МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.С. ПУШКИНА

УСС А.Т., ХИЛЬКО Т.В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Брест 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.С. ПУШКИНА

УСС А.Т., ХИЛЬКО Т.В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рекомендовано
Научно – методическим центром учебной книги и средств обучения Министерства образования Республики Беларусь в качестве учебно – методического пособия для студентов математических специальностей университетов

Брест 2000

УДК 517.2 (075.8): (02)
ББК 22.161.1
УС 74

Издана по решению редакционно – издательского совета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Рецензенты:
кандидат физико – математических наук, профессор **Р.М. Жевняк**;
кандидат физико – математических наук, доцент **В.В. Кашевский**

Редактор:
кандидат физико – математических наук, доцент **А.Т. Усс**

А.Т. Усс, Т.В. Хилько
Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Учебно – методическое пособие. – Брест: Изд – во Брестского ун – та, 2000. – 77 с. **ISBN 985-6547-15-6**

В пособии с позиций современного анализа рассматривается материал, излагаемый в разделе «функции многих переменных» курса математического анализа. Обсуждаются важнейшие вопросы раздела (производная дифференцируемого отображения, k – мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и др.), приводятся контрольные вопросы, упражнения и задачи, охватывающие темы: евклидова структура в $\mathbb{R}^n$; подмножества в $\mathbb{R}^n$; отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, предел и непрерывность; дифференцирование; неявные и обратные отображения; замена переменных; поверхности в $\mathbb{R}^n$ и теория условного экстремума.

Предназначено для практических, лабораторных и самостоятельных занятий студентов математических специальностей университетов. Может быть полезно студентам факультетов и вузов с расширенной программой по математике, а также преподавателям вузов.

ББК 22.161.1

ISBN 985-6547-15-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

ДЛЯ СТУДЕНТА

Как правило, учебные пособия предназначаются для оказания помощи в усвоении определенной дисциплины. Лежащая перед вами книжка не является исключением. Но чем отличается она от прочих, в чем ее «изюминка»? А в том, что она даст вам возможность самим открыть богатое содержание таких, на первый взгляд, обыденных и привычных понятий, как «точка», «окрестность», «пространство», «функция», «дифференциал», «координата», «система координат», «поверхность», «карта поверхности» и др., самим доказать много фактов, связывающих эти понятия, причем фактов не всегда простых.

«Вот уж и «изюминка»! Если открывать и доказывать придется **мне**, то зачем же **эта** книжка ?!» – подумает скептически настроенный читатель. Да только затем, чтобы лежать рядом с учебником В. А. Зорича «Математический анализ», ч. I (М.: Наука, 1981). И если вам будут понятны те его страницы, которые указаны в каждой теме предлагаемого пособия, то не торопитесь читать учебник дальше, попробуйте ответить на контрольные вопросы пособия, а затем решите или хотя бы наметьте ход решения следующих за ними задач. Если же вам в учебнике не все ясно, то не торопитесь искать ответы на последующих его страницах, поразмышляйте над контрольными вопросами пособия, обдумайте содержание задач, относящихся к неясной теме, и, надеемся, учебник станет вам понятней.

И помните: «...хотя чужое знание может нас кое-чему научить, мудр бываешь лишь своей собственной мудростью». (М. Монтень "Опыты. О педантизме.")

ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Вопросы, изучаемые в теме «функции многих переменных» (метрическая структура $\mathbf{R}^n$; связность и компактность; непрерывные и дифференцируемые отображения; теоремы о неявной и об обратной функциях; кривые и поверхности в $\mathbf{R}^n$; безусловный и условный экстремум функций многих переменных) лежат в основе современного анализа. Именно в этом разделе математического анализа возникают многие идеи и методы общей топологии, дифференциальной геометрии, теории функций и функционального анализа. Поэтому уже при первом соприкосновении с этой темой очень важно овладеть современным представлением используемых здесь понятий и фактов. Это чрезвычайно нелегкая задача для начинающего хотя бы потому, что несмотря на огромное количество учебников, все еще нет удовлетворительного, такого, который помог бы обычному вчерашнему выпускнику нашей издерганной нескончаемыми реформами общеобразовательной средней школы, разобраться в совершенно новом для себя мире **Анализа**, понятия и факты которого, подобно живому организму, рождаются, развиваются, совершенствуются и переходят в новые. Разнообразные по стилю и наполненности фактическим материалом учебники схожи в одном – каждый из них совершенно игнорирует наличие другого, излагающего тот же материал с иной точки зрения; отсутствие мотивированных обоснований авторской точки зрения превращает учебник в более или менее удачный, но, увы, **цитатник**, ибо труд – размышления и сомнения – автора спрятан от читателя, и ему остается только убедиться в логичности и последовательности читаемого учебника, отложив осознание его места в современном Знании на «потом». Конечно, живое общение с преподавателем может снять некоторые вопросы, но это – как уж повезет. Во всяком случае, необходимость спокойного анализа без вмешательства посторонних остается.

Настоящее пособие ставит целью помочь начинающему студенту провести анализ изучаемой темы и найти свое понимание ее.

Для этого тема «функции многих переменных» разбита на семь разделов. Первый из них не предполагает особенных знаний читателя. В доступной форме ему сообщаются терминология и обозначения, принимаемые в пособии. Затем простыми упражнениями, контрольными вопросами и – что очень важно – несложными задачами читатель приучается к характеру обсуждения учебника (в качестве такого мы выбираем «Математический анализ» В. А. Зорича, ч.I. - М.:, 1981) и, убеждается, что работа с пособием ему вполне по силам.

Следующий раздел уже рассчитан на работу с учебником. Читателю предлагается прочесть пять его страничек. Отвечая на контрольные вопросы пособия, он повторит прочитанное, подкрепляя повторение анализом определений и разбором примеров. Задачи этого раздела частью содержатся в утверждениях учебника, частью являются небольшой их модификацией, так что решение их будет способствовать закреплению прочитанного материала и развивать способность самостоятельного анализа читаемого текста.

По такому же принципу строятся и остальные разделы пособия. Только в некоторых из них мы позволяем себе дополнить текст учебника (обсуждение понятия производной; преобразование выражений, содержащих производные, при замене переменных и др.). Увеличивается число, характер и трудность задач, некоторые из них комментируются или решаются. Заключительный раздел «Поверхности в $\mathbf{R}^n$ и теория условного экстремума» – самый насыщенный. Здесь кроме уже традиционных контрольных вопросов и примеров предлагается в виде задач, большей частью решенных, иное расположение соответствующего материала учебника. Приводимый нами вывод на интуитивном уровне достаточного условия экстремума не сравним в изящности с доказательством В. А. Зорича, но открывает тайну его получения.

Авторы благодарны коллегам из Белорусского, Брестского и Гомельского университетов. Их замечания и рекомендации учтены нами в окончательном тексте. Отдельная наша благодарность сотрудникам Белгосуниверситета – доценту В. В. Кашевскому и профессору А. А. Килбасу. Мы благодарны также нашим рецензентам, профессору Р. М. Жевняку и кафедре высшей математики и математической физики Белгосуниверситета.

В оформлении пособия нам оказали помощь студенты А.И. Басик, Н.М. Вакулич и А.А. Гайчук. Выражаем им искреннюю признательность.

Авторы

I. НОРМА И СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В $\mathbf{R}^n$

Евклидово *n* - мерное пространство $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех упорядоченных n - наборов $(x^1, ..., x^n)$ действительных чисел x^i («упорядоченный 1 - набор» есть просто число, а $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ - множество всех действительных чисел). Элементы множества $\mathbf{R}^n$ называются его **точками**, а $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ **- прямой, плоскостью** и **пространством** соответственно. Если через x обозначен элемент из $\mathbf{R}^n$, т.е. упорядоченный набор из n чисел, то i - е число обозначается x^i, так что $x = (x^1, ... , x^n)$.

Точки из $\mathbf{R}^n$ часто называются также **векторами**, ибо $\mathbf{R}^n$, наделенное операциями

$$x + y := (x^1 + y^1, ..., x^n + y^n)$$

и

$$ax := (ax^1, ..., ax^n),$$

есть векторное пространство (над полем действительных чисел, n - мерное). В этом векторном пространстве имеется понятие **длины вектора** (вместо слова «длина» чаще употребляется слово «норма»). **Норма** или **длина вектора** x обозначается $|x|$ или $\|x\|$ и вычисляется по формуле

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + ... + (x^n)^2}.$$

Если $n = 1$, то $|x|$ - обычная абсолютная величина числа x.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется понятие **угла** между двумя векторами, возможность введения которого обусловлена важнейшим свойством векторного пространства $\mathbf{R}^n$ - наличия в нем скалярного произведения.

Скалярное (или, еще говорят, **внутреннее**) **произведение** $<x, y>$ векторов x и y из $\mathbf{R}^n$ определяется по формуле

$$<x, y> = x^1 y^1 + ... + x^n y^n.$$

При $n = 1$ скалярное произведение есть обычное умножение чисел.

Заметим, что в обозначении $<x, y>$ скалярного произведения векторов x и y мы отошли от принятого в алгебре (x, y). Дело в том, что последним способом обозначаются упорядоченные пары, весьма часто встречающиеся в анализе. Кроме того, запись (x, y), где $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^m$, будет использоваться нами для обозначения вектора $(x^1, ... , x^n, y^1, ... , y^m)$ из $\mathbf{R}^{n+m}$, что упростит вид многих формул.

Контрольные вопросы

1. Что является точкой множества $\mathbf{R}^n$?

2. В каком случае n - наборы $(x^1, ..., x^n)$ и $(y^1, ..., y^n)$ представляют одну и ту же точку множества $\mathbf{R}^n$? Являются ли равенства $x^1 = y^1$, ..., $x^n = y^n$ необходимыми? Почему?

3. Назовите несколько точек из $\mathbf{R}^4$.

4. Сформулируйте определение а) прямой; б) плоскости; в) пространства.

5. Какие операции можно выполнять над точками из множества $\mathbf{R}^n$? Как определяются эти операции? Приведите примеры.

6. По какой формуле определяется норма вектора x?

7. Может ли ненулевой вектор иметь нулевую норму? Почему?

8. По какой формуле определяется скалярное произведение двух векторов из $\mathbf{R}^n$?

9. Может ли скалярное произведение ненулевых векторов равняться нулю?

10. Может ли скалярный квадрат ненулевого вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равняться нулю?

Отметим основные свойства нормы и скалярного произведения.

Пусть $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$ и $a \in \mathbf{R}$. Тогда

(1) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0$ в том и только том случае, когда $x = (0, ..., 0)$ (впредь нулевой вектор $(0, ..., 0)$, ради краткости, будем просто обозначать через 0);

(2) $|<x, y>| \leq |x| \cdot |y|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы;

(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(4) $|a \cdot x| = |a| \cdot |x|$;

(5) $<x, y> = <y, x>$ (симметричность);

(6) $<ax, y> = <x, ay> = a<x, y>$,

$<x_1 + x_2, y> = <x_1, y> + <x_2, y>$,

$<x, y_1 + y_2> = <x, y_1> + <x, y_2>$ (билинейность);

(7) $<x, x> \geq 0$, причем $<x, x> = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (положительная определенность);

(8) $|x| = \sqrt{<x, x>}$;

(9) $<x, y> = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ (поляризационное тождество).

Доказательства указанных свойств имеются в учебниках по анализу и линейной алгебре, но весьма полезно провести их, не заглядывая в учебник. Несколько советов помогут вам справиться с трудными местами доказательств.

Свойство (1) нормы почти очевидно. Точнее, непосредственно из определения нормы следует, что $|x| \geq 0$ и что, если $x = 0$, то $|x| = 0$. Остается проверить, что если $|x| = 0$, то $x = 0$ (т.е. каждая "координата" x^i вектора x - нулевая). Проверьте это.

Для доказательства (2) составьте квадратный трехчлен относительно λ:

$$|x - \lambda y|^2 = (x^1 - \lambda y^1)^2 + \ldots + (x^n - \lambda y^n)^2.$$

Он неотрицателен при всех $\lambda \in \mathbf{R}$, и потому его дискриминант должен быть неположительным (почему?). Вычислите дискриминант, и вы получите неравенство (2). Равенство нулю дискриминанта влечет возможность обращения в нуль при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$ разности $x - \lambda y$. Верно и обратное. Обдумайте это и вы легко завершите доказательство (2).

Между прочим, из неравенства (2) следует, что если векторы x и y - ненулевые, то существует (притом единственное число) $\varphi \in [0; \pi]$, такое, что $< x, y > = |x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi$. Это число называется **углом между векторами x и y**; для обозначений его используются выражения $\angle (x, y)$, $(\widehat{x, y})$.

Для доказательства (3) приведите выражение $|x + y|^2$ к виду $|x|^2 + 2 < x, y > + |y|^2$ и воспользуйтесь уже доказанным неравенством (2).

Свойство (4) проверяется непосредственным вычислением величины $|ax|$.

Доказательство свойств (5) - (9) проводится непосредственным вычислением указанных скалярных произведений. Может показаться сложным равенство (9), но и оно легко проверяется, если воспользоваться равенствами

$$|x + y|^2 = < x + y, x + y >, \quad |x - y|^2 = < x - y, x - y >$$

и свойством билинейности скалярного произведения.

Среди всех базисов векторного пространства $\mathbf{R}^n$ выделим один, который будем называть **стандартным базисом** в $\mathbf{R}^n$. Этот базис образуют векторы $e_1, \ldots, e_n$ где $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ с 1 на i-м месте и 0 на всех остальных.

При проведении вычислений линейное отображение $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ удобно представить матрицей. Под матрицей линейного отображения T (относительно стандартных базисов в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$) понимается $(m \times n)$ - матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^m & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^m \end{pmatrix},$$

с помощью которой представление вектора $y = T(x)$ в виде столбца

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ . \\ . \\ . \\ y^m \end{pmatrix}$$

может быть получено как результат умножения матрицы A на столбец

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^m \end{pmatrix},$$

являющийся координатным представлением вектора x (в стандартном базисе $\mathbf{R}^n$). То есть, имея матрицу A линейного отображения T, для нахождения $T(x)$ достаточно вычислить элементы столбца

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ . \\ . \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & . & . & . & a_n^1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_1^m & . & . & . & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

и тогда $T(x) = (y^1, ..., y^m)$.

Каким же образом вычисляются элементы a_j^i матрицы A? Из равенства (1) видно, что

$$\begin{pmatrix} a_j^1 \\ . \\ . \\ a_j^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & . & . & . & a_n^1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_1^m & . & . & . & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

(в последнем столбце 1 стоит на j-м месте). Отсюда следует, что j-й столбец матрицы A состоит из коэффициентов разложения вектора $T(e_j) \in \mathbf{R}^m$ по стандартному базису $e'_1, \dots, e'_m$ пространства $\mathbf{R}^m$:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_j^i \cdot e'_i, \ (j = 1, ..., n)$$

(здесь $e_1, ..., e_n$ - стандартный базис $\mathbf{R}^n$).

Несложно проверить (сделайте это), что если $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ имеет $(p \times m)$ - матрицу B, то матрицей для композиции $S \circ T$ будет $(p \times n)$ - матрица BA (здесь $(S \circ T)(x) = S(T(x))$; в большинстве книг по линейной алгебре вместо $S \circ T$ пишут ST).

Вы уже заметили, что мы используем многие понятия и факты из линейной алгебры. Перечень контрольных вопросов ниже поможет вам повторить нужные сведения из алгебры.

Контрольные вопросы

1. Что называется векторным пространством над векторным полем ?

2. Приведите пример векторного пространства над полем $\mathbf{R}$.

3. Образуют ли следующие множества действительных чисел векторное пространство над $\mathbf{Q}$:

а) положительные действительные числа;

б) неотрицательные действительные числа;

в) целые числа;

г) рациональные числа со знаменателем ≤ 1997;

д) числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b - любые рациональные числа?

4. Что означает высказывание: векторы $x_1, ..., x_n$ -линейно зависимы в вещественном векторном пространстве V?

5. Постройте отрицание высказывания из вопроса 4.

6. Верно ли, что линейная зависимость двух векторов x и y из вещественного векторного пространства V равносильна тому, что существует такое число $\lambda \in \mathbf{R}$, что $x = \lambda y$?

7. Верно ли, что линейная зависимость трех векторов x, y и z из V равносильна тому, что существуют такие числа $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, что $z = \lambda x + \mu y$?

8. Сформулируйте определение базиса в векторном пространстве V?

9. Приведите примеры нестандартного базиса для а) $\mathbf{R}$; б) $\mathbf{R}^2$; в) $\mathbf{R}^3$.

10. Какое отображение $f: V \to W$, где V и W - вещественные векторные пространства, называется линейным?

11. Приведите примеры линейного и нелинейного отображений
а) из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^1$; б) из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^2$; в) из $\mathbf{R}^1$ в $\mathbf{R}^2$.

Задачи

1.1. Доказать, что $|x| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i|$.

1.2. Какими должны быть векторы $x, y \in \mathbf{R}^n$, чтобы выполнялось равенство $|x+y| = |x| + |y|$?

[**Указание.** Проследите ход доказательства свойства (3); ответом не будет «когда x и y линейно зависимы».]

1.3. Доказать, что $|x - y| \leq |x| + |y|$. Когда имеет место равенство?

1.4. Доказать, что $||x| - |y|| \leq |x| - |y|$.

1.5. Величина $|x - y|$ называется **расстоянием между x и y**. Доказать и геометрически истолковать «неравенство треугольника»

$$|x-y| \le |x-z| + |y-z|.$$

1.6. Говорят, что линейное отображение $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ **сохраняет норму**, если $|T(x)| = |x|$, и **сохраняет скалярное произведение**, если

$$< T(x), T(y) > = < x, y >.$$

а) Доказать, что T сохраняет норму тогда и только тогда, когда T сохраняет скалярное произведение.

б) Доказать, что всякое сохраняющее норму линейное отображение T взаимно однозначно и отображение T^{-1} также сохраняет норму и скалярное произведение.

1.7. Говорят, что линейное отображение $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ **сохраняет углы**, если T взаимно однозначно и $(T(x)\hat{,}T(y)) = (x\hat{,}y)$ для всех $x \ne 0$, $y \ne 0$.

а) Доказать, что если T сохраняет норму, то T сохраняет углы.

б) Доказать, что если существуют такие базис $x_1, \dots, x_n$ в $\mathbf{R}^n$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ такие, что $T(x_i) = \lambda_i x_i$, то T сохраняет углы тогда и только тогда, когда все λ_i равны между собой.

в) Описать все линейные отображения $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, сохраняющие углы.

1.8. Пусть $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \text{ где } 0 < \theta < \pi.$$

Показать, что T сохраняет углы и $(x\hat{,}T(x)) = \theta$ для $x \ne 0$.

1.9. Показать, что для всякого линейного отображения $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ существует такое число $M > 0$, что $|T(x)| < M|x|$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$.

[**Указание.** Оценить $|T(x)|$ с помощью $|x|$ и коэффициентов матрицы T].

1.10. Показать, что если $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $z, w \in \mathbf{R}^m$, то

$$< (x, z), (y, w) > = < x, y > + < z, w > \text{ и } |(x, z)| = \sqrt{|x|^2 + |z|^2}.$$

Напомним, что (x, z) и (y, w) - точки из $\mathbf{R}^{n+m}$.

1.11. Векторы $x, y \in \mathbf{R}^n$ называются **взаимно перпендикулярными** или **ортогональными**, если $< x, y > = 0$. Докажите теорему Пифагора: если x и y перпендикулярны, то $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

2. ПОДМНОЖЕСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{R}^n$

Определения и основные факты этой темы прочитайте в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ.» Ч.1, с.414-418

Контрольные вопросы

1. В названном выше учебнике используется выражение $d(x, y)$. Что им обозначается ?

2. Верно ли , что $d(x,y) = |x - y|$?

