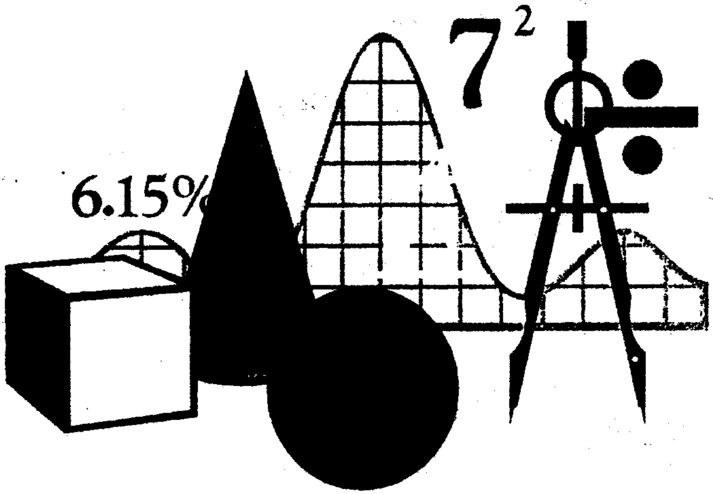
БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ
1945 2002

А.И. Басик, Г.И. Гудалина,
В.Н. Медведская, А.Т. Усс,
О.А. Фелькина, Т.И. Шило

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

в Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина



УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.С. ПУШКИНА"

А.И. Басик, Г.И. Гудалина, В.Н. Медведская,
А.Т. Усс, О.А. Фелькина, Т.И. Шило

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

в Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Брест 2002

УДК 372.8(072):51
ББК 74262.21

Рецензенты:

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений,
кандидат физико-математических наук, профессор
В.И.Мироненко

Доктор физико-математических наук, профессор
А.А.Килбас

Печатается по решению редакционно-издательского совета БрГУ им. А.С.Пушкина

Вступительный экзамен по математике в Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина: Пособие / А.И.Басик, Г.И.Гудалина, В.Н.Медведская и др.; Под ред. А.Т.Усса. – Брест: Изд-во БрГУ, 2002. – 92 с.

ISBN 985-6547-81-4

Пособие знакомит читателей с Брестским государственным университетом имени А.С.Пушкина и с отдельными специальностями, по которым в БрГУ ведется обучение. Приводятся и разбираются варианты заданий и задачи устных вступительных экзаменов по математике 2001 года. Обсуждаются тонкости программы по математике, детально разбираются отдельные ее вопросы, излагаются способы решения уравнений и неравенств с модулем, с параметром и др., даются полезные советы по практической и психологической подготовке к экзаменам.

Для слушателей факультета довузовской подготовки, учащихся старших классов и техникумов. Может быть полезно учителям средних школ.

УДК 372.8(072):51
ББК 74262.21

ISBN 985-6547-81-4

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1 БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А.С. ПУШКИНА

Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина возник в 1995 году в результате преобразования Брестского государственного педагогического института. История этого учебного заведения началась в год окончания Великой Отечественной войны: 6 июня 1945 года вышло постановление №801 Совета Народных Комиссаров БССР об открытии учительского института в городе Бресте. Из этого среднего специального учебного заведения (учительские институты — прообразы современных педучилищ и педколледжей), на трех отделениях которого в первый год обучалось всего 66 студентов, и вырос за полвека современный университет. На 11 его факультетах сейчас получают высшее образование около 8 тысяч студентов. Почти половина преподавателей (всего их более 700) имеют ученые степени и звания, в университете более 20 докторов наук и профессоров.

Обучение в университете ведется уже по четырем профилям: научный, гуманитарный, педагогический, технический. Представлены различные уровни образования: высшее образование, переподготовка и повышение квалификации, бакалавриат, магистратура, аспирантура. С 1997 года действует специализированный Совет по защите кандидатских диссертаций (специальность 10.01.01 - белорусская литература). Планируется создание еще двух советов — по математике и педагогике.

В БрГУ ведутся научные исследования, в том числе фундаментальные, проводятся конференции различных уровней: от кафедральных и факультетских до международных. Каждый год в издательстве университета выходят несколько монографий и более 10 сборников научных материалов. Университет размещается в четырех учебных корпусах, имеет свое издательство, спортивный комплекс, научную агробиологическую и спортивно-оздоровительную базы, три общежития. Широко известен в области биологический музей БрГУ, есть в университете и музей истории физической культуры Брестской области, а также интересные геологическая и этнографическая музейные экспозиции. Библиотека университета располагает книжным фондом почти в 700 тысяч экземпляров. Постоянно развивается материально-техническая база университета: закупается оргтехника, спортивный инвентарь, оборудуются новые кабинеты, каждый год увеличивается число компьютерных классов. Локальная сеть университета дает доступ в Интернет по кабельной связи и через спутниковую антенну (второй способ доступен всем студентам).

В составе студенческого клуба БрГУ работают творческие коллективы: народный камерный хор, народный баянно-аккордеонный оркестр, народный студенческий театр эстрадных миниатюр "Ковчег", театральная студия, ансамбль скрипачей и др. С 1983 года ведет свою историю туристический клуб "Берестье".

Невозможно на одной-двух страничках описать всю разноплановую и многообразную жизнь университета. Поступив в БрГУ, вы станете участниками и творцами этой жизни - творцами истории Брестского государственного университета имени А.С.Пушкина.

В настоящем пособии речь будет вестись о вступительных экзаменах по математике, которые сдают абитуриенты трех факультетов БрГУ: математического, юридического и психолого-педагогического.

Математический факультет сильно преобразился за последние годы. Из педагогических специальностей осталась только одна — "математика" со специализацией "информатика". Появились три специальности научного профиля: "математика", "экономическая кибернетика" и "прикладная математика". Многие абитуриенты выбирают педагогическую специальность только потому, что она дает возможность преподавать две дисциплины: в дипломе будет запись "Учитель математики и информатики". На самом деле, квалификация выпускников научной "математики" гораздо шире: "Математик. Преподаватель математики и информатики". Это означает, что они, как и специалисты педагогического профиля, имеют право преподавать математику и информатику. Но, как записано в образовательном стандарте научной "математики", "Специалист предназначен, главным образом, для работы в научно-исследовательских институтах системы Академии наук, научно-исследовательских отделах или на кафедрах вузов, а также в других учреждениях и организациях, занимающихся исследованиями в области математики и ее приложений". Разумеется, студенты-"научники" в большем объеме, более глубоко изучают математические дисциплины, а в учебном плане педагогического направления больше часов отведено на психолого-педагогические предметы. Например, теорию вероятностей и математическую статистику первые изучают в объеме 140 часов, а вторые - 68, зато педагогику соответственно 120 и 220. На научной "математике" существует два десятка специализаций, три из которых открыты в БрГУ: "геометрия и топология", "дифференциальные уравнения", "методика преподавания математики и информатики". С третьего курса студенты выбирают одну из них и изучают этот аспект науки более глубоко, проходят практики по специализации и пишут дипломную работу. Все это следует иметь в виду при выборе специальности. Если вы хотите всерьез заниматься математикой, вам следует поступать на научную "математику". Если же вы хотите больше узнать о возрастных особенностях детей, педагогических приемах и технологиях, а научные исследования вас мало занимают - вам лучше поступать на педагогическую "математику" с "информатикой".

Специальность "экономическая кибернетика" в последние два года вызывает наибольший приток хорошо подготовленных абитуриентов, но далеко не все из них смогли бы четко объяснить, что означает это словосочетание. Экономическая кибернетика - наука, изучающая процессы сбора, накопления, хранения и переработки информации об экономических объектах и явлениях. Переработка информации включает математическое моделирование экономических процессов, оценку и анализ экономических закономерностей, связей и прогнозирования. Данная специальность дает квалификацию "Математик-экономист". Вот что говорит образовательный стандарт "экономической кибернетики": "Специалист предназначен главным образом для работы: в научно-исследовательских институтах и вычислительных центрах экономического, финансового и статистического профиля, правительственных организациях, отделах макро- и микроэкономического анализа, прогнозирования и планирования государственных органов управления экономикой, Национального банка и акционерно-коммерческих банков, аналитических и маркетинговых отделах производственных и коммерческих объединений и предприятий (государственных, частных, совместных, с ограниченной ответственностью), финансовых компаний, в консалтинговых фирмах и инвестиционных фондах, а также в высших и средних специальных учебных заведениях". В Брестском госуниверситете открыты две специализации к "экономической кибернетике": "математическое и программное обеспечение компьютерного анализа, моделирования и прогнозирования в экономике" и "информационные технологии в управлении".

С 2001 года в БрГУ осуществляется и набор на специальность "прикладная математика" (кстати, экономическая кибернетика является составной частью прикладной математики). Эта специальность дает квалификацию "Математик-программист. Преподаватель математики и информатики". Учебные планы "экономической кибернетики" и "прикладной математики" большей частью совпадают, но одни и те же методы математического моделирования, разработки программного обеспечения "экономические кибернетики" учатся применять главным образом для решения экономических задач, а "прикладные математики" более широко: это может быть математическая физика или даже криптография.

"Правоведение" и "психология" относятся к гуманитарному профилю. Тем не менее, в образовательных стандартах этих специальностей предусмотрен вступительный экзамен по математике.

Выпускник специальности "правоведение" получает квалификацию "Юрист". Он должен быть подготовлен для работы в органах законодательной, исполнительной и судебной власти, органах прокуратуры, учреждениях юстиции, коллегиях адвокатов, иных государственных органах, учреждениях и организациях. Студенты юридического факультета изучают все области права: конституционное, административное, гражданское, трудовое, уголовное и уголовно-исполнительное, экологическое, финансовое, семейное, земельное, аграрное, хозяйственное, международное публичное и частное права, право социального обеспечения, а также прокурорский надзор, судоустройство, криминалистику и другие дисциплины. Это позволяет выпускникам факультета занимать любую из должностей, связанных с юриспруденцией: судьи, адвоката, прокурора, следователя, нотариуса, юрисконсульта и др. Юридические знания остро нужны руководителям предприятий, частным предпринимателям. Многие люди уже зрелого возраста стремятся получить образование юриста на заочном отделении (часто это второе высшее образование).

Специалист с квалификацией "Психолог, преподаватель психологии" должен быть подготовлен к педагогической, методической, научно-методической деятельности в учебных заведениях всех типов; к научно-исследовательской деятельности в центрах, изучающих человека. Психолог со специализацией "социальная психология" может работать практическим психологом на различных предприятиях и фирмах, в отделах по подбору, подготовке и переподготовке кадров, в центрах профессиональной ориентации и занятости населения, в средствах массовой информации, рекламных бюро, в организациях и отделах, занимающихся маркетингом, в центрах социальной адаптации и поддержки различных групп населения.

Специальность "психология" не единственная на психолого-педагогическом факультете. Большинство студентов этого факультета приобретают педагогическую специальность "Педагогика и методика начального обучения". Обучающиеся с отрывом от производства получают также одну из дополнительных специальностей: "иностранный язык", "музыка и пение" или "социальная педагогика". В зависимости от дополнительной специальности, в дипломе записывается квалификация "Учитель начальных классов и иностранного языка", "Учитель начальных классов, музыки и пения" или "Учитель начальных классов и социальный педагог".

1.2 ПОЧЕМУ ВВЕДЕН ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

Вопрос, на первый взгляд, представляется риторическим, ибо имеет очевидный ответ: потому, что для учебы по выбранной специальности необходимо знание школьного курса математики. (И в самом деле, как можно без знания этого курса поступать на такие специальности, как "математика", "физика", "прикладная математика" и др.?)

Возразить трудно, но все-таки .... Не секрет, что "абсолютно все" даже в школьной математике знать невозможно. А ведь это означает, во-первых, что в студенты зачисляют абитуриентов, знающих "не все", а во-вторых, и это главное, что успешное обучение даже по математическим специальностям не очень жестко связано со знанием школьного предмета. Отсюда, между прочим, исходит такое бытующее предложение – отменить вступительный экзамен по математике и ограничиться итоговой оценкой предмета из аттестата.

Посмотрим на обсуждаемый экзамен и с другой, практической, точки зрения. Ведь как его ни устраивай, в письменной или в устной форме, абсолютно все вопросы программы проэкзаменовать невозможно (иначе экзамен должен был бы содержать огромное количество заданий и растянулся бы на практически неприемлемый срок проведения). Значит, какая-то часть программы остается без внимания экзаменатора, и, следовательно, любой экзаменатор практически не имеет возможности объективно проэкзаменовать знания абитуриента.

Зачем тогда вступительный экзамен по математике все же проводится? Да еще и на такие специальности как "правоведение" и "психология", которые, по мнению многих, с математикой никак не связаны?

Вывод один – вступительный экзамен по математике обнаруживает нечто более существенное, чем знание абитуриентом отдельных вопросов школьной программы. Это "более существенное" заключается в умении абитуриента предъявлять логическую взаимосвязь между отдельными математическими фактами, в его способности "добывать" недостающие звенья, связывающие в единую логическую цепь одни утверждения или доказывающие логическую противоречивость других. Иными словами, вступительный экзамен по математике выявляет способность абитуриента мыслить логически.

Здесь, правда, снова можно возразить. Ведь всем известно, что постижение любой науки, а не только математики, связано с умением делать логические умозаключения. Так нельзя разве это умение проверять на каком-нибудь другом предмете, например, "Человек и общество" или на сочинении по родному языку?

Оказывается, нельзя. Математика – это тот единственный школьный предмет, который представляет собой мышление в чистом виде. Все термины и понятия ее, все ее содержание есть результат (скажем мягко, безобидных) измышлений исключительно человеческого разума. В других предметах для серьезных и "независимых" собственных умозаключений среднешкольных знаний недостаточно. В физике или в химии, например, надо накопить немалый "технический" опыт, в информатике – потрогать "с пристрастием" компьютер. Ответ на гуманитарный вопрос существенным образом наполняется личными умозаключениями и "живым" содержанием из большого количества сведений, которые абитуриент получает, чаще всего безотчетно, из "ненаучных" источников, например, из среды общения, из своего еще небогатого личного опыта или из средств массовой информации. Поэтому в ответах по другим школьным предметам абитуриент более, чем в математике, выступает в роли передатчика информации, и здесь трудно определить, с кем мы имеем дело – с устройством, записывающим чужие мысли, или с исследователем и критическим анализатором сведений в экзаменуемой области. Наконец, каждая наука, развиваясь, пересматривает или уточняет свои основы и взгляды на уже открытые ею истины (в социальных науках из-за их относительной молодости эти пересмотры бывают кардинальными). Поэтому на любом экзамене уровень информированности абитуриента по "сдаваемому" предмету ниже соответствующего уровня экзаменатора, ибо как непрофессионал он меньше знаком с новейшими представлениями о предмете и с динамикой его развития. Но только на ходе вступительного экзамена по математике современное состояние науки никак не сказывается, и в построении своих ответов абитуриент потенциально может выглядеть не хуже профессиального математика.

"Позвольте все-таки возразить," – скажет будущий правовед или психолог. "Бесспорно, математика – наука полезная, и логическое мышление действительно необходимо в каждой науке. Но почему вступительный экзамен по обсуждаемому предмету не сдают историки и филологи, не говоря уже о спортсменах, а для нас он вводится?! Почему все-таки нельзя ограничиться итоговой школьной оценкой по нему, тем более, что в дальнейшем обучении по нашей специальности математика не изучается?"

Надо иметь в виду следующее. Во-первых, оценка аттестата отражает более степень усвоения выпускником всего школьного курса математики и менее – его способности к логическому мышлению (если, например, по каким-то причинам ученик плохо или недостаточно хорошо усвоил отдельные темы школьной программы, то понятно, что оценка в его аттестате не будет максимально высокой). Кроме того, не одинаков "вес" оценок, выставляемых своим выпускникам различными школами. Поэтому необходим профессиональный отбор абитуриентов высшим учебным заведением, который в силах поправить указанные недостатки аттесстационной оценки; к тому же, как бы ни оценивал свое изделие производитель, но приобретать его или нет – решает пользователь, в роли которого в данном случае и выступает вуз.

Во-вторых, весьма неточным является мнение о том, будто на специальности "правоведение" математика не изучается. Студенты этой специальности, помимо информатики, изучают отдельный курс логики, который немыслим без школьных навыков логических рассуждений. Что же касается психологии, то рабочим инструментом этой науки является теория вероятностей и математическая статистика. Поэтому психологи изучают не только указанный раздел курса высшей математики, но и весь курс. Дело, однако, не ограничивается необходимостью логического мышления и знанием основ математики для освоения будущей профессии юриста или психолога. Оказывается, без активного практического использования логики и математики невозможно достичь сколь-нибудь серьезных успехов в работе по указанным профилям. Не станем приводить многочисленные примеры математических приемов и логических ловушек-тестов психологов, юристов, таможенников и работников правоохранительных органов, а ограничимся описанием реального факта из судебного разбирательства, выигранного врачом-педиатром Б. Споком.

В 1968 г. доктор Бенжамин Спок, один из организаторов движения против войны во Вьетнаме, был вызван в районный суд Бостона, где ему предъявили обвинение в незаконной деятельности, препятствующей осуществлению на практике закона о воинской повинности. Нетрудно себе представить, каким образом обвиняющая сторона планировала осуществить примерное наказание неудобного доктора. Ей требовалось только, чтобы процесс вел подходящий судья и при таком составе присяжных, который "не слышал" бы аргументы защиты Спока. В полном соответствии с этим планом среди 12 присяжных не оказалось ни одной женщины, что имело немаловажное значение, поскольку всемирно известная книга Спока об уходе за младенцами является настольной для миллионов матерей. Доля женщин в населении Бостона несколько выше доли мужчин, однако голословное утверждение защиты о дискриминации женщин, разумеется, не могло быть услышано. И адвокаты Спока представили убедительный математический расчет, который показывал, что шансы получить выборку присяжных, аналогичную осуществленной судьей Спока, при независимом случайном отборе из населения Бостона астрономически малы – $1 : 10^{18}$. Это не могло не доказать наличие фактора, вносившего искажение в процесс формирования независимого состава присяжных, и протест защиты об отводе состава присяжных был удовлетворен.

И, наконец, об "историках" и "филологах". Действительно, в нашем еще молодом университете вступительный экзамен по математике для них не проводится. Однако это говорит лишь о требованиях к абитуриентам и уровне подготовки будущих специалистов, нежели о полезности математики в соответствующих науках. Известно ведь, что в некоторых знаменитых университетах России этот экзамен для будущих филологов, философов и историков проводится. В этом, разумеется, нет ничего удивительного, если принять во внимание сказанное выше относительно логического мышления – это инструмент любой науки. О полезности же математики свидетельствует и буквально недавнее открытие известного математика А.Т. Фоменко в области истории, перевернувшее в невероятные очень многие "устоявшиеся" положения этой науки.

Будет ли в будущем введен экзамен по математике для "историков" и "филологов" в нашем вузе, сказать трудно. Как бы там ни было, с полным основанием можно лишь утверждать, что чем более будет гуманитаризироваться средняя школа, тем необходимей для вуза введение вступительного экзамена по математике. Возможно, при этом программу экзамена придется сократить до уровня арифметики целых чисел. Однако надобность в оценке способностей логического мышления абитуриента только возрастет, поскольку процесс развития этих способностей у ребенка будет возложен на "плечи" родителей и компьютера, а значит, будет ненаучным и случайным.

"Не слово, а несчастье есть учитель глупцов" (Демокрит из Абдеры)

"Пока длится невежество,
человек не находит против зла средств" (Р. Бекон)

"Невозможно достигнуть никакого знания иначе,
как путем интуиции ума и дедукции" (Р. Декарт)

"Тот, кто не знает математики, не может узнать
никакой науки и даже не может
обнаружить своего невежества" (Р. Бекон)

"Математику уже затем учить следует, что
она ум в порядок приводит" (М.В. Ломоносов)

Глава 2

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ В БрГУ 2001 г.

2.1 ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

Письменный экзамен по математике оказался трудным испытанием для абитуриентов, несмотря на средний уровень сложности предложенных заданий. На итоговых результатах экзамена (см. таблицу) сказался "гуманитарный" подход многих абитуриентов к изучению математики, который заключается в том, что математика заучивается наизусть в виде отдельных правил, формул и предложений без осмысления их фактического содержания и без подкрепления практическими навыками в их применении.

Специальность	Количество сдававших экзамен	Получили оценку					
		"5"	"4,5"	"4"	"3,5"	"3"	"2"
математика	20	—	1	5	3	4	7
матем. и информ.	32	3	1	4	3	4	17
эк.киб. и прикл.мат.	31	6	1	—	1	7	16
правоведение	86	—	—	31	8	21	26
педаг. и метод.	99	2	6	2	7	11	61

Удивительно, но такой подход продемонстрировала большая часть абитуриентов и математических специальностей – почти половина абитуриентов, сдававших письменный экзамен по математике, получили "2".

Ниже для каждой специальности проводится разбор одного из предлагавшихся вариантов письменного экзамена. Скажем только несколько слов о критериях оценок. На экзамене предлагалось пять заданий, и положительная оценка по экзамену на математические специальности ставилась за три верно решенные (возможно, с мелкими погрешностями) задачи, а на нематематические ("правоведение" и "педагогика ...") – за две. Для получения "4" следовало выполнить верно четыре задания, а оценка "5" ставилась за все верно решенные задачи.

2.1.1 Специальность "математика"

Наиболее простым заданием экзамена было решение тригонометрического уравнения.

1. *Решить уравнение:*

$$\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0.$$

Решение. Обозначением $y = \frac{\sqrt{5}}{\sin x}$ уравнение сводится к квадратному, $y^2 - 5y + 6 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. Равенство $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, однако, невозможно, поскольку $\sin x$ не может принимать значение, большее 1. Значит, данное в задаче уравнение равносильно уравнению $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, корни которого описываются формулой $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Следует отметить, что не все абитуриенты справились с этим заданием. Некоторые из них забыли проверить возможность равенств типа $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, что привело их к получению лишних решений, а значит, к неправильному ответу.

Неожиданно сложным для абитуриентов оказалось следующее задание.

2. *Решить систему неравенств:*

$$\begin{cases} \log_{0,5} \sin x > 1, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Решение. Так как функция $y = \log_{0,5} x$ убывающая, то неравенство $\log_{0,5} \sin x > 1 \, (= \log_{0,5} 0,5)$ равносильно неравенствам $0 < \sin x < 0,5$ (при $\sin x \leqslant 0$ логарифм $\log_{0,5} \sin x$ не существует). Следовательно, решение системы из условия задачи сводится к решению следующей:

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 0,5, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Решениями последней системы не могут являться числа из промежутка $\pi \leqslant x < 2\pi$, так как для этих чисел $\sin x \leqslant 0$. Числа же из интервала $0 < x < \pi$ автоматически удовлетворяют неравенству $\sin x > 0$. Таким образом, решение полученной системы неравенств сводится к выделению тех чисел x интервала $0 < x < \pi$, которые удовлетворяют неравенству $\sin x < 0,5$.

Интервал $(0, \pi)$ разложим на два промежутка: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

На промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает. Значит, неравенство $\sin x < 0,5 (= \sin \frac{\pi}{6})$ выполняется в тех и только тех точках промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, которые меньше $\frac{\pi}{6}$. Таким образом, решениями неравенства $\sin x < 0,5$ на промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ являются x, удовлетворяющие неравенствам: $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

На интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функция $y = \sin x$ убывает. Значит, неравенство $\sin x < 0,5(= \sin\frac{5\pi}{6})$ выполняется в тех и только тех точках этого интервала, которые больше $\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, решениями неравенства $\sin x < 0,5$ на интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ служат x, удовлетворяющие неравенствам: $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$.

Объединяя найденные решения неравенства $\sin x < 0,5$ на промежутках $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, получаем

Ответ: $0 < x < \frac{\pi}{6}$ или $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$.

