

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:

Г.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан

Міжнародны савет

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Україна)

В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матэсік

(адказны рэдактар)

У.В. Амелікін

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

У.А. Плецюхоў

А.Ф. Равінскі

Я.В. Радыно

В.М. Рэдзькоў

В.Ф. Саўчук

У.С. Секержыцкі

М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 23-34-29

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2014

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 21 ад 01.02.2012 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
G.M. Sender
Deputy Editor-in-chief:
S.A. Marzan

International Board:
V.A. Glavan (Moldova)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.M. Red'kov
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2014

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus № 21 from February 01, 2012, the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Богдан А.В., Зазерин А.И., Орлов А.Т., Пашкевич Г.А., Ульянова В.А. Анализ параметров сенсора на поверхностных акустических волнах с наностержнями ZnO	5
Липо В.А., Овчинников Е.В., Секержицкий С.С., Сорокин В.Г., Струк В.А. Наночастицы как модификаторы композиционных материалов.....	13
Макоед И.И. Корреляции диэлектрических и магнитных свойств магнетита	22
Секержицкий В.С., Климович В.В., Саванчук Е.А. К вопросу об уравнении состояния холодного нерелятивистского электронно-протонного вещества в сверхсильном магнитном поле.....	29
Серый А.И. О системе самосогласованных уравнений для амплитуд нуклон-нуклонного рассеяния	33
Фикс А.И., Левчук М.И., Львов А.И. Определение полного сечения фотопоглощения на нейтроне из протонных и дейтронных данных в области энергий от 700 до 1500 МэВ. I. Ферми-размазка и неаддитивные поправки	39

МАТЭМАТЫКА

Зубей Е.В., Юдов А.А. О свойствах редуцированных пространств, порожденных группой движений пространства 1R_4 с однопараметрическими группами стационарности.....	48
Козинский А.А., Басин В.И. Обработка событий в системе дистанционного образования Brain Education.....	53
Мадорский В.М. О синтезе оптимального управления периодическими задачами с квадратичным критерием качества.....	60
Матысик О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве метода итераций неявного типа решения линейных операторных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации	67
Пантелеева Е.В. Спектральные свойства операторов взвешенного сдвига, порождённых отображениями типа Морса–Смейла в пространствах вектор-функций	75
Поддубный А.М. Теоремы типа Харди–Литтлвуда.....	82
Савчук В.Ф. О градиентном методе с переменным шагом решения некорректных задач	88
Трофимук А.А., Лукьяненко В.О. Конечные группы, у которых нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга ≤ 2	95
Звесткі аб аўтарах	99

INDEX

PHYSICS

Bogdan O., Zazerin A., Orlov A., Pashkevich G., Ulianova V. Analysis of Surface Acoustic Wave Sensor with ZnO Nanorods Parameters	5
Liopo V.A., Auchynnikaou Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sarokin V.G., Struk V.A. Nanoparticles as a Modifier Composite Materials	13
Makoed I.I. Correlation of Dielectric and Magnetic Properties of Magnetite	22
Sekerzhitsky V.S., Klimovich V.V., Savanchuk E.A. For Question of States Equation of Cold Nonrelativistic Electron-Proton Matter in Superstrong Magnetic Field.....	29
Sery A.I. On System of Self-Consistent Equations for Nucleon-Nucleon Scattering Amplitudes.....	33
Fix A.I., Levchuk M.I., L'vov A.I. Extraction of the Total Photoabsorption Cross Section on the Neutron from the Proton and Deuteron Data at Energies Between 700 and 1500 MeV I. Fermi-Smearing and Nonadditive Corrections	39

MATHEMATICS

Zubej E.V., Judov A.A. About the Properties of Reductive Spaces Generated by the Group of Motions of Space 1R_4 with One-Parameter Groups of Stationarity	48
Kazinski A., Basin V. Event Processing in the Brain Education Distance Learning System	53
Madorski V.M. On the Synthesis of Optimal Control Periodic Problem with Quadratic Performance	60
Matysik O.V. The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Type Iteration Method for Solving Linear Operator Equations with A posteriori Choice of Regularization Parameter	67
Panteleeva E.V. Spectral Properties of Weighted Shift Operators Generated by a Morse-Type Display Smail in Spaces of Vector-Valued Functions	75
Piddubny O.M. Hardy–Littlewood Type Theorems.....	82
Savchuk V.F. On the Gradient Method with Variable Step Solving Ill-posed Problems.....	88
Trofimuk A.A., Lukyanenko V.O. On Finite Groups Whose Normal Rank of Sylow Subgroups of the Fitting Subgroup is at Most 2.....	95
Information about the authors	99

УДК 539.23, 538.911

*А.В. Богдан, А.И. Зазерин, А.Т. Орлов,
Г.А. Пашкевич, В.А. Ульянова*

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ СЕНСОРА НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ С НАНОСТЕРЖНЯМИ ZnO

Работа посвящена разработке высокочувствительного сенсора на поверхностных акустических волнах для определения концентрации различных газов. Проведен расчет резонатора на частоте 433 МГц, который использовался в качестве исходной структуры газового сенсора. Представлена АЧХ разработанного и изготовленного резонатора. Описана технология формирования наностержней ZnO с помощью гидротермального метода для создания чувствительного элемента сенсора. Предложен подход, применимый для определения выходных параметров сенсора с учетом наностержней. В результате моделирования параметров чувствительной области сенсора с помощью метода конечных элементов и дополнительного расчета выходных характеристик определена чувствительность ПАВ сенсора к массовой нагрузке аналита. Показано, что применение наностержней ZnO улучшает рабочие характеристики сенсора вследствие увеличения эффективной площади поверхности.

Введение

Приборы на акустических волнах активно изучаются, разрабатываются и широко используются во многих областях промышленности, начиная от устройств мобильной и беспроводной связи, сенсоров давления и вязкости и заканчивая новейшими био-сенсорных систем для анализа ДНК. Односторонняя планарная структура, способность взаимодействовать со средой аналита, высокая чувствительность, малый гистерезис, малый размер, частотный выходной сигнал и малое энергопотребление являются основными преимуществами сенсоров на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Попадание аналита на чувствительную область влияет не только на частоту, но и на фазу и амплитуду выходного сигнала, что обеспечивает более точное измерение концентрации анализируемого вещества.

Разработка и исследование новых чувствительных материалов, методов их синтеза является актуальной проблемой для интегрированных сенсорных систем, которые обеспечат контроль и мониторинг различных газов, как непосредственный, так и удаленный. Среди сложных и дорогостоящих традиционных методов синтеза материалов для создания наноструктур используют гидротермальный метод, который позволяет формировать структуры практически на любых подложках, в том числе монокристаллических [1]. Наностержни ZnO используются в качестве био- или газочувствительного элемента ПАВ сенсора [2], влияют на изменение акустического и электрического импеданса ПАВ структуры благодаря увеличению эффективной площади поверхности чувствительной области сенсора и обеспечению прочных центров связывания, таким образом улучшая рабочие характеристики прибора [3].

Аналитическое моделирование процесса распространения поверхностной волны в изотропном упругом полупространстве со стержневыми структурами на поверхности представлено в [4]. Предложен метод определения скорости распространения поверхностных волн при заданных геометрических параметрах стержневых наноструктур. Моделирование ПАВ сенсора (рисунок 1, б) на основе наностержней с помощью программной платформы COMSOL Multiphysics представлено в [5]. Установлена связь между

толщиной промежуточного слоя ZnO и чувствительностью сенсора для определения концентрации водорода. Особый интерес представляют исследования влияния параметров наноструктур чувствительного слоя на выходные характеристики приборов.

Проведенное нами исследование посвящено определению влияния увеличения площади поверхности чувствительной области ПАВ сенсора с помощью наностержней ZnO на чувствительность такого прибора, прогнозированию выходных параметров сенсора и поиску методов оптимизации его чувствительности. Описаны концепция создания ПАВ сенсора, технология синтеза наностержней и предложен подход, применимый для определения оптимальных параметров наностержней, которые используются в составе ПАВ сенсора.

Конструкции ПАВ сенсора

Двухпортовый резонатор использовался в качестве исходной структуры газового сенсора. Выбранная конструкция состоит из двух сформированных на поверхности пьезоэлектрической подложки встречно-штыревых преобразователей (ВШП), двух отражающих решеток (ОР) и чувствительного элемента. Чувствительный элемент может быть размещен как между преобразователями (рисунок 1, а), так и вынесен отдельно в качестве емкостной нагрузки (рисунок 1, б). В качестве чувствительного элемента ПАВ сенсора формируются наностержни ZnO.

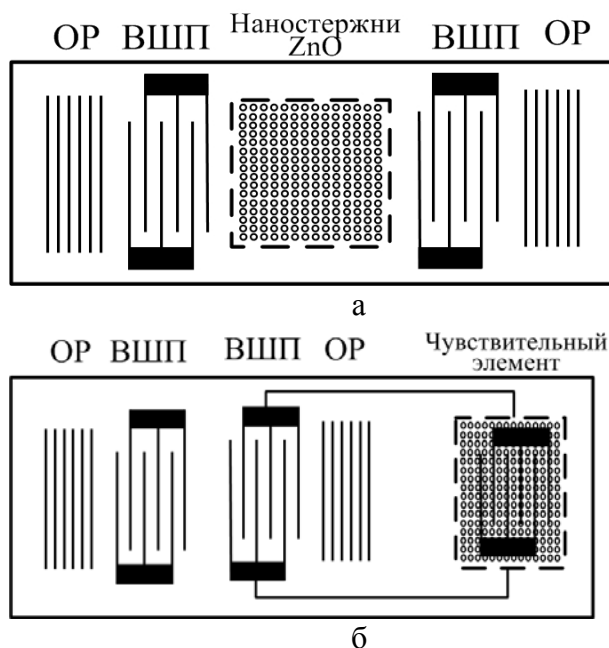


Рисунок 1 – Схематическое представление конструкций ПАВ сенсора

Расчет оптимальной АЧХ системы был реализован методом, использующим аппроксимацию заданных частотных характеристик конечным комплексным рядом Фурье, что позволило связать длину каждого электрода через весовые коэффициенты с членом ряда Фурье, а изменение периодичности структуры – учесть через полиномы Лежандра (рисунок 2).

Период и апертура ВШП выбраны таким образом, чтобы обеспечить резонансную частоту на уровне 433 МГц [6]. Расстояние между ВШП было выбрано из соображений возможности формирования чувствительной области и соблюдения граничных условий распространения поверхностной акустической волны.

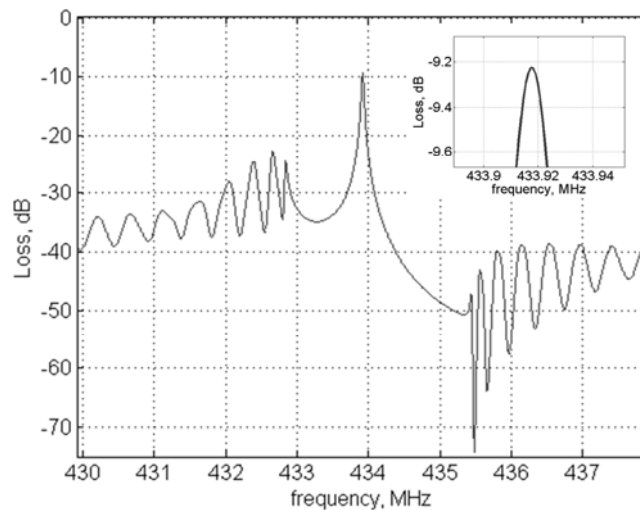


Рисунок 2 – АЧХ резонатора при толщине металлического подслоя 0.13 мкм

Изготовление резонатора проводилось с помощью микроэлектронной технологии. Кварц ST-среза использовался в качестве материала подложки, а алюминий – в качестве материала электродов. АЧХ полученного резонатора представлена на рисунке 3.

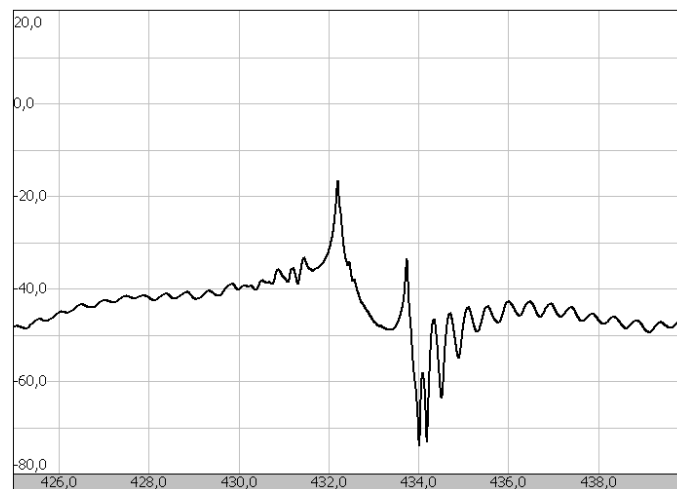


Рисунок 3 – АЧХ изготовленного резонатора

Определение параметров чувствительного слоя

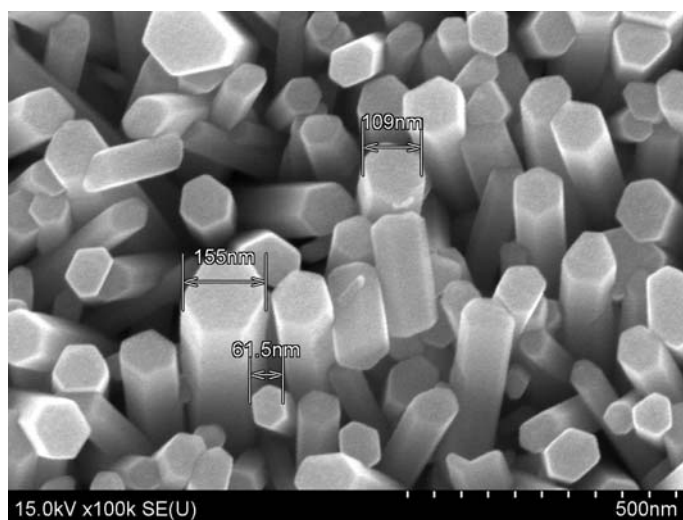
Одной из групп входных параметров для моделирования ПАВ сенсора с модифицированной наноструктурами чувствительной областью являются геометрические параметры таких структур – форма, диаметр, длина, плотность размещения. Для их оценки и определения пределов значений таких параметров были сформированы наноструктуры ZnO с помощью нанотехнологического подхода «снизу-вверх», который предусматривает формирование наноструктур различной морфологии и структуры путем самоорганизации при низкой температуре процесса и без применения дорогостоящих вакуумных и других микроэлектронных технологий. Параметры процесса химических методов синтеза материалов, качество подложки и свойства предварительно сформированного зародышевого слоя значительно влияют на качество и форму получаемых наноструктур.

Подложки кварца ST-среза изначально очищались в растворе перекиси водорода при температуре 30°C в течение 30 мин. Для первой стадии формирования наностержней ZnO использовался ацетат цинка (ZnAc) $\text{Zn}(\text{COOCH}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, растворенный в изопропиловом спирте ($(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$). Раствор моноэтаноламина (МЕА) $\text{HOCH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2$ добавлялся при комнатной температуре в качестве стабилизатора. Концентрация ZnAc составляла 0,3 моль/л, а молярное соотношение МЕА к ZnAc – 1,0. Полученный раствор перемешивался с помощью магнитной мешалки при температуре 65°C до формирования прозрачного однородного раствора, который затем был охлажден до комнатной температуры и профильтрован с помощью мембранного фильтра с диаметром пор 0,22 мкм. Осаждение зародышевой пленки на подложку проводилось при комнатной температуре методом центрифугирования при 3000 об/мин в течение 30 с. Каждый полученный слой сушился при температуре 140°C в течение 30 мин в печи для спекания. Такая температура необходима для удаления органических веществ. Проводилось осаждение 3 слоев для получения необходимой толщины пленки. Полученная многослойная структура отжигалась при температуре 450°C в течение 1 ч для получения однородной и стабильной пленки.

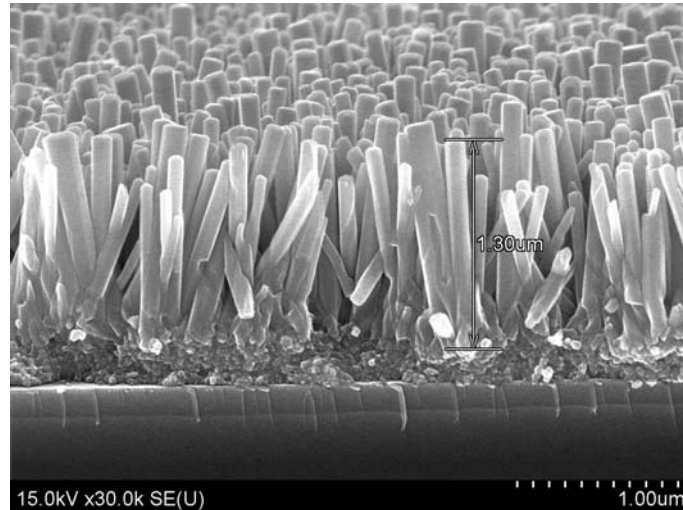
Водный раствор ацетата цинка и гексаметиленetetрамина $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$ в молярном соотношении 1:1 использовался для второй стадии формирования наностержней ZnO. Концентрация ацетата цинка составляла 0,03 моль/л. Однородный раствор формировался в течение 5 мин при комнатной температуре в процессе перемешивания с помощью магнитной мешалки. Подложки кварца ST-среза со сформированным зародышевым слоем погружались в полученный раствор, который нагревался до температуры 95°C и был оставлен на 90 мин без какого-либо перемешивания. После окончания процесса синтеза подложки промывались деионизированной водой и сушились при температуре 80°C в печи для спекания.

Метод сканирующей электронной микроскопии (Hitachi S4800) использовался для определения морфометрических характеристик наноструктур. Полученные изображения представлены на рисунке 4.

Сформированные наноструктуры имеют форму стержней с диаметром порядка 100 нм и гексагональную структуру (рисунок 4, а). Длина стержней – не более 1,3 мкм (рисунок 4, б). Плотность размещения стержней на подложке – 100 мкм^{-2} . Стержни размещены равномерно по всей анализируемой поверхности.



а



б

Рисунок 4 – СЭМ изображение наностержней ZnO на кварцевой подложке

Модификация чувствительной области сенсора с помощью таких наноструктур позволяет значительно увеличить площадь поверхности, что приводит к увеличению чувствительности прибора.

Определение выходных характеристик ПАВ сенсора с наностержнями ZnO

Целью данного пункта является прогнозирование чувствительности ПАВ сенсора и поиск оптимальных параметров наностержней для использования в качестве чувствительного слоя.

Двухпортовый резонатор (рисунок 2, а) в качестве основной структуры газового сенсора был выбран для проведения моделирования с помощью метода конечных элементов, который позволил выполнить расчет деформации приповерхностной области подложки.

Моделирование процессов, протекающих в подложке ПАВ резонатора, проводилось с помощью частотного анализа в двумерном приближении. Периодические граничные условия прикладывались к вертикальным границам подложки для моделирования непрерывного распространения волн Релея на границах структуры. Верхняя поверхность подложки была оставлена свободной для механических возмущений, а нижняя граница пьезоэлектрического слоя не имела заряда. Оптимально согласованный слой был добавлен в нижней части подложки для обеспечения затухания волн Релея и предотвращения отражения волн от нижнего края подложки. При таких условиях не возникают паразитные возмущения и, таким образом, паразитные резонансы в направлении сдвига по толщине, которые ухудшают производительность структуры. Фиксированные граничные условия применялись к нижней границе этого слоя для имитации конечной толщины подложки и жестко закрепленной конструкции. Сдвиг в боковом направлении ограничен. Периодический электрический потенциал 5 В прикладывался к нечетным штырям входного и выходного ВШП, а четные штыри заземлялись для обеспечения электромагнитного возмущения.

На рисунке 5 показаны периодические деформации на поверхности подложки кварца в МЭМС модуле программной платформы COMSOL Multiphysics, собственная мода наблюдается на частоте 433.1 МГц. В этом случае колебания в направлении сдвига по толщине эффективно затухают и практически незаметны.

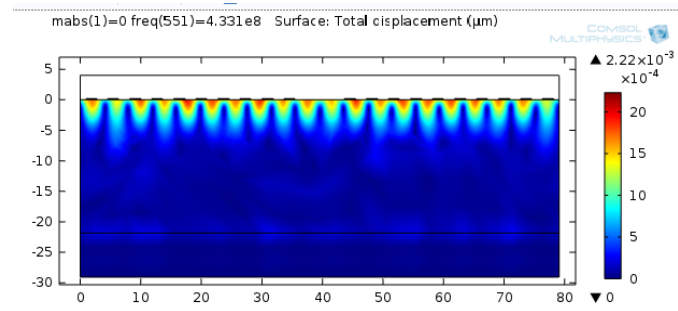


Рисунок 5 – Общее смещение поверхности моделированного ПАВ резонатора на частоте 433.1 МГц

Входной импеданс имеет два характерных пика (рисунок 6, сплошная кривая), определяющих резонансные свойства структуры: частота последовательного резонанса соответствует частоте, на которой наблюдается минимум импеданса, а частота параллельного резонанса соответствует частоте, на которой наблюдается максимум импеданса. Отсутствие паразитных резонансов и форма ФЧХ свидетельствуют о правильно выбранной геометрии и корректном определении параметров модели.

Дополнительные этапы моделирования показали увеличение затухания сигнала при увеличении расстояния между ВШП. Таким образом, выбранное расстояние между ВШП является оптимальным для обеспечения как площади для чувствительной области, так и мощного выходного сигнала.

Полученные характеристики демонстрируют пригодность модели для определения параметров сенсора.

Адсорбция молекул газа чувствительной поверхностью между ВШП обуславливает изменения скорости распространения и затухания поверхностной акустической волны, при этом происходит смещение резонансной частоты прибора, в таком случае определение концентрации вещества сводится к определению частотных характеристик прибора [7].

Применение нанострежней ZnO в качестве чувствительного элемента значительно улучшает чувствительность благодаря увеличению площади чувствительной области. Для изучения влияния морфометрических параметров нанострежней ZnO на массовую чувствительность в качестве входных параметров модели были приняты параметры синтезированных структур. Массовая нагрузка приводит к смещению частоты, которая зависит от эффективной площади поверхности S чувствительного материала и концентрации аналита с расчетом на единицу площади c .

Для расчета влияния таких параметров нанострежней, как радиус R , длина h , количество в чувствительной области N , массовая нагрузка Δm вычислялась по формуле:

$$\Delta m = S \cdot c = 2\pi R h N + 4a \cdot w,$$

где: a – полупериод ВШП и w – апертура. Моделирование проводилось при условии введения аналита (10 нг/мм^2). Условие введения массы накладывалось на область между ВШП. Входные параметры и рассчитанные параметры чувствительности прибора при введении аналита представлены в таблице 1. На рисунке 6 представлены частотные характеристики, полученные в результате моделирования процесса введения аналита (пунктирная линия), рассмотренного ПАВ сенсора с учетом морфометрических параметров нанострежней.

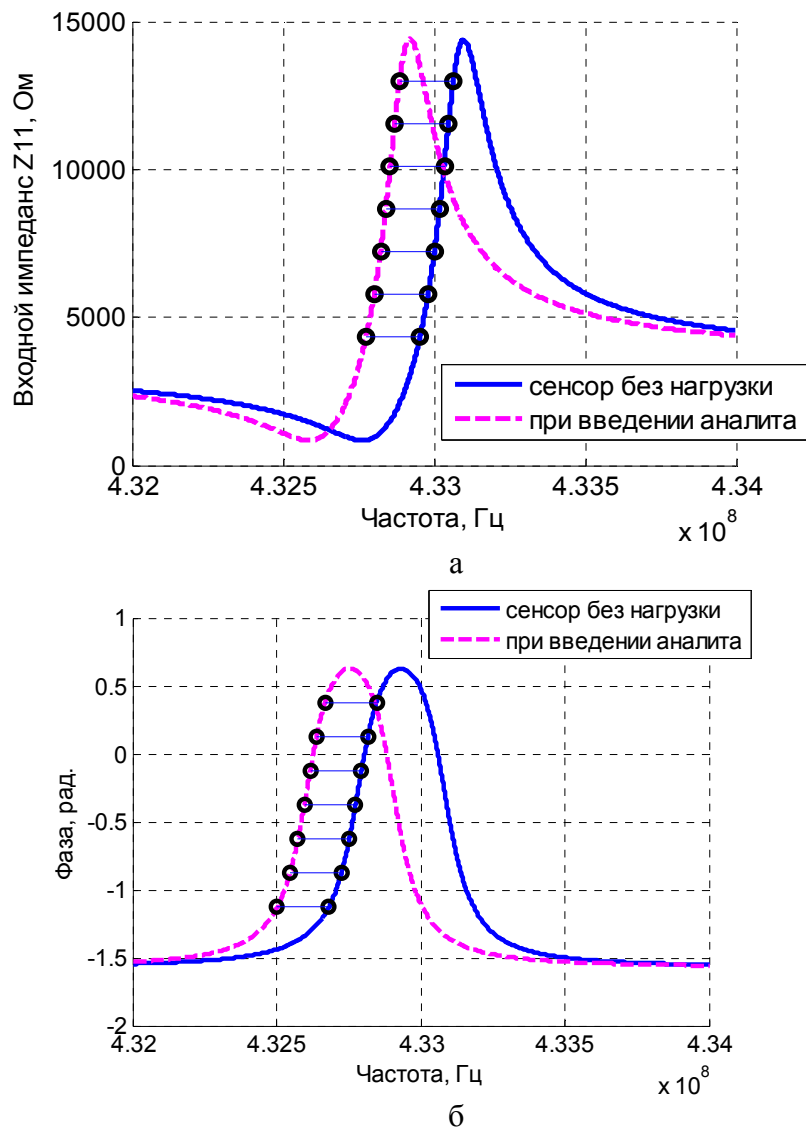


Рисунок 6 – Частотная зависимость входного импеданса (а) и фазы (б) ПАВ сенсора без нагрузки и при введении аналита

Таблица 1 – Входные параметры модели и полученные характеристики сенсора

Концентрация аналита, нг/мм ²	10
Радиус стержня, нм	50
Длина стержня, мкм	1.2
Плотность размещения стержней, мкм ⁻²	100
Сдвиг частоты, кГц	178
Сдвиг частоты, %	0.04
Массовая чувствительность, кг/Гц	2.2961e-18
Массовая чувствительность на единицу площади, кг/Гц/м ²	2.1706e-09

Таким образом, ПАВ газовый сенсор, выполненный на кварцевой подложке с синтезированными наностержнями ZnO в качестве чувствительного элемента, демонстрирует чувствительность 2,29 фг/Гц к массовой нагрузке аналита.

