \in [0;1] \times R^+ \cup \{0\} \mid x+t = \alpha + i + kn, \alpha \in [0;1)\}$ . Из начального условия (3) следует, в частности, равенство  $u(0;0) = c$ , из которого, используя представления решения (8), получим аналитическое представление обобщенного  $n$ -периодического решения краевой задачи (1)–(3):

$$u(x;t) = \begin{cases} c, & (x;t) \in D_{kn}; \\ f(c), & (x;t) \in D_{1+kn}; \\ \dots \\ f^i(c), & (x;t) \in D_{i+kn}; \\ \dots \\ f^{n-1}(c), & (x;t) \in D_{n-1+kn}. \end{cases} \quad (11)$$

**Определение 6.** Типом обобщенного кусочно-постоянного  $n$ -периодического решения краевой задачи (1)–(3) называется тип периодической точки  $c$ .

Из определения 6 следует, что аналитическое представление (11) обобщенного  $n$ -периодического решения краевой задачи (1)–(3) имеет тип, равный типу периодической точки  $c$  начального условия (3).

Для исследования сосуществования обобщенных кусочно-постоянных периодических решений краевой задачи (1)–(3) с помощью их типов сформулируем следующие определения.

**Определение 7.** Циклическая перестановка  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$  называется выпуклой вверх [2, 9], если выполняются неравенства  $j_i < j_{i+1}$  при  $1 \leq i < \hat{i}$  и  $j_i > j_{i+1}$  при  $\hat{i} \leq i < n$ , где  $2 \leq \hat{i} \leq n-1$  и  $\pi(\hat{i}) = n$ .

Аналогично циклическая перестановка  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$  называется выпуклой вниз, если выполняются неравенства  $j_i > j_{i+1}$  при  $1 \leq i < \check{i}$  и  $j_i < j_{i+1}$  при  $\check{i} \leq i < n$ , где  $2 \leq \check{i} \leq n-1$  и  $\pi(\check{i}) = 1$ .

Очевидно, что два непрерывные отображения отрезка, одно из которых имеет цикл типа выпуклой вверх циклической перестановки, а другое – типа выпуклой вниз циклической перестановки, являются топологически сопряженными, поэтому достаточно рассмотреть свойства только выпуклых вверх циклических перестановок, ведь свойства выпуклых вниз циклических перестановок устанавливаются автоматически, используя их связь с выпуклыми вверх циклическими перестановками. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только отображение, имеющее циклы, которым соответствуют выпуклые вверх циклические перестановки. Такие перестановки будем называть выпуклыми циклическими перестановками.

Множество всех выпуклых циклических перестановок обозначим  $\Pi$ , а множество всех выпуклых циклических перестановок порядка  $n$  обозначим  $\Pi_n$ .

С выпуклыми циклическими перестановками тесно связаны циклы унимодальных непрерывных отображений. Сформулируем определение унимодального отображения.

**Определение 8.** Пусть  $g \in C^0(I; I)$ . Отображение  $g$  называется унимодальным, если существует значение  $c \in (0; 1)$ , такое, что  $g$  монотонно не убывает (монотонно не возрастает) на отрезке  $[0; c]$  и монотонно не возрастает (монотонно не убывает) на отрезке  $[c; 1]$ .

Из определения 8 следует, что унимодальное отображения состоит только из двух ветвей монотонности.



Учитывая, что мы рассматриваем выпуклые перестановки, будем считать, что унимодальное отображения  $g$  выпуклое вверх. Выкладки для случая, когда  $g$  – унимодальное выпуклое вниз отображения, аналогичные выкладкам для случая унимодального выпуклого вверх отображения.

Поскольку ограничение непрерывного отображения на цикл является циклической перестановкой, типом любого цикла унимодального отображения является выпуклая циклическая перестановка, но возможно такое, что двум разным циклам одного периода унимодального выпуклого вверх отображения может соответствовать одна и та же выпуклая циклическая перестановка. Для того, чтобы различать циклы в таком случае, воспользуемся результатами, полученными в работе [17]. Коротко приведем соответствующие рассуждения.

Поскольку  $r_n = n$  – максимальное число среди чисел  $1, r_2, \dots, r_n$ , образующих тип  $(1, r_2, \dots, r_n)$  цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка  $\pi$ , а число  $r_{n-1}$  является прообразом элемента  $r_n$ , то последовательно сравним каждое из чисел  $1, r_2, \dots, r_n$  с числом  $r_{n-1}$  и разобьем этот тип  $(1, r_2, \dots, r_n)$  на блоки (упорядоченные цепочки чисел, с соблюдением уже установленного в типе порядка) по следующему правилу: каждый блок содержит элементы, которые или все меньше числа  $r_{n-1}$ , или все не меньше числа  $r_{n-1}$ .

В результате тип  $(1, r_2, \dots, r_n)$  перестановки  $\pi$  можно записать в таком виде:

$$\left( (1, \dots, r_{m_1} \mid r_{m_1+1}, \dots, r_{m_1+l_1} \mid \dots \mid r_{m_1+l_1+\dots+m_{s-1}+l_{s-1}+1}, \dots, r_{m_1+l_1+\dots+l_{s-1}+m_s} \mid \right. \\ \left. r_{m_1+l_1+\dots+l_{s-1}+m_s+1}, \dots, r_{m_1+l_1+\dots+l_{s-1}+m_s+l_s} \right), \quad (12)$$

где символ  $\mid$  разделяет соседние блоки.

Числа  $m_i, l_i$ , где  $1 \leq i \leq s$ , для цикла типа  $(1, r_2, \dots, r_n)$  унимодального отображения  $g$  имеют следующее значение. Пусть  $\beta$  – наименьшая точка цикла типа  $r$  унимодального отображения  $g$ . Тогда  $m_1$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , принадлежащих интервалу  $[0; c)$ , то есть  $g^{i-1}(\beta) \in [0; c)$ , где  $1 \leq i \leq m_1$ ,  $l_1$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , начиная с  $g^{m_1}(\beta)$ , принадлежащих интервалу  $[c; 1]$ , т.е.  $g^{i-1}(\beta) \in [c; 1]$ , где  $m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + l_1$ ,  $m_2$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , начиная с  $g^{m_1+l_1}(\beta)$ , принадлежащих  $[0; c)$ , т.е.  $g^{i-1}(\beta) \in [0; c)$ , где  $m_1 + l_1 + 1 \leq i \leq m_1 + l_1 + m_2$  и т.д.

Аналогичным образом тип  $(1, r_2, \dots, r_n)$  перестановки  $\pi$  можно записать в виде:

$$\left( (1, \dots, r'_{m'_1} \mid r'_{m'_1+1}, \dots, r'_{m'_1+l'_1} \mid \dots \mid r'_{m'_1+l'_1+\dots+m'_{s-1}+l'_{s-1}+1}, \dots, r'_{m'_1+l'_1+\dots+l'_{s-1}+m'_s} \mid \right. \\ \left. r'_{m'_1+l'_1+\dots+l'_{s-1}+m'_s+1}, \dots, r'_{m'_1+l'_1+\dots+l'_{s-1}+m'_s+l'_s} \right), \quad (13)$$

где блоки с нечетными номерами содержат только числа, не больше  $r_{n-1}$ , а блоки с четными номерами – только числа, больше  $r_{n-1}$ .

Аналогично числам строки (12), числа строки (13) тесно связаны с циклом отображения  $g$ . Пусть  $\beta$  – наименьшая точка цикла типа  $r$  унимодального отображения  $g$ . Тогда  $m'_1$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , принадлежащих интервалу  $[0; c]$ , то есть  $g^{i-1}(\beta) \in [0; c]$ , где  $1 \leq i \leq m'_1$ ,  $l'_1$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , начиная с  $g^{m'_1}(\beta)$ , принадлежащих

інтэрвалу  $(c; 1]$ , т.е.  $g^{i-1}(\beta) \in (c; 1]$ , где  $m'_1 + 1 \leq i \leq m'_1 + l'_1$ ,  $m'_2$  – это количество точек в последовательности  $(\beta, g(\beta), \dots, g^{n-1}(\beta))$ , начиная с  $g^{m'_1 + l'_1}(\beta)$ , принадлежащих  $[0; c]$ , т.е.  $g^{i-1}(\beta) \in [0; c]$ , где  $m'_1 + l'_1 + 1 \leq i \leq m'_1 + l'_1 + m'_2$  и т.д.

Количество блоков в строках (12) и (13) является четным, поскольку  $r_n = n > r_{n-1}$ , т.е. каждая из строк (12), (13) заканчивается блоком с парным номером  $2s$  и  $2s'$  соответственно.

При этом выполняются следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^s (m_i + l_i) = n, \quad \sum_{i=1}^{s'} (m'_i + l'_i) = n.$$

С чисел  $m_1, m_2, \dots, m_s, l_1, l_2, \dots, l_s, m'_1, m'_2, \dots, m'_s, l'_1, l'_2, \dots, l'_s$ , фигурирующих в (12) и (13), образуем числовые наборы вида:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s), \quad (14)$$

$$(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \dots, m'_{s'-1}, l'_{s'-1}, m'_{s'}, 1), \quad (15)$$

где числовой набор (14) соответствует строке (12), а числовой набор (15) – строке (13).

Будем считать, что числовой набор длины  $n$  состоит только из повторяющихся блоков, если его можно представить в виде:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s, m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s, \dots, m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s),$$

где  $(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s)$  – повторяющийся блок ( $s$  – произвольный фиксированный делитель числа  $n$ , где  $n = ps$ ).

**Определение 9.** Если числовой набор (14), построенный по выпуклой циклической перестановке  $\pi$ , не состоит только из повторяющихся блоков, которые его образуют, то (14) называется м-моделью типа цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка  $\pi$ . Аналогично, если числовой набор (15), построенный по выпуклой циклической перестановке  $\pi$ , не состоит только из повторяющихся блоков, его образующих, то (15) называется р-моделью типа цикла, которому соответствует выпуклая циклическая перестановка  $\pi$ .