Среди немалого числа ошибок, допущенных в решении приведенной задачи и аналогичных ей из других вариантов, отметим плохую аргументацию многими абитуриентами своих выводов, а также непонимание отличия тригонометрических неравенств от традиционных. Так, например, нередко можно было встретить такое "решение" неравенства: $\sin x < 0,5$: $x < (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Следующие два задания экзамена, на применение теоремы Виета и стереометрическая задача, также не были сложными, хотя и несли в себе специфические особенности.

3. *Найти число q и корни x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 2x + 2q + 1 = 0$, если*

$$\frac{x_1}{x_2 - 2} + \frac{x_2}{x_1 - 2} = -\frac{2}{21}$$

Решение. Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 2x + 2q + 1 = 0$, то, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = 2/3$ и $x_1x_2 = (2q + 1)/3$. Из этих и из последнего равенства условия задачи следует, что

$$21 \cdot (x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2) = -2 \cdot (x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21 \cdot \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)\right) =$$

$$= -2 \cdot (x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2q+1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) =$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{2q+1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} + 4\right) \Leftrightarrow q = -1.$$

Полученное равенство $q = -1$ говорит о том, что если требуемые в задаче числа q, x_1 и x_2 существуют, то число q должно равняться -1. Таким образом, для завершения решения задачи недостаточно решить уравнение $3x^2 - 2x + 2q + 1 = 0$ при $q = -1$. Необходимо еще показать (это упустили из виду почти все абитуриенты, решавшие задачу), что найденные при этом корни $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{x_1}{x_2 - 2} + \frac{x_2}{x_1 - 2} = -\frac{2}{21}.$$

Последнее легко устанавливается прямым вычислением выражения

$$\frac{x_1}{x_2 - 2} + \frac{x_2}{x_1 - 2}$$

при $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ — требуемое равенство выполняется и, следовательно, можно указывать

Ответ: $q = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

4. *В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан шар радиуса R. Через вершины A_1, B и D проведена плоскость. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.*

Решение задачи можно провести по следующему плану.

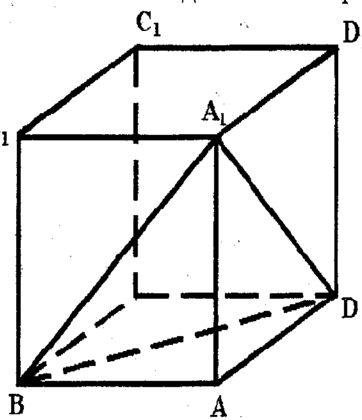


Рис. 2.1.

1) Поскольку противоположные грани куба параллельны, а смежные — перпендикулярны, и, кроме того, радиус шара, проведенный в точку его касания некоторой плоскости, перпендикулярен этой плоскости, то центр вписанного в куб шара является серединой трех взаимно перпендикулярных диаметров, соединяющих противоположные грани куба и перпендикулярных этим граням. Длина $2R$ каждого указанного диаметра, также как и длина ребра куба, есть расстояние между противоположными гранями куба. Значит, длина ребра куба равна $2R$.

2) Вписанный в куб шар касается его граней в центрах квадратов, представляющих собой эти грани (обоснуйте это утверждение). Середины отрезков A_1B, BD и DA_1 являются центрами квадратов ABB_1A_1, $ABCD$ и AA_1D_1D, и следовательно, отрезки A_1B, BD и DA_1 своими серединами касаются вписанного в куб шара.

3) Указанное в условии задачи сечение шара является кругом, касающимся сторон треугольника ΔA_1BD (в их серединах). Значит, радиус этого круга равен радиусу r окружности, вписанной в ΔA_1BD.

4) Так как диагонали граней куба равны, то $A_1B = BD = DA_1$. По теореме Пифагора $DA_1 = \sqrt{AD^2 + AA_1^2} = 2R\sqrt{2}$. Следовательно, площадь S равностороннего треугольника ΔA_1BD равна $2R^2\sqrt{3}$, а полупериметр p его $3R\sqrt{2}$. Пользуясь формулой $r = \frac{S}{p}$ для радиуса вписанной в треугольник окружности, находим r: $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. Следовательно, искомая площадь сечения шара равна $\pi r^2 = \frac{2\pi R^2}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi R^2}{3}$.

К заданиям более высокого уровня сложности относилась "текстовая" задача.

5. *Найти нечетное трехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов числа сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен; квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы числа сотен и единиц более чем на* 60.

Решение. Пусть x — цифра сотен искомого трехзначного числа, y — цифра его десятков и z — цифра единиц. Тогда, согласно условию задачи, $x^2 + z^2 \leqslant 2x$ и $y^2 > (x+z)^2 + 60$.

Неравенство $x^2 + z^2 \leqslant 2x$ перепишем в виде: $(x-1)^2 + z^2 \leqslant 1$.

Так как искомое число — трехзначное и нечетное, то $x \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$. Следовательно, неравенство $(x-1)^2 + z^2 \leqslant 1$ выполняется только в случае, если $x = z = 1$. Для таких значений x и z неравенство $y^2 > (x+z)^2+60$ становится более определенным: $y^2 > 64$. Из него следует, что цифра десятков искомого числа может быть только 9. Таким образом, если указанное в условии задачи трехзначное число существует, то оно должно быть числом 191.

Непосредственная проверка показывает, что число 191 удовлетворяет условию задачи. Значит,

Ответ: 191.

2.1.2 Специальность "математика и информатика"

Самым простым заданием в варианте была "текстовая" задача.

1. *Бак емкостью* 2400 *м*^{3} *наполняется топливом. При опорожнении этого же бака производительность насоса на* 10 *м*^{3}*/мин выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время* *опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определить производительность насоса при наполнении бака.*

Решение. Если обозначить через x м^3/мин производительность насоса при наполнении бака, то условие задачи можно выразить уравнением

$$\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x+10} = 8 \Rightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа $x_1 = 50$ и $x_2 = -60$. Поскольку производительность насоса не может выражаться отрицательным числом, а $x = 50$ м^3/мин, как показывает прямая проверка, удовлетворяет условию задачи, то приходим к заключению, что

Ответ: 50 м^3/мин.

Большинство абитуриентов справились с этим заданием, но были и такие, кто не сумел правильно составить уравнение в задаче. Например, записывалось и решалось уравнение вида:

$$\frac{2400}{x+10} - \frac{2400}{x} = 8.$$

Простым заданием являлась и задача на решение тригонометрического уравнения.

2. *Решить уравнение:*

$$(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x.$$

Решение. Так как, согласно формуле синуса двойного аргумента,

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \pm \sin 2x,$$

то $(\sin x \pm \cos x)^4 = (1 \pm \sin 2x)^2 = 1 \pm 2\sin 2x + \sin^2 2x$. Поэтому данное уравнение после раскрытия скобок в левой его части примет вид:

$$1 - 2\sin^2 2x = \sin 4x.$$

Применением формулы $2\sin^2 2x = 1 - \cos 4x$ последнее уравнение приводится к виду: $\cos 4x = \sin 4x$. Поскольку $\cos 4x \neq 0$ (в противном случае, согласно решаемому уравнению, и $\sin 4x = 0$, а это противоречит равенству $\sin^2 4x + \cos^2 4x = 1$), то, разделив полученное уравнение на $\cos 4x$, найдем, что $\operatorname{tg} 4x = 1$. Значит, $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, заключаем, что все решения данного в условии задачи уравнения описываются формулой: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

С этим заданием справилось большинство абитуриентов. Правда, некоторые решали описанное или аналогичное ему уравнение нерациональным раскрытием скобок и сведением его к квадратному, что повлекло за собой увеличение объема выкладок, в которых отдельные абитуриенты запутались и совершили ошибки. Были и такие абитуриенты, которые в решениях применяли "свои" формулы типа $\sin 2x = 2\sin x$.

Несложным являлось задание на решение геометрической задачи по планиметрии.

3. *Равнобочная трапеция ABCD с основаниями AD = 2 см, BC = 1 см и острым углом $\angle BAD = 60^\circ$ поворачивается в плоскости трапеции на 30° вокруг точки A таким образом, что угол между диагональю AC исходной трапеции и бо́льшим основанием повернутой трапеции меньше угла CAD. Найти площадь фигуры, являющейся общей частью исходного и окончательного положения трапеции.*

Решение. Пусть $AB_1C_1D_1$ – результат поворота на 30° трапеции ABCD вокруг точки A так, как указано в условии задачи, и пусть K – точка пересечения луча AD_1 с отрезком CD или его продолжением. Тогда $\angle KAD = \angle D_1AD = 30^\circ$ и, поскольку точка K лежит на луче DC, $\angle KDA = \angle CDA = 60^\circ$. Из полученных равенств следует, что $\triangle AKD$ – прямоугольный: $\angle AKD = 90^\circ$. Отсюда, в свою очередь, заключаем, что $AK < AD = AD_1$, т.е. точка K лежит на стороне AD_1 трапеции $AB_1C_1D_1$. Опять же из $\triangle AKD$ находим: $KD = AD\cdot\sin 30^\circ = 1$ (см) и $AK = AD\cdot\cos 30^\circ = \sqrt{3}$ (см).

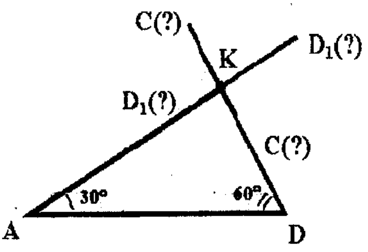


Рис. 2.2.

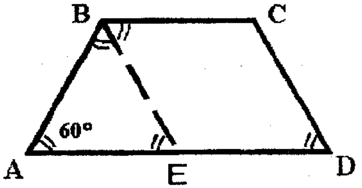


Рис. 2.3.

Далее, если в трапеции ABCD провести отрезок BE||CD так, что точка E лежит на AD, то из равенств $60^\circ = \angle BAD = \angle ADC = \angle BEA$, $ED = BC = 1$(см), $AE = AD - ED = 1$ (см) нетрудно заключить, что $\triangle ABE$ – равносторонний и $CD = AB = AE = 1$ (см). Следовательно, $DC = DK$, т.е. точка K совпадает с точкой C (и значит $\angle CAD = 30^\circ$, а $AC = \sqrt{3}$ см).

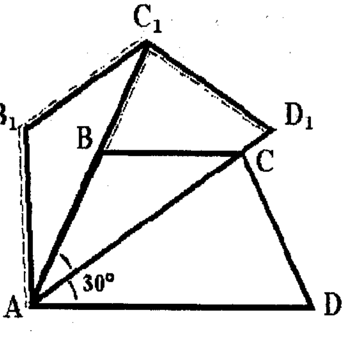


Рис. 2.4.

Наконец, так как $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 60° - 30° = 30°$ и $\angle C_1AD_1 = \angle CAD = 30°$, то точка B лежит на луче AC_1. А поскольку, $AB = 1 < \sqrt{3} = AC = AC_1$, то точка B лежит на диагонали AC_1 трапеции $AB_1C_1D_1$. Таким образом, общей частью трапеций ABCD и $AB_1C_1D_1$. является $\triangle$ ABC. Площадь его вычисляется просто:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2.

Как видно из приведенного решения, помимо знания программных сведений, правильное выполнение задания предполагало владение абитуриентом некоторыми навыками и умениями сопоставлять различные геометрические факты. Такое требование, конечно же, является вполне обычным для геометрии, и, к сожалению, приходится констатировать, что подготовленность абитуриентов в этом плане оставляет желать много лучшего.

С рассмотренным заданием, как, впрочем, и со следующим — также геометрической задачей, только уже по стереометрии, – успешно справилась примерно третья часть всех абитуриентов. Это были почти одни и те же неплохо подготовленные абитуриенты, которые по существу и "не заметили" несколько более высокий уровень сложности стереометрической задачи.

4. *В пространстве заданы три луча DA, DB и DC, имеющие общее начало D, такие, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2, луч DB в точках B_1 и B_2 и луч DC - в точках C_1 и C_2. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площади треугольников DA_2B_2, DA_2C_2, DB_2C_2 и DA_1B_1 равны соответственно* 60, 45, 75 *и* $\frac{45}{4}$.

Решение. Введем следующие обозначения длин отрезков: пусть $DA_1 = a$, $DB_1 = b$, $DC_1 = c$, $DA_2 = x$, $DB_2 = y$ и $DC_2 = z$. Треугольники DA_2B_2, DA_2C_2, DB_2C_2 и DA_1B_1 — прямоугольные (углы при вершинах D – прямые), поэтому, согласно условию задачи, имеем равенства:

$$xy/2 = 60, \quad xz/2 = 45, \quad yz/2 = 75, \quad ab/2 = 45/4.$$

Из первых трех следует, что $x = 6\sqrt{2}$, $y = 10\sqrt{2}$ и $z = \frac{15}{2}\sqrt{2}$.

Далее, воспользуемся тем, что если из некоторой точки (плоскости, а значит, и) пространства проведены секущая и касательная (к окружности, а значит, и) к сфере, то квадрат длины касательной равен произведению длин секущей и ее внешней части. (Перенося известное утверждение "из плоскости" в пространство мы пользуемся тем фактом, что окружность, ее касательная и секущая получаются в результате сечения сферы плоскостью, проходящей через касательную и секущую к ней.) Учитывая, что длины касательных, проведенных из одной и той же точки D к данной в задаче сфере, равны, можно записать:

$$\mathrm{DA_1 \cdot DA_2 = DB_1 \cdot DB_2 = DC_1 \cdot DC_2},$$

т.е. $ax = by = cz$. С учетом отмеченного выше равенства $\frac{1}{2}ab = \frac{45}{4}$ и уже найденных значений x, y, z, мы приходим к соотношениям между числами a, b и c;

$$ab = 45/2, \quad a = 5b/3, \quad c = 4a/5,$$

из которых находим: $a = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$, $b = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $c = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$. Теперь, зная длины катетов треугольников $\mathrm{DA_1C_1}$, $\mathrm{DA_1B_1}$ и $\mathrm{DB_1C_1}$, находим их гипотенузы — стороны треугольника $\mathrm{A_1B_1C_1}$: $\mathrm{A_1B_1} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{34}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{A_1C_1} = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{41}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\mathrm{B_1C_1} = \sqrt{b^2+c^2} = 5\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Таким образом, остается найти площадь треугольника $\mathrm{A_1B_1C_1}$, стороны которого известны. Теоретически это несложно сделать, однако прямые вычисления "в лоб" по формуле Герона ведут к таким выкладкам, в которых нетрудно и "утонуть". Поэтому для нахождения ее воспользуемся формулой

$$S_{\Delta \mathrm{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}\mathrm{A_1B_1}\cdot\mathrm{A_1C_1}\cdot\sin\alpha,$$

в которой пока неизвестен только $\sin\alpha$, где $\alpha = \angle\mathrm{C_1A_1B_1}$.

Рассмотрим треугольник KLM со сторонами KL$=\sqrt{34}$, KM$=\sqrt{41}$ и KM$=5$. Поскольку он подобен (почему?) треугольнику $\mathrm{A_1B_1C_1}$, то $\angle$MKL$=\alpha$ и, согласно теореме косинусов,
$5^2 = (\sqrt{41})^2 + (\sqrt{34})^2 - 2\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{34}\cdot\cos\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha = 25/\sqrt{34\cdot 41}$.
Значит, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{769}/\sqrt{34\cdot 41}$ и, следовательно,

$$S_{\Delta \mathrm{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{769}}{\sqrt{34\cdot 41}} = \frac{3}{4}\sqrt{769}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt{769}$.

Наконец, пятым заданием в варианте была задача "с параметром". Следует сказать, что то ли прозрачность формулировки задачи, то ли общая направленность преподавательской и ученической среды на решение задач "с параметром", а скорее всего и то, и другое, привели к тому, что практически все абитуриенты пытались решить предложенное задание и, надо признать, значительная их часть справилась с ним, а некоторым не хватило всего лишь "чуть-чуть". Казалось бы, сам по себе этот факт должен радовать — хорошо, когда абитуриенты умеют решать сложные задачи. Однако перекос их умений, в результате которого абитуриенты в целом неплохо решают логические задачи "с параметром" и довольно посредственно (если не хуже) строят логические рассуждения в геометрии, свидетельствует скорее о тренировке на решение отдельного типа задач, нежели о развитости их логического мышления.

5. *При каких значениях параметра a каждое решение неравенства*

$$x^2 + a^2 < 2ax + 1$$

удовлетворяет условию

$$x^4 + 14x < 6x^3 + 9x^2?$$

Решение: Найдем решения первого неравенства из условия задачи. Имеем:

$$x^2 + a^2 < 2ax + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2ax + (a-1)(a+1) < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-a-1)(x-a+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a-1 < x < a+1.$$

Второе неравенство из условия задачи преобразуем следующим образом:

$$x^4 + 14x < 6x^3 + 9x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 14x < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 - 14x^2 + 14x < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3(x-1) - 5x^2(x-1) - 14x(x-1) < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x^2 - 5x - 14) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+2)(x-7) < 0.$$

Теперь видно, что второе неравенство условия задачи выполняется в том и только в том случае, если $-2 < x < 0$ или $1 < x < 7$.

Таким образом, в задаче требуется найти все значения параметра a, при которых каждое число x, лежащее в интервале $a-1 < x < a+1$, принадлежало бы также либо интервалу $-2 < x < 0$, либо интервалу $1 < x < 7$. Иными словами, нужно найти такие значения параметра a, при которых интервал $(a-1;\ a+1)$ содержится в одном из интервалов: $(-2;\ 0)$ или $(1;\ 7)$.

Интервал $(a-1; a+1)$ содержится в интервале $(-2; 0)$ тогда и только тогда, когда $-2 \leqslant a-1$ и $a+1 \leqslant 0$, т.е. когда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant a-1, \\ a+1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решениями первого неравенства этой системы служат $a \geqslant -1$, второго — $a \leqslant -1$. Значит, решением системы является только одно число: $a=-1$.

Интервал $(a-1; a+1)$ содержится в интервале $(1; 7)$ в том и только в том случае, если $1 \leqslant a-1$ и $a+1 \leqslant 7$. Решая соответствующую систему, найдем, что это возможно только при a из промежутка $2 \leqslant a \leqslant 6$.

Остается собрать в ответ все значения a.

Ответ: при $a=-1$ и при любом a из промежутка $2 \leqslant a \leqslant 6$.

2.1.3 Специальности "прикладная математика" и "экономическая кибернетика"

1. *Из города А в город В выходит пешеход, а через час после него - второй. Если бы скорости пешеходов оставались все время неизменными, то они прибыли бы в город В одновременно. Однако пройдя* 7/10 *расстояния от А до В, первый пешеход увеличил свою скорость так, что она стала равной* 3/2 *первоначальной. В результате в момент его прибытия в город В второй пешеход находился на расстоянии* 2,5 *км от В (скорость второго пешехода не менялась). Найти скорость второго пешехода, если известно, что расстояние от А до В равно* 20 *км.*

Решение. Обозначим через x км/ч скорость второго пешехода, а через y км/ч — скорость первого. Так как при неизменности скоростей движения второй пешеход затратил бы на весь путь из А в В времени на 1 час меньше первого, то

$$\frac{20}{y} - \frac{20}{x} = 1.$$

С другой стороны, первый пешеход, пройдя 14 км, стал двигаться со скоростью $1,5y$ км/ч. Значит, на весь путь он затратил $\frac{14}{y} + \frac{6}{1,5y} = \frac{18}{y}$ часов. А так как второй пешеход, в момент прибытия в В первого, успел пройти только 17,5 км и находился в пути на 1 ч меньше первого, то

$$\frac{18}{y} - \frac{17,5}{x} = 1.$$

Таким образом, мы имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными, решая которую (лучше всего с помощью замены $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$), находим требуемую в условии задачи скорость: $x = 5$ км/ч ($y = 4$ км/ч).

Ответ: 5 км/ч.

2. *Найти корни уравнения*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Преобразуя правую часть данного уравнения по формуле $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$, приведем ее к виду $\frac{1}{2}+\cos 4x$. Левую же часть уравнения преобразуем следующим образом:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$$
$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Таким образом, данное в задаче уравнение равносильно следующему:

$$\cos 4x = 1/3.$$

Корень x последнего уравнения принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ в том и только в том случае, когда число $t = 4x$ является корнем уравнения $\cos t = \frac{1}{3}$, принадлежащим интервалу $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Поэтому найдем сначала на интервале $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ все корни уравнения $\cos t = \frac{1}{3}$.

Поскольку функция $y = \cos x$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$ принимает отрицательные значения, то искомые корни уравнения $\cos t = \frac{1}{3}$ могут находиться только на промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

На отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \cos x$ убывает, $\cos 0 = 1$ и $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, на этом отрезке функция принимает значение $\frac{1}{3}$, но только в одной точке: $\arccos\frac{1}{3}$.

На интервале $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ $y = \cos x$ — возрастает и

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \cos x \quad \text{при } -\frac{\pi}{3} < x < 0.$$

Значит, на этом интервале равенство $\cos t = \frac{1}{3}$ невозможно.

Таким образом, на промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ уравнение $\cos t = \frac{1}{3}$ имеет один единственный корень $t = \arccos\frac{1}{3}$. Следовательно, данное в задаче уравнение имеет только один корень $x = \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}$, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3}$.

3. *Решить неравенство*

$$\log_a(-x^2+|x|+1) \geqslant 0,$$

где $a = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}}$.

Решение. Так как $a = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} = 1+\sqrt{5}-\sqrt{10} = 1-(\sqrt{10}-\sqrt{5})$ и $\sqrt{10} > \sqrt{5}$, то $a < 1$. С другой стороны, из неравенства $5 > 4$ последовательно выводим: $\sqrt{5} > 2 \Rightarrow 1+2\sqrt{5}+5 > 10 \Rightarrow (1+\sqrt{5})^2 > (\sqrt{10})^2 \Rightarrow 1+\sqrt{5} > \sqrt{10} \Rightarrow a > 0$. Таким образом, число a — положительное и меньше 1.

Поскольку функция $y = \log_a x$ с основанием $0 < a < 1$ — убывающая, данное в условии задачи неравенство выполняется для тех и только тех x, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} -x^2+|x|+1 > 0, \\ -x^2+|x|+1 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-|x|-1 < 0, \\ |x|(|x|-1) \geqslant 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ она выполняется, а потому остается найти ее решения, отличные от нуля. Но если $x \neq 0$, то $|x| > 0$, и значит решениями второго неравенства, а следовательно, и всей системы могут быть только x, удовлетворяющие условию $|x| \geqslant 1$. При $x \leqslant -1$ система сводится к неравенству $x^2+x-1 < 0$, решение которого дает промежуток решений исходной системы: $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x \leqslant -1$. Если же $x \geqslant 1$, то система сводится к неравенству $x^2-x-1 < 0$, решением которого является еще один промежуток: $1 \leqslant x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Объединяя найденные промежутки с решением $x = 0$, получаем ответ.

Ответ: $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x \leqslant -1$ или $x = 0$ или $1 \leqslant x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4. ***Площадь сечения, проведенного через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно непересекающемуся с этой диагональю боковому ребру, равна S. Найти площадь сечения, проходящего через середину двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды.***

Решение. Пусть TABCD — правильная пирамида с вершиной T и TO — ее высота. Так как точка O — центр окружности, описанной около квадрата ABCD, то O есть точка пересечения диагоналей AC и BD этого квадрата.

Обозначим через α плоскость, проходящую через AC параллельно ребру пирамиды BT, а через β — плоскость, проходящую через точки K, L и E — середины отрезков AB, BC и OT.

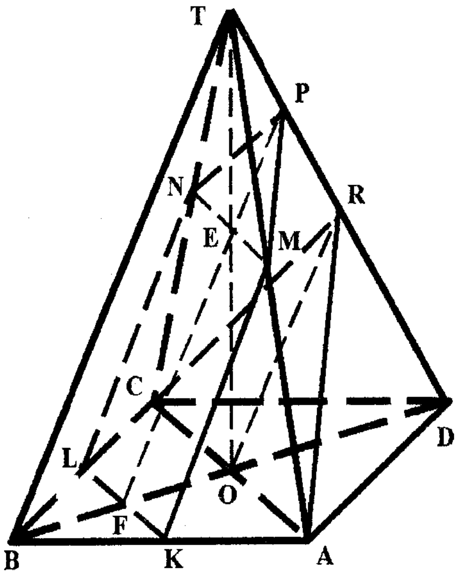


Рис. 2.5.