Заклученне

В работе представлена концепция создания высокочувствительного ПАВ сенсора для определения концентрации различных газов. Проведен расчет сенсора на частоте 433 МГц методом, использующим аппроксимацию заданных частотных характеристик конечным комплексным рядом Фурье. Описана технология формирования наностержней ZnO для создания чувствительного элемента сенсора. Показано, что применение наностержней ZnO улучшает рабочие характеристики сенсора вследствие увеличения эффективной площади поверхности. В результате моделирования параметров чувствительной области сенсора с помощью метода конечных элементов и дополнительного расчет выходных характеристик определена чувствительность ПАВ сенсора к массовой нагрузке аналита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morphology and Structure of ZnO Nanorods for SAW Sensors Applications / Ulianova V. A. [et.al] // 23rd International Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology» (CriMiCo'2013) : Conference Proceedings, September 8–13, 2013 / Sevastopol : Weber Publishing, 2013. – P. 830–831.
2. Lu Yicheng. Multifunctional Biosensor Based on ZnO Nanostructures / Lu Yicheng // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2012. – Vol. 131, Issue 2. – P. 1667–1667.
3. Umit Ozgur. ZnO devices and applications: a review of current status and future prospects / Umit Ozgur // Proceedings of the IEEE 98. – 2010. – 7. – P. 1255–1268.
4. ZnO nanostructures as sensing element of acoustic wave sensor / Bogdan O.V. [et.al] // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2012. – Vol. 6, № 12 (60). – P. 16–22.
5. Design and simulation of 3D ZnO nanowire based gas sensor for conductivity studies / Gouthami N. [et.al] // The COMSOL Conference. – October 13–15, 2011. – 5 p.
6. David Morgan Surface Acoustic Wave Filters with Applications to Electronic Communications and Signal Processing / David Morgan. – Elsevier, UK, 2007. – 448 p.
7. Development of a SAW gas sensor for monitoring SO₂ gas / Lee Y. J. [et.al] // Sensors and Actuators A: Physical. – 1998. – Vol. 64, no. 2. – P. 173–178.

O. Bogdan, A. Zazerin, A. Orlov, G. Pashkevich, V. Ulianova Analysis of Surface Acoustic Wave Sensor with ZnO Nanorods Parameters

This work is devoted to the development of high sensitive surface acoustic wave sensor for different gases detection. Two port SAW resonator was chosen as basic structure of the gas sensor. The technology of ZnO nanorods growing by hydrothermal method for application as sensing element was presented. The approach to estimate the output parameters and optimal parameters of nanorods for nanostructure-enhanced SAW sensor was proposed. The sensitivity to mass loading of SAW sensor was determined by finite element modeling. Greatly increased effective surface area by ZnO nanorods improved performance of the sensor. It has been shown that the using of ZnO nanorods improves the performance of the SAW sensor because of increasing the effective surface area.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 08.08.2014

УДК 678.01:621.7:627.217

***В.А. Лиопо, Е.В. Овчинников,
С.С. Секержицкий, В.Г. Сорокин, В.А. Струк***

НАНОЧАСТИЦЫ КАК МОДИФИКАТОРЫ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Объектом исследования являются формы и модифицирующая активность нанокристаллов. Показано, что точечная симметрия формы нанокристалла, полученного методом «сверху», описывается предельной точечной группой голоэдриии соответствующей сингонии. Рассмотрены нанокристаллы с различной наноразмерностью: наночастицы, наностержни, наносферы. Описано модифицирующее действие нанокристаллов как модификаторов композиционных материалов на полимерной основе.

Введение

Композиционные материалы эффективно используются в самых различных областях деятельности человека. Число таких материалов огромно, но все они имеют общее свойство, обусловленное их строением. Композиционные материалы обязательно включают в себя вещества двух типов. Во-первых, в них имеется вещество, формирующее среду, называемую основой или матрицей. Эта среда непрерывна, и в ней распределены частицы другого или других веществ. Размеры этих частиц, в зависимости от технологических требований к изделиям из композита, могут меняться от нескольких сантиметров до нанометров. Эти частицы называются наполнителями или модификаторами, так как их основное назначение в изменении (модифицировании) свойств основы. Объемная концентрация частиц модификатора изменяется в широких пределах от долей до десятков процентов. В одном и том же композите могут быть частицы модификатора различной крупности и различного назначения. Модификаторы могут увеличивать твердость основы, влиять на износостойкость изготовленных из композита деталей, увеличивать термостойкость, изменять взаимодействие с электромагнитным излучением, изменять оптические, электрические, теплоизоляционные свойства и так далее. Если наполнители и модификаторы имеют размеры в нанодиапазоне, то говорят о наноконпозиционных материалах или наноконпозиитах.

Целью исследований являлся анализ связей симметрии формы нанокристалла и точечной симметрии макроскопического кристалла, диспергированием которого получены наночастицы, а также анализ влияния форм нанонаполнителей на их модифицирующее свойство.

Объект исследований – форма нанокристаллитов, полученных диспергированием крупных кристаллов.

Основные характеристики наночастиц

Следует обратить внимание на то, что не всякий объект с наноразмерами является наночастицей. Наночастица должна обязательно характеризоваться двумя качествами.

Во-первых, наночастица, как и любая другая частица, имеет поверхность и может быть выделена из смеси с другими веществами механическими методами.

Во-вторых, наночастица представляет собой такое состояние вещества, когда параметры физических свойств начинают зависеть от размера этой частицы. Макросостояние веществ описывается табулируемыми значениями параметров их физических свойств, которые не зависят от размера частиц вещества. Конечно, значения этих параметров могут зависеть от температуры (T), давления (P), других факторов (F) [1]. То есть $S = S(T, P, F)$ и только при размерах $r > L_0$ проявляется зависимость $S = S(r)$.

Величина L_0 является размерной границей между нано- и макросостоянием и определяется по формуле:

$$L_0 = \frac{\sqrt{1,5h}}{\sqrt{km}} \Theta_D^{-1/2}, \quad (1)$$

где h, k – постоянные Планка и Больцмана соответственно, m – масса электрона, Θ_D – дебаевская температура. После подстановки значений h, k, m получим:

$$L_0 = 230 \Theta_D^{-1/2} [\text{нм}]. \quad (2)$$

Формула (1) согласуется с многочисленными результатами, полученными разными авторами [2]. Если размер частицы $r > L_0$, то они относятся к макроскопическому объекту. При $r < L_0$ – это наночастица. Величина L_0 , как и Θ_D не является строго определенной. Следовательно нано- или макросостояние проявляются тем ярче, чем сильнее указанные выше неравенства. Зависимость параметра физического свойства от размера описывается формулой:

$$S(r) = \frac{S_v}{\left| \exp \left[\alpha \frac{1-x}{x} \right]^{3/2} \right|}, \quad (3)$$

где S_v – численное значение параметра макроскопического свойства (табличная величина), $x = \frac{r}{L_0}$, α – параметр, зависящий от изучаемого свойства.

Форма наночастиц, получаемых при диспергировании кристаллических веществ

Существует два технологических подхода получения наночастиц. Один из них, называемый методом «сверху», это диспергирование природных полуфабрикатов. Другой метод основан на выращивании наночастиц из газовой или жидкой (расплав, раствор) среды и называется методом «снизу». Так как основными объектами наших исследований являлись нанокompозиты на полимерной основе, модификаторами которых служили наночастицы, полученные диспергированием кристаллов, то основное внимание уделено именно методу «сверху».

Форма наночастиц, получаемых при диспергировании кристаллов различных сингоний

Одно из определений кристалла формулируется следующим образом: «Кристалл – это твердое вещество с естественными плоскими гранями». Это определение относится к монокристаллам и из него следует, что их форма описывается полиэдром с точечной симметрией кристалла. Каждой точечной группе соответствует полиэдр с гранями, которые связаны этой точечной группой. Такой полиэдр называется правильной формой. Если индексы (hkl) произвольны, то есть не равны друг другу, и нет нулевых индексов, то число граней правильной формы, называемой общей, равно по-

рядку точечной группы кристалла. В противном случае говорят о частных правильных формах, число граней которых меньше числа граней общей правильной формы кристалла в целое число раз. Полиэдр с наивысшей симметрией, то есть с числом граней равных порядку группы, называется голоэдрией. Если число граней в два раза меньше числа граней голоэдрией, то это гемиедрией. Если в четыре раза – тетартоэдрией. В таблице 1 приведено описание формы кристаллов для точечных групп различных сингоний. Указанные символы групп и их порядок (в скобках).

Таблица 1 – Симметрия правильных форм кристалла и число граней (в скобках): ГОЛ-голоэдрией, ГЕМ-гемиедрией, ТЕТ-тетартоэдрией.

Сингония	Точечная группа (порядок)		
	ГОЛ	ГЭМ	ТЕТ
Кубическая	m3m (48)	m3, 432, 3m (24)	23 (12)
Гексагональная	6/mmm (24)	6/m, 622, 6mm,m2 (12)	6, (6)
Тетрагональная	4/mmm (16)	4/m,422,4mm,2m (8)	4, (4)
Тригональная	m (12)	3m,32, $\bar{3}$,6 (6)	3 (3)
Ромбическая	mmm (8)	222, mm2 (4)	
Моноклинная	2/m (4)	2,m 2	
Триклинная	1 (2)	1 (1)	

Если монокристалл имеет большие размеры, то на его поверхности могут выступать грани кристаллографических различных форм, то есть с разным (hkl) . Надо учитывать и влияние различных внешних факторов, например, механические воздействия. При уменьшении размеров начинают все большую роль играть особенности его асимметрии. Гранями кристалла являются поверхности с наибольшей ретикулярной плотностью. Габитус приобретает общую или частную правильные формы. При переходе в наномасштабный диапазон увеличивается влияние поверхностных сил. Грани искривляются, ребра сглаживаются. Точечная группа переходит в предельную. Этот переход надо рассматривать для голоэдрией, которая должна быть подгруппой точечной группы формы наночастицы. При таком переходе оси вращения с порядком $n > 2$ переходят в оси ∞ . В таблице 2 приведены точечные группы голоэдрией различных сингоний и соответствующие им предельные группы. Указаны также образные фигуры этих предельных групп.

В таблице 2 к средним сингониям отнесены гекса-, тетра- и тригональная, имеющие одинаковую предельную точечную группу. По этой же причине объединены ромбическая, моноклинная и триклинная сингонии в группу низших сингоний. Легко убедиться, что предельной группой наивысшей симметрией обладает сфера. Остальные две предельные группы являются ее подгруппой.

В таблице 2 указаны идеализированные формы наночастиц. Сфера является частным случаем эллипсоида вращения, который является частным случаем трехосного эллипсоида. Кроме того, если в кристалле средних или низших сингоний связи между

атомами обладают ярко выраженной анизодесмичностью, то образные фигуры могут изменять свой вид. Если силы межатомного взаимодействия вдоль направлений, лежащих на грани (001) ячейки кристалла много больше, чем по направлению [001], например, в первом случае – это валентная связь, а во втором – Ван-дер-Ваальсова, то этот кристалл обладает совершенной или даже весьма совершенной спайностью и его наночастицы имеют форму нанопластинок (наночешуек). Если межатомное взаимодействие для направлений $[uv\omega]$ меньше, чем для [001], то эллипсоиды трансформируются в наностержни (нанопроволку или в вискеры). У кубических кристаллов межатомные связи изодесмичные, то есть форма их наночастиц – сфера. Однако, если используются соответствующие методики, то можно получить, например, для золота наночастицы в виде наностержней.

Таблица 2 – Предельные точечные группы и образные фигуры кристаллов различных сингоний

Сингонии		Предельная группа	Образная фигура
Кубические	$m\bar{3}m$	$\infty:\infty/m$	Сфера
Средние	$6/mmm, 4/mmm, \bar{3}m$	∞/m	эллипсоид вращения
Низшие	$mmm, 2/m, \bar{1}$	mmm	3-х осный эллипсоид

На рисунке 1 приведены возможные формы наночастиц.

Указаны сингонии, для которых эти формы являются естественными, так как соответствуют предельным группам. В скобках указаны сингонии, для которых получение наночастицы с соответствующей формой потребует использования специальных методик.

Наночастицы сферической формы имеют диаметр $d < L_0$ для всех направлений. Наностержень имеет длину $l > L_0$, но линейные размеры его сечения должны удовлетворять неравенству $d < L_0$. Нанопластина имеет толщину $h < L_0$. Следовательно, нанопластины – это частицы с одной наноразмерностью, наностержни – с двумя, наносферы относятся к наночастицам с тройной наноразмерностью.

Модифицирующее действие наночастиц различной формы

Как уже указано ранее, в качестве объектов исследования были взяты композиционные материалы на основе полимеров. Эти композиты были рассмотрены по двум причинам. Во-первых, в научной литературе имеется большое количество работ, посвященных их исследованиям. Во-вторых, эти вещества являются объектом, для которых накоплен определенный опыт промышленного применения [3].

Модифицирующее действие наночастиц наполнителей полимерных композитов обусловлено наличием на поверхности этих частиц так называемых активных центров, которые способствуют закреплению на них молекул других веществ.

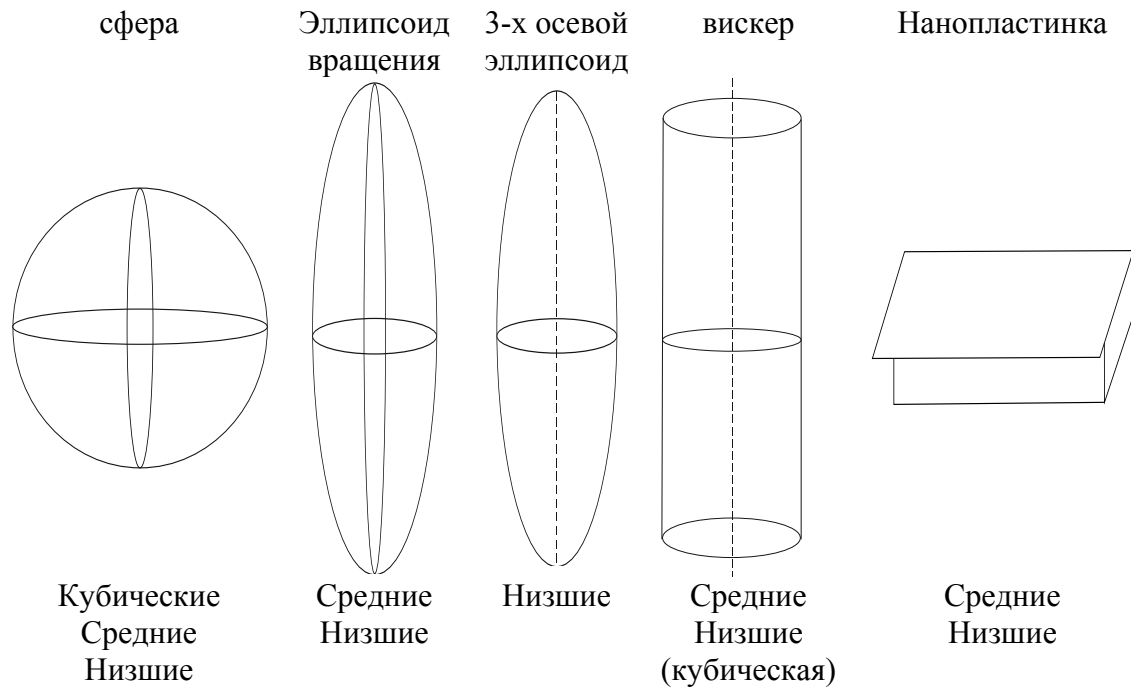


Рисунок 1 – Формы наночастиц для различных сингоний

На рисунке 2 приведена схема модификации полимера, обусловленная изменением межмолекулярной структуры поверхностного слоя полимера. Если эта молекула полярная, то в приповерхностном слое угол между нормалью к поверхности и осью диполя (α) распределяется с дисперсией σ_1 . Для k -того слоя $\sigma_k = \sigma_1 \sqrt{k}$ [4]. Если при $k = n$ $\sigma_n = \pi$, то действие поверхности на ориентацию молекул полимера отсутствует. То есть толщина полимерного слоя $h = h_1 \cdot n$ и определяет толщину модифицированного слоя. Величина h_1 равна толщине одного молекулярного слоя (рисунок 2). Очевидно, что оценка h носит условный характер, но она показывает, что каждая частица модификатора влияет на конечный объем вещества.

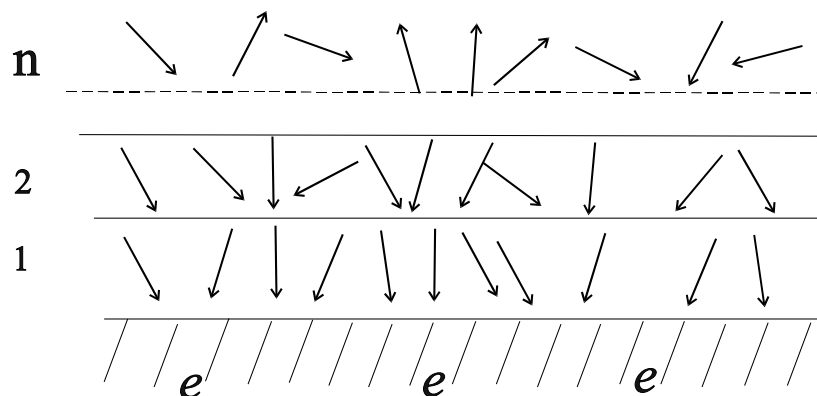


Рисунок 2 – Схема модифицирующего действия активного поверхностного центра на полимерную основу

Если закрепление молекулы полимера с поверхностью обусловлено молекулярными связями «поверхность-полимер», то и в этом случае величина h будет конечной,

то есть не заполняют весь объем композита. Если V – объем композита, а V_{mod} – суммарный модифицированный объем, то

$$k = \frac{V_{\text{mod}}}{V} \quad (4)$$

и величина k определяет коэффициент модификации. С увеличением концентрации модификатора (C_m) растет k и технологические свойства, например, износостойкость, теплостойкость, адгезионные характеристики, улучшенные, но лишь до определенных пределов, а затем могут резко ухудшаться [5]. Это обусловлено перекрытием модифицированных областей, и в зоне их контакта происходит ослабление молекулярных связей между модифицированными объемами.

Появление электрических зарядов на частицах обусловлено следующими причинами.

Во-первых, при диспергировании невозможно, чтобы число электронов и число протонов было абсолютно одинаковым вследствие стохастичности самого процесса образования частиц. Для крупных частиц это различие не приводит к каким-либо значительным эффектам.

Во-вторых, на поверхности металлических поликристаллов имеются зарядовые участки, обусловленные контактированием кристаллитов с разными уровнями Ферми [6]. Локальные различия в концентрациях электронов приводят к возникновению зарядов в металлических нанокристаллах.

В-третьих, при диспергировании диэлектриков на начальных этапах образования ювенильных поверхностей возникает потенциальный барьер. Если ювенильные поверхности ограничивают участок вещества с разной дефектностью, то прозрачность этого барьера является неодинаковой для зарядов по обе стороны от области раскола, и их число на одной из поверхностей увеличивается, а на другой уменьшается. Возникшие зарядовые мозаики на этих ювенильных плоскостях антисимметричны [7].

Для сравнения модифицирующего действия сферических наночастиц, наностержней и нанопластин рассмотрим следующую модель.

Пусть все эти частицы получены диспергированием веществ с одинаковым объемом V . Толщины модифицированных слоев на поверхностях трех-, двух- и однаномерных частиц одинаковы и равны h . Примем диаметр сечения наностержня равным d , и толщина нанопластины также равна d . Объем одной сферической частицы

равен $V_1 = \frac{\pi d^3}{6}$, а площадь поверхности $S_1 = \pi d^2$. Число частиц $N = \frac{V}{V_1} = \frac{6V}{\pi d^3}$. Следова-

тельно, полная поверхность всех наносфер равна:

$$S_{\text{н.с.}} = \frac{6V}{d}. \quad (5)$$

Общий объем всех наностержней (l) определяется из условия $\frac{\pi d^2 l}{4} = V$. Следовательно, полная поверхность всех наностержней (пренебрегая площадью торцов) равна

$$S_{\text{н.с.}} = \pi d l = \pi d \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4V}{d}. \quad (6)$$

Площадью торцов пренебрегаем.

Полная поверхность чешуек S_q определяется условием:

$$S_q = \frac{2V}{d}. \tag{7}$$

Площадью граней пластинки (чешуйки) пренебрегаем.

Так как в модифицирующий кластер наряду с модифицированным поверхностным слоем входит и частица, окруженная поверхностным слоем, то на основе формул (5–7) легко рассчитать общий модифицированный объем и коэффициент модификации для композитов с частицами наполнителя указанных форм.

При этом делается два предположения: концентрация частиц наполнителя достаточно мала, то есть между модифицированными областями находится вещество основы.

Параметры нанокомпозитов с одинаковыми объемами (W), с одинаковыми суммарными объемами частиц модификатора (V) и одинаковыми толщинами модифицированных слоев (h). В таблице 3 приведены геометрические параметры наночастиц с различной наноразмерностью и их модифицирующие параметры.

Таблица 3 – Характеристики наночастиц различной наноразмерности: нсф – наносферы, нст – наностержни, нп – нанопластинки

Параметр	Наночастицы		
	нсф	нст	нп
наноразмерность	3	2	1
суммарный объем частиц	V	V	V
величина наноразмерного параметра	d	d	d
суммарная поверхность наночастиц	$\frac{6V}{d}$	$\frac{4V}{d}$	$\frac{2V}{d}$
толщина модифицированного слоя	H	h	H
суммарный модифицированный объем	$V\left(1 + \frac{2h}{d}\right)^3$	$V\left(1 + \frac{2h}{d}\right)^2$	$V\left(1 + \frac{2h}{d}\right)$
объем композита	W	W	W
коэффициент модификации	$\frac{V}{W}\left(1 + \frac{2h}{d}\right)^3$	$\frac{V}{W}\left(1 + \frac{2h}{d}\right)^2$	$\frac{V}{W}\left(1 + \frac{2h}{d}\right)$

Как следует из приведенной таблицы, при равенстве параметров (W, V, d, h), коэффициенты модификации μ пластинчатых, стержневых, сферических наночастиц относятся как

$$\mu_{нп} : \mu_{нст} : \mu_{нсф} = m : m^2 : m^3. \tag{8}$$

Описанная модель расчета коэффициента модификации достаточно формальна, но она объясняет, на какие параметры следует обращать внимание для достижения

максимального значения μ , но при одинаковой плотности зарядов толщина модифицированного слоя будет различаться. Действительно, электрическое поле указанных нанообъектов имеет регулярную симметрию: для сферических наночастиц симметрию $(\infty\infty)$, для наностержней симметрия описывается группой (∞m) , для нанопластин группа симметрии \underline{m} (черно-белая плоскость отражения или антиплоскость).

Заключение

При диспергировании макроскопических кристаллических полуфабрикатов частицы могут иметь различную форму и, следовательно, различные размеры. Если имеется хотя бы один геометрический параметр со значением меньше, чем граница между нано- и макросостоянием, то этот объект является наночастицей. Наносферы – это объекты с трехмерной наноразмерностью. Наностержни относятся к двумерным нанообъектам. Нанопластинки – это объект с одномерной наноразмерностью.

Проанализированы возможные формы наночастиц в зависимости от голоэдрической группы сингоний исходного кристалла. Показано, что точечная группа симметрии наночастицы является предельной точечной группой точечной группы кристалла. При получении наночастиц методом «снизу» возможны нарушения указанного правила, которое применимо для метода «сверху».

При рассмотрении процесса создания композита на полимерной основе предложена модель, позволяющая определить коэффициент модификации (μ) полимерной матрицы, значение которого рассчитывается по формуле:

$$\mu = \frac{V^{(r)}}{W} \left(1 + \frac{h^{(k)}}{d^{(k)}} \right)^k, \quad (9)$$

где V – суммарный объем частиц модификатора, W – объем композита, $h^{(k)}$ – толщина модифицированного слоя на поверхности частицы модификатора, $d^{(k)}$ – величина наноразмерного параметра, (k) – индекс наноразмерности ($k = 1, 2, 3$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лиопо, В.А. Фононный спектр и размерная граница между нано- и макрофазой / В.А. Лиопо // Вестник ГрГУ. Сер. 2. – 2009. № 1. – С. 93–101.
2. Лиопо, В.А. Металлополимерные нанокомпозиты: особенности структуры, технология, применение / В.А. Лиопо, под ред. В.А. Струка, – Гродно : ГГАУ, 2010. – 335 с.
3. Нанокомпозиционные и наноструктурные машиностроительные материалы и технологии их получения : коллективная монография / Под ред. А.В. Киричека. – М. : Издательский дом «Спектр», 2013. – 224 с.
4. Лиопо, В.А. Температура Дебая в нанофизике и ее определение рентгенографическим методом / В.А. Лиопо // Актуальные проблемы физики твердого тела» ФТТ-2013 : сборник докладов Междунар. науч. конф., Минск, 15 окт. 2013г. – Минск. : Из-во «Ковчег», 2013. – С. 42–44.
5. Прогрессивные машиностроительные технологии : коллективная монография. / Под ред. А.В. Киричека. – М. : Издательский дом «Спектр», 2013. – Том II. – 224 с.
6. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела (в двух томах) / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. – М. : Мир, 1979. – 486 с.

7. Мецик, М.С. Оптические свойства кристаллов слюды : монография / М.С. Мецик. – Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1994. – 212 с.

V.A. Liopo, Y.V. Auchynnikau, S.S. Sekerzhitsky, V.G. Sarokin, V.A. Struk Nanoparticles as a Modifier Composite Materials

The research object is the shape and modify the activity of nanocrystals. Bye shown that the point symmetry of the nanocrystal shape, obtained by the "top", describes the pre-limiting point group symmetry holohedry appropriate. Considered nanocrystals with time-personal of nanoscale: nanoparticles, nanorods, nanospheres. Modifying effect nanocrystals described as modifiers of composite materials based on polymers.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.09.2014

УДК 537.312:538.245

И.И. Макоед

КОРРЕЛЯЦИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ МАГНЕТИТА

Экспериментально изучены температурные зависимости электрических и магнитных свойств моно- и поликристаллических минералов магнетита. На основании анализа полученных данных установлены корреляции электропроводности, диэлектрической проницаемости и магнитных свойств образцов.

Материалы, называемые мультиферроиками, привлекают к себе интерес благодаря наличию в них магнитоэлектрического эффекта, суть которого заключается во взаимном влиянии магнитного (электрического) поля на поляризацию (намагниченность) материала [1]. Исследование веществ, проявляющих свойства мультиферроиков и сильную взаимосвязь между магнитной, электронной и упругой подсистемами, представляет интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Мультиферроики являются перспективными материалами для создания элементной базы современной микроэлектроники и спинтроники, где используются преимущества как энергонезависимой магнитной памяти, так и быстродействующих электрических систем обработки информации. К числу веществ с выраженными корреляциями магнитных и электрических свойств можно отнести магнетит (Fe_3O_4) [2; 3]. Магнетит представляет собой оксид железа Fe_3O_4 и принадлежит к большому классу магнитоупорядоченных ионных кристаллов со структурой шпинели типа AB_2O_4 , где А, В – катионы металлов, О – анион кислорода. Катионное распределение в шпинелях влияет на условия возникновения и существования косвенных (через анионы кислорода) обменных взаимодействий, которые определяют тип и интенсивность магнитных и зарядовых упорядоченных состояний. Интерес к магнетиту вызван наличием в нем сосуществования упорядоченных ферримагнитной [3] и сегнетоэлектрической [4] фаз.

На основании известных данных есть основания полагать, что именно $3d^6$ электроны атома железа благодаря сильному корреляционному взаимодействию в значительной степени оказывают влияние на формирование уникальных физических особенностей магнетита. Одной из них является наличие фазового перехода «металл–диэлектрик», который называют переходом Мотта–Хаббарда [5]. В последнее время появился ряд работ, в которых были теоретически исследованы зонная структура и магнитоэлектрические взаимодействия в магнетите [6; 7]. Активно исследуются физические эффекты в наноразмерных тонкопленочных структурах на основе Fe_3O_4 [8]. В то же время окончательно не выяснены условия возникновения и сосуществования спинзарядовых состояний в данном соединении, и актуальны их исследования как в минералах, так и в искусственно синтезированных изоструктурных образцах.