3. Что называется шаром с центром $a \in \mathbf{R}^n$ и радиуса $\delta > 0$ в пространстве $\mathbf{R}^n$?

4. Изобразите шар в $\mathbf{R}^1$ с центром в точке 2 и радиуса $\delta = 3$.

5. Изобразите шар в $\mathbf{R}^2$ с центром в точке $(1; 2)$ и радиуса $\delta = 1$.

6. Что называется δ- окрестностью точки $a \in \mathbf{R}^n$?

7. Чем отличается замкнутый шар от шара? Изобразите замкнутые шары в $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$ с центрами и радиусами из вопросов 4 и 5 соответственно.

8. Какое множество в $\mathbf{R}^n$ называется открытым?

9. Приведите пример открытого множества а) на прямой; б) на плоскости; в) в пространстве.

10. Приведите пример множества, которое не является открытым.

11. Сформулируйте определение замкнутого множества.

12. Верно ли, что множество, не являющееся открытым, является замкнутым?

13. Верно ли, что дополнение открытого множества - замкнуто?

14. Приведите пример множества на плоскости, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

15. Будет ли открытым множеством объединение бесконечной совокупности открытых множеств?

16. Будет ли открытым множеством пересечение бесконечной совокупности открытых множеств?

17. Будет ли замкнутым множеством а) объединение; б) пересечение бесконечной совокупности замкнутых множеств?

18. Что называется сферой в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке $a \in \mathbf{R}^n$ и радиуса $\delta > 0$?

19. Изобразите сферу единичного радиуса с центром в начале координат а) на прямой; б) на плоскости; в) в пространстве.

20. Что называется окрестностью точки $x \in \mathbf{R}^n$?

21. Какие из следующих множеств являются окрестностями точки $(1; 1) \in \mathbf{R}^2$:

а) $]0; 1] \times]0; 1]$; б) $]0; 1] \times]0; 2]$;

в) $]0; 1[\times]0; 1[$; г) $]0; 2[\times]0; 2[$;

д) $\{ x = (x^1, x^2) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 < 2 \}$?

22. Какая точка называется внутренней для множества $E \subset \mathbf{R}^n$?

23. Какая точка называется внешней для $E \subset \mathbf{R}^n$?

24. Сформулируйте определение граничной точки для множества $E \subset \mathbf{R}^n$.

25. Укажите внутренние, внешние и граничные точки множества $E \subset \mathbf{R}^1$, если $E = [0, 1]$.

26. Укажите внутренние, внешние и граничные точки множества $E \subset \mathbf{R}^2$, если $E = \{ x = (x^1, x^2) \mid 0 \le x^1 < 1, x^2 = 0 \}$.

27. Определите внутренние, внешние и граничные точки каждого из множеств а) - д), вопроса 21.

28. Может ли множество не иметь а) внутренних точек; б) внешних точек; в) граничных точек?

29. Можно ли утверждать, что совокупность всех внутренних точек множества $E \subset \mathbf{R}^n$ образует открытое в $\mathbf{R}^n$ множество?

30. Можно ли утверждать, что совокупность всех внешних точек множества $E \subset \mathbf{R}^n$ есть множество открытое в $\mathbf{R}^n$?

31. Каким множеством, замкнутым или открытым, является множество всех граничных точек множества E?

32. Точка $x \in E$ может ли быть внешней для множества E?

33. Точка $x \notin E$ может ли быть внутренней для E?

34. Всякая ли точка $x \in E$ является внутренней для E?

35. В каком случае точка $x \in \mathbf{R}^n$ является изолированной точкой множества $E \subset \mathbf{R}^n$?

36. Какая точка называется предельной для множества $E \subset \mathbf{R}^n$?

37. Верно ли, что если точка $x \in E$ не является предельной точкой множества $E \subset \mathbf{R}^n$, то она является изолированной для E?

38. Может ли внешняя точка множества $E \subset \mathbf{R}^n$ быть предельной для этого множества?

39. Верно ли, что если точка $x \in E$ не является внутренней для множества E, то она предельная точка этого множества?

40. Может ли замыкание $\overline{E}$ множества E содержать внешние точки этого множества?

41. Верно ли, что замыкание $\overline{E}$ множества E состоит из всех внутренних и граничных точек множества E?

42. Верно ли, что $E \subset \overline{E}$?

43. Что называется диаметром множества $E \subset \mathbf{R}^n$?

44. Определите диаметр каждого из множеств, перечисленных в вопросе 21.

45. Какое множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называется ограниченным?

46. Приведите примеры ограниченных множеств: а) на плоскости; б) в пространстве.

47. Приведите примеры множеств, не являющихся ограниченными в $\mathbf{R}^n$.

48. Верно ли, что ограниченное в $\mathbf{R}^n$ множество содержится в некотором шаре?

49. Верно ли, что всякое подмножество ограниченного в $\mathbf{R}^n$ множества само является ограниченным в $\mathbf{R}^n$?

50. Какое множество называется компактным в $\mathbf{R}^n$?

51. Приведите пример компактного множества в $\mathbf{R}^1$?

52. Что называется замкнутым n-мерным промежутком в $\mathbf{R}^n$?

53. Можно ли утверждать, что замкнутый двумерный промежуток на плоскости это «обычный» прямоугольник на плоскости ? Верно ли обратное утверждение?

54. Является ли замкнутый n - мерный промежуток в $\mathbf{R}^n$ компактным множеством?

55. Может ли компактное в $\mathbf{R}^n$ множество быть: а) неограниченным; б) незамкнутым?

Задачи

2.1. Какие из последующих множеств являются открытыми в $\mathbf{R}^2$?

а) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1; 0)\}$;

б) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

в) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$;

г) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y < 0\}$;

д) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \geq 0\}$;

е) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

2.2. Пусть $a \in \mathbf{R}^n$ и $R > 0$. Докажите, что шар $B_R(a) := B(a, R)$ с центром в точке a и радиуса R является открытым множеством в $\mathbf{R}^n$.

2.3. Пусть $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$. Докажите, что множество E замкнуто в $\mathbf{R}$.

2.4. Какие из множеств, перечисленных в задаче 2.1. являются замкнутыми в $\mathbf{R}^2$?

2.5. Построить ограниченное множество $E \subset \mathbf{R}$, имеющее ровно три предельные точки.

2.6. Построить компактное множество $E \subset \mathbf{R}$, множество предельных точек которого счетное.

2.7. Пусть E' - множество всех предельных точек некоторого множества $E \subset \mathbf{R}^n$. Доказать, что E' замкнуто.

2.8. Докажите, что замыкание $\overline{E}$ произвольного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто в $\mathbf{R}^n$.

2.9. Покажите, что замкнутое множество $A \subset \mathbf{R}^1$, содержащее всякое рациональное число $r \in [0; 1]$, содержит весь отрезок $[0; 1]$.

2.10. Докажите, что если F - замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$ и $E \subset F$, то $\overline{E} \subset F$ (здесь и ниже чертой сверху над множеством обозначается замыкание этого множества). Предложите решение задачи 2.9, основанное на этом утверждении.

2.11. Докажите, что множество E замкнуто в $\mathbf{R}^n$ в том и только в том случае, когда оно совпадает со своим замыканием. Выведите отсюда, что $\overline{(\overline{D})} = \overline{D}$, каково бы ни было множество $D \subset \mathbf{R}^n$.

2.12. Покажите, что замыкание $\overline{E}$ множества E - это наименьшее из всех замкнутых в $\mathbf{R}^n$ множеств, содержащих множество E; иными словами, если $\mathcal{A} = \{ F \subset \mathbf{R}^n \mid E \subset F$ и F - замкнуто в $\mathbf{R}^n \}$, то $\overline{E} = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{A}} F$.

2.13. Справедливы ли следующие равенства, и если нет, то какие соотношения имеют место в действительности ?

а) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.14. Найти все внутренние, внешние и граничные точки множеств $A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \le 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| = 1\}$ и $C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid$ каждое x^i рационально$\}$.

2.15. Постройте примеры множеств на плоскости, которые: а) имеют граничные точки, но все они не принадлежат множеству; б) не имеют граничных точек ; в) включают часть своих граничных точек.

2.16. Докажите, что совокупность $\mathring{E}$ всех внутренних точек множества $E \subset \mathbf{R}^n$ открытое в $\mathbf{R}^n$.

2.17. Докажите, что граница ∂E множества $E \subset \mathbf{R}^n$ - является замкнутым множеством (граница ∂E - это совокупность всех граничных точек множества E).

2.18. Верно ли, что $\bar{E} = E \cup \partial E$?

2.19. Докажите, что :

а) если A замкнуто в $\mathbf{R}^n$ и $a \notin A$, то найдется такое число $R > 0$, что $|y - a| \geq R$ для всех $y \in A$;

б) при тех же предложениях , что и в (а) , существуют окрестность U точки a и число $R > 0$, такие что $|y - x| \geq R$ для всех $y \in A$, $x \in U$;

в) если A замкнуто в $\mathbf{R}^n$, а B компактно, причем $A \cap B = \varnothing$, то существует такое число $R > 0$, что $|y - x| \geq R$ для всех $y \in A$, и $x \in B$.

Приведите пример, показывающий ложность заключения (в), если множества A и B замкнуты, но ни одно из них не является компактным.

2.20. Покажите, что если U открыто в $\mathbf{R}^n$, а K - компактно, причем $K \subset U$, то найдется компактное множество F, $F \subset U$, внутренность которого содержит K. [**Внутренностью множества** E называется совокупность всех внутренних точек множества E .]

2.21. Покажите, что если $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ - последовательность вложенных непустых компактов, то $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \varnothing$.

[**Указание.** Предложите противное и рассмотрите совокупность дополнений множеств K_j .]

3. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Основной материал по данной теме прочитайте в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ.» ч.1, с. 419-429; мы дополним этот материал лишь несколькими замечаниями и определениями.

Функция или **отображение из** $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ есть правило, относящее каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ некоторую точку из $\mathbf{R}^m$; точку, которую функция f относит x, обозначают $f(x)$ и называют **образом точки** x **(при отображении** f). Задание отображения f из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ обозначают записью $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (читается : «f отображает $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$« или «f, отображающая, $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$«, в зависимости от контекста). Иная запись, $f: X \to \mathbf{R}^m$, где $X \subset \mathbf{R}^n$ указывает на то, что точка $f(x)$ определена только для тех точек x, которые принадлежат множеству X (последнее называется **областью определения функции** f). Через $f(A)$, где $A \subset X$, обозначают множество всех точек $f(x)$ при $x \in A$; если $B \subset \mathbf{R}^m$, то по определению полагают $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Запись $f: X \to Y$ означает, что $f(X) \subset Y$.

Если $f, g: X \to \mathbf{R}$, где $X \subset \mathbf{R}^n$ (в этом случае иногда говорят, что f и g - **числовые функции** n **переменных**), то функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ определяются точно так же, как и в одномерном случае. Если $f: X \to \mathbf{R}^m$ и $g: Y \to Z$, где $Y \subset \mathbf{R}^m$, то **композиция** $g \circ f$ определяется равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; областью определения $g \circ f$ служит $X \cap f^{-1}(Y)$. Если $f: X \to \mathbf{R}^m$ **взаимно однозначно**, т. е. если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$, то $f^{-1}: f(X) \to \mathbf{R}^n$ определяется требованием, чтобы $f^{-1}(y)$ было тем единственным $x \in X$, для которого $f(x) = y$.

Пусть $f: X \to \mathbf{R}^m$. Тогда для каждого $x \in X$ значение функции $f(x)$ является точкой в $\mathbf{R}^m$ и потому представляется в виде $f(x) = (f^1(x), ..., f^m(x))$. Последнее обстоятельство позволяет сопоставить отображению f m **координатных функций** $f^1, \dots, f^m : X \to \mathbf{R}$, которые называют также **координатным представлением функции** f. Обратно, любые m функций $g_1, ..., g_m : X \to \mathbf{R}$ задают, притом единственное, отображение $f: X \to \mathbf{R}^m$, такое что $f^i = g_i$ $(i = 1, ..., m)$. Это задание осуществляется равенством $f(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение функции из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$.
2. Приведите пример функции из $\mathbf{R}^1$ в $\mathbf{R}^2$.
3. Приведите пример функции из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^1$.
4. Приведите пример функции из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^2$.
5. Что называется последовательностью в $\mathbf{R}^n$?
6. Приведите пример:

а) последовательности в $\mathbf{R}^2$;

б) последовательности в $\mathbf{R}^2$, сходящейся к точке $(0;\ 1)$;

в) расходящейся последовательности в $\mathbf{R}^2$.

7. Какая последовательность в $\mathbf{R}^n$ называется фундаментальной?

8. Будет ли последовательность (x_n) в $\mathbf{R}^2$, где $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n - n}{n^2 + 1}\right)$ фундаментальной?

9. Будет ли последовательность (x_n) в $\mathbf{R}^3$, где $x_n = \left(\frac{\sin n}{n}, \frac{n}{2^n}, (-1)^n\right)$ фундаментальной?

10. Найдите предел последовательности (x_n) в $\mathbf{R}^4$, если

$$x_n = \left(n \sin\frac{\pi}{2}, \left(\frac{n}{n-7}\right)^n, \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5}, \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

11. Если $\mathfrak{R}$ - база на X, то что является ее элементом? Верно ли, что $\varnothing \in \mathfrak{R}$?

12. Сформулируйте определение базы на множестве X.

13. Будет ли система $\mathfrak{R} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ базой на N?

14. Является ли система $\mathfrak{R} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, ...\}$ базой на N?

15. Будет ли система $\mathfrak{R} = \{N\}$ (состоящая только из одного элемента N) базой на N?

16. Является ли система $\mathfrak{R} = \{B_k \subset N : B_k = \{n \in N : n > k\},\ k = 1, 2, 3, ...\}$ базой на N?

17. Являются ли системы $\mathfrak{R}$ из вопросов 13-16 базами на $\mathbf{R}$?

18. Пусть $\mathfrak{R}$ - база на X; $f : X \to \mathbf{R}^m$. Сформулируйте определение предела функции f по базе $\mathfrak{R}$.

19. Если $X = N$, то $f : X \to \mathbf{R}^m$ - последовательность в $\mathbf{R}^m$. Что означает существование предела последовательности по каждой из баз, указанных в вопросах 13-16 ? Опишите все сходящиеся по этим базам последовательности.

20. Можно ли утверждать в общем случае, что если предел функции по какой-нибудь базе существует, то он единственный?

21. Какая база в $\mathbf{R}^n$ обозначается $x \to a$ ($a \in \mathbf{R}^n$)?

22. Какая база на $X \subset \mathbf{R}^n$ обозначается $X \ni x \to a$?

23. Опишите базу в $\mathbf{R}^n$, которую обозначают $x \to \infty$.

24. Сформулируйте теорему о пределе композиции.

25. Какая функция $f: X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется непрерывной в точке $a \in X$?

26. Приведите пример непрерывного отображения $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$.

27. Приведите пример непрерывного отображения $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

28. Какие локальные свойства непрерывных функций вы можете указать?

29. Можно ли привести пример непрерывной функции $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, принимающей значение 1 в точке $x_0 = (1; -1)$, и такой, что в любой окрестности точки x_0 имеются точки, где функция принимает отрицательные значения?

30. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ - функция, принимающая значение 1 в точке $x_0 = (1; -1)$, и такая, что в любой окрестности точки x_0 имеются точки, где функция принимает отрицательные значения. Какая из следующих оценок колебания $\omega(f; x_0)$ функции f в точке x_0 справедлива:

а) $\omega(f; x_0) < \frac{1}{2}$; б) $\omega(f; x_0) < 1$;

в) $\omega(f; x_0) \geq 1$; г) $\omega(f; x_0) > 1$?

31. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ и $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ задаются равенствами:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \; g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Каким равенством будет определяться композиция $g \circ f$?

32. Вычислите композицию $g \circ f \circ h$, если f и g - отображения из вопроса 31, а функция $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ задается равенством $h(t) = (\cos t, \sin t)$?

33. Обязана ли быть разрывной композиция $g \circ f$, если одна из функций f или g разрывна? Подтвердите ответ примерами.

34. Может ли сумма $f + g$ двух разрывных в точке x_0 функций $f, g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ быть непрерывной в точке x_0? Подтвердите ответ примером функций $f, g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

35. Может ли сумма $f + g$ двух разрывных в точке x_0 функций $f, g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ быть разрывной в точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$?

36. Сформулируйте определение равномерно непрерывной функции $f: X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$.

37. Можете ли вы объяснить, чем отличаются определения непрерывности и равномерной непрерывности функции $f: X \to \mathbf{R}^m$ на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$?

38. Что называется путем в $\mathbf{R}^n$?

39. Что называется носителем пути $\gamma: I \to \mathbf{R}^n$?

40. Изобразите на плоскости носители следующих путей $\gamma: I \to \mathbf{R}^2$:

а) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $I = [0; \pi]$;

б) $\gamma(t) = (t, t^2)$, $I = [-1; 2]$;

в) $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $I = [-1; \sqrt{2}]$;

г) $\gamma(t) = (t, t^3)$, $I = [-1; 1]$;

д) $\gamma(t) = (-\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $I = [-1; 1]$.

Укажите начала и концы этих путей .

41. Какое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется линейно связным в $\mathbf{R}^n$?

42. Будет ли круг $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ на плоскости линейно связным множеством?

43. Приведите пример множества на плоскости, которое не является линейно связным.

44. Какое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется областью?

45. Приведите пример области на плоскости?

46. Приведите пример множества на плоскости, которое не является областью.

47. Будет ли множество X из вопроса 42 областью на плоскости?

48. Перечислите глобальные свойства непрерывных функций.

49. Приведите пример равномерно непрерывного отображения $f : X \to \mathbf{R}$, область определения $X \subset \mathbf{R}^2$ которого - некомпактное множество.

50. Обязано ли быть ограниченным непрерывное отображение $f : X \to \mathbf{R}$, определенное на некомпактном множестве $X \subset \mathbf{R}^2$?

51. Для всякого ли множества $X \subset \mathbf{R}^n$ должна найтись точка $x_0 \in X$ в которой непрерывная функция $f : X \to \mathbf{R}$ обращается в нуль, если известно, что в X имеются такие точки a и b, для которых $f(a)f(b) < 0$?

Задачи

3.1. Найдите образ точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ при отображении $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, если это отображение представляет собой :

а) параллельный перенос на вектор $(-2; 3)$;

б) поворот вокруг начала координат на угол φ;

в) ортогональное проектирование на прямую, заданную уравнением $y = 2x + 1$;

г) гомотетию с центром в точке $(1; -2)$ и коэффициентом k;

д) центральную симметрию относительно точки $(1; -2)$;

е) симметрию относительно прямой $y = 2x - 1$.

Укажите координатные функции каждого из перечисленных отображений.

3.2. Найдите $f(A)$ и $f^{-1}(B)$ для отображения $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, если :

а) $f(x, y) = (x + y, x - y)$, $A = [0; 1] \times [0; 1]$, $B = [1; 2] \times [0; 1]$;

б) $f(R, \varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, $A = [1; 2] \times [0; \pi]$,

$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ 0 < y < \sqrt{3}\,x\}$;

в) $f(x, y) = (x^2, y^2)$, $A = [-2; 1] \times [-1; 2]$, $B = [-1; 0] \times [-2; 0]$;

г) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$,

$B = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u \ge -1,\ -\sqrt{4u + 1} \le v \le \sqrt{4u + 1}\}$.

3.3. Пусть $f : X \to Y$ - некоторое отображение. Верно ли, что:

а) если $A \subset X$, то $f^{-1}(f(A)) = A$;

б) если $B \subset Y$, то $f(f^{-1}(B)) = B$;

в) если $B \subset f(X)$, то $f^{-1}(f(B)) = B$?

3.4. Среди функций, рассмотренных в задаче 3.2., выделите взаимно однозначные, а для остальных постройте взаимно однозначные сужения .