Обозначим через α плоскость, проходящую через AC параллельно ребру пирамиды BT, а через β — плоскость, проходящую через середины K, L и E отрезков AB, BC и OT. Плоскость треугольника BDT пересекает α по прямой, параллельной BT (так как BT $\parallel \alpha$) и проходящей через точку O. Пусть R — точка пересечения этой прямой со стороной DT треугольника BDT. Тогда отрезок OR лежит в плоскости α и OR $\parallel$ BT. А так как BO = OD, то OR является средней линией в треугольнике BDT и, следовательно, OR = $\frac{1}{2}$BT.

Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что OR $\perp$ AC (так как BD является проекцией наклонной OR на плоскость основания пирамиды и BD $\perp$ AC). Следовательно, площадь треугольника ACR, являющегося сечением пирамиды плоскостью α, равна $\frac{1}{2}$AC·OR = $\frac{1}{4}$AC·BT. По условию задачи, эта площадь равна S. Значит, мы имеем равенство $\frac{1}{4}$AC·BT = S или AC·BT = $4S$.

Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, а потому KL $\parallel$ AC, KL = $\frac{1}{2}$AC и, кроме того, точка F пересечения этого отрезка с отрезком BO делит последний пополам, т.е. BF = FO. Из последнего равенства, а также из равенства TE = EO следует, что FE — средняя линия треугольника OBT и, значит, FE $\parallel$ BT, FE = $\frac{1}{2}$BT (кроме того, FE $\perp$ KL т.к. FE $\parallel$ OR, KL $\parallel$ AC и OR $\perp$ AC). Пусть P — точка пересечения прямой FE со стороной DT треугольника BDT. Поскольку прямая FE лежит в плоскости β, то точка P лежит в β и на ребре пирамиды DT.

Так как KL $\parallel$ AC, то плоскость β пересекает плоскость треугольника ATC по прямой, параллельной KL и, значит, параллельной AC. Пусть M и N — точки пересечения этой прямой со сторонами AT и CT треугольника ATC. Поскольку точка E лежит на отрезке MN (это следует из того, что E лежит как в плоскости β, так и в плоскости треугольника ATC), OE = ET и MN $\parallel$ AC, то MN — средняя линия треугольника ATC, а потому MN = $\frac{1}{2}$AC.

Итак, сечением пирамиды плоскостью β является пятиугольник

KLNPM. Площадь его найдем как сумму площадей параллелограмма KLNM (KLNM — параллелограмм, поскольку KL $\parallel$ MN и KL $=$ MN $=$ $\frac{1}{2}$AC; можно доказать даже, что KLNM — прямоугольник, но в задаче это не требуется) и треугольника MNP. Имеем: $S_{\mathrm{KLMN}} = \mathrm{KL}\cdot\mathrm{FE} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{BT} = \frac{1}{4}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BT} = S$, $S_{\Delta\mathrm{MNP}} = \frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{EP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{OR} = \frac{1}{8}\mathrm{AC}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{BT} = \frac{1}{16}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BT} = \frac{S}{4}$. Следовательно, $S_{\mathrm{KLNPM}} = S + \frac{S}{4} = \frac{5S}{4}$.

Ответ: $\frac{5S}{4}$.

5. *При каких значениях a и b система уравнений*

$$\begin{cases}(x-y)^2 - a\cdot 2^{\cos(x+y)-1} + b^2\log_2(4+|x-y|) = 0,\\ (x+y)^2 - b\cdot 3^{\cos(x-y)-1} + a^2\log_3(9+|x+y|) = 0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Прямая проверка показывает, что если некоторая пара чисел $(x_0;\ y_0)$ является решением данной системы, то пара $(-x_0;\ -y_0)$ также является ее решением. Значит, единственным решением ее может быть только такая пара чисел $(x_0;\ y_0)$, для которой $x_0 = -x_0$ и $y_0 = -y_0$, т.е. $x_0 = y_0 = 0$. Итак, если система имеет единственное решение, то это решение — нулевое: $x = y = 0$.

Выясним, при каких a и b система допускает решение $x = y = 0$. Подстановка чисел $x = y = 0$ в нее дает систему уравнений относительно a и b

$$\begin{cases}-a + 2b^2 = 0,\\ -b + 2a^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2b^2,\\ b(8b^3 - 1) = 0,\end{cases}$$

решив которую, получим, что $a = b = 0$ или $a = b = \frac{1}{2}$.

Выясним теперь в каждом из найденных случаев, является ли решение $x = y = 0$ единственным для данной системы.

1) Пусть $a = b = 0$. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases}(x-y)^2 = 0,\\ (x+y)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y = 0,\\ x + y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0,\\ y = 0,\end{cases}$$

и, значит, данная в условии задачи система имеет единственное решение.

2) Пусть $a = b = \frac{1}{2}$. Тогда имеем следующую систему равенств:

$$\begin{cases}(x-y)^2 - \frac{1}{2}\cdot 2^{\cos(x+y)-1} + \frac{1}{4}\log_2(4+|x-y|) = 0,\\ (x+y)^2 - \frac{1}{2}\cdot 3^{\cos(x-y)-1} + \frac{1}{4}\log_3(9+|x+y|) = 0.\end{cases}$$

Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases}(x-y)^2+\frac{1}{4}\log_2(4+|x-y|)=\frac{1}{4}\cdot 2^{\cos(x+y)},\\ (x+y)^2+\frac{1}{4}\log_3(9+|x+y|)=\frac{1}{6}\cdot 3^{\cos(x-y)}.\end{cases}$$

Для левой части первого уравнения имеем:

$$(x-y)^2+\frac{1}{4}\log_2(4+|x-y|)\geqslant 0^2+\frac{1}{4}\cdot\log_2(4+0)=\frac{1}{2},$$

а для правой его части –

$$\frac{1}{4}\cdot 2^{\cos(x+y)}\leqslant\frac{1}{4}\cdot 2^1=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, первое уравнение системы может выполняться в том и только в том случае, когда $x-y=0$ и $\cos(x+y)=1$. Аналогично, второе уравнение системы выполняется тогда и только тогда, если $x+y=0$ и $\cos(x-y)=1$. Значит, вся система равносильна следующей

$$\begin{cases}x-y=0,\\ x+y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$$

и, таким образом, при $a=b=\frac{1}{2}$ она также имеет единственное решение.

Ответ: при $a=b=0$, а также при $a=b=\frac{1}{2}$.

2.1.4 Специальность "правоведение"

1. *Решить уравнение:*

$$\frac{7x-1}{8}-\frac{2x+3}{5}=\frac{4x-5}{4}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$5\cdot(7x-1)-8\cdot(2x+3)=10\cdot(4x-5)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 19x-29=40x-50\Leftrightarrow -21x=-21\Leftrightarrow x=1.$$

Так как корнем последнего уравнения является только число 1, то исходное уравнение также имеет только этот корень.

Ответ: 1.

2. *Решить уравнение:*

$$(7\sin x-4\sqrt{3})(7\sin x+5\sqrt{2})=0.$$

Решение. Данное уравнение обращается в верное числовое равенство в том и только в том случае, если $\sin x = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ или $\sin x = -\frac{5\sqrt{2}}{7}$.

Так как $48 < 49$, то $4\sqrt{3} = \sqrt{48} < 7$. Значит, $-1 < 0 < \frac{4\sqrt{3}}{7} < 1$, и, следовательно, уравнение $\sin x = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ имеет решения: все они описываются формулой $x = (-1)^n \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Далее, из неравенства $50 > 49$ следует, что $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > 7$, т.е. $-\frac{5\sqrt{2}}{7} < -1$. Следовательно, уравнение $\sin x = -\frac{5\sqrt{2}}{7}$ решений не имеет.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. *Если цифру десятков некоторого двузначного числа умножить на 4, а цифру его единиц умножить на 6 и результаты сложить, то полученное число будет на 13 больше суммы квадратов цифр исходного числа. Найти исходное число.*

Решение. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц искомого двузначного числа. Тогда, согласно условию задачи,

$$4x + 6y = x^2 + y^2 + 13 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: 23.

4. *Найти все значения a, для которых существует b, что при всех c выражение*

$$b^2 - 4ab + 2ac - c^2 - 2b.$$

отрицательно.

Решение. Неравенство $b^2 - 4ab + 2ac - c^2 - 2b < 0$, т.е. неравенство $-c^2 + 2ac + (b^2 - 4ab - 2b) < 0$ выполняется при всех c тогда и только тогда, когда дискриминант $D_c = 4a^2 + 4(b^2 - 4ab - 2b)$ квадратного трехчлена $-x^2 + 2ax + (b^2 - 4ab - 2b)$ отрицателен, т.е. когда

$$b^2 - 2b(2a+1) + a^2 < 0.$$

Следовательно, в задаче требуется найти все такие числа a, при которых неравенство $b^2 - 2b(2a+1) + a^2 < 0$ имеет хотя бы одно решение (относительно b). Последнее неравенство — квадратное, и старший коэффициент его — положителен. Поэтому оно имеет решения в том и только в том случае, когда положителен его дискриминант $D_a = 4(2a+1)^2 - 4a^2$. Таким образом, остается решить неравенство $D_a > 0$, т.е.

$$(2a+1)^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (3a+1)(a+1) > 0.$$

Решениями его служат промежутки: $a < -1$, $a > -\frac{1}{3}$.

Ответ: $a < -1$ или $a > -\frac{1}{3}$.

5. *На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого имеют длину a. Поворотом данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на* 45° *получается другой равнобедренный треугольник. Найти площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.*

Решение. Пусть ABC — треугольник с прямым углом C и катетами AC=CB=a, а $\Delta A_1B_1C_1$ — результат его поворота на 45° вокруг вершины C (см. рис. 2.6). Обозначим через D точку пересечения отрезков AB и A_1C, а через E и K — точки пересечения отрезка A_1B_1 с отрезками AB и CB.

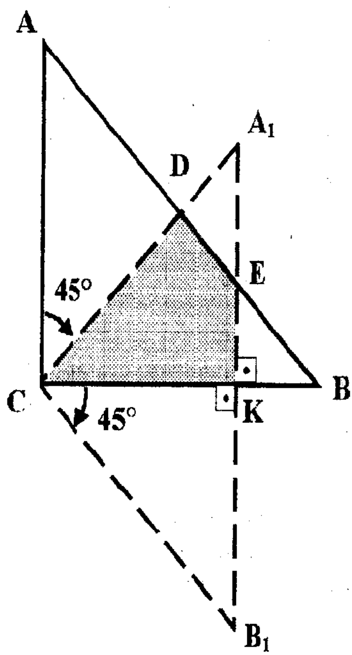


Рис. 2.6.

Так как в равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны 45°, то $\angle CAB = \angle ABC = \angle A_1B_1C = 45°$; угол $\angle BCB_1$ также равен 45°, поскольку CB_1 есть результат поворота на 45° отрезка CB. Значит, из ΔCKB_1 заключаем, что $\angle CKB_1 = 180° - 45° - 45° = 90°$, а потому $CK = CB_1 \cdot \cos 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Углы $\angle CKB_1$ и $\angle BKE$ равны как вертикальные, и значит, треугольник ΔEKB — прямоугольный, причем равнобедренный (это следует из того, что $\angle KBE = 45° \Rightarrow \angle KEB = 45°$). Поэтому $S_{\Delta EKB} = \frac{1}{2} \cdot KB^2 = \frac{1}{2} \cdot (CB - CK)^2 = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$. Так как $\Delta ADC = \Delta CDB$ (почему?), то $S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{4}$.

Следовательно,

$$S_{CDEK} = S_{\Delta CDB} - S_{\Delta EKB} = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{2}$.

2.1.5 Специальность "педагогика и методика начального обучения и социальная педагогика"

1. *Найти все значения x, при которых*

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Решение. Допустимыми значениями предложенного в задаче равенства являются те и только те x, при которых существуют дроби, находящиеся в левой его части, т.е. такие x, для которых

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z} & \text{(условие существования } \operatorname{tg} x\text{)}, \\ \sin x - \cos x \neq 0 & \text{(условие существования первой дроби)}, \\ \operatorname{tg}^2 x - 1 \neq 0 & \text{(иначе знаменатель второй дроби равен нулю)}. \end{cases}$$

Поскольку $\cos x \neq 0$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, то обе части неравенства $\sin x - \cos x \neq 0$ можно разделить на $\cos x$. Значит, второе неравенство системы равносильно неравенству $\operatorname{tg} x \neq 1$, т.е. неравенству $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Третье же неравенство системы равносильно выполнению двух неравенств, $\operatorname{tg} x \neq 1$ и $\operatorname{tg} x \neq -1$. Первое из них уже учтено, а второе дает неравенства $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, область допустимых значений указанного равенства состоит из всех чисел, отличных от чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Выясним теперь, для каких x из множества допустимых значений равенство условия задачи выполняется. Применяя формулы $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, преобразуем левую его часть. Имеем:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \sin x + \cos x.$$

Значит, указанное в условии задачи равенство выполняется при всех допустимых значениях x.

Ответ: для всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

2. *Определить, при каких x значение функции $y = \lg 10^{\lg(x^2+21)}$ больше соответствующего значения функции $y = \lg x + 1$.*

Решение. В задаче требуется найти все x, при которых

$$\lg 10^{\lg(x^2+21)} > \lg x + 1.$$

Так как $10^{\lg(x^2+21)} = x^2+21$ и $\lg x+1 = \lg x+\lg 10 = \lg(10x)$, то указанное неравенство равносильно следующему:

$$\lg(x^2+21) > \lg(10x).$$

Функция $y = \lg x$ — возрастающая, и, значит, последнее неравенство выполняется в том и только в том случае, когда выполняется система

$$\begin{cases} 10x > 0, \\ x^2+21 > 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 10x + 21 > 0. \end{cases}$$

Решения квадратного неравенства $x^2 - 10x + 21 > 0$ описываются соотношениями $x < 3$ или $x > 7$, но, учитывая первое неравенство системы, заключаем, что все решения ее следующие: $0 < x < 3$ или $x > 7$.

Ответ: при $0 < x < 3$ или при $x > 7$.

3. *В уравнении $x^2 - 2x + c = 0$ определите такое значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2 - 4x_1 = 47$.*

Решение. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-2x+c = 0$, то, согласно теореме Виета, $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1x_2 = c$. Значит, если требуемое в задаче число c существует, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 7x_2 - 4x_1 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2, \\ 11x_2 = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 5, \end{cases}$$

и, следовательно, $c = x_1x_2 = -15$. Остается, таким образом, только убедиться, что найденное число $c = -15$ удовлетворяет требованиям задачи. Но это очевидно, так как числа $x_1 = -3$ и $x_2 = 5$ являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$ и удовлетворяют равенству $7x_2 - 4x_1 = 47$.

Ответ: $c = -15$.

4. *Площади двух участков земли, засеянные хлопком, относятся как $\frac{7}{6}$ к $\frac{1}{2}$ и вместе составляют 600 га. С этих участков всего собрали 1575 т хлопка. Сколько хлопка собрали с одного гектара большего участка, если урожай с одного гектара меньшего участка составил 0,2 % всего урожая с двух участков?*

Решение этой задачи можно получить и без составления уравнений.

1) Так как $\frac{7}{6} : \frac{1}{2} = 7 : 3$, то площадь большего участка составляет $\frac{7}{7+3} = 0,7$ частей, а меньшего — $\frac{3}{7+3} = 0,3$ части от общей площади

земли. Значит, больший участок содержит $600 \cdot 0,7 = 420$ (га) земли, а меньший — $600 \cdot 0,3 = 180$ (га).

2) По условию, урожайность 1 га меньшего участка составляет 0,2%, т.е. $0,2 : 100 = 0,002$ части от всего урожая. Значит, с 1 га меньшего участка собирали $1575 \cdot 0,002 = 3,15$ (т), а всего с этого участка собрали $3,15 \cdot 180 = 567$ (т) хлопка.

3) С большего участка земли собрали $1575 - 567 = 1008$ (т) хлопка. А так как этот участок составляет 420 га, то с одного его гектара собрали $1008 : 420 = 2,4$ (т) хлопка.

Ответ: 2,4 т.

5. *Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Определить объем призмы, если ее большая диагональ имеет длину l и образует с плоскостью основания угол β.*

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, в основании которой лежит ромб ABCD с острым углом $\angle DAB = \alpha\,(0 < \alpha < \pi/2)$. Обозначим длину стороны ромба через a, а высоту призмы — через H.

Так как $\angle ABC = \pi - \alpha$, то, применяя теорему косинусов к треугольникам ABD и ABC, получим:

$$DB^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1 - \cos\alpha),$$

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(\pi - \alpha) = 2a^2(1 + \cos\alpha).$$

Поскольку $\cos\alpha > 0$, то $DB^2 < 2a^2 < AC^2$, т.е. $AC^2 > DB^2$.

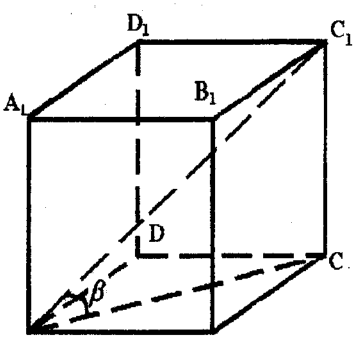


Рис. 2.7.

Так как призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая, то высота ее совпадает с боковым ребром. Значит, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = H$ и ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны плоскости ABCD; кроме того, треугольники ACC_1, BDD_1, CAA_1 и DBB_1 — прямоугольные и $AC_1 = A_1C = \sqrt{AC^2 + H^2}$, а $DB_1 = D_1B = \sqrt{DB^2 + H^2}$. А так как $AC^2 > DB^2$, то $AC_1 = A_1C > DB_1 = D_1B$. По условию, длина большей диагонали призмы равна l, и эта диагональ образует с плоскостью основания угол β. Значит $AC_1 = l$, и $\angle C_1AC = \beta$ (мы пользуемся тем, что $CC_1 \perp$ плоскости ABCD, а потому AC является проекцией AC_1 на плоскость ABCD).

Из прямоугольного треугольника ACC_1 ($\angle ACC_1 = \pi/2$) имеем: $H = CC_1 = AC_1 \cdot \sin\beta = l\sin\beta$ и $AC = AC_1 \cdot \cos\beta = l\cos\beta$. Из полученного ранее равенства $AC^2 = 2a^2(1+\cos\alpha)$ находим a^2:

$$a^2 = \frac{AC^2}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{l^2\cos^2\beta}{4\cos^2(\alpha/2)}.$$

Площадь ромба ABCD равна $a^2\sin\alpha$, т.е.

$$S_{ABCD} = \frac{l^2\cos^2\beta}{4\cos^2(\alpha/2)} \cdot \sin\alpha = \frac{l^2}{2}\cos^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, для объема V призмы имеем:

$$V = S_{ABCD} \cdot H = \frac{l^2}{2}\cos^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot l\sin\beta = \frac{l^3}{2}\sin\beta\cos^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{l^3}{2}\sin\beta\cos^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2.2 УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН

Вступительный экзамен по математике (устно) проводился в двух формах: в форме обычного устного опроса и в виде, когда абитуриент должен был дать исключительно письменный ответ по билету (такой экзамен принято называть устным экзаменом по математике в письменной форме). Форма экзамена определяется приказом министерства образования.

В 2001 году устный экзамен по математике в письменной форме сдавали абитуриенты специальностей "экономическая кибернетика" и "прикладная математика", а в обычной форме устного опроса — на специальности: "математика", "математика и информатика", "психология". Итоги экзамена приведены в таблице.

Специальность	Количество сдававших экзамен	Получили оценку					
		"5"	"4,5"	"4"	"3,5"	"3"	"2"
экон. кибернетика	13	4	1	4	1	2	1
прикл. математика	10	2	1	4	1	3	—
математика	25	5	3	6	3	5	3
матем. и информ.	26	5	7	7	1	6	—
психология	60	5	4	18	10	14	19

Экзаменационный билет абитуриента, поступавшего на математический факультет, содержал четыре задания — теоретический вопрос и задачу по разделу программы "арифметика, алгебра и начала анализа", а также теоретический вопрос и задачу по разделу "геометрия". В отличие от него билет абитуриента, поступавшего на психолого-педагогический факультет, содержал два теоретических вопроса и только одну задачу. Теоретические вопросы билетов отмечены звездочкой в "Программе по математике" и отдельно мы их выписывать не будем. Тексты задач экзаменационных билетов, предлагавшихся в 2001 году, дополненные задачами предыдущих лет для абитуриентов психолого-педагогического факультета, помещены в разделе 2.5 настоящего пособия. По ним легко себе составить представление об уровнях знаний математики, достаточных абитуриентам различных специальностей для успешной сдачи соответствующего экзамена. Отметим только, что для получения оценки "4" абитуриенту следовало полностью ответить на теоретические вопросы билета и решить одну задачу (для поступающего на специальность "психология" решение задачи засчитывалось и в том случае, когда абитуриент приводил его после наводящих вопросов экзаменаторов).

2.3 ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вступительный экзамен по математике в форме тестирования сдавали абитуриенты, поступающие на специальность "педагогика и методика начального обучения" с дополнительными специальностями "английский язык" и "музыка и пение". Итоги его приведены в таблице.

Всего сдавали	Получили	"5"	"4,5"	"4"	"3,5"	"3"	"2"
36 человек	оценку	3	1	6	7	14	5

Ознакомим читателя с характером заданий и уровнем их требований на примере одного из тестов, предлагавшихся на экзамене. Заметим, что для получения оценки "3" абитуриенту нужно было дать верные ответы на 7 его заданий, а для получения "5" — не менее, чем на 19.

Тест 1.

1. Сколько километров составляет 22000000 см?
1) 22 км; 2) 220 км; 3) 2200 км; 4) 2,2 км.

2. В записи $\sin 2^\circ * \cos 2^\circ$ вместо $*$ поставьте знак:
1) $>$; 2) $<$; 3) $=$; 4) сравнить нельзя.

3. Сократите дробь $\sin 200^\circ / \cos 100^\circ$.
1) $\operatorname{tg} 2$; 2) $\sin 100^\circ$; 3) дробь несократима; 4) $2\sin 100^\circ$.

4. Значение выражения $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ равно:
1) -1; 2) $2\sqrt{2}-3$; 3) 1; 4) не существует.

5. Сколько разных действительных корней имеет уравнение $\frac{x^5-5}{5}=0$?
1) один; 2) два; 3) пять; 4) ни одного.

6. Вершины треугольника находятся в точках A(-3;0), B(0;2), C(5;0). Площадь треугольника ABC равна
1) 4 ед.^{2}; 2) 8 ед.^{2}; 3) 10 ед.^{2}; 4) ± 16 ед.^{2}

7. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 2^x + 5, \\ x^2 + y = 4? \end{cases}$$

1) ни одного; 2) два; 3) одно; 4) четыре.

8. Точка A(5;-3) принадлежит графику функции $y=\frac{2-kx}{1-x}$. Принадлежит ли этому графику точка B(1;-17)?
1) да; 2) нет; 3) определить нельзя.

9. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 10 см, один из катетов имеет длину 16 см. Найдите значение синуса меньшего угла этого треугольника.
1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{3}{5}$.

10. Площадь прямоугольника, длина которого в 3 раза и на 12 дм больше ширины, равна:
1) 108 дм^2; 2) 64 дм^2; 3) 10 м^2 8 дм^2; 4) 0,108 м^2.

11. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со сторонами 10 см. Объем конуса равен
1) $\frac{75\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; 2) $25\pi\sqrt{3}$ см^3; 3) $\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3; 4) вычислить нельзя.