Целью работы является определение взаимосвязи особенностей фазовых переходов и обнаружение корреляций магнитных и электрических свойств в моно- и поликристаллических образцах магнетита.

Трудностью изучения минералов магнетита является то, что в зависимости от температуры и парциального давления в окружающей среде в них происходят различные физико-химические изменения, связанные с изменением валентных состояний катионов, с нарушением стехиометрии соединения по кислороду и с появлением дефек-

тов, которые оказывают влияние на его электрические и магнитные свойства. Анализ химического состава образцов проводили на основании результатов сканирующей электронной спектроскопии (SEM, Hitachi S-3000N). Элементный анализ составов изучали методом энергодисперсионной спектроскопии (EDX). Типы и параметры кристаллических решеток определяли на основании дифрактограмм, измеренных при комнатной температуре на дифрактометре ДРОН 3М с использованием $\text{CuK}\alpha$ ($\lambda = 1.5418 \text{ \AA}$) излучения. Полученные результаты подтверждают химическую и фазовую чистоту образцов и соответствие их составов заданным. В работе были экспериментально исследованы поли- и монокристаллические образцы минералов магнетита, а также искусственно синтезированный по керамической технологии поликристаллический образец $\text{Fe}_{1.4}\text{Cr}_{1.6}\text{O}_4$. На рисунке 1 представлены рентгенограммы образцов поликристаллического магнетита. Полученные данные подтверждают фазовую чистоту исследуемого образца.

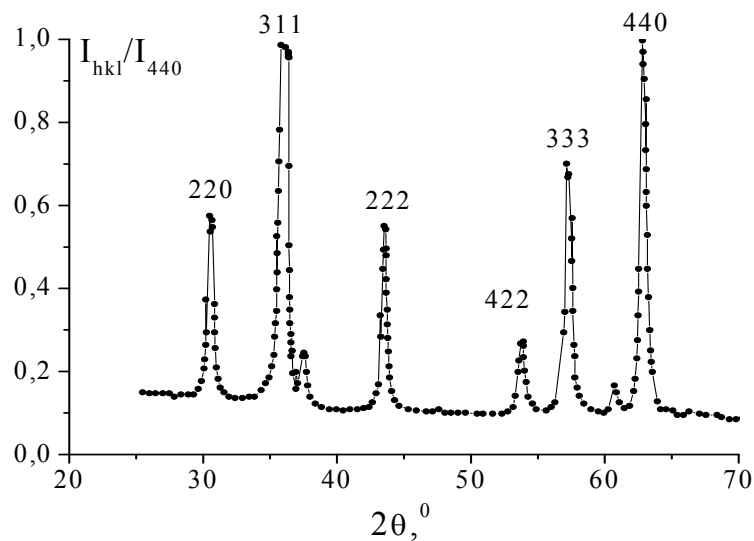


Рисунок 1 – Дифрактограмма поликристаллического Fe_3O_4

На рисунке 2 приведено изображение поверхности монокристаллического образца. Результаты количественного энергодисперсионного рентгенофлуоресцентного (EDX) анализа состава монокристалла представлены в таблице 1. Полученные результаты подтверждают высокое качество исследуемого монокристалла. Малые количества углерода и кремния – следствие полировки образца.

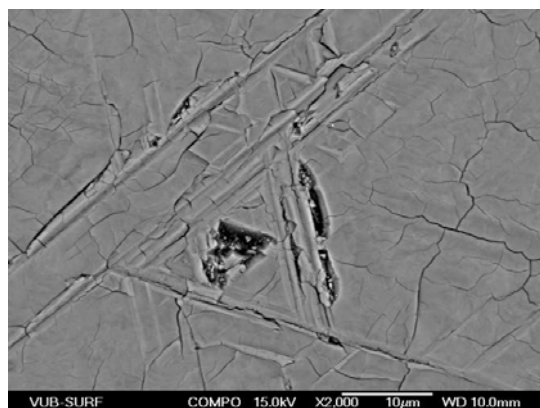


Рисунок 2 – Топография поверхности монокристалла Fe_3O_4

Таблица 1 – Данные EDX анализа химического состава монокристалла Fe₃O₄

Элемент	Массовые %	Весовые %
O K	43.97	70.30
Fe K	53.25	24.39
Si K	0.18	0.16
C K	2.40	5.12
La L	0.20	0.04
Сумма	100	100

Температурные исследования диэлектрических характеристик при $T > 300$ К выполнены в измерительной ячейке с латунными электродами, находящейся внутри нагревательной печи. Измерения проводили на ВМ – 560 при медленном (1 К/мин) охлаждении на частоте 1 кГц. Температуру образца контролировали с помощью хромель-алюмелевой термопары с точностью $\pm 0,5$ К. Термопара градуирована по реперным точкам кипения азота, воды, плавления льда и испарения углекислоты.

Для измерений при $T < 273$ К использовали кварцевый стакан с герметичной пробкой, в который помещали ячейку. Понижение температуры до 77 К достигали плавным погружением стакана в сосуд с жидким азотом. Энергию активации E_ϵ релаксационной составляющей диэлектрической поляризации, отвечающую участку экспоненциального роста ϵ' , определяли по наклону прямой $\lg(\Delta\epsilon) = f(1/T)$:

$$E_\epsilon = \frac{\lg(\Delta\epsilon_2) - \lg(\Delta\epsilon_1)}{\frac{1}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \lg e \quad (1)$$

Величина $\Delta\epsilon_i$ – разность между измеренной диэлектрической проницаемостью и ее температурно-независимой частью, экстраполированной на область высоких температур. Величину энергий активации проводимости E_σ ($\sigma = 1/\rho$, где ρ – величина удельного сопротивления) определяли по соотношению

$$E_\sigma = \frac{d \lg \sigma}{d \left(\frac{10^3}{T} \right)}. \quad (2)$$

На рисунке 3 приведены результаты экспериментального исследования действительной компоненты диэлектрической проницаемости и удельного сопротивления поликристаллического магнетита. Величина ϵ' в области низких температур достигает 10^4 единиц.

Повышение температуры приводит при достижении определенных значений величин T к близкому к экспоненциальному росту величины ϵ' . Как видно на рисунке 3, имеют место выраженные корреляции в поведении температурных зависимостей величин ϵ' и ρ образцов. А именно – с уменьшением ρ увеличивается ϵ' и наоборот.

На данных зависимостях можно выделить два участка (100–120 К) и (250–300 К) термически активируемого роста величины диэлектрической проницаемости. Первый наблюдается в области перехода Вервея [9].

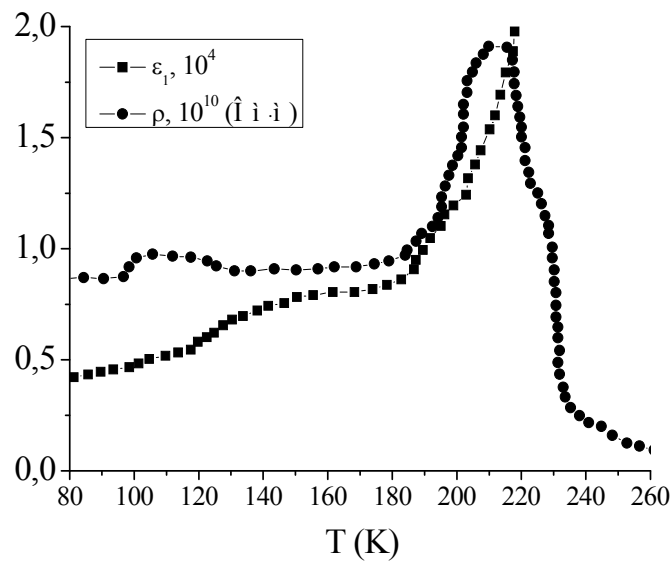


Рисунок 3 – Температурные зависимости действительной составляющей диэлектрической проницаемости и величины удельного электрического сопротивления поликристаллического Fe_3O_4

Это указывает на возможную роль в формировании диэлектрического отклика механизма перескоков электронов, происходящих между неэквивалентными ионами железа, занимающими одинаковые кристаллографические положения. В пользу данного предположения свидетельствует близость значений энергий активации $E_\epsilon \approx E_\sigma = E_\rho$, характеризующих участки экспоненциального изменения ϵ' и ρ .

При низких температурах большее количество связанных носителей заряда не может участвовать в поляризации образца, ориентируясь по отношению к направлению приложенного поля, поэтому они обеспечивают малый вклад в поляризацию и диэлектрическую проницаемость. С ростом температуры носители заряда получают достаточно тепловой энергии возбуждения для того, чтобы иметь возможность участвовать в электронной поляризации, что вызывает экспоненциальный рост ϵ' . При дальнейшем повышении температуры наступает момент, когда хаотические тепловые колебания ионов препятствуют установлению полярного состояния и диэлектрическая проницаемость, достигнув максимального значения, начинает убывать при одновременном уменьшении величины удельного сопротивления.

Как показывают результаты измерений, выполненных на синтезированном поликристаллическом образце $\text{Fe}_{1.4}\text{Cr}_{1.6}\text{O}_4$, подобное поведение обнаруживает удельное сопротивление катион замещенного материала (рисунок 4). Полученные данные указывают на возможность целенаправленного синтеза материалов с заданными свойствами при замещении части катионов Fe^{3+} в исходном магнетите изовалентными катионами переходных элементов, а также катионами редкоземельных элементов [10]. При этом возможно варьировать как абсолютные величины электрофизических характеристик, так и температурные, а в общем случае – и частотные диапазоны их существенного относительного изменения.

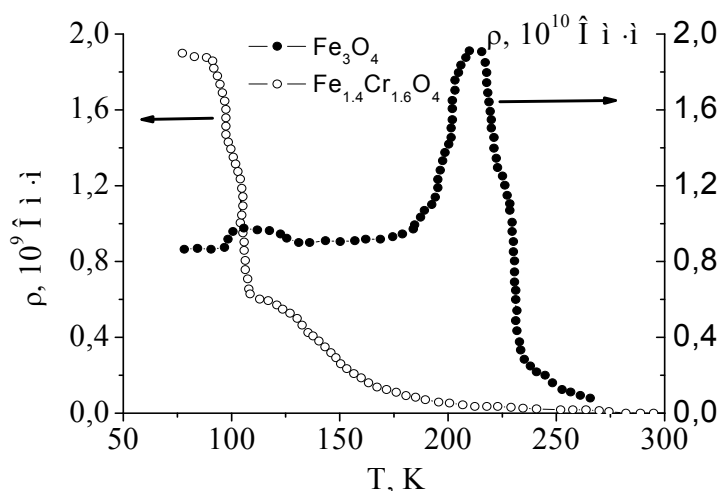


Рисунок 4 – Температурные зависимости величин удельного электрического сопротивления поликристаллических образцов Fe_3O_4 и $\text{Fe}_{1,4}\text{Cr}_{1,6}\text{O}_4$.

С целью исследования в Fe_3O_4 ферримагнитного порядка и изучения возможного его влияния на диэлектрические и проводящие свойства проведены измерения температурного хода магнитной восприимчивости образцов. Измерения проводили в режиме остывания. Результаты исследований представлены на рисунке 5.

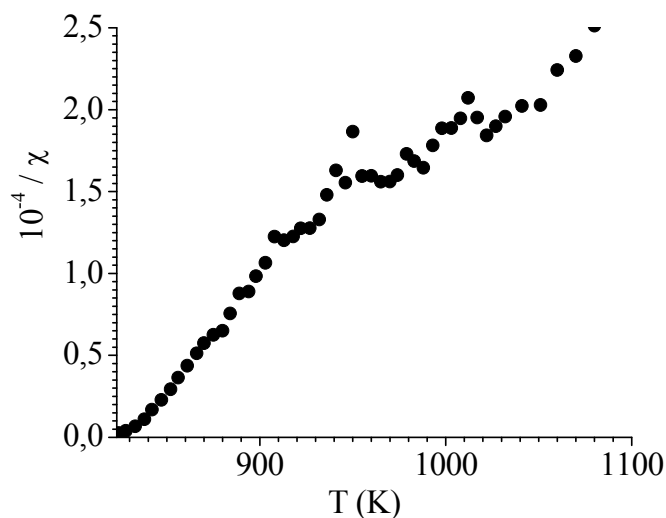


Рисунок 5 – Температурная зависимость величины обратной температурной зависимости магнитной восприимчивости монокристалла Fe_3O_4

Кривая имеет вид, характерный ферримагнетикам. Из графиков температурных зависимостей величин удельных намагниченностей поли и монокристаллических образцов, изображенных на рисунке 6, видно, что магнетит обладает высокой температурой Кюри (~ 850 K), что свидетельствует о том, что в нём А-В-межподрешёточное обменное взаимодействие велико по сравнению с внутри подрешёточными А-А и В-В взаимодействиями, а это является условием существования ферримагнитной структуры.

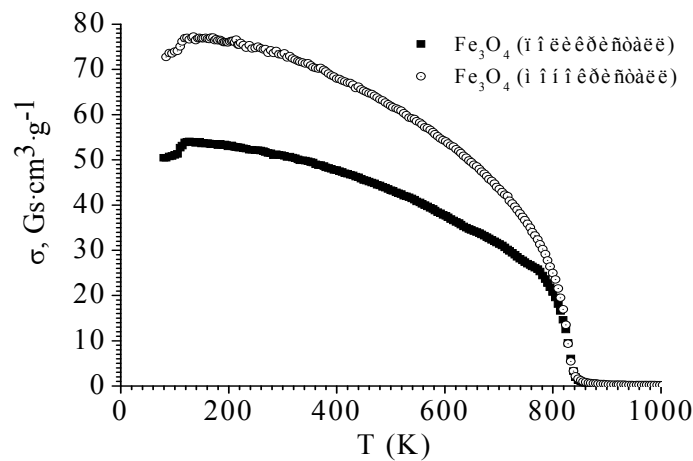


Рисунок 6 – Температурные зависимости величин удельных намагниченностей образцов Fe₃O₄

Возможность сосуществования в магнетите спонтанной намагниченности и спонтанной электрической поляризации не находится в противоречии с общими критериями возникновения ферромагнетизма и сегнетоэлектричества. Магнитное упорядочение в таких веществах возникает в результате обменного взаимодействия, а зарядовое – в результате смещения катионов. Зарядовое и магнитное взаимодействие не могут быть совершенно независимыми. Между ними существует достаточно сильная взаимосвязь. Данные, полученные на поли- и монокристаллах, отличаются абсолютными величинами, главным образом, в области низких температур и практически совпадают в высокотемпературном пределе. При этом в области перехода Вервея обе кривые обнаруживают качественное сходство и отражают выраженные корреляции электрических и магнитных характеристик

На основании анализа температурных зависимостей выявлены участки существенного изменения абсолютных величин действительных компонент комплексной диэлектрической проницаемости и удельных намагниченностей образцов Fe₃O₄ корреляции электрических и магнитных свойств. Величина ε' в поликристаллических образцах магнетита в низкочастотном пределе достигает 10⁴ единиц. Корреляция температурной зависимости низкочастотной ε' магнетита с поведением ρ(T) указывает на наличие связи релаксационных механизмов диэлектрической поляризации с миграцией носителей заряда в решетке и перескоками электронов, проходящими между разновалентными ионами железа, занимающими неэквивалентные кристаллографические положения структуре шпинели. Изменения зарядового состояния образцов в области перехода Вервея приводит к изменению интенсивности, а возможно, и типа магнитных взаимодействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eerenstein, W. Multiferroic and magnetoelectric materials / W. Eerenstein, N.D. Mathur, J.F. Scott // Nature. – 2006. – Vol. 442 (17). – P. 759–765.
2. Изюмов, Ю.А. Материалы с сильными электронными корреляциями / Ю.А. Изюмов, Э.З. Курмаев // УФН. – 2008. – Т. 78. – № 1. – С. 25–60.
3. Ziese, M. Magnetite (Fe₃O₄): a new variant of relaxor multiferroic / M. Ziese, P.D. Esquinazi, D. Pantel et al // J. Phys.: Condens. Matter. – 2012. – Vol. 24. – P. 086007–086015.

4. Yu-Qiang, W. The Evidence for Ferroelectricity on Magnetite Ceramics below the Verwey Transition / W. Yu-Qiang, W. Hong-Ying, Z. Jie et al // Chinese Phys. Lett. – 2011. – Vol. 28. – P. 127701–086015.
5. Мотт, Н.Ф. Переходы металл–изолятор / Н.Ф. Мотт // М. : Наука, 1979. – 342 с.
6. Yamauchi, K. Ferroelectricity in multiferroic magnetite Fe_3O_4 driven by noncentrosymmetric $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$ charge-ordering: first-principles study / K. Yamauchi, T. Fukushima, and S. Picozzi // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 21, № 79. – P. 212404–212408.
7. Piekarz, P. Origin of the Verwey transition in magnetite: Group theory, electronic structure, and lattice dynamics study // P. Piekarz, K. Parlinski, and A. M. Oles. / Phys. Rev. – 2007. – Vol. B 76, № 16. – P. 165124.
8. Alexe, M. Ferroelectric switching in multiferroic magnetite (Fe_3O_4) thin films Advanced Materials / M. Alexe, M. Ziese, D. Hesse et al. // Advanced Materials. – 2009. – Vol. 21, № 44. – P. 4452–4455.
9. Verwey, E. J. W. Electronic conduction of magnetite (Fe_3O_4) and its transition point at low temperature // Nature. – 1939. – Vol. 144. – P. 327–328.
10. Cvejic, Z. Influence of heavy rare earth ions substitution on microstructure and magnetism of nanocrystalline magnetite / Z. Cvejic, B. Antic, A. Kremenovic // J. Alloys Compd. – 2009. – Vol. 472. – P. 571–575.

1.1. Maked Correlation of Dielectric and Magnetic Properties of Magnetite

The temperature dependence of the electric and magnetic properties of mono- and polycrystalline magnetite minerals was studied experimentally. Based on the analysis of the received data the correlations of conductivity, permittivity and magnetic properties of samples were set.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 05.11.2014

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий, В.В. Климович, Е.А. Саванчук

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ ХОЛОДНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОГО ВЕЩЕСТВА В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получено уравнение состояния холодного сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля с индукцией, превышающей квантовый предел для свободных нерелятивистских электронов. Показана возможность применения подобного уравнения состояния для астрофизических оценок.

Нахождение уравнений состояния вещества при плотностях, превышающих порог его полной ионизации, имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. В настоящей работе получены уравнения состояния холодного сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля с индукцией, превышающей квантовый предел для свободных нерелятивистских электронов, входящих в состав такого вещества.

Как известно, в квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для заряженных фермионов номер квантового уровня Ландау $n = 0$ и магнитные моменты всех микрочастиц направлены по полю. Тогда химический потенциал, давление и плотность энергии нерелятивистского крайне вырожденного идеального ферми-газа вычисляются следующим образом (см., например, подраздел 2.2 в [1], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы):

$$\chi_q(B) = m_q c^2 + \zeta_q(B), \quad \zeta_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^2}{2m_q^3 \mu^2 B^2} + (1 - \sigma_q) \mu B, \quad (1)$$

$$P_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^3}{3m_q^3 \mu^2 B^2}, \quad (2)$$

$$w_q(B) = m_q c^2 n_q + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^3}{6m_q^3 \mu^2 B^2} + (1 - \sigma_q) n_q \mu B. \quad (3)$$

Здесь B – индукция магнитного поля, n_q – концентрация заряженных фермионов, m_q – масса фермиона, $q = e, p$ – индексы, соответствующие электронному и протонному газам, $\sigma_q = \mu_q / \mu$, μ_q – собственный магнитный момент фермиона; для электронов μ – магнетон Бора μ_B , для нуклонов μ – ядерный магнетон μ_J , $m_p \mu_J = m_e \mu_B$, $\sigma_p = 2,793$, $\sigma_e \approx 1$.

Для электронейтральной среды $n_p = n_e$. При этом нижняя граница сверхсильного магнитного поля для протонов и электронов одинакова:

$$B^{(p)} = B^{(e)} = \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_J} = 3,82 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3} \text{ (Гс)}. \quad (4)$$

Таким образом, химические потенциалы рассматриваемых ферми-газов при заданных их концентрациях уменьшаются с ростом индукции сверхсильного магнитного поля и достигают значения энергии покоя при

$$B = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\zeta_q(0)}{(\sigma_q - 1)^{1/3} \mu}. \quad (5)$$

При более высоких значениях B (в соответствующих реальных условиях вряд ли достижимых) химические потенциалы протонов меньше энергии покоя. Давления протонного и электронного газов стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$. Средние полные энергии обоих газов в сверхсильном магнитном поле уменьшаются.

Применим записанные выше соотношения для вывода уравнения состояния холодного электронно-протонного вещества (ионизованного водорода). При этом необходимо, вообще говоря, учитывать возможность существования как твердой, так и плазменной фаз электронно-протонного вещества. В [2] были сформулированы оценочные критерии устойчивости фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе и показано, что при низких температурах сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых фаза твердого тела является устойчивой и не переходит в плазменную фазу. Мы рассмотрим здесь уравнения состояния ионизованного сильно замагниченного водорода для модели крайне вырожденных идеальных ферми-газов его компонентов (приближенное описание плазменной фазы). Как следует из приведенных ниже соотношений, при наличии сверхсильных магнитных полей в модели «неподвижных» протонов и электронного газа (приближенное описание фазы твердого тела) уравнение состояния практически такое же, как и для плазменной фазы.

При плотности вещества $\rho \leq 10^6 \text{ г/см}^3$ (концентрации протонов $n_p \leq 10^{30} \text{ см}^{-3}$) электроны нерелятивистские. В этом случае давление и плотность энергии вещества связаны с соответствующими характеристиками его электронного и протонного компонентов соотношениями:

$$P = P_p + P_e = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{3m_p^3 \mu_J^2 B^2} + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} \left(\frac{m_e}{m_p} + 1\right) \approx \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} = P_e, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} w &= w_p + w_e = m_p c^2 n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{6m_p^3 \mu_J^2 B^2} + (1 - \sigma_p) n_p \mu_J B + m_e c^2 n_e + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{6m_e^3 \mu_B^2 B^2} = \\ &= (m_p c^2 + m_e c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_J B) n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{6m_e^3 \mu_B^2 B^2} \left(\frac{m_e}{m_p} + 1\right) \approx \end{aligned}$$

$$\approx (m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B) n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{6 m_p^3 \mu_\beta^2 B^2} = w_p. \quad (7)$$

Тогда уравнение состояния может быть записано следующим образом:

$$w \approx (m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B) \left(\frac{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2}{\pi^4 \hbar^6} \right)^{1/3} P_e^{1/3} + P_e / 2. \quad (8)$$

Легко видеть, что для астрофизических оценок последним слагаемым в (8) можно пренебречь с достаточной степенью точности, и уравнение состояния нерелятивистского электронно-протонного сильно замагниченного вещества принимает вид:

$$P \approx \frac{\pi^4 \hbar^6}{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2 (m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B)^3} w^3 \approx \frac{\pi^4 \hbar^6}{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2 (m_p c^2)^3} w^3 \equiv D_1 w^3. \quad (9)$$

Рассмотрим пример применения данного уравнения состояния к астрофизическим оценочным расчетам. Из ньютоновской теории тяготения известно [3, с. 155], что для уравнения состояния вещества

$$P = D w^{1+1/n} \quad (10)$$

приближенное соотношение между массой M и радиусом R астрофизической конфигурации имеет вид:

$$R^{3-n} \approx \frac{D^n (n+1)}{4 (2nG)^n} c^{2(n+1)} M^{1-n}, \quad (11)$$

где G – гравитационная постоянная. В (11) индекс политропы $n = 1/2$ в рассматриваемом случае. Тогда

$$R = \left(\frac{3}{8} \right)^{2/5} \frac{D_1^{1/5}}{G^{1/5}} c^{6/5} M^{1/5}. \quad (12)$$

Соотношение (12) устанавливает однозначную связь массы и радиуса нерелятивистской электронно-протонной конфигурации при фиксированном значении индукции магнитного поля, превышающем квантовый предел для электронов и протонов. Плотность вещества $\rho \approx m_p c^2 n_p$ (а значит и концентрация протонов) входит в (12) неявно. В реальных астрофизических объектах возможна зависимость индукции замороженного магнитного поля от плотности вещества; одна из таких зависимостей может иметь вид:

$$B = B_0 (\rho / \rho_0)^{2/3}, \quad (13)$$

где B_0 и ρ_0 – индукция магнитного поля и плотность вещества на поверхности объекта. Тогда уравнение состояния:

$$P \approx \frac{\pi^4 \hbar^6 \rho_0^{4/3}}{3m_e^3 \mu_B^2 B_0^2 (m_p c^2)^3} w^{5/3} \equiv D_2 w^{5/3}. \quad (14)$$

Здесь индекс политропы $n = 3/2$, и подстановка (14) в (11) дает

$$R \approx \left(\frac{5}{8}\right)^{2/5} \frac{D_2}{3G} c^{10/5} M^{-1/3}. \quad (15)$$

Заметим, что в отсутствие магнитного поля также имеет место $P \propto w^{5/3}$ и $R \propto M^{-1/3}$, но коэффициенты в соответствующих формулах отличны, естественно, от коэффициентов в (14) и (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с. : ил.
2. Секержицкий, В.С. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле / В.С. Секержицкий, Е.А Саванчук // Веснік Брэсцкага ун-та. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 44–47.
3. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.

V.S. Sekerzhitsky, V.V.Klimovich, E.A. Savanchuk For Question of States Equation of Cold Nonrelativistic Electron-Proton Matter in Superstrong Magnetic Field

The states equation of cold superdense electron-proton matter in presence magnetic field off induction, exceed quantum limit for free nonrelativistic electrons is receive. The possibility of application similar to states equation for astrophysical valuation is demonstrate.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2014

УДК 539.171

А.И. Серый

О СИСТЕМЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ

Рассмотрен вопрос о влиянии окружающих нуклонов на 2-частичную амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне в рамках ядернооптического подхода. Получена самосогласованная система уравнений для эффективных амплитуд с учетом фазового сдвига нуклонных волн, который обусловлен присутствием нуклонной среды и поправкой к показателю преломления и имеет место на расстоянии порядка эффективного радиуса взаимодействия пары нуклонов в соответствующем спин-изоспиновом S -состоянии.

Введение

Объект исследования в данной работе – электронно-нуклонная среда. Подходы к учету энергии ядерного межнуклонного взаимодействия и энергии кулоновского взаимодействия электронов и протонов в электронно-нуклонной среде различаются (в т.ч. с т.зр. диаграммной техники [1, с. 189, 190, 203; 2, с. 114–152]) не только в силу существенных различий между 2 взаимодействиями, но и в силу того, что кулоновская энергия Хартри протонов и электронов сокращается [1, с. 189].