**Определение 10.** Весом модели типа цикла, которая представляется числовым набором  $(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s)$ , называется число  $\sigma$ , определяемое из равенства:

$$\frac{3}{2} \sigma = \frac{\sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=i+1}^s l_j \sum_{j=i+1}^s m_j \right) (-2)^{j=i+1} 2^{j=i+1} (1 - (-2)^{l_i})}{1 - (-2)^{\sum_{i=1}^s l_i} 2^{\sum_{i=1}^s m_i}}. \quad (16)$$

**Определение 11.** Если выпуклая циклическая перестановка  $\pi \in \Pi$  имеет одну модель типа цикла, то ее весом называется вес этой модели типа цикла. Если выпуклая циклическая перестановка  $\pi \in \Pi$  имеет две модели типа цикла, то ее весом называется больший из весов этих моделей типа цикла. Вес выпуклой циклической перестановки  $\pi$  обозначается  $\sigma_\pi$ .

**Определение 12.** Весом произвольной точки цикла называется вес выпуклой циклической перестановки, которая является типом этого цикла.

Геометрический смысл веса объясняет следующая лемма [17].

**Лемма 1.** Координата минимальной точки  $x$  цикла типа  $\pi \in \Pi_n$  периода  $n$  с моделью типа цикла  $(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s)$  отображения «тент», которое определено следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases} \quad (17)$$

равна  $\sigma_\pi$ . Учитывая, что каждая выпуклая циклическая перестановка имеет по крайней мере одну модель типа цикла, понятие веса выпуклой циклической перестановки определено корректно [17].

На множестве выпуклых циклических перестановок  $\Pi$  введем отношение порядка  $\prec$  следующим образом: две произвольные выпуклые циклические перестановки  $\pi'$  и  $\pi''$  находятся в отношении  $\prec$ , т.е.  $\pi' \prec \pi''$ , если  $\sigma_{\pi'} \leq \sigma_{\pi''}$ . Из определения отношения порядка  $\prec$  следует, что  $\prec$  является отношением линейного порядка на множестве выпуклых циклических перестановок  $\Pi$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть задана краевая задача (1), (2), где  $f \in C^0(I; I)$  – непрерывное отображение, с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является периодической точкой типа  $\pi_1 \in \Pi$  отображения  $f$ , то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа  $\pi_2 \in \Pi$ , где  $\pi_1 \prec \pi_2$ .

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $u(x; t)$  – обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение краевой задачи (1), (2) с начальным условием (3), таким, что  $\varphi(x) = c_1$ , где  $c_1$  является периодической точкой типа  $\pi_1 \in \Pi$  отображения  $f$ . Аналогично доказательству теоремы 1, используя формулу Д’Аламбера и постоянство функции в начальном условии (3), краевую задачу (1)–(3) сведем к разностному уравнению с дискретным аргументом (9) и начальным условием (10), таким, что  $v(0) = c_1$ , где  $c_1$  – постоянная с начального условия (3). Поскольку  $\pi_1$  – тип обобщенного кусочно-постоянного периодического решения краевой задачи (1)–(3), то в результате редукции к разностному уравнению (9), (10),  $\pi_1$  является типом цикла непрерывного отображения  $f$ . Используем теорему, которая сформулирована и доказана в [17], о том, что в случае, когда непрерывное отображение отрезка имеет цикл типа выпуклой циклической перестановки, оно также имеет цикл большего типа согласно отношению порядка на множестве выпуклых циклических перестановок. Учитывая, что  $\pi_1 \in \Pi$  и  $f \in C^0(I; I)$ , получим, что непрерывное отображение  $f$  также имеет цикл типа  $\pi_2 \in \Pi$ , где  $\pi_1 \prec \pi_2$ . Опять используем связь рассматриваемой краевой задачи с динамикой отображения  $f$ . Поскольку  $f$  имеет цикл типа  $\pi_2$ , то разностное уравнение с дискретным аргументом (9) и начальным условием  $v(0) = c_2$ , где  $c_2$  – периодическая точка типа  $\pi_2$  отображения  $f$ , соответствует краевой задаче (1), (2) с начальным условием  $\varphi(x) = c_2$ , где  $c_2$  – периодическая точка типа  $\pi_2$  отображения  $f$ . Из последнего следует, что краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа  $\pi_2 \in \Pi$ , где  $\pi_1 \prec \pi_2$ .

Теорема 2 доказана.

Имеет место следующее следствие из теоремы 2.

**Следствие 1.** Пусть задана краевая задача (1), (2), где  $f$  – отображение “тент” вида (17) с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является периодической точкой типа  $\pi_1 \in \Pi$  отображения  $f$ , то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа  $\pi_2 \in \Pi$ , где  $\pi_1 \prec \pi_2$ , вида:

$$u(x;t) = \begin{cases} \sigma_{\pi_2}, & (x;t) \in D_{kn_2}; \\ f(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{1+kn_2}; \\ \dots \\ f^i(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{i+kn_2}; \\ \dots \\ f^{n_2-1}(\sigma_{\pi_2}), & (x;t) \in D_{n-1+kn_2}. \end{cases} \quad (18)$$

**Доказательство следствия 1.** Поскольку отображение (17) является непрерывным, то для краевой задачи (1), (2), где  $f$  – отображение вида (17) с начальным условием (3), где постоянная является периодической точкой типа  $\pi_1 \in \Pi$  отображения  $f$ , выполняется теорема 2. Из последнего следует, что краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное кусочно-постоянное  $n_2$ -периодическое решение типа  $\pi_2$ , где  $\pi_1 \prec \pi_2$ . Используя лемму 1, получаем, что координата минимальной точки цикла любого типа отображения «тент» равна весу этого цикла. Тогда, используя представление (11), обобщенное кусочно-постоянное  $n_2$ -периодическое решение типа  $\pi_2$  краевой задачи (1)–(3) можно записать в виде (18).

Следствие 1 доказано.

Для формулировки еще одного следствия из теоремы 2 нам понадобятся следующие определения.

**Определение 13.** Минимальным циклом называется цикл, тип которого является минимальной циклической перестановкой или симметричной ей перестановкой.

**Определение 14.** Циклические перестановки  $\pi_1$  и  $\pi_2$  периода  $n$  называются симметричными, если для произвольного  $1 \leq i \leq n$ , где  $n \in N$ , выполняется соотношение  $\pi_2(i) = n + 1 - \pi_1(n + 1 - i)$ .

Минимальные перестановки произвольного периода описаны в [4]. Заметим только, что минимальными циклическими перестановками нечетного периода  $2k + 1$ , где  $k > 1$ , являются следующие циклические перестановки:

$$\pi_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & 2k & \dots & k+2 & k & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

а при  $k = 1$ :

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Используя определение 7, получим, что минимальные перестановки, заданные формулами (19) и (20), являются выпуклыми вверх циклическими перестановками.

Докажем следующее следствие из теоремы 2.

**Следствие 2.** Пусть задана краевая задача (1), (2), где  $f \in C^0(I; I)$  – непрерывное отображение с постоянной начальной функцией (3). Если значение начального условия (3) является  $2k + 1$ -периодической точкой типа  $\pi$  отображения  $f$ , где  $k \in N$ , то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое реше-

ние типа  $\pi_{2k'+1}$ , где  $k' \geq k$ , кроме того, если  $\pi \in \Pi$ , то краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа  $\pi' \in \Pi$ , такое, что  $\sigma_{\pi'} \geq \frac{2}{3} \frac{1 - (-2)^{2k}}{1 + (-2)^{2k+1}}$ .

**Доказательство следствия 2.** Учитывая порядок Шарковского, из существования у отображения  $f \in C^0(I; I)$  цикла периода  $2k+1$  следует существование цикла периода  $2k'+1$ , где  $k' \geq k$ . Используя утверждение о том, что из наличия в отображении  $g \in C^0(I; I)$  цикла периода  $n$ , следует наличие у него цикла минимального типа периода  $n$  [4], получим, что рассматриваемое отображение имеет минимальный цикл периода  $2k'+1$ , где  $k' \geq k$ . Поскольку минимальные циклы нечетного периода имеют вид (19), (20) [4], то отображение  $f \in C^0(I; I)$  имеет цикл типа  $\pi_{2k'+1}$ , где  $k' \geq k$ .

Если  $\pi \in \Pi$ , то с выпуклости вверх типа цикла отображения  $f$  следует, что можно построить унимодальное отображения такое, что любой цикл построенного отображения является циклом выходного отображения, и такое, что имеет цикл типа минимальной циклической перестановки периода  $2k+1$ . С унимодальности построенного отображения следует, что тип каждого цикла выпуклый вверх. Поэтому и минимальная циклическая перестановка периода  $2k+1$  является выпуклой вверх, т.е. имеет вид  $\pi_{2k+1}$ . Несложно проверить, что вес этой минимальной циклической перестановки

для соответствующего  $k$  равен  $\frac{2}{3} \frac{1 - (-2)^{2k}}{1 + (-2)^{2k+1}}$ . Используя теорему 2, получим, что краевая задача (1), (2) имеет обобщенное кусочно-постоянное периодическое решение типа  $\pi' \in \Pi$ , где  $\sigma_{\pi'} \geq \frac{2}{3} \frac{1 - (-2)^{2k}}{1 + (-2)^{2k+1}}$ .

Следствие 2 доказано.

### Заключение

Исследована феноменологическая модель широкополосного генератора цифровых сигналов, которая представлена краевой задачей для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и нелинейным краевым условием. Введено понятие обобщенного кусочно-постоянного  $n$ -периодического решения краевой задачи и его типа. Для рассматриваемого класса краевых задач построено обобщенное решение в аналитическом виде и исследованы условия сосуществования таких решений в зависимости от типа.

*Авторы благодарны академику НАН Украины Александру Николаевичу Шарковскому за постановку данной задачи.*

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Premier, R. Introductory Signal Processing / R. Premier. – World Scientific, 1991. – 734 p.
2. Шарковский, А. Н. Динамика одномерных отображений / А. Н. Шарковский [и др.]. – Киев : Наукова думка, 1989. – 216 с.
3. Шарковский, А. Н. Разностные уравнения и их приложения / А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко. – Киев : Наукова думка, 1986. – 278 с.