12. Расстояние между A и B – 20 км. Один пешеход преодолевает его за 4 ч, другой – за 5 ч. Через сколько часов пешеходы встретятся, если выйдут из A и B одновременно навстречу друг другу?
1) 4 ч; 2) 4,5 ч; 3) $2\frac{2}{9}$ ч; 4) 3 ч.

13. Сколько решений имеет уравнение $(\sin x - 0,3)(\cos x + 0,3) = 0$ на интервале $(90°; 270°)$?
1) одно; 2) ни одного; 3) три; 4) четыре.

14. Решением неравенства
$$\frac{\log_5 0,9}{x^2+4} < 0$$
является
1) (-2; 2); 2)$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty;+\infty)$.

15. Наибольший общий делитель чисел 102 и 30 равен
1) 102; 2) 6; 3) 10; 4) 30.

16. Расположите в порядке возрастания $\cos 0°$, $\sin 0°$, $\operatorname{tg} 55°$, $\cos 50°$.

17. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если их величины относятся как 13:5.

18. Сократите дробь
$$\frac{x^2-9x+20}{x^2-11x+30}.$$

19. Решите неравенство $\log_{x^2-4x+5} 5 > 0$.

20. Вычислите $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\sqrt{c^2-d^2}}}$, если $a = 65$, $b = 56$, $c = 45$, $d = 36$.

Итак, мы видим, что задания теста охватывают разные вопросы программы по математике для поступающих в вузы. Выполнение их не предполагает громоздкой вычислительной или преобразовательной деятельности, оно должно быть построено на конкретных знаниях математического материала и способах работы с ним.

Так, например, задания №5, №7, №13 не требуют решения указанных в них уравнений или систем, так как вопрос стоит не о самих решениях, а лишь об их количестве. Ответ на него легко получить графически. Прикиньте схематически графики функций $y = 2^x + 5$ и $y = 4 - x^2$ (№7, тест 1), а для этого **надо знать** их общий вид, и посчитайте количество точек их взаимного пересечения. Для ответа на вопрос задания №13 достаточно изобразить линии синуса и косинуса на единичной окружности, соответствующие данным числам, и посчитать все точки их пересечения с заданной дугой окружности.

Для выполнения задания №8 надо знать, что точка принадлежит графику функции тогда и только тогда, когда ее координаты обращают формулу функции в верное числовое равенство. Обратите внимание на знаменатели формул и на абсциссы заданных точек и станет понятно, почему никаких вычислений фактически производить не надо.

Задание №10 — из учебника математики для IV класса, а значит вводить переменные и составлять уравнения с длинами сторон прямоугольника не стóит. Решение становится очевидным и выполняется устно после изображения заданных в задаче отношений на чертеже.

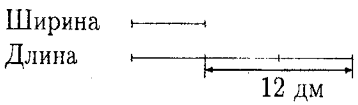


Рис. 2.8.

Некоторые абитуриенты к заданию №6 применяли формулу Герона, выявив возможность по координатам заданных точек найти длины всех сторон треугольника. Это правильная версия, но громоздкая при ее реализации. Попробуйте построить точки в системе координат (можно и без соблюдения масштаба), чтобы "увидеть" длину основания и высоты треугольника, а затем используйте формулу $S = \frac{1}{2}ah$.

К заданиям 16 – 20 надо получить ответ и записать лишь его, а не все решение задачи. Поэтому и в этих заданиях гораздо важнее наметить экономный и правильный путь решения, чем заботиться о правилах оформления решения. Так, в задании №18 разложение трехчленов на множители можно провести с опорой на теорему Виета, а в задании №20 после подстановки числовых данных применить формулу разности квадратов.

К заданиям 1—15 приведены несколько вариантов ответов, один из которых верный. Вероятность его угадывания мала, так как правдоподобными являются почти все. Значит, ответ надо стремиться не угадать, а найти, и лишь затем отметить номер правильного ответа.

В качестве упражнения будущему абитуриенту предлагаем ответить на вопросы следующего теста, также предлагавшегося на вступительном экзамене 2001 г.

Тест 2.

1. Сколько тонн составляет 305000000 г?
1) 30,5 т; 2) 305 т; 3) 3,05 т; 4) 3050 т.

2. В записи $\sin 89° * \cos 89°$ вместо $*$ поставьте знак:
1) $>$; 2) $<$; 3) $=$; 4) сравнить нельзя.

3. Сократите дробь $\sin 160°/\sin 80°$.
1) 2; 2) $2\cos 80°$; 3) дробь несократима; 4) $\sin 2°$.

4. Значение выражения $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$ равно:
1) -2; 2) 2; 3) $2\sqrt{3}-4$; 4) не существует.

5. Сколько разных действительных корней имеет уравнение $\frac{5}{x^2-5} = 0$?
1) один; 2) два; 3) бесконечно много; 4) ни одного.

6. Вершины треугольника находятся в точках A(2;0), B(6;0), C(0;10). Площадь треугольника ABC равна
1) 10 ед.^{2}; 2) 20 ед.^{2}; 3) 12 ед.^{2}; 4) 120 ед.^{2}

7. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 3^x = y, \\ y = 2x - 5 - 3x^2? \end{cases}$$

1) два; 2) одно; 3) четыре; 4) ни одного.

8. Точка M(3;19) принадлежит графику функции $y = \frac{14+kx^2}{x+5}$. Принадлежит ли этому графику точка K(-5;16)?
1) да; 2) нет; 3) определить нельзя.

9. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 2,5 см, один из катетов имеет длину 4 см. Найдите значение косинуса бóльшего острого угла этого треугольника.
1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$.

10. Площадь прямоугольника, ширина которого на 18 дм и в 3 раза меньше длины, равна:
1) 108 дм^2; 2) 2 м^2 43 дм^2; 3) 24 м^2 3 дм^2; 4) 0,243 м^2.

11. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник, катет которого имеет длину 4 см. Объем конуса равен
1) $16\pi\sqrt{2}$ см^3; 2) $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; 3) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ см^3; 4) вычислить нельзя.

12. Расстояние между пунктами A и B – 15 км. Один пешеход проходит его за 3 ч, другой – за 5 ч. Через сколько часов пешеходы встретятся, если выйдут из A и B одновременно навстречу друг другу?
1) 4 ч; 2) 2 ч; 3) $1\frac{7}{8}$ ч; 4) 8 ч.

13. Сколько решений имеет уравнение $(\sin x + 0,6)(\cos x + 0,6) = 0$ на промежутке $[270°; 360°]$?
1) одно; 2) ни одного; 3) три; 4) четыре.

14. Решением неравенства

$$\frac{9+x^2}{\log_{0,5} 9} < 0$$

является
1) (-3; 3); 2)$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $\varnothing$.

15. Наименьшее общее кратное чисел 60 и 240 равно
1) 30; 2) 60; 3) 20; 4) 240.

16. Расположите в порядке убывания $\operatorname{tg} 0°$, $\sin 40°$, $\cos 70°$, $\sin 90°$.

17. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если их величины относятся как 7:11.

18. Сократите дробь

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - 4a + 3}.$$

19. Решите неравенство $\log_{x^2-6x+10} \frac{1}{2} < 0$.

20. Вычислите $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\sqrt{c^2-d^2}}}$, если $a = 67$, $b = 58$, $c = 53$, $d = 28$.

2.4 ЗАДАЧИ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Вариант 1 (математика и информатика)

1. Решить уравнение:

$$\frac{1}{2} \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2\cos^2 x.$$

2. Два экскаватора производят работу. Если эту работу будет выполнять один первый экскаватор, то он может закончить ее на 8 ч позднее, чем оба вместе. Если эту работу будет выполнять один второй экскаватор, то он закончит ее на 4,5 ч позже, чем оба вместе. За какое время может выполнить работу каждый из экскаваторов в отдельности?

3. Равносторонний треугольник со стороной длины a поворачивается в плоскости треугольника на 30° вокруг середины одной из своих сторон. Найти площадь шестиугольника, являющегося общей частью исходного и окончательного положения треугольника.

4. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{82}}{2}$ проходит через вершины $A_1C_1D_1$ и через середину ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 || BB_1 || CC_1 || DD_1 ||$). Найти объем этого куба.

5. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства

$$x^2 + a^2 + 5a + 4 < 2ax + 5x$$

удовлетворяет условию

$$x^4 + 40x < 4x^3 + 37x^2?$$

Вариант 2 (прикл. математика, эконом. кибернетика)

1. Решить неравенство

$$\log_a(x^2 - 4|x-1|) \leqslant 0,$$

где $a = \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{32-10\sqrt{7}}$.

2. Найти корни уравнения

$$3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\operatorname{tg} x,$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Из города А в город В выезжает велосипедист, а через 3 ч после его выезда из города В выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посредине между А и В. Если бы мотоциклист выехал не через три часа, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к А. Найти расстояние между А и В.

4. Найти площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если известно, что площадь сечения, проходящего через меньшую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S, а боковая грань наклонена под углом 60° к основанию.

5. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} x^{100} - 2a\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) + b^2 = 0, \\ y^{50} - 2b\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) + a^2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 3 (заочн. отд., юридический факультет)

1. Магазином продано в первый день 50% поступившего товара, а во второй - 25% остатка. Сколько процентов товара осталось непроданным?

2. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{7}-1}(x-4) < \log_{8-2\sqrt{7}} 4.$$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{4+4x} = -1 - x.$$

4. Купил Рома раков, вчера - мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня - по 990 руб., но очень крупных. Всего он истратил 25200 рублей, из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 160 до 200 рублей. Определить, сколько раков купил Рома вчера и сколько сегодня.

5. Доказать, что если в четырехугольнике, две стороны которого не параллельны, отрезок прямой, соединяющий середины этих сторон равен полусумме двух других сторон четырехугольника, то этот четырехугольник - трапеция.

Вариант 4 (правоведение)

1. Решить уравнение:

$$24x^3 - 84x^2 + 72x = 0.$$

2. Решить уравнение:

$$(13\cos x - 4\sqrt{11})(13\sin x + 5\sqrt{5}) = 0.$$

3. Если цифру десятков некоторого двузначного числа умножить на 14, а цифру его единиц умножить на 6 и результаты сложить, то полученное число будет на 58 больше суммы квадратов цифр исходного числа. Найти исходное число.

4. В прямоугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке O, длина стороны AB равна 1, а величина угла OAB равна 60°. Найти площадь общей части кругов, описанных около треугольников ABO и BOC.

5. Найти все значения a, для которых при каждом b найдется такое c, что

$$|c - 3| + b \cdot |2c + 1| = a.$$

Вариант 5 (психолого-педагогический факультет)

1. Докажите, что при всех допустимых значениях α значение выражения

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$$

равно нулю. Определите допустимые значения α.

2. Найдите область определения функции

$$y = \frac{1}{\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 2x - 3)}.$$

3. Найдите все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов этих корней.

4. Из двух станций выходят одновременно навстречу друг другу два поезда. Первый поезд расстояние между станциями проходит за 12,5 часа, а второй - за 18,75 часа. Через сколько часов после выхода поезда встретятся?

5. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине боковой грани α. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 6 (психолого-педагогический факультет)

1. При каких значениях a функция $y = (a-1)x^2 + (a+1)x + a + 1$ принимает положительные значения при любых действительных значениях x?

2. Докажите тождество

$$\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2(\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(3\pi - 2\alpha) + 4\sin^2\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) - 1} = \operatorname{tg}^4(\alpha - 6\pi)$$

3. Двое рабочих, работая совместно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрей, а второй - вдвое медленней, то работа заняла бы 4 дня. За сколько времени выполнил бы всю работу один первый рабочий?

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} > 1.$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней – α. Найдите объем призмы.

Избранные задачи других вариантов

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{\log_9(4y^2-x)} = 1, \\ 9^{\frac{x-y}{4}} - 2\cdot 3^{\frac{x-y}{4}} = 3. \end{cases}$$

2. При каких значениях параметра каждое решение неравенства

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

будет содержаться среди решений неравенства

$$ax^2 - (3a+1)x + 3 \geqslant 0\,?$$

3. Для каких a любое решение неравенства

$$x^2 - (a-1)x + 1 + a < 0$$

меньше, чем любое решение неравенства

$$x^2 - (a+1)x + 3a + 1 \leqslant 0\,?$$

(Предполагается, что каждое из неравенств имеет решение.)

4. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$x^2-(a+1)ax+a^3\leqslant 0$$

содержит не менее пяти целых значений x?

5. Путь из А в В плот проплывает за 24 часа, а катер тратит на путь из А в В и обратно не менее 10 часов. Если собственную скорость катера увеличить на 40%, то путь из А в В и обратно займет не более семи часов. Сколько времени плывет катер из А в В и сколько времени он плывет из В в А?

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}(2x-1)^2+8\sqrt{2xy}=4,\\ 4y-\sqrt{8xy-1}=1.\end{cases}$$

7. Бассейн наполняется водой из пяти труб. Первая труба заполняет бассейн за 40 минут; вторая, третья и четвертая, включенные одновременно - за 10 минут; вторая, третья и пятая - за 20 минут, и, наконец, пятая и четвертая - за 15 минут. За сколько времени наполняют бассейн все пять труб при одновременной работе.

8. В треугольнике PQL проведена средняя линия AB, соединяющая стороны PQ и QL. Длина стороны PL равна $\sqrt{2}$, а синус угла $\angle$PLQ равен $\frac{1}{3}$. Окружность, проведенная через точки A, B и L касается стороны PQ. Найти ее радиус.

9. В треугольной пирамиде SABC угол $\angle ACB=\alpha$, ребро $SC=d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра SA и SB в их серединах. Найти объем пирамиды, если $\angle SAC=\angle SBC=\beta$, причем $\beta<\frac{\pi}{4}$.

10. Решить неравенство:

$$(x^2-14x+45)\sqrt{x+7}\leqslant x^2-2x-63.$$

11. Доказать, что если соединить какую-нибудь точку M окружности с точками A и B прикосновения касательных, проведенных через фиксированную точку P плоскости, и через точку P провести прямую l, параллельную касательной к окружности в точке M, то прямые MA и MB отсекут на прямой l отрезок, длина которого не зависит от положения точки M на данной окружности. Доказать также, что P - середина этого отрезка.

12. В остроугольном треугольнике AFE высоты ED и FB пересекаются в точке C. Точки M, N, P и Q являются соответственно серединами отрезков FC, EC, AE и AF. Доказать, что четырехугольник MQPN является прямоугольником.

13. Доказать, что для каждого треугольника три точки, симметричные точке пересечения высот относительно сторон треугольника лежат на описанной окружности.

14. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x-3) < \log_{4-2\sqrt{3}} 36.$$

15. Среди прохожих провели опрос. На вопрос: " Где Вы предпочитаете отдыхать? "- бо́льшая часть ответила: " В горах ", меньшая: " На море ", а два респондента: " Затрудняюсь ответить". Далее выяснили, что среди любителей морского отдыха 90% предпочитают Черное, а 10% - Карибское море. У любителей горного отдыха уточнили, какие именно горы они предпочитают. Оказалось, что 81,25% выбрали Альпы, а 12,5% - Карпаты, и лишь один человек ответил: " Воробьевы ". Сколько всего прохожих было опрошено?

16. Доказать, что если в выпуклом шестиугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

17. В двух коробках лежат карандаши: в первой - красные, во второй - синие, причем количество синих карандашей не более 32. Двадцать процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 30% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем среди них было ровно 4 красных. После этого синих карандашей во второй коробке оказалось на 14 больше, чем в первой, а общее число карандашей в первой коробке по сравнению с первоначальным увеличилось, но не более, чем на 4%. Найти общее количество красных карандашей.

2.5 ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

2.5.1 Математический факультет

1. Решить систему:

$$\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$$

2. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана произвольная точка P. Доказать, что

$$BP > \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}+1}+\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=1.$$

4. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Доказать, что $BM + KD = AK$.

5.Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{10}{7}, \\ \frac{xz}{x+z}=\frac{5}{8}, \\ \frac{zy}{z+y}=\frac{40}{1}. \end{cases}$$

6. Решить уравнение:

$$\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6.$$

7. Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении длин всех его сторон?

8. При каких значениях x числа 2, $\cos(\arcsin x)$, $-x$ (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию?

9. Докажите, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол на три равные части, то треугольник – прямоугольный.

10. Внутри квадрата ABCD находится точка O, причем $\angle OAB = \angle OBA = 15°$. Доказать, что треугольник OCD – равносторонний.

11. При каких целых n выражение $\frac{n^2-n+1}{n-2}$ равно целому числу?

12. На плоскости лежат три шара одинакового радиуса, попарно касающиеся друг друга. В ямку, образованную ими, положен четвертый шар того же радиуса. Найти радиус шаров, если расстояние от центра верхнего шара до плоскости равно $3+2\sqrt{6}$.

13. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

14. Отрезок BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABD и BDC, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найти углы треугольника ABC.

15. Найти все однозначные натуральные числа x и y, удовлетворяющие неравенствам:

$$\frac{7}{9}<\frac{x}{y}<\frac{8}{9}.$$

16. Любое сечение плоскостью некоторого ограниченного тела есть круг. Доказать, что это тело – шар.

17. Некоторое задание двое рабочих разной квалификации выполняют за 8 дней. За какое время каждый рабочий может выполнить это задание, работая один, если известно, что на его выполнение потребуется менее месяца и целое число дней?

18. Обе грани прямого двугранного угла пересечены плоскостью, образующей с каждой гранью угол α. Найти угол между линиями пересечения этой плоскости с гранями двугранного угла.

19. На плоскости проведены две параллельные прямые AB и CD и выбрана точка M. Провести через точку M прямую таким образом, чтобы длина отрезка этой прямой, отсекаемого прямыми AB и CD , была равна заданному числу a.

20. Решить неравенство:

$$\log_{x^2-3}(4x+7) > 0.$$

21. Определить число целых значений a, при которых уравнение

$$a\sin x + 2\cos x = 1,(3)a$$

имеет решение.

22. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Через точку P, взятую на стороне AB, проведено сечение плоскостью, параллельной ребру AS и диагонали BD. Построить сечение, если известно, что BP:AP = 2:1.

23. Двое рабочих производят 50 деталей за 6 ч. За сколько минут изготовляет одну деталь каждый рабочий, если известно, что один рабочий производит одну деталь на 6 мин быстрее, чем другой?

24. Доказать, что биссектрисы внутренних углов прямоугольника пересекаясь образуют квадрат.

25. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй – синих, причем число красных шаров составляло 15/19 от числа синих шаров. Когда из коробок удалили 3/7 красных шаров и 2/5 синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй – более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

26. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}\cdot\left(x^4-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)=0$?

27. Доказать, что сумма расстояний от вершин прямоугольного параллелепипеда до плоскости, не пересекающей параллелепипед, в 8 раз больше, чем расстояние от его центра до той же плоскости.

28. В трапеции ABCD основание AD = 16. Боковая сторона CD = $8\sqrt{3}$. Известно, что окружность, проходящая через точки A, B, C, пересекает сторону AD в точке E, причем угол $\angle$BEA = 60°. Найти BE.

29. Отрезки AB и CD – диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD соответственно. Доказать, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

30. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Доказать, что OD = OE.

31. Даны: острый угол и внутри его точки A и B. Построить параллелограмм, для которого точки A и B – противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

32. Один завод может выполнить заказ на 4 дня раньше, чем другой. За какое время этот заказ может выполнить каждый из них, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполняют заказ в 5 раз больший?

33. Может ли прямая ровно по одному разу (не проходя через вершины) пересечь все стороны: а) 10-угольника; б) 11-угольника?

34. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан верхнего основания и середины двух боковых ребер.

35. В правильной треугольной пирамиде SABC ребро основания ABC имеет длину 1, а боковое ребро SA равно 3. Найти расстояние между серединами ребер SA и BC.

36. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = 3, BC = 4 и две точки M и K, такие, что MK = 8, AM = 1, BK = 2. Найти площадь треугольника CMK.

37. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал выпускать их более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

38. Вычислить:

$$\frac{2\log_2^2 3 - \log_2^2 12 - (\log_2 3)\cdot(\log_2 12)}{2\log_2 3 + \log_2 12}.$$

39. Сократима ли дробь $\frac{n+3}{2n+7}$ хотя бы при одном целом n?

40. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x = \frac{y}{1+y^2}, \\ 2y = \frac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

41. Найти все натуральные x такие, что остаток при делении 180 на x составляет 25 % частного.

42. Пятизначное число начинается слева цифрой 3. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных четырех цифр, то вновь полученное число будет на 29997 больше первоначального. Найти первоначальное число.

43. Решить неравенство: $\cos(3x + 3\operatorname{tg} y) + (\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}^2 y)^2 \leqslant -1$.

44. Решить уравнение: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

45. Найти множество значений функции $y = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$.

46. При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из сомножителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

47. Доказать, что если две несократимые положительные дроби в сумме дают 1, то их знаменатели равны.

2.5.2 Специальность "психология"

1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого равно 65/72. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

2. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x - 5} + \lg\sqrt{4 - x^2}.$$

3. Докажите, что многочлен $n^6 - n^5 + n^4 + n^2 - n + 1$ принимает только положительные значения при всех действительных значениях n.

4. Решите уравнение:

$$4(1 + \cos x) = 3\sin^2\left(\frac{x}{2} - 5\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2a+3}{5-a}$$

имеет отрицательные решения?

6. Решите неравенство:

$$\frac{\log_3 \pi}{2x^2 - 8} < 0.$$

7. Решите уравнение:

$$\cos x \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 0,5.$$

8. При каких значениях параметра a уравнение $\sin 2x = 5 - 3a$ имеет решение?

9. Завод увеличивал объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и тоже число процентов. Найдите это число, если известно, что за 2 года объем выпускаемой продукции вырос на 21 %.

10. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin\frac{x}{2},$$

если $x \in [180°; 360°]$.

11. По течению реки катер проходит 32 км за 1 ч 20 мин, а против течения – 42 км за 3 ч. Найдите собственную скорость катера.

12. Вычислите:

$$32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \ldots$$

13. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a-1)x - 2a = 0$ равна 9?

14. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{y}{x-y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)$$

не зависит от значений этих переменных.

15. Решите неравенство:

$$9^{\log_3 x} - 1 < 0.$$

16. Решите уравнение $\log_3^2(\log_2 x) = 1$.

17. Решите уравнение:

$$4^{\log_2(x-3) + \log_2 5} = 50.$$

18. Сколько нечетных положительных чисел, начиная с 3, надо взять, чтобы получить сумму 10200?

19. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x \cdot \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$.

20. Гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину 12 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится точка М, удаленная от всех вершин треугольника на 10 см?

21. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол при основании равен α.

22. Решите уравнение:

$$3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0.$$

23. Решите уравнение:

$$\frac{3}{\cos^2 3x} - 4\sin^2 3x = 0.$$

24. Решите уравнение:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} 5 + 2 = 0.$$

25. Площадь поверхности куба 150 ед^2. Найдите его объем.

26. Цена на товар была понижена на 20%. На сколько процентов ее нужно поднять, чтобы получить первоначальную цену.

27. Средняя линия равнобокой трапеции, описанной около круга, равна 68 см. Найдите радиус этого круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 64 см.

28. Из резервуара идут три трубы. Через первые две трубы вода из резервуара откачивается за 1 ч 10 мин, через первую и третью – за 1 ч 24 мин, а через вторую и третью – за 2 ч 20 мин. За сколько времени вода из резервуара откачивается всеми трубами вместе.

29. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

30. Найдите длину интервала, на котором выполняется неравенство

$$\sqrt{x^2 - 9} < x - 1.$$

31. Найдите сумму корней уравнения

$$2^{1+\log_2 x} + 4^{1+\log_2 x} = 110.$$

32. Найдите допустимые значения переменных x и y в выражении

$$\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1 + \frac{y}{x}}{(x-y)^2 + 4xy}$$

и упростите его.

33. Постройте график функции $y = 2^{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$.