Предмет исследования в данной работе – потенциальная энергия ядерного межнуклонного взаимодействия в электронно-нуклонной среде. Необходимость повышения точности учета этой энергии возникает: а) с приближением плотности среды к плотности ядерного насыщения; б) с понижением температуры. Наиболее простой учет заключается в использовании длины нуклон-нуклонного рассеяния в качестве амплитуды рассеяния [3, с. 35; 4, с. 22] либо в замене межнуклонного расстояния r в потенциале взаимодействия $U(r)$ на среднее расстояние между нуклонами, $\bar{r} \approx n^{-1/3}$. Существуют и более точные способы учета, среди которых можно отметить, например, такие: 1) использование теории возмущений по длине рассеяния [3, с. 36–42]; 2) учет многочастичных корреляций и столкновений [2, с. 145; 4, с. 113]; 3) решение интегральных уравнений Липмана–Швингера или Фаддеева–Якубовского [5, с. 597] для амплитуд нуклон-нуклонного рассеяния; 4) переход от взаимодействующих частиц к невзаимодействующим квазичастицам с помощью канонических преобразований Боголюбова [1, с. 11; 6, с. 156]; 5) учет зависимости амплитуды рассеяния от относительно импульса сталкивающихся нуклонов в теории эффективного радиуса [4, с. 19]; 6) решение 2-частичного уравнения Бете–Голдстоуна [4, с. 97] вместо 2-частичного уравнения Шредингера; 7) нахождение 1-частичного потенциала [4, с. 110] и переход от обычной массы нуклона к эффективной массе (как и в теории твердого тела [7, с. 645]), причем в случае нуклонной среды эффективная масса зависит от плотности нуклонной среды и параметров взаимодействия [3, с. 42; 4, с. 111; 8, с. 8, 14]; 8) учет зависимости амплитуды рассеяния от плотности нуклонной среды [8, с. 13, 14]; 9) переход к динамической теории ядерной материи [2, с. 99–123]. В эффективных взаимодействиях Скирма используются одновременно пункты 5), 7) и 8). У каждого из перечисленных методов свои границы применимости с т.зр. как математической сложности, так и с т.зр. согласования результатов с физической реальностью.

В данной работе рассматривается вопрос о модификации пунктов 5) и 8), в результате чего амплитуда нуклон-нуклонного рассеяния будет зависеть также от спиновой поляризации нуклонной среды. Пункты 5) и 8), как и в случае эффективных взаимодействий Скирма, следует рассматривать в неразрывной связи друг с другом. При

этом следует отметить, что эффективные потенциалы Скирма, в силу их многовариантности и многопараметричности, имеют опосредованное согласие с экспериментом. Между тем, зависимость амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния от плотности нуклонной среды и степени ее поляризации (помимо зависимости от относительного импульса 2 нуклонов) можно получить и через поправку к фазе рассеяния, опираясь на выражение для показателя преломления нейтронной волны в поляризованной по спину нуклонной среде [9, с. 52]. Этот подход можно считать более надежным с т.зр. непосредственности экспериментального обоснования.

Амплитуды рассеяния в разложении эффективного радиуса

Рассмотрим 2-частичную амплитуду рассеяния медленного нуклона на медленном нуклоне в разложении эффективного радиуса в отсутствие нуклонной среды. В частности, если оба нуклона являются нейтронами, то, в силу принципа Паули, рассеяние происходит лишь в синглетном состоянии, а амплитуда триплетного рассеяния равна нулю. При столкновении нейтронов с противоположными проекциями спина амплитуда рассеяния с учетом параметра формы P_{nn} без нуклонной среды имеет вид (a_n – длина рассеяния, r_{0n} – эффективный радиус, $\hbar(\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow})$ – импульс относительного движения, стрелки соответствуют проекциям спинов) [2, с. 20]:

$$f_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = f_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) = \frac{f_{nn}^t + f_{nn}^s}{2} = \frac{f_{nn}^s}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} r_{0n} (\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow})^2 - P_{nn} (\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow})^4 r_{0n}^3 - i |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$\delta_{nn}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) = \text{arccctg} \left(-\frac{1}{a_n |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}|} + \frac{1}{2} r_{0n} |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| - P_{nn} |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}|^3 r_{0n}^3 \right). \quad (2)$$

Т.о., видно, что в (1), (2) имеется зависимость от θ – угла между $\vec{k}_{n\uparrow}$ и $\vec{k}_{n\downarrow}$. При переходе к 1-частичной амплитуде рассеяния совершается усреднение (1), (2) по $\vec{k}_{n\downarrow}$ либо $\vec{k}_{n\uparrow}$ (т.е. по импульсам нуклона, индексы которого в амплитуде записаны во 2-ю очередь) с учетом распределения Ферми–Дирака. При температурах $T \neq 0$ и $T = 0$ получаем, например, для $f_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow})$:

$$\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{f_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) \vec{k}_{n\uparrow}^2 d|\vec{k}_{n\uparrow}|}{\exp \left\{ \frac{\varepsilon(\vec{k}_{n\uparrow}) - \mu_n}{kT} \right\} + 1}, \quad (3)$$

$$\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{k_0} f_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) \vec{k}_{n\uparrow}^2 d|\vec{k}_{n\uparrow}|. \quad (4)$$

При этом $\hbar k_0 \equiv \hbar k_{n\uparrow}^F$ – импульс Ферми. Зависимость $\varepsilon(\vec{k}_{n\uparrow})$, а также связи между химическим потенциалом нейтронов μ_n и их концентрацией n_n , k_0 и n_n имеют, очевидно, более сложный характер по сравнению со случаем свободных нейтронов, т.к.

должны иметь место и зависимости $\varepsilon(\vec{k}_{n\uparrow})$, μ , k_0 от спиновой поляризации нейтронов, а также от амплитуд взаимодействия нейтронов с нейтронами и протонами. В результате амплитуды $\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow})$ и $\bar{f}_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow})$ уже, вообще говоря, не будут равны между собой. Тогда должна исчезнуть инвариантность не только относительно перестановок спинов, но и перестановок нуклонов (изоспиновых координат). В итоге получается интегральная система уравнений для 12 амплитуд: $\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow})$, $\bar{f}_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow})$, $\bar{f}_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow})$, $\bar{f}_{pp}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow})$, $\bar{f}_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow})$, $\bar{f}_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow})$, $\bar{f}_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow})$, $\bar{f}_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow})$, $\bar{f}_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow})$, $\bar{f}_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow})$, $\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow})$, $\bar{f}_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow})$ (либо тех же амплитуд вида (3)).

Дополнительный фазовый сдвиг в ядернооптическом подходе

Влияние окружающей нуклонной среды можно учесть и в 2-частичной амплитуде нуклон-нуклонного рассеяния с использованием ядернооптического метода. Присутствие других нуклонов (число которых может быть очень большим) можно представить в виде поправки к показателю преломления нуклонной волны в среде [9, с. 50] для различных двухнуклонных спин-изоспиновых состояний:

$$\Delta n_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{n\uparrow}\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}))}{(\vec{k}_{n\downarrow} - \vec{k}_{n\uparrow})^2}, \quad (5)$$

$$\Delta n_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{n\downarrow}\bar{f}_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}))}{(\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow})^2}, \quad (6)$$

$$\Delta n_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{p\uparrow}\bar{f}_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}))}{(\vec{k}_{p\downarrow} - \vec{k}_{p\uparrow})^2}, \quad (7)$$

$$\Delta n_{pp}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{p\downarrow}\bar{f}_{pp}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}))}{(\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow})^2}, \quad (8)$$

$$\Delta n_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{n\uparrow}\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}))}{(\vec{k}_{n\downarrow} - \vec{k}_{p\uparrow})^2}, \quad (9)$$

$$\Delta n_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{n\downarrow}\bar{f}_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}))}{(\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow})^2}, \quad (10)$$

$$\Delta n_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}))}{(\vec{k}_{p\downarrow} - \vec{k}_{n\uparrow})^2}, \quad (11)$$

$$\Delta n_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{pp}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}))}{(\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow})^2}, \quad (12)$$

$$\Delta n_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}))}{(\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\uparrow})^2}, \quad (13)$$

$$\Delta n_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{n\uparrow}\bar{f}_{nn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}))}{(\vec{k}_{n\downarrow} - \vec{k}_{p\downarrow})^2}, \quad (14)$$

$$\Delta n_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = \frac{2\pi(n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{pp}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}))}{(\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\uparrow})^2}, \quad (15)$$

$$\Delta n_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) = \frac{2\pi(n_{n\downarrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{pp}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}) + n_{n\uparrow}\bar{f}_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}))}{(\vec{k}_{p\downarrow} - \vec{k}_{n\downarrow})^2}. \quad (16)$$

В отличие от формулы (4), где усреднение по импульсам производится относительно лабораторной системы, в (5)–(16) усреднение по импульсам остальных нуклонов производится в системе центра масс 2 основных нуклонов. Формулы (5)–(16) применимы, если поправки к показателям преломления намного меньше единицы. При наличии спиновой поляризации поправки (5) и (6), (7) и (8), (9)–(12), (13)–(16) не равны друг другу, т.к. $n_{p\uparrow} \neq n_{p\downarrow}$, $n_{n\uparrow} \neq n_{n\downarrow}$. В случае 2-частичных амплитуд можно взять средние арифметические, соответственно, от (5) и (6), (7) и (8), (9) и (12), (10) и (11), (13) и (15), (14) и (16). При прохождении нуклонами некоторого расстояния учет (5)–(16) должен привести к дополнительному фазовому сдвигу по отношению к (2). Это расстояние можно связать либо с комптоновской длины волны пиона, либо с эффективным радиусом взаимодействия в соответствующем спиново-изоспиновом состоянии (учитывая, что все эти величины одного порядка). При выборе 2-го варианта в случае 2 нейтронов получаем:

$$\Delta\delta_{nn}^{\downarrow\uparrow} = \Delta\delta_{nn}^{\uparrow\downarrow} = |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \cdot r_{0n} \cdot \frac{\Delta n_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) + \Delta n_{nn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow})}{2} = \frac{\pi r_{0n}}{|\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}|} \times \\ \times (n_{n\uparrow}\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}) + n_{n\downarrow}\bar{f}_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\downarrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}) + n_{p\uparrow}\bar{f}_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow})). \quad (17)$$

Для других случаев поправки распишутся аналогично:

$$\Delta\delta_{pp}^{\downarrow\uparrow} = \Delta\delta_{pp}^{\uparrow\downarrow} = |\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \cdot r_{0p} \cdot \frac{\Delta n_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) + \Delta n_{pp}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow})}{2}, \quad (18)$$

$$\Delta\delta_{np}^{\downarrow\uparrow(t)} = \Delta\delta_{pn}^{\uparrow\downarrow(t)} = |\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \cdot r_{0t} \cdot \frac{\Delta n_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) + \Delta n_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow})}{2}, \quad (19)$$

$$\Delta\delta_{np}^{\downarrow\uparrow(s)} = \Delta\delta_{pn}^{\uparrow\downarrow(s)} = |\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \cdot r_{0s} \cdot \frac{\Delta n_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) + \Delta n_{pn}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow})}{2}, \quad (20)$$

$$\Delta\delta_{pn}^{\downarrow\uparrow(t)} = \Delta\delta_{np}^{\uparrow\downarrow(t)} = |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \cdot r_{0t} \cdot \frac{\Delta n_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) + \Delta n_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow})}{2}, \quad (21)$$

$$\Delta\delta_{pn}^{\downarrow\uparrow(s)} = \Delta\delta_{np}^{\uparrow\downarrow(s)} = |\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \cdot r_{0s} \cdot \frac{\Delta n_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) + \Delta n_{np}^{\uparrow\downarrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow})}{2}, \quad (22)$$

$$\Delta\delta_{np}^{\uparrow\uparrow} = \Delta\delta_{pn}^{\uparrow\uparrow} = |\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\uparrow}| \cdot r_{0t} \cdot \frac{\Delta n_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) + \Delta n_{pn}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\uparrow})}{2}, \quad (23)$$

$$\Delta\delta_{np}^{\downarrow\downarrow} = \Delta\delta_{pn}^{\downarrow\downarrow} = |\vec{k}_{p\downarrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \cdot r_{0t} \cdot \frac{\Delta n_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) + \Delta n_{pn}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\downarrow})}{2}. \quad (24)$$

Тогда уравнение для амплитуды (1) примет вид:

$$f_{nn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{nn}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) + \Delta\delta_{nn}^{\downarrow\uparrow}) - i \right) \right)^{-1}. \quad (25)$$

С учетом (17) получаем, что (25), в отличие от (1), устанавливает взаимосвязь между различными 2-частичными амплитудами рассеяния. Запишем уравнения для амплитуд рассеяния нуклонов в других спин-изоспиновых состояниях:

$$f_{pp}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{pp}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) + \Delta\delta_{pp}^{\downarrow\uparrow}) - i \right) \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$f_{np}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{pn}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) + \Delta\delta_{np}^{\downarrow\uparrow(t)}) - i \right) \right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{p\uparrow} - \vec{k}_{n\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{pn}(\vec{k}_{p\uparrow}, \vec{k}_{n\downarrow}) + \Delta\delta_{np}^{\downarrow\uparrow(s)}) - i \right) \right)^{-1}, \quad (27)$$

$$f_{pn}^{\downarrow\uparrow}(\vec{k}_{p\downarrow}, \vec{k}_{n\uparrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{pn}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) + \Delta\delta_{pn}^{\downarrow\uparrow(t)}) - i \right) \right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{pn}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) + \Delta\delta_{pn}^{\downarrow\uparrow(s)}) - i \right) \right)^{-1}, \quad (28)$$

$$f_{np}^{\uparrow\uparrow}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{n\uparrow} - \vec{k}_{p\uparrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{np}(\vec{k}_{n\uparrow}, \vec{k}_{p\uparrow}) + \Delta\delta_{np}^{\uparrow\uparrow}) - i \right) \right)^{-1}, \quad (29)$$

$$f_{np}^{\downarrow\downarrow}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) = \frac{1}{2} \left(|\vec{k}_{n\downarrow} - \vec{k}_{p\downarrow}| \left(\text{ctg}(\delta_{np}(\vec{k}_{n\downarrow}, \vec{k}_{p\downarrow}) + \Delta\delta_{np}^{\downarrow\downarrow}) - i \right) \right)^{-1}. \quad (30)$$

Уравнения (25) – (30) (с учетом (18)–(24), (5)–(16) и (3), (4)) образуют самосогласованную систему.

Заключение. Основные результаты

Рассмотрен вопрос о влиянии окружающих нуклонов на 2-частичную амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне в рамках ядернооптического подхода. Получена самосогласованная система уравнений для эффективных амплитуд с учетом фазового сдвига нуклонной волны, обусловленного наличием нуклонной среды и поправки к показателю преломления, на расстоянии порядка эффективного радиуса взаимодействия пары нуклонов в соответствующем спин-изоспиновом s -состоянии.

Часть идей, лежащих в основе данной работы, принадлежит В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов // М. : Физматлит, 2003. – 392 с.
2. Eisenberg, J.M. Nuclear Theory : in 3 vol. / Microscopic Theory of the Nucleus / J.M. Eisenberg, W. Greiner. – Amsterdam, London : North-Holland Publishing Company, 1972. – Vol. 3 – 519 p.

3. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособ. для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц / Статистическая физика : в 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – 3-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. IX – 496 с.
4. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский // М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
5. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол. : Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Сов. энциклопедия, 1990. – Т. II. Добротность – Магнитооптика. – 703 с.
6. Соловьев, В.Г. Теория атомного ядра: Квазичастицы и фононы / В.Г. Соловьев. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 304 с.
7. Физическая энциклопедия : в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол. : Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Больш. Рос. энциклопедия, 1998. – Т. 5: Стробоскопические приборы – Яркость. – 691 с.
8. Ахиезер, А.И. К теории сверхтекучести ядерной материи на основе Фермижидкостного подхода / А.И. Ахиезер [и др.] // ЖЭТФ – 1997. – Т. 112, вып. 1(7). – С. 3–24.
9. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.

A.I. Sery On System of Self-Consistent Equations for Nucleon-Nucleon Scattering Amplitudes

The question about the influence of surrounding nucleons on 2-particle nucleon-nucleon scattering amplitude in the framework of nuclear optics approach is considered. A self-consistent system of equations is obtained for effective amplitudes considering the phase shift of nucleon waves, which is caused by the presence of nucleon medium and by the correction to the index of refraction and take place at the distance of the order of effective radius of interaction of the couple of nucleons at corresponding spin-isospin s -state.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.10.2014

УДК 539.122, 539.125, 539.128.2

А.И. Фикс, М.И. Левчук, А.И. Львов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ ФОТОПОГЛОЩЕНИЯ НА НЕЙТРОНЕ ИЗ ПРОТОННЫХ И ДЕЙТРОННЫХ ДАННЫХ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ОТ 700 ДО 1500 МЭВ I. ФЕРМИ-РАЗМАЗКА И НЕАДДИТИВНЫЕ ПОПРАВКИ

Пересмотрено общее соотношение между полными сечениями фотопоглощения на нуклонах и дейтроне. Предложена процедура снятия эффектов размазки, обусловленных Ферми-движением нуклонов в дейтроне, и определения сечений фотопоглощения на свободных нуклонах. Наряду с некогерентными (аддитивными) вкладами, найденными в импульсном приближении в области энергий 700–1500 МэВ, рассчитаны неаддитивные поправки, связанные с интерференцией процессов фоторождения мезонов на протоне и нейтроне. Вычислены также поправки, вызванные взаимодействием нуклонов и мезонов в конечном состоянии.

Введение

Настоящая работа была мотивирована недавними результатами экспериментов на установке GRAAL по измерению полных сечений фотопоглощения на протоне и дейтроне при энергиях фотона в области 700–1500 МэВ [1–4] и их использованием для нахождения полного сечения фотопоглощения на нейтроне. Интригующая особенность новых данных состоит в том, что они указывают на примерно одинаковые и большие силы $F_{15}(1680)$ -резонанса как в случае протона, так и нейтрона (см., например, рисунок 5 работы [4]). Во многих предыдущих работах, как, например, в [5], сила этого резонанса для нейтрона оказывалась гораздо меньшей. Particle Data Group [6] приводит следующие относительные брэнчинги распада $F_{15}(1680)$ в γN :

$$\begin{aligned} \text{Br}(F_{15}(1680) \rightarrow \gamma p) &= 0.21 - 0.32\% \\ \text{Br}(F_{15}(1680) \rightarrow \gamma n) &= 0.021 - 0.046\% \end{aligned} \tag{1}$$

Значения (1) основаны, главным образом, на парциально-волновых анализах фоторождения пионов. Однако некоторые недавние эксперименты по фоторождению η -мезонов [7–10] на нейтроне и комптоновскому рассеянию на нейтроне [11] указывают на возможное существование другой узкой резонансной структуры, которая видна в случае нейтрона примерно при той же полной энергии в 1680 МэВ. Такой возможный резонанс может также давать вклад в полное сечение фотопоглощения на дейтроне.

В данной работе мы делаем попытку пересмотреть использовавшуюся ранее процедуру нахождения полного сечения фотопоглощения на нейтроне из дейтронных данных и сделать ряд существенных улучшений. Предыдущая процедура подробно описана в работе группы из Дарсбери (Daresbury), которая выполнила детальные измерения полного сечения фотопоглощения на дейтроне $\sigma_d(\omega)$ [5] и протоне $\sigma_p(\omega)$ [12] в диапазоне энергий фотона ω от 265 до 4215 МэВ. В области нуклонных резонансов они полагали, что имеет место следующее соотношение

$$\sigma_d(\omega) = F(\omega)[\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)], \tag{2}$$

где фактор $F(\omega)$ был введен для того, чтобы учесть эффекты размазки из-за фермиевского движения нуклонов в дейтроне. Этот фактор находился численным интегрирова-

нием (выше упомянутой размазкой) протонного сечения, исходя из известного импульсного распределения нуклонов в дейтроне, и он одинаково применялся как к протону, так и к нейтрону. Наконец, нейтронные сечения находились, точка за точкой, с шагом 25 МэВ из соответствующих протонных и дейтронных сечений при тех же энергиях с использованием соотношения (2).

Очевидные недостатки соотношения (2) состоят в следующем. Во-первых, эффекты размазки предполагались равными для протона и нейтрона, что является неверным в случае разной энергетической зависимости сечений.

Во-вторых, в действительности индивидуальные нуклонные сечения не связаны алгебраическим соотношением типа (2) с дейтронным сечением при той же энергии, так что основания для применения поточечной процедуры извлечения $\sigma_n(\omega)$ нет. Вместо этого можно найти только среднее от сечения $\sigma_n(\omega)$ по конечному энергетическому интервалу, и, следовательно, здесь должна применяться обоснованная процедура снятия размазки.

В-третьих, в уравнении (2) не учитывались неаддитивные по нуклонам поправки, связанные, в основном, с интерференционными вкладами и взаимодействиями рождающихся частиц в конечном состоянии. Такие поправки вычисляли Бродский и Памплин в работе [13] при энергиях $\omega \geq 2$ ГэВ в предположении, что сечение фоторождения на нуклоне при высоких энергиях определяется дифракционным фоторождением векторных мезонов (ρ, ω, ϕ) , которые затем взаимодействуют со вторым нуклоном. Поправки Бродского и Памплина учитывались в анализе высокоэнергетической части данных Дарсбери [5], а также при фотопоглощении на протоне и дейтроне при энергиях 20–40 ГэВ [14]. Однако при более низких энергиях (в том числе, энергиях GRAAL) вклад векторных мезонов в полное сечение фотопоглощения фотонов мал, но другие каналы рождения могут оказаться заметными. И это действительно так, как показано ниже. Насколько нам известно, неаддитивные поправки к соотношению (2) до сих пор не анализировались при энергиях ниже 2 ГэВ.

В настоящей работе мы улучшаем процедуру, развитую группой Дарсбери [5], во всех трех указанных аспектах.

1. Ферми-размазка (folding)

В действительности общее соотношение между дейтронным и нуклонными сечениями $\sigma_d(\omega)$, $\sigma_p(\omega)$ и $\sigma_n(\omega)$ имеет более сложный вид по сравнению с (2), а именно

$$\sigma_d(\omega) = \hat{F}[\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)] + \Delta\sigma_{pn}(\omega). \quad (3)$$

Здесь \hat{F} не есть численный фактор, а является оператором, который размазывает нуклонные сечения в соответствии с Ферми-движением нуклонов в дейтроне, а $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$ – аддитивная поправка, которая будет обсуждена ниже. Соотношение (3) имеет вид интегрального уравнения Фредгольма относительно искомой суммы $\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$.

Первое слагаемое в уравнении (3) возникает от квадратов модулей диаграмм некогерентного импульсного приближения (ИП) (см. рисунок 1, который взят из работы [15]) в предположении малости эффектов схода с массовых поверхностей промежуточных нуклонов, что является обоснованным вследствие малости энергии связи дейтрона ($E_b = 2.2246$ МэВ). Сечения $\sigma_p(\omega)$ и $\sigma_n(\omega)$ возникают из-за квадратов модулей амплитуд инклюзивных процессов $\gamma p \rightarrow X$ и $\gamma n \rightarrow X'$, соответственно, после интегрирования по фазовому пространству.

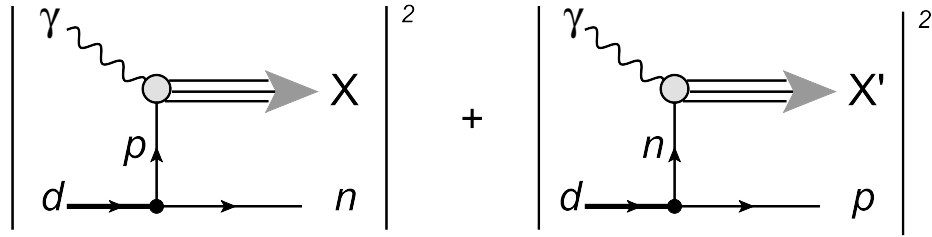


Рисунок 1 – Диаграммы некогерентного ИП для $\sigma_d(\omega)$

В нерелятивистском приближении оператор \hat{F} имеет вид

$$\hat{F}\sigma_N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) \frac{\omega^{\text{eff}}}{\omega} \sigma_N(\omega^{\text{eff}}) dp_z. \quad (4)$$

Здесь

$$\omega^{\text{eff}} = \omega \left(1 - \frac{p_z}{M}\right) \quad (5)$$

есть эффективная (сдвинутая из-за эффекта Доплера) энергия для движущегося нуклона массы M , когда его продольная компонента (вдоль направления фотонного пучка) равна p_z . $W(p_z)$ – есть распределение продольной компоненты нуклонов в дейтроне

$$W(p_z) = \int |\psi(p)|^2 \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^3}, \quad (6)$$

нормированное как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) dp_z = 1, \quad (7)$$

а фактор $\omega^{\text{eff}} / \omega$ учитывает изменение потока фотонов, видимых движущимся нуклоном. Как и в работе [5], мы используем в дальнейшем хюльтеновскую волновую функцию дейтрона [16]

$$\psi(r) = \frac{k}{r} (e^{-ar} - e^{-br}), \quad \int_0^{\infty} |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = 1, \quad (8)$$

где $a = 45.7 \text{ MeV}/c$, $b = 260 \text{ MeV}/c$ и $k^2 = ab(a+b) / [2\pi(a-b)^2] = 12.6 \text{ MeV}/c$.

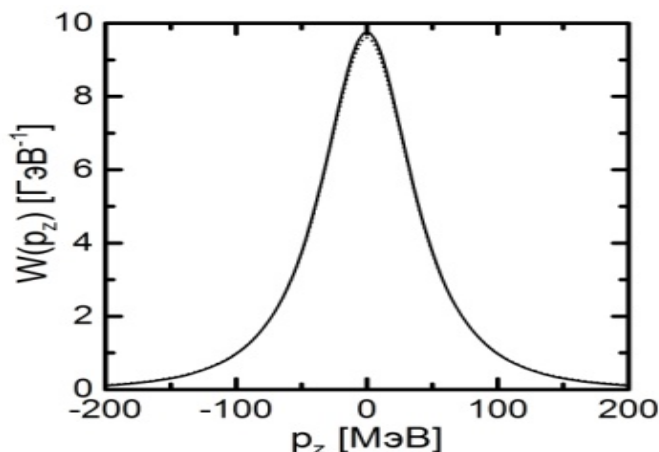
В импульсном пространстве

$$\psi(p) = 4\pi k \left(\frac{1}{a^2 + p^2} - \frac{1}{b^2 + p^2} \right), \quad (9)$$

так что функция $W(p_z)$ в (4) имеет вид

$$W(p_z) = 2k^2 \left(\frac{1}{a^2 + p_z^2} + \frac{1}{b^2 + p_z^2} + \frac{2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b^2 + p_z^2}{a^2 + p_z^2} \right). \quad (10)$$

Распределение (10) показано на рисунке 2. Оно оказывается очень близким к распределению, полученному с более аккуратной волновой функцией (CD-Bonn [17]). В наших расчетах мы обрезаем импульсы $|p_z| > p_{\text{cut}} = 200 \text{ MeV}/c$, где $W(p_z)$ становится малой, но импульс p_z остается нерелятивистским. Отметим, что вклад от области $|p_z| > 200 \text{ MeV}/c$ в нормировочный интеграл (7) составляет только 1.3%.



Сплошная и пунктирная кривые: результаты с хюльтеновской и CD-Bonn волновыми функциями дейтрона соответственно

Рисунок 2 – Распределение $W(p_z)$ продольного импульса в дейтроне

Хюльтеновское распределение для $W(p_z)$ дает следующее усредненное значение продольного импульса нуклонов в дейтроне

$$\langle p_z^2 \rangle^{1/2} = 53.9 \text{ МэВ}/c \quad (11)$$

(или 54.9 МэВ/с для CD-Bonn волновой функции). Оно дает также следующую неопределенность в энергии фотона, видимого движущимся нуклоном

$$\Delta\omega^{\text{eff}} = \omega \frac{\langle p_z^2 \rangle^{1/2}}{M} = 0.057\omega. \quad (12)$$

Другими словами, это соотношение характеризует «энергетическое разрешение дейтрона» как «спектрального измерительного прибора» для нейтрона. При энергии $\omega \approx 1000$ МэВ только среднее нуклонное сечение по области ± 60 МэВ может быть извлечено из данных по полному сечению фотопоглощения на дейтроне. Определение же $\sigma_n(\omega)$ с шагом 25–30 МэВ, как это сделано в работах [4;5] в выше указанной области энергий, не является обоснованным.