3.5. Докажите, что функция $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, непрерывна в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда каждая координатная функция f^i непрерывна в a.

3.6. Пусть $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ - непрерывная функция. Докажите, что сужение f на произвольную прямую в $\mathbf{R}^2$ также будет непрерывной функцией. (Отсюда следует, в частности, что если $f(x, y)$ - непрерывная функция, то непрерывными, как функции одной переменной, будут $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$. Этот факт выражают следующим высказыванием: «если f непрерывна как функция двух переменных, то она непрерывна и по каждой переменной в отдельности.»)

3.7. Докажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{при } (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & \text{при } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0, 0)$, хотя она непрерывна по каждой переменной в отдельности.

3.8. Пусть $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ 0 < y < x^2\}$.

а) Покажите, что на любой прямой, проходящей через (0; 0), имеется интервал с центром в этой точке, целиком содержащийся в $\mathbf{R}^2 \setminus E$.

б) Пусть функция $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенствами: $f(x, y) = 1$, если: $(x, y) \in E$, и $f(x, y) = 0$, если $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus E$. Для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ положим :

$$g_{(x_0,\, y_0)}\ (t) = f(t\,x_0,\, ty_0).$$

Докажите, что функция $g_{(x_0,\, y_0)}$ непрерывна в точке $t = 0$, хотя f имеет разрыв в точке $(0, 0)$.

3.9. Пусть $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ - непрерывное отображение. Покажите, что:

а) множество $E_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < c\}$ открыто в $\mathbf{R}^n$;

б) множество $E_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = c\}$ замкнуто в $\mathbf{R}^n$;

в) множество $E_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \le c\}$ замкнуто в $\mathbf{R}^n$;

г) если $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то E_2 и E_3 - компактны в $\mathbf{R}^n$.

3.10. Пусть $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Покажите, что множество

$$E = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \omega(f; x) \ge \varepsilon\}$$

замкнуто в $\mathbf{R}^n$.

3.11. Покажите, что для всякого незамкнутого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ существует неограниченная непрерывная функция $f: X \to \mathbf{R}$.

[**Указание.** Взяв не внутреннюю точку a множества $\mathbf{R}^n \setminus X$, положить

$$f(x) = \frac{1}{|x - a|}.]$$

3.12. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ и $f: X \to \mathbf{R}^m$. Докажите следующие два критерия непрерывности отображения f:

а) Функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$ в том и только в том случае, если для любой последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность $(f(x_k))_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(x_0)$.

б) Отображение f непрерывно на множестве X тогда и только тогда, когда для каждого открытого в $\mathbf{R}^m$ множества V множество $f^{-1}(V)$ открыто относительно X.

[**Напоминание.** Множество $U \subset \mathbf{R}^n$ называется **открытым относительно X**, если найдется такое открытое в $\mathbf{R}^n$ множество W, что

$$U = W \cap X.]$$

3.13. Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ - бесконечное ограниченное множество. Докажите, что существует точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$, которая является предельной для множества E.

[**Указание.** Пусть $K \subset \mathbf{R}^n$ - компакт, такой, что $E \subset K$. Если бы среди точек множества K не было ни одной предельной для E, то каждая бы из них обладала (открытой) окрестностью, в которой находилось бы разве лишь конечное множество точек из E.]

3.14. Покажите, что если точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ является предельной для множества $E \subset \mathbf{R}^n$, то можно построить последовательность точек из E, сходящуюся к x_0. Верно ли обратное утверждение?

3.15. Пусть $K \subset \mathbf{R}^n$ - компакт. Докажите, что каждая последовательность точек из K содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из K.

[**Указание.** Рассмотрите случаи, когда множество значений последовательности конечно и бесконечно.]

3.16. Пусть $K \subset \mathbf{R}^n$ - компакт и $\mathcal{A} = \{U_\alpha \subset \mathbf{R} \mid \alpha \in I\}$ его открытое покрытие. Докажите, что существует такое $\delta > 0$, (его называют **числом** Лебега покрытия $\mathcal{A}$), что каждое подмножество K, имеющее диаметр меньше δ, содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{A}$.

[**Указание.** Для $x \in K$ положим:

$$\delta(x) = sup\,\{r > 0 \mid \exists\ \alpha_0 \in I\,(\mathcal{B}_r(x) \subset U_{\alpha_0})\}.$$

Тогда $\delta = inf\{\delta\ (x) \mid x \in K\}$.]

3.17. Докажите, что если каждая последовательность точек из $K \subset \mathbf{R}^n$ содержит сходящуюся последовательность, причем пределом ее является точка из множества K, то K компактно.

3.18 Пусть $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ - непрерывное отображение компакта $K \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что $f(K)$ - компактное множество в $\mathbf{R}^m$.

[**Указание.** Воспользуйтесь утверждением б) задачи 3.12.]

3.19. Приведите пример непрерывной биекции $f : X \rightarrow Y$, $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$, для которой обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ является разрывным.

3.20. Пусть $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ - непрерывное взаимно однозначное отображение компакта $K \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что отображение $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ - непрерывно; иначе говоря, f является гомеоморфизмом множеств K и $f(K)$.

[**Указание.** Достаточно показать (см. задачу 3.12 б), что если множество $U \subset K$ открыто относительно K, то $f(U)$ открыто относительно $f(K)$. А это следует из равенства $f(U) = f(K) \setminus f(K \setminus \mathrm{U})$ и компактности множества $f(K \setminus U)$.]

3.21. Пусть отображение $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ определено равенством $f(x) = (cos\,x, sin\,x)$, и g - сужение f на интервал $I =]0; 2\pi[$.

Покажите что:

а) отображение g - взаимно однозначно;

б) g - гомеоморфное отображение на каждом отрезке, содержащемся в I;

в) g - гомеоморфизм множеств I и $g(I)$; определите множество $g(I)$;

г) f является гомеоморфизмом на каждом интервале, полученном из I параллельным переносом.

3.22. Пусть x_0 - некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$. Докажите непрерывность функции $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, заданной равенством $f(x) = |x - x_0|$.

3.23. Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$. Для $x \in \mathbf{R}^n$ положим

$$d(x; E) := \inf\{|x-y| \mid y \in E\}.$$

а) Докажите непрерывность функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, определенной равенством $f(x) = d(x; E)$.

[**Указание.** Из неравенства $|x-y| \le |x-x_0| + |x_0-z| + |z-y|$ следует, что при $z \in E$ $d(x; E) \le |x-x_0| + |x_0-z|$; отсюда, в свою очередь, следует, что

$$d(x; E) \le |x-x_0| + d(x_0, E).]$$

б) Пусть U - открытое множество в $\mathbf{R}^n$, а A - замкнутое, причем $A \subset U$. Определим функцию $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$f(x) = \frac{d(x; R^n \setminus U)}{d(x; A) + d(x; R^n \setminus U)}.$$

Докажите, что функция f непрерывна и, кроме того,

1) $0 \le f(x) \le 1$ для каждого $x \in \mathbf{R}^n$, и

2) $f(x) = 1$, если $x \in A$, и $f(x) = 0$, если $x \in \mathbf{R}^n \setminus U$.

[Непрерывную функцию, обладающую такими свойствами, называют **функцией Урысона для пары (U; A)**.]

3.24. Покажите, что если U - открытое множество в $\mathbf{R}^n$, а A - компактное, причем $A \subset U$, то существует компактное множество $D \subset U$, внутренность которого содержит множество A.

3.25. Пусть $\{U_1, ..., U_m\}$ - открытое покрытие компакта $A \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что существуют компактные множества $D_1 \subset U_1, ..., D_m \subset U_m$, внутренности которых покрывают A.

[**Указание.** Воспользоваться задачей 3.24. В качестве D_1 можно взять такое компактное подмножество U_1, внутренность которого покрывает компакт $A \setminus (U_2 \cup ... \cup U_m)$; в качестве D_2 - компактное подмножество U_2, внутренность которого содержит компакт

$A \setminus (Int\, D_1 \cup U_3 \cup ... \cup U_m)$, и т.д.]

[Через $Int\, E$ обозначается внутренность множества E.]

3.26. Пусть $\{U_1, ..., U_m\}$ - открытое покрытие компакта $A \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что существует семейство $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ непрерывных функций $\varphi_i : U \to \boldsymbol{R}$, определенных на открытом множестве U, содержащем A, таких что

1) $0 \le \varphi_i(x) \le 1$ для каждого $x \in U$ ($\varphi_i \in \Phi$);

2) если $x \in A$, то $\sum_{\varphi_i \in \Phi} \varphi_i(x) = 1$;

3) каждая функция $\varphi_i \in \Phi$ обращается в нуль вне некоторого компакта, содержащегося в U_i.

[**Указание.** Воспользоваться утверждениями задач 3.25, 3.24 и 3.26.б. Пусть $D_1, \ldots, D_m, F_1, \ldots, F_m$ такие компактные множества, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Int\, D_i \supset A$, $D_i \subset Int\, F_i$, $F_i \subset U_i$; обозначим через f_i функцию Урысона для пары $(Int\, F_i; D_i)$. На компакте $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ непрерывная функция $f = f_1 + \ldots + f_m$ принимает значения ≥ 1 и, следовательно, существует открытое множество $U \supset D$, такое, что $f(x) > \frac{1}{2}$ при $x \in U$. Пусть V - открытое множество, содержащее A, такое, что $\bar{V} \subset U$, и ψ - функция Урысона пары (V, A). Тогда функции φ_i, определенные на U равенством $\varphi_i(x) = \dfrac{\psi(x) f_i(x)}{f_1 + \ldots + f_m(x)}$, образуют требуемое семейство Φ].

[Семейство Φ называется **непрерывным разбиением единицы на компакте A, подчиненным покрытию** $\{U_1, \ldots, U_m\}$.]

3.27. Покажите, что образ $f(X)$ линейно связного множества $X \subset \mathbf{R}^n$ при непрерывном отображении $f: X \to \mathbf{R}^n$ является линейно связным множеством.

3.28. Покажите, что объединение линейно связных множеств, имеющих общую точку, является линейно связным множеством.

3.29. Покажите, что:

а) полусфера $S^{n-1}_{+} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1, x^n > 0\}$ является линейно связным множеством;

б) сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$ является линейно связным множеством.

3.30. Докажите, что если $X \subset \mathbf{R}$ и X - линейно связно, то X есть промежуток на $\mathbf{R}$ (т.е. отрезок, полуинтервал, интервал, луч или вся числовая ось).

3.31. Докажите, что если x_0 - внутренняя, а x_1 - внешняя точка множества $E \subset \mathbf{R}^n$, то носитель любого пути с концами x_0, x_1 пересекает границу множества E.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Настоящий раздел связан с материалом, изложенным в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ», ч. 1, с.435-449.

Центральным понятием темы является понятие дифференциала функции многих переменных. В учебнике оно вводится исходя из определения дифференцируемости функции многих переменных, обобщающего соответствующее определение для функции одной переменной. Но если вспомнить, понятие дифференцируемости функции одной переменной вводилось при изучении вопроса о существовании производной. Так почему же для функций многих переменных вопрос о производной опускается, неужели понятие производной для функций многих переменных нельзя ввести?

Как мы знаем, производной функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ в точке $a \in \mathbf{R}$ называется число $f'(a)$, удовлетворяющее соотношению

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Посмотрим, для каких отображений $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ предел правой части равенства (1) сохраняет смысл.

Ясно, что основное препятствие заключается в операции деления - как определить деление вектора $f(a+h) - f(a)$ из $\mathbf{R}^m$ на вектор h из $\mathbf{R}^n$? В двух случаях это можно сделать, когда $n = 1$ и когда $n = m = 2$.

В первом случае, когда $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, вектор h - число и отношение $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ представляет собой вектор из $\mathbf{R}^m$, каждая координата которого получается делением на h соответствующей координаты вектора $f(a+h) - f(a)$. Пределом такого отношения при $h \to 0$ будет вектор из $\mathbf{R}^m$, j - ая координата $(j = 1, \ldots, m)$ которого есть предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^j(a+h) - f^j(a)}{h},$$

т.е. обычная производная в точке $a \in \mathbf{R}$ от j - ой координатной функции f^j отображения f. Таким образом, в случае $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ под производной $f'(a)$ естественно понимать вектор $((f^1)'(a), \ldots, (f^m)'(a)) \in \mathbf{R}^m$.

Во втором случае, когда $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, для точек плоскости можно ввести операцию деления, интерпретируя их как комплексные числа. Тогда предел отношения $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ при $h \to 0$ даст некоторое комплексное число (т.е. опять-таки вектор на плоскости $\mathbf{R}^2$) которое можно считать производной от f в точке $a \in \mathbf{R}^2$. Мы не станем уточнять вид вектора $f'(a)$; с ним, а также со свойствами функций $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, имеющих производную в описанном смысле, вы подробно ознакомитесь позже, в отдельном курсе «Теория функций комплексной переменной».

Наконец, в общем случае функции $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ равенству (1) придать смысл невозможно. [Операция деления определена и для так называемых гиперкомплексных чисел - кватернионов ($m = n = 4$) и октав ($m = n = 8$). Однако для этих чисел умножение не коммутативно, а потому пределу (1) может быть приписано два значения, в зависимости от того, делится на h (т.е. умножается на h^{-1}) разность $f(a+h) - f(a)$ справа или слева. Поскольку убедительной причины для предпочтения какого-то одного способа деления у нас нет, от определения производной с помощью равенства (1) в случаях $m = n = 4$, $m = n = 8$ мы вынуждены отказаться.] Попробуем преобразовать (1) к виду, допускающему обобщение на многомерный случай.

Пользуясь свойствами предела, запишем (1) в виде

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h}{h} = 0$$

Последнее равенство уже можно обобщить, заменяя его эквивалентным

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h|}{|h|} = 0 \qquad (2)$$

нужно только уточнить, какой смысл следует придать выражениям $f'(a)$ и $f'(a)\,h$, если $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Соотношение (2) подразумевает наличие некоторой специальной функции $F: \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $F(h) = \dfrac{|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h|}{|h|}$, предел которой при $h \to 0$ вычисляется. Посмотрим, что нужно знать, чтобы считать функцию F заданной.

Вектор h - это приращение точки $a \in \mathbf{R}^n$ и потому является элементом $\mathbf{R}^n$. Выражение же $f'(a)\,h$ должно быть вектором из $\mathbf{R}^m$ (чтобы разность $f(a+h) - f(a) - f'(a)\,h$ имела смысл). При этом запись $f'(a)\,h$ подразумевает, что каждому $h \in \mathbf{R}^n$ отвечает «свой» вектор $f'(a)\,h \in \mathbf{R}^m$. Значит, говорить о том, что функция F известна, можно только в том случае, когда известно соответствие $h \to f'(a)\,h$, т.е. когда задано некоторое отображение из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, сопоставляющее каждому приращению $h \in \mathbf{R}^n$ вектор $f'(a)\,h \in \mathbf{R}^m$. Обозначим условно это отображение через L, т.е. будем считать, что $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ действует по формуле

$L(h) = f'(a)\,h$. С использованием этого обозначения соотношение (2) можно переписать в виде

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0 \qquad (3)$$

Уже само «определяющее» L равенство $L(h) = f'(a)\,h$ подсказывает, что именно отображение L следовало бы считать производной f в точке a. Говоря точнее, производной функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ в точке $a \in \mathbf{R}^n$ следовало бы назвать такое отображение $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, которое удовлетворяло бы соотношению (3). Однако такое определение необходимо уточнить, поскольку вполне может оказаться, что функция f будет иметь бесконечное множество подобных отображений L. (В самом деле, если найдется хотя бы одно отображение L, то всякое отображение L, отличающееся от L, на бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем $|h|$, будет также удовлетворять соотношению (3).) Вспомним поэтому, что в одномерном случае отображение $h \to f'(a)\,h$ являлось линейным, и по аналогии потребуем, чтобы и в общем случае отображение $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ было линейным, т.е. удовлетворяло соотношениям:

$$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2) \qquad (\forall h_1, h_2 \in \mathbf{R}^n),$$

$$L(\lambda h) = \lambda L(h) \qquad (\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall h \in \mathbf{R}^n).$$

Оказывается для функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ будет существовать не более одного такого отображения.

Докажем это. Пусть имеются два линейных отображения $L_1, L_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, удовлетворяющие соотношению (3). Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{|L_1(h) - L_2(h)|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L_2(h) - (f(a+h) - f(a) - L_1(h))|}{|h|} \le$$

$$\le \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L_2(h)|}{|h|} + \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L_1(h)|}{|h|} = 0,$$

т.е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{|L_1(h) - L_2(h)|}{|h|} = 0.$$

Так как $tx \to 0$ при $t \to 0$ ($t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$), то

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|L_1(tx) - L_2(tx)|}{|tx|} = \lim_{t \to 0} \frac{|tL_1(x) - tL_2(x)|}{|t|\,|x|} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|\,|L_1(x) - L_2(x)|}{|t|\,|x|} = \frac{|L_1(x) - L_2(x)|}{|x|}.$$

Следовательно $L_1(x) = L_2(x)$ при любом $x \in \mathbf{R}^n$, т.е. $L_1 = L_2$.

Итак, проведенные рассуждения делают уместным следующее определение производной.

Производной функции $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ в точке $a \in \mathbf{R}^n$ называется такое линейное отображение $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, которое удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Такое определение правда, не согласуется с одномерным случаем. Как мы помним, в одномерном случае $f'(a)$ - число, а не отображение. Отображение же $L : h \to f'(a)\, h$ мы называли дифференциалом. Поэтому, чтобы устранить появляющуюся многозначность понятия производной, будем и в многомерном случае отображение L считать **дифференциалом функции f в точке a**.

В итоге мы видим, что какое бы понятие одномерного анализа, производную или дифференцируемость, мы не обобщали на многомерный случай, прежде всего появляется линейное отображение L, аппроксимирующее приращение функции f, т.е. дифференциал функции. Именно поэтому в учебнике сначала вводятся понятие дифференциала, а уже затем понятие производной. Кстати, под **производной** $f'(a)$ мы будем понимать матричное представление дифференциала L (в стандартных базисах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$) - матрицу Якоби отображения f. Такое понимание производной очень хорошо согласуется с разобранным случаем $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, поскольку для таких функций матрица Якоби отличается от построенного выше вектора $f'(a)$ лишь формой записи. (В некоторых учебниках, в том числе и в учебнике В. А. Зорича, понятие производной отождествляется с понятием дифференциала.)

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение дифференцируемой в точке функции.

2. Что называется дифференциалом (в точке) функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

3. Можете ли вы объяснить, с какой целью для области определения $\mathbf{R}^n$ дифференциала в точке x отображения $f: E \to \mathbf{R}^m$ ($E \subset \mathbf{R}^n$) вводится обозначение $T\mathbf{R}^n_x$?

4. Объясните следующее высказывание из учебника В. А. Зорича (см. стр.436): «Значение дифференциала на векторе $h \in T\mathbf{R}^n_x$ есть вектор $f'(a)\,h \in T\mathbf{R}^n_x$, приложенный к точке $f(x)$ и аппроксимирующий приращение $f(x+h)-f(x)$ функции, вызванное приращением h аргумента x».

5. Получите равенства (2), указанные на стр.436 учебника В. А. Зорича, из равенства (1) на стр. 435.

6. Как, зная функции $L^i(x)$, введенные на стр.436 учебника В. А. Зорича, записать дифференциал $L(x)$ отображения $f: E \to \mathbf{R}^n$?

7. Сформулируйте определение частной производной функции f в точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$ по переменной x^i.

8. Составьте матрицу Якоби отображения $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, действующего по формуле $f(x, y) = (\,x + y,\ x^2 \sin y,\ e^x \cos y\,)$, в точке

а) $(0;\,0)$; б) $(1,\,x)$; в) $(x_0;\,y_0)$?