Глава 3

В ПОМОЩЬ АБИТУРИЕНТУ

3.1 ЧТО ПОЛЕЗНО ЗНАТЬ КАЖДОМУ АБИТУРИЕНТУ

3.1.1 Как следует готовиться к вступительному экзамену по математике

Вступительный экзамен в вуз принципиально отличается от выпускного экзамена на аттестат зрелости.

Выпускной экзамен на аттестат зрелости — это экзамен не только для выпускника, но и для школы, для отдела образования района, города и т.д., вплоть до министерства. Задания выпускного экзамена по математике касаются сравнительно несложных и хорошо проработанных в школе тем и относятся к вопросам, не оставленным без внимания школы в последний год обучения учащихся. Подготовка к такому экзамену в основном сводится к повторению пройденного материала, чем обычно и занимается вся школа в последнюю четверть обучения.

Иное дело — вступительный экзамен в вуз. Итоговые оценки на нем являются не целью, а средством ранжирования абитуриентов по их **способностям к применению**, **углублению** и **развитию знаний** в области экзаменуемой дисциплины — способностям, необходимым для успешного овладения избранной специальностью. Поэтому понятно, что среди заданий вступительного экзамена по математике будут и такие, которые выявляют способность абитуриента "докапываться" до результата, включать в рассмотрение, т.е. **осмысленно** применять, различные факты школьной математики. Иначе говоря, на вступительном экзамене по математике, в отличие от выпускного на аттестат зрелости, проверяется способность абитуриента к самостоятельному мышлению. Мышление человека, как известно, индивидуально, а потому понятно, что подготовка к вступительному экзамену по математике — дело исключительно индивидуальное. Здесь школа, в лучшем случае, занимает нейтральную позицию, а в худшем — со своими обязательностью и планомерностью прохождения материала может оказаться серьезным препятствием (индивидуальная неподготовленность ученика к пониманию плановой темы и обязательность в ее изучении вынуждают ученика заучивать, "зубрить" материал; последнее является не только бессмысленной тратой драгоценного времени, но и травмирует "рабочий инструмент" учащегося — его головной мозг).

Как ни суди, а выходит, что подготовка к вступительному экзамену — это проблема, и проблема, прежде всего, самого будущего абитуриента. А раз так, то начинать решать ее следует с включения сознания, с осмысления своих "исходных данных".

Прежде всего, ответьте себе на вопрос о своем отношении к математике. Если она Вам не нравится или если Вы считаете себя совершенно "неспособным" в ней, то дело плохо — Вам не обойтись без квалифицированной помощи и контроля преподавателя; самостоятельная подготовка может привести Вас к провалам по отдельным темам.

Если у Вас — другие варианты ответа, то внимательно ознакомьтесь с программой вступительных экзаменов (см. пп 3.2 и 3.3 ниже), с вариантами письменных работ на избранную Вами специальность, с задачами устного экзамена и составьте для себя перечень тем, вопросов и типов задач, которые вызывают у Вас затруднения. Учтите, что указанный перечень будет являться стержнем Вашей подготовки к вступительному экзамену по математике, а потому отнеситесь к его составлению серьезно и время от времени корректируйте его — дополняйте вновь появившимися проблемами и вычеркивайте (карандашом!) отпавшие. Перечень желательно выписать на отдельных листах бумаги. Листы бумаги можно отвести отдельно для тем, для вопросов и для типов задач, а можно каждый лист делить на три колонки: колонки для тем, колонки для вопросов и колонки для типов задач.

После составления перечня затруднительного материала дело остается за "немногим" — перевести в разряд простого выделенный Вами материал. Добиться этого, к сожалению, совсем непросто — нужно хорошенько поработать с учебниками и пособиями. Помните, однако, что изучаемый материал нужно не заучивать, а осмысливать и систематизировать. Для этого может оказаться полезным ведение конспекта Ваших занятий, оформленного в виде таблиц и схем. Учтите также, что:

1. У Вас еще имеется возможность беседовать с учителем математики. Не упускайте ее! Учитель может помочь в установлении порядка изучения выделенного Вами материала, даст комментарии к учебнику и порекомендует пособие, ответит на некоторые Ваши вопросы или наметит пути нахождения ответов на них.

2. Полезно оформлять письменно свои рассуждения, проводимые при решении задачи или в ходе доказательства теоремы (и даже в том случае, если они всего-навсего черновые!). Цель этой работы — выработать привычку письменно излагать свои мысли последовательно, грамотно и обоснованно.

3. На любом этапе подготовки очень полезно излагать свои рассуждения вслух (включается слуховая память). Лучше это делать не самому себе, а реальному слушателю-собеседнику, например, однокласснику. Его возможные вопросы помогут Вам еще глубже понять изучаемый материал.

4. Необходимо устраивать себе "репетицию" экзамена по каждой проработанной теме, а затем и по всем темам программы.

Вступительный экзамен у большинства людей вызывает непроизвольное нервное напряжение. Растерянность, торможение, рассеянность внимания, нарушения памяти и даже речи, ожидание опасности или обиды вот его возможные проявления. Причины такого состояния известны: информационная перегрузка, высокая степень ответственности за исход экзамена и его последствия, а также сомнения и неизвестность ("Сумею ли я проявить себя? Поймут ли меня экзаменаторы? Как лучше оформить ответ? Ничего не помню; не получается; мы такого не решали; не успеваю; что будет?").

Попытаемся устранить хотя бы некоторые из этих причин: расскажем об организации и ходе вступительных экзаменов по математике, дадим практические советы, как следует вести себя на экзамене.

Как правило, экзаменаторы — это преподаватели университета, т.е. люди профессионально заинтересованные в выборе своих будущих студентов из возможно большего числа абитуриентов. Отсюда понятно, что "резать" абитуриентов экзаменаторам просто невыгодно. Экзаменационные ответы оцениваются по единым для всех критериям. Итоговая оценка выставляется по результатам оценок качества выполнения каждого экзаменационного задания, которые обычно фиксируются знаками "$+$" (плюс), "$\pm$" (плюс-минус), "$\mp$" (минус-плюс), "$-$" (минус):

"$+$" ставится за верно выполненное задание и при наличии всех шагов решения с четкими и правильными обоснованиями;

"$\pm$" ставится в том случае, если задание выполнено (например, правильный ответ в задаче получен), но содержит несущественные пробелы в обоснованиях или если в процессе решения были допущены неточности, негрубые ошибки;

"$\mp$" ставится за правильный ход (идею) решения, который, однако, не доведен до правильного ответа;

"$-$" ставится, если задание выполнено менее, чем на "$\mp$".

Наивысшим баллом оценивается только та работа и тот ответ абитуриента, в которых за каждое из предложенных заданий поставлен "$+$". Поэтому будьте предельно внимательны. Следите за тем, чтобы **текст решения задачи служил доказательством правильности ее от-**

вета. Обосновывайте каждый шаг в решении или доказательстве. Закончив доказательство или описание решения, надо записать "ч. т. д." (что и требовалось доказать) или под заголовком "Ответ" указать полученные Вами числовые значения. Помните, что неряшливость выкладок, обилие описок, наличие арифметических ошибок не только производят неприятное впечатление, но и противоречат духу математики, где точность и надежность результата ценится прежде всего. (Кроме того, и это очень существенно с точки зрения экзамена, из-за мелких в том числе и арифметических ошибок часто вообще не удается решить задачу, так как, находясь на верном пути, из-за неправильности выкладок можно, например, придти к неразрешимому уравнению или получить нелепый ответ.)

Уточните, в какой форме будет проходить экзамен на выбранную специальность и прочитайте ниже, как он обычно проводится.

Обратите внимание, что на любой вступительный экзамен по математике Вы должны взять:

- удостоверяющие Вашу личность документы (паспорт или заменяющую его справку с фотографией);
- экзаменационный лист (он выдается приемной комиссией и служит для фиксирования Ваших оценок на экзаменах);
- ручку с синим или фиолетовым стержнем и, на всякий случай, запасной стержень точно того же цвета.

Справочниками, таблицами, калькуляторами, своей бумагой для черновых записей, а также карандашами и линейками во время экзамена пользоваться не разрешается. Чертежи выполняются от руки той же ручкой, что и все другие записи.

3.1.2 Как проводится письменный экзамен

За 15-20 минут до объявленного в расписании времени начала экзамена всех абитуриентов приглашают в аудиторию, проверяют соответствующие документы и указывают рабочее место абитуриента. Абитуриентам выдают комплект бумаги для выполнения работы: титульный лист и два листа-вкладыша. Титульный лист заполняется под диктовку экзаменатора. Один из листов-вкладышей предназначен для чистовика, а другой — для черновика, на нем записывается слово "Черновик".

После этого в аудитории распечатывается конверт с вариантами заданий. Экзаменатор распределяет номера вариантов и предлагает записать номер в соответствующей строке титульного листа. (В дальнейшем титульный лист понадобится только при сдаче работы, а потому лучше отложить его в сторону, чтобы случайно не сделать на нем никаких других записей.)

Экзаменаторы раздают абитуриентам листки с экзаменационными заданиями и объявляется начало экзамена. На доске записывается время его начала и окончания (через 240 минут). Не позже, чем через 4 часа абитуриенты должны сдать вместе с экзаменационными листами свои работы и покинуть аудиторию.

Информация о результатах экзамена сообщается приемной комиссией на следующий день. В день объявления оценок абитуриенту предоставляется возможность (не упустите ее) просмотреть свою проверенную работу и убедиться в объективности либо необъективности ее оценки.

Как вести себя на письменном экзамене

1. Если у Вас возникли какие-либо "технические" проблемы — нечетко пробит текст, непонятен термин, не пишет ручка, надо выйти — решайте их без шума: поднимите руку — и к Вам подойдет экзаменатор.

2. Все записи ведите только на выданных листах-вкладышах, не делая на них никаких пометок, не имеющих отношения к выполняемой Вами работе (фамилия, подпись, рисунок и т.п.). Листы-вкладыши, которые попадают на проверку экзаменаторам без титульного листа, должны быть "безымянными" и "неопознаваемыми".

3. Внимательно и вдумчиво прочитайте все экзаменационные задания. Первое, что Вы должны сделать — это выбрать самые простые ("просто школьные") задачи. Они есть в любом варианте, и их верное решение обычно гарантирует "3". А так как решения сложных и легких задач оцениваются одинаково, то разумно начинать набирать баллы на простых задачах.

4. Начните с простого задания. Выполните его в черновике, тщательно проверьте и сразу же перепишите решение в чистовик. Условие задачи при этом переписывать не надо. После небольшой "передышки" (1-2 мин.) переходите к следующему заданию и так далее.

5. Записи в черновике выполняйте в удобном для Вас виде. В целях экономии времени полные объяснения здесь можно не разворачивать. Но старайтесь и в черновике писать по возможности аккуратнее. Так Вам будет легче при переписывании ответа в чистовик, да и экзаменатор, обнаружив ошибку в Вашем чистовике, просматривает черновик (вдруг ошибка допущена при переписывании). К оформлению чистовика отнеситесь очень внимательно. Пишите разборчивым почерком. Не забывайте обосновывать все переходы и утверждения, встречающиеся в решении. Следите за математической грамотностью и строгостью изложения. Не забывайте, что оценивается не только количество, но и качество выполненных заданий, что за три безукоризненно решенные задачи Вы получите более высокую оценку, чем за четыре задачи, в решениях которых есть хотя бы и небольшие погрешности, не говоря уж об ошибках.

6. Если Вы решаете трудное задание и оно "не поддается", переключитесь на другое, возможно с ним Вам повезет больше. Успех придаст Вам уверенности, и можно будет возобновить попытки справиться и с трудным заданием.

7. Если 2-3 задачи в экзаменационном варианте показались Вам слишком трудными, то причин для особого беспокойства нет. Скорее всего, они будут трудными не только для Вас. Не забывайте, что Вы — участник соревнования, и представьте, что вместе с другими абитуриентами находитесь на стадионе в секторе для прыжков в высоту. Если планка установлена низко (все задания — легкие), то и Вы, и большинство Ваших соперников успешно возьмут заданную высоту. Победитель не будет выявлен в этой попытке, т.е. конкурс для Вас переносится на другие экзамены. И наоборот, если хотя бы с одной из "нерешаемых" задач Вы справились (прыгнули выше своих соперников), то уже на экзамене по математике Вам удастся опередить других, так как Вы получите более высокую оценку. Но, очевидно, чтобы добиться этого преимущества, необходимо серьезно готовиться к вступительному экзамену, а во время экзаменационной работы спокойно и настойчиво повторять попытки "взять высоту".

Устный экзамен в письменной форме отличается от письменного экзамена лишь тем, что вместо варианта письменной работы Вам будет предложен билет, который включает два теоретических вопроса из программы и одну или две задачи.

3.1.3 Как проводится устный экзамен

По программе вступительного экзамена составляются билеты. В них обычно включают два теоретических вопроса, отмеченных в программе звездочкой, и одну-две задачи. Чтобы полнее охватить школьную программу, эти 3-4 задания соответствуют разным разделам математики: арифметика, алгебра, геометрия.

Во время экзамена в аудитории находится не более шести абитуриентов. На подготовку устного ответа дается 45-60 минут. Все необходимые записи ведутся только на выданных экзаменаторами листах, в которых указываются фамилия, имя и отчество абитуриента, номер билета, время начала и окончания экзамена.

Ответ по билету выслушивают два экзаменатора. Они могут задавать дополнительные вопросы и задачи, уточняющие понимание отвечаемого материала. Обсудив заслушанный ответ, экзаменаторы выставляют его оценку в ведомость и в экзаменационный лист, который, в случае положительной оценки, возращается абитуриенту.

Как вести себя на устном экзамене

Ваша цель на экзамене — создать о себе хорошее впечатление у людей, которые Вас видят впервые. Основа этого — хорошие ответы на экзаменационные задания. Но ведь экзаменаторы — это люди со своими вкусами и взглядами, а потому постарайтесь не раздражать их своей индивидуальностью. Для этого, прежде всего, постарайтесь сделать невызывающей свою внешность (кольцо в носу, зеленый цвет волос и проч., конечно же, не годятся).

На выданных Вам листах опроса пишите не полный ответ, а его основные моменты: формулировки теорем, чертежи, схемы доказательств, определения, краткие решения задач. Записи ведите в виде, удобном для последующего устного ответа по ним: пронумеруйте выполненные задания; подчеркните опорные слова, например, "теорема", "определение" или другие; пишите по возможности аккуратнее.

Отвечайте умеренно громко, чтобы не мешать другим абитуриентам, в меру монотонно, без лишних эмоций. Спокойный, монотонный и даже скучный ответ создает впечатление полного понимания отвечаемого материала и, скорее всего, экзаменаторы не будут "копаться" в деталях.

Внимательно выслушивайте дополнительные вопросы экзаменатора и не торопитесь давать на них необдуманные ответы, даже если вопрос Вам кажется легким. Но не задумывайтесь при этом слишком надолго: это производит впечатление неуверенности и даже отсутствия знаний. Если вопрос показался Вам многозначным, попросите сформулировать его письменно; не бойтесь также просить уточнений вопроса или задачи. Если Вы затрудняетесь дать полный ответ, изложите свои соображения для отдельного частного случая или случаев (это производит хорошее впечатление).

3.1.4 Как проводится тестирование

Тестирование (от англ. test — проба, испытание, исследование) — одна из форм письменного экзамена. От контрольной работы тестирование отличается прежде всего количеством экзаменационных заданий. Тесты содержат не 5-6 задач, а гораздо больше (обычно не менее 20-ти), и в каждом его задании от абитуриента требуется только одно — указать правильный ответ. Отсюда ясно, что выполнение тестовых заданий связано не с громоздкими выкладками и объяснениями, а с гибким применением знаний из школьного курса математики. Продолжительность такого экзамена определяется из расчета, что подготовленному абитуриенту на одно задание понадобится в среднем не более 5–7 минут, т.е. на тест из двадцати задач отводится около двух часов.

За 15–20 минут до непосредственного начала экзамена всех абитуриентов приглашают в аудиторию, проверяют соответствующие документы. Каждому абитуриенту выдается лист с тестом (он будет служить чистовиком) и бумага для выполнения экзаменационной работы: титульный лист и лист для черновых записей. Под руководством экзаменатора заполняется титульный лист, и никаких других записей на нем делать нельзя. На доске записывается время начала экзамена и его окончания. Не позже указанного времени абитуриенты должны сдать экзаменационные работы, вложив в титульный лист тест с ответами и черновик. Результаты экзамена приемной комиссией сообщаются на следующий день.

Как вести себя на тестировании

1. Внимательно изучите лист с тестовыми заданиями: разберитесь, где само задание, где перечень возможных ответов на его требование, где место, предназначенное для записи ответа, в каких заданиях ответ нужно конструировать самостоятельно, а не выбирать из числа предложенных.

2. Прочитайте все задания, входящие в тест, и выберите из них самое легкое для Вас. Выполните это задание или прикиньте его ответ сначала на черновике. Обязательно укажите номер данного задания и полученный ответ (это облегчит Вашу последующую работу в чистовике). Переходите к следующему доступному для Вас заданию, оставляя наиболее трудные на "потом".

3. Помните, что от Вас требуется не решение с объяснением, а только правильный ответ, который можно получить и ничего не решая, например, подбором, прикидкой, по интуиции и даже просто наугад, "наобум". Важно за отведенное время выполнить как можно больше заданий, набрать больше баллов и получить в итоге более высокую оценку. Поэтому в заданиях с выбором правильного ответа, с которыми Вы никак не можете справиться, выгоднее выбрать чем-то подсознательно понравившийся Вам ответ, чем оставить место для ответа незаполненным — а вдруг угадаете правильно!

4. Выполнив на черновике все задания, проверьте разумность (знак, размерность, соответствие реальному смыслу и действительности и т.п.) и правильность найденных Вами ответов. Аккуратно запишите эти ответы на отведенном для них месте в листе с тестовыми заданиями.

3.1.5 Что такое апелляция

Сам термин происходит от латинского "appellatio" — "обращение" и означает обращение за поддержкой к общественному мнению.

Если после просмотра своей работы или после устного экзамена Вы убеждены, что оценка за Ваш ответ занижена, пишите заявление на апелляцию с указанием всех претензий к проверке Ваших знаний и с просьбой повысить оценку. Но это должно быть именно **обоснованное убеждение** в несоответствии выставленного балла качеству Вашей экзаменационной работы, а не сомнения (которые, как правило, снимаются во время ее просмотра) и не естественное желание получить более высокую оценку. Помните, что дополнительной проверке будет подвергнута **только** Ваша экзаменационная работа или листы Вашего устного ответа, а не Вы сами: Вас не будут заново опрашивать или выслушивать Ваши дополнительные устные разъяснения к решению ("что написано пером, не вырубишь топором").

Для рассмотрения Вашего заявления будет создана апелляционная комиссия, в состав которой войдут не только Ваши экзаменаторы, но и назначенные приемной комиссией эксперты. После обсуждения членами апелляционной комиссии Вашей работы и правильности ее оценки, Вас пригласят для оглашения принятого решения. Скорее всего, Вам объяснят, почему Вы заслужили именно ту оценку, которая уже стоит в Вашей работе. Вероятность того, что апелляционная комиссия признает Вашу правоту и повысит оценку, невелика, так как то, что Вы написали в своем ответе, экзаменаторами было проверено тщательно и скрупулезно, а итоговая оценка поставлена после согласования ее критериев с председателем предметной комиссии.

3.2 ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММЫ И НА ЧТО СЛЕДУЕТ ОБРАТИТЬ ВНИМАНИЕ

Главной особенностью программы вступительных экзаменов по математике является отсутствие в ней встречающихся в школе понятий "производная функции" и "вектор".

Исключение указанных "школьных" понятий означает, что программа вступительных экзаменов не предусматривает использование их в ответах на вопросы программы, а также в решениях допускаемых ею задач. Например, программа предполагает доказательство теоремы косинусов без применения свойств скалярного произведения векторов. Точно также она подразумевает установление программных свойств перечисленных в ней функций с помощью материала, который в ней также оговорен.

Это важно иметь в виду при подготовке к экзамену и в построении своих ответов на нем, поскольку игнорирование требований программы может явиться причиной снижения оценки на экзамене. При этом апелляция будет точно бесполезной, если все претензии на повышение оценки будут сводиться к расхожим, но лишь внешне убедительным доводам типа "Разве плохо, если я знаю больше, чем предусмотрено программой?", "Разве можно наказывать за знание?", "Где, в каком месте программы накладывается запрет на использование применяемых мной методов?" и т.п.

Да, действительно, на экзамене не запрещается пользоваться внепрограммным материалом, но на нем и вовсе не устанавливается перечень фактов и сведений, которые знает или о которых слышал абитуриент. На экзамене абитуриенту предлагается решить задачу или ответить по конкретному программному вопросу. И если в ходе обоснования своих выводов им использовано какое-либо утверждение, не содержащееся в программе, то естественно возникает вопрос о его верности (но не правомерности! — прав применять утверждение или метод у абитуриента никто не отнимает). Если абитуриент правильно доказывает это утверждение, то, конечно же, ни о каком снижении оценки речь вестись не будет. Проблема возникает в том случае, когда абитуриент не может обосновать примененное им утверждение. А ведь в этом случае его ссылка на возможно и справедливый факт становится подобной, увы, опоре на гороскоп — то ли он говорит правду, то ли ошибается. И поскольку автором ответа на экзамене является абитуриент, а не гороскоп и не автор используемого абитуриентом факта, то нет ничего удивительного в том, что именно обоснования правильности ответа абитуриента могут быть признаны недостаточными.

Например, если на экзамене абитуриент получил правильный ответ в задаче на отыскание максимума и минимума функции $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ с помощью изучения свойств ее производной, то оценка предложенного решения как "верного" или "неверного" будет зависеть от качества обоснования полученного ответа. Решение зачтется как безукоризненное только в том случае, если абитуриент сам ввел (а не сослался на имеющееся в каком-то "гороскопе") определение производной для данной функции, сам доказал (а не сослался на Ферма — одну из "звезд", используемых составителями "гороскопов"), что в точках максимума и минимума производная данной функции должна обращаться в ноль, сам получил (в смысле доказал, а не отослал экзаменатора смотреть на "звезды") достаточные условия максимума и минимума функции, и лишь затем с их помощью получил ответ в задаче. Разумеется, привести подобное безукоризненное решение очень трудно, если вообще возможно.

А теперь сами сделайте вывод, кому из двух абитуриентов будет отдано предпочтение: "знающему" внепрограммный материал, но не сумевшему воспользоваться программным, или тому, кто представил указанную выше функцию в виде $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ и воспользовался программными свойствами о максимуме и минимуме функции $y = \sin x$?

Сказанное, разумеется, относится и ко всякому другому внепрограммному материалу.

Вторая, не менее важная, особенность программы состоит в том, что некоторые вопосы без звездочки из прошлых ее вариантов теперь снабжены этим знаком, и, кроме того, программа пополнилась немалым числом вопросов, ранее в ней в явном виде не формулировавшихся.

Указанные изменения приводят к выводу, который важно иметь в виду в первую очередь выпускникам школ и классов с математическим уклоном образования: программа требует обсуждения и использования только базового курса школьной математики, и, значит, на экзамене предстоит заниматься объяснениями "простых" и "очевидных" вопросов, а при решении задач отбросить методы высшей математики и применять "допотопные".

Остановимся подробней на отдельных новых фрагментах программы — местах возможных "придирок" экзаменаторов. При этом, как правило, мы не будем затрагивать вопросы, отмеченные звездочкой — они, понятно, и без наших наставлений, должны быть изучены каждым из тех абитуриентов, кому предстоит сдавать вступительный экзамен по математике.