2. Неаддитивные поправки

Слагаемое $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$ в соотношении (3) учитывает различные эффекты, которые нарушают аддитивность сечений фотопоглощения на отдельных нуклонах. Среди них:

- интерференция диаграмм фоторождения на протоне и нейтроне, показанных на рисунке 1;
- взаимодействие образующихся частиц (взаимодействие в конечном состоянии, ВКС), включающее как взаимодействие несвязанных, так и связанных нуклонов (образование дейтрона в конечном состоянии);
- взаимодействие пионов и других мезонов, родившихся на одном нуклоне, со вторым нуклоном в дейтроне;
- поглощение пионов и наличие таких процессов, как фоторасщепление дейтрона без пионов в конечном состоянии.

Таким образом, слагаемое $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$ имеет вид

$$\Delta\sigma_{pn}(\omega) = \sigma_{\gamma d \rightarrow pn}(\omega) + \sigma_{\gamma d \rightarrow \pi^0 d}(\omega) + \Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi NN}(\omega) + \sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi d}(\omega) + \Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi NN}(\omega) + \dots, \quad (13)$$

где члены $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi NN}(\omega)$ и $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi NN}(\omega)$ означают неаддитивные вклады в соответствующие сечения из-за интерференции и ВКС.

В дальнейшем мы детально обсудим слагаемые в правой части (13), имея в виду энергии эксперимента GRAAL, т.е. $700 \text{ МэВ} < \omega < 1500 \text{ МэВ}$. При таких энергиях динамика фоторождения обычно описывается ИП с поправками на ВКС. Более того, при этих энергиях сечения когерентного образования одиночных пионов $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ и фоторасщепления дейтрона $\gamma d \rightarrow pn$ малы. Отметим, что при таких энергиях открываются и другие каналы, например, рождение трех и более π -мезонов, η -мезона и др. Однако полные сечения этих процессов в указанной области энергий также малы. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся обсуждением только последних трех слагаемых в соотношении (13).

Для оценки неаддитивных эффектов от некогерентного однопионного фоторождения $\gamma d \rightarrow \pi NN$ мы используем модель, включающую ИП и однопетлевые поправки от NN и πN ВКС. Соответствующее диаграммное представление таких вкладов показано на рисунках 3 и 4.



Рисунок 3 – Диаграммы ИП для реакции $\gamma d \rightarrow \pi NN$

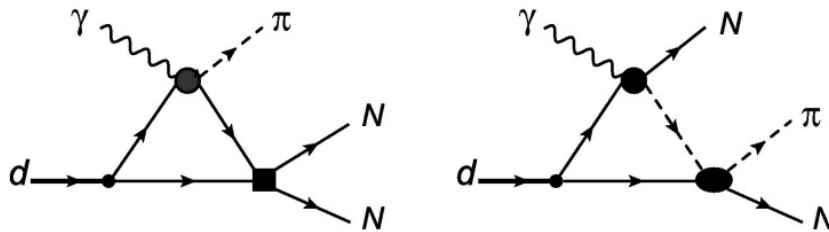
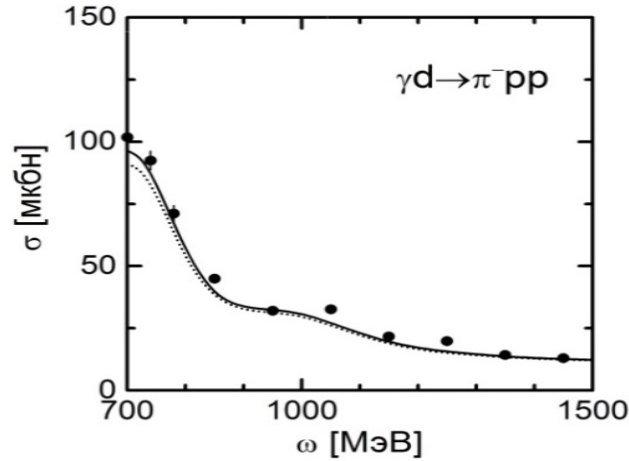


Рисунок 4 – Диаграммы NN и πN ВКС для реакции $\gamma d \rightarrow \pi NN$

Формализм расчета и основные блоки диаграмм 3 и 4 детально обсуждены в работах [18–20]. В частности, элементарные амплитуды реакции $\gamma N \rightarrow \pi N$ брались из MAID анализа [21] с соответствующей экстраполяцией вне массовой поверхности. Для расчета амплитуд реакций $NN \rightarrow NN$ и $\pi N \rightarrow \pi N$ использовались результаты SAID анализа [22] также с экстраполяцией вне массовой поверхности.

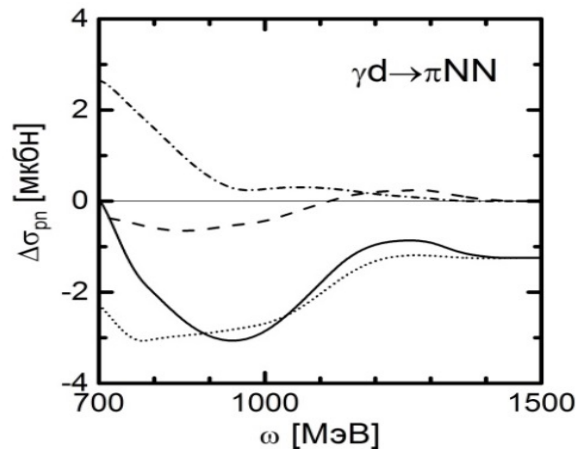
Реалистичность такой модели демонстрирует рисунок 5, на котором видно удовлетворительное согласие предсказаний модели с имеющимися данными по реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$ в области энергий $\omega = 700 - 1500 \text{ МэВ}$. Экспериментальные данные по двум другим каналам реакции, $\gamma d \rightarrow \pi^+ nn$ и $\gamma d \rightarrow \pi^0 pn$, в этой области энергий отсутствуют.



Пунктирная и сплошная и кривые: предсказания работ [19,20] в ИП и с поправками на ВКС соответственно.
Данные из работы [23]

Рисунок 5 – Полное сечение реакции $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$

В построенной модели неаддитивные эффекты от процесса $\gamma d \rightarrow \pi NN$ возникают из-за интерференции диаграмм ИП, приведенных на рисунке 3, а также от ВКС (диаграммы на рисунке 4) и интерференции диаграмм 3 и 4. Описанный выше подход дает неаддитивную поправку $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi NN}(\omega)$, показанную на рисунке 6. Она отрицательна и составляет только несколько микробарн при энергиях выше 700 МэВ.

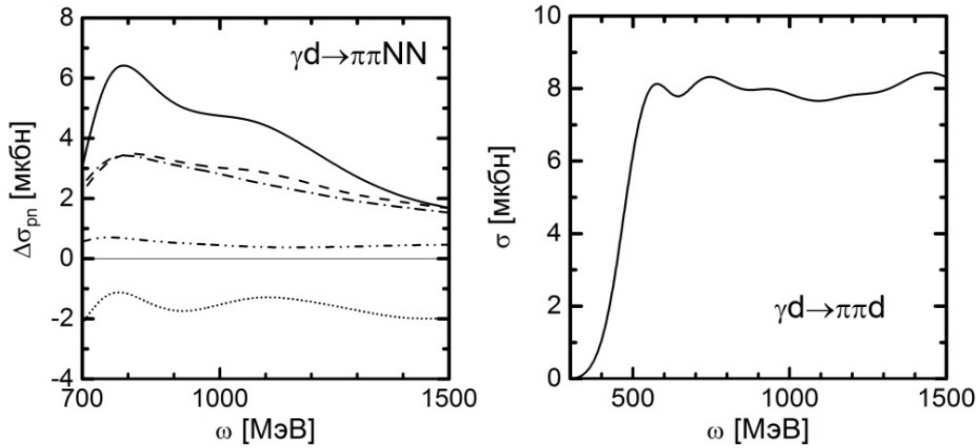


Пунктирная, штрихованная и штрихпунктирная кривые: отдельные вклады π^0 , π^+ и π^- каналов соответственно.
Сплошная кривая: полный вклад

Рисунок 6 – Вклад в неаддитивную поправку $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi NN}(\omega)$

Для расчета вкладов от фоторождения двух π -мезонов, $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi NN}(\omega)$ и $\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi d}(\omega)$ мы используем известную модель, развитую в работе [24]. В случае некогерентного канала $\gamma d \rightarrow \pi\pi NN$ она включает диаграммы, аналогичные изображенным на рисунках 3 и 4, но без учета πN ВКС. Необходимый для таких расчетов оператор двойного пионного фоторождения на нуклонах был также построен в работе [24]. Этот же оператор использовался для расчета полного сечения для когерентного канала $\gamma d \rightarrow \pi\pi d$.

Результаты расчетов показаны на рисунке 7. Видно, что в некогерентном образовании двух π -мезонов имеется некоторое сокращение вкладов различных каналов реакции $\gamma d \rightarrow \pi\pi NN$, и суммарный вклад составляет от 2 до 6 микробарн в рассматриваемой области энергий. Вклад же когерентного канала $\gamma d \rightarrow \pi\pi d$ примерно одинаков при всех энергиях от 700 до 1500 МэВ и составляет около 8 микробарн.



На левом рисунке пунктирная, штрихованная, штрихпунктирная, штрих-дважды-пунктирная кривые: вклады каналов $\pi^+\pi^-$, $\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^0$ и $\pi^0\pi^0$ соответственно. Сплошная кривая: полный вклад

Рисунок 7 – Вклады в неаддитивные поправки $\Delta\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi NN}(\omega)$ и $\sigma_{\gamma d \rightarrow \pi\pi d}(\omega)$

Суммируя все вклады, приведенные на рисунках 6 и 7, мы приходим к нашему окончательному результату для неаддитивной поправки $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$ в области энергий от 700 до 1500 МэВ. Эта поправка, показанная на рисунке 8, составляет от 9 до 13 микробарн. Если учесть, что измеренное полное сечение фотопоглощения на дейтроне при таких энергиях составляет от 300 до 400 микробарн [5], а статистическая ошибка измерений меньше 10 микробарн, то это означает, что пренебрежение поправкой $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$, как это было сделано в работах [1–5], не является обоснованным приближением.

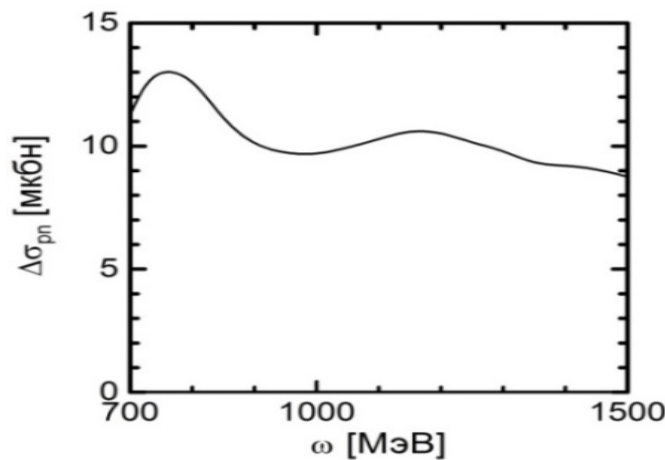


Рисунок 8 – Полная неаддитивная поправка $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$

Заклучение

Таким образом, в представленной работе значительно усовершенствован метод извлечения полного сечения фотопоглощения на нейтроне из данных на протоне и дейтроне. Предложено интегральное уравнение, которое позволяет снять Ферми-размазку, обусловленную движением нуклонов в дейтроне. Вычислена неаддитивная поправка в дейтронное сечение, обусловленная эффектами интерференции и взаимодействием в конечном состоянии.

В следующей работе будет дано решение интегрального уравнения (3) и с его помощью извлечены полные сечения на нейтроне из имеющихся экспериментальных данных на протоне и дейтроне.

Работа поддержана грантом Ф14–035 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и программой “Физика элементарных частиц и фундаментальная ядерная физика” Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Measurement of the total photoabsorption cross section on a proton in the energy range 600–1500 MeV at the GRAAL / O. Bartalini [et al.] // Phys. Atom. Nucl. – 2008. – Vol. 71, №1. – P. 75–82.
2. Total cross section for photoabsorption on light nuclei in the energy range 600–1500 MeV / N.V. Rudnev [et al.] // Phys. Atom Nucl. – 2010. – Vol. 73, № 8. – P. 1469–1473.
3. Недорезов, В.Г. Эксперименты на пучках гамма-квантов, получаемых методом обратного комптоновского рассеяния / В.Г. Недорезов // ЭЧАЯ. – 2012. – Том 43, Вып. 3. – С. 637–674.
4. Simultaneous photo-production measurement of π and η mesons on nucleons at 700–1500 MeV / A. Turinge [et al.] // Progr. Part. Nucl. Phys. – 2012. – Vol. 67. – P. 406–411.
5. The total deuteron hadronic cross section in the energy range 0.265–4.215 GeV / T.A. Armstrong [et al.] // Nucl. Phys. – 1972. – Vol. B 41, № 4. – P. 445–473.
6. The Review of Particle Physics / J. Beringer [et al.] // Phys. Rev. – 2012. – Vol. D 86, № 1. – P. 1–1490.
7. [Evidence for a narrow structure at \$W \sim 1.68\$ -GeV in eta photoproduction on the neutron](#) / V. Kuznetsov [et al.] // Phys. Lett. – 2007. – Vol. B 647, № 1. – P. 23–29.
8. Narrow resonance at $E_\gamma = 1200$ MeV in the $d(\gamma, \eta)pn$ reaction / F. Miyahara [et al.] // Progr. Part. Nucl. Phys. – 2007. – Vol. 168, № 1. – P. 90–96.
9. Quasi-free photoproduction of eta-mesons off the deuteron / I. Jaegle [et al.] // Eur. Phys. J. – 2011. – Vol. A 47, № 1. – P. 89–115.
10. Narrow structure in the excitation function of η photoproduction of the neutron / D. Werthmüller [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 111, № 3. – P. 232001.
11. Evidence for a narrow $N^*(1685)$ resonance in quasi-free Compton scattering on the neutron / V. Kuznetsov [et al.] // Phys. Rev. – 2011. – Vol. C 83, № 2. – P. 022201.
12. Total hadronic cross section of γ rays in hydrogen in the energy range 0.265–4.215 GeV / T.A. Armstrong [et al.] // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D 5, № 7. – P. 1640–1652.
13. Brodsky, S.J. Photon-nucleus total cross sections / S.J. Brodsky, J. Pumplin // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 182, № 7. – P. 1797–1652.
14. Полные сечения адронного фотопоглощения на водороде и дейтерии при энергии 10–40 ГэВ / А.С. Белоусов [и др.] // ЯФ. – 1975. – Т. 21, Вып. 3. – С. 556–563.
15. West, G.B. The Doppler effect in the extraction of total neutron cross sections from deuterium data with particular emphasis on asymptotic hadron and deep inelastic electron scattering // G.B. West // Ann. of Phys. – 1972. – Vol. 74, № 2. – P. 464–502.

16. Хюльтен, Л. Проблема взаимодействия двух нуклонов / Л. Хюльтен, М. Сугавара // Структура атомного ядра: под ред. А.С. Давыдова. – М., 1959. – С. 7–165.
17. Machleidt, R. High-precision, charge dependent Bonn nucleon-nucleon potential / R. Machleidt // Phys. Rev. – 2001. – Vol. C 63, № 2. – P. 024001.
18. Fix, A. Incoherent pion photoproduction on the deuteron with polarization observables. II. Influence of final state rescattering / A. Fix, H. Arenhövel // Phys. Rev. – 2005. – Vol. C 72, № 6. – P. 064005.
19. Levchuk, M.I. Incoherent pion photoproduction on the deuteron in the first resonance region / M.I. Levchuk [et al.] // Phys. Rev. – 2006. – Vol. C 74, № 1. – P. 014004.
20. Levchuk, M.I. Helicity-dependent reaction $\gamma d \rightarrow \pi NN$ and its contribution to the GDH sum rule for the deuteron / M.I. Levchuk // Phys. Rev. – 2010. – Vol. C 82, № 4. – P. 044042.
21. A unitary isobar model for pion photo- and electroproduction on the proton up to 1 GeV / D. Drechsel [et al.] // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. A 645, № 1. – P. 145–174.
22. Analysis of pion photoproduction data / R.A. Arndt [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C 66, № 5. – P. 055213.
23. Measurement of the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^- pp$, and determination of cross sections for the reaction $\gamma n \rightarrow \pi^- p$, at photon energies between 0.2 and 2.0 GeV / P. Benz [et al.] // Nucl. Phys. – 1973. – Vol. B 65, № 1. – P. 158–209.
24. Fix, A. Double-pion photoproduction on nucleon and deuteron / A. Fix, H. Arenhövel // Eur. Phys. J. – 2005. – Vol. A 25, № 1. – P. 115–135.

***A.I. Fix, M.I. Levchuk, A.I. L'vov* Extraction of the Total Photoabsorption Cross Section on the Neutron from the Proton and Deuteron Data at Energies Between 700 and 1500 MeV I. Fermi-Smearing and Nonadditive Corrections**

A general relation between the total photoabsorption cross sections on nucleons and deuteron has been reconsidered. We propose a procedure to unfold smearing effects in the incoherent contribution caused by Fermi motion of nucleons in the deuteron and get photoabsorption cross sections for free nucleons. Beyond the incoherent (additive) contributions found in the impulse approximation at energies 700–1500 MeV, nonadditive corrections caused by interference of meson photoproduction processes on the proton and the neutron and those due to final state interactions of nucleons and mesons have been calculated.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.08.2014

УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

О СВОЙСТВАХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 1R_4 С ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства 1R_4). Исследуются однородные пространства вида G/G_i , где G_i – однопараметрические подгруппы Ли группы Ли вращений пространства 1R_4 . Среди всех таких однородных пространств находятся редуктивные однородные пространства.

1. Введение

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства 1R_4).

Изучением однородных пространств занимались многие ученые: Лумисте Ю. [1], Феденко А.С. [2], Белько И.В. [3], Ведерников В.И. [4], а так же их ученики: Кононов С.Г., Юдов А.А. [5–7] и др.

В их работах исследуются свойства подмногообразий однородных пространств, связности на однородных пространствах, проводится классификация однородных пространств. Особенно много исследований посвящено изучению богатых дифференциально-геометрическими свойствами редуктивных однородных пространств. Редуктивные однородные пространства активно исследовались зарубежными геометрами: Номидзу К. [8], Кобаяси Ш. [9] и др. Много работ по редуктивным однородным пространствам выполнено Лумисте Ю. и его учениками. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Проведена классификация редуктивных однородных пространств с фундаментальной группой движений пространства 1R_4 , причем для таких редуктивных пространств найдены все редуктивные дополнения. Показано приложение этих исследований для изучения дифференциально-геометрических свойств исследуемых редуктивных однородных пространств.

Результаты исследований могут быть применены в дифференциальной геометрии при исследовании связностей и их расширений в главных расслоениях, а также при изучении инвариантных аффинных связностей в главных расслоениях.

2. Постановка задачи

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G с точностью до сопряженности имеется [3]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . Ставится задача среди всех та-

ких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i , где G_i – связная однопараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \overline{G} и \overline{G}_i , затем находятся все пятимерные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \overline{G}_i . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i .

3. Редуктивные однородные пространства с однопараметрической группой стационарности

3.1 Рассмотрим однородное пространство H/G_1 , $\overline{G}_1 = \{i_9\}$. Будем находить пятимерные подпространства в \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_1$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде: $\{i_5 + \lambda i_9, i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$. Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad \overline{G}_1$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случаях 3°, 4°, 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.2 Для однородного пространства H/G_2 , $\overline{G}_2 = \{i_6\}$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде: $\{i_5 + \lambda i_9, i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$.

Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad \overline{G}_2$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda = \pm 1, -\lambda\mu + \nu = 0, -\lambda\nu + \mu = 0$. Из которой получаем, что $\lambda = 1, \mu = \nu$ или $\lambda = -1, \mu = -\nu$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda\mu = 0, \mu^2 = 1, \lambda = 0$. Решая эту систему, находим, что $\lambda = 0, \mu = \pm 1$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.3 Рассмотрим однородное пространство $H/G_3, \overline{G_3} = \{i_5 - i_8\}$.

В случае 1° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_6 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_{10}, i_8 + \sigma i_{10}, i_9 + s i_{10}\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$s + \lambda\nu + \lambda\mu = 0, \mu^2 + \mu\nu = -1, \nu^2 + \mu\nu = 1, \sigma\mu + \sigma\nu + s = 0, \lambda + \nu s + s\mu + \sigma = 0.$$

Складывая второе и третье уравнение этой системы, получаем: $\mu = -\nu$. Подставляя найденные значения во второе уравнение системы, получаем $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 1° противоречива.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + \lambda\sigma = 1, \\ -\lambda\mu + \mu\sigma = 0, \\ -\lambda\nu + \nu\sigma = 0, \\ -\lambda\sigma + \sigma^2 = 1, \\ \mu + \nu = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему получаем, что $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 2° противоречива.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = -\nu, \lambda = 1$. Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = 1, \lambda = 0$. Получили инвариантное подпространство в виде: $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.4 Рассмотрим однородное пространство $H/G_4, \overline{G_4} = \{i_6 + \theta i_9\}$.

В случае 1° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_6 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_{10}, i_8 + \sigma i_{10}, i_9 + s i_{10}\}.$$

Система инвариантности приводится к виду

$$-\nu - \theta\sigma = 0, \theta\nu - \sigma = 0, \lambda\mu + \lambda = 0, -\lambda\theta + \mu = 0.$$

Отсюда следует, что $\nu = 0, \sigma = 0, \mu = 0, \lambda = 0$.

Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $-\nu - \sigma\theta = 0$, $\theta\nu - \sigma = 0$, $\lambda + \theta\mu = 0$, $-\theta\lambda + \mu = 0$. Отсюда следует, что $\nu = 0$, $\sigma = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\lambda^2\theta + \lambda\mu - \nu = -\theta$, $-\theta\lambda\mu + \mu^2 + \theta\nu = -1$, $(1 - \theta\nu)\lambda + (\nu + \theta)\mu = 0$. Из первого уравнения системы: $\lambda\mu - \nu = -\theta(\lambda^2 + 1)$, из второго уравнения системы: $\lambda\mu - \nu = \frac{1 + \mu^2}{\theta}$, т.е.

$-\theta(\lambda^2 + 1) = \frac{1 + \mu^2}{\theta}$. Откуда $-\theta^2(\lambda^2 + 1) = 1 + \mu^2$. Система инвариантности в случае 3° противоречива.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует

$$\lambda^2 + \lambda\mu\theta = -1, \lambda\mu + \theta\mu^2 = \theta, \mu - \theta\lambda = 0. \quad (1)$$

Третье уравнение системы домножим на λ , и от второго уравнения отнимем третье, получим $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Подставив найденные значения в первое уравнение системы (1), получим противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 4° противоречива.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.5 Подведем итоги исследования однородных пространств с однопараметрическими группами стационарности точки в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Ниже перечислены все инвариантные подпространства для всех однопараметрических подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского $(\overline{G_1} - \overline{G_4})$:

1) для пространства H/G_1 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$;

2) для пространства H/G_2 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$, $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$;

3) для пространства H/G_3 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$;

4) для пространства H/G_4 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

Теорема 2. Пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$ не является дополнительным к $\overline{G_1}$, пространства $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$ не являются дополнительными к $\overline{G_2}$, пространства $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$ не являются

дополнительными к $\overline{G_3}$, пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s = 0$ не является дополнительным к $\overline{G_4}$.

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Пространство H/G_1 , является редуکتивным, редуکتивными дополнениями к $\overline{G_1}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$, пространство H/G_2 является редуکتивным, редуکتивными дополнениями к $\overline{G_2}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$, пространство H/G_3 не является редуکتивным, пространство H/G_4 является редуکتивным, редуکتивными дополнениями являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца / И.В. Белько, А.С. Феденко // ДАН БССР. – 1970. – т. XIY. – № 6. – С. 393–395.
2. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца-Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – №1. – С. 5–13.
3. Ведерников, В.И. Симметрические пространства и сопряженные связности / В.И. Ведерников // Уч. зап. Казанского ун-та. – 1965. – Т. 125 – кн. 1. – С. 7–59.
4. Рийвес, К. Подгруппы группы движений Евклида пространства R_5 и их орбиты / К. Рийвес // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1975. – Выпуск 355. – С. 35–56.
5. Лунисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лунисте // Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965. – Минск. – С. 247–258.
6. Тутаев, Л.К. К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского / Л.К. Тутаев // Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965. – Минск. – С. 290–307.
7. Юдов, А.А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры / А.А. Юдов // Вестник БГУ им. В.И. Ленина. – 1977. – №1. – С. 16–21.
8. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М : Мир, 1964. – 533 с.
9. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т. I – М : Наука, 1981. – 343 с.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т. II – М : Наука, 1981. – 413 с.
11. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан. – М. – 1949. – С. 119–149.

E.V. Zubej, A.A. Judov About the Properties of Reductive Spaces Generated by the Group of Motions of Space 1R_4 with One-Parameter Groups of Stationarity

One-dimensional sub-groups of group G of rotation of space 2R_4 and corresponding homogeneous spaces G/G_i are considered in the article. Among these homogeneous spaces reduce homogeneous spaces were found.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.10.2014

УДК 004.7

А.А. Козинский, В.И. Басин

ОБРАБОТКА СОБЫТИЙ В СИСТЕМЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ BRAIN EDUCATION

Статья содержит описание математической модели используемой автором дистанционной системы образования Brain Education для обработки отложенных многофазовых событий, распределения компонентов системы на нескольких рабочих машинах, снижения нагрузки на основной компонент (веб-приложение), распределения нагрузки между разрабатываемыми сервисами для обеспечения отказоустойчивости и обеспечения высокой производительности. Основными компонентами данной модели являются: источники событий, вещатели, очереди, обработчики, машины состояний и триггеры. Каждый компонент выполняет определённую задачу, продвигая сообщение вперёд, к следующим компонентам.

Дистанционная система образования Brain Education, разработанная автором, – многофункциональная высоконагруженная система, предназначенная для организации процесса дистанционного обучения, проведения соревнований, онлайн тестов и алгоритмических решений на различных языках программирования.

В подобной системе возникает потребность обработки большого количества фоновых операций, событий, триггером которых не является конечный пользователь, операции слишком затратные по производительности, однако требуют запуска не очень часто, поэтому их лучше выполнять как можно реже или выполнение которых с ожиданием завершения предоставит неудобство пользователю из-за существенных по длительности моментов ожидания завершения операции. К примеру: создание таблицы результатов соревнования, отправка электронной почты с инструкциями по восстановлению пароля, создание рассылок по почте с новостями, результатами соревнований и контрольных работ, процесс построения рейтинговой таблицы, тестирования алгоритмических задач (этот процесс может длиться несколько минут, поэтому пользователь не захочет ждать отклика системы так долго, будучи заблокированным для каких-либо других действий). Кроме того, существуют события, основанные на целой серии определённых действий пользователя, которые необходимо обработать, быть может, через месяц, на основании данных действий (например, пользователь отправил наилучшее решение задачи в начале соревнования и затем выложил разбор этой задачи в своём блоге – о таком событии необходимо уведомить всех пользователей системы, участвовавших в данном соревновании).