4. Шарковський, О. М. Динамічні системи, породжені крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність / О. М. Шарковський // Український математичний конгрес, 21–23 серп. 2001 р., Київ : тези доповідей. – Київ, 2001.
5. Герсеванов, Н. М. Итерационное исчисление и его приложения / Н. М. Герсеванов. – М. : Машстройиздат, 1950. – 70 с.
6. Витт, А. А. К теории скрипичной струны / А. А. Витт // Журн. техн. физики. – 1936. – Т. 6. – Вып. 9. – С. 1459–1479.
7. Романенко, О. Ю. Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевиими рівняннями з неперервним аргументом / О. Ю. Романенко // Укр. матем. журн. – 2006. – Т. 58. – № 7. – С. 1079–1105.
8. Sharkovsky, A. N. Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems / A. N. Sharkovsky, A. G. Sivak // Journal Nonlinear Math. Phys. – 1994. – Vol. 1, № 2. – P. 147–157.
9. Федоренко, В. В. Канонические периодические траектории одномерных динамических систем / В. В. Федоренко // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1983. – С. 106–109.
10. Романенко, О. Ю. Динаміка розв'язків найпростіших нелінійних граничних задач // О. Ю. Романенко, О. М. Шарковський // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 810–826.
11. Тищук, Т. В. Узагальнені періодичні розв'язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т. В. Тищук // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 113–117.
12. Шарковський, А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя / А. Н. Шарковский // Укр. матем. журн. – 1964. – Т. 16, № 1. – С. 61–71.
13. Тищук, Т. В. Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе / Т. В. Тищук // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2013. – Т. 32, № 4. – С. 41–44.
14. Fedorenko, A. D. Solution behaviour in a class of difference-differential equations / A. D. Fedorenko [et all.] // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 1998. – Vol. 57, № 1. – P. 37–48.
15. Fedorenko A. D. Farey's rule for stable periodic waves in a transmission line / A. D. Fedorenko [et all.] // CADSEM Report 96-008, Deakin University, Australia, April, 1996.
16. Шарковський, О. М. Співіснування періодичних орбіт для одного класу розривних відображень / О. М. Шарковський [та ін.] // Доповіді НАН України. – 1996. – № 11. – С. 21–25.
17. Самойленко, В. Г. Співіснування типів унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе / В. Г. Самойленко, Т. В. Тищук, В. В. Федоренко // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т. 2. – № 4. – С. 64–73.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.03.2015

***Samoylenko V.H., Tyshchuk T.V. Piecewise Constant Solutions of the Linear Partial Differential Equation of the First Order***

*We consider a boundary value problem for the first-order partial differential equation of hyperbolic type with a nonlinear boundary condition, which is used as a phenomenological model for digital signals generator. We introduce the notion of the type of a generalized piecewise constant  $n$ -periodic solution of the boundary value problem and study co-existence of the solutions. For a certain class of boundary value problems we obtain an analytic form of generalized piecewise constant  $n$ -periodic solution.*

УДК 513.82

**А.В. Беть<sup>1</sup>, А.А. Юдов<sup>2</sup>**<sup>1</sup>магистрант физ.-мат. факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ДВИЖЕНИЙ  
ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

*Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства  $R_5$ . Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  $R_5$  находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и  $k$ -плоскости.*

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и другие. В данной работе исследуется группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Рассмотрим пространство  $R_5$  -пятимерное евклидово пространство.

Выберем в пространстве  $R_5$  репер  $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ , причем  $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$ .

Произвольную точку  $M$  пространства  $R_5$ , в репере  $\varepsilon$  зададим координатами  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , которые будем записывать в виде  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_\varepsilon$ .

На множестве реперов пространства  $R_5$  действует группа Ли  $G$  движений, которая при заданном репере  $\varepsilon$  изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ t_3 & & & & & \\ t_4 & & & A & & \\ t_5 & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Причем  $A^T E_5 A = E_5$ , где знак  $T$  означает транспонирование, а матрица  $E_5$  является единичной матрицей.

При движении, заданном матрицей (1), репер  $\varepsilon$  переходит в репер  $\varepsilon' = (0, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5) = (0', e')$ , где  $e' = eA, 0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (T)_\varepsilon$ , а точка  $M$  переходит в точку  $M'$ , имеющую в репере  $\varepsilon'$  такие же координаты, какие точка  $M$  имеет в репере  $\varepsilon$ .

Пусть  $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_\varepsilon$ ,  $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X')_\varepsilon$ . Тогда получим:  $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$ . С другой стороны,  $\overline{OM'} = e(X')$ . Отсюда  $(X') = (T) + A(X)$ , т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \quad (2)$$

Таким образом, в пространстве  $R_5$  действует слева группа Ли  $G$ , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства  $R_5$  по формуле (2). Алгебру Ли  $\overline{G}$  этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & \\ \tau_2 & & & & & \\ \tau_3 & & & & & \\ \tau_4 & & & & B & \\ \tau_5 & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\}, \quad (3)$$

где  $B$  удовлетворяет условию:  $B^T E_5 + E_5 B = 0$

Группа Ли  $H$  стационарности точки  $O$  и алгебра Ли  $\overline{H}$  этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & A & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}, \quad (4)$$

$$\overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & B & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}. \quad (5)$$

Группа Ли  $G$  является полупрямым произведением группы Ли  $H$  стационарности точки и абелевой группы  $T_5$  параллельных переносов:  $G = H \otimes T_5$ .



Алгебра Ли  $\overline{G}$  является полупрямой суммой алгебры Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  и коммутативной алгебры Ли  $\tau_5$  группы Ли:  $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_5$ .

Операция коммутирования в алгебре Ли  $\overline{G}$  имеет вид:

$$[A, B] = AB - BA, \quad (6)$$

где  $A, B \in \overline{G}$ .

Рассмотрим в алгебре Ли  $\overline{G}$  базис, где

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, \\ i_6 &= E_{23} - E_{32}, i_7 = E_{24} - E_{42}, i_8 = E_{25} - E_{452}, i_9 = E_{34} - E_{43}, i_{10} = E_{35} - E_{53}, \\ i_{11} &= E_{45} - E_{54}, i_{12} = E_{36} - E_{63}, i_{13} = E_{45} - E_{54}, i_{14} = E_{46} - E_{64}, i_{15} = E_{56} - E_{65}. \end{aligned}$$

Где  $E_{\alpha\beta}$  –  $(6 \times 6)$  матрица, у которой в  $\alpha$  – ой строке,  $\beta$  – м столбце 1, а остальные элементы нули.

Получаем формулы для коммутаторов базисных векторов:

$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}$ . Согласно формуле (6) получим  $[i_1, i_2] = i_1 i_2 - i_2 i_1 = 0$ . Аналогично, проводя вычисления, получим:

$[i_1, i_3] = 0,$	$[i_3, i_4] = 0,$	$[i_5, i_9] = -i_1,$	$[i_8, i_{11}] = -i_6,$
$[i_1, i_4] = 0,$	$[i_3, i_5] = 0,$	$[i_5, i_{10}] = 0,$	$[i_8, i_{12}] = 0,$
$[i_1, i_5] = 0,$	$[i_3, i_6] = 0,$	$[i_5, i_{11}] = 0,$	$[i_8, i_{13}] = -i_7,$
$[i_1, i_6] = i_2,$	$[i_3, i_7] = -i_1,$	$[i_5, i_{12}] = -i_2,$	$[i_8, i_{14}] = 0,$
$[i_1, i_7] = i_3,$	$[i_3, i_8] = 0,$	$[i_5, i_{13}] = 0,$	$[i_8, i_{15}] = i_9,$
$[i_1, i_8] = i_4,$	$[i_3, i_9] = 0,$	$[i_5, i_{14}] = -i_3,$	$[i_9, i_{10}] = 0,$
$[i_1, i_9] = i_5,$	$[i_3, i_{10}] = -i_2,$	$[i_5, i_{15}] = -i_4,$	$[i_9, i_{11}] = 0,$
$[i_1, i_{10}] = 0,$	$[i_3, i_{11}] = 0,$	$[i_6, i_7] = -i_{10},$	$[i_9, i_{12}] = -i_6,$
$[i_1, i_{11}] = 0,$	$[i_3, i_{12}] = 0,$	$[i_6, i_8] = -i_{11},$	$[i_9, i_{13}] = 0,$
$[i_1, i_{12}] = 0,$	$[i_3, i_{13}] = i_4,$	$[i_6, i_9] = -i_{12},$	$[i_9, i_{14}] = -i_7,$
$[i_1, i_{13}] = 0,$	$[i_3, i_{14}] = i_5,$	$[i_6, i_{10}] = i_7,$	$[i_9, i_{15}] = -i_8,$
$[i_1, i_{14}] = 0,$	$[i_3, i_{15}] = 0,$	$[i_6, i_{11}] = i_8,$	$[i_{10}, i_{11}] = -i_{13},$
$[i_1, i_{15}] = 0,$	$[i_4, i_5] = 0,$	$[i_6, i_{12}] = i_9,$	$[i_{10}, i_{12}] = -i_{14},$
$[i_2, i_3] = 0,$	$[i_4, i_6] = 0,$	$[i_6, i_{13}] = 0,$	$[i_{10}, i_{13}] = i_{11},$
$[i_2, i_4] = 0,$	$[i_4, i_7] = 0,$	$[i_6, i_{14}] = 0,$	$[i_{10}, i_{14}] = i_{12},$
$[i_2, i_5] = 0,$	$[i_4, i_8] = -i_1,$	$[i_6, i_{15}] = 0,$	$[i_{10}, i_{15}] = 0,$
$[i_2, i_6] = -i_1,$	$[i_4, i_9] = 0,$	$[i_7, i_8] = -i_{13},$	$[i_{11}, i_{12}] = -i_{15},$
$[i_2, i_7] = 0,$	$[i_4, i_{10}] = 0,$	$[i_7, i_9] = -i_{14},$	$[i_{11}, i_{13}] = -i_{10},$
$[i_2, i_8] = 0,$	$[i_4, i_{11}] = -i_2,$	$[i_7, i_{10}] = -i_6,$	$[i_{11}, i_{14}] = 0,$
$[i_2, i_9] = 0,$	$[i_4, i_{12}] = 0,$	$[i_7, i_{11}] = 0,$	$[i_{11}, i_{15}] = i_{12},$
$[i_2, i_{10}] = i_3,$	$[i_4, i_{13}] = -i_3,$	$[i_7, i_{12}] = 0,$	$[i_{12}, i_{13}] = 0,$
$[i_2, i_{11}] = i_4,$	$[i_4, i_{14}] = 0,$	$[i_7, i_{13}] = i_8,$	$[i_{12}, i_{14}] = -i_{10},$
$[i_2, i_{12}] = i_5,$	$[i_4, i_{15}] = i_5,$	$[i_7, i_{14}] = i_9,$	$[i_{12}, i_{15}] = -i_{11},$
$[i_2, i_{13}] = 0,$	$[i_5, i_6] = 0,$	$[i_7, i_{15}] = 0,$	$[i_{13}, i_{14}] = -i_{15},$
$[i_2, i_{14}] = 0,$	$[i_5, i_7] = 0,$	$[i_8, i_9] = -i_{15},$	$[i_{13}, i_{15}] = i_{14},$
$[i_2, i_{15}] = 0,$	$[i_5, i_8] = 0,$	$[i_8, i_{10}] = 0,$	$[i_{14}, i_{15}] = -i_{13},$