9. По каким формулам будет действовать дифференциал отображения f из вопроса 8 в точке а) $(0;\,0)$; б) $(1,\,x)$; в) $(x_0,\,y_0)$?

10. Обязана ли дифференцируемая в точке функция иметь все частные производные в этой точке?

11. Функция, дифференцируемая во внутренней точке области определения, обязана ли иметь все частные производные в этой точке?

12. Верно ли, что всякая функция, имеющая все частные производные в точке, будет дифференцируемой в этой точке?

13. Сформулируйте правило дифференцирования суммы двух функций.

14. Сформулируйте правило дифференцирования произведения двух функций. Уточните, какой должна быть область значений для этих функций?

15. Вычислите матрицу Якоби $(f+g)'\,(x_0,\ y_0)$, если f - отображение из вопроса 8, а $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ задается равенством $g(x, y) = (\,x, y, xy\,)$. Верно ли, что

$$(f+g)'\,(x_0, y_0) = f'\,(x_0, y_0) + g'\,(x_0, y_0)\ ?$$

16. Проверьте непосредственным вычислением соответствующих матриц Якоби правило дифференцирования частного $\dfrac{f}{g}$ двух функций в точке $(0;\,0)$, если f и g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ задаются равенствами: $f(x, y) = x + y$ и $g(x, y) = \cos(xy)$.

17. Сформулируйте правило дифференцирования композиции двух отображений.

18. Пользуясь правилом дифференцирования композиции, получите формулу

$$(f \quad g)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dg^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dg^2}{dt}(t_0)$$

если $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ и $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, причем $g(t_0) = (x_0, y_0)$.

19. Что называется производной функции по вектору ? Уточните, какой должна быть область значений функции, производная по вектору от которой определяется ?

20. Вычислите производные по каждому из векторов стандартного базиса в $\mathbf{R}^3$ от функции $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, заданной равенством

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x^2 y) + e^{z^2}.$$

21. Вычислите производную по вектору $v = (1,\ 2,\ 0)$ от функции $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ из вопроса 20.

22. Что обозначается символом $grad\, f(x)$?

23. Найдите $grad\, f(x)$ для функции из вопроса 20.

24. Сформулируйте правило дифференцирования обратного отображения.

25. Проверьте непосредственным вычислением матриц Якоби

$$f'(1;\, 0) \quad \text{и} \quad (f^{-1})'(-1;\, 0)$$

правило дифференцирования обратного отображения, если $f : E \to \mathbf{R}^2$, где $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ и $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$.

[**Указание.** Для вычисления координатных функций отображения f^{-1} удобно перейти к полярным координатам.]

Задачи

4.1. Докажите, что если функция $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема в $a \in \mathbf{R}^n$, то она непрерывна в точке a.

4.2. Докажите, что функция $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема в точке $a \in \mathbf{R}^n$ в том и только том случае, если существует такое линейное отображение $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

4.3. Пользуясь определением дифференциала докажите, что для функции $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, заданной равенством $f(x, y) = \sin x$, дифференциал $L = df(a, b)$ в точке $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ действует по формуле: $L(h) = (\cos a)\, h^1$.

4.4. Функция $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ **не зависит от второй переменной**, если для каждого $x \in \mathbf{R}$ имеем $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Показать, что f не зависит от второй переменной тогда и только тогда, когда существует такая функция g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $f(x, y) = g(x)$. Как выражается $df(a, b)$ через $dg(a)$?

4.5. Определить независимость функции $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ от первой переменной и найти $df(a, b)$ для таких f. Какие функции не зависят ни от первой , ни от второй переменной ?

4.6. Пусть g - непрерывная функция на единичной окружности

$$S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\} \text{ и } g(0; 1) = g(1; 0) = 0, g(-x) = -g(x).$$

Определим $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ условиями

$$f(x) = \begin{cases} |x| \cdot g\left(\dfrac{x}{|x|}\right), & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

а) Показать, что функция $k: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определенная равенством $k(t) = f(tx_0)$, где $x_0 \in \mathbf{R}^2$, дифференцируема.

б) Показать, что f не дифференцируема в $(0; 0)$, кроме случая $g = 0$.

[**Указание.** Сначала показать, что $df(0, 0) = 0$, рассматривая $h = (h^1, h^2)$ с $h^2 = 0$ и, затем $h^1 = 0$].

4.7. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Показать, что f есть функция вида, рассмотренного в задаче 4.6., и потому не дифференцируема в $(0; 0)$.

4.8. Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определяется равенством $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Показать, что f не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

4.9. Пусть $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Доказать, что f дифференцируема в точке $a \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда f^1 и f^2 дифференцируемы в a, и что в этом случае

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \end{pmatrix}$$

4.10. Доказать, что если $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ - **постоянная** функция (т.е. существует такое $y \in \mathbf{R}^m$, что $f(x) = y$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$), то $df(a) = 0$ при всех $a \in \mathbf{R}^n$.

4.11. Доказать, что если $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ - линейное отображение, то $df(a) = f$ при всех $a \in \mathbf{R}^n$.

4.12. Пусть функции $\pi^1, \ldots, \pi^n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определены равенствами $\pi^i(x) = x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Покажите, что $(\pi^i)'(a) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте.

[**Указание.** Воспользуйтесь задачей 4.11.].

4.13. Доказать, что $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема в $a \in \mathbf{R}^m$ тогда и только тогда, когда дифференцируема каждая координатная функция f^i, и

$$df(a) = (df^1(a), \ldots, df^m(a)).$$

[Таким образом, матрица Якоби $f'(a)$ имеет размеры $m \times n$, причем i-й строкой ее служит $(f^i)'(a)$].

4.14. Покажите, что если функция $s: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенством $s(x, y) = x + y$, то $ds(a, b) = s$ (так что $s'(a, b) = (1, 1)$).

4.15. Покажите, что если функция $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ задана равенством $p(x, y) = xy$, то $dp(a, b)(h^1, h^2) = bh^1 + ah^2$ (так что $p'(a, b) = (b, a)$).

4.16. Пользуясь теоремой о дифференциале композиции отображений и результатами задач 4.13 - 4.15, получите для функций $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ соотношения :

а) $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$;

б) $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)\,dg(a)$.

[Докажем (а). Поскольку $f + g = s \circ (f, g)$, имеем

$$d(f + g)(a) = ds(f(a), g(a)) \circ d(f, g)(a) =$$

$$= s \circ (df(a), dg(a)) = df(a) + dg(a). \;]$$

4.17. С помощью результатов задач 4.12 - 4.16 вычислить f' для следующих функций:

а) $f(x, y) = sin(x y^2)$; б) $f(x, y) = x^y$;

в) $f(x, y, z) = (x^y, z)$; г) $f(x, y) = sin\,(x\,sin\,y)$;

д) $f(x, y, z) = sin\,(x\,sin\,(y\,sin\,z))$; е) $f(x, y, z) = x^{y^z}$;

ж) $f(x, y, z) = x^{z+y}$; з) $f(x, y, z) = (x + y)^z$;

и) $f(x, y) = sin(xy)$; к) $f(x, y) = (sin(xy))^{cos 3}$;

л) $f(x, y, z) = (sin(xy), sin(x\,sin\,y), x^y)$.

[Найдем f' в случае (а). Так как $f = \sin\circ(\pi^1 (\pi^2)^2)$, то мы имеем

$$f'(a, b) = (sin)'(ab^2)\,[\,((\pi^1)'(\pi^2)^2)(a, b) + (\pi^1 \cdot 2\pi^2 (\pi^2)')(a, b)] =$$

$$= cos\,(ab^2)\,[(1; 0)\,b^2 + a \cdot 2b\,(0, 1)] =$$

$$=(b^2 \cos(ab^2), 2\, ab \cos (ab^2)).)$$

4.18. Найти f' в приводимых ниже примерах (где $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - непрерывно):

а) $f(x, y) = \int\limits_a^{x+y} g(t)\, dt$; б) $f(x, y) = \int\limits_a^{xy} g(t)\, dt$;

$$\text{в) } f(x, y, z) = \int\limits_{x^y}^{\sin (x \sin (y \sin z))} g(t)\, dt .$$

4.19. Функция $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ называется **билинейной,** если для любых $x, x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $y, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^m$ и $a \in \mathbf{R}$

$$f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay),$$

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

а) Доказать, что если f билинейна, то существует такое число $M > 0$, что

$$|f(h, k)| < M|h||k|$$

при всех $h \in \mathbf{R}^n$ и $k \in \mathbf{R}^m$.

б) Пусть $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ - билинейна. Доказать, что

$$\lim_{(h, k) \to 0} \frac{|f(h, k)|}{|(h, k)|} = 0.$$

в) Доказать, что для билинейной функции $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$

$$df(a, b)(h, k) = f(a, k) + f(h, b).$$

[**Доказательство (а).** Согласно свойствам билинейной функции будем иметь:

$$f(h, k) = f\left(\sum_{i=1}^{n} h^i e_i, \sum_{j=1}^{m} k^j e'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} h^i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} k^j e'_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h^i k^j f(e_i, e'_j) .$$

Пусть $C = \max |f(e_i, e'_j)|$ и $M = nmC$. Так как $|h^i| \le |h|$ и $|k^j| \le |k|$, то

$$|f(h, k)| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |h||k|C = M|h||k|.$$

Доказательство (б). Пользуясь доказанным утверждением (а), получим

$$\frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} \le \frac{M\cdot|h||k|}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}} \le M\frac{|h|^2+|k|^2}{\sqrt{|h|^2+|k|^2}} = M\sqrt{h^2+k^2} \to 0$$

при $(h, k) \to 0$.)

4.20. Определим функцию $IP : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ формулой

$$IP(x, y) = \langle x,\ y \rangle.$$

а) Найти $d(IP)(a, b)$ и $(IP)'(a, b)$.

б) Показать, что если $f, g :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ дифференцируем и $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено равенством $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$, то

$$h'(a) = \langle f'(a)^{\mathrm{T}}, g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)^{\mathrm{T}} \rangle.$$

[Заметим, что $f'(a)$ есть $(n \times 1)$ - матрица; транспонированная матрица $f'(a)^{\mathrm{T}}$ есть $(1 \times n)$ - матрица, которую мы рассматриваем как элемент из $\mathbf{R}^n$.]

в) Показать, что если $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ дифференцируема и $|f(t)| = 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$, то $\langle f'(t)^{\mathrm{T}}, f(t) \rangle = 0$.

4.21. Пусть E_i ($i = 1, \ldots, k$) - евклидовы пространства различных размерностей. Функция $f: E_1 \times \ldots \times E_k \to \mathbf{R}^n$ называется **полилинейной**, если при любом выборе точек $x_j \in E_j$, $j \neq i$, функция $g : E_i \to \mathbf{R}^p$, определяемая равенством

$$g(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

линейна.

а) Показать, что если f - полилинейная функция и $j \neq i$, то для $h = (h_1, \ldots, h_k)$, где $h_l \in E_l$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a_1, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots, a_k)|}{|h|} = 0.$$

[**Указание:** функция $g(x, y) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_k)$ билинейна.]

б) Доказать, что

$$df(a_1, \ldots, a_k)(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

4.22. Будем считать $(n \times n)$ - матрицу точкой произведения $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ n экземпляров пространства $\mathbf{R}^n$, рассматривая каждую строку как элемент из $\mathbf{R}^n$.

а) Доказать, что функция $det : \mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема и

$$d(\,det\,)(a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}.$$

б) Показать, что если $a_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируемы и $f(t) = \det(a_{ij}(t))$, то

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & . & . & . & a_{1n}(t) \\ . & & . & . & . \\ a'_{j1}(t) & . & . & . & a'_{jn}(t) \\ . & & . & . & . \\ a_{n1}(t) & . & . & . & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

в) Пусть $det(a_{ij}(t)) \neq 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, функции $b_1, ..., b_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируемы, а функции $s_1, ..., s_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таковы, что $(s_1(t), ..., s_n(t))$ при каждом t образует решение системы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\, s_j(t) = b_i(t). \quad i = 1, ..., n.$$

Показать, что все s_i дифференцируемы, и найти $s'_i(t)$.

4.23. Предположим, что функция $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ дифференцируема и имеет дифференцируемую обратную $f^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Показать, что

$$(f^{-1})'(a) = [f'(f^{-1}(a))]^{-1}.$$

[**Указание:** учесть, что $(f \circ f^{-1})(x) = x$.]

4.24. Найти частные производные следующих функций :

а) $f(x, y) = sin(xy^z)$; б) $f(x, y, z) = x^y$;

в) $f(x, y, z) = z$; г) $f(x, y) = sin(x(sin\, y))$;

д) $f(x, y, z) = sin(x\, sin\,(y\, sin\, z))$; е) $f(x, y, z) = x^{y^z}$;

ж) $f(x, y, z) = x^{y+z}$; з) $f(x, y, z) = (x + y)^z$;

и) $f(x, y) = sin(xy)$; к) $f(x, y) = (sin(xy))^{cos\, 3}$.

4.25. Найти частные производные следующих функций (функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна):

а) $f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t)dt$; б) $f(x, y) = \int_y^x g(t)dt$;

в) $f(x, y) = \int_a^{xy} g(t)dt$; г) $f(x, y) = \int_a^{\left(\int_b^y g(x)dt\right)} g(t)dt$;

4.26. Найти $\partial_2 f(1, y)$ в случае, когда

$f(x, y) = x^{x^{x^y}} + (\ln x)(\mathrm{arctg}\,(\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{arctg}\,(\mathrm{arcctg}(\,\cos(xy) - \ln(1+\sin(xy)))))))$.

[**Указание.** Задачу можно решить без утомительных вычислений.]

4.27. Выразить частные производные f через производные функций g и h, если

а) $f(x, y) = g(x)\,h(y)$; б) $f(x, y) = g(x)^{h(y)}$;

в) $f(x, y) = g(x)$; г) $f(x, y) = g(y)$;

д) $f(x, y) = g(x + y)$.

4.28. Пусть $g_1, g_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ непрерывны и $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенством

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0)\, dt + \int_0^y g_2(x, \tau)\, d\tau.$$

а) Доказать, что $\partial_2 f(x, y) = g_2(x, y)$.

б) Как следовало бы определить f, чтобы $\partial_2 f(x, y) = g_1(x, y)$?

в) Найти такую функцию $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, у которой $\partial_1 f(x, y) = x$, $\partial_2 f(x, y) = y$, и такую функцию, у которой $\partial_1 f(x, y) = y$ и $\partial_2 f(x, y) = x$.

4.29. Показать, что функция $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, у которой $\partial_2 f = 0$ не зависит от второй переменной. Если же $\partial_1 f = \partial_2 f = 0$, то f - постоянная.

4.30. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x < 0) \text{ или } (x > 0 \text{ и } y \neq 0)\}$.

а) Показать, что функция $f : A \to \mathbf{R}$, у которой $\partial_1 f = \partial_2 f = 0$, постоянна.

[**Указание.** Любые две точки в А можно соединять ломаной, каждое звено которой параллельно одной из осей.]

б) Найти такую функцию $f : A \to \mathbf{R}$, что $\partial_2 f = 0$, но f не является независимой от второй переменной.

[Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$]

4.31. Определим $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ равенством

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{при } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{при } (x, y) = 0. \end{cases}$$

а) Показать, что $\partial_2 f(x, 0) = x$ для всех x и $\partial_1 f(0, y) = -y$ для всех y.

б) Показать, что $\partial_{1,2} f(0, 0) \neq \partial_{2,1} f(0,0)$.

4.32. Определим $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Показать, что f есть функция класса $C^{(\infty)}$ и $f^{(k)}(0) = 0$ для всех k.

Показать, что f есть функция класса $C^{(\infty)}$ и $f^{(k)}(0) = 0$ для всех k.

[**Указание.** Воспользуйтесь правилом Лопиталя.]

4.33. Последовательное решение следующих задач дает возможность построить функцию Урысона, имеющую $C^{(\infty)}$ класс гладкости. Последнее, в свою очередь, позволяет доказать существование разбиения единицы для компакта $A \subset \mathbf{R}^n$, подчиненного открытому покрытию $\{U_1, ..., U_n\}$ и состоящего из $C^{(\infty)}$ гладких функций (определения см. в задачах 3.25 и 3.26)

а) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}} & \text{при } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{при } x \notin]-1, 1[. \end{cases}$$

Показать, что $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть функция класса $C^{(\infty)}$, положительная на интервале $]-1; 1[$ и равная нулю во всех остальных точках.

б) Показать, что существует такая функция $g : \mathbf{R} \to [0, 1]$ класса $C^{(\infty)}$, что $g(x) = 0$ при $x \le 0$ и $g(x) = 1$ при $x \ge \varepsilon$.

[**Указание.** Положите

$$g(x) = \frac{\int\limits_0^x f(t)\,dt}{\int\limits_0^\varepsilon f(t)\,dt},$$

где f - функция класса $C^{(\infty)}$, положительная на интервале $]0; \varepsilon[$ и равная нулю во всех остальных точках.)

в) Определим при заданном $a \in \mathbf{R}^n$ функцию $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$g(x) = f\left(\frac{x^1 - a^1}{\varepsilon}\right) ... f\left(\frac{x^n - a^n}{\varepsilon}\right),$$

где функция f из задачи (а). Показать, что g - функция класса $C^{(\infty)}$, положительная на интервале

$$]a^1 - \varepsilon, a^1 + \varepsilon[\times ... \times]a^n - \varepsilon, a^n + \varepsilon[$$

и равная нулю во всех остальных точках.

г) Показать, что для всякого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$ и компакта $A \subset U$ существует такая неотрицательная функция $f : U \to \mathbf{R}$ класса $C^{(\infty)}$, что $f(x) > 0$ для всех $x \in A$ и $f(x) = 0$ вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в U.

д) Показать, что указанную в (г) функцию $f : U \to \mathbf{R}$ можно выбрать так, чтобы $f(x) = 1$ для всех $x \in A$.

[**Указание.** Если функция из (г) такова, что $f(x) > \varepsilon$ при $x \in A$, то рассмотреть $g \circ f$, где g - функция из (б).]

4.34. Определим $g, h : D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbf{R}$ равенствами:

$$g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ ),$$

$$h(x,y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\ ).$$

Показать, что максимум функции $f: S^2 \to \mathbf{R}^2$, где

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

есть либо максимум $f \circ g$, либо максимум $f \circ h$ на D.

4.35. Найти выражения для частных производных следующих функций:

а) $F(x, y) = f(\, g(x),\ h(y),\ g(x)+h(y)\,)$;

б) $F(x, y\, z) = f(\, g(x+y),\ h(x+z)\,)$;

в) $F(x, y) = f(\, x,\ g(x),\ h(x, y)\,)$;

г) $F(x, y, z) = f(\, x^y,\ y^z,\ z^x\,)$.

4.36. Пусть $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $D_v f(a)$ - производная f в точке a по вектору v.

а) Показать, что $D_{e_i} f(a) = \partial_i f(a)$.

б) Показать, что $D_{tv} f(a) = t\, D_v f(a)$ $(t \in \mathbf{R})$.

в) Показать, что если f дифференцируема в a, то $D_v f(a) = d f(a)(v)$ и потому $D_{x+y} f(a) = D_x f(a) + D_y f(a)$.

[**Напомним**, производной от f в точке a по вектору v называется предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = 0. \ ]$$

4.37. Пусть f определена как в задаче 4.6. Показать, что $D_x\, f(0, 0)$ существует для всех x, однако если $g \neq 0$, то $D_{x+y} f(0, 0) \neq D_x f(0, 0) + D_y f(0, 0)$ для некоторых x и y.

4.38. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ 0 < y < x^2\}$ и $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена равенствами

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \notin A, \\ 1, & \text{если } (x, y) \in A. \end{cases}$$

Показать, что $D_v f(0, 0)$ существует для всех существует для всех $v \in \mathbf{R}^2$, хотя f даже не непрерывна в $(0, 0)$.