Для решения подобных проблем, а также обеспечения системе масштабируемости путём разнесения её составных компонентов на различные машины была спроектирована следующая математическая модель обработки отложенных событий.

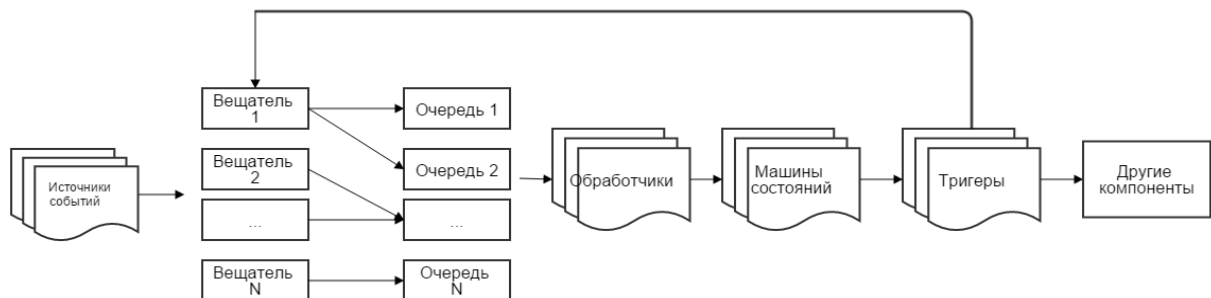


Рисунок 1 – Схема обработки событий

В приведенной схеме (рисунок 1) в качестве источников событий могут выступать любые компоненты системы, которые генерируют события каких-либо необходимых вычислений или обработок. Каждый из таких генераторов сконфигурирован таким образом, чтобы сообщать определённому вещателю о сгенерированном событии.

Вещатели кладут полученные сообщения в специальные очереди сообщений. Вещатель может положить сообщение в несколько очередей одновременно, если событие необходимо обработать несколькими компонентами системы параллельно. Для реализации подобной функциональности существует специальная «карта», позволяющая соответствующим образом сконфигурировать вещатели.

Очереди сообщений хранят записи о сгенерированных событиях и занимаются распределением этих событий между разработчиками, подписанными на определённые очереди. Очереди сообщений также выполняют функцию балансировщика нагрузки путём распределения задач между несколькими обработчиками на основе их загруженности. К примеру, если у нас существует 3 одновременно запущенных сервиса отправки почты, установленных как на одной машине, так и на нескольких, то очереди сообщений будут распределять задания на отправку почты между тремя сервисами в зависимости от их загруженности. Кроме того, подобные очереди обеспечивают возможность масштабирования системы путём разнесения составных компонентов и сервисов на разные машины и привязки их к определённым очередям. В таком случае каждый процесс должен быть независим от другого процесса или использовать те же очереди для обработки событий совместно с другими сервисами.

В качестве обработчиков событий выступают машины (компоненты распределённой системы), на которые установлен разработанный сервис рассылки почты, тестирования алгоритмов, подвода статистики, анализа различного рода активности в системе дистанционного обучения и другие сервисы. Они подписаны на те очереди сообщений, где хранятся события для них, и как-только они поступают, обработчик начинает выполнение необходимой операции.

После того, как обработчик закончил обработку события он переключает состояние соответствующей машины состояния. К примеру, существует событие, когда пользователь решит 100 задач, отправить ему на электронную почту уведомление, что он выиграл подарочную майку. Поэтому как только пользователь успешно решил какую-либо задачу, необходимо обновить счётчик решённых на соответствующей машине состояний.

После того, как состояние события было обновлено, триггеры выполняют анализ текущего состояния, а затем передачу статуса события следующему компоненту системы или снова сообщают вещателю о том, что событие следует положить в очередь для дальнейшей обработки. К примеру, если пользователь решил 56 задач из 100, триггер снова передаст данное событие вещателю.

Полученный подход успешно используется в системе дистанционного обучения Brain Education. Созданы специальные инструменты за мониторингом состояния данной системы и оповещения администраторов о необходимости обслуживания компонентов описанной модели в случае их выхода из строя. Реализация данной модели позволила поднять надёжность системы, отказоустойчивости, распределить нагрузку на обработку сложных событий, требующих больших временных затрат.

В качестве очереди сообщений была использована библиотека RabbitMQ для NET [1]. RabbitMQ – платформа, реализующая систему обмена сообщениями между компонентами программной системы (Message Oriented Middleware) на основе стандарта AMQP (Advanced Message Queuing Protocol). RabbitMQ выпускается под Mozilla Public License. RabbitMQ создан на основе испытанной Open Telecom Platform, обеспе-

чивает высокую надёжность и производительность промышленного уровня и написан на языке Erlang. RabbitMQ состоит из:

- Сервера RabbitMQ
- Поддержки протоколов HTTP, XMPP и STOMP
- Клиентских библиотек AMQP для Java и .NET Framework (поддержка других языков программирования реализована в ПО других производителей)
- Различных плагинов (таких, как плагины для мониторинга и управления через HTTP или веб-интерфейс, или плагин «Shovel» для передачи сообщений между брокерами)

Поддерживается горизонтальное масштабирование для построения кластерной архитектуры. В качестве движка базы данных для хранения сообщений используется Mnesia.

Обработчики и триггеры в системе дистанционного обучения – это разработанные автором windows-сервисы [2], установленные на дополнительных машинах. Подобные сервисы – это службы ОС Windows – приложения, автоматически (если настроено) запускаемые системой при запуске Windows и выполняющиеся вне зависимости от статуса пользователя.

Конфигурация обработчиков осуществляется с помощью соответствующего XML-элемента в файле конфигурации приложения.

```
<worker type="Mailer" id="d852966b-c688-4fba-a1d2-cc251a5d435e"
name="Console_Mail_Runner" updateInterval="5000" mqKey="mails_send" />

<messaging host="localhost" user="guest" password="guest">
  <queues>
    <queue key="mails_send" exchange="mails_exchange"
routeKeys="send" queue="mails_send" durable="true" />
  </queues>
  <exchanges>
    <exchange key="mails_exchange" name="mails_exchange"
type="direct" durable="true" />
  </exchanges>
</messaging>

<mails>
  <account host="smtp.gmail.com" sender="bredu.support@gmail.com" pass-
word="*****" port="587" enableSSL="true" />
</mails>
```

Листинг 1 – Конфигурация обработчика задач на рассылку почтовых сообщений

В данной конфигурации (Листинг 1) описаны 3 блока: worker, messaging, mails.

Блок worker описывает текущего обработчика. Первый атрибут type означает тип обработчика. Здесь возможны несколько вариантов: Mailer, Tester, StatisticsBuilder, Offerer, Rater. Тип обработчика Tester производит тестирование алгоритмических решений на соответствующей виртуальной машине, где он установлен. StatisticsBuilder производит анализ статистических данных, данных о действиях пользователей системы, генерирует отчёты, основываясь на данных в используемом хранилище данных и передаёт полученную информацию остальным обработчиками, например Offerer на основе успешности определённых пользователей может создавать задачи для Mailer для рассылки электронных писем с поздравлениями на их почтовые адреса. Rater строит таблицы рейтинга по всем компонентам дистанционной системы: движку системы

ведения блогов, олимпиадах, соревнованиях, тестах, успеваемости на соответствующих курсах и так далее.

Атрибут `Id` в конфигурации обработчика содержит уникальную строку для идентификации данного обработчика, чтобы в дальнейшем использовать значение этого атрибута для анализа статистических данных и логов конкретного обработчика, предоставляя специальный интерфейс для мониторинга работы компонентов системы. Ввиду отсутствия информативности о типе выполняемых обработчиком задач в значении атрибута `Id` введён дополнительный атрибут `Name`, предназначенный для более удобного мониторинга состояния системы.

Атрибут `UpdateInterval` позволяет регулировать время простоя сервиса для более гибкой настройки распределения нагрузки между обработчиками одного и того же типа, где на машинах с большим значением этого поля нагрузка сравнительно меньше машин с малым значением.

Атрибут `mqKey` используется для подписки на соответствующую очередь событий, предназначенных для процессинга обработчиками данного типа.

Блок `messaging` описывает каким образом обработчик будет взаимодействовать с системой обмена сообщениями. Описание соответствующих очередей находится в элементе `queues`, а вещателей – в элементе `exchanges`. В обеих секциях сообщается информация о схеме маршрутизации сообщений, чтобы перед запуском обработчика произвести соответствующую валидацию на стороне сервера обмена сообщениями.

Блок `account` описывает необходимые для отправки почты детали: сервер почты, информация для авторизации (имя пользователя и пароль к соответствующему аккаунту), порт и возможность использования защищённого соединения.

При старте сервиса обработчик считывает конфигурационную информацию, запускает проверку её валидности для избежания непредвиденного поведения системы и только потом начинает процесс обработки соответствующих сообщений.

```
static void Main(string[] args)
{
    MainAsync(args).Wait();
    Console.WriteLine("Press any key to exit...");
    Console.ReadKey();
    Environment.Exit(0);
}
static async Task MainAsync(string[] args)
{
    try
    {
        if (args.Length > 0 && args[0] == "/setup")
            await Task.Run(() => SetupMessaging());
        else
            await RunWorkerAsync();
    }
    catch (Exception e)
    {
        DependencyResolver.Logger.Error("EXCEPTION", e);
    }
}
private static void SetupMessaging()
{
    DependencyResolver.LoadSetupModules();
    DependencyResolver.Logger.Debug("Configuring...");
}
```



```
var configurator = DependencyResolver.GetService<Configurator>();
configurator.Configure();
DependencyResolver.Logger.Debug("Done");
}
private static async Task RunWorkerAsync()
{
    DependencyResolver.LoadWorkerModules();
    var mailWorker = DependencyResolver.GetService<MailWorker>();
    await mailWorker.StartAsync();
}
```

Листинг 2 – Консольный вариант обработчика

В приведенном фрагменте кода (Листинг 2) показана возможность запуска обработчика в виде обычного консольного приложения. Запуск этого приложения может осуществляться с параметром или без. Если указан параметр “/setup”, то обработчик на основе конфигурационной информации, указанной в файле конфигурации обработчика, произведёт настройку сервера обмена сообщениями (создание каналов вещания, привязка к ним новых очередей сообщений, настройка маршрутизации и др.) для принятия и отправки соответствующих событий через систему другим её компонентам.

Метод `RunWorkerAsync` запускает непосредственно процесс обработки сообщений в очереди. В первую очередь он загружает модуль со всеми необходимыми для него сервисами и зависимостями для последующего автоматического внедрения этих зависимостей в соответствующие объекты, декларирующие определённые зависимости от других компонентов кода. Такой подход в реализации внедрения зависимостей называется `Dependency Injection` в рамках концепта `Inversion of Control` [3] – широко используемой практики в мире программирования. Альтернативой подобному подходу является создание класса напрямую, используя его конструктор зависимым от него объектом. Инверсия управления (`Inversion of Control`, `IoC`) – важный принцип объектно-ориентированного программирования, используемый для уменьшения связанности в компьютерных программах. Данное понятие подразумевает, что модули верхнего уровня не должны зависеть от модулей нижнего уровня. И те, и другие должны зависеть от абстракции, а абстракции не должны зависеть от деталей. Детали должны зависеть от абстракций. Одной из реализаций `IoC` является внедрение зависимостей (`dependency injection`). Внедрение зависимости используется во многих фреймворках, которые называются `IoC-контейнерами`. Если сравнить с более низкоуровневыми технологиями, `IoC-контейнер` – это компоновщик, который собирает не объектные файлы, а объекты ООП (экземпляры класса) во время исполнения программы. Очевидно, для реализации подобной идеи было необходимо создать не только сам компоновщик, но и фабрику, производящую объекты. Аналогом такого компоновщика (естественно, более функциональным) является компилятор, одной из функций которого является создание объектных файлов. Предоставление программисту инструментов внедрения зависимостей даёт значительно большую гибкость в разработке и удобство в тестировании кода.

После загрузки всех необходимых модулей запускается асинхронный процесс, который собственно и выполняет обработку сообщений. Завершить работу обработчика, запущенного в режим консоли можно простым сочетанием клавиш `Ctrl + C`. Для остановки работы обработчика, запущенного в виде службы `Windows`, необходимо остановить соответствующий сервис в Диспетчере задач или с помощью консоли управления всеми сервисами системы.

```
public override async Task ProcessTaskAsync(string queueStr)
{
    var taskId = Guid.Parse(queueStr.Substring(queueStr.IndexOf(':') + 1));
    var mailTask = _mailService.FindTask(taskId);
    mailTask.MarkStarted();
    await _mailService.CommitAsync();
    try
    {
        SendMailImmediately(mailTask.Destination, mailTask.Subject, mail-
Task.Body);
        mailTask.MarkCompleted(true);
    }
    catch (Exception e)
    {
        mailTask.MarkFailed();
        _log.Error("Error processing task " + mailTask.Id, e);
    }
    await _mailService.CommitAsync();
}
```

Листинг 3. Фрагмент обработчика задач на рассылку электронных писем

В приведенном фрагменте кода (Листинг 3) описано каким образом идёт обработка сообщений в очереди. Изначально из текста сообщения узнаётся ссылка соответствующего задания mailTask на отправку в базе данных. Далее происходит процесс нахождения этого задания в хранилище и ставится дополнительная метка о том, что обработчик начал работу над соответствующим заданием. Отправка сообщения осуществляется специальным методом SendMailImmediately, который по заданным получателю теме и сообщению создаёт электронное письмо, а затем производит отправку.

Таким образом, описанная система обработки событий позволила успешно распараллелить вычислительный процесс, благодаря модульности системы, возможности разнесения её составных компонентов на несколько рабочих машин, где обработчики и сервисы могут работать независимо от главного процесса. Реализованы несколько алгоритмов распределения нагрузки между сервисами обработки данных, событий, позволяющие эффективно настроить систему во время высоких нагрузок. Созданные инструменты мониторинга позволяют получать уведомления о состоянии системы в любой момент времени и анализа причин отказа любого компонента системы, основываясь на собранных логированной информации и статистике. Таким образом, приведенная модель успешно реализована и применена на практике в дистанционной системе образования Brain Education.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высоконадёжная очередь сообщений RabbitMQ [Электронный ресурс]. – URL : <http://rabbitmq.com>. – Дата доступа : 20.10.2014.
2. Windows Servive [Электронный ресурс]. – URL : http://en.wikipedia.org/wiki/Windows_service. – Дата доступа : 20.10.2014.
3. Inverntion of Control [Электронный ресурс]. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Inversion_of_control. – Дата доступа : 20.10.2014.

***A. Kazinski, V. Basin* Event Processing in the Brain Education Distance Learning System**

The article contains a description of the mathematical model used by the authors of remote education system Brain Education for deferred processing multiphase event distribution system components on multiple machines working, reduce the load on the main Comp (web application), the distribution of the load between the tailor services for fault tolerance and high performance . The main components of this model are: the sources of the events, broadcasters, line handlers, state machines, and triggers. Each component performs a certain task, promoting the message forward to the following components.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.10.2014

УДК 917.948

В.М. Мадорский

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В статье рассмотрена процедура оптимизации функционала с квадратичным критерием качества на траекториях дифференциальной задачи, имеющей периодические решения. Результат распространяется на задачи с почти периодическими решениями. Рассмотренные подходы применяются для решения одной достаточно общей нелинейной минимаксной задачи.

Задачам оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества посвящена обширная литература (см., например, [1] и приведённую там библиографию). Значительно менее изучен и представляет интерес периодический случай. Рассмотрим, например, задачу вибротранспортирования в следующей постановке: материальная точка с массой m безотрывно движется по лотку вибротранспортёра, расположенного под углом α к горизонтали. На точку действует сила трения с коэффициентом трения f , сила веса, сила вязкого сопротивления $-kx'(t) = -ky(t)$, где x' – скорость перемещения частицы, на рабочий орган подаётся T -периодическое воздействие $u(t)$ под углом β к оси Ox (ось Ox расположена под углом α к горизонтали).

Тогда закон движения частицы запишется в виде:

$$y'(t) = -\frac{k}{m}y(t) - (t \sin \beta - \cos \beta)u(t) - g(\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

$$y(0) = y(T), u(0) = u(T).$$

Требуется найти такое T -периодическое воздействие $u(t)$, чтобы при минимальном воздействии получить максимальную скорость перемещения материальной точки, т.е. необходимо найти пару (y, u) , удовлетворяющую условию

$$J(u) = \int_0^T (\gamma u^2(t) - \delta y^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$\gamma, \delta > 0$ – некоторые константы.

Рассмотрим задачу поиска оптимального управления периодическими решениями в более общей постановке.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T (u^* K u + u^* L^* x + x^* L u + x^* M x) dt \quad (1)$$

на траекториях системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad (2)$$

где $f(t)$ – непрерывная T -периодическая функция, $x(t)$ – T -периодический n -мерный вектор, $u(t)$ – T -периодический m -мерный вектор ($m < n$), $x \in R^n, u \in R^m, A(t), B(t), K(t), L(t), M(t)$ – T -периодические непрерывные матрицы соответствующих размерностей, M -симметричная, K -симметричная и положительно определённая матрица (*-знак транспонирования). К классу допустимых будем относить такие управления $u \in U$, для которых уравнение (2) имеет решение и функционал (1) ко-

нечен. Допустимое управление \bar{u} будем называть оптимальным, если для $\forall u \in U$ имеет место соотношение

$$J(u) \equiv J(u, x) \geq J(\bar{u}, \bar{x}) \equiv J(\bar{u}).$$

Вводим вспомогательные уравнения типа Риккати и линейное

$$\begin{aligned} dN/dt = NBK^{-1}B^*N^* + N(BK^{-1}L^* - A) + \\ + (LK^{-1}B^* - A^*)N^* + LK^{-1}L^* - M; N(0) = N(T), \end{aligned} \quad (3)$$

$$dr/dt = (LK^{-1}B^* - A^* + NBK^{-1}B^*)r + Nf; r(0) = r(T). \quad (4)$$

Полагаем, что уравнение (3) имеет хотя бы одно T -периодическое решение. Вопрос о существовании хотя бы одного решения нелинейной граничной задачи подробно обсуждается в работах [2; 3].

Пусть $\tilde{N}(t)$ – решение уравнения (3). Транспонируя (3) и вычитая из (3) полученное соотношение, имеем, что $\tilde{N}(t) = \tilde{N}^*(t) + P$, где P – постоянная матрица со свойством: $P + P^* = 0$. Так как этому свойству удовлетворяет нуль-матрица и \tilde{N}^* удовлетворяет уравнению (3), то одним из решений уравнения (3) будет $\tilde{N}(t) = \tilde{N}^*(t)$.

Симметричность матрицы $N(t)$ используем для преобразования подынтегрального выражения в (1), для чего выразим M из (3), Ax из (2), Nf из (4) и после несложных выкладок имеем:

$$\begin{aligned} x^*Mx = x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBK^{-1}L^*x + x^*LK^{-1}B^*Nx + x^*LK^{-1}L^*x + \\ + x^*NBu + u^*B^*Nx + x^*LK^{-1}B^*r - u^*Br - x^*NBK^{-1}B^*r - r^*BK^{-1}L^*x - \\ - f^*r - rBK^{-1}B^*Nx - \frac{d}{dt}(x^*Nx - x^*r - r^*x) - r^*Bu - r^*f. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), используя T -периодичность r, N, x , представим функционал (1) в виде

$$\begin{aligned} J(u) = \int_0^T [u^* + x^*(LK^{-1} + NBK^{-1}) - r^*BK^{-1}] K [u + \\ + (K^{-1}L^* + K^{-1}B^*N)x - K^{-1}B^*r] dt - \int_0^T (r^*BK^{-1}B^*r + f^*r + r^*f) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу положительной определённости K минимум в (6) достигается на векторе

$$\bar{u} = -K^{-1}[(L^* + B^*N)x - B^*r], \quad (7)$$

а соответствующее ему оптимальное решение находим из системы

$$dx/dt = (A - BK^{-1}L - BK^{-1}B^*N)x + BK^{-1}B^*r + f, x(0) = x(T). \quad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть уравнение $dy/dt = (A - BK^{-1}L^* - BK^{-1}B^*N)y$ не имеет T -периодических решений, кроме нулевого. Тогда оптимальная пара (\bar{u}, \bar{x}) находится из (8), (7), при этом N, r являются T -периодическими решениями задач (3)–(4).

Замечание 1. Решение задачи (1) – (2) сводится к последовательному решению задач (3), (4), (8) с подстановкой найденных $N(t)$, $r(t)$, $x(t)$ в (7). Решение задачи (1) – (2) на базе необходимых условий оптимальности сводится к решению краевых задач, одна из которых – уравнение типа Риккати. Полученная в результате пара (u, x) подлежит ещё проверке на оптимальность. В нашем случае приходится дополнительно решать линейное уравнение (4), однако описанная выше процедура, осуществляя синтез оптимального управления, позволяет найти оптимальную пару (u, x) , если она существует.

В скалярном случае и при $N = N^*$ результат Халаяна [4] совпадает с нашим.

Управление процессом на практике часто осуществляется при помощи двух управляющих воздействий. Одно из управлений должно максимизировать некоторый показатель качества, например скорость перемещения материальной частицы при вибротранспортировке, кинетическую энергию. Другое управление выбирается из условия минимума критерия качества, например минимальные энергетические затраты. В такой постановке приходится решать задачу минимакса некоторого функционала при наличии дифференциальных связей.

Результат оказывается верным и в случае почти периодических решений. Полученный результат применим для решения одной минимаксной задачи.

Рассматривается управляемый периодический процесс

$$dx/dt = Ax + Bu + Cv + f. \quad (9)$$

Пусть при подстановке T -периодических пар $u \in U \subset R^m$ и $v \in V \subset R^p$ уравнение (9) имеет T -периодическое решение $x(t) \in X \subset R^n$ и функционал (10) конечен:

$$J(u, v) = \int_0^T (u^* Ku + u^* L^* x + x^* Lu + x^* Mx - v^* Rv) dt. \quad (10)$$

Если при некоторой паре $(u, v) \in U \times V$ и соответствующем им $\bar{x} \in X$ выполняется условие

$$J(\bar{u}, \bar{v}) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} J(u, v), \quad (11)$$

то тройка $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x})$ будет называться оптимальным процессом. Предполагаем, что оптимальный процесс существует. В дополнение к вышеуказанному пусть $R(t)$ – симметричная непрерывная T -периодическая матрица и $R(t) > 0$.

Вводим вспомогательные уравнения типа Риккати (12), (13) и линейные (14) – (16):

$$dN/dt = NBK^{-1}B^*N^* + N(BK^{-1}L^* - A) + (LK^{-1}B^* - A^*)N^* + LK^{-1}L^* - M, N(0) = N(T), \quad (12)$$

$$dN_1/dt = N_1NCR^{-1}C^*N^*N_1^* + N_1(NCR^{-1}C^* - A_1) + (CR^{-1}C^*N^* - A_1^*)N_1^* + CR^{-1}C^* - BK^{-1}B^*; N_1(0) = N_1(T), A_1 = LK^{-1}B^* - A^* + NBK^{-1}B^*, \quad (13)$$

$$dr/dt = A_1r + Nc + Nf; r(0) = r(T), \quad (14)$$

$$dr_1/dt = (CR^{-1}C^*N - A_1^* + N_1NCR^{-1}C^*N)r_1 + N_1Nf; r_1(0) = r_1(T), \quad (15)$$

$$dx/dt = (A - BK^{-1}L^* - BK^{-1}B^*N)x + (BK^{-1}B^* - CR^{-1}C^*Nr_1 + f; x(0) = x(T). \quad (16)$$

Полагаем, что уравнения (12), (13) имеют T -периодические решения N, N_1 и соответствующие этим решениям существуют T -периодические решения уравнений (14), (15).

Теорема 2. Пусть уравнение $dy/dt = (A - BK^{-1}L^* - BK^{-1}B^*N)y$ не имеет T -периодических решений, кроме нулевого. Тогда оптимальные $\bar{u} \in U, \bar{v} \in V$ определяются формулами

$$\bar{u}(t) = -K^{-1}[(L^* + B^*N)x - B^*r] \tag{17}$$

$$\bar{v}(t) = -R^{-1}C^*[(E + NN_1)r - Nr_1] \tag{18}$$

E – единичная матрица, а $\bar{x} \in X$ – T -периодическое решение уравнения (16).

Доказательство.

По схеме, рассмотренной выше, с учётом T -периодичности $r, r_1, N = N^*, N_1 = N_1^*, x$ преобразовываем $x^*Mx, r^*BK^{-1}B^*r$, а затем функционал (10) к виду

$$J(u, v) = \int_0^T G^*KGdt - \int_0^T G_1^*RG_1dt + \int_0^T (f^*Nr_1 + r_1^*Nf - f^*r - r^*f + r_1^*NCR^{-1}C^*Nr_1)dt; \tag{19}$$

$$G = u + K^{-1}[(L^* + B^*N)x - B^*r], G_1 = v + R^{-1}C^*[(E + NN_1)r - Nr_1]$$

В силу положительной определённости K функционал (19) имеет минимум по $u \in U$ при $G=0$, в силу положительной определённости R функционал (19) имеет максимум по $v \in V$ при $G_1 = 0$. Из этих условий находим \bar{u} и \bar{v} по формулам (17), (18) и, подставляя в (9), получим уравнение (16) для нахождения оптимального T -периодического $\bar{x} \in X$. Теорема доказана.

Замечание 2. Аналогичный результат получен в работе [5], однако там требуется, чтобы уравнения Риккати типа (12), (13) имели единственные T -периодические решения. Эффективная проверка этого факта чрезвычайно затруднительна.

В качестве примера рассмотрим технику получения оптимальной пары на модельной задаче. Рассматривается оптимизационная задача

$$dx/dt = -x + u + \sin t; x(0) = x(2\pi),$$

$$J(u, x) = \int_0^{2\pi} (u^2(t) + x^2(t))dt \rightarrow \min,$$

которая описывает процесс в электрической цепи переменного тока с индуктивностью и сопротивлением, в цепи действует электродвижущая сила $E = \sin t$, x – сила тока, u – управляющее воздействие. Решаем задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Гамильтониан имеет вид

$$H(x, u, \varphi) = \varphi_0(u^2 + x^2) + \varphi(-x + u + \sin t),$$

$$d\varphi_0/dt = 0, d\varphi/dt = -2\varphi_0x + \varphi; \varphi(0) = \varphi(2\pi),$$

из последних соотношений следует, что $\varphi_0 \neq 0$, так как в противном случае и $\varphi \equiv 0$. Пусть $\varphi_0 = -1$. Тогда необходимые условия оптимальности дают

$$\partial H / \partial u = -2u + \varphi = 0, \begin{cases} dx/dt = -x + \varphi/2 + \sin t, \\ d\varphi/dt = 2x + \varphi. \end{cases}$$

Решением системы будет вектор $(x, \varphi) = ((\sin t - \cos t)/3; -2(\sin t)/3$. Подозрительным на оптимальность будет управление $u = -(\sin t)/3$. Для решения задачи применим описанную выше методику. В нашем случае

$$A = -1; D = 1; f(t) = \sin t; K = 1; L = 0; M = 1; T = 2\pi.$$

Уравнения (3), (4) и (5) имеют вид

$$\begin{aligned} dN/dt &= N^2 + 2N - 1; N(0) = N(2\pi). \\ dr/dt &= (1 + N)r + N \sin t; r(0) = r(2\pi). \\ dx/dt &= (-1 - N)x + r + \sin t; x(0) = x(2\pi). \end{aligned} \quad (20)$$

Система (20) имеет 2π -периодические решения

$$N_1 = -1 + \sqrt{2}; N_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

а) 2π -периодическому решению $N = -1 + \sqrt{2}$ соответствуют 2π -периодические решения

$$r = ((\sqrt{2} - 2)\sin t + (1 - \sqrt{2})\cos t)/3 \text{ и } \bar{x} = (\sin t - \cos t)/3.$$

По формуле (4.7) находим $u = -(\sin t)/3$.