Подгруппы Ли группы Ли вращений пространства  $R_5$  классифицируются в работе [1].

Всего получено 11 подгрупп Ли  $G_1 \dots G_{11}$  группы Ли вращений, которые задаются своими алгебрами Ли  $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{11}$  в виде:

$$\overline{G}_1 = \{i_6\},$$

$$\overline{G}_2 = \{i_6 + \varphi i_{13}\},$$

$$\overline{G}_3 = \{i_6, i_{13}\},$$

$$\overline{G}_4 = \{i_6, i_7, i_{10}\},$$

$$\overline{G}_5 = \{i_6 + i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\},$$

$$\overline{G}_6 = \{i_6 + 2i_{13}, \sqrt{3}i_{12} + i_7 + i_{11}, \sqrt{3}i_9 - i_8 + i_{10}\},$$

$$\overline{G}_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\},$$

$$\overline{G}_8 = \{i_6, i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\},$$

$$\overline{G}_9 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}\},$$

$$\overline{G}_{10} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\},$$

$$\overline{G}_7 = \{i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}\}.$$

Причем группа Ли  $G_{11}$  совпадает с группой Ли всех вращений  $H$ .

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли  $G$  группы Ли вращений пятимерного евклидова пространства  $R_5$ , соответствующая алгебре Ли с оператором

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно  $G$  одномерные, двумерные, трёхмерные и четырехмерные векторные подпространства пространства  $R_5$ , а также инвариантные прямые и  $K$ -плоскости.

Рассмотрим оператор  $i_6$ .

Найдём одномерные подпространства пространства  $R_5$ , инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$  имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda \alpha \quad (8)$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2 = \lambda \alpha_1, \alpha_1 = \lambda \alpha_2, 0 = \lambda \alpha_3, 0 = \lambda \alpha_4, 0 = \lambda \alpha_5 \quad (9)$$

Из системы (9) получим:  $-\alpha_2 = \lambda\alpha_2$ . Отсюда  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$ . При  $\lambda \neq 0$  ненулевых решений нет. При  $\lambda = 0$  получим инвариантные подпространства в виде:

$$\{pe_3 + qe_4 + re_5\}, \forall p, q, r.$$

Найдём двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом  $\{\alpha, b\}, \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$  имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda\alpha + \mu b, b i_6 = \nu\alpha + \delta b. \quad (10)$$

Или в координатном виде:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &= \lambda\alpha_1 + \mu b_1 & -b_2 &= \nu\alpha_1 + \delta b_1, \\ -\alpha_1 &= \lambda\alpha_2 + \mu b_2 & -b_1 &= \nu\alpha_2 + \delta b_2, \\ 0 &= \lambda\alpha_3 + \mu b_3 & 0 &= \nu\alpha_3 + \delta b_3, \\ 0 &= \lambda\alpha_4 + \mu b_4 & 0 &= \nu\alpha_4 + \delta b_4, \\ 0 &= \lambda\alpha_5 + \mu b_5 & 0 &= \nu\alpha_5 + \delta b_5. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы (11) можно свести к рассмотрению 10 частных случаев  $1^\circ - 10^\circ$ :

$$1^\circ. \alpha(1, 0, p, q, r), b(0, 1, \xi, t, \omega).$$

В этом случае система (11) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda, 1 = \mu, 0 = \lambda q + \mu \xi, 0 = \lambda q + \mu t, 0 = \lambda r + \mu \omega, \\ 1 = \nu, 0 = \delta, 0 = \nu p + \delta \xi, 0 = \nu q + \delta t, 0 = \nu r + \delta \omega. \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда следует:  $\xi = 0, t = 0, \omega = 0, p = 0, q = 0, r = 0$ .

Получаем инвариантное подпространство в виде:  $\{e_1, e_2\}$ .

$$2^\circ. \alpha(1, p, 0, q, r), b(0, 0, 1, \xi, t).$$

Из системы (11) получим:  $-p = \lambda, 1 = \lambda p$ . Отсюда следует противоречие:

$1 = -p^2$ . Система инвариантности противоречива.

$$3^\circ. \alpha(1, p, q, 0, r), b(0, 0, 0, 1, \xi).$$

$$4^\circ. \alpha(1, p, q, r, 0), b(0, 0, 0, 0, 1).$$

Система инвариантности (4) противоречива, т.к. из неё следует:  $p^2 = -1$ .

$$5^\circ. \alpha(0, 1, 0, p, q), b(0, 0, 1, r, \xi).$$

В этих случаях  $5^\circ, 6^\circ, 7^\circ$  система инвариантности (11) противоречива, т.к. из неё следует:  $1 = 0$ .

$$6^\circ. \alpha(0, 1, p, 0, q), b(0, 0, 0, 1, r).$$

$$7^\circ. \alpha(0, 1, p, q, 0), b(0, 0, 0, 0, 1).$$

$$8^\circ. \alpha(0, 0, 1, 0, p), b(0, 0, 0, 1, q).$$

Система инвариантности (11) принимает вид:

$$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda p + \mu q = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu p + \delta \mu = 0.$$

Инвариантные пространства принимают вид:  $\{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\}$ .

$$9^\circ. \alpha(0, 0, 1, p, 0), b(0, 0, 0, 0, 1).$$

Система инвариантности (11) принимает вид:

$$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda p = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu p = 0..$$

Получаем инвариантные подпространства в виде:

$$\{e_3 + pe_4, e_5\}.$$

$$10^\circ. a(0,0,0,1,0), b(0,0,0,0,1).$$

Система инвариантности (11) не противоречива. Получаем инвариантное подпространство:  $\{e_4, e_5\}$ .

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора  $i_6$  формулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Относительно оператора  $i_6$  инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства  $R_5: \{pe_3 + qe_4 + re_5\}, \forall p, q, r.$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\}, \{e_3 + pe_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$ .

Рассматривая аналогично инвариантные подпространства для оператора  $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$ , получаем теорему:

**Теорема 2.** Относительно оператора  $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$  инвариантно только следующее одномерное подпространство пространства  $R_5: \{e_5\}$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ .

Относительно оператора  $i_6 + i_{13}$  инвариантно только следующее одномерное подпространство:  $\{e_5\}$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1 + pe_3 + qe_4, e_2 - qe_3 + pe_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ .

Относительно оператора  $i_6 + i_{13}$  инвариантно только следующее одномерное подпространство:  $\{e_5\}$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1 + pe_3 + qe_4, e_2 + qe_3 - pe_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ .

Непосредственным вычислением доказываются следующие теоремы.

**Теорема 3.** Из подпространств, перечисленных в теореме 1, относительно оператора  $i_7$  инвариантно только одномерное подпространство:  $\{qe_4 + re_5\} \forall q, r$  и только следующее двумерное подпространство:  $\{e_4, e_5\}$ .

**Теорема 4.** Из подпространств, перечисленных в теореме 1, относительно оператора  $i_{13}$  инвариантны только следующее одномерное подпространство:  $\{e_5\}$  и только следующие двумерные подпространства:  $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ , из которых только  $\{e_5\}$  инвариантно относительно  $i_7 - i_{11}$  и  $i_8 - i_{10}$ .

**Теорема 5.** Из 1- и 2-мерных подпространств, инвариантных относительно оператора  $i_6 + i_{13}$ , относительно оператора  $i_7 - i_{11}$  инвариантно только следующее одномерное подпространство:  $\{e_5\}$ , которое инвариантно и относительно оператора  $i_8 + i_{10}$ .

**Теорема 6.** Из подпространств, перечисленных в теореме 3, относительно оператора  $i_{10}$  инвариантны только следующие одномерные подпространства:  $\{qe_4 + re_5\} \forall q, r$  и только следующее двумерное подпространство:  $\{e_4, e_5\}$ , из которых только  $\{e_4, e_5\}$  инвариантно относительно оператора  $i_{15}$  и только  $\{e_4, e_5\}$  инвариантно относительно операторов  $i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}$ .

**Теорема 7.** Из подпространств, инвариантных относительно оператора  $i_6 + \lambda i_{13}$ ,  $\lambda \neq 0, \pm 1$  (теорема 2), относительно оператора  $i_7 + i_{11} + \sqrt{3}i_{12}$  не инвариантны никакие пространства.

На основании доказанных теорем получаем следующую теорему, в которой перечисляются все инвариантные одно- и двумерные подпространства для подгрупп Ли  $G_1 \dots G_{10}$ .