4.39. а) Пусть $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируема в 0, но f' разрывна в 0.

б) Пусть $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{при } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Показать, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$, но $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ разрывны в этой точке.

4.40. Функция $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ называется **однородной степени** m, если $f(tx) = t^m f(x)$ для всех x. Показать, что если при этом f дифференцируема, то $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i \partial_i f(x) = m f(x)$.

[**Указание.** Найти $g'(1)$, где $g(t) = f(tx)$, $t \in \mathbf{R}$.]

4.41. Докажите, что если $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема и $f(0) = 0$, то существуют такие функции $g_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$

[Утверждение этой задачи будет усилено в задаче 5.21 ниже. **Указание.** Если $h(t) = f(tx)$, то $f(x) = \int\limits_0^1 h'(t)\, dt$.]

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

По теме этого раздела прочитайте стр. 454 - 473 учебника В.А. Зорича «Математический анализ», ч.1.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем. Уточните, какой должна быть область значений функции?

2. На примере функции f: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, убедитесь, что для отображений, имеющих многомерную область значений, утверждение теоремы о среднем не выполняется.

3. Важно ли в формулировке следствия из теоремы о среднем (стр. 455) предположение о том, что G - область в $\mathbf{R}^n$? Подтвердите ответ примером.

4. Выполнение каких условий обеспечивает дифференцируемость функции в точке? Какие из этих условий являются необходимыми?

5. Можете ли вы объяснить, в каком месте доказательства теоремы 2 (стр. 456) использовалось предложение о непрерывности частных производных?

6. Сформулируйте определение частной производной второго порядка по переменным x^i, x^j.

7. Отличаются ли определения вторых производных по переменным x^i, x^j и x^j, x^i?

8. Выполнение каких условий обеспечит равенство $\partial_{i,j} f = \partial_{j,i} f$?

9. Выпишите подробно вид всех членов до третьего порядка включительно разложения по формуле Тейлора функции f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ в окрестности точки (x_0, y_0).

10. Перечислите все известные вам формы остаточного члена формулы Тейлора.

11. Сформулируйте необходимые условия экстремума дифференцируемой функции. Насколько важным является предположение о том, что функция исследуется на экстремум во внутренней точке области определения?

12. Укажите достаточное условие экстремума функции многих переменных.

13. Что называется графиком функции f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$?

14. Для графика функции $f\colon G \to \mathbf{R},\ G \subset \mathbf{R}^n$, В. А. Зорич применяет еще одно название. Какое?

15. Что называется путем на плоскости?

16. Что называется путем на двумерной поверхности?

17. Что понимается под криволинейными координатами на двумерной поверхности в $\mathbf{R}^3$?

18. Сформулируйте определение касательной плоскости к графику функции $f\colon G \to \mathbf{R},\ G \subset \mathbf{R}^2$, в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

19. Напишите уравнение касательной плоскости к графику дифференцируемой функции $f\colon G \to \mathbf{R},\ G \subset \mathbf{R}^2$, в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

20. Как определяется вектор нормали к графику функции $f\colon G \to \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^2$, в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?

21. Какие выводы вы можете сформулировать по материалу п.6 (стр. 472 - 473) учебника В. А. Зорича?

Задачи

5.1. Найти $\partial_1 f(0, 0)$ и $\partial_2 f(0, 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

5.2. Является ли дифференцируемой в точке $(0; 0)$ функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}\ ?$$

5.3. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0; 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{при } x = y = 0. \end{cases}$$

5.4. Проверить равенство $\partial_{1,2} u(x, y) = \partial_{2,1} u(x, y)$, если:

а) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; б) $u = x^{y^2}$; в) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

5.5. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{если } |y| \le x, \\ -xy, & \text{если } |y| > x. \end{cases}$$

Показать, что $\partial_{1,2} f(0, 0) \neq \partial_{2,1} f(0, 0)$.

5.6. Существует ли $\partial_{2,1} f(0, 0)$, если

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{при } (x,y)\neq 0, \\ 0, & \text{при } (x,y)=0 \ ? \end{cases}$$

5.7. При каком значении постоянной a функция $u = x^3 + axy^2$ удовлетворяет уравнению $\partial_{1,1} u + \partial_{2,2} u = 0$?

5.8. Показать, что $\partial_{1,1} u + \partial_{2,2} u = 0$, если $u = \ln (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

5.9. Показать, что $\partial_{1,1} u + \partial_{2,2} u + \partial_{3,3} u = 0$, если $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

5.10. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}.$$

5.11. Пусть $u = x \ln (x + r) - r$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x+\gamma}$$

5.12. Пусть $u = \varphi(x - a t) + \psi(x + a t)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции φ и ψ.

5.13. Разложить по формуле Тейлора функцию $z = \sin x \sin y$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$. Найти члены первого, второго порядка и остаточный член второго порядка.

5.14. С помощью формулы Тейлора разложить функцию $z = x^y$ по степеням $(x - 1)$, $(y - 1)$, найти члены до третьего порядка включительно. Использовать результат для вычисления (без таблиц) $1{,}1^{1,02}$.

5.15. Исследовать на экстремум функцию $z = xy\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$.

5.16. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

5.17. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 2y)\, e^{-x^2 - y^2}$.

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

5.18. $z = x^2 + y^2$, в точке $(1; 2; 5)$.

5.19. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, в точке $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

5.20. $x = a \cos \varphi \cos \psi$, $y = b \sin\varphi \cos\psi$, $z = c \sin\psi$ в точке (φ_0, ψ_0).

5.21. а) Пусть $I^n := \{x \in \mathbf{R}^n : |x^i| \le c,\ i = 1, \dots, n\}$ n - мерный промежуток, I - отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Покажите, что если функция $f(x, y) = f(x^1, \dots, x^n, y)$ определена и непрерывна на множестве $I^n \times I$, то для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что если $y \in I$, $x_1, x_2 \in I^n$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$.

[**Указание.** Воспользуйтесь равномерной непрерывностью f.]

б) Покажите, что функция $g(x) = \int\limits_a^b f(x, y)dy$ определена и равномерно непрерывна на промежутке I^n.

в) Покажите, что если $h \in C(I^n; \mathbf{R})$, то функция $H(x, t) = h(tx)$ определена и непрерывна на $I^n \times I^1$, где $I^1 = \{t \in \mathbf{R} : |t| \le 1\}$.

г) Докажите следующую **лемму Адамара:** если $f \in C^{(1)}(I^n; \mathbf{R})$ и $f(0) = 0$, то существует функции $g_1, \dots, g_n \in C(I^n; \mathbf{R})$, такие что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x), \quad (x \in I^n),$$

причем $g_i(0) = \partial_i f(0)$ $(i = 1, \dots, n)$. [Сравните эту задачу с задачей 4.41.]

5.22. Докажите следующее обобщение теоремы Ролля для функций многих переменных: если функция f непрерывна в замкнутом шаре

$$\overline{B}_r(0) := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \le r\},$$

равна нулю на его границе и дифференцируема во внутренних точках шара $\overline{B}_r(0)$, то, по крайней мере, одна из внутренних точек этого шара является критической для функции f.

5.23. Проверьте, что функция $f(x, y) = (x - y^2)(x - 3y^2)$ не имеет экстремума в начале координат, хотя ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в $(0, 0)$.

5.24. а) Проверьте, что касательная к кривой $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbf{R}^n$.

б) Проверьте, что касательная гиперплоскость к графику S функции $y = f(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbf{R}^n$.

в) Пусть множество $S \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ является графиком функции $y = f(x^1, \dots, x^n)$ в координатах $(x^1, \dots, x^n, y)$ в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ и графиком функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ в координатах $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Проверьте, что касательная к S плоскость инвариантна относительного линейного преобразования координат в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

г) Проверьте, что **оператор Лапласа** $\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \partial_{i,i} f(x)$ определен инвариантно относительно ортогональных преобразований координат в $\mathbf{R}^n$.

6. НЕЯВНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Настоящий раздел будет связан с материалом, изложенным в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ» , ч. 1. с. 479 - 511.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что подразумевает высказывание о том, что некоторая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

2. Сформулируйте теорему о неявной функции в простейшем варианте ($F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$).

3. Пользуясь теоремой о неявной функции, сделайте заключение о существовании неявной функции, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 = 7$ в окрестности точки $(2; 1)$.

4. Почему уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет ни одной неявной функции?

5. Проверьте выполнение условий теоремы о неявной функции для отображения $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, если

$$F(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\, e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & \text{при } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{при } (x, y) = 0. \end{cases}$$

и $x_0 = y_0 = 0$. Существует ли функция $y = y(x)$, задаваемая неявно в окрестности точки $(0; 0)$ уравнением $F(x, y) = 0$?

6. Сформулируйте теорему о неявной функции в общем случае.

7. Пользуясь теоремой о неявной функции, сделайте заключение о существовании неявной функции заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $(1, 0, 0, 0)$, если $F(x^1, x^2; y^1, y^2) = (x^1 - e^{y^1}, x^2 + y^2 - y^1 e^{y^1})$.

8. Сформулируйте теорему об обратной функции.

9. Проверьте выполнение условий теоремы об обратной функции для отображения $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, заданного равенством

$$F(x, y) = (e^x, -y + x\, e^x).$$

10. Какое отображение $f : U \to V$ называется $C^{(p)}$ - диффеоморфизмом?

11. Сформулируйте теорему о ранге.

12. Какая система функций называется функционально независимой?

13. Приведите достаточное условие независимости (функциональной) системы из m гладких функций, определенных на открытом множестве в $\mathbf{R}^n$.

14. Приведите достаточное условие функциональной зависимости системы из m гладких функций, определенных на открытом множестве в $\mathbf{R}^n$.

15. Какой диффеоморфизм называется простейшим?

16. Приведите пример простейшего диффеоморфизма .

17. Сформулируйте теорему о локальном разложении диффеоморфизма в композицию простейших. Что подразумевает в названии теоремы словосочетание «локальное разложение»?

18. Проверьте, что диффеоморфизм $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, заданный равенством

$$f(x, y) = (x + y, x - y),$$

разлагается в композицию $h \circ g$, где $h(u, v) = (u, u - 2v)$, $g(x, y) = (x + y, y)$. Являются ли диффеоморфизмы h и g простейшими?

19. Разложите в композицию простейших диффеоморфизм $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, заданный равенством $f(x, y, z) = (x + y, y - z, 2z)$.

20. Какая критическая точка функции $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ называется невырожденной?

Задачи

6.1. Показать, что разрывная функция Дирихле

$$y(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально,} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

удовлетворят уравнению $y^2 - y = 0$.

6.2. Пусть функция $f: I \to \mathbf{R}$ определена на интервале $I =]a, b[\subset \mathbf{R}$. В каком случае уравнение $f(x) - y = 0$ имеет при $x \in I$ единственное

а) решение $y = 0$; б) непрерывное решение $y = 0$?

6.3. Пусть функции $f, g : I \to \mathbf{R}$ определены и непрерывны на интервале $I =]a, b[\subset \mathbf{R}$. В каком случае уравнение $f(x) \cdot y = g(x)$ имеет на интервале I единственное непрерывное решение?

6.4. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

и

$$y = y(x) \quad (-1 \le x \le 1) \tag{2}$$

- функция, удовлетворяющая уравнению (1).

а) Сколько функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

б) Сколько непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

в) Сколько непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: α) $y(0) = 1$; β) $y(1) = 0$?

6.5. Пусть дано уравнение

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

и функция

$$y = y(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{2}$$

ему удовлетворяет.

а) Ответьте на вопросы (а) и (б) задачи 6.4.

б) Сколько дифференцируемых функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

в) Сколько непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: α) $y(0) = 1$; β) $y(1) = 0$?

г) Сколько непрерывных функций $y = y(x)$ $(x \in \,]1 - \delta, 1 + \delta[\,)$ удовлетворяет уравнению (1), если $y(1) = 1$ и $\delta > 0$ достаточно мало?

6.6. Пусть f: $]a, b[\, \to \mathbf{R}$ - непрерывна, а g : $]c, d[\, \to \mathbf{R}$ - непрерывна и монотонно возрастает на $]c, d[\, \subset \mathbf{R}$. В каком случае уравнение $g(y) = f(x)$ определяет функцию $y = (g^{-1} \circ f)(x)$ $(x \in \,]a, b[\,)$?

Рассмотреть примеры: а) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; б) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

6.7. Доказать, что каждое из данных ниже уравнений в окрестности указанных точек определяет в неявном виде дифференцируемую функцию:

а) $x \cos(xy) = 0$ в окрестности точки $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $xy + \ln(xy) = 1$ в окрестности точки $(1, 1)$;

в) $x^5 + y^5 + xy = 3$ в окрестности точки $(1, 1)$.

6.8. Пусть дано уравнение

$$x = y + \varphi(y), \tag{1}$$

где дифференцируемая функция φ такова, что $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi'(y)| \le k < 1$ при $y \in \,]-a, a[$ $(a > 0)$. Доказать, что для некоторого интервала $]-\varepsilon, \varepsilon[$ существует единственная дифференцируемая функция

$$y = y(x) \colon \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to \mathbf{R},$$

удовлетворяющая уравнению (1), и такая, что $y(0) = 0$.

Найти y' и y'' для функций y, определяемых следующими уравнениями:

6.9. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. 6.10. $ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\ \dfrac{y}{x}$.

6.11. $2y - sin\,x = 2x$. 6.12. $y = 2x\,arctg\ \dfrac{y}{x}$.

6.13. Найти y' при $x = 0$, если $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3$ и $y(0) = 0$.

6.14. Найти y', y'', y''', если $x^2 + xy + y^2 = 3$.

6.15. Найти y', y'', y''', при $x = 0$, если $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ и $y(0) = 1$.

Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

6.16. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 6.17. $x^3 + 3xyz = a^3$.

6.18. $x + y + z = e^z$. 6.19. $z = \sqrt{x^2 - y^2}\ tg\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

6.20. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

6.21. Найти $\partial_{1,1}z$, $\partial_{1,2}z$ и $\partial_{2,2}z$ в точке $(1; -2)$, если $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ и $z(1; -2) = 1$.

6.22. Найти $\partial_{1,2}z$, если $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

6.23. Найти $\partial_1 z$ и $\partial_2 z$, если $F(x - y, y - z, z - x) = 0$.

6.24. Найти $\partial_1 z$ и $\partial_2 z$ в точке $(x, y) = (1, 1)$, если $z = 2u + v$, где функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в окрестности точки $(x, y; u, v) = (1, 1, 1, 1)$ задаются неявно уравнением

$$F(x, y;\ u, v) := (x - u - ln\,v,\ y - v + ln\,u) = 0.$$

6.25. Найти $\partial_{1,2}z$ в точке $(x, y) = (3, 3)$, если $z = 2uv$, где функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в окрестности точки $(x, y; u, v) = (3, 3, 2, 1)$ задаются неявно уравнением $F(x, y; u, v) := (x - u - v^2,\ y - u^2 + v^3) = 0$.

6.26. Решить задачу 4.22, используя теорему о неявной функции.

6.27. Пусть f: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Определим для каждого $x \in \mathbf{R}$ функцию g_x: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ равенством $g_x(y) = f(x, y)$. Пусть при любом x существует единственное $y = h(x)$, для которого $(g_x)'(y) = 0$.

а) Показать, что если $\partial_{2,2}f(x, y) \neq 0$ для всех (x, y), то h - дифференцируема и $h'(x) = -\dfrac{\partial_{2,1}f(x, h(x))}{\partial_{2,2}f(x, h(x))}$.

[**Указание.** Равенство $(g_x)'(y) = 0$ можно переписать в виде $\partial_2 f(x, y) = 0$.]

б) Показать, что если $h'(x) = 0$, то существует y для которого $\partial_{2,1}f(x,y) = 0$ и $\partial_2 f(x, y) = 0$.

в) Пусть $f(x, y) = x(y\,ln\,y - y) - y\,ln\,x$. Найти $\max\limits_{\frac{1}{2}\le x\le 2}\left(\min\limits_{\frac{1}{3}\le y\le 1} f(x,y)\right)$.

6.28. Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ - открытое множество и f: $A \to \mathbf{R}^n$ - такая взаимно однозначная функция, что $det\,f'(x) \neq 0$ для всех $x \in A$. Показать, что $f(A)$ - открытое множество и f^{-1}: $f(A) \to A$ - дифференцируема.

6.29. Пусть отображение f: $\mathbf{R}^2_{(x,y)} \to \mathbf{R}^2_{(u,v)}$ задано соотношением:

$$(u, v) = ((4x - 6y + 10)^2, (6x - 9y + 15)^2).$$

а) Убедитесь, что $det\,f'(x, y) = 0$ в каждой точке $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

б) Покажите, что все точки прямой $2x - 3y + 5 = c$ отображаются в одну и ту же точку.

в) Определите уравнение кривой, в которую функция f отображает всю плоскость $\mathbf{R}^2$.

г) Объясните, почему в окрестности каждой точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, отображение f не может быть обратимым.

6.30. Пусть функция f: $\mathbf{R}^2_{(x,y)} \to \mathbf{R}^2_{(u,v)}$ задана соотношением:

$$(u, v) = ((x - y + 1)^2, (x + y + 3)^2).$$

Покажите, что:

а) отображение f переводит точки $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(-5, -6)$ и $(-7, -4)$ в одну и ту же точку плоскости $\mathbf{R}^2_{(u,v)}$ и потому не является взаимно однозначным;

б) сужение f на некоторые достаточно малые окрестности каждой из точек $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(-5, -6)$ и $(-7, -4)$ имеет обратное отображение;

в) взаимно однозначны сужения f на каждую из областей, на которые плоскость $\mathbf{R}^2_{(x,y)}$ разбивается прямыми $x - y + 1 = 0$ и $x + y + 3 = 0$; найти обратные к этим сужениям.

6.31. а) Пусть f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ - непрерывно дифференцируемая функция. Показать, что f не однозначна.

[**Указание.** Если, например, $\partial_1 f(x, y) \neq 0$ для всех (x, y) из некоторого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^2$, то рассмотреть функцию $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, определяемую равенством $g(x, y) = (f(x, y), y)$.]

б) Обобщить (а) на случай непрерывно дифференцируемых f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ с $m < n$.

6.32. а) Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такова, что $f'(a) \neq 0$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Показать, что f взаимно однозначна (на всем $\mathbf{R}$).

б) Определим $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, положив $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$. Показать, что f не взаимно однозначна, хотя $\det f'(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

6.33. Функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задается равенством:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Покажите, что:

а) f непрерывна на всей числовой прямой;

б) f имеет производную в каждой точке $x \in \mathbf{R}$;

в) $f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

Докажите, что точка $0 \in \mathbf{R}$ не обладает такой окрестностью, чтобы сужение f на нее было обратимым отображением. Не противоречит ли этот факт теореме об обратной функции?

6.34. Пусть функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена равенством:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Покажите, что:

а) на интервале $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ функция f строго возрастает;

б) сужение f на $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ имеет обратное отображение g;

в) функция g имеет производную g' и $g'(0) = \dfrac{1}{2}$.

6.35. Пусть $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$. Каково множество значений отображения f? Показать, что якобиан этого отображения отличен от нуля во всех точках пространства $\mathbf{R}^2$, но, тем не менее, f не является взаимно однозначным на $\mathbf{R}^2$.

6.36. Показать, что из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0, \\ x - y + 2z + u = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

можно выразить x, y, u через z; x, z, u через y; y, z, u через x; но нельзя выразить x, y, z через u.

6.37. Пусть E - открытое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ и $f\colon E \to \mathbf{R}^n$ - дифференцируемое на E отображение, причем для каждого набора точек

$x_1, \ldots, x_n$, из открытого отрезка, содержащегося в E, $det\,(\partial_j f^{\,i}(x_i)) \neq 0$ ($f^1, \ldots, f^n$ - координатные функции отображения f). Покажите, что отображение f взаимно однозначно.