б) 2π -периодическому решению $N = -1 - \sqrt{2}$ соответствуют 2π -периодические решения

$$r = ((-2 - \sqrt{2})\sin t + (\sqrt{2} + 1)\cos t)/3 \text{ и } \bar{x} = (\sin t - \cos t)/3.$$

Из формулы (7) следует, что $\bar{u} = -(\sin t)/3$.

Рассмотренная выше минимаксная задача была линейной. Исследуем седловое свойство функционала на почти периодических решениях нелинейной системы.

Пусть имеется управляемый почти периодический процесс

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(x, v, t), \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad (21)$$

$$\text{с критерием качества } J(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (u^* K u + x^* L u + u^* L^* x + x^* M x - f^* C f) dt, \quad (22)$$

где $x(t)$ – почти периодическая n -мерная вектор-функция, $x(t) \in R^n$; $u(t)$, $v(t)$ – непрерывные почти периодические вектор-функции (управления), $u(t) \in R^m$, $v(t) \in R^p$; $f(x, v, t)$ – n -мерная вектор-функция, почти периодическая по t равномерно по x, v , $f \in C(R^n \times I_t)$; $A(t)$, $B(t)$, $K(t)$, $M(t)$, $C(t)$ – непрерывные почти периодические матрицы соответствующих размерностей, причем $K(t)$, $M(t)$, $C(t)$ – симметрические и $K(t)$, $C(t)$ положительно определенные при $t \in I_t$ матрицы.

Введем вспомогательные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = NBK^{-1}B^*N^* + N(BK^{-1}L^* - A) + (LK^{-1}B^* - A^*)N^* + LK^{-1}L^* - M, \quad (23)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1NC^{-1}NN_1^* + N_1(NC^{-1} - A_1) + (C^{-1}N - A_1^*)N_1^* + C^{-1} - BK^{-1}B^*, \quad (24)$$

$$\frac{dr}{dt} = A_1r + Nf(x, v, t), \quad r(t) \in R^n, \quad (25)$$

где $N(t), N_1(t)$ – искомые почти периодические матрицы размерности $n \times n$, $A_1 = LK^{-1}B^* - A^* + NBK^{-1}B^*$. Из всего множества почти периодических вектор-функций $u(t) \in R^m, v(t) \in R^p$, входящих в уравнения (21), (25), будем рассматривать такие $u(t) \in U \subset R^m, v(t) \in V \subset R^p$, которым соответствует по крайней мере одно почти периодическое решение x, N, N_1, r системы уравнений (21), (23) – (25) и при которых функционал (22) принимает конечное значение. Такие пары $(u(t), v(t))$ будем называть допустимыми.

Требуется найти такие допустимые $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, чтобы выполнялось условие (седловое свойство)

$$J(\bar{u}, \bar{v}) \leq J(\bar{u}, \bar{v}) \leq J(u, \bar{v}). \quad (26)$$

Найденные таким образом $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ будем называть оптимальными управлениями.

Теорема 3. Пусть множество допустимых пар (u, v) непусто, система уравнений (23) – (24) имеет хотя бы одно почти периодическое решение $(N(t), N_1(t))$ и функция $f(x, v, t)$ удовлетворяет условию теоремы, описанной в работах [6], тогда оптимальные управления находятся из соотношения

$$\bar{u}(t) = -K^{-1} \left[(L^* + B^*N)x - B^*r \right], \quad f(x, v, t) + C^{-1}r + C^{-1}NN_1r = 0, \quad (27)$$

где $\bar{x}(t), \bar{r}(t)$ – почти периодические решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= -A_1^*\bar{x} + (BK^{-1}B^* - C^{-1}NN_1 - C^{-1})\bar{r}, \\ \frac{d\bar{r}}{dt} &= (A_1 - NC^{-1} - NC^{-1}NN_1)\bar{r}, \end{aligned} \quad (28)$$

при этом $J(\bar{u}, \bar{v}) = 0$.

Доказательство.

Последовательно используя уравнения (21), (23), (25), (27) и выполняя преобразования, вполне аналогичные приведенным в [7], приводим функционал (22) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G^*KGdt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_1^*CG_1dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} (x^*r + r^*x - x^*Nx - r^*N_1r) dt. \end{aligned} \quad (29)$$

где $G = u + K^{-1}L^*x + K^{-1}B^*Nx - K^{-1}B^*r$, $G_1 = f(x, v, t) + C^{-1}r + C^{-1}NN_1r$.

Учитывая условие равномерной ограниченности почти периодических функций $x(t), r(t), x^*(t)N(t)x(t), r^*(t)N(t)r(t)$ на всей действительной оси, запишем (29) в виде

$$J(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G^* K G dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_1^* C G_1 dt. \quad (30)$$

Из условия положительной определенности матриц $K(t)$, $C(t)$ следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G^* K G dt \geq 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_1^* C G_1 dt \geq 0. \quad (31)$$

Следовательно, условие (26) для канонической формы функционала (30) выполняется при $G = G_1 = 0$, т.е. при $u(t) \in U, v(t) \in V$, найденных из соотношения (27). Так как функция $f(x, v, t)$ удовлетворяет условию теоремы, приведенной в [7], то это обеспечивает разрешимость (27) относительно v . Подставляя $\bar{u}(t)$, $f(\bar{x}, \bar{v}, t)$, найденные из (27), в уравнение (21), получаем систему (28), которая имеет по крайней мере одно решение (например, тривиальное). Найденные из системы (28) $\bar{x}(t)$, $\bar{r}(t)$ используются для определения оптимальных управлений $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ из соотношения (27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального уравнения / А. Брайсон, Хо ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 432 с.
2. Мадорский, В.М. Локализация решений нелинейных граничных задач / В.М. Мадорский // Изв. ВУЗов СССР. Сер. матем. наук. – 1986. – № 12. – С. 45–57.
3. Мадорский, В.М. Локализация решений нелинейных уравнений / В.М. Мадорский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 2. – С. 113–115.
4. Halanay, A. Optimal Control of Periodic Solutions / A. Halanay // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1974. – V. XIX, № 1. – P. 3–16.
5. Анисович, В.В. Об оптимизации нелинейных почти периодических колебательных процессов / В.В. Анисович // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 190 – 192.
6. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
7. Крюков, Б.И. О синтезе оптимального управления некоторыми периодическими решениями / Б.И. Крюков, В.М. Мадорский // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 8. – С. 28–32.

V.M. Madorski On the Synthesis of Optimal Control Periodic Problem with Quadratic Performance

The article describes the procedure of functional optimization with quadratic performance on the trajectories of the differential problem, which has periodic solutions. The result extends to problems with almost periodic solutions. The above approaches are used to solve a fairly general nonlinear min-max problem.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.10.2014

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В работе доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора, в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Введение

В статье предлагается итерационный метод неявного типа решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода в гильбертовом пространстве. Метод представляет собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k .

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [1–8] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из [1–8] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе из [1–8] на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на итерационный параметр $b > 0$ нет. В связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

1. Постановка задачи. В работе решается уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с действующим в гильбертовом пространстве H неограниченным линейным самосопряженным оператором A , в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) всё же существует, то для его отыскания предлагается новый неявный итерационный метод

$$(A^{2k} + B)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где E – единичный оператор, а B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE$, $b > 0$. Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точно-

стью δ , т. е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближение

$$(A^{2k} + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколько угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточных малых δ . Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Для метода (3) при условии $b > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. что $x = A^{2s}z$, $s > 0$, получена априорная оценка по-

грешности $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \left(\frac{bs}{2kn} \right)^k \|z\| + 2k \left(\frac{n}{b} \right)^{2k} \delta$, $n \geq 1$ [9]. Эта оцен-

ка погрешности была оптимизирована: $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + 2s) \left(\frac{s}{k} \right)^{\frac{s(1-2k)}{k(1+2s)}} 2^{-\frac{s}{k(2s+1)}} \left\| z \right\|^{\frac{1}{2s+1}} \delta^{\frac{2s}{2s+1}}$

и найден априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k} \right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} b \|z\|^{\frac{2k}{2s+1}} \delta^{-\frac{2k}{2s+1}}$. Очевидно,

что оптимальная оценка не зависит от итерационного параметра b , но от b зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать b , удовлетворяющим условию $b > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно выбрать

$$b_{\text{опт}} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k} \right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} \|z\|^{\frac{2k}{2s+1}} \delta^{\frac{2k}{2s+1}}.$$

В статье [10] доказано, что при условии $b > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, если число итераций n выбирать из условия $4^k n \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. В энергетической норме без знания истокообразной представимости точного решения найден априорный момент

останова $n_{\text{опт}} = b 2^{-\frac{3+2k}{2}} k^{-\frac{1+2k}{2}} \|x\|^{2k} \delta^{-2k}$ и получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Также в [10] в случае неединственного решения уравнения (1) доказано, что процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

2. Правило останова по малости невязки. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова в исходной норме гильбертова пространства. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки [3–4]. Здесь и ниже будем считать, что A – ограниченный линейный самосопряженный оператор.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = b_1 \delta$, $b_1 > 1$ и момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, а именно, больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right] \geq 0$. Используя результаты [9], нетрудно показать, что при $b > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2k \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(2k)}, n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall \lambda \in [-M, M], \quad (7)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |\lambda^{2s} (1 - \lambda g_n(\lambda))| \leq \left(\frac{bs}{2kn} \right)^{s/k}, kn > s, 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Используя интегральное представление оператора $A = \int_{-M}^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и

E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_{-M}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{-M}^0 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = I_1 + I_2$$

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \leq q^n(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in [\varepsilon_0, M]$, то получим

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \text{ Из условия (6) имеем}$$

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0, \text{ в силу свойств спектральной функ-$$

ции [11]. Аналогично, $I_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Тогда для любого $\mathfrak{G} \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{s/k} \|A^{2s}(E - Ag_n(A))\mathfrak{G}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Доказательство.

Так как верно (8), то

$$n^{s/k} \|A^{2s}(E - Ag_n(A))\| \leq n^{s/k} \sup_{-M \leq \lambda \leq M} |\lambda^{2s}(1 - \lambda g_n(\lambda))| \leq n^{s/k} \gamma_s n^{-s/k} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{bs}{2k}\right)^{s/k}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [11, с.151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow Bu$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n = 1, 2, \dots$, ограничены независимой от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + \frac{1}{2}$. Тогда для каждого $\mathfrak{G} = A\omega \in R(A)$ имеем

$$\begin{aligned} n^{s/k} \|A^{2s}(E - Ag_n(A))\mathfrak{G}\| &= n^{s/k} \|A^{2s+1}(E - Ag_n(A))\omega\| = \\ &= n^{s/k} \|A^{2s_1}(E - Ag_n(A))\omega\| \leq \gamma_{s_1} n^{\frac{-(s_1-s)}{k}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} \|\omega\| n^{-1/(2k)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $\mathfrak{G}_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))\mathfrak{G}_0 \rightarrow 0$, то $\mathfrak{G}_p = (E - Ag_{n_p}(A))\mathfrak{G}_0 \rightarrow 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность \mathfrak{G}_p ограничена $\|\mathfrak{G}_p\| \leq 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{G}$, ($p \in N' \subseteq N$), тогда $A\mathfrak{G}_p \rightarrow A\mathfrak{G}$, ($p \in N'$).

Но по условию $\omega_p = A\mathfrak{G}_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $A\mathfrak{G} = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $\mathfrak{G} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_p\|^2 &= (\mathfrak{G}_p, (E - Ag_{n_p}(A))\mathfrak{G}_0) = (\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_0) - (\mathfrak{G}_p, Ag_{n_p}(A)\mathfrak{G}_0) = \\ &= (\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_0) - (A\mathfrak{G}_p, g_{n_p}(A)\mathfrak{G}_0) = (\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)\mathfrak{G}_0) \rightarrow (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

так как $\mathfrak{G} = 0$, $\omega_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ и по условию (5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 2k \left(\frac{n_p}{b}\right)^{1/(2k)} \leq 2k \left(\frac{\bar{n}}{b}\right)^{1/(2k)}$.

Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности \mathfrak{G}_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\mathfrak{G}_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Если A – ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемме 3

Лемма 4. Пусть A – ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A^* A (E - A^* A g_{n_p}(A^* A)) \vartheta_0 \rightarrow 0$, то $\vartheta_p = (E - A^* A g_{n_p}(A^* A)) \vartheta_0 \rightarrow 0$.

Для доказательства леммы 4 следует перейти к оператору $A = A^* A$ и использовать лемму 3.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m(\delta), \delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

В [9] показано, что $x_{n, \delta} = A^{-1} [E - (CB)^n] y_\delta$, где $C = (A^{2k} + B)^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} x_{n, \delta} - x &= A^{-1} [E - (CB)^n] y_\delta - x = A^{-1} [E - (CB)^n] (y_\delta - y) + A^{-1} [E - (CB)^n] y - A^{-1} y = \\ &= A^{-1} [E - (CB)^n] (y_\delta - y) - (CB)^n x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - A g_n(A))x, \end{aligned} \quad (9)$$

следовательно, $Ax_{n, \delta} - y = Ax_{n, \delta} - Ax = -A(E - A g_n(A))x + A g_n(A)(y_\delta - y)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} Ax_{n, \delta} - y_\delta &= -A(E - A g_n(A))x + (y - y_\delta) + A g_n(A)(y_\delta - y) = \\ &= -A(E - A g_n(A))x - (E - A g_n(A))(y_\delta - y). \end{aligned} \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/(2k)} \|A(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - A g_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m, \delta} - y_\delta\| \leq b_1 \delta$, $b_1 > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \leq \|Ax_{m, \delta} - y_\delta\| + \|(E - A g_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b_1 + 1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n, \delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому $\|A(E - A g_n(A))x\| \geq \|Ax_{n, \delta} - y_\delta\| - \|(E - A g_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b_1 - 1)\delta$. Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m - 1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/(2k)}} = \|A(E - A g_{m-1}(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta$ или $(m-1)^{1/(2k)} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ (так как из (12) $\sigma_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя (9), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2k\left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)} \delta \rightarrow 0$$

При $m \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b_1 + 1)\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2k\left(\frac{m(\delta_n)}{b}\right)^{1/(2k)} \delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности. Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, оператор A – положителен и пусть $x = A^{2s}z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{4k} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{2k}{2s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b_1 + 1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{2k}{b^{1/(2k)}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{4k} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{2k}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{2k}} \delta. \quad (17)$$

Доказательство.

Так как $x = A^{2s}z$, то

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \|A^{2s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \frac{\lambda^{2s+1}b^{m-1}}{(\lambda^{2k}+b)^{m-1}} dE_\lambda z \right\| \leq \left[\frac{(2s+1)b}{4k(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{2k}} \|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b_1 - 1)\delta \leq \left[\frac{(2s+1)b}{4k(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{2k}} \|z\|$. Отсюда имеем

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{4k} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{2k}{2s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &= \|A^{2s}(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{2s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq [(b_1 + 1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b_1 + 1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + 2k\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta \leq$$

$$\leq [(b_1 + 1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{2k}{b^{1/(2k)}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{4k} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{2k}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{2k}} \delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$ и, как следует из [3], он оптimalен в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Знание порядка $2s > 0$ истокорпредставимости точного решения, используемое в теореме 2, не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова по малости невязки. В теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано число итераций t , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода.

Заключение. В работе изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, №3. – С. 672–677.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
5. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
7. Лаврентьев, М.М. Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
8. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
9. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
10. Матысик, О.В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 87–92.
11. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

***O. V. Matysik* The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Type Iteration Method for Solving Linear Operator Equations with A posteriori Choice of Regularization Parameter**

We prove the convergence of the method with a posteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimate and the estimate for the posterior moment stop. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.09.2014

УДК 517.9

Е.В. Пантелеева

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЁННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ТИПА МОРСА–СМЕЙЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$ и формулы для соответствующих правых обратных. Операторы взвешенного сдвига порождены отображениями типа Морса–Смейла. Условия односторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ ранее были получены только для одного класса отображений с простыми динамическими свойствами. Такие отображения имеют одну притягивающую точку, одну отталкивающую и не имеют седловых точек. Отображений типа Морса–Смейла обладают более сложной динамикой, т.к. имеют седловые точки, которые существенно влияют на свойства оператора. В статье доказано, что необходимым и достаточным условием правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига является существование разложения векторного расслоения $E = X \times C^m$ в прямую сумму устойчивого в положительном направлении и устойчивого в отрицательном направлении векториальных подмножеств. Ранее при исследовании спектральных свойств операторов взвешенного сдвига векториальные подмножества не использовались.

Введение

Данная работа связана с исследованием односторонней обратимости $B - \lambda I$ в случае, когда B есть оператор взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$, т.е. функций со значениями в m -мерном комплексном пространстве \square^m .

Линейный ограниченный оператор B , действующий в банаховом пространстве вектор-функций $F(X)$ на произвольном множестве X , называется *оператором взвешенного сдвига (ОВС)*, если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha: X \rightarrow X$ – некоторое отображение, $A_0(x)$ заданная матрично-значная функция на X .

Мы рассматриваем случай, когда X – компактное метрическое пространство, а $\alpha: X \rightarrow X$ есть обратимое непрерывное отображение.

Описание спектра таких операторов в классических пространствах известно, т.е. получены условия обратимости операторов вида $B - \lambda I$ [1–3]. Однако интерес представляют также и условия правосторонней обратимости таких операторов, поскольку это есть условия существования решений соответствующих функциональных уравнений.

Сложность исследования операторов взвешенного сдвига зависит от сложности динамики отображения α , т.е. от поведения траекторий. Напомним, что *траекторией точки x_0* называется двусторонняя последовательность точек, заданная правилом

$$x_k = \alpha(x_{k-1}) = \alpha_k(x_0), \quad \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому обычно сначала исследовались операторы, порожденные отображениями с достаточно простыми динамическими свойствами, а затем результаты переносились на общую ситуацию. Одним из классов отображений со сравнительно простой динамикой являются т.н. отображения типа Морса–Смейла.

Непрерывное отображение $\alpha: X \rightarrow X$ компактного метрического пространства называется *отображением типа Морса–Смейла*, если оно обратимо, имеет конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X траектория стремится к одной из

неподвижных точек при $k \rightarrow +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \rightarrow -\infty$.

Условия правосторонней обратимости $B - \lambda I$ для операторов взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций ранее были получены только для одного очень специального класса отображений [4, с. 18], однако правосторонняя резольвента не строилась.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней гиперболичности оператора взвешенного сдвига B и построена правосторонняя резольвента для операторов, порожденных более широким классом отображений, чем рассмотренные в [4]. Эти отображения имеют более сложную динамику, так как у них имеются седловые точки, которые существенно влияют на свойство обратимости.

1. Правосторонне гиперболические операторы

Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве F . Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы для любого λ из некоторой окрестности единичной окружности и при этом существует семейство правых обратных $R_r(B; \lambda)$ для $B - \lambda I$, аналитически зависящее от λ .

Такое семейство $R_r(B; \lambda)$ будем называть *правосторонней резольвентой* для B .

В рассматриваемом случае единичная окружность принадлежит спектру оператора B , поэтому для таких операторов существует много различных правосторонних резольвент.

Пусть оператор B обратим. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. [5] *Пусть обратимый оператор B является правосторонне гиперболическим и пусть $R_r(B; \lambda)$ – некоторая его правосторонняя резольвента. Разложение правосторонней резольвенты $R_r(B; \lambda)$ в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид*

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (1)$$

где оператор P связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса:

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s^1} R_r(B; \lambda) d\lambda.$$

Формула (1) имеет тот же вид, что и формула для резольвенты гиперболического оператора, в случае гиперболического оператора оператор P есть известный проектор Рисса. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. [5] *Пусть оператор B обратим. Если существует такой ограниченный оператор P , что операторный ряд (1) сходится по норме, то сумма этого ряда является правосторонней резольвентой.*

Рассмотрим векторные подпространства

$$F^+ = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|B^n u\|^{1/n} < 1 \right\},$$

$$F^- = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|[B^{-1}]^n u\|^{1/n} < 1 \right\}.$$

Из теоремы 2 следует, что для того, чтобы построить правостороннюю резольвенту, достаточно получить соответствующий оператор P . Свойства оператора P , которые необходимы для сходимости ряда (1), описаны в следующей лемме:

Лемма 1. [5] *Пусть F – гильбертово пространство и для введённых подпространств F^+ и F^- выполнено условие*

$$F^+ + F^- = F, \quad (2)$$

то операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы для всех λ из окрестности единичной окружности.

Если для ограниченного линейного оператора P выполнены включения

$$\text{Im } P \subset F^+, \text{Im}(I - P) \subset F^-, \quad (3)$$

то ряд (1) сходится, его сумма является правосторонней резольвентой и B есть правосторонне гиперболический оператор.

Значит, необходимо построить подпространства F^+ и F^- , для которых выполняется условие (2), а затем построить оператор P , для которого выполнены включения (3).

Отметим, что может существовать много различных операторов, удовлетворяющих условию (3), и, соответственно существует много различных правосторонних резольвент.

2. Локальные свойства устойчивых подмножеств

Неподвижная точка τ отображения α называется *притягивающей*, если для любой ее окрестности W существует инвариантная окрестность $U \subset W$, такая, что для всех $x \in U$ траектория $\alpha_k(x) \rightarrow \tau$ при $k \rightarrow +\infty$.

Точка, притягивающая для обратного отображения, называется *отталкивающей* для α .

Неподвижная точка τ отображения α называется *седловой*, если в любой ее окрестности W существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \rightarrow +\infty$, и существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \rightarrow -\infty$.

Будем рассматривать операторы взвешенного сдвига, порожденные отображениями $\alpha: X \rightarrow X$ в пространствах вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$. Для каждого из классов зададим функцию $\rho_d(x)$ соответственно

$$\rho(x) = \sqrt{\psi'(x_1)\psi'(x_2)\dots\psi'(x_d)}.$$

Тогда оператор $T_\alpha u(x) = \rho(x)u(\alpha(x))$ является унитарным в соответствующем пространстве. Оператор B удобно записывать в *стандартном виде* $B = AT_\alpha$, где матрица-функция $A(x) = \rho_d^{-1}(x)A_0(x)$ называется *приведенным коэффициентом*. Ниже считаем, что приведенный коэффициент является невырожденной непрерывной матрично-значной функцией.

Ассоциированное линейное расширение

Оператор $B - \lambda I$ может быть записан в виде $B - \lambda I = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} B - I \right)$, где оператор $\frac{1}{\lambda} B$ также является оператором взвешенного сдвига. Поэтому в дальнейшем будем исследовать операторы вида $B - I$.

Произведение $E = X \times \square^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией [5]; слой E_x над точкой $x \in X$ является множеством

$$E_x = \{(x, \xi) : \xi \in \square^m\} = \{x\} \times \square^m,$$

изоморфное \square^m . В каждом слое определена норма, ниже используется обозначение $\|(x, \xi)\| := \|\xi\|$.

Каждое подмножество $K \subset E$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество K называется *векториальным*, если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x .

Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением*, если слои K_x непрерывно зависят от x .

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta: E \rightarrow E$ задается формулой

$$\beta(x, \xi) = (\alpha^{-1}(x), A(\alpha^{-1}(x))\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (4)$$

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$; действующие таким образом отображения векторного расслоения называются *линейными расширениями* отображения α^{-1} на векторное расслоение E .

Из предшествующих результатов [4] следует, что ассоциированное с оператором V линейное расширение β является наиболее простым объектом, к рассмотрению которого можно свести исследование оператора взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций.

Устойчивые подмножества в окрестности притягивающей и отталкивающей точек

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении* относительно β , если существуют $\tilde{N}^+ > 0$ и $\gamma^+ < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$ выполняется неравенство

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \leq C^+(\gamma^+)^k \|(x, \xi)\|, \quad k > 0. \quad (5)$$

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении* относительно β , если существуют $\tilde{N}^- > 0$ и $\gamma^- < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$ выполняется неравенство

$$\|\beta^{-k}(x, \xi)\| \leq C^-(\gamma^-)^k \|(x, \xi)\|, \quad k \geq 0.$$

Введём обозначения. Для неподвижной точки τ_j обозначим через $\lambda_i(\tau_j)$ собственные значения матрицы $A(\tau_j)$. Пусть $m(j)$ есть количество собственных значений (с учётом кратности) матрицы, которые по модулю меньше 1.

Локальные свойства устойчивых подмножеств вблизи неподвижных точек описаны в следующей лемме:

Лемма 2. [7] Пусть β есть линейное расширение (4), точка τ есть отталкивающая точка и для матрицы $A(\tau)$ выполнено условие гиперболичности: $|\lambda_i(\tau)| \neq 1$.

Тогда над достаточно малой окрестностью $U(\tau)$ точки τ существует однозначно определённое максимальное подмножество, устойчивое в положительном направлении. Это подмножество является инвариантным относительно β векторным подрасслоением с размерностью слоя $m(\tau)$. Проектор на это подрасслоение является оператором умножения на непрерывную проекторно-значную матрицу-функцию, которая может быть построена в виде явно заданного ряда.

Множеством асимптотической устойчивости для β на $\pm\infty$ будем называть подмножество $E^\pm \subset E$, состоящее из пар $(x, \xi) \in E$, для которых $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|\beta^n(x, \xi)\| < 1$.

Искомое векториальное подмножество V_x^+ должно принадлежать E^+ , а векториальное подмножество V_x^- должно принадлежать E^- . Также очевидно, что в неподвижных точках должно быть $V^\pm = E^\pm$.

Основная сложность построения связана с тем, что множество E^+ является векториальным, но не является устойчивым, а максимальное устойчивое подмножество, т.е. подмножество вида

$$S(C, \gamma) = \{(x, \xi) \in E^+ : \|\beta^k(x, \xi)\| \leq C\gamma^k \|(x, \xi)\|, k \geq 0\},$$

где $C > 0$ и $\gamma < 1$, не является векториальным. В [7] показано, что если векториальное подмножество содержится в $S(C, \gamma)$, то в окрестности неподвижной точки τ_j размер-

ность слоя не превосходит числа $m(\tau_j)$. При подходящем выборе $C > 0$ и $\gamma < 1$ множество $S(C, \gamma)$ содержит хотя бы одно векториальное подмножество, достаточно большое в том смысле, что в окрестности каждой неподвижной точки τ_j размерность слоя есть $m(\tau_j)$.

3. Условия правосторонней обратимости

Теорема 3. [8] Пусть α – отображение типа Морса-Смейла. Оператор $B - I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда для множеств асимптотической устойчивости E^\pm выполнено условие трансверсальности:

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Будем говорить, что векторное расслоение E есть прямая сумма векториальных подмножеств (обозначаем $E = V^+ \oplus V^-$), если для каждого $x \in X$ выполнено $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ и существует постоянная M , такая, что $\|p(x)\| \leq M$ для всех $x \in X$, где $p(x)$ есть проектор на V_x^+ в слое E_x с ядром V_x^- . Если подмножества V_x^+ и V_x^- являются векторными подрасслоениями, то в силу компактности X условие ограниченности в совокупности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически.