**Теорема 8.** Относительно подгрупп Ли  $G_1 \dots G_{10}$  инвариантны только следующие одно- и двумерные подпространства пространства  $R_5$  :

1°. Для  $G_1 : \{pe_3 + qe_4 + re_4, \forall p, q, r, \{e_1, e_2\} \{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\} \{e_3 + pe_4, e_5\} \{e_4, e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 1.

2°. Для  $G_2 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ , при  $\lambda \neq 0, \pm 1$ .  
 $\{e_5\}, \{e_1 + pe_3, qe_4, e_2 - qe_3 + pe_4\} \{e_1, e_2\} \{e_3, e_4\}$ , при  $\lambda = 1$ ,  
 $\{e_5\}, \{e_1 + pe_3, qe_4, e_2 + qe_3 + pe_4\} \{e_1, e_2\} \{e_3, e_4\}$ , при  $\lambda = -1$ . Доказательство следует по теореме 2.

3°. Для  $G_3 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$ . Доказательство следует по теореме 1.

4°. Для  $G_4 : \{qe_4 + re_5\}, \forall q, r, \{e_4, e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 6.

5°. Для  $G_5 : \{e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 2.

6°. Для  $G_6$  : , нет инвариантных подпространств.

7°. Для  $G_7 : \{e_4, e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 6.

8°. Для  $G_8 : \{e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 4.

9°. Для  $G_9 : \{e_4, e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 6.

10°. Для  $G_{10} : \{e_5\}$ . Доказательство следует по теореме 6.

Используя найденные инвариантные подпространства относительно подгрупп Ли  $G_1 \dots G_{10}$ , находим далее образы стационарности для этих подгрупп. В результате получаем теорему.

**Теорема 9.** Среди подгрупп  $G_1 \dots G_{10}$  флаговые образы стационарности имеют только следующие подгруппы:

1° Для  $G_1$  образом стационарности является флаг  $[O, R_3^\circ]$ , где  $\circ$  означает точечную неподвижность соответствующей плоскости.

2° Для  $G_3$  образом стационарности является прямая и две ортогональные ей попарно ортогональные 2-плоскости.

3° Для  $G_4$  образом стационарности является флаг  $[O, R_2^\circ]$ .

4° Для  $G_7$  образом стационарности является флаг  $[O, R_2]$ .

5° Для  $G_{10}$  образом стационарности является флаг  $[O, R_1]$ .

Подгруппы Ли  $G_1, G_5, G_6, G_8, G_9$  не имеют флаговых образов стационарности.

**Замечание 1.** Все инвариантные четырёхмерные подпространства пространства  $R_5$  относительно группы Ли  $G_i$  получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам, а инвариантные трёхмерные под-

пространства находятся как ортогональные дополнения к инвариантным двумерным. Таким образом, теорема 8 классифицирует все инвариантные подпространства пространства  $R_5$  относительно всех подгрупп Ли вращений группы Ли движений пространства  $R_5$ .

**Замечание 2.** Каждому инвариантному подпространству  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  соответствует инвариантная  $k$ -плоскость:  $[0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$  и обратно. Таким образом, теорема 8 даёт классификацию всех инвариантных прямых и  $k$ -плоскостей пространства  $R_5$  относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  $R_5$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учёные записки Казан. гос. ун-та. – 1966. – Т. 126, кн. 1. – С. 13–22.
2. Копп, В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца / В. Г. Копп // Учёные записки Казан. гос. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 59–77.
3. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли / И. В. Белько, А. С. Феденко // Доклады АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 6. – С. 393–395.
4. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
5. Юдов, А. А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидового пространства нулевой сигнатуры / А. А. Юдов // Вестн. БГУ имени В.И. Ленина. – 1977. – № 1. – С. 16–21.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.04.2015

**Bet A.V., Judov A.A. Invariant Characteristics of Subgroups Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space**

*The work is devoted to the study of the properties of a subgroup of the Lie group of motions of three-dimensional Euclidean space  $R_5$ . For all subgroups of the Lie group of rotations of  $R_5$  are all invariant subspaces invariant and all direct and  $k$ -plane.*

УДК 917.948

**В.М. Мадорский**

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ  
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ**

Для решения нелинейного операторного уравнения с гладким оператором рассматривается не-локальный нерегуляризованный итерационный процесс и на его примере исследуется общий подход для получения выпуклой области, где решение существует и единственно.

Для анализа проблемы рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где  $f(D \subset R^n \rightarrow R^n)$ , для решения которого предлагается следующий квазиньютоновский нерегуляризованный итерационный процесс:

*Шаг 1:* Решается линейная система для определения поправки  $\Delta x_n$

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2)$$

*Шаг 2:* Вносится поправка в  $x_n$  и определяется очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (3)$$

*Шаг 3:* Проверяется условие окончания итерационного процесса:

если  $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\varepsilon$  – параметр останова, то конец просчетов, иначе переход на

*Шаг 4:* Определяется новая шаговая длина: если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе производится пересчет  $\beta_{n+1}$  по формуле

$$\beta_{n+1} = \min \left( 1, \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} \right), \quad \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \quad \gamma_0 = \beta_0^2, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (4)$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Пусть оператор  $f$  в интересующей нас области  $D$  удовлетворяет условиям: отображение  $f$  является  $G$ -дифференцируемым на выпуклом множестве  $D$ ,

$$\|f'(x)\| \leq M < +\infty \quad \forall x \in D, \quad \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B, \quad \forall x \in D, \quad (5)$$

производная  $f'(x)$  удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой  $L$  и в  $D$  существует решение  $x^*$  уравнения (1). Тогда относительно процесса (2)–(4) справедлива

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (5). Тогда итерационный процесс (2)–(4) при  $\varepsilon_0 = LB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$ , со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к  $x^*$  – решению уравнения (1). Оценка погрешности  $n$ -ого при-

ближения имеет вид  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{B \|f(x_0)\| q_0^n}{1 - q_0}$ .

Доказательство. Докажем релаксационность процесса (2)–(4). Используя условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \|f(x_n) - \sqrt{\beta_n} f(x_n)\| + LB^2 \beta_n \|f(x_n)\|^2 = (1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $\varepsilon_n = LB^2 \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|$ ,  $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)$ .

Покажем, что имеет место равенство  $\sqrt{\beta_{n+1}} \|f(x_{n+1})\| = \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|$ , для чего рассмотрим отношение

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+2})\|^2 \beta_{n+1}^2} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_0)\|^2}{\beta_{n+1} \|f(x_{n+2})\|^2 \beta_{n+1}^2}.$$

После несложных преобразований имеем, что

$$\sqrt{\beta_{n+2}} \|f(x_{n+2})\| = \sqrt{\beta_{n+1}} \|f(x_{n+1})\|. \quad (7)$$

Из условий теоремы и (7) следует, что все  $\varepsilon_i = \varepsilon_0$  и если  $\beta_0$  и  $x_0$  таковы, что  $\varepsilon_0 = LB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$ , то  $q_0 < 1$  и  $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1$ . Пусть  $n = 0$ , тогда из (6) следует, что

$$\|f(x_1)\| \leq q_0 \|f(x_0)\| \leq \|f(x_0)\|, \quad (8)$$

а из (7) имеем, что

$$\sqrt{\beta_1} \|f(x_1)\| = \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\|. \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (8), имеем  $\sqrt{\beta_1} > \sqrt{\beta_0}$  и  $q_1 = 1 - \sqrt{\beta_1}(1 - \varepsilon_1) < 1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0) = q_0$ .

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность  $\{\beta_i\} \uparrow 1$ , а последовательность  $\{q_i\} \downarrow 0$ .

Переходя к пределу в (6) при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из (10) следует, что  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x^*) = 0$ , тем самым сходимость итерационного процесса к решению доказана.

Покажем, что в процессе счёта существует номер  $k_0$ , что при  $i \geq k_0$  все  $\beta_i := 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1} \|f(x_0)\|^2}{\beta_{n-1} \|f(x_{n+1})\|^2} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 \|f(x_0)\|^2}{\beta_0 \|f(x_{n+1})\|^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0 \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0 \|f(x_0)\|^2}{\prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\|} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) и (4) следует, что  $\exists k_0$  такое, что для всех  $i \geq k_0$ ,  $\beta_i := 1$ . С этого момента процесс (2)–(4) переходит в классический метод Ньютона, с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Теорема 1 доказана.

Пусть при некотором  $i$   $\beta_i := 1$  тогда в силу условий теоремы



$$\begin{aligned} \|f(x_{i+1})\| &= \|f(x_i - [f'(x_i)]^{-1} f(x_i))\| \leq \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq L \|\Delta x_i\|^2 = l_i \|\Delta x_i\| / B; l_i = LB \|\Delta x_i\|. \end{aligned}$$

$$\|f(x_{i+2})\| = l_{i+1} \|\Delta x_{i+1}\| / B \leq BL \|\Delta x_{i+1}\| l_i \|\Delta x_i\| / B \leq l_i^3 \|\Delta x_i\| / B.$$

Индуктивно получим оценку

$$\|f(x_{i+n})\| \leq l_i^{2n-1} \|\Delta x_i\| / B.$$

Нетрудно найти радиус сферы с центром  $x_i$ . Если  $l_i < 1$ , то

$$\begin{aligned} r_{\exists} &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \|\Delta x_j\| = \|\Delta x_i\| + B \|f(x_{i+1})\| + B \|f(x_{i+2})\| + \dots \leq \\ &\leq \|\Delta x_i\| + l_i \|\Delta x_i\| + l_i^3 \|\Delta x_i\| + \dots < \|\Delta x_i\| / (1 - l_i). \end{aligned} \quad (12)$$

Наряду с (12) имеем

$$r_{\exists} \leq \|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i). \quad (13)$$