[**Указание.** Примените теорему о среднем для каждой функции f^i.]

6.38. Координатные функции отображения f: $[-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$ заданы следующими соотношениями:

$$f^1(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad f^2(x^1, x^2) = x^1 + x^2.$$

а) Покажите, что f - не взаимно однозначное отображение.

б) Используя утверждение задачи 6.37, докажите, что сужение f на квадрат $[0, 1] \times [-1, 0]$ является взаимно однозначным.

6.39. Используя утверждение задачи 6.37 и непрерывность функции $det\,(\partial_j f^{\,i}(x_i))$ от n «векторных» переменных $x_1, \ldots, x_n$, докажите следующую часть теоремы об обратной функции.

Пусть E - открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $x_0 \in E$ и f: $E \to \mathbf{R}^n$ - отображение класса $C^{(1)}$, такое, что $det f'(x_0)) \neq 0$. Тогда найдется такая окрестность точки x_0, что сужение f на эту окрестность будет взаимно однозначным отображением и, более того, гомеоморфизмом.

[**Указание.** Непрерывность обратного к сужению отображения следует из утверждения задачи 3.20.]

В заключение раздела остановимся на вопросе преобразования дифференциальных выражений в случае, если в этих выражениях производится некоторая замена переменных.

С задачами такого типа вы уже встречались (см., например, 5.10, 5.24, 6.24 и др.) и, вероятно, заметили некоторую «недосказанность» их условий. В этой неясности формулировок как раз и заключается основная трудность решения задач, а потому обсудим содержание их более подробно.

Для простоты будем рассматривать выражения, содержащие лишь обыкновенные производные. Общий случай - преобразование выражений, содержащих частные производные - отличается от разбираемого только техникой вычисления производных.

Итак, пусть требуется преобразовать выражение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, в котором присутствуют: переменная x, считающаяся независимой; переменная y, считающаяся функцией от x, хотя явный вид этой функции не указан; переменная y', считающаяся производной функции y; и т.д.; переменная $y^{(n)}$, считающаяся производной n-ого порядка функции y. Ограничимся рассмотрением двух типов замен:

1) переменная x меняется на новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$;

2) x и y меняются на новые переменные t и u по формулам: $x = f(t, u)$, $y = g(t, u)$.

В первом случае, т.е. при замене $x = \varphi(t)$, функция y и ее производные $y', \ldots, y^{(n)}$ становятся соответственно функциями $y \circ \varphi$, $y' \circ \varphi, \ldots$, $y^{(n)} \circ \varphi$. Так как $y', \ldots, y^{(n)}$ явно не заданны, выражение

$$F(\varphi(t), (y \circ \varphi)(t), (y' \circ \varphi)(t), \ldots, (y^{(n)} \circ \varphi)(t))$$

содержит не одну, а $n+1$ неизвестных функций. Однако, оказывается, $y' \circ \varphi, \ldots, y^{(n)} \circ \varphi$ можно выразить через производные функций $y \circ \varphi$ и φ, т.е. через производные только одной неизвестной функции $y \circ \varphi$. В самом деле, согласно правилу дифференцирования композиции отображений, имеем: $(y \circ \varphi)' = (y' \circ \varphi)\varphi'$, $(y' \circ \varphi)' = (y'' \circ \varphi)\varphi'$, $(y'' \circ \varphi)' = (y''' \circ \varphi)\varphi'$ и т.д., откуда последовательно находим:

$$y' \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'}(y \circ \varphi)',$$

$$y'' \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'}(y' \circ \varphi)' = \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{1}{\varphi'}(y \circ \varphi)'\right)' = -\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}(y \circ \varphi)' + \frac{1}{(\varphi')^2}(y \circ \varphi)'',$$

$$y''' \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'}(y'' \circ \varphi)' = \frac{1}{\varphi'}\left(-\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}(y \circ \varphi)' + \frac{1}{(\varphi')^2}(y \circ \varphi)''\right)' =$$

$$= \frac{-\varphi'\varphi''' + 3(\varphi'')^2}{(\varphi')^5} = (y \circ \varphi)' - \frac{3\varphi''}{(\varphi')^4}(y \circ \varphi)'' + \frac{1}{(\varphi')^3}(y \circ \varphi)''', \text{ и т.д.}$$

Таким образом, если заменить композиции $y' \circ \varphi, \ldots, y^{(n)} \circ \varphi$ их выражениями через производные функции $y \circ \varphi$, то получим выражение

$$\widetilde{F}(t, (y \circ \varphi), (y \circ \varphi)', \ldots, (y \circ \varphi)^{(n)}),$$

содержащее подобно исходному только одну неизвестную функцию $y \circ \varphi$ и ее производные $(y \circ \varphi)', \ldots, (y \circ \varphi)^{(n)}$ и считающиеся искомым в задачах на замену переменных рассматриваемого типа.

Следует иметь в виду, что на практике новую неизвестную функцию $(y \circ \varphi)(t)$ часто обозначают через $y(t)$, что может привести к путанице, ибо $y \circ \varphi \neq y$.

Во втором случае, т.е. в случае замены $x = f(t, u)$, $y = g(t, u)$, переменные t и u не являются независимыми: так как x и y связаны некоторым функциональным отношением $y = y(x)$, переменные t и u должны удовлетворить равенству $g(t, u) = y(f(t, u))$. Поэтому в задачах на замену переменных рассматриваемого типа предполагается, что одна из переменных t, u является функцией другой. Для определенности будем считать, что $u = u(t)$.

Целью замены $x = f(t, u)$, $y = g(t, u)$ переменных x, y в выражении F является получение выражения $\widetilde{F}$, связывающего между собой новую независимую переменную t, новую неизвестную функцию $u = u(t)$ и производные $u', \dots, u^{(n)}$ этой функции.

Из равенств $x = f(t, u)$, $u = u(t)$ следует, что x является функцией переменной t; обозначим эту функцию через φ, т.е. положим $\varphi(t) = f(t, u(t))$. В результате замены $x = \varphi(t)$ функция y и ее производные $y', \dots, y^{(n)}$ должны быть заменены в выражении F на $y \circ \varphi$, $y' \circ \varphi, \dots, y^{(n)} \circ \varphi$. Но теперь, в отличие от случая 1, последние выражаются не через функцию $y \circ \varphi$ и ее производные, а через функции u, $f(t, u)$, $g(t, u)$ и их производные. Действительно,

$$y \circ \varphi(t) = y(\varphi(t)) = y(f(t, u(t))) = g(t, u(t)),$$

$$y' \circ \varphi(t) = \frac{1}{\varphi'(t)} (y \circ \varphi)'(t) = \frac{1}{(f(t, u(t)))'} (g(t, u(t)))' =$$

$$= \frac{\partial_1 g(t, u) + \partial_2 g(t, u)\, u'}{\partial_1 f(t, u) + \partial_2 f(t, u)\, u},$$

$$y'' \circ \varphi(t) = \frac{1}{\varphi'(t)} (y' \circ \varphi)'(t) =$$

$$= \frac{1}{(f(t, u(t)))'} \cdot \left(\frac{\partial_1 g(t, u) + \partial_2 g(t, u)\, u'}{\partial_1 f(t, u) + \partial_2 f(t, u)\, u} \right)' = \dots, \text{ и т.д.}$$

Выразив все необходимые выражения $y' \circ \varphi, \dots, y^{(n)} \circ \varphi$ через производные функций u, $f(t, u)$, $g(t, u)$ и подставив их вместо $y', \dots, y^{(n)}$ в выражение F, а также заменив в последнем x на $f(t, u)$ и y на $g(t, u)$, мы и получим выражение $\widetilde{F}$, связывающие переменные t, u и производные функции u.

Контрольные вопросы

1. Верно ли, что $(\cos x)'|_{x = t^2} = (\cos t^2)'$? Иначе говоря, можно ли вычисление значения производной функции $\cos x$ при $x = t^2$ провести следующим образом: сначала заменить переменную x функции $\cos x$ на t^2, а затем вычислить производную от полученной функции?

2. Какая операция над функциями f и g отвечает замене переменной x функции $f(x)$ на функцию $g(t)$? Как обозначается эта операция?

3. Как с помощью операции композиции отображений можно записать функции из левой и правой частей равенства, обсуждаемого в вопросе 1?

4. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(t) = t^2$. Вычислите $h(t)$, если функция h это:

а) $(f\circ g)'$; б) $f'\circ g$; в) $(f'\circ g)\cdot g'$; г) $(f\circ g)''$; д) $(f'\circ g)'$;

е) $f''\circ g$; ж) $(f''\circ g)\cdot(g')^2$; з) $(f''\circ g)\cdot(g)^2 + (f'\circ g)\cdot g''$;

5. Используя правило дифференцирования композиции отображений, покажите, что $(f\circ g)'' = (f''\circ g)\cdot(g)^2 + (f'\circ g)\cdot g''$.

6. Выразите $(f\circ g)'''$ через производные функций f и g.

7. Выразите композиции $f'\circ g$, $f''\circ g$ и $f'''\circ g$ через производные функций $f\circ g$ и g.

8. Будет ли верным равенство из вопроса 5, если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, а производная понимается как частная производная ∂_i (с фиксированным i)?

9. Вспомните, как устанавливаются равенства

$$\partial_i(f\circ g) = \sum_{j=1}^{m} ((\partial_j f)\circ g)\circ\partial_i g^j \qquad (i = 1, \dots, n)$$

для функций $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$.

10. Используя равенство, указанное в вопросе 9, выразите вторую производную $\partial_{k,i}(f\circ g)$ через частные производные функций $f, g^1, \dots, g^m$.

11. Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. При каких условиях на отображение g система равенств из вопроса 9 разрешима относительно

$$(\partial_1 f)\circ g, \dots, (\partial_n f)\circ g\ ?$$

12. Получите выражение для $\partial_i((\partial_j f)\circ g)$ через частные производные функций f, $g^1, \dots, g^m$ если f и g - те же отображения, что и в вопросе 11.

13. Пусть $f\colon \mathbf{R}^2{}_{(x,\ y)} \to \mathbf{R}$ - произвольная (дифференцируемая), а $g\colon \mathbf{R}^2{}_{(r,\ \varphi)} \to \mathbf{R}^2{}_{(x,\ y)}$ - конкретная функция, определяемая соотношением

$$g(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).$$

а) Какой вид для заданных отображений принимают равенства из вопроса 9? Выразите из этих равенств $((\partial_1 f\circ g = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ и $((\partial_2 f\circ g(r,\ \varphi) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ через частные производные от функции $f\circ g = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

б) Получите выражения для $(\partial_{1,1} f \circ g)(r, \varphi) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $(\partial_{1,2} f \circ g)(r, \varphi) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, и $(\partial_{2,2} f \circ g)(r, \varphi) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, через частные производные от функции $f \circ g$.

[**Указание.** Это можно сделать, например, дифференцируя по r и по φ выражения для $(\partial_1 f)\circ g$, $(\partial_2 f)\circ g$, полученные вами при ответе на вопрос (а).]

в) Какой вид в полярных координатах имеет уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0\,?$$

Задачи

6.40. С помощью замены $x = \cos t$ преобразуйте следующее дифференциальное уравнение: $(1 - x^2)\, y'' - x\, y' + n^2 y = 0$.

6. 41. Преобразуйте дифференциальное уравнение:

$$y'\, y''' - 3\,(y'')^2 - (y')^5\, y = 0,$$

приняв y за новую независимую переменную, а x - за новую функцию.

6.42. Введя новые переменные t, u, где $u = u(t)$, преобразуйте дифференциальное уравнение:

а) $x\, y\, y'' - x\,(y')^2 + y\, y' = 0$, если $t = y$, $u = \ln \dfrac{y}{x}$;

б) $(x\, y' - y)^2 = 2\, x\, y\,(1 + (y')^2)$, если $x = u\cos t$, $y = u\sin t$.

6.43. Преобразуйте выражение $y\, y'' - 2(y^2 + (y')^2)$, введя соотношением $y = \dfrac{1}{v}$ вместо функции $y = y(x)$ новую функцию $v = v(x)$.

6.44. Преобразовать выражение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, полагая, что $x = u \cdot v$, а $y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$

6.45. Преобразуйте выражение $(y - z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\dfrac{\partial z}{\partial y}$, полагая, что $u = y - z$ и $v = y + z$ – новые независимые переменные, а $x = x(u, v)$ - новая неизвестная функция.

6.46. Перейти к новым переменным u, v, w, где $w = w(u, v)$, в следующих уравнениях:

а) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + 1)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $x = u + v$, $y = \dfrac{v}{u}$, $z = \dfrac{w}{u}$;

б) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, если $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$.

6.47. Докажите, что выражение $(\partial_{1,1} f + \partial_{2,2} f)(x, y)$ сохраняет свой вид при повороте системы координат на произвольный угол.

6.48. Покажите, что при линейном преобразовании $x = \alpha u + \beta v$, $y = \mu u + \delta v$ частные производные $\partial_{1,1} f(x, y)$, $\partial_{1,2} f(x, y)$, $\partial_{2,2} f(x, y)$ преобразуются соответственно по тому же закону, что и коэффициенты a, b, c многочлена $a x^2 + 2b xy + c y^2$.

7. ПОВЕРХНОСТИ В R^n И ТЕОРИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Заключительный раздел настоящего пособия связан с материалом, изложенным на стр. 512 - 532 учебника В.А. Зорича.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры плоских кривых, т.е. кривых на плоскости $\mathbf{R}^2$.

2. Какие способы задания кривых вам известны? Приведите примеры.

3. Изобразите множество точек $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, если:

а) $F(x,y)=(|x|-1)(|y|-1)$;

б) $F(x,y)=|x|+|y|-1$;

в) $F(x,y)=|x|-x+|y|-y$;

г) $F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x^2+y^2\le 1, \\ e^{\frac{1}{1-x^2-y^2}}, & \text{если } x^2+y^2>1 \end{cases}$

Каждое ли уравнение $F(x,y)=0$ определяет кривую на плоскости?

4. Сформулируйте определение диффеоморфизма.

5. Установите диффеоморфность квадрата $I^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$ каждому из следующих множеств:

а) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u-1| < 1, |v+1| < 1\}$;

б) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u| < 2, |v| < 2\}$;

в) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u| < 1, |v| < 2\}$;

г) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u-1| < 1, |v+1| < 2\}$;

д) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u| < 1\}$;

е) $\mathbf{R}^2$;

ж) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2+v^2 < 1\}$;

з) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : \frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9} < 1\}$;

и) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u > 0\}$;

к) $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 :\ u > 0, v > 0\ \}$.

6. Сформулируйте определение гладкой одномерной поверхности в $\mathbf{R}^2$. Какие из кривых, заданных следующими уравнениями, удовлетворяют условиям этого определения?

а) $y = 2x - 3$; б) $y = x^2$;

в) $(x - 1)(y - 1) = 0$; г) $r = \cos 3\varphi$ (в полярных координатах).

7. Сформулируйте определение гладкой двумерной поверхности. Приведите пример поверхности, удовлетворяющей условиям этого определения.

8. Даже при беглом просмотре § 7 (гл. VIII) учебника нетрудно заметить, что теоретическую основу всех построений этого параграфа составляют теоремы о неявной и об обратной функциях. Вспомните формулировки этих теорем.

9. Каким соотношением связаны число m уравнений и число n переменных в системе $F^i(x^1, \dots, x^n) = 0,\ i = 1, \dots, m,$ фигурирующей в теореме о неявной функции: $m < n,\ m = n$ или $m > n$?

10. Как связаны размерности пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ в теореме об обратной функции, если отображение $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ определено на открытом в $\mathbf{R}^n$ множестве U?

11. Пользуясь теоремой об обратной функции, установите следующий признак диффеоморфности двух открытых множеств.

Пусть U и V - открытые в $\mathbf{R}^n$ множества и $f\colon U \to V$ - взаимно однозначное отображение класса $C^{(p)}$ $(p \ge 1)$, причем $V = f(U)$ и матрица Якоби $f'(x)$ - невырожденная в каждой точке $x \in U$. Тогда f является $C^{(p)}$ - диффеоморфизмом множеств U и V.

12. Очевидный (благодаря теореме об обратной функции !) признак диффеоморфности из вопроса 11 весьма непросто обобщить на случай, когда $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ и $n \neq m$. Следующий пример показывает это. [Некоторое обобщение признака диффеоморфности дает задача 7.12 ниже.]

Пусть $f\colon]0;3[\to \mathbf{R}^2$ - отображение, координатные функции f^1 и f^2 которого задаются равенствами:

$$f^1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in]0,1], \\ 1 + \cos(\pi t), & \text{если } t \in]1,3[, \end{cases}$$

$$f^2(t) = \begin{cases} (1 - t)\pi, & \text{если } t \in]0,1], \\ \sin(\pi t), & \text{если } t \in]1,3[. \end{cases}$$

а) Изобразите множество $f(]0;3[)$. (Не напоминает ли оно вам «мягкий знак» Ь ?)

б) Покажите, что отображение f взаимно однозначно.

в) Отображение f имеет класс гладкости $C^{(1)}$, поскольку этот класс гладкости имеют координатные функции f^1 и f^2. Выпишите матрицу Якоби $f'(t)$ отображения f и покажите, что ранг ее равен 1 в каждой точке $t \in]0;\ 3[$.

г) Покажите, что обратное отображение $f^{-1}: f(\,]0;\ 3[\,) \to \mathbf{R}$ не является даже непрерывным в точке $(0,\ 0)$.

13. Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + 2y^2\}$ в точке $(0,\ 1,\ 2)$.

14. Плоскость, заданная уравнением $2x + 4y - z = 3$, является касательной к поверхности S из вопроса 13. В какой точке ?

15. Является ли плоскость $2x + 4y - z + 3 = 0$ касательной к поверхности S из вопроса 13 ?

16. Убедитесь на примере касательной плоскости из вопроса 14, что сумма точек касательной плоскости не обязана лежать в этой плоскости. Принадлежит ли касательной плоскости точка $(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)$, если точка (x, y, z) в ней находится ?

17. Каким соотношением связаны координаты вектора $\xi = (\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$, лежащего в плоскости $2x + 4y - z - 3 = 0$? Какому соотношению удовлетворяют координаты вектора $\xi = (\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$, если этот вектор лежит в касательной плоскости к поверхности S из вопроса 13:

а) в точке $(1,\ 1,\ 3)$; б) в точке (x_0, y_0, z_0) ?

19. Вектор, лежащий в касательной к поверхности S плоскости, естественно, называется **касательным вектором** к S (в той точке, в которой плоскость и поверхность соприкасаются). При каком соотношении между координатами вектор $\xi = (\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)$ является касательным к поверхности $S \subset \mathbf{R}^3$ в точке (x_0, y_0, z_0), если эта поверхность задана уравнением:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = f(x, y)$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; г) $F(x, y, z) = 0$?

20. Используя соотношения для координат касательных векторов, полученные в предыдущем номере, убедитесь, что множество $T_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} S$ всех касательных векторов к поверхности $S \subset \mathbf{R}^3$ в точке (x_0, y_0, z_0) является векторным подпространством пространства $\mathbf{R}^3$. Чему равна размерность этого пространства ?

21. Для поверхности S из вопроса 13 приведите примеры гладких путей на S, проходящих через точку $(1,\ 1,\ 3)$. Пусть t_0 - то значение параметра, которому отвечает указанная точка на S. Вычислите векторы скорости выбранных вами путей при значении параметра $t = t_0$. Являются ли эти векторы касательными к S в точке $(1,\ 1,\ 3)$?