Первая "мелочь", на которую следует обратить внимание абитуриенту, это появление в программе (да еще под звездочкой!) вопроса "Равносильные уравнения". Выделение понятия равносильности означает, что если абитуриент не следит за логическими переходами от исходного уравнения к получаемому в результате некоторых преобразований, то его решение уравнения не может считаться безукоризненным. Например, следующая запись решения уравнения $2x + 3 = 5$

$$"2x + 3 = 5, \quad 2x = 5 - 3, \quad 2x = 2, \quad x = 1. \quad \text{Ответ: } x = 1",$$

еще в недавнем прошлом вполне допустимая, теперь будет говорить лишь о формальном знании схемы решения уравнений определенного вида и, в то же время, явится свидетельством неумения абитуриента логически связывать исходное уравнение с простейшими. Правильным оформлением решения указанного уравнения может служить следующее:

"Поскольку прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа, а также умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля, преобразует уравнение в ему равносильное, то, прибавляя к обеим частям данного уравнения -3, получим уравнение $2x = 2$, равносильное исходному. Умножая обе части полученного уравнения на $\frac{1}{2}$, преобразуем его в уравнение $x = 1$, также равносильное исходному. А так как уравнение $x = 1$ имеет единственный корень 1, то исходное уравнение также имеет только один корень, а именно, 1. Ответ: 1"
или, в крайнем случае, такое:

$$"2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1. \quad \text{Ответ: } x = 1".$$

В последнем решении использован символ $\Leftrightarrow$, заменяющий слово "равносильно". Об этом символе, а также о знаках "$\Rightarrow$", "$\in$", "$\cup$" и др., следует несколько слов сказать отдельно. Строго говоря, их использование программой не предусмотрено. Однако, поскольку они вместе с широко употребительными символами "=", "<", ">"и др. применяются только с целью сокращения записей, то вряд ли найдется экзаменатор, который из-за них будет придираться к абитуриенту. Впрочем, если абитуриент поступает на очень "конкурсную" специальность, то можно, на всякий случай, подстраховаться. Для этого в работе следует всего лишь сделать соответствующую оговорку, например, "для сокращения записей я обозначаю символом "$\Leftrightarrow$" словосочетание "тогда и только тогда, когда ..."".

Далее, в программе выделены такие типы уравнений, как приведенное квадратное и биквадратное. Значит, абитуриент, в частности, должен использовать их точные названия при ссылках на них (например, об уравнении $x^2-6x+8=0$ следует сказать, что оно является приведенным квадратным уравнением, а не только квадратным).

Понятие координатной плоскости теперь содержится в разделе "Арифметика, алгебра и начала анализа" программы. Это позволяет, в частности, дать следующее определение графика: *графиком функции $y = f(x)$ называется то множество точек координатной плоскости, которое образуют все точки вида $(x, f(x))$, где x — произвольное число из области определения данной функции.* Полезно запомнить и пояснить его себе на примерах графиков простейших функций.

Как правило, точно построить все точки графика невозможно, и потому на экзамене график функции строится только приближенно. Вместе с тем, изображаемые графики должны отражать основные качественные свойства точных графиков. Для этого следует по возможности точно указать характерные точки, как например, точки пересечения графика с координатными осями, точки, в окрестности которых он удаляется в бесконечность (вертикальные асимптоты) и т.п. Недопустимо, например, в качестве графика функции $y = x^2 + x$ изображать параболу, не проходящую через начало координат, или, тем более, имеющую ось симметрии, не параллельную оси Oy, как это делают некоторые абитуриенты.

Нужно иметь в виду, что абитуриент должен уметь строить и графики функций, построение которых некоторым простым образом сводится к перечисленным в программе. Таковы, например, графики функций:

$$y = |ax + b|, \quad y = |ax^2 + bx + c|, \quad y = ax^2 + |bx + c|, \quad y = \sin|x|,$$
$$y = A\sin kx, \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = \log_2 x^2, \quad y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{и т.п.}$$

(под a, b, c и т.д. во всех этих функциях имеются в виду определенные числа).

Абитуриент должен обратить внимание на такие ранее не выделявшиеся в программе понятия, как "нули функции", "промежутки знакопостоянства функции", "арксинус", "арккосинус" и "арктангенс числа ". Вполне вероятно появление на экзамене задач, связанных с ними.

Немало изменений произошло и в разделе "Геометрия" программы, но большинство из них связано с детализированием и приписыванием звездочки вопросам программы прошлых лет. Вместе с тем в него включены и новые вопросы без звездочки, на которые абитуриенту также следует обратить внимание. Это "Теорема Фалеса", "Свойства секущих, проведенных к окружности из одной точки. Свойства пересекающихся хорд", "Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии, их связь с аксиомами планиметрии", "Взаимное расположение прямых в пространстве. Свойства параллельных прямых. Перпендикулярность прямых". Требуется теперь и знание формул для радиусов окружностей, вписанной и описанной около правильного многоугольника.

Наконец, третьей особенностью программы является увеличение перечня основных математических умений и навыков, которыми должен владеть абитуриент. Теперь уже в явной форме требуется умение решать уравнения и неравенства с модулем, задачи с параметрами и геометрические задачи на доказательство. Важно, однако, иметь в виду и те требования программы, которые в ней содержатся в неявной форме, т.е. не относятся к числу основных. И если хорошенько вникнуть в ее содержание, то можно заключить, что она требует от абитуриента умения решать практически все и ранее рассматривавшиеся типы задач, исключая задачи, в решении которых необходимо применение понятий высшей математики (непрерывности и производной функции, вектора и др.). Примеры различных типов задач, с которыми абитуриент может встретиться на экзамене, помимо настоящего пункта можно увидеть в главе 2; имеются они и ниже, в частности, в пункте 3.5. Полезно с точки зрения требований программы проанализировать как условия этих задач, так и методы их решения.

3.3 О МОДУЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И НЕ ТОЛЬКО О НЕМ

Вы, конечно, обратили внимание — в программе вступительных экзаменов не раз встречается понятие модуля действительного числа. К сожалению, как показывает опыт экзаменов, абитуриенты испытывают немалые трудности в обращении с ним. Приведем достаточно строгую теорию этого понятия и дадим несколько советов по решению уравнений и неравенств, содержащих соответствующий ему знак.

Появление понятия модуля действительного числа можно объяснить попыткой изображения действительных чисел точками числовой прямой. Определим сначала понятие числовой прямой.

Пусть l — некоторая прямая. Выберем произвольно на ней и зафиксируем точку O. Согласно одной из аксиом геометрии, точка O является началом двух лучей; один из этих лучей назовем "положительным" или "правым" (на чертеже его отмечают стрелкой), а второй — "отрицательным" или "левым". По еще одной аксиоме геометрии, каждая точка M прямой l удалена от точки O на некоторое расстояние, которое равно нулю, если M — это точка O, и положительно, если точка M отлична от точки O. Следовательно, можно по следующему правилу каждой точке M прямой l сопоставить вполне определенное действительное число m:

• $m = 0$, если M — это точка O;

• m равно расстоянию от точки M до точки O (т.е. равно длине отрезка OM) в случае, если точка M отлична от O и лежит на положительном луче;

• m есть число, противоположное расстоянию между точками M и O (т.е. число, противоположное длине отрезка OM), если M отлична от точки O и лежит на отрицательном луче.

Прямая l, каждой точке M которой, согласно описанному правилу, приписано действительное число m, называется числовой или координатной прямой, а число m — координатой точки M на этой прямой. Тот факт, что число m является координатой точки M принято обозначать записью: M(m).

Из определения числовой прямой следует, что отличные от O точки правого луча прямой l имеют положительные координаты, а точки левого — отрицательные. Отсюда легко заключить, что если точки M(m) и N(n) различны и лежат на разных лучах, то $m \neq n$. Однако, выполняется ли неравенство $m \neq n$ в случае, если M(m) и N(n) — различны, но лежат на одном луче? Оказывается, выполняется, только следует это из еще одной аксиомы геометрии: для каждого положительного числа r и для каждого луча имеется, притом только одна точка этого луча, удаленная от его начала на расстояние, равное r. Действительно, если M(m) и N(n) — различные точки числовой прямой l, лежащие на одном луче, то, согласно сформулированной аксиоме, они удалены от точки O на разные расстояния (в противном случае выходило бы, что на одном луче имеются две различные точки, удаленные от начала луча на одно и то же расстояние). Следовательно, $m \neq n$.

Итак, каждой точке числовой прямой l приписывается действительное число — координата этой точки, причем, различным точкам прямой l отвечают обязательно различные координаты.

Перейдем теперь к изображению действительных чисел на числовой прямой.

Изображением действительного числа x на числовой прямой l называется такая точка X этой прямой, координата которой равна x.

Ясно, что число x не может иметь два изображения на числовой прямой l, ведь, как мы знаем, две различные точки этой прямой обязаны иметь разные координаты, а не одну x. Вопрос, однако, состоит в том, каждое ли действительное число x имеет изображение на l? Оказывается — каждое, и доказывается это прямым указанием точки X, изображающей число x.

Пусть x — произвольное действительное число. Если $x = 0$, то его изображением является точка O; значит, число $x = 0$ имеет изображение на числовой прямой l. При $x \neq 0$ число x является либо положительным, либо отрицательным. Если число x — положительное, то на правом луче выберем точку X, удаленную от точки O на расстояние $r = x$. Согласно правилу приписывания координат точкам прямой l, координата точки X равна x. Значит, указанная точка X является изображением числа x. В случае, если число x — отрицательное, положительным является число $r = -x$, и следовательно, на левом луче имеется точка X, удаленная от точки O на расстояние, равное $r = -x$. Координата этой точки равна числу $-r = -(-x)$, противоположному числу $r = -x$, т.е. равна x. Значит, указанная точка X является изображением отрицательного числа

x. Таким образом, каждое действительное число x имеет (притом единственное) изображение X на числовой прямой.

Заметим, что выделить изображающую число x точку X на прямой l нельзя, если не известно расстояние, на которое X удалена от точки O. Значит, при построении точки X мы сначала находим число r, указывающее это расстояние, а затем уже определяем положение точки X на прямой l. Расстояние r вычисляется по числу x следующим образом. Оно равно

- нулю, если $x = 0$,
- x, если число x положительное,
- $-x$, если число x отрицательное.

Иначе говоря, имеем следующее равенство для числа r:

$$r = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Обозначение через r числа, сопоставляемого каждому x, не совсем удобно с практической точки зрения – оно не указывает, какому именно x соответствует это число. Поэтому для него и придумано другое обозначение – $|x|$, и читается оно как "модуль x" или "абсолютная величина числа x". Вот так в математике и появляется новое понятие – понятие модуля действительного числа:

0° | модулем действительного числа x называется число $|x|$, вычисляемое по формуле

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения

1° | модуль $|x|$ действительного числа x есть расстояние между точками O(0) и X(x) числовой прямой l.

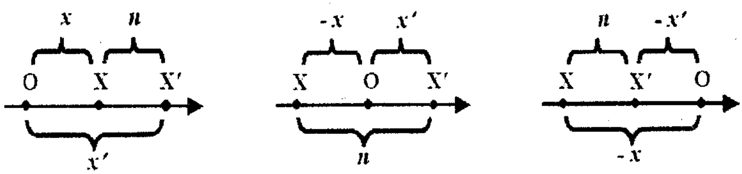
Многие абитуриенты забывают о геометрических истоках понятия модуля и пользуются им, не опираясь на геометрию. Ниже мы продемонстрируем, какие возможности в решении некоторых задач открывает именно геометрический смысл модуля. Предварительно убедимся в том, что

2° | модуль $|m-n|$ разности двух действительных чисел m и n равен расстоянию между точками M(m) и N(n) числовой прямой l.

Утверждение 2° очевидно выполняется, если точки M(m) и N(n) совпадают, т.е. если $m = n$. Оно обращается в утверждение 1°, если точка N(n) есть точка O(0), т.е. если $n = 0$. Поэтому будем считать, что точки M(m) и N(n) различны, а точка N(n) не совпадает с точкой O(0).

Так как $n \neq 0$, то либо $n > 0$, либо $n < 0$. При $n > 0$ сдвинем прямую l вправо на отрезок длины n; если же $n < 0$, то прямую l сдвинем влево на отрезок длины $-n$. При указанном сдвиге каждая точка X(x) прямой l перейдет в точку X′(x'), координата x' которой выражается через x по формуле $x' = x + n$.

(Чтобы убедиться в этом, достаточно выразить длину отрезка XX′, которая равна n, если $n > 0$, и равна $-n$, если $n < 0$, через длины отрезков OX и OX′; см. рис. 3.1, где проиллюстрирован случай сдвига числовой прямой l вправо; случай сдвига l влево рассмотрите самостоятельно.) Поэтому в результате указанного сдвига точка O(0) перейдет в точку N(n), а точка P($m - n$) — в точку M(m), т.е. отрезок OP перейдет в отрезок NM. А так как при сдвиге длина отрезка не меняется, то заключаем, что длина отрезка MN равна длине отрезка OP, т.е. равна числу $m - n$.



а) Точка O лежит левее точки X: $n = x - x'$

б) Точка O лежит между точками X и X′: $n = (-x) + x'$

в) Точка O лежит правее точки X′: $n = (-x) - (-x')$

Рис. 3.1. Сдвиг точки X(x) вправо на отрезок длины n ($n > 0$).

Остается воспользоваться тем, что длина отрезка MN — это расстояние между его концами. Утверждение 2°, таким образом, доказано.

Соответствие между множеством действительных чисел и прямой l, которое устанавливается понятием изображения действительного числа, является взаимно однозначным. Это позволяет отождествить действительное число с точкой числовой прямой, изображающей его, что упрощает и сокращает формулировки многих высказываний. Так, например, вместо предложения "$|x - 2|$ — это расстояние между точками числовой прямой, изображающими числа x и 2" принято говорить кратко: "$|x - 2|$ — это расстояние между точками (или числами) x и 2 ". Мы будем пользоваться описанным сокращением.

1. *Решить уравнение* $|x+2| = 3$.

Решение. Так как $|x+2| = |x-(-2)|$, то, согласно утверждению 2°, $|x+2|$ есть расстояние между точками x и -2. Значит, в задаче требуется найти все точки x, удаленные от -2 на расстояние, равное 3. Для нахождения их, на числовой прямой от точки -2 вправо и влево откладываем отрезки длины 3. Концы 1 и -5 построенных отрезков и будут искомыми решениями.

Ответ: -5; 1.

2. *Решить неравенство* $|x+2| < 1$.

Решение. В задаче требуется найти все точки x, удаленные от точки -2 на расстояние, меньшее 1.

Отметим сначала на числовой прямой точки -3 и -1, удаленные от -2 на расстояние, равное 1. Ближе их к точке -2 лежат все точки интервала $(-3; -1)$.

Ответ: $-3 < x < -1$.

3. *Решить неравенство* $|x+1| \geqslant 1$.

Решение. На числовой прямой от точки -1 удалены на расстояние 1 две точки, -2 и 0. Не ближе их от точки -1 на числовой прямой располагаются точки лучей $(-\infty; -2]$ и $[0; +\infty)$.

Ответ: $x \leqslant -2$; $x \geqslant 0$.

4. *Решить неравенство* $1 < |x-3| \leqslant 2$.

Решение. Поскольку точка x, удовлетворяющая данному в условии неравенству, должна находиться от 3 на расстоянии, не большем 2, то она принадлежит отрезку $[1; 5]$. С другой стороны, поскольку x должна быть удалена от точки 3 на расстояние, большее 1, то x должна лежать за пределами отрезка $[2; 4]$. Значит,

Ответ: $1 \leqslant x < 2$; $4 < x \leqslant 5$.

5. *Решить уравнение* $|1-2x| = 3$.

Решение. На расстоянии 3 от числа 1 удалены только две точки — это -2 и 4. Поэтому $2x = -2$ или $2x = 4$. Значит, $x = -1$ или $x = 2$.

Ответ: -1; 2.

6. *Решить уравнение* $|x-3| = |x+7|$.

Решение. Точкой, равноудаленной от точек 3 и -7, может только середина отрезка $[-7; 3]$. Так как длина этого отрезка равна 10, то серединой отрезка является точка $x = -7+5$, т.е. $x = -2$.

Ответ: -2.

7. *Решить уравнение* $|x+2| + |x-3| - |x-4| = 3$.

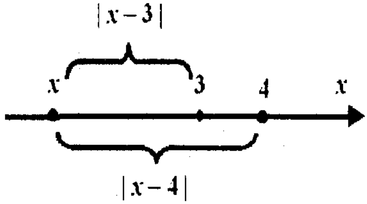


Рис. 3.2.

Решение. Если $x \leqslant 3$, то разность $|x-4|-|x-3|$ равна длине отрезка $[3;4]$ (см. рис. 3.2), т.е. равна 1. Следовательно, на промежутке $(-\infty;3]$ данное уравнение имеет вид $|x+2|-1=3 \Leftrightarrow |x+2|=4$, и корнями его, принадлежащими рассматриваемому промежутку, являются числа -6 и -2. Найдем теперь корни уравнения, лежащие правее точки 3.

Если $x>3$, то $|x+2|>5$ и $|x-3|-|x-4|>|3-3|-|3-4|=-1$ (при $x \geqslant 4$ оцениваемая разность равна 1, так что наименьшее значение она имеет только в той точке x, которая лежит левее 4). Значит,

$$|x+2|+|x-3|-|x-4|>5-1=4>3, \text{ т.е. } |x+2|+|x-3|-|x-4| \neq 3.$$

Следовательно, уравнение не имеет корней, лежащих правее точки 3.

Ответ: -6; -2.

8. *Решить неравенство* $x^2+4x-2|x+2|+1<0$.

Решение. Выделяя полный квадрат суммы, перепишем данное неравенство в виде $(x+2)^2-2|x+2|-3<0$. Замена $t=|x+2|$ дает нам квадратное неравенство $t^2-2t-3<0$, решениями которого являются все t из промежутка $-1<t<3$. Значит, данное в задаче неравенство будет выполняться для тех и только для тех x, которые удовлетворяют неравенствам

$$-1<|x+2|<3.$$

Неравенству $|x+2|>-1$ удовлетворяют все действительные числа, а неравенству $|x+2|<3$ - только все числа интервала $-5<x<1$. Следовательно,

Ответ: $-5<x<1$.

К сожалению, геометрические идеи при решении уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, не всегда очевидны. Поэтому в условиях дефицита времени нельзя игнорировать и традиционные алгебраические методы. Сделаем небольшой их обзор, но перед этим заметим, что традиционное определение 0° модуля можно заменить следующим:

3°	Модуль действительного числа x - это наибольшее из чисел x и $-x$, т.е. $$\lvert x\rvert=\max\{x,-x\}.$$

В самом деле, $\max\{0,0\}=0$, так что $\max\{x,-x\}=|x|$ при $x=0$. Если же $x>0$, то $-x<0$ и, значит, $\max\{x,-x\}=x=|x|$ при

$x > 0$. Наконец, если $x < 0$, то $-x > 0$ и, следовательно, $\max\{x, -x\} = -x = |x|$ при $x < 0$. Таким образом, $\max\{x, -x\} = |x|$ для любого действительного числа x.

Определение 3° делает очевидным многие свойства модуля, такие, например, как равенства $|x| = |-x|$, $|x|^2 = x^2$($|x|^2 = (\max\{x, -x\})^2 = \max\{x^2, (-x)^2\} = x^2$), неравенства $|x| \geqslant 0$, $x \leqslant |x|$, $-x \leqslant |x|$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (последнее неравенство является следствием записанных перед ним:

$$|x+y| = \max\{x+y, -x-y\} = \max\{x+y, (-x)+(-y)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{|x|+|y|, |x|+|y|\} = |x|+|y|)$$

и др. В качестве упражнения на его применение докажите следующие свойства модуля:

4° $\boxed{|x+y| = |x-y| \text{ тогда и только тогда, когда } xy = 0;}$

5° $\boxed{|x+y| = |x|+|y| \text{ в том и только в том случае, если } xy \geqslant 0.}$

Наиболее распространенный метод решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, состоит в том, что числовая прямая разбивается на участки, на каждом из которых знак модуля можно снять с помощью определения 0°.

9. *Решить уравнение* $|2x+1| + |5-3x| + 1 - 4x = 0$.

Решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль при $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{3}$. В соответствии с этим нам нужно рассмотреть три случая: 1) $x < -\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5}{3}$; 3) $x \geqslant \frac{5}{3}$.

Получим три уравнения, в каждом из которых на неизвестное x наложено ограничение.

1) $x < -\frac{1}{2}$. В этом случае $2x+1 < 0$, а $5-3x > 0$. Следовательно, $|2x+1| = -2x-1$ и $|5-3x| = 5-3x$. Значит, уравнение имеет вид:

$$-2x - 1 + 5 - 3x + 1 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5/9.$$

Так как $\frac{5}{9}$ не удовлетворяет условию $x < -\frac{1}{2}$, то на промежутке $x < -\frac{1}{2}$ данное уравнение решений не имеет.

2) $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5}{3}$. В этом случае уравнение имеет вид:

$$2x + 1 + 5 - 3x + 1 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7/5.$$

Число $\frac{7}{5}$ принадлежит рассматриваемому промежутку $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5}{3}$ и, следовательно, является корнем данного уравнения.

3) $x \geqslant \frac{5}{3}$. На этом участке числовой прямой уравнение имеет вид:

$$2x + 1 - 5 + 3x + 1 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Число 3 принадлежит рассматриваемому промежутку и, значит, является корнем данного уравнения.

Ответ: $\frac{7}{5}$; 3.

При решении уравнений можно действовать и иначе, исходя из того, что равенство $|a| = b$ означает, что $b \geqslant 0$ и $a = \pm b$.

10. *Решить уравнение* $|3x^2 + 5x - 4| = 2x - 1$.

Решение. Данному уравнению соответствуют два:

$$3x^2 + 5x - 4 = 2x - 1 \quad \text{и} \quad 3x^2 + 5x - 4 = -2x + 1.$$

Среди корней этих уравнений следует отобрать те, которые удовлетворяют условию $x \geqslant \frac{1}{2}$. Первое имеет корни $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; подходит только первый корень. Корни второго уравнения — $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$, $\frac{-7-\sqrt{109}}{6}$. Вновь остается только первый корень.

Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-7+\sqrt{109}}{6}$.

Второй подход в применении к неравенствам состоит в следующем. Неравенство $|a| \leqslant b$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} a \leqslant b, \\ a \geqslant -b, \end{cases}$$

а неравенство $|a| \geqslant b$ равносильно объединению неравенств

$$\left[\begin{array}{lcl} a & \geqslant & b, \\ a & \leqslant & -b. \end{array}\right.$$

(В системе должны выполняться оба неравенства. Соответствует союзу "и". Объединение неравенств означает, что должно выполняться хотя бы одно из неравенств. Соответствует союзу "или".) В случае, если решается строгое неравенство, все неравенства в системе и в совокупности заменяются на строгие.

11. *Решить неравенство* $||x^3 + x - 3| - 5| \leqslant x^3 - x + 8$.

Решение. Это неравенство не так просто решить стандартным методом. В то время как переходя к системе и т.д., мы решим его без особого труда.

$$\begin{cases} |x^3 + x - 3| - 5 \leqslant x^3 - x + 8, \\ |x^3 + x - 3| - 5 \geqslant -x^3 + x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + x - 3| \leqslant x^3 - x + 13, \\ |x^3 + x - 3| \geqslant -x^3 + x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x^3+x-3 \leqslant x^3-x+13, \\ x^3+x-3 \geqslant -x^3+x-13, \end{cases} \\ \\ \left[\begin{array}{lcl} x^3+x-3 & \geqslant & -x^3+x-3, \\ x^3+x-3 & \leqslant & x^3-x+3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 8, \\ x^3 \geqslant -5, \end{cases} \\ \\ \left[\begin{array}{lcl} x^3 & \geqslant & 0, \\ x & \leqslant & 3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{5} \leqslant x \leqslant 8, \\ x\text{— любое} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{5} \leqslant x \leqslant 8.$$

Ответ: $-\sqrt[3]{5} \leqslant x \leqslant 8$.