Найдем радиус области единственности решения уравнения в сфере  $S(x_i, r)$ , где  $r$  – радиус области, где решение единственно, точнее найдем условия, при выполнении которых в области  $S(x_i, r)$  не более одного решения. Положим, что  $S(x_i, r)$  существуют два решения  $x^*$  и  $x^{**}$ . Тогда справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{**}\| &= \|x^* - x^{**} - [f'(x_i)]^{-1} (f(x^*) - f(x^{**}))\| \leq \\ &\leq \|[f'(x_i)]^{-1}\| \cdot \|f'(x_i)(x^* - x^{**}) - (f(x^*) - f(x^{**}))\| \leq \\ &\leq B \sup_{0 \leq \Theta \leq 1} \|f'(x^{**} + \Theta(x^* - x^{**})) - f'(x_i)\| \|x^* - x^{**}\| \leq B L r \|x^* - x^{**}\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Если в (14) потребовать, чтобы  $BLr = q < 1$  или

$$r = \frac{q}{BL} = \frac{q \|\Delta x_i\|}{BL \|\Delta x_i\|} = \frac{q \|\Delta x_i\|}{l_i}, \quad (15)$$

то в сфере  $S(x_i, r)$  будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\|\Delta x_i\| / (1 - l_i) \leq \frac{q}{BL} = q \|\Delta x_i\| / l_i, \quad (16)$$

которое равносильно утверждению  $r_{\exists} \leq r$ . Из (13) следует оценка  $l_i$ :

$$l_i \leq q / (1 + q) = F(q) < 1. \quad (17)$$

Если в качестве  $r_{\exists}$  взять правую часть соотношения (13) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i) \leq \frac{q \|\Delta x_i\|}{l_i}, \quad (18)$$

то неравенство (18) также равносильно утверждению того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Из (18) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \leq \left( \frac{q}{l_i} - 1 \right) \cdot (1 - l_i) = G(l_i). \quad (19)$$

Так как  $G'(l_i) < 0$ , то имеет место соотношение

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \leq \left( \frac{q}{F(q)} - 1 \right) \cdot (1 - F(q)), \quad (20)$$

откуда будет следовать соотношение (19), которое является следствием утверждения того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Пусть выполняется неравенство (20). Тогда соотношение (20) можно переписать в следующем виде:

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| + \frac{F(q)}{1 - F(q)} \cdot \|\Delta x_{i+1}\| + \left( \frac{F(q)}{1 - F(q)} \right)^2 \|\Delta x_{i+1}\| + \dots \leq \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}. \quad (21)$$

Левая часть неравенства (21) мажорирует левую часть соотношения (18), а правая часть (21) минорирует правую часть (18). Следовательно, из выполнения (20) следует выполнение (19), которое есть условие того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Таким образом, для проверки того, что в области  $D$  решение существует и единственно, в условиях сходящегося ньютоновского процесса (с  $\beta_i = 1 \quad \forall i$ ) производим проверку выполнимости условия (20) с  $q \in (0, 1)$ .

Если это условие при некотором  $k \geq i$  выполняется, то мы находимся в сфере  $S(x_k, r)$ , в которой решение  $x^*$  существует и единственно. Радиус этой сферы находим из соотношения  $r = \sum_{i=k}^n \|\Delta x_i\|$ , где номер  $n$  находим из условия

$$\|f(x_n)\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon \sim (1e - 9) - (1e - 11), \quad \text{или} \quad r = \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}.$$

Радиус сферы  $D = S(x_i, r)$  и оценку погрешности  $n$ -го приближения, используя метод математической индукции, находим стандартным образом:

$$\|x_n - x^*\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} B \sqrt{\beta_i} \|f(x_i)\| \leq B \|f(x_i)\| (q_i^n + q_i^{n+1} + \dots) < \frac{B \|f(x_i)\| q_i^n}{1 - q_i},$$

при этом радиус сферы, где имеют место соотношения (5), имеет вид

$$r = \frac{B \|f(x_0)\|}{1 - q_0}, \quad q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0).$$

Таким образом, нами доказана

**Теорема 2.** Пусть в условиях сходящегося процесса Ньютона и выполнения условий теоремы 1 имеет место соотношение (20) при некотором  $i$ . Тогда в сфере

$S(x_i, r)$ ,  $r = \frac{q \|\Delta x_i\|}{F(q)}$  решение уравнения (1) существует и единственно.

**Замечание 1.** Обратимость оператора  $f'(x)$  в области  $D$  является также достаточно обременительным условием.

В связи с вышесказанным, следуя идее работы [1], найдем условия, при которых при переходе от точки  $x_0$ , в которой  $[f'(x_0)]^{-1}$  существует, к точке  $x_1$  будет существовать ограниченный обратный оператор  $[f'(x_1)]^{-1}$ . Если  $f \in C_D^{(2)}$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|E - [f'(x_0)]^{-1} f'(x_0)\| = \|[f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0) - f'(x_1))\| \leq \\ & \leq \|[f'(x_0)]^{-1}\| \cdot \|f'(x_0) - f'(x_1)\| \leq B_0 K \|x_1 - x_0\| = B_0 K \|\Delta x_0\| = l_0. \end{aligned}$$

Здесь  $\|[f'(x_0)]^{-1}\| = B_0$ ,  $E$  – единичный оператор.

Если  $l_0 < 1$ , то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору  $[f'(x_0)]^{-1} f'(x_1)$ , и справедлива оценка  $\|[f'(x_1)]^{-1}\| \leq B_0(1 - l_0)^{-1}$ .

Если для получения элемента  $x_1$  использовать метод Ньютона, имеем оценку

$$\|f(x_1)\| = \left\| f\left(x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\right) \right\| \leq L \|\Delta x_0\|^2 < l_0 \|\Delta x_0\| / B_0. \quad (22)$$

Определим  $l_0$  так, чтобы при переходе от точки  $x_0$  к точке  $x_1$  выполнялось неравенство  $l_1 \leq l_0$ . Имеем

$$\begin{aligned} l_1 = B_1 L \|\Delta x_1\| & \leq B_0(1 - l_0)^{-1} L B_1 \|f(x_1)\| \leq \frac{B_0^2(1 - l_0)^2 L l_0 \|\Delta x_0\|}{B_0} = \\ & = B_0 L \|\Delta x_0\| l_0 / (1 - l_0)^2 = l_0^2 / (1 - l_0)^2. \end{aligned}$$

Неравенство  $l_1 \leq l_0$  справедливо при  $l_0 \leq \frac{1}{2}$ . Нетрудно найти радиус области существования решения уравнения (1) в сфере  $S(x_0, r_{\exists})$ . Учитывая (22), имеем оценку для сходящегося процесса Ньютона

$$\begin{aligned} r_{\exists} & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + B_1 \|f(x_1)\| + B_2 \|f(x_2)\| + \dots \leq \\ & \leq \|\Delta x_0\| + \frac{l_0}{1 - l_0} \|\Delta x_0\| + \left(\frac{l_0}{1 - l_0}\right)^2 \|\Delta x_0\| + \dots \leq \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Наряду с оценкой (20) может быть получена оценка (23).

$$\begin{aligned} r_{\exists} & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + \|\Delta x_1\| + \frac{l_1}{1 - l_1} \|\Delta x_1\| + \\ & + \left(\frac{l_1}{1 - l_1}\right)^2 \|\Delta x_1\| + \dots \leq \|\Delta x_0\| + \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_1\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия, при выполнении которых в области  $S(x_0, r)$  не более одного решения, рассмотрены нами выше.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\| \leq \frac{q}{B_0 L} = \frac{q \|\Delta x_0\|}{l_0}, \quad (25)$$

которое равносильно утверждению  $r_{\exists} \leq r$ . Из (25) следует оценка  $l_0$ :

$$l_0 \leq \frac{1+2q - \sqrt{1+4q^2}}{2} = F_1(q) < 1. \quad (26)$$

Если в качестве  $r_{\exists}$  взять правую часть соотношения (24) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_0\| + \frac{1-l_0}{1-2l_0} \|\Delta x_1\| \leq \frac{q\|\Delta x_0\|}{l_0}, \quad (27)$$

то неравенство (27) также равносильно утверждению того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Из (27) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \leq \left( \frac{q}{l_0} - 1 \right) \cdot \frac{1-2l_0}{1-l_0} = G(l_0). \quad (28)$$

Так как  $G'(l_0) < 0$ , тогда из выполнения соотношения

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \leq \left( \frac{q}{F(q)} - 1 \right) \cdot \frac{1-2F_1(q)}{1-F_1(q)} \quad (29)$$

будет следовать соотношение (28), которое является следствием утверждения того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Таким образом, нами доказана

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда если в условиях сходящегося вычислительного процесса (2) – (4) при некотором  $x_0$  выполняется условие

(29), то в сфере  $S\left(x_0, \frac{q\|\Delta x_0\|}{F_1(q)}\right)$  решение уравнения (1) существует и единственно.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных граничных задач / В. М. Мадорский // Изв. ВУЗов СССР. Сер. матем. наук. – 1986. – № 12. – С. 45–57.
3. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 2. – С. 113–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2015

#### **Madorski V.M. On the Existence and Uniqueness Solutions of Nonlinear Equations**

*For solving nonlinear operator equation with a smooth operator is considered a non-local nonregularized iterative process and his example we study the general approach for convex region where a solution exists and is unique.*

УДК 517.5

**А.М. Пиддубный**

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений и математической физики  
 Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки  
 (г. Луцк, Украина)

### КЛАССЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе изучаются классы аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Найдены условия вложения рассматриваемых классов.

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и некоторые известные факты, используемые в работе. Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  – единичный круг,  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  – единичная окружность комплексной плоскости,  $\bar{D} = D \cup T$ . В данной работе изложены результаты исследования поведения производных высших порядков аналитических функций в контексте такой теоремы.

**Теорема Харди – Литтлвуда [1].** Пусть  $f$  – функция, аналитическая в круге  $D$ ,  $0 < \alpha < 1$  и  $\beta > \alpha$ . Для того, чтобы  $f$  была непрерывной в  $\bar{D}$  и

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\alpha, \quad z_1, z_2 \in \bar{D}, \quad C = \text{const} > 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы  $|f^{(\beta)}(z)| \leq \frac{KC}{(1-|z|)^{\beta-\alpha}}, \quad \forall z \in D,$

где  $f^{(\beta)}(z) := \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)} f_k z^{k-\lceil \beta \rceil}$ ,  $f_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ,  $z \in D$ , – дробная производная порядка  $\beta$  в смысле Римана – Лиувилля (например, [2, § 22]),  $K = K(\alpha, \beta) = \text{const}$ .