22. Пусть S - поверхность из вопроса 13 и ξ - касательный вектор к S в точке $(1,\ 1,\ 3)$, т.е. $\xi \in T_{(1,\ 1,\ 3)}\ S$. Укажите гладкий путь $\gamma : I \to S$ ($I \subset R$ - некоторый интервал, содержащий 0), для которого $\gamma\ (0) = = (1,\ 1,\ 3)$ и $\gamma'(0) = \xi$, если:

а) $\xi = (1,\ 0,\ 2)$; б) $\xi = (\xi^1,\ \xi^2,\ 2\xi^1 + 4\ \xi^2)$.

23. Постройте линии уровня $f^{-1}(c)$ $(c \in \mathbf{R})$ и изобразите график функции $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, если:

а) $f(x, y) = x$; б) $f(x, y) = x - y$; в) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

24. Постройте линии уровня функции $f(x, y) = x^2 + y^2$. Определите точки в которых линии уровня указанной функции касаются эллипса $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 4)^2 + 4\ y^2 = 4\}$. Можно ли утверждать, что найденные точки являются точками экстремума для функции $f|_S$? Дайте геометрическое обоснование полученного результата.

25. Постройте линии уровня функции $f(x, y) = xy$ и, пользуясь полученной картинкой, угадайте точки экстремума для функции $f|_S$, где $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Приведите аргументы, подтверждающие правильность вашей догадки.

Заключительные вопросы будут связаны со следующими специальными понятиями, облегчающими формулировки многих утверждений.

В случае когда точный порядок гладкости p ($p \geq 1$) отображения $f \in C^{(p)}(U\,;\mathbf{R}^m)$ $(U \subset \mathbf{R}^n)$ не играет особой роли, отображение f будем называть просто **гладким** . [Иными словами, **гладкое отображение** - такое, класс гладкости которого не ниже $C^{(1)}$.]

Пусть функция $f: U(x_0) \to \mathbf{R}^m$ определена в некоторой окрестности $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ точки x_0. Точку x_0 будем называть **регулярной** для функции f, если отображение f - гладкое, а линейное отображение $d\,f(x_0) : T_{x_0}\mathbf{R}^n \to T_{f(x_0)}\mathbf{R}^m$ имеет максимально возможный ранг (т.е. ранг матрицы Якоби $f'(x_0)$ равен $min\ \{m, n\}$). Если x_0 - регулярная точка функции f, то будем говорить, что **функция f регулярна в точке x_0**.

Функция $f: U \to \mathbf{R}^m$ называется регулярной на множестве $U \subset \mathbf{R}^n$, если она регулярна в каждой точке $x \in U$.

26. Для функций $F(x, y)$ из вопроса 3 укажите регулярные точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

27. Найдите и изобразите множество $D \subset \mathbf{R}^2$, на котором функция $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2 y^2$ регулярна.

28. Пусть функция $f: U \to \mathbf{R}^m$ регулярна в точке $x_0 \in U \subset \mathbf{R}^n$. Каким - инъективным, сюрьективным или биективным - является линейное отображение $df(x_0)$, если: а) $n < m$; б) $n > m$; в) $n = m$?

Задачи

7.1. Пользуясь определением k - мерной поверхности в $\mathbf{R}^n$, показать, что каждое из следующих уравнений или систем уравнений определяет некоторую гладкую поверхность в $\mathbf{R}^n$. Какова размерность этих поверхностей, и что они собой представляют ?

а) $x + 2y - z = 0$;

б) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

в) $x^2 - y = 0$.

7.2. Пусть функция $F: U \to \mathbf{R}$ регулярна на открытом множестве $U \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что непустое множество уровня $f^{-1}(c)$ $(c \in \mathbf{R})$ функции F является гладкой поверхностью в $\mathbf{R}^n$ размерности $n - 1$.

7.3. а) Покажите, что **тор**, полученный вращением окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ вокруг оси Ox, описывается уравнением $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(z^2 + y^2).$$

б) Покажите, что функция F из (а) является регулярной в каждой точке тора $F(x, y, z) = 0$, и, следовательно (на основании утверждения задачи 7.2), тор является гладкой двумерной поверхностью в $\mathbf{R}^3$.

7.4. Пусть $F: U \to \mathbf{R}^{n-k}$ отображение, регулярное в каждой точке открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что непустое множество $F^{-1}(y)$ $(y \in \mathbf{R}^{n-k})$ является гладкой k - мерной поверхностью в $\mathbf{R}^n$.

7.5. Докажите, что $S \subset \mathbf{R}^n$ является гладкой n - мерной поверхностью в том и только в том случае, когда S - открытое в $\mathbf{R}^n$ множество.

7.6. Пусть $f: D \to \mathbf{R}^{n-k}$ - гладкое отображение, определенное на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^k$. Докажите, что график функции f является гладкой поверхностью в $\mathbf{R}^n$ размерности k.

7.7. а) Пусть отображение $f: G \to \mathbf{R}^n$, определенное на открытом в $\mathbf{R}^k$ множестве G, регулярно в точке $t_0 \in G$; $k \le n$. Докажите, что найдется такая окрестность U точки t_0, образ $f(U)$ которой является гладкой поверхностью в $\mathbf{R}^n$ размерности k.

б) На примере отображения $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, заданного равенством $f(t) = (\cos 3t \cos t,\ \cos 3t \sin t)$, убедитесь, что если f регулярно в каждой точке множества G, то, тем не менее, множество $f(G)$ не обязано быть гладкой поверхностью в $\mathbf{R}^n$. Изобразите множество $f(\mathbf{R})$.

в) Будет ли множество $f(G)$, в условиях задачи (а), гладкой k-мерной поверхностью, если дополнительно предположить, что отображение f - взаимно однозначное.

[**Указание.** См. пример из контрольного вопроса 12.]

7.8. Пусть S - гладкая k - мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$ и $x_0 \in S$. Докажите, что существуют открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, содержащее x_0, и гладкое отображение $F: U \to \mathbf{R}^{n-k}$, имеющее ранг $n - k$ в каждой точке множества U, такие, что $S \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$.

7.9. Докажите, что гладкая k-мерная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ локально представляет собой график некоторой гладкой функции. Более точно, если $x_0 \in S$, то существует открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$, содержащее x_0, и гладкая функция $f: D \to \mathbf{R}^{n-k}$, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^k$, содержащем, с точностью до нумерации координат, точку

$$\overline{x_0} := (x_0^1, \ \dots, x_0^k)$$

такие, что

$$S \cap V = \{x \in V \mid (x^1, \dots, x^k) \in D,\ x^{k+i} = f^i(x^1, \dots, x^k),\ i = 1, \dots, n-k\}.$$

[**Указание.** Воспользуйтесь утверждением задачи 7.8 и теоремой о неявной функции.]

7.10. Пусть x_0 - точка гладкой k - мерной поверхности $S \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что существует открытое множество U, содержащее x_0, открытое множество $G \subset \mathbf{R}^k$, гладкое отображение $\varphi: U \to \mathbf{R}^k$ и гладкое отображение $\psi: G \to \mathbf{R}^n$, имеющее ранг k в каждой точке множества G, такие, что:

1) $\psi(G) = S \cap U$,

т.е. $\psi(G)$ является окрестностью точки x_0 относительно S;

2) $\varphi \circ \psi = id_G$ и $\varphi \circ \psi|_{S \cap U} = id_{\varphi(G)}$

Функция ψ называется **локальной параметризацией** S **в точке** x_0, а обратное к ψ отображение $\psi^{-1} = \varphi|_{S \cap U}$ - **локальной системой координат** на S, действующей в окрестности (относительно S) точки x_0.

[**Указание.** Согласно определению гладкой k- мерной поверхности существует открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, содержащее точку x_0, и диффеоморфизм $f: U \to I^k$ этого множества на открытый n - мерный куб I^n, такие, что $h\ (S \cap U) = \{t \in I^n \mid t^{k+1} = ... = t^n = 0\}$. Положите $\varphi(x) = (h^1(x), ..., h^k(x))$, $G = \{\tau \in \mathbf{R}^k \mid (\tau, 0, ..., 0) \in I^n\}$ и $\varphi(\tau) = h^{-1}(\tau; 0, ..., 0)$.

Предложите еще одно решение этой задачи, основанное на утверждении задачи 7.9.]

7.11. Докажите, что гладкая поверхность в $\mathbf{R}^n$ не может быть поверхностью двух различных размерностей.

[**Указание.** Пусть гладкая k_1 -мерная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$, является также поверхностью размерности k_2. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S$, и пусть $\psi_i : G_i \subset \mathbf{R}^{k_i} \to \mathbf{R}^n$ $(i = 1, 2)$ локальные параметризации S в точке x_0, такие, что $\psi_1(G_1) = \psi_2(G_2)$ (мы пользуемся терминологией и обозначениями, введенными в задаче 7.10). Тогда гладкие отображения

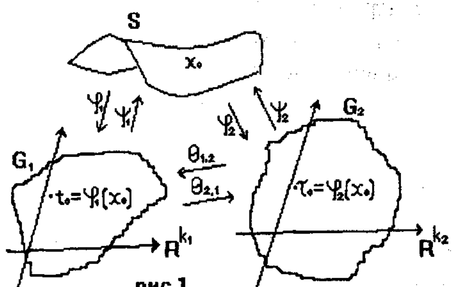

рис.1.

$\theta_{1,2} := \varphi_1 \circ \psi_2$ и $\theta_{2,1} := \varphi_2 \circ \psi_1$ - взаимно обратные. Значит, взаимно обратными будут и линейные отображения

$$d\theta_{1,2}(\tau_0) : T_{\tau_0}\mathbf{R}^{k_2} \to T_{t_0}\mathbf{R}^{k_1} \quad \text{и} \quad d\theta_{2,1}(t_0) : T_{t_0}\mathbf{R}^{k_1} \to T_{\tau_0}\mathbf{R}^{k_2}.\ ]$$

7.12. Пусть S - гладкая k -мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$ и $g : W \to S$ (т.е. $g(W) \subset S$) - отображение, определенное на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^k$ и регулярное в точке $t_0 \in W$. Докажите, что g является локальной параметризацией поверхности S в точке $x_0 = g(t_0)$.

[Смысл утверждения состоит в том, что если $W \subset \mathbf{R}^k$ - произвольное открытое множество, содержащее точку t_0, то множество $g(W)$ является окрестностью (относительно S) точки x_0, а сама функция g в некоторой окрестности точки t_0 обратима, причем функция g^{-1} является сужением (на окрестность точки x_0 относительно S) некоторого гладкого отображения h, определенного на открытом в $\mathbf{R}^n$ множестве. Пример из контрольного вопроса 12 показывает существенность условия $g(W) \subset S$.]

[**Решение.** Согласно утверждению задачи 7.9, существуют открытое множество V, содержащее x_0, и гладкая функция $f: \mathrm{D} \to \mathbf{R}^{n-k}$, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^k$ содержащем, с точностью до нумерации координат, точку $\overline{x_0} := (x_0^1, ..., x_0^k)$, такие, что $S \cap V = \{x \in V \mid \overline{x} \in D,\ x^k = f^i(\overline{x}),\ i = 1, ..., n-k\}$. Из непрерывности функции g в точке t_0 следует, что существует такая окрестность W_1 точки t_0, для которой $g(W_1) \subset V$. Кроме того, так как отображение g - гладкое (т.е. частные производные его координатных функций, по меньшей мере, непрерывны), ранг матрицы Якоби $g'(t)$ будет равен k для всех t из некоторой окрестности W_2 точки t_0. Поэтому, уменьшая, если потребуется, W до $W_1 \cap W_2$, будем считать, что отображение g регулярно на множестве W и $g(W) \subset V$.

Обозначим через π отображение проектирования $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, $\pi(x) = \overline{x}$, $\overline{x} := (x^1, ..., x^k)$, и рассмотрим отображение

$$\mu = \pi \circ g : W \to \mathbf{R}^k.$$

Докажем, что μ имеет ранг k в точке t_0.

В силу линейности отображения π, имеем: $d\mu(t_0) = d(\pi \circ g)(t_0) =$

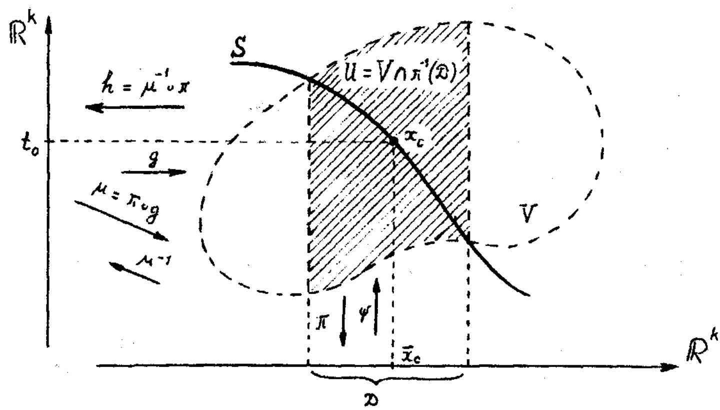

Рис. 2

$= d\pi(x_0) \circ d\,g(t_0) = \pi \circ d\,g(t_0) = d\overline{g}(t_0)$, где $d\overline{g}(t) := (g^1(t), ..., g^k(t))$. Так как точка $g(t)$ при $t \in W$ лежит на графике функции f, то $g^{k+i}(t) = f^i(\overline{g}(t))$, и значит, $dg^{k+i}(t_0) = d f^i(\overline{g}(t_0)) \circ d\overline{g}(t_0)$ $(i = 1, ..., n-k)$. Следовательно, если $d\overline{g}(t_0)(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in T_{t_0}\mathbf{R}^k$, то $dg(t_0)(\xi) = 0$ для того же вектора ξ. А так как ранг отображения g в точке t_0 равен k, то из последнего равенства следует, что $\xi = 0$. Таким образом, равенство $d\overline{g}(t_0)(\xi) = 0$ возможно только при

$\xi = 0$. Следовательно, отображение $d\overline{g}(t_0) = d\mu(t_0)$ - невырожденное, т.е. $rang\, \mu(t_0) = k$.

Согласно теореме об обратной функции отображение μ является локальным диффеоморфизмом, т.е. найдутся такие окрестности $\overline{W}$ и $\overline{D}$ соответственно точек t_0 и $\overline{x_0}$, что отображение $\mu|_{\overline{W}} : \overline{W} \to \overline{D}$ имеет гладкое обратное отображение $\mu^{-1} : \overline{D} \to \overline{W}$. Чтобы не усложнять записи, будем считать, что $\overline{W} = W$ и $\overline{D} = D$.

Пусть $U = V \cap \pi^{-1}(D)$ и $h = \mu^{-1} \circ \pi : U \to W$. Ясно, что отображение h - гладкое. Покажем, что сужение его на $S \cap U$ является обратным к отображению g.

Имеем :

$$h \circ g = \mu^{-1} \circ \pi \circ g = \mu^{-1} \circ \mu = i\, d_W .$$

С другой стороны, так как отображение $\psi : D \to S$, действующее по формуле $\psi(\tau) = (\tau, f(\tau))$, является обратным к отображению $\pi|_{U \cap S}$, $\psi \circ \mu = \psi \circ \pi \circ g = i\, d|_{U \cap S} \circ g = g$; поэтому

$g \circ h|_{U \cap S} = \psi \circ \pi \circ \mu \circ h|_{U \cap S} = \psi \circ \mu \circ \mu^{-1} \circ \pi|_{U \cap S} = i\, d|_{U \cap S} = i\, d|_{g(W)}$.
Таким образом, отображение g и h обладают свойствами (1) и (2), сформулированными в задаче 7.10.]

7.13. Пусть $\psi : G \to S$ - локальная параметризация гладкой k - мерной поверхности $S \subset \mathbf{R}^n$ в точке $x_0 = \psi(t_0)$ (определение см. в задаче 7.10).

а) Покажите, что $d\psi(t_0)(T_{t_0}\mathbf{R}^k)$ является k - мерным векторным подпространством пространства $\mathbf{R}^n$.

б) Докажите, что если $g : W \to S$ еще одна локальная параметризация S в точке x_0 $(x_0 = g(\tau_0))$, то $dg(\tau_0)(T_{\tau_0}\mathbf{R}^k) = d\psi(t_0)(T_{t_0}\mathbf{R}^k)$.

[**Указание.** Пусть $\varphi : U(x_0) \to \mathbf{R}^k$ и $h : U(x_0) \to \mathbf{R}^k$ такие гладкие отображения, определенные в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, что $\varphi|_{U \cap S}$ является обратным к ψ, а $h|_{U \cap S}$ - обратное к g ; отображения $\theta_{2,1} = \varphi \circ g$ и $\theta_{2,1} = h \circ \psi$ - взаимно обратны и, следовательно $d\theta_{2,1}(\tau_0)$ и $d\theta_{1,2}(\tau_0)$ - невырожденные линейные преобразования, причем $d\theta_{2,1}(\tau_0)(T_{\tau_0}\mathbf{R}^k) = T_{t_0}\mathbf{R}^k$. Поэтому

$$d\psi(t_0)(T_{t_0}\mathbf{R}^k) = d\psi(t_0) \circ d\theta_{2,1}(\tau_0)(T_{\tau_0}\mathbf{R}^k) =$$

$$= d(\psi \circ \varphi \circ g)(\tau_0)(T_{\tau_0}\mathbf{R}^k) = d\,g(\tau_0)(T_{\tau_0}\mathbf{R}^k).]$$

Таким образом, векторное подпространство $d\psi(t_0)(T_{t_0}\mathbf{R}^k) \subset \mathbf{R}^n$ не зависит от выбора локальной параметризации ψ поверхности S в точке x_0; оно называется **касательным пространством к S в точке x_0** и обозначается $T_{x_0}S$.

7.14. Пусть гладкая k - мерная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 задается уравнением $F(x) = 0$, где $F: U(x_0) \to \mathbf{R}^{n-k}$ - регулярное в точке x_0 отображение (см. задачу 7. 8). Докажите, что $T_{x_0}S = \{\xi \in T_{x_0}\mathbf{R}^n \mid dF(x_0)(\xi) = 0\}$.

[**Решение.** Обозначим множество $\{\xi \in T_{x_0}\mathbf{R}^n \mid dF(x_0)(\xi) = 0\}$ через M. Из регулярности F в точке x_0 следует, что M - k - мерное векторное подпространство пространства $T_{x_0}\mathbf{R}^n$.

Пусть ξ - произвольный вектор из T_{x_0}S и $\psi: G \to S\,(G \subset \mathbf{R}^k)$ - локальная параметризация поверхности S в точке x_0, $x_0 = \psi(t_0)$. Тогда $\xi = d\psi(t_0)(\eta)$ для некоторого $\eta \in T_{t_0}\mathbf{R}^k$. Дифференцируя равенство $F(\psi(t)) = 0$, справедливое при любом $t \in G$, получим $dF(x_0) \circ d\psi = 0$, и, значит,

$$dF(x_0)(\xi) = dF(x_0)(d\psi(t_0)(\eta)) = (dF(x_0) \circ d\psi(t_0))(\eta) = 0.$$

Таким образом, $\xi \in$ M.

Итак, если $\xi \in T_{x_0}S$, то $\xi \in$ M, т.е. $T_{x_0}S \subset$ M. Но так как $T_{x_0}S$ является, подобно M, k - мерным векторным подпространством пространства $T_{x_0}\mathbf{R}^n$, то отсюда следует, что $T_{x_0}S =$ M.]

7.15. а) Пусть на открытом в $\mathbf{R}^n$ множестве U задана гладкая функция $f: U \to \mathbf{R}$, регулярная в точке $x_0 \in U$, и пусть $c = f(x_0)$. Докажите, что множество всех векторов, касательных к поверхности уровня $f^{-1}(c)$ в точке x_0, равно ортогональному дополнению $(grad\, f(x_0))^{\perp}$ в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$ вектора $grad\, f(x_0)$.

[**Напоминание.** $(grad\, f(x_0))^{\perp} := \{\xi \in T_{x_0}\mathbf{R}^n \mid \langle grad\, f(x_0), \xi\rangle = 0\}$.]