При решении уравнений можно вовсе не решать неравенства, а, рассмотрев весь набор уравнений, который может получиться при раскрытии знака модуля и среди решений которых содержатся все решения исходного уравнения, решить их и отобрать (например, с помощью проверки) корни, удовлетворяющие исходному уравнению.

12. *Решить уравнение* $||\sqrt{x+1}-x^3|-3| = x^3+\sqrt{x+1}-7$.

Решение. Все корни данного уравнения находятся среди корней следующих двух:

$$|\sqrt{x+1}-x^3|-3 = x^3+\sqrt{x+1}-7, \quad |\sqrt{x+1}-x^3|-3 = -x^3-\sqrt{x+1}+7.$$

Переписав эти уравнения в виде

$$|\sqrt{x+1}-x^3| = x^3+\sqrt{x+1}-4, \quad |\sqrt{x+1}-x^3| = -x^3-\sqrt{x+1}+10,$$

и, в свою очередь, разложив каждое из них на два уравнения, получим в итоге четыре уравнения

$$\sqrt{x+1} = 2, \quad x^3 = 2, \quad x^3 = 5, \quad \sqrt{x+1} = 5,$$

среди корней которых находятся все корни исходного уравнения. Имеем четыре корня: $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$, $x_3 = \sqrt[3]{5}$, $x_4 = 24$.

Первый корень проверяется легко. Он удовлетворяет уравнению.

Второй и третий корни не подходят, так как правая часть исходного уравнения отрицательна при $x = x_2$ и $x = x_3$ ($\sqrt{x+1} < \sqrt{2+1} < 2$, поскольку x_2 и x_3 меньше 2).

Четвертый корень также является лишним, поскольку он должен удовлетворять уравнению $|\sqrt{x+1}-x^3| = -x^3-\sqrt{x+1}+10$, а правая часть его при $x = 24$ отрицательна.

Ответ: 3.

Наконец, следует помнить, что "истина лежит посередине", и хорошенько усвоить все описанные методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, поскольку выделить один какой-нибудь, универсальный, невозможно – его просто нет.

При решении задач с параметром в дополнение к перечисленным надо иметь в виду и графический метод, т.е. такой путь решения задачи, который сводит ее к изучению свойств графиков некоторых функций.

13. *Решить уравнение* $|x^2+3x-2| = x^2+x+1+|2x-3|$.

Решение. Так как $x^2+x+1>0$ (почему?), то заданное уравнение можно переписать в виде

$$|(x^2+x+1)+(2x-3)| = |x^2+x+1|+|2x-3|.$$

Согласно свойству модуля 5°, последнее равенство равносильно неравенству

$$(x^2+x+1)(2x-3) \geqslant 0,$$

которое выполняется только при $2x-3 \geqslant 0$, т.е. при $x \geqslant \frac{3}{2}$. Таким образом,

Ответ: $x \geqslant \frac{3}{2}$.

14. *Решить уравнение*

$$\left|-\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} + \frac{1}{4}\right| = \left|\cos^2 2x + 3\sqrt{-\cos 2x} - \frac{1}{4}\right|.$$

Решение. Переписав данное уравнение в виде

$$\left|3\sqrt{-\cos 2x} - \left(\cos^2 2x - \frac{1}{4}\right)\right| = \left|3\sqrt{-\cos 2x} + \cos^2 2x - \frac{1}{4}\right|$$

и воспользовавшись свойством модуля 4°, заключаем, что оно равносильно уравнению

$$3\sqrt{-\cos 2x}\cdot\left(\cos^2 2x - \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{-\cos 2x} = 0.$$

Из неотрицательности подкоренного выражения $-\cos 2x$ следует, что корни полученного уравнения не могут обращать в ноль разность $\cos 2x - \frac{1}{2}$. Значит, последнее уравнение равносильно следующему:

$$\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{-\cos 2x} = 0,$$

и нам остается только определить, при каких x обращаются в ноль сомножители его левой части.

$$\cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z};\quad \sqrt{-\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm \ldots$.

15. *Найти все a, при которых уравнение*

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = a$$

имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку $[2; 17]$.

Решение. Так как

$$x+3-4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 2\right)^2 \quad \text{и} \quad x+8-6\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 3\right)^2,$$

то уравнение можно переписать в виде $|t-2|+|t-3| = a$, где $t = \sqrt{x-1}$. Из возрастания функции $y = \sqrt{x-1}$ следует, что x принадлежит отрезку $[2; 17]$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{x-1} = t$ принадлежит отрезку $[1; 4]$. Значит, решаемую задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения a, при которых уравнение $|t-2|+|t-3| = a$ имеет хотя бы один корень, причем все решения его принадлежат отрезку $[1; 4]$.

Сумма расстояний от точки t до точек 2 и 3 равна 1, если t лежит на отрезке $[2; 3]$, и больше 1, если t лежит вне его. Значит, для разрешимости уравнения $|t-2| + |t-3| = a$ необходимо, чтобы a удовлетворяло неравенству $a \geqslant 1$.

При $a = 1$ исследуемое уравнение имеет решения — все его корни составляют отрезок $[2; 3]$, который содержится в отрезке $[1; 4]$.

При $a > 1$ уравнение также разрешимо и имеет два корня: $\frac{5-a}{2}$ (< 2) и $\frac{5+a}{2}$ (> 3). Эти корни принадлежат отрезку $[1; 4]$ в том и только в том случае, если

$$\begin{cases} 1 \leqslant \frac{5-a}{2}, \\ \frac{5+a}{2} \leqslant 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant 3.$$

Таким образом,

Ответ: $1 \leqslant a \leqslant 3$.

Заметим, что в исследовании разрешимости уравнения $|t-2|+|t-3|=a$ последней задачи можно было применить и графический метод. Так как

$$|x-2|+|x-3| = \begin{cases} -2x+5, & \text{если } x<2, \\ 1, & \text{если } 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 2x-5, & \text{если } x>3, \end{cases}$$

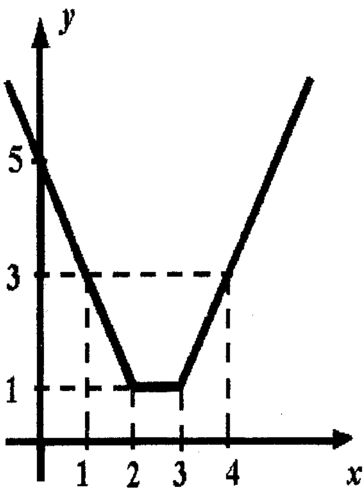


Рис. 3.3.

то совсем несложно построить график функции $y=|x-2|+|x-3|$ (см. рис. 3.3). Уравнение $|x-2|+|x-3|=a$ разрешимо в том и только в том случае, если пересекаются графики функций $y=|x-2|+|x-3|$ и $y=a$ (графиком последней служит прямая, проходящая через точку $(0;a)$ параллельно оси Ox), а решениями его являются абсциссы точек пересечения указанных графиков. Теперь становится очевидным ответ в задаче 15: графики функций $y=|x-2|+|x-3|$ и $y=a$ пересекаются, причем абсциссы точек пересечения их принадлежат отрезку $[1;4]$ тогда и только тогда, когда $1\leqslant a\leqslant 3$.

Проиллюстрируем применение графического метода решением других задач.

16. *При каких значениях a на отрезке* $[-3,5;\ 3,5]$ *лежит ровно один корень уравнения* $|x-2|+|x-3|=a$?

Решение. Множество значений, которые принимает функция $y=|x-2|+|x-3|$ на отрезке $[-3,5;\ 3,5]$ составляет отрезок $[1;\ 12]$. Значит, уравнение $|x-2|+|x-3|=a$ будет иметь решения, принадлежащие отрезку $[-3,5;\ 3,5]$ в том и только в том случае, если $1\leqslant a\leqslant 12$. Если

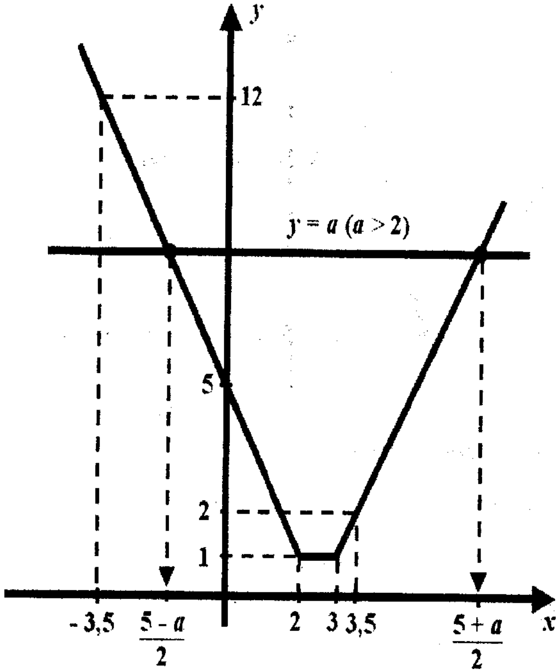


Рис. 3.4.

$1 \leqslant a \leqslant 2$, то графики функций $y = |x-2| + |x-3|$ и $y = a$ пересекаются не менее чем в двух точках, абсциссы которых принадлежат заданному отрезку $[-3,5; 3,5]$. Если же $2 < a \leqslant 12$, то графики указанных функций попрежнему пересекаются в двух точках, но только левая из них имеет абсциссу, принадлежащую отрезку $[-3,5; 3,5]$.

Ответ: $2 < a \leqslant 12$.

17. *При каждом значении a определить число корней уравнения*

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

Решение. Из равенства $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ следует, что $y^2 = 2|x| - x^2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 + y^2 = 1$. Значит, графиком функции $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ является линия, состоящая из двух верхних полуокружностей $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$ (см. рис. 3.5). Теперь становится очевидным следующий ответ.

Ответ: 0, если $a < 0$ или $a > 1$; 3, если $a = 0$; 4, если $0 < a < 1$; 2, если $a = 1$.

18. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$|x+1| + |x-2| + a - 4 > 0$$

выполняется при всех $x > 3$?

Решение. Найдем на координатной плоскости xOa множество D всех точек, координаты x, a которых удовлетворяют неравенству $|x+1| + |x-2| + a - 4 > 0$. Для этого изобразим на плоскости xOa точки $(x; a)$,

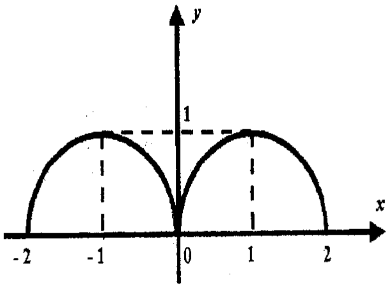


Рис. 3.5.

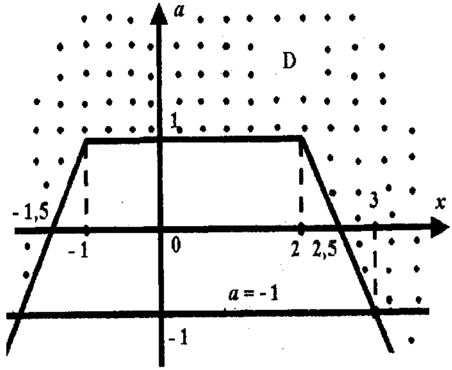


Рис. 3.6.

координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|x+1|+|x-2|+a-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-|x+1|-|x-2|+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\begin{cases} 2x+3, & \text{если } x<-1, \\ 1, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2x+5, & \text{если } x>2. \end{cases}$$

Они составляют график Г функции $a=-|x+1|-|x-2|+4$. Точки $(x;a)$, в которых выражение $z=|x+1|+|x-2|+a-4$ положительно, не лежат на графике Г. Однако, если точка $(x;a)$ не принадлежит Г, то отсюда еще не следует, что $z>0$.

Пусть $(x_0;a_0)$— произвольная точка плоскости xOa, не лежащая на Г. Сопоставим ей ту точку графика Г, первая координата которой равна x_0; это будет точка $(x_0;-|x_0+1|-|x_0-2|+4)$. Обозначим через c разность $a_0-(-|x_0+1|-|x_0-2|+4)$ вторых координат исходной точки $(x_0;a_0)$ и отвечающей ей точки графика Г. Тогда $c=|x_0+1|+|x_0-2|+a_0-4$, т.е. число является значением выражения z при $x=x_0$ и $a=a_0$. Значит, если $c>0$, т.е. если точка $(x_0;a_0)$ лежит выше отвечающей ей точки графика Г, то выражение z при $x=x_0$ и $a=a_0$ положительно; в случае же, если точка $(x_0;a_0)$ лежит ниже соответствующей ей точки графика Г, выражение z при $x=x_0$ и $a=a_0$ принимает отрицательное значение.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: неравенство

$$|x+1|+|x-2|+a-4>0$$

выполняется в том и только в том случае, когда точка $(x;a)$ плоскости xOa располагается выше отвечающей ей точке графика Г. Значит, множество D представляет собой ту часть плоскости xOa, которая располагается над графиком функции $a = -|x+1| - |x-2| + 4$ (см. рис. 3.6, где множество D заштриховано).

При конкретном значении параметра $a = a_0$ решением неравенства из условия задачи являются абсциссы тех точек горизонтальной прямой $a = a_0$, которые находятся в части D плоскости xOa. Заданный в условии задачи промежуток $(3; +\infty)$ целиком попадает в множество указанных абсцисс только при $a_0 \geqslant -1$ (см. рис. 3.6). Следовательно,

Ответ: $a \geqslant -1$.

19. *Найти все значения a, при которых неравенство*

$$3 - |x-a| > x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. На плоскости xOa найдем множество D точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $3 - |x-a| > x^2$. Так как последнее неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} x - a < 3 - x^2, \\ x - a > -3 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}, \\ a < -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}, \end{cases}$$

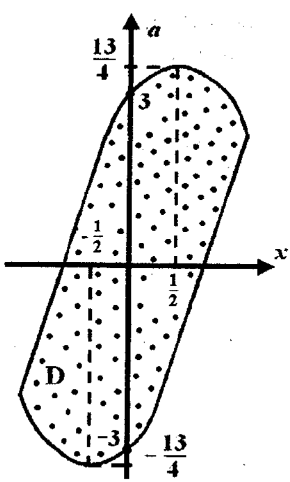


Рис. 3.7.

то заключаем, что указанное множество D состоит из тех точек $(x; a)$, которые лежат выше точек $\left(x; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right)$ параболы $a = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$, но ниже точек $\left(x; -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}\right)$ параболы $a = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ (см. рис. 3.7, где множество D заштриховано).

При конкретном значении $a = a_0$ решением неравенства $3 - |x-a| > x^2$ являются абсциссы тех точек горизонтальной прямой $a = a_0$, которые лежат в части D плоскости xOa. Среди указанных абсцисс отрицательное число имеется в том и только в том случае, если прямая $a = a_0$ лежит не ниже вершины $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{13}{4}\right)$ параболы $a = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$, но ниже точки $(0; 3)$ пересечения параболы $a = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ с осью Oa, т.е. в случае, если, $-\frac{13}{4} \leqslant a < 3$.

Ответ: $-\frac{13}{4} \leqslant a < 3$.

20. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$x^2 + x + |x - a| + \frac{2}{9} \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Указанное в условии задачи неравенство имеет хотя бы одно решение в том и только в том случае, если неположительным является наименьшее значение функции $y = x^2 + x + |x - a| + \frac{2}{9}$. Последняя совпадает с квадратичной функцией $y = x^2+a+\frac{2}{9}$ на промежутке $(-\infty; a]$ и с функцией $y = x^2+2x-a+\frac{2}{9} = (x+1)^2-a-\frac{7}{9}$ на промежутке $[a; +\infty)$. Значит, наименьшее значение она достигает при таком значении x, которое является либо точкой "излома" a, либо абсциссой вершины одной из парабол $y = x^2 + a + \frac{2}{9}$, $y = (x + 1)^2 - a - \frac{7}{9}$, т.е. 0 или -1. При перечисленных значениях (a, 0 и -1) функция $y = x^2 + x + |x - a| + \frac{2}{9}$ принимает значения: $a^2+a+\frac{2}{9}$, $|a|+\frac{2}{9}$ и $|1+a|+\frac{2}{9}$. Таким образом, для того, чтобы наименьшее значение ее было неположительным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств:

$$a^2 + a + \frac{2}{9} \leqslant 0, \quad |a| + \frac{2}{9} \leqslant 0, \quad |1 + a| + \frac{2}{9} \leqslant 0.$$

Второе и третье из указанных неравенств решений не имеют, а решением первого является промежуток $-\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant -\frac{1}{3}$. Следовательно,

Ответ: $-\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant -\frac{1}{3}$.

Предлагаем в качестве упражнения на закрепление изложенного материала решить самостоятельно следующие задачи.

Решить уравнение или неравенство (1 — 32).

1. $|x - 3| = -1$. **2.** $|x + 4| = 4$. **3.** $|2 - x| \leqslant 3$.

4. $|1 + x| \geqslant 1$. **5.** $|2x - 3| = 1$. **6.** $1 < |2x - 3| < 3$.

7. $|5 - 3x| = 2x + 1$. **8.** $|2x - 3| = 3 - 2x$. **9.** $|1 - |1 - |1 - x||| = 2$.

10. $|5x^2 - 2| = 3$. **11.** $\log_2(|x - 1| - 1)^{-1} = 1$.

12. $|2x - 15| + |2x + 7| = 22$.

13. $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$. **14.** $3x + |2 - x| \leqslant 5$.

15. $|2x + 5| < 7 - x$. **16.** $-1 < |x^2 - 9| = 27$.

17. $\sqrt{|x + 1| - 1} > \sqrt{|x + 1| - 97}$. **18.** $\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2$.

19. $\left(4|x - 1| + \frac{1}{2}\right)^2 = 11(x - 1)^2 + \frac{5}{4}$. **20.** $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.

21. $2|x - 4| + |3x + 5| \geqslant 16$. **22.** $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$.

23. $2|x^2+2x-5| = x-1$. **24.** $||2x^2-x|-3| \leqslant 2x^2+x+5$.

25. $||x^3-x-1|-5| \geqslant x^3+x-8$. **26.** $||x^3-\sqrt{x+1}|-3| = x^3+\sqrt{x+1}-7$.

27. $||x^3-3x|-x+1| = 2x^2+x-1$. **28.** $||x^3+x^2-1|-4| = x^3-x^2+3$.

29. $|x-1|+|x+2| \leqslant 3$. **30.** $|2x+1|+|3x+2| \leqslant 5x+3$.

31. $\left|2-\frac{1}{x-4}\right| < 3$. **32.** $\frac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leqslant 0$.

В задачах 33 — 35 следует установить, сколько корней в зависимости от a имеет указанное уравнение.

33. $ax^2+|x-1| = 0$. **34.** $x^2+a|x-2| = 0$. **35.** $x^2+2|x-5| = 0$.

В следующих задачах (36 — 43) требуется найти все значения параметра a, при которых выполняется указанное в задаче свойство.

36. Уравнение $|x^2-1| = 2x-x^2+a$ имеет единственное решение.

37. Уравнение $2|x-a|+a-4+x = 0$ имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку $[0;4]$.

38. Неравенство $x^2+2|x-a| \geqslant a^2$ выполняется для всех x.

39. Уравнение $|x^2-1|+|x^2-x-2| = x^2+3x+a$ имеет ровно три различных корня.

40. Неравенство $x^2-3x+3|x+a|+a \geqslant 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

41. Уравнение $(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)x+a = 5$ имеет два различных положительных корня.

42. Неравенство $x^2-|x-a|-|x-1|+3 \geqslant 0$ выполняется для всех x.

43. Неравенство $2-3|x-a|-|x^2+x-2| > 0$ имеет хотя бы одно решение.

3.4 ПАРАДОКС ПЕРРОНА ИЛИ О ТОМ, НУЖНА ЛИ ПРОВЕРКА В ТЕКСТОВОЙ ЗАДАЧЕ

Текстовые задачи (или, как принято говорить у школьников, задачи на "пусть") занимают особое место в школьной математике, ведь именно с их помощью формируется опыт исследования вполне реальных (или близких к ним) жизненных ситуаций средствами математики, как правило, уравнениями, неравенствами или их системами. Включение их в число задач вступительного экзамена нередко как раз и имеет своей целью проверку способности абитуриента составлять математическую модель ситуации, описываемой в условии задачи, а также его способность критически осмысливать итоги исследования построенной модели. На последний момент абитуриентам обязательно следует обратить внимание и делать проверку получающегося в задаче ответа. В необходимости проверки можно убедиться на примере следующих рассуждений, принадлежащих немецкому математику Оскару Перрону и называющимися в его честь **парадоксом Перрона**.

Пусть x — наибольшее натуральное число. Так как число x — наибольшее, то оно не меньше натурального числа x^2, т.е. $x \geqslant x^2$. С другой стороны, так как $x \geqslant 1$, то $x^2 = x \cdot x \geqslant 1 \cdot x = x$, т.е. $x^2 \geqslant x$. Значит, $x^2 = x$. Решив полученное уравнение, найдем, что $x = 0$ или $x = 1$. Но 0 не является натуральным числом и, значит, $x = 1$. Таким образом, наибольшее натуральное число равно 1.

Обратим внимание, в рассуждениях Перрона воспроизводится обычная схема решения текстовой задачи: вводится обозначение для искомой величины и составляется уравнение для ее нахождения, решением уравнения определяются его корни и отбрасывается тот из них, который не подходит по смыслу задачи. Не так ли и мы поступаем, когда в решениях задач отбрасываем отрицательные значения скоростей и расстояний, нецелые количества людей или предметов и оставляем для ответа единственное "разумное" значение искомой величины? В чем же состоит ошибочность этих рассуждений? Ошибка — в логике заключения (ответа): мы ведь знаем, что необходимое условие не обязано быть достаточным, а в рассуждениях Перрона установлена только необходимость равенства $x = 1$ (для справедливости утверждения о том, что x является наибольшим натуральным числом); достаточным оно не является, что и показывает элементарная проверка.

Таким образом, если в текстовой задаче ответ получен по остаточному принципу, т.е. отбрасыванием лишнего, то решение задачи остается логически незавершенным — необходимо еще доказать (или показать), что оставленное значение искомой величины на самом деле удовлетворяет условию задачи.

3.5 РЕШЕНИЕ ЭТИХ ЗАДАЧ ПОМОЖЕТ ГЛУБЖЕ ПОНЯТЬ МАТЕМАТИКУ

Задачи, предлагаемые в настоящем пункте, имеют в основном теоретический характер в том смысле, что решение каждой из них основа-но, как правило, на одной какой-то (не всегда очевидной!) теоретической идее и может быть проведено в две-три строчки, если не меньше. Цель этих задач — вскрыть "тайный" смысл отдельных вопросов программы вступительного экзамена по математике и обратить внимание абитуриента на тесную взаимосвязь различных ее разделов. Советуем не упускать из виду определения и соображения, приводимые в текстах отдельных задач, они сообщаются, конечно же, не только для прояснения требований задачи.

1. Если два натуральных числа a и b связаны соотношением $a = k \cdot b$, где k — некоторое натуральное число, то число $b(a)$ называется делителем (кратным) числа $a(b)$; в этом случае говорят также, что число a делится на b или, что число a делится на b без остатка. Докажите следующие утверждения.

1.1. Если каждое из двух натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то на c делятся **целые** числа $a + b$, $a - b$ и $ka + nb$, где k и n — произвольные целые числа.

1.2. Если целое число $a + 1$ делится на 3, то на 3 делится и число $4 + 7a$.

1.3. Если на 11 делятся целые числа $2 + a$ и $35 - b$, то число $a + b$ также делится на 11.

2. Найти НОД(a, b) и НОК(a, b), если $a = 252$, а $b = 528$.

3. Доказать, что для любых натуральных чисел a и b выполняется равенство

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab.$$

Вывод: для нахождения НОК(a, b) достаточно знать произведение ab и НОД(a, b).

4. Используя разложения натуральных чисел на простые множители, объясните неверность утверждения: если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24. Верно ли, что если натуральное число делится на 15 и на 4, то оно делится на 60?