**Определение 1.** Пускай  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  – непрерывная возрастающая функция,  $\lambda(0) = 0$ . Будем говорить, что функция  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  принадлежит классу  $Lip_\lambda(D)$ , если

$$|f|_{Lip_\lambda} := \sup_{z_1, z_2 \in D} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

Если при этом функция  $f$  аналитическая в  $D$ , то будем писать  $f \in ALip_\lambda(D)$ , а если к тому же  $f$  является непрерывной в  $\bar{D}$ , то будем писать  $f \in ALip_\lambda(\bar{D})$ .

Обозначим через  $A(\bar{D})$  пространство функций, аналитических в  $D$  и непрерывных в  $\bar{D}$  с нормой  $\|f\| := \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ .

**Замечание 1.** Если  $f \in ALip_\lambda(\bar{D})$ , то  $|f|_{Lip_\lambda} = \sup_{z_1, z_2 \in T} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty$ .

В этом легко убедиться, рассмотрев функции, которые являются алгебраическими многочленами, а затем воспользоваться теоремой о плотности алгебраических многочленов в пространстве  $A(\bar{D})$ .

Вполне понятно также, что  $ALip_\lambda(\bar{D}) \subset ALip_\lambda(D) \subset H_\infty$ , где  $H_\infty$  – пространство ограниченных аналитических функций.

**Определение 2.** Пускай  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+$  – непрерывная возрастающая функция,  $\lambda(t) > 0, t > 0, \lambda(0) = 0$ . Будем говорить, что функция  $f : D \rightarrow C$  принадлежит классу  $\mathfrak{B}_\lambda^k$ , если  $|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} := \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^k}{|\lambda(1-|z|)|} |f^{(k)}(z)| < \infty$ .

**Замечание 2.** Для того, чтобы классы  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  были не тривиальными, т.е. состояли не только из алгебраических многочленов степени не выше  $k-1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0$ .

Действительно, достаточность этого утверждения очевидна, а необходимость можно установить с помощью следующих соображений.

Пускай функция  $f$  не является алгебраическим многочленом степени не выше  $k-1$ , т.е.  $f^{(k)} \neq 0$ . Тогда найдётся  $m \in Z_+$  такое, что

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2^m} \frac{(m+k)!}{m!} |f_{m+k}^r| \leq r^m \frac{(m+k)!}{m!} |f_{m+k}^r| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(k)}(re^{it}) e^{-imt} dt \right| \leq \frac{\lambda(1-r)}{(1-r)^k} \quad \forall r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Эти соотношения и доказывают достаточность.

Вернемся еще раз к теореме Харди – Литтлвуда. Пусть  $\lambda(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$ , и  $\beta = k, k \in N$ . Тогда теорему Харди – Литтлвуда в принятых обозначениях можно переписать в таком виде: для аналитической в круге  $D$  функции  $f$

$$|f|_{Lip_\lambda} < \infty \Leftrightarrow |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} < \infty,$$

или в равносильной форме

$$ALip_\lambda(D) = \mathfrak{B}_\lambda^k, \quad k \in N. \quad (1)$$

Возникает задача: при каких условиях на функцию  $\lambda(t)$  равенство (1) будет иметь место в общем случае, т.е. описать множество всех неубывающих функций  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+, \lambda(t) > 0, t > 0$ , для которых выполняется равенство (1).

Связь между классами  $ALip_\lambda(D)$  и  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  описывается следующими двумя утверждениями.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+$  – непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0, t > 0$ , и  $\lambda(0) = 0$ . Тогда

$$ALip_\lambda(D) \subset \mathfrak{B}_\lambda^1 \subset \mathfrak{B}_\lambda^2 \subset \dots \subset \mathfrak{B}_\lambda^k \subset \dots \quad (2)$$

**Доказательство.**

Первое вложение можно считать известным фактом [3], но не будет лишним привести его доказательство, которое основывается на технике К-функционала. Известно, что К-функционал дробного порядка  $r$  в пространстве  $A(\overline{D})$  определяется так:

$$K_r(\delta, f) := \inf_{g: g^{(r)} \in H_p} \left( \|f - g\| + \delta \|g^{(r)}\| \right), \quad 0 < p \leq \infty.$$

Пусть  $f \in ALip_\lambda(D)$ . По формуле Коши для произвольной аналитической функции  $g$ , такой, что  $g' \in A(\overline{D})$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) - g(e^{it})}{(Re^{it} - z)^2} Re^{it} dt + g'\left(\frac{z}{R}\right), \quad |z| < R < 1.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{|Re^{it} - z|^2} dt + \|g'\| \leq \\ &\leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{R - |z|} + \|g'\|. \end{aligned}$$

Следовательно  $(R - |z|)|f'(z)| \leq \|f(R\cdot) - g\| + (1 - |z|)\|g'\|$ .

Поскольку функция  $g$  является произвольной, то последнее неравенство значит, что

$$(R - |z|)|f'(z)| \leq K(1 - |z|, f_R), \quad (3)$$

где  $f_R(z) := f(Rz)$ .

Известно (например, [4, с. 177]), что для произвольной функции  $F \in A(\overline{D})$

$$K(\delta, F) \leq C\omega(\delta, F), \quad \delta > 0,$$

где  $C$  – абсолютная константа и  $\omega(\delta, F) := \sup_{|t-\delta|} |F(e^{it}) - F(\square)|$  – модуль непрерывности функции  $F$ . Поэтому, сочетая этот факт с (3), а также учитывая определение величины  $|f|_{Lip_\lambda}$  и монотонность функции  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} (R - |z|)|f'(z)| &\leq C\omega(1 - |z|, f_R) = \\ &= C \sup_{|t|\leq 1-|z|} \|f(Re^{it}\square) - f(R\square)\|_{C(T)} \leq C|f|_{Lip_\lambda} \sup_{|t|\leq 1-|z|} \lambda(R|e^{it} - 1|) = \\ &= C|f|_{Lip_\lambda} \sup_{|t|\leq 1-|z|} \lambda\left(2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right) \leq C|f|_{Lip_\lambda} \lambda(R(1 - |z|)). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow 1-$ , получим  $\frac{1 - |z|}{\lambda(1 - |z|)}|f'(z)| \leq C|f|_{Lip_\lambda} < \infty \quad z \in D$ ,

а это значит, что  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^1$ .

Для доказательства остальных вложений в (2) достаточно показать, что  $\mathfrak{B}_\lambda^1 \subset \mathfrak{B}_\lambda^2$ . Для этого воспользуемся формулой:

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad |z| < R < 1.$$

Получаем

$$\begin{aligned} |f''(z)| &\leq \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \\ &\leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 - 2R|z|\cos\theta - |z|^2} = \\ &= |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{R}{R^2 - |z|^2} \leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{1}{R - |z|}. \end{aligned}$$

Положим теперь  $R = \frac{1 + |z|}{2}$ . Тогда из предыдущей оценки следует соотношение

$$|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^2} = \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^2}{\lambda(1-|z|)} |f''(z)| \leq 4 |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \sup_{z \in D} \frac{\lambda \left( \frac{1-|z|}{2} \right)}{\lambda(1-|z|)} \leq 4 |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1},$$

которое и требовалось доказать.

Вложения  $\mathfrak{B}_\lambda^k \subset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ , следуют из доказанного с помощью подстановки  $f' := f^k$ .

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda: R_+ \rightarrow R_+$  — непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda(0) = 0$ . Тогда:

- 1)  $\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t} dt = O(1)\lambda(x)$ ,  $x > 0 \Rightarrow ALip_\lambda(\bar{D}) \supset \mathfrak{B}_\lambda^1$ ;
- 2) если  $k \in N$ , то  $\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x^k}$ ,  $0 < x < 1 \Rightarrow \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ ;
- 3)  $\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x}$ ,  $0 < x < 1 \Rightarrow \mathfrak{B}_\lambda^1 \supset \mathfrak{B}_\lambda^2 \supset \dots \supset \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \dots$

**Доказательство.** Утверждение пункта 1) является непосредственным следствием теоремы Я.Л. Геронимуса [5, теорема 4].

Докажем теперь пункт 2). Прежде всего отметим, что при условии

$$\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x^k}, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

для функции  $\lambda$  имеет место неравенство

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0. \quad (5)$$

Пускай теперь  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ . Исходя из равенства

$$f^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k+1)}(\zeta) d\zeta + f^{(k)}(0), \quad z \in D,$$

где интегрирование ведётся вдоль отрезка, который соединяет точки 0 и  $z$ , на основании условия (4) получаем оценку

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &\leq \int_0^{|z|} |f^{(k+1)}(\zeta)| d\zeta + |f^{(k)}(0)| \leq \\ &\leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} \int_0^{|z|} \frac{\lambda(1-\zeta)}{(1-\zeta)^{k+1}} d\zeta + |f^{(k)}(0)| = \\ &= O(1) |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} \frac{\lambda(1-|z|)}{(1-|z|)^k} + |f^{(k)}(0)|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5), получаем соотношение

$$\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} |f^{(k)}(z)| < O(1) |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} + |f^{(k)}(0)| \frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} < \infty,$$

которое и доказывает, что  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^k$ .

Чтобы доказать пункт 3), отметим, что условие (4), как показано в [6], равно-

сильно такому:  $\exists C > 1: \limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} < C^k$ .



Следовательно, если выполняется условие (4) при  $k = 1$ , то существует постоянная  $C > 1$ , такая, что  $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} < C < C^2 < C^3 < \dots < C^k \dots$ , т.е. условие (4) выполняется для каждого натурального  $k$ . Этот факт на основании уже доказанного пункта 2) доказывает пункт 3).