б) Изобразите множество уровня $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ для функции

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 - (x^n)^2$$

при $n = 2, 3$. В каких точках x_0 этих множеств нет касательного пространства?

7.16. Пусть S - гладкая k - мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$ и $x_0 \in S$.

а) Докажите, что если $\gamma:]-1, 1[\to S$ - гладкий путь, такой, что $\gamma(0) = x_0$, то $\gamma'(0) \in T_{x_0} S$.

[**Указание.** Воспользуйтесь утверждением задачи 7.8.].

б) Докажите, что если $\xi \in T_{x_0} S$, то найдется гладкий путь $\gamma: I \to S$, определенный на некотором интервале $I \subset \mathrm{R}$, содержащем 0, такой, что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'(0) = \xi$.

[**Решение.** Изменим нумерацию координат точек в $\mathbf{R}^n$ так, чтобы поверхность S в некоторой окрестности V точки x_0 представляла собой график гладкой функции $f: D \to \mathbf{R}^{n-k}$, где $D \subset \mathbf{R}^k$ - открытое множество, содержащее точку $\overline{x_0}$ (см. задачу 7.9.). Тогда

$$F^i(x) := x^{k+i} - f^i(\overline{x}) = 0$$

$(\overline{x} = (x^1, \dots, x^k),\ i = 1, \dots, n-k)$ для $x \in S \cap V$.

Так как $\overline{x_0}$ - внутренняя точка множества D, найдется такое $\delta > 0$, что $\overline{x_0} + t\,\overline{\xi} \in D$ для всех $t \in]-\delta, \delta[$ (мы используем обозначение $\overline{\xi} := (\xi^1, \dots, \xi^k)$). Для $t \in]-\delta, \delta[$ положим

$$\gamma(t) = (\overline{x_0} + t\,\overline{\xi},\ f^1(\overline{x_0} + t\,\overline{\xi}), \dots, f^k(\overline{x_0} + t\,\overline{\xi})).$$

Тогда $\gamma(0) = x_0$, и $\gamma'(0) = (\overline{\xi},\ df^1(\overline{x_0})(\overline{\xi}), \ \dots,\ df^k(\overline{x_0})(\overline{\xi}))$. Но так как $\xi \in T_{x_0}S$, то в силу утверждения задачи 7.14,

$$dF(x_0)(\xi) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \xi^{k+i} - df^i(\overline{x_0})(\overline{\xi}) = 0.$$

Следовательно, $\gamma'(0) = (\overline{\xi}, \xi^{k+1}, \ \dots, \xi^n) = \xi$].

Таким образом, можно сказать, что касательное пространство $T_{x_0}S$ к поверхности S в точке x_0 представляет собой множество всех векторов, касательных в точке x_0 к гладким кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку x_0. Другая геометрическая характеристика касательного пространства $T_{x_0}S$, как множества, состоящего из пределов всевозможных хорд, представлена в следующей задаче.

7.17. Пусть x_0 - точка гладкой k-мерной поверхности $S \subset \mathbf{R}^n$. Докажите, что единичный вектор $\xi \in T_{x_0}\mathbf{R}^n$ является касательным к S в точке x_0 (т.е. $\xi \in T_{x_0}S$) в том и только том случае, если существует последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ точек из S, сходящаяся к x_0, такая, что $\dfrac{x_j - x_0}{|x_j - x_0|} \to \xi$ при $j \to \infty$.

[**Решение** . Пусть $\xi \in T_{x_0}S$ - единичный вектор, т.е. $|\xi| = 1$. Выберем гладкий путь $\gamma:]-\delta, \delta[\to S$, такой, что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'(0) = \xi$ (см. задачу 7.16.), и пусть $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел из интервала $]-\delta, \delta[$, сходящаяся к 0. Тогда $\dfrac{\gamma(t_j)-\gamma(0)}{t_j - 0} \to \gamma'(0) = \xi$ и

$$\frac{|\gamma(t_j)-\gamma(0)|}{t_j-0} = \left|\frac{\gamma(t_j)-\gamma(0)}{t_j-0}\right| \to |\gamma'(0)| = 1$$

при $j \to \infty$. Следовательно, последовательность точек $x_j = \gamma(t_j)$ удовлетворяет нужным условиям.

Обратно, пусть $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ - последовательность точек из S, такая, что $x_j \to x_0$ и $\dfrac{x_j - x_0}{|x_j - x_0|} \to \xi$ при $j \to \infty$.

Согласно утверждению 7.8, существуют открытое в $\mathbf{R}^n$ множество U, содержащее S, и регулярная на U функция $F: U \to \mathbf{R}^{n-k}$, такие, что множество $S \cap U$ описывается уравнением $F(x_0) = 0$. Поскольку $x_j \in S \cap U$ для достаточно больших j, имеем :

$$0 = F(x_j) - F(x_0) = dF(x_0)(x_j - x_0) + o(|x_j - x_0|).$$

Отсюда следует, что

$$dF(x_0)\left(\frac{x_j - x_0}{|x_j - x_0|}\right) = -\frac{o(|x_j - x_0|)}{|x_j - x_0|} \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Следовательно, $dF(x_0)(\xi) = 0$, и, значит (см. задачу 7.14.), $\xi \in T_{x_0}S$].

7.18. Определите, при каких соотношениях между ξ^1, ξ^2 и ξ^3 вектор $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ является касательным в указанных точках к поверхности, заданной следующими уравнениями :

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(1, 1, \sqrt{2})$, $(-1, 1, \sqrt{2})$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, -1)$, (x_0, y_0, z_0);

в) $x = \left(1 + t\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi$, $y = \left(1 + t\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi$, $z = t\sin\dfrac{\varphi}{2}$, где $\varphi \in \mathbf{R}$, $t \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ [**лист Мебиуса**], $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $\left(0, 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{6}, \dfrac{\sqrt{2}}{16}\right)$.

7.19. Докажите, что функция $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$, определенная на шаре $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$, не может иметь экстремума во внутренней точке шара B.

7.20. а) Пусть S - гладкая k - мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$ и $f: U \to \mathbf{R}$ - регулярная функция, определенная на открытом множестве U, содержащем S. Докажите, что если в некоторой точке $x_0 \in S$ функция $f|_S$ имеет локальный экстремум, то для всех $\xi \in T_{x_0}S$ выполняется равенство: $df(x_0)(\xi) = 0$.

[**Указание.** Рассмотрите функцию $f \circ \gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbf{R}$, где $\gamma:]-\delta, \delta[\to S$ - гладкий путь на S, такой, что $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma'(0) = \xi$.]

б) Используя сформулированное в задаче (а) необходимое условие экстремума функции $f|_S$, найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ на сфере

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

[**Решение.** Пусть (x_0, y_0, z_0) - та точка сферы S, в которой функция $f|_S$ имеет экстремум. Тогда, согласно утверждению задачи (а), для произвольного вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in T_{(x_0, y_0, z_0)} S$ должно выполнятся соотношение: $\xi^1 - 2\xi^2 + 3\xi^3 = 0$. Выбирая в качестве ξ векторы $(-y_0, x_0, 0)$ и $(-z_0, 0, x_0)$, получим следующее уравнения для координат экстремальной точки: $3y_0 - 2z_0 = 0$ и $-3x_0 + z_0 = 0$. Дополняя эти уравнения соотношением $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, находим (x_0, y_0, z_0) из получающейся системы: (x_0, y_0, z_0) - это либо

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \quad \text{либо} \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right).$$

Нетрудно убедится, что для каждой из этих двух точек необходимое условие экстремума выполняется.

Поскольку непрерывная на компакте функция имеет наибольшее и наименьшее значения, а точек, в которых выполняется необходимое условие экстремума, только две, заключаем, что, в одной из них функция $f|_S$ имеет максимум, а в другой - минимум. Прямой подсчет показывает, что

$$max\,(f|_S) = f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14},$$

а

$$min(f|_S) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right) = -\sqrt{14}.\ ]$$

Согласно утверждению задачи 7.19, найденные значения будут экстремальными для функции f и в шаре $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

в) Найдите расстояние от точки $(-1, 1)$ до кривой $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \cdot y = 1,\ x > 0\}$.

г) Какой геометрический смысл можно придать необходимому условию экстремума регулярной функции $f|_S$, сформулированному в задаче (а)?

[**Указание.** Согласно утверждению задачи 7.14., условие $df(x_0)(\xi) = 0$ означает, что вектор ξ является касательным в точке x_0 к поверхности уровня $\{x \in U \,|\, f(x) = f(x_0)\}$ функции f.]

7.21. Назовем **нормалью** или **нормальным пространством** к гладкой поверхности $S \subset \mathbf{R}^n$ в точке x_0 ортогональное дополнение в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$ касательного пространства $T_{x_0}S$.

а) Пусть гладкая k - мерная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ описывается уравнением $F(x) = 0$ в некоторой окрестности U точки x_0, где $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ - регулярная в U функция. Докажите, что нормаль к S в точке x_0 является векторным пространством, а векторы $grad\, F^1(x_0)$, ... , $grad\, F^{n-k}(x_0)$ составляют ее базис.

[**Указание.** Поскольку $dF^j(x_0)(\xi) = \langle grad\, F^j(x_0), \xi \rangle$, равенство $dF(x_0)(\xi) = 0$ имеет место в том, и только в том случае, когда вектор ξ ортогонален каждому вектору $grad\, F^j(x_0)$, $j = 1, \ldots, n - k$.]

б) Пусть, в условиях задачи (а), $f : U \to \mathbf{R}$ - регулярная в U функция, и x_0 - точка локального экстремума функции $f|_S$. Докажите, что существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbf{R}$, что

$$grad\, f(x_0) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j\, grad\, F^j(x_0).$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ называют **множителями Лагранжа.**

[**Указание.** Согласно (а), $grad\, f(x_0)$ принадлежит нормали к поверхности S в точке x_0.]

в) Пусть выполнено условие задачи (а), и $f : U \to \mathbf{R}$ - функция регулярная в точке x_0. Для $x \in U$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbf{R}$ положим :

$$\Phi(x, \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j\, grad\, F^j(x_0)$$

[$\Phi(x, \lambda)$ называется **функцией Лагранжа.**] Докажите, что если $f|_S$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то $grad\, \Phi(x_0, \lambda) = 0$ для некоторого $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \in \mathbf{R}^{n-k}$; $grad\, \Phi(x, \lambda)$ - градиент функции $\Phi(x, \lambda)$ по всем $2n - k$ переменным.

[**Указание.** Так как $\partial_{n+j}\Phi = F^j$ ($j = 1, \ldots, n - k$), соотношения $\partial_{n+j}\Phi(x_0, \lambda) = 0$ означают, что точка x_0 лежит на поверхности S; равенства же $\partial_i \Phi(x_0, \lambda) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ - всего лишь иная запись равенства, утверждаемого в задаче (б).]

г) Используя необходимое условие экстремума функции $f|_S$, сформулированное в задаче (в), найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = x - y + 2z$ на эллипсоиде

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + 2z^2 = 3\}.$$

[**Метод Лагранжа.** Составляем функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = x - y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 3)$$

и вычисляем её частные производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - 2\lambda x, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 - 2\lambda y,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2 - 4\lambda z, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 - 2z^2 + 3.$$

Приравняем эти производные нулю (необходимое условие экстремума функции $f|_S$); первые три уравнения дадут равенства

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{2\lambda},$$

с помощью которых из последнего уравнения находим $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, экстремум функции $f|_S$ возможен только в точках

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют заключительную часть решения задачи 7.20 (б).]

7.22. Пусть S - тор, полученный вращением окружности $x^2 + (y-2)^2 = 1$ вокруг оси Ox. Используя метод Лагранжа, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = z$ на S.

[Рассмотрим эту задачу с геометрической точки зрения. Согласно утверждению задачи 7.20. (а), функция $f|_S$ может иметь экстремум лишь в тех точках тора, в которых $grad\, f(x, y, z)$ ортогонален тору. Поскольку

$$grad\, f(x,y,z) = (0,\ 0,\ 1),$$

то следует рассматривать лишь те точки где касательная плоскость к S - горизонтальна. Таких точек - четыре: $(0, 0, \pm 3)$ и $(0, 0, \pm 1)$. Очевидно, что в точке $(0, 0, 3)$ функция $f|_S$ имеет максимум, а в точке $(0, 0, -3)$ - минимум; остальные точки не являются экстремальными - это **седловые** точки S (см. рис. 4). (На примере седловых точек мы видим, что необходимое условие экстремума не является достаточным.)].

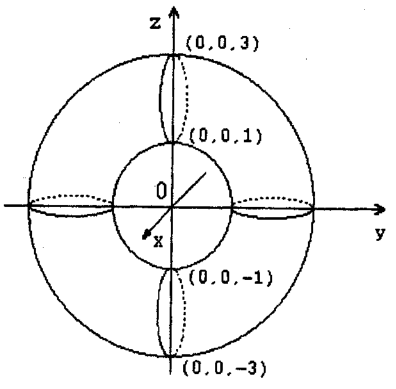

рис. 3

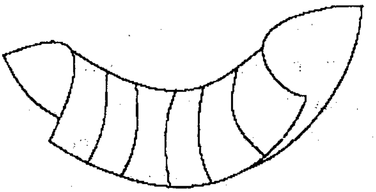

рис.4

7. 23. Пусть S - гладкая k - мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^n$ - точка, не лежащая на S, и $x_0 \in S$ - точка, ближайшая к точке a (т.е. такая, что для произвольного $x \in S$ выполняется неравенство $|x_0 - a|^2 \leq |x - a|^2$). Докажите, что вектор $x_0 - a$ ортогонален S в точке x_0. Всегда ли на S имеется точка, ближайшая к a?

[Такое же утверждение справедливо для вектора $x_0 - a$, если x_0 - самая удаленная от a точка на S (при условии, что она существует).]

7.24. Следующие соображения позволяют получить достаточное условие экстремума функции $f|_S$.

Пусть гладкая k - мерная поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$ описывается уравнением $F(x) = 0$ в некоторой окрестности U точки $x_0 \in S$, где $F : U \to \mathbf{R}^{n-k}$ - регулярная в U функция, класса $C^{(2)}$, и $f : U \to \mathbf{R}$ - регулярная в U функция, того же класса гладкости, что и F. Пусть далее, в точке $(x_0, \lambda_0) \in \mathbf{R}^{2n-k}$ функция Лагранжа $\Phi(x, \lambda) = f(x) - \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j F^j(x)$ имеет градиент, равный нулю. Тогда, согласно формуле Тейлора, в некоторой окрестности точки x_0 имеем :

$$\Phi(x, \lambda_0) - \Phi(x_0, \lambda_0) =$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, \lambda_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(|x - x_0|^2)$$

Отсюда следует, что знак разности $f|_S(x) - f|_S(x_0) = \Phi(x, \lambda_0) - \Phi(x_0, \lambda_0)$ в достаточно малой окрестности точки x_0 относительно S определяется знаком выражения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, \lambda_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \qquad (1)$$

В частности, для того, чтобы функция $f|_S$ имела экстремум в точке x_0, достаточно, чтобы выражение (1) имело один и тот же знак для всех x из некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 относительно S.

Проверка условия знакоопределенности выражения (1) не удобна с практической точки зрения (нужно следить за тем, чтобы точка x находилась на поверхности S), поэтому заменим его несколько иным.

Интуитивно ясно, что «секущий» вектор $x - x_0$, координаты $x^i - x_0^i$ которого присутствуют в выражении (1), приближенно, с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем $|x - x_0|$, можно заменить касательным вектором $\xi \in T_{x_0}S$ (более точно см. задачу (а) ниже). Поэтому в достаточно малой окрестности относительно S точки x_0 знак выражения (1) совпадает со знаком квадратичной формы

$$\delta(\xi) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, \lambda_0)\, \xi^i \xi^j, \qquad (2)$$

где $\xi^1, \ldots, \xi^n$ - координаты достаточно малого по длине вектора $\xi \in T_{x_0}S$. Но если выражение (2) имеет определенный знак для вектора $\xi \in T_{x_0}S$, то точно такой же знак оно имеет и для вектора $c\xi$, где $c \in \mathbf{R}$. Значит, накладывать ограничения на длину вектора ξ не нужно, и можно утверждать, что знак выражения (1) в достаточно малой окрестности (относительно S) точки x_0 определяется знаком квадратичной формы (2) на касательном пространстве $T_{x_0}S$. Таким образом, приходим к следующему заключению.

Для того, чтобы функция $f|_S$ имела в точке x_0 локальный экстремум, достаточно, чтобы квадратичная форма (2) была знакоопределенной на касательном пространстве $T_{x_0}S$. При этом, если форма $\delta(\xi)$ отрицательно определена, то $f|_S$ имеет в точке x_0 строгий локальный максимум, а если $\delta(\xi)$ положительно определена, то строгий локальный минимум. Для того, чтобы точка x_0 не являлась точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы форма $\delta(\xi)$ принимала на $T_{x_0}S$ значения разных знаков.

а) Покажите, что проекцией вектора $x - x_0$ $(x \in S)$ на касательную плоскость $T_{x_0}S$ является вектор

$$\xi = x - x_0 - |x - x_0| \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j \, grad\, F^j(x_0),$$

причем $\mu_j = \dfrac{det\, G_j}{det\, G}$, где G – $(n-k) \times (n-k)$ - матрица, (i, j) - элементом которой является $< grad\, F^i(x_0),\ grad\, F^j(x_0) >$, а G_j - матрица, получаемая из G заменой j - ого ее столбца столбцом из элементов

$$< grad\, F^{j}(x_0),\ \ (x - x_0) / |x - x_0| >,\ \ i = 1, ..., n - k.$$

Покажите, что $\mu_j = o\,(1)$ при $x \to x_0$ $(x \in S)$.

б) Проведите подробное доказательство достаточности условий экстремума и отсутствия экстремума функции $f|_S$ в точке x_0.

7.25. На параболе $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = 2\,x\}$ найдите точку, ближайшую к точке $(1, 4)$.

7.26. На эллипсе $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5x^2 - 6\,xy + 5y^2 = 8\}$ найдите точки, самые близкие и самые удаленные от точки $(0, 0)$.

7.27. Найдите расстояние от точки $(6, 3, 3)$ до окружности $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x + y + z = 1\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. -9-е изд. - М.: Наука, 1977.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1.-М.: Наука, 1981; ч.2. -М.: Наука, 1984.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1.-4-е изд., перераб и доп. - М.: Наука, 1982; Ч.2. - 2-е изд. -М.: Наука, 1980.

4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1979.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. /под ред. Л.Д. Кудрявцева. -Санкт-Петербург, 1994.

6. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. -М.: Наука 1967; Т.2., -М: Наука, 1970.

7. Лабораторный практикум по математическому анализу. /Бруй И.Н., Гаврилюк А.В., Ермаков В.Г. и др. -Мн.: Выш. шк., 1991.

8. Рудин У. Основы математического анализа, -2-е изд. -М.: Мир, 1976.

9. Спивак М. Математический анализ на многообразии. М.: Мир, 1968.

10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

11. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. -М.: Мир, 1982.

12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2,3. М.: Наука, 1969.

13. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

А.Т. Усс, Т.В. Хилько

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно – методическое пособие для студентов математических специальностей университетов

Рецензенты:
кандидат физико – математических наук, профессор **Р.М. Жевняк**;
кандидат физико – математических наук, доцент **В.В. Кашевский**

Под редакцией **А.Т. Усса**

Ответственный за выпуск **С.К. Гребельная**

Подписано в печать 16.02.2000 . Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать плоская. Усл. печ. л. 4,6. Уч.-изд. л. 3,6.
Тираж 100 экз. Заказ № 43 .Бесплатно.
Издатель и полиграфисполнение
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина
224665, Брест, Советская, 8.
Лицензия ЛВ № 307 от 15.07.98.

ISBN 985-6547-15-6

9 789856 547150