5. Делится ли число 131722003356 на 3; на 4; на 9? Перечислите все цифры, приписывание которых справа к указанному двенадцатизначному числу дает в результате тринадцатизначное число, делящееся на 3; на 4; на 5; на 9; на 10.

6. Запишите в виде равенства каждое из следующих утверждений.

6.1. Число 4 является разностью чисел 6 и 2.

6.2. Суммой чисел 5 и -7 является число -2.

6.3. Число 3 является частным от деления 12 на 4.

6.4. Число 15 делится на 3.

6.5. Деление 16 на 3 дает 5 и остаток 1.

6.6. Остаток от деления 17 на 6 равен 5.

6.7. Натуральное число 4 делится на 3 без остатка.

Какие из перечисленных утверждений являются верными, а какие — нет?

7. Пусть b — некоторое натуральное число. Отметим на числовой прямой все числа $k \cdot b$, кратные b ($k \in \mathbf{Z}$). Если теперь a — произвольное **целое** число, то оно либо совпадает с одним из отмеченных чисел, либо принадлежит некоторому интервалу $(bq;\ b(q+1))$. Значит, для произвольного целого числа a найдутся, притом единственные, такие целые числа q и r, $0 \leqslant r \leqslant b$, что $a = bq + r$. Число q называется частным, а число r — остатком от деления числа a на число b с остатком.

7.1. В чем состоит геометрический смысл остатка r (от деления a на b)?

7.2. Найдите остатки от деления на 4 следующих чисел: 16, 15, 17, -16, -15, -17. Проверьте полученные ответы с помощью изображения чисел на числовой прямой.

7.3. Какие значения может принимать остаток r при делении на 2 произвольного целого числа a? Может ли указанный остаток принимать значение -1; 3?

7.4. Перечислите все возможные значения остатка от деления произвольного целого числа a на 3.

7.5. Запишите в виде равенства утверждение: остаток от деления целого числа a на 3 равен 2.

7.6. Остаток от деления на 3 целого числа a равен 1. Чему равен остаток от деления на 3 числа $a + 1$?

7.7. Чему равен остаток от деления на 3 целого числа $a+1$, если a при делении на 3 дает остаток 2?

8. Доказать, что из трех последовательных целых чисел одно делится на 3.

9. Доказать, что произведение пяти последовательных чисел делится на 120.

10. Доказать следующие утверждения.

10.1. Если разность $a - b$ двух целых чисел a и b делится на натуральное число c, то равны остатки от деления чисел a и b на c. Верно ли обратное утверждение?

10.2. При делении на 3 суммы двух любых целых чисел и суммы их остатков от деления на 3 получается один и тот же остаток.

10.3. Произведение любых двух целых чисел и произведение их остатков от деления на 3 имеют равные остатки при делении на 3.

10.4. В утверждениях 10.2 и 10.3 число 3 можно заменить на любое другое натуральное число.

11. Найти остатки от деления на 7 чисел $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 2002^3$ и $222^{555} - 555^{222}$.

12. Найти натуральные решения следующих уравнений.

12.1. $(x-y)(x+y) = 31$. **12.2.** $x^2 - y^2 = 303$.
12.3. $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

13. Является ли число 2 корнем уравнения $x^{40} - 17 \cdot x^{36} + 2003 \cdot x^{20} - 5 = 0$?

14. Доказательство следующих двух простых утверждений позволит Вам открыть алгоритм нахождения НОД(a,b), известный еще Евклиду:

$$\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(b, a-b).$$

14.1. Любой общий делитель натуральных чисел a и b $(a > b)$ делит число $a - b$.

14.2. Любой общий делитель натуральных чисел b и $a - b$ является делителем числа a.

Посмотрите, как "работает" алгоритм Евклида на практике:

$$\text{а) НОД}(451,287) = \text{НОД}(287, 451-287) = \text{НОД}(287,164) =$$

$$= \text{НОД}(164,123) = \text{НОД}(123,41) = \text{НОД}(41,82) = \text{НОД}(41,41) = 41;$$

$$\text{б) НОД}(2n+13, n+7) = \text{НОД}(n+7, n+6) = \text{НОД}(n+6, 1) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ дробь $\frac{2n+13}{n+7}$ при всех $n \in \mathbf{N}$ несократима.

14.3. С помощью алгоритма Евклида и утверждения задачи 3 решите задачу 2.

14.4. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{Z}$ дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

14.5. Установите, является ли следующая дробь сократимой, если является, то сократите ее:

а) $\frac{19043}{20413}$; б) $\frac{11377}{18087}$; в) $\frac{116690151}{427863887}$.

15. Равенства типа $25 = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$, $374 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ и др. очевидны почти каждому. Однако далеко не каждый абитуриент пользуется аналогичным равенством в том случае, если в задаче используется $(n+1)$-значное натуральное число с "незаданными" значащими цифрами:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(черта сверху над $(n+1)$-значным числом $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ поставлена для того, чтобы отличать его от произведения чисел a_n, a_{n-1}, $\dots$, a_1 и a_0). Например, $\overline{xy} = 10x + y$; $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ и т.д.

15.1. Объясните, почему делимость числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ на 2, на 5 и на 10 зависит только от цифры a_0.

15.2. Доказать, что разность натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

15.3. Доказать, что двузначное число $\overline{ab}$ делится на 4 в том и только в том случае, если на 4 делится число $2a + b$.

15.4. Получите с помощью утверждения задачи 15.3 и обычного признака делимости на 4 новый признак делимости натурального числа на 4. Установите с его помощью, какие из чисел 318, 572, 156, 1014 делятся на 4, а какие нет.

16. По определению, конечная десятичная дробь — это сумма некоторого числа слагаемых, каждое из которых есть произведение цифры на некоторую степень числа 10, среди которых имеется и степень с отрицательным показателем. Например, $200,4 = 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$; $24,17 = 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$; $0,347 = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$. Так как

$$10^{-1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}, \quad \text{и т.д.},$$

то отсюда следует, что конечной десятичной дробью представляется та и только та обыкновенная дробь, которая приводится к обыкновенной дроби, имеющей своим знаменателем некоторую неотрицательную степень числа 10. Выведите отсюда следующее утверждение.

16.1. Обыкновенная несократимая дробь $\frac{p}{q}$ представляется конечной десятичной дробью в том и только в том случае, если $q = 2^k \cdot 5^n$, где k и n — некоторые целые неотрицательные числа.

При практических вычислениях "вручную" полезно не забывать о том, что складывать числа и умножать можно не только "столбиком", но и "в строчку". "В строчку" можно выполнять и деление. Например,

$$0,71 : 0,8 = \frac{0,71}{0,8} = \frac{71}{8} \cdot 10^{-1} = \left(8 + \frac{7}{8}\right) \cdot 10^{-1} =$$

$$= 8 \cdot 10^{-1} + \frac{70}{8} \cdot 10^{-2} = 0,8 + \left(8 + \frac{6}{8}\right) \cdot 10^{-2} =$$

$$= 0,8 + 0,08 + \frac{60}{8} \cdot 10^{-3} = 0,88 + \left(7 + \frac{4}{8}\right) \cdot 10^{-3} =$$

$$= 0,887 + \left(5 + \frac{0}{8}\right) \cdot 10^{-4} = 0,8875.$$

В приведенном примере деление после конечного числа вычислений закончилось, поскольку, выполняя промежуточные деления на 8, мы, в конце концов, приходим к остатку, равному нулю. В общем случае, конечно же, может оказаться, что цепочка промежуточных делений не приводит к нулевому остатку, сколь бы долго ее не продолжать. Пусть именно так происходит при делении на натуральное число q. В этом случае первый промежуточный остаток от деления q повторится, а вслед за ним и остальные, причем не позже, чем через q шагов, так как при делении на q возможно получение только q остатков $(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1)$, а остаток 0 в рассматриваемом случае исключается. Иначе говоря, в рассматриваемом случае процесс деления будет циклическим, т.е., начиная с некоторой цифры, все значащие цифры получающейся в итоге бесконечной десятичной дроби будут повторяться. Обдумайте сказанное и сделайте следующее заключение.

16.2. Каждая обыкновенная дробь представляется либо конечной десятичной, либо бесконечной периодической десятичной дробью.

17. Представить в виде обыкновенных дробей следующие бесконечные периодические десятичные дроби: $17,2(3)$; $0,(34)$; $0,(17)$; $0,(142857)$.

18. Используя идею периодичности бесконечной десятичной дроби, представляющей рациональное число, доказать иррациональность следующих чисел:

$0,\underbrace{10}_{10^1}\underbrace{100}_{10^2}\underbrace{1000}_{10^3}\underbrace{10000}_{10^4}1\ldots$ (выписываются подряд степени числа 10 с последовательными натуральными показателями);

$0,12345\ldots$ (выписываются подряд все натуральные числа).

19. Доказать иррациональность следующих чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\cos 1°$, $\sin 1°$, $\operatorname{tg} 5°$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

20. Доказать, что между двумя различными рациональными числами содержится иррациональное число.

21. При каких a оба числа, $a+\sqrt{3}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{3}$, являются целыми? (**Указание.** Если $a+\sqrt{3}=m$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{3}=n$, где $m,\ n\in\mathbf{Z}$, то $1=a\cdot\frac{1}{a}=mn-3+(m-n)\sqrt{3}\Rightarrow m-n=0$.)

22. Доказать неравенства.

22.1. $2^{300}<3^{200}$. **22.2.** $\sqrt{1002}+\sqrt{1003}>\sqrt{1001}+\sqrt{1004}$.

22.3. $\sqrt{51}>3+\sqrt{17}$. **22.4.** $\sqrt[3]{51}<2+\sqrt[3]{5}$.

22.5. $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}}<2\sqrt[3]{3}$.(**Указание.** Докажите неравенство $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}<2\sqrt[3]{a}$ при $0<x<a$ и воспользуйтесь им, положив $x=\sqrt[3]{2}$ и $a=3$.)

23. Последовательность есть функция натурального аргумента, т.е. функция, областью определения которой является множество натуральных чисел. Обычно член последовательности, отвечающий значению n, записывают как a_n (или b_n, c_n, … и т.п.).

Последовательность может задаваться непосредственно в виде функции от n. Например, $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}$. Кроме того, ее можно задать рекуррентным соотношением, т.е. соотношением, выражающим a_{n+1} через a_n, a_{n-1}, …, с указанием некоторой совокупности начальных значений последовательности: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Именно так, например, в школе определяются арифметическая и геометрическая прогрессии. (Для арифметической прогрессии $a_{n+1}=a_n+d$, для геометрической — $b_{n+1}=b_n\cdot q$. Для обеих, кроме того, указывается первый член прогрессии, a_1 и b_1.)

Типичной задачей для последовательностей, заданных рекуррентно, является задача нахождения формулы, выражающей n-й член как функцию от n.

23.1. Запишите и докажите формулы для n-ого члена арифметической и геометрической прогрессий.

23.2. Определить общий член последовательности, заданной соотношением $a_{n+1}=a_n+n$, если $a_1=0$. (Ответ: $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$.)

Если в формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии с $b_1=1$ и $q=x$,

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1},$$

положить $x=\frac{a}{b}$, то ее можно преобразовать (восстановите выкладки!) к виду

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Заметим, что в последней формуле n может быть как четным, так и нечетным. Если n нечетное, т.е. $n=2k+1$, то заменив в выписанной формуле b на $-b$, получим еще одну полезную формулу (сокращенного умножения):

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-\cdots+a^2b^{2k-2}-ab^{2k-1}+b^{2k}).$$

23.3. Доказать, что при любом натуральном n число $5^{2n}-3^n\cdot 2^{2n}$ делится на 13, а число $2^{2n+1}+5^{4n+2}$ делится на 27.

24. Вычислить указанные суммы.

24.1. $7+77+777+\cdots+\underbrace{77\ldots7}_{n}$. (**Указание.** Воспользуйтесь тем, что

$$\underbrace{77\ldots7}_{n}=7\cdot(\underbrace{11\ldots1}_{n})=\frac{7}{9}\cdot(\underbrace{99\ldots9}_{n})=\frac{7}{9}\cdot(10^n-1).)$$

24.2. $1+2x+3x^2+\cdots+n\cdot x^{n-1}$.

24.3. $nx+(n-1)x^2+\cdots+2x^{n-1}+x^n$.

24.4. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$.

25. Могут ли числа 11, 12 и 13 быть членами (не обязательно последовательными) одной геометрической прогрессии?

26. Могут ли числа 0, 1 и $\log_2 3$ принадлежать одной арифметической прогрессии?

27. Всем известно, что удачные преобразования числовых или алгебраических выражений могут сильно упростить решение задачи. К сожалению, найти такие преобразования на практике бывает совсем не просто. В этой связи обратим внимание на возможность и полезность угадывания результата нужного преобразования.

Пусть, например, требуется разложить на множители выражение A$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. Обращение этого выражения в нуль при $a=b$ говорит о "подобии" его выражению $a-b$. Последнее позволяет сделать предположение о возможности выделения множителя $a-b$ в выражении A. Проверяя эту гипотезу, попытаемся преобразовать выражение A выделением слагаемых, содержащих в явном виде этот множитель. Имеем:

$$\mathrm{A}=\underline{a^2b}-a^2c+b^2c-\underline{b^2a}+c^2(a-b)=ab(a-b)-c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)=$$

$$=(a-b)(ab-c(a+b)+c^2)=(a-b)(ab-ac-bc+c^2).$$

Гипотеза подтвердилась, но "равноправие" переменных a, b, c говорит о том, что в разложении A на множители должны присутствовать также множители $a-c$ и $b-c$. Вычислив произведение $(a-c)(b-c)$, видим, что оно равно $ab-ac-bc+c^2$; значит, A$=(a-b)(a-c)(b-c)$.

Особенно метод "угадывания" полезен при преобразовании выражений вида $\sqrt{a+b\sqrt{N}}$ и $\sqrt[3]{a+b\sqrt{N}}$. (Следует иметь в виду, что если при решении задачи встретилось выражение указанного вида, то необходимо попытаться "извлечь" соответствующий корень. Очень часто это можно сделать.) Чтобы упростить, например, выражение $\sqrt{43+30\sqrt{2}}$, представим его в виде $x+y\sqrt{2}$. При этом x и y должны, конечно же, удовлетворять уравнению $43+30\sqrt{2} = x^2+2y^2+2xy\sqrt{2}$. Поиск целых (рациональных) x и y сводится к решению системы $x^2+2y^2=43$, $xy=15$. В данном случае пара целых чисел x и y легко подбирается: $x=5$, $y=3$(делители 15). Следовательно, $\sqrt{43+30\sqrt{2}} = 5+3\sqrt{2}$. (Заметим, что метод "неопределенных коэффициентов", использованный в описанном примере, разумеется, может применяться и при разложении выражений на множители.)

В качестве тренировки на развитие интуиции и техники вычислений предлагаем решить следующие задачи.

Разложить на множители (27.1-27.6).

27.1. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.
27.2. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
27.3. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.
27.4. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.
27.5. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$. (**Указание.** См. выражение А.)
27.6. $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

Упростить числовое выражение (27.7-27.10).

27.7. $\sqrt{17-2\sqrt{2}}+\sqrt{17+2\sqrt{2}}$. **27.8.** $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

27.9. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

27.10. $\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1)$.

27.11. Проверить справедливость равенства:

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$$

На этом мы вынуждены закончить обсуждение программы да и все пособие в целом. И хотя мы рассмотрели далеко не все вопросы теоретической и практической подготовки к вступительному экзамену по математике, надеемся, что нам удалось показать другое: изучать математику следует обдуманно и серьезно, а при достойном к ней подходе она, в общем-то, выглядит не такой уж недоступной, и временами может быть даже интересной.

Желаем Вам хороших знаний по математике и
отличных оценок на экзаменах!

Глава 4

ОТВЕТЫ

Глава 2. Тест 1. 1. 2); **2.** 2); **3.** 4); **4.** 3); **5.** 1); **6.** 2); **7.** 1); **8.** 2); **9.** 4); **10.** 1); **11.** 3); **12.** 3); **13.** 3); **14.** 4); **15.** 2); **16.** $\sin 0°$, $\cos 50°$, $\cos 0°$, $\operatorname{tg} 55°$; **17.** 65°, 25°; **18.** $(x-4)/(x-6)$ при $x \neq 5$; **19.** $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; **20.** $(11\sqrt{3}/3)$.

Тест 2. 1. 2); **2.** 1); **3.** 2); **4.** 2); **5.** 4); **6.** 2); **7.** 4); **8.** 2); **9.** 2); **10.** 2); **11.** 2); **12.** 3); **13.** 1); **14.** 3); **15.** 4); **16.** $\sin 90°$, $\sin 40°$, $\cos 70°$, $\operatorname{tg} 0°$; **17.** 35°, 55°; **18.** $(a-2)/(a-3)$ при $a \neq 1$; **19.** $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; **20.** 5.

Вариант 1. 1. $\pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 14 час; 10,5 час. **3.** $a^2\sqrt{3}(4\sqrt{3}-1)/32$. **4.** $128\sqrt{2}$. **5.** $[-6, -4] \cup [0, 4]$.

Вариант 2. 1. $[-5, -2-2\sqrt{2}) \cup (-2+2\sqrt{2}, 2) \cup (2, 3]$. **2.** $0, -\operatorname{arctg}(2/3)$. **3.** 18 км. **4.** $6S\sqrt{10}/5$. **5.** $a = b = 0$, $a = b = 2$.

Вариант 3. 1. 37,5%. **2.** (4, 6). **3.** -1. **4.** 18 и 16.

Вариант 4. 1. 0, 3/2, 2. **2.** $(-1)^{n+1} \arcsin(5\sqrt{5}/13) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 73. **4.** $5\pi/18 - \sqrt{3}/3$. **5.** $a = 3, 5$.

Вариант 5. 1. $x \neq \pi/2 + \pi k$, $x \neq \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **2.** $(-\infty; 1-\sqrt{5}) \cup (1-\sqrt{5}; -1) \cup (3; 1+\sqrt{5}) \cup (1+\sqrt{5}; +\infty)$. **3.** 1/2, 1. **4.** 7,5 час. **5.** $\sqrt{(S \operatorname{ctg} \alpha)/2}$.

Вариант 6. 1. $(5/3; +\infty)$. **3.** 10 дней. **4.** 0. **5.** $a^3\sqrt{2\cos\alpha}/(2\sin(\alpha/2))$

Избранные задачи. 1. (21/4, 5/4), (3;-1). **2.** $a \leqslant 0,5$. **3.** $-0,5 \leqslant a < 3 - 2\sqrt{3}$. **4.** При $a \leqslant -\sqrt{3}$ и при $a \geqslant \sqrt{7}$. **5.** 4 час и 6 час. **6.** (1/2, 1/4). **7.** 7.5 мин. **8.** 3/2. **9.** $d^3 \sin(\alpha/2)\sqrt{2\sin((\alpha+4\beta)/2) \cdot \sin((4\beta-\alpha)/2)}/3$. **10.** -7; 9. **14.** $(9, +\infty)$. **15.** 28. **17.** 50.

Задачи устного экзамена. Матем. ф-т. 1. (81, 0). **3.** $-\sqrt{3}/2$. **5.** (80/91, -16/7, 80/37). **6.** $\log_3 10, \log_3 28 - 3$. **7.** Может. **8.** $1 - \sqrt{2}$. **11.** -1; 1; 3; 5. **12.** 3. **13.** Не может. **14.** 30°, 60°, 90°. **15.** (4, 5); (5, 6); (6, 7); (7, 8). **17.** 12 дней и 24 дня. **18.** $\arccos(\operatorname{ctg}^2 \alpha)$. **20.** $(-7/4, -\sqrt{3}) \cup (2; +\infty)$. **21.** Пять. **23.** 12 мин и 18 мин. **25.** 1575 и 1995. **26.** Два. **28.** 8. **32.** 8 дней и 12 дней. **33.** а) может; б) не может. **35.** $\sqrt{5/2}$. **36.** 48/5 ед^2. **37.** 900 машин и 855 машин. **38.** -2. **39.** Нет. **40.** (0, 0). **41.** 11. **42.** 36666. **43.** $(\pi/3 + 2\pi n/3, \pi k)$, $(\pi/3 - 1 + 2\pi n/3, \pi/4 + \pi k)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. **44.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 45. $[-1/2, 5/2]$. **46.** 45 и 35.

Психология. 1. 165/12. **2.** $(-2; 1]$. **4.** $\pi(1+2n)$, $\pm 2\arccos(1/3) + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** (2/3; 5). **6.** $(-2; 2)$. **7.** $-\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** $[4/3; 2]$. **9.** 10 %. **10.** 360°. **11.** 19 км/ч. **12.** 20. **13.** 2. **15.** $(0; 1]$. **16.** $\sqrt[3]{2}$, 8. **17.** $3 + \sqrt{2}$. **18.** Сто.

19. $\pi n/5$, $\pm 3\pi/8 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **20.** 8 см. **21.** $S \sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}/6$. **22.** -2; 2. **23.** Нет решений. **24.** 3. **25.** 125 ед^3. **26.** 25 %. **27.** 30 см. **28.** 1 час. **29.** -2. **30.** 2. **31.** 5. **32.** $1/(xy)$ при $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$.

Глава 3. О модуле. 1. Нет корней. **2.** 0; -8. **3.** $[-1, 5]$. **4.** $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$. **5.** -1; 2. **6.** $(0, 1) \cup (2, 3)$. **7.** $4/5$; 6. **8.** $(-\infty, 2/3]$. **9.** -3; 5. **10.** -1; 1. **11.** $1/2$; $5/2$. **12.** $[-3,5; 7,5]$. **13.** $(-\infty, 2/3]$. **14.** $(-\infty, 3/2]$. **15.** $(-12, 2/3)$. **16.** $(-6, 6)$. **17.** $(-\infty, -96] \cup [98, +\infty)$. **18.** $(3/7, 11/7)$. **19.** $4/5$; $6/5$. **20.** $\pm \arccos((\sqrt{2} - 1)/2) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **21.** $(-\infty, -13/5] \cup [3, +\infty)$. **22.** $-\sqrt{2}$; $1 - \sqrt{5}$. **23.** $3/2$; $(-5 + \sqrt{113})/4$. **24.** $[-4, +\infty)$. **25.** $(-\infty, -\sqrt[3]{6}]$. **26.** 3. **27.** 1; $-(5 + \sqrt{33})/2$. **28.** 0; 1; 2. **29.** $[-2, 1]$. **30.** $[-1/2, +\infty)$. **31.** $(-\infty, 3) \cup (21/5, +\infty)$. **32.** $(-\infty, -4) \cup \{0; 2\} \cup (4, +\infty)$. **33.** Два, если $a < -1/4$; три, если $a = -1/4$; четыре, если $-1/4 < a < 0$; один, если $a = 0$; ноль, если $a > 0$. **34.** Четыре, если $a < -8$; три, если $a = -8$; два, если $-8 < a < 0$; один, если $a = 0$; ноль, если $a > 0$. **35.** Ноль, если $a < -3$ или $a > 3$; один, если $a = -3$ или $a = 3$; два, если $-3 < a < 3$. **36.** -1. **37.** $[4/3, 2]$. **38.** $[-1, 1]$. **39.** 2; $10/3$. **40.** $\{-4\} \cup [-5/2, -9/4]$. **41.** $(5, 7)$. **42.** $[-2, 1]$. **43.** $(-8/3, -1) \cup (0, 5/3)$.

Оглавление

Учебное издание

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ В БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.С.ПУШКИНА

Пособие

Ответственный за выпуск **С.К.Гребельная**

Подписано в печать 4.04.2002. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать плоская. Усл. печ. л. 5,3. Уч.-изд. л. 5,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 151.
Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина».
224665, Брест, Советская, 8.
Лицензия ЛВ № 307 от 1.07.98.
Лицензия ЛП № 260 от 30.04.98.

ISBN 985-6547-81-4

9 789856 547815