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем

**Следствие.** Пусть  $\lambda: R_+ \rightarrow R_+$  — непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda(0) = 0$ . Если выполняется условие

$$\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t} dt + x \int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2} dt = O(1)\lambda(x), \quad 0 < x < 1,$$

то  $ALip_\lambda(\bar{D}) = ALip_\lambda(D) = \mathfrak{B}_\lambda^1 = \mathfrak{B}_\lambda^2 = \dots = \mathfrak{B}_\lambda^k = \dots$

**Замечание 3.** Последнее утверждение характеризует классы  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  в терминах модуля непрерывности первого порядка. Характеристики классов  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  в терминах модулей непрерывности высших порядков получены в работах [7–9].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy, G. Some properties of fractional integrals. II / G. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1931. — Vol. 34. — P. 403–439.
2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск, 1987. — 688 с.
3. Брудный, Ю. А. Обобщение одной теоремы Харди и Литтлвуда / Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз // Матем. сб. — 1960. — Т. 52, № 3. — С. 891–894.
4. DeVore, R. A. Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1993. — 462 p.
5. Геронимус, Я. Л. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе / Я. Л. Геронимус // Матем. сб. — 1956. — Т. 38, № 3. — С. 319–330.
6. Бари, Н. К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5 — С. 483–522.
7. Zygmund, A. Smooth functions / A. Zygmund // Duke Mathematics Journal. — 1945. — Vol. 12. — P. 47–76.
8. Ковальчук, Р. Н. О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса  $H_p$  ( $p \geq 1$ ) / Р. Н. Ковальчук // Теор. функций, функционал. анализ и их приложения. — 1969. — Т. 9. — С. 14–20.
9. Kryakin, Y. q-Moduli of Continuity in  $H_p(D)$ ,  $p > 0$ , and an Inequality of Hardy and Littlewood / Y. Kryakin, W. Trebels // Journal Approx. Theory. — 2002. — Vol. 115. — P. 238–259.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 09.04.2015

**Piddubny O.M. Classes of Analytic Functions in the Unit Disk of the Complex Plane**

*In this paper we researched classes of analytic functions in the unit disc of the complex plane. Conditions are found investments considered classes.*

УДК 519.6 + 517.983.54

**В.Ф. Савчук<sup>1</sup>, О.В. Матысик<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.,  
зав. каф. прикладной математики и технологий программирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА  
В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ  
С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ**

Для решения линейных операторных уравнений I рода с ограниченным несамосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается возможность применения правила останова по соседним приближениям, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость метода, получена оценка для момента останова.

**1. Постановка задачи.**

В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A$  – оператор несамосопряженный и ограниченный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Однако нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что  $y \in R(A)$ , т.е. при точной правой части  $y$  уравнение имеет единственное решение  $x$ . Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} \left[ Bx_n + (A^* A)^{2k-1} A^* y \right], \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где  $E$  – единичный оператор, а  $B$  – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмем оператор  $B = bE, b > 0$ . Обычно правая часть уравнения неизвестна, а вместо неё известно  $y_\delta$ , такое, что  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . Тогда метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} \left[ Bz_n + (A^* A)^{2k-1} A^* y_\delta \right] + \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} B u_n, \quad z_0 \in H, \quad k \in N, \quad (3)$$

где  $u_n$  – ошибки вычисления итераций,  $\|u_n\| \leq \beta$ . Обозначим  $C = \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} B$ ,

$D = \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} (A^* A)^{2k-1} A^*$ , тогда итерационный метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n. \quad (4)$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора  $A$ . Там доказано, что при условии  $b > 0$  метод (3) сходится и в предположении, что точное решение  $x$  уравнения (1) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности.

**2. Правило останова по соседним приближениям.**

В том случае, когда истокорпредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2; 3]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент останова  $m$  определим неравенствами

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

**Лемма 1.** Пусть приближение  $\omega_n$  определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + Dy + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Тогда справедливо неравенство  $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ .

Доказательство.

Из (6) при  $n = k$  имеем  $Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - Dy$ . Отсюда, используя равенство  $A^*Ax = A^*y$ , получим

$$\begin{aligned} u_k &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}Dy = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \\ &- \left[ (A^*A)^{2k} + B \right] \left[ (A^*A)^{2k} + B \right]^{-1} (A^*A)^{2k-1} A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - (A^*A)^{2k} x = \\ &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x). \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta_k = \omega_k - x$ , тогда  $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$ , откуда  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - \\ &- 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left( C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Покажем, что  $(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$ ,  $k \geq 0$ . Имеем  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ ,  $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ , тогда  $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$ ,  $\omega_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$ , отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (8) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) + \\
&+ 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \\
&+ 2 \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - \\
&- 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,
\end{aligned}$$

где  $\gamma_n = 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}$ . Нетрудно

показать, что  $\gamma_n \geq 0$  при любых  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

Тогда  $\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k)$ . Используя равенство (9), по-

лучим  $\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2$ ,

откуда  $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ . Лемма 1 доказана.

Имеет место

**Лемма 2.** При  $\forall \omega_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \quad (10)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \leq \|C\|\beta + \\
&+ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|C\|\beta + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta,
\end{aligned}$$

так как  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 = 0$ . Отсюда следует (10). Лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $t$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta)(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ .

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (11)$$

При  $n = 1$  из  $z_n = C z_{n-1} + D y_\delta + C u_{n-1}$  имеем  $z_1 = C z_0 + D y_\delta + C u_0$ , из (11) получим то же самое, т.е. при  $n = 1$  формула (11) верна. Предположим, что (11) верна при  $n = p$ , т.е.  $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{p-k-1})$  и докажем её справедливость при  $n = p + 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} z_{p+1} &= C z_p + D y_\delta + C u_p = C \left( C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + D y_\delta + C u_p = \\ &= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} D y_\delta + u_{p-1} + D y_\delta + C u_{p-2} + C D y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\ &\quad + C^{p-2} D y_\delta + C^{p-1} u_0) + D y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + C (D y_\delta + C u_{p-1} + \\ &\quad + C D y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} D y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} D y_\delta + u_p) = \\ &= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} D y_\delta + u_{p-k}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (11) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} D y + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) D y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_0 = \omega_0$ , получим

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\ &= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \end{aligned}$$

$$+ C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y + A^{-1}(E - C^{n+1})y - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - \\ - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}C^n(E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n D(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n D(y - y_\delta)\|. \quad (12)$$

Обозначим  $\sigma = D(y - y_\delta)$ , тогда

$$\|C^n D(y - y_\delta)\| = \|C^n \sigma\| = \left\| \int_{-M}^M \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^M \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| + \\ + \left\| \int_{-M}^0 \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| = \|I_1\| + \|I_2\|.$$

Каждый из полученных интегралов разобьём на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma + \int_{\varepsilon_0}^M \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma.$$

$$\text{Так как } \frac{b}{\lambda^{2k} + b} \leq q(\varepsilon_0) < 1 \text{ для } \lambda \geq \varepsilon_0,$$

$$\text{то } \left\| \int_{\varepsilon_0}^M \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \sigma \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\sigma\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\text{А для первого интеграла } \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \sigma \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$$

в силу свойств спектральной функции. Таким образом,  $\|I_1\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Аналогично  $\|I_2\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\|C^n D(y - y_\delta)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\|. \quad \text{Из леммы 2 вытекает неравенство}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Следовательно, условием  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$  момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$  и  $u_n, \|u_n\| \leq \beta$ .

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова  $m'$  условием

$$\left. \begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|D\|\delta, \quad (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| &\leq \varepsilon - \|D\|\delta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (12) следует, что  $m \leq m'$ . Из леммы 1 при  $n = m'$

$$\text{получим } \sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2, \text{ поэтому справедливо}$$

$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$ . Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (13) при  $n < m'$  имеем  $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|D\|\delta$ ,

то  $m'(\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$ . Учитывая, что  $\omega_0 = z_0$  и  $m \leq m'$ , из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \leq m' \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} DC^k y. \quad (14)$$

Предположим, что (14) верно, тогда

$$\begin{aligned} x - C^n x &= D(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y, \\ (E - C^n)x &= D(E - C^n)(E - C)^{-1}y, \\ (E - C^n)x &= A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax, \\ (E - C^n)x &= (E - C^n)x. \end{aligned}$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (14) доказана.

Из (11) вычтем (14), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (15)$$

Отсюда  $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]$ , где  $\Delta_n = z_n - x$

и  $\Delta_0 = z_0 - x$ . Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|D\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (16)$$

В частности, (16) справедливо и при  $n = m$ . Если  $m \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$ , тогда, как показано ранее,  $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ . Поэтому для доказательства

$\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  достаточно показать, что  $m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ . Из (15) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n D(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (17)$$

Так как спектр оператора  $C = \left[ (A^* A)^{2k} + B \right]^{-1} B$  принадлежит  $[0, 1]$ , то можно доказать, что

$$\|C^n (E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (18)$$

Поэтому из (17) получим при  $n = m - 1$

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} D(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|D\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как  $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$  ([4]).

Так как по условию теоремы  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p)$ ,  $d > 1, p \in (0, 1)$ , то при всех достаточно малых  $\delta, \beta$  выполняется неравенство  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$ , поэтому из б) получим

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}.$$

Поскольку  $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$ , то  $\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$ .

Отсюда получим, что

$$m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $\|D\|\delta + \|C\|\beta$ , получим

$$m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| (\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)} \right]}. \text{ При } m \rightarrow \infty \text{ множитель}$$

$\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0$ , а дробь  $\frac{2(\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)} \right]}$  ограничена при

$\delta, \beta \rightarrow 0$ . Поэтому  $m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$ , при  $m \rightarrow \infty, \delta, \beta \rightarrow 0$ . Отсюда и из неравенства (16) при  $m \rightarrow \infty$  получим

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \left( \|C^m \Delta_0\| + m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Итак, доказано, что  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , т. е. метод (3) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.02.2015

***Savchuk V.F., Matsyk O.V. Choosing the Stopping Posteriori in an Implicit Iteration Method for Solution Ill-posed Problem with Non Self-adjoint Operator***

*In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with limited non-adjoint operator the implicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. The convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацыі па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума Дзяржаўнага вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастановы Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*  
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 08.07.2015. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.  
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,32. Ул.-выд. арк. 10,34.

Тыраж 100 экз. Заказ № 240

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.