Теорема 4. [9] Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порождённый произвольным обратимым отображением. Пусть существуют устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и P есть проектор в $L_2(X, \square^m)$, порождённый этим отображением, действующий по правилу $Pu(x) = p(x)u(x)$. Тогда подпространство $\text{Im } P$ инвариантно относительно B , подпространство $\text{Im}(I - P)$ инвариантно относительно B^{-1} и формула (1) задаёт одну из правосторонних резольвент, определённую в некотором кольце, содержащем единичную окрестность.

Отметим, что в рассматриваемом случае существует много правосторонних резольвент, им соответствуют различные операторы P и только некоторые из них есть проекторы, порожденные разложениями на устойчивые векториальные подмножества. Поэтому такие подмножества приходится строить непосредственно.

Построение устойчивых векториальных подмножеств для модельного класса отображений

В качестве X будем рассматривать d -мерный куб $X_d \subset R^d : X_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 \leq x_j \leq 1\}$ и будем рассматривать отображения $\alpha : X \rightarrow X$, заданные формулой

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = (\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_d)).$$

Особенности динамики рассматриваемых отображений заключаются в том, что эти отображения имеют конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X (не являющейся неподвижной) траектория стремится к одной из неподвижных точек при $k \rightarrow +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \rightarrow -\infty$.

При $d=1$ такие отображения имеют одну отталкивающую точку $\tau_0 = 0$ и одну притягивающую точку $\tau_1 = 1$ и не имеют седловых точек.

При $d=2$ такие отображения имеют четыре неподвижные точки: отталкивающую точку $\tau_0 = (0,0)$, притягивающую точку $\tau_3 = (1,1)$, и две седловые точки $\tau_1 = (0,1)$ и $\tau_2 = (1,0)$.

В общем случае d неподвижными точками являются вершины куба (их количество есть 2^d), при этом точка $\tau_0 = (0, 0, \dots, 0)$ - отталкивающая, точка $\tau_{2^d-1} = (1, 1, \dots, 1)$ - притягивающая, а остальные вершины являются седловыми точками.

Полученные ниже результаты могут быть перенесены на более широкий класс отображений с аналогичными динамическими свойствами, но в данной работе мы ограничимся рассмотрением указанных модельных классов.

Теорема 5. [9] Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порожденный модельным отображением d -мерного куба, и выполнены условия трансверсальности

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Тогда могут быть построены устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и, следовательно, правосторонняя резольвента может быть построена по формуле

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P.$$

В работе впервые при исследовании операторов взвешенного сдвига использованы векториальные подмножества. Это является новым подходом, так как решение рассматриваемых задач не может быть получено с использованием только векторных подрасслоений, традиционно рассматриваемых в этой тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневиц, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневиц. – Минск : Университетское, 1988. – 231 с.
2. Бронштейн, И.У. Неавтономные динамические системы / И.У. Бронштейн. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 290 с.
3. Каток, А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. – Москва : Факториал, 1999. – 765 с.
4. Антоневиц, А.Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения / А.Б. Антоневиц // Функциональный анализ и его прил., 2005. – Т. 39, вып.1. – С. 52–69.
5. Antonevich, A.B. Right-Side Hyperbolic Operators / A.B. Antonevich, E.V. Panteleeva // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. – 2014. – № 1. – С. 1–9.
6. Karlovich, Yu.I. One-sided invertibility of functional operator with non-Carleman shift in Hölder spaces / Yu.I. Karlovich, R. Mardiev // Soviet Math. (Iz.VUZ), 1987. – 31 (3). – С. 106–110.
7. Пантелеева, Е.В. Локальные свойства подмножеств, устойчивых относительно линейного расширения / Е.В. Пантелеева // Труды института математики. – 2013. – №2 (21). – С. 142–153.
8. Антоневиц, А.Б. Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами / А.Б. Антоневиц, Е.В. Пантелеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – №3 (16). – С. 45–54.
9. Антоневиц, А.Б. Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса-Смейла / А.Б. Антоневиц, Е.В. Пантелеева // Вестник ГрГУ им. Я.Купалы. Сер. 2, Матем. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2014. – №1 (170). – С. 65–72.

***E. V. Panteleeva* Spectral Properties of Weighted Shift Operators Generated by a Morse-Type Display Smail in Spaces of Vector-Valued Functions**

Weighted shift operators B in the space of vector-functions on a set X generated by mapping $\alpha : X \rightarrow X$ are considered. Condition of right-side invertibility for operators $B - \lambda I$ was obtained earlier for a special class of mappings having only attracting and repelling fixed points. The goal of the paper is to obtain necessary and sufficient conditions of right-side invertibility of $B - \lambda I$ and to construct the right-side resolvent for more large class of mappings, i.e. Morse-Smail type mappings. These mapping have saddle points and its dynamics is more complicated. Invertibility conditions of $B - \lambda I$ are known and can be formulated as existence of decomposition into sum of vector subbundles, stable and unstable with respect to a linear extension associated with operator. The main result of this paper is the claim that if use vectorial subsets the conditions of the right-side invertibility can be written in the similar form. Moreover by seeing this decomposition we construct a right-side resolvent for B .

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.11.2014

УДК 517.5

А.М. Поддубный**ТЕОРЕМЫ ТИПА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА**

В работе проведено исследование вопросов о граничном поведении производных аналитических и гармонических функций в единичном круге комплексной плоскости. Полученные результаты обобщают некоторые результаты Ф. Лесли и С. Варшавского и имеют вид, удобный для исследования граничных свойств обобщенных в смысле Ниче минимальных поверхностей.

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и обозначения, используемые в работе.

Определение 1 [1, с.14]. Будем говорить, что вещественная функция $\omega(t)$, заданная на некотором сегменте $[0, l]$, принадлежит классу Ω , если выполняются следующие условия:

- 1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t \in (0, l]$;
- 2) $\omega(t)$ не убывает вместе с t ;
- 3) $\omega(t)$ непрерывна на $[0, l]$;
- 4) для $\forall t_1, t_2 \in [0, l]$ выполняется неравенство

$$\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2).$$

Функции класса Ω называют функциями типа модуля непрерывности. По теореме С.М. Никольского [2] для $\omega(t) \in \Omega$ имеет место равенство

$$\omega(\omega, t) = \omega(t).$$

Определение 2 [1, с.17]. Будем говорить, что $\omega(t) \in \Omega^*$, если $\omega(t) \in \Omega$ и выполняется условие Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Определение 3 [1, с.17]. Если $\omega(t) \in \Omega$ и существует такая константа $C > 1$, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(ct)}{\omega(t)} > 1$, то скажем, что функция $\omega(t)$ принадлежит классу Ω^{**} .

Известно [3], что если $\omega(t) \in \Omega^{**}$, то

$$\int_0^t \frac{\omega(u)}{u} du \leq A\omega(t),$$

где $A > 0$ – константа, независящая от t .

Определение 4. Будем говорить, что вещественная функция $\varphi(t)$, заданная на сегменте $[-\pi, \pi]$, принадлежит обобщенному классу Гельдера $H_p^\omega[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$, если модуль непрерывности $\omega_p(\varphi, t)$ функции $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\omega_p(\varphi, t) \leq \omega(t)$, где $\omega(t) \in \Omega$ – функция типа модуля непрерывности.

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ – единичный круг, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность комплексной плоскости, $\bar{D} = D \cup T$. Классическая теорема Харди–Литтлвуда описывает связь между гладкостью предельных значений аналитической

функции на границе аналитичности и скоростью роста модуля ее производных высших порядков, а именно

Теорема Харди–Литтлвуда [4, с. 397]. Для того чтобы функция $f(z)$ аналитическая в D и непрерывная в \bar{D} удовлетворяла на T условию Липшица

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta'})| \leq K|\theta - \theta'|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы в D выполнялось неравенство

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \quad r = |z|,$$

где M – конечная постоянная.

Эта теорема стала эффективным орудием в решении многих задач теории функций и теории тригонометрических рядов. Классические результаты Г. Харди и Дж. Литтлвуда [4, с.397–399] о граничных свойствах функций, аналитических в открытом круге и непрерывных в замкнутом круге, обобщались в разных направлениях в зависимости от их применения. В частности, в работах [5 – 7] получено обобщение результатов Г. Харди и Дж. Литтлвуда в форме, удобной для исследования граничных свойств обобщенных в смысле Ниче [8] минимальных поверхностей.

Ниже изложенное утверждение дополняет результаты автора, полученные в [7] и обобщает некоторые результаты Ф. Лесли и С. Варшавского [5; 6].

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в D и непрерывна в \bar{D} . Если для всех $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, выполняется неравенство

$$|f^{(n+k)}(z)| \leq M \int_{1-r}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} dt, \quad M = const > 0,$$

где $\omega(t), t \geq 0$ – неотрицательная неубывающая функция, удовлетворяющая условию Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

$n \in N, k = 0, 1, 2, \dots$, то существует константа $K > 0$, независящая от r , такая, что для $z \in D$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(z)| \leq K.$$

Доказательство. Имеет место формула Тейлора для функции $f^{(n)}(z)$, $|z| < 1$, с остаточным членом в интегральной форме

$$f^n(z) = f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)z + \dots + f^{(n+k-1)}(0) \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z - z_1)^{k-1} f^{(n+k)}(z_1) dz_1. \tag{1}$$

Так как нам надо оценить $|f^{(n)}(z)|, |z| < 1$, то достаточно ограничиться оценкой интегрального слагаемого в правой части (1), потому что величина

$$\left| f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)z + \dots + f^{(n+k-1)}(0) \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \right|$$

ограничена сверху в замкнутом круге \overline{D} . Иными словами, не нарушая общности, можно считать, что

$$f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \dots = f^{(n+k-1)}(0) = 0$$

и исследовать формулу

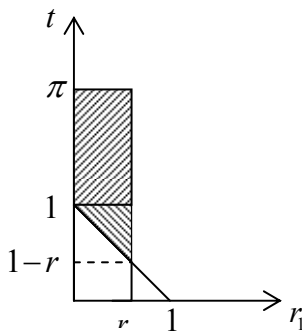
$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z-z_1)^{k-1} f^{(n+k)}(z_1) d(z_1).$$

Обозначим $z = re^{i\theta}$, $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ и будем считать, что интегрирование ведется вдоль радиус-векторов точек, взятых в рассматриваемом круге. Тогда

$$f^{(n)}(re^{i\theta}) = \frac{e^{ik\theta}}{(k-1)!} \int_0^r (r-r_1)^{k-1} f^{(n+k)}(r_1 e^{i\theta}) dr_1,$$

а следовательно, используя условие теоремы, получаем, что

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq \frac{M}{(k-1)!} \int_0^r (r-r_1)^{k-1} \int_{1-r}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} dt dr_1. \quad (2)$$



Тогда

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(re^{i\theta})| &\leq \frac{M}{(k-1)!} \left[\int_{1-r}^1 \int_{1-t}^r \frac{(r-r_1)^{k-1} \omega(t)}{t^{k+1}} dr_1 dt + \int_1^{\pi} \int_0^r \frac{(r-r_1)^{k-1} \omega(t)}{t^{k+1}} dr_1 dt \right] = \\ &= \frac{M}{(k-1)!} \left[\int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} \int_{1-t}^r (r-r_1)^{k-1} dr_1 dt + \int_1^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} \int_0^r (r-r_1)^{k-1} dr_1 dt \right] = \\ &= \frac{M}{(k-1)!} \left[\frac{1}{k} \int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} (r-1+t)^k dt + \frac{1}{k} \int_1^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} r^k dt \right]. \end{aligned}$$

В силу свойств функции $\omega(t)$, $t > 0$,

$$\int_1^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} r^k dt \leq \int_1^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} dt \leq \omega(\pi)(\pi-1),$$

и $r-1+t \leq t$ получим

$$\int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} (r-1+t)^k dt \leq \int_{1-r}^1 \frac{\omega(t)}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty \quad (\text{за условием Дини}).$$

Тогда

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq \frac{M}{k!} \left[\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt + \omega(\pi)(\pi-1) \right] = K = const > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При $k = 1$ из данной теоремы получаем следствие к лемме 2 работы [5]. Следует отметить, что метод доказательства теоремы отличается от метода доказательства соответствующих результатов работы [5].

Следующая же теорема дает для гармонических в единичном круге функций достаточные условия принадлежности предельных значений к обобщенному классу Гельдера.

Теорема 2. Пусть $u(re^{i\theta})$ гармоническая в D функция с граничной функцией $u(e^{i\theta}) \in L_p[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$. Если для $\omega(t) \in \Omega^{**}$ выполняются условия

$$\left\| \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial r} \right\| \leq C_1 \frac{\omega(1-r)}{1-r}, \quad \left\| \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial \theta} \right\| \leq C_2 \frac{\omega(1-r)}{1-r},$$

где C_1, C_2 – положительные константы, не зависящие от r , то $u(e^{i\theta}) \in H_p^\omega[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Нужно доказать соотношение:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta})|^p d\theta \leq C[\omega(h)]^p,$$

где $C = const > 0$ не зависит от h .

Не теряя общности, будем считать, что $\frac{1}{2} \leq r < 1$, $0 < h < \frac{1}{2}$, и введем следующие обозначения:

$$u'_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad u'_r = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Тогда для $0 < \rho < r$ будем иметь

$$\begin{aligned} u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta}) &= [u(re^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i(\theta+h)})] + [u(\rho e^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i\theta})] + \\ &+ [u(\rho e^{i\theta}) - u(re^{i\theta})] = e^{i(\theta+h)} \int_{\rho}^r u'_r(te^{i(\theta+h)}) dt + i\rho \int_{\theta}^{\theta+h} e^{it} u'_\theta(\rho e^{it}) dt + e^{i\theta} \int_{\rho}^r u'_r(te^{i\theta}) dt. \end{aligned}$$

Для $0 < \rho < r$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_h(\theta) &:= |u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta})| \leq \int_{\rho}^r |u'_r(te^{i(\theta+h)})| dt + \int_{\theta}^{\theta+h} |u'_\theta(\rho e^{it})| dt + \int_{\rho}^r |u'_r(te^{i\theta})| dt = \\ &=: \Delta_1(\theta) + \Delta_2(\theta) + \Delta_3(\theta). \end{aligned}$$

В результате получаем оценку

$$\|\Delta_h(\theta)\| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta_1(\theta))^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta_2(\theta))^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta_3(\theta))^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = i_1 + i_2 + i_3$$

Проведем теперь оценку интегралов i_k , $k=1, 2, 3$, используя обобщенное неравенство Минковского [9, с.601], условие теоремы и соответствующие свойства функции $\omega(t)$.

$$\begin{aligned} i_1 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\rho}^r |u'_r(te^{i(\theta+h)})| dt \right)^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\rho}^r \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u'_r(te^{i(\theta+h)})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \\ &\leq C_1 \int_{\rho}^r \frac{\omega(1-t)}{1-t} dt = C_1 \int_{1-r}^{1-\rho} \frac{\omega(u)}{u} du, \quad C_1 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Положим $1-h=r$, $\rho+h=r$. Это можно сделать, поскольку $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Тогда $\rho = r-h = 1-2h$, а следовательно

$$i_1 \leq C_1 \int_h^{2h} \frac{\omega(u)}{u} du.$$

Полагая $u = t+h$, получим:

$$\begin{aligned} i_1 &\leq C_1 \int_0^h \frac{\omega(t+h)}{t+h} dt \leq C_1 \int_0^h \frac{\omega(t) + \omega(h)}{t+h} dt \leq C_1 \left[\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt + \int_0^h \frac{\omega(h)}{h} dt \right] = \\ &= C_1 \left[\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt + \omega(h) \right]. \end{aligned}$$

И поскольку $\omega(t) \in \Omega^{**}$, то

$$i_1 \leq (C_1 + A)\omega(h) = C_1^* \omega(h), \quad C_1^* = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Аналогично устанавливается оценка

$$i_3 \leq C_3 \omega(h). \quad (4)$$

Поскольку

$$\Delta_2(\theta) = \int_0^h |u'_\theta(\rho e^{i(\theta+t)})| dt,$$

то, используя условия теоремы, аналогично оценке величины i_1 получаем:

$$\begin{aligned} i_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta_2(\theta))^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^h |u'_\theta(\rho e^{i(\theta+t)})| dt \right)^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \int_0^h \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u'_\theta(\rho e^{i(\theta+t)})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \int_0^h \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} dt = \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho} h. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\rho + h = r, \quad \text{и} \quad 1 - \rho = 2h, \quad \text{то}$$

$$i_2 \leq \frac{\omega(2h)}{2h} h \leq \omega(h). \quad (5)$$

Тепер из соотношений (3) – (5) получаем, что $\|\Delta_h(\theta)\| \leq C\omega(h)$, где $C = \text{const} > 0$ не зависит от h .

Теорема 2 доказана.

Следствие. При $\omega(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, из теоремы 2 получаем лему 3 работы [10].

Замечание 2. Теорему 2 можно получить как следствие одной теоремы Ю.И. Волкова [11, теорема 1] при $k = 1$, но теорема 1 Ю.И. Волкова получена при дополнительном условии на модуль непрерывности $\omega(t)$: существует такое $\beta, 0 < \beta < 1$, что функция $t^{-\beta}\omega(t)$ не возрастает. В теореме 2 такого условия на модуль непрерывности нету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальчук, Р.Н. О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса $H_p(p \geq 1)$ / Р.Н. Ковальчук // Теория функций, функциональный анализ и их приложения : Респ. науч. сб. / Харьковский госуд. ун-т им. А.М. Горького. – Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1969. – Вып. 9. – С. 14–20.
2. Никольский, С.М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. – 1946. – 52, №3 – С. 191–194.
3. Бари, Н.К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н.К. Бари, С.Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – Вып. 5. – С. 483–522.
4. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 623 с.
5. Lesley F.D. Differentiability of minimal surfaces at the boundary / F.D. Lesley // Pacific J. Math. – 1971. – 37, №1. – P. 123–139.
6. Warschawski, S. Boundary Derivatives of Minimal Surfaces / S. Warschawski // Arch. Rational Mech. Anal. – 1970. – 38. – P. 241–256.
7. Піддубний, О.М. Оцінки зростання вздовж радіуса похідних аналітичних функцій / Піддубний О.М. // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 10. – С. 1420–1426.
8. Nitsche, J.C. On new resultat in the theory of minimal surfaces / J.C. Nitsche // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – 71. – P. 195–270.
9. Тиман, М.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / М.Ф. Тимман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.
10. Stegbuchner, H. Eindeutigkeitsmengen holomorpher Funktionen, die einer integrierten Lmschitzbedingung genügen / H. Stegbuchner // Math. Nachr. – 1982. – 106. – P. 73–88.
11. Волков, Ю.И. Про граничні властивості одного класу функцій, аналітичних в крузі / Ю.И. Волков // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 11. – С. 968–972.

O.M. Piddubny Hardy-Littlewood Type Theorems

In this paper we researched the issues about the boundary behavior of derivatives of analytic and harmonic functions in the unit disc of the complex plane. The obtained results generalize some F.Lesley and S.Warschawski results and have a form convenient for the study of boundary properties of generalized in the sense of Nitsche minimal surfaces.

Рукапіс паступіў у редакцію 25.09.2014

УДК 517.983.54+519.6

В.Ф. Савчук

О ГРАДИЕНТНОМ МЕТОДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В гильбертовом пространстве для решения некорректных задач с положительным ограниченным самосопряженным оператором исследуется явный итерационный метод. Даются условия сходимости метода в исходной норме гильбертова пространства. Приводится оценка погрешности предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций. Обоснована возможность применения правила останова по невязке. Доказана сходимость метода. Получена оценка для момента останова и оценка погрешности метода.

1. Введение

Для некорректных задач условия корректности не выполняются, тем не менее такого рода задачи постоянно возникают в математической физике. Суть дела состоит в том, что некорректно поставленные задачи «плохо» поставлены, множества их приближенных решений очень широки, даже не ограничены, поэтому необходима дополнительная (априорная) информация, позволяющая сформулировать критерий отбора приближенного решения и построить регуляризующий алгоритм. Такой информацией могут служить априорные сведения о гладкости искомого решения, его монотонности, выпуклости и т.п.

Для итеративных методов решения операторных уравнений таким дополнительным условием является требование истокорпредставимости точного решения. Его знание является обязательным для априорного выбора числа итераций (для получения оценки погрешности метода и определения момента останова). В работах М.А. Красносельского, И.В. Емелина [4; 5], Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенникова [3] впервые обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, что делает итеративные методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокорпредставимости точного решения.

В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в приложениях математической физики, то проблема изучения таких задач и построения методов их решения является актуальной. В работе изучается итеративный метод для решения некорректных задач.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается уравнение I-го рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \rightarrow H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные методы (см., например, [1–9]). В настоящей работе изучается итеративный метод, впервые предложенный в [7]

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ , т.е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод (3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0.$$

3. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Априорный выбор числа итераций для метода (3) был изучен в работе [7]. Там показано, что итеративный метод (3) сходится к точному решению при условии $0 < \alpha_i < \frac{2}{M}$, $M = \|A\|$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. При условии, что точное решение истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена оценка погрешности

$$\|x - x_n\| \leq s^s (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^{-s} e^{-s} \|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \delta.$$

Как видно, метод (3) не дает преимуществ в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций [8]. Но он дает выигрыш в следующем. Поскольку объем вычислительной работы зависит от α , то для уменьшения его следует брать α возможно большим и таким, чтобы n было целым. В методе простых итераций с постоянным шагом [8] $0 < \alpha < 1,25$, а в этом же методе с переменным шагом (3) допускается более широкий диапазон $0 < \alpha_i < 2$, поэтому предпочтительнее метод (3). В работе [7] получена погрешность в счёте и погрешность в операторе.

4. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций для метода (3) был получен при условии, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s . Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода условиями

$$\begin{cases} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, & (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, & \varepsilon = b_1 \delta, \quad b_1 > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Покажем возможность применения правила (4) для метода (3). Считаем, что $\|A\| = 1$.

Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = [1 - (1 - \alpha_n \lambda)(1 - \alpha_{n-1} \lambda) \dots (1 - \alpha_1 \lambda)] \lambda^{-1}.$$

Используя результаты статьи [7] нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq n\alpha, \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}; \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \text{где } \gamma_0 = 1; \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty, \quad (8)$$

где $\gamma_s = s^s (\alpha e)^{-s}$. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для $\forall w \in H (E - A g_n(A))w \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Воспользуемся интегральным представлением самосопряжённого оператора $A = \int_0^1 \lambda dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция. Рассмотрим

$$(E - A g_n(A))w = \int_0^1 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w = \left\| \int_0^1 (1 - \alpha_1 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda) dE_\lambda w \right\|.$$

Так как при $0 < \alpha_i < 2$, $\lambda \in [\varepsilon_0, 1]$, то имеем $|(1 - \alpha_i \lambda)| \leq q < 1$. Тогда

$$\left\| \int_\varepsilon^1 (1 - \alpha_1 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda) dE_\lambda w \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^1 dE_\lambda w \right\| \leq q^n \|w\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$\left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha_1 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda) dE_\lambda w \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda w \right\| \leq \|E_\varepsilon w\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$, в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - A g_n(A))w \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение

$$n^s \|A^s (E - A g_n(A))v\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (9)$$

Доказательство.

Так как (8) верно, то

$$n^s \|A^s (E - A g_n(A))\| \leq n^s \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s (\alpha e)^{-s}, \quad n > 0.$$

Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [10, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$ ограничены независимой от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^s \|A^s (E - A g_n(A))\| \leq \gamma_s$, т.е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены.

В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмём множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ имеем

$$\begin{aligned} n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| &= n^s \|A^{s+1} (E - Ag_n(A))w\| \leq \\ &\leq n^s (s+1)^{s+1} (\alpha e)^{-(s+1)} n^{-(s+1)} \|w\| = (s+1)^{s+1} (\alpha e)^{-(s+1)} n^{-1} \|w\| = \gamma_{s_1} n^{-1} \|w\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Если для некоторых $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность v_k ограничена $\|v_k\| \leq \gamma_0 \|v_0\|$, $k \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $v_k \rightarrow v$, ($k \in N' \subseteq N$), тогда $Av_k \rightarrow Av$, ($k \in N'$). Но по условию $w_k = Av_k \rightarrow 0$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 &= (v_k, (E - Ag_{n_k}(A))v_0) = (v_k, v_0) - (v_k, Ag_{n_k}(A)v_0) = \\ &= (v_k, v_0) - (Av_k, g_{n_k}(A)v_0) = (v_k, v_0) - (w_k, g_{n_k}(A)v_0) \rightarrow (v_k, v_0) = 0, \end{aligned}$$

так как $w_k \rightarrow 0$, $v = 0$ и по условиям $\|g_{n_k}(A)\| \leq \alpha n_k \leq \alpha \bar{n}$. Следовательно, $\|v_k\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем эти леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбран по правилу (4), тогда $m(\delta)\delta \rightarrow 0$, $x_{m(\delta),\delta} \rightarrow x$, $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $\overline{R(A)} = H$. Так как [7]

$$\begin{aligned} E - A [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] = \\ = (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A) \dots (E - \alpha_2 A)] = \\ = E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A). \end{aligned}$$

В [7] показано, что

$$x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] y_\delta,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x_{n,\delta} - x &= A^{-1} [E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)] (y_\delta - y) - (E - \\ &- \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A) x = g_n(A) (y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \end{aligned}$$

Значит,

$$x_{n,\delta} - x = - (E - Ag_n(A))x + g_n(A) (y_\delta - y). \tag{10}$$

Отсюда $Ax_{n,\delta} - y = -A(E - Ag_n(A))x + Ag_n(A)(y_\delta - y)$ и, следовательно,

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (11)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\sigma_n = n \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Кроме того, из (5) и (6)

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \alpha n \delta, \quad (14)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq \gamma_0 = 1. \quad (15)$$

Рассмотрим случай правила останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b_1 \delta$ и из (11) и (15) получим при $n = m$

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \\ &+ \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq b_1 \delta + \delta = (b_1 + 1)\delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq (b_1 + 1)\delta. \quad (16)$$

Для любого $n < m$ получим

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_n(A))x\| &\geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \\ &- \|(E - Ag_n(A))(y_\delta - y)\| \geq b_1 \delta - \delta = (b_1 - 1)\delta, \end{aligned}$$

т.е. для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta. \quad (17)$$

Из (13) и (17) получим при $n = m - 1$

$$\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta \quad \text{или} \quad (m-1)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b_1 - 1} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

(так как из (13) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$), следовательно, $m\delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$.

Если при этом $m \rightarrow \infty$, то, используя (10), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|(g_m(A))(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \gamma m \delta \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу (12). (Здесь $\gamma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}{m}$).

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (16) $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b_1 + 1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$, следовательно, $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$, и по лемме 3 $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда $\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \gamma m(\delta_n)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z, s > 0$, тогда справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{\beta e} \left[\frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{s+1},$$

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq [(b_1 + 1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \\ &+ \gamma \left\{ 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{s+1} \right\} \delta. \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство.

Из (8) при $n = m - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| \leq \\ &\leq (s+1)^{s+1} [(m-1)\beta e]^{-(s+1)} \|z\|, \quad \beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1}}{m-1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (17), получим

$$(b_1 - 1)\delta \leq (s+1)^{s+1} [(m-1)\beta e]^{-(s+1)} \|z\|,$$

откуда $m \leq 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{s+1}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &= \|A^s(E - Ag_m(A))z\| \leq \\ &\leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s+1} \|E - Ag_m(A)\|^{s+1} \|z\|^{s+1} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s+1} \|z\|^{s+1} \leq [(b+1)\delta]^{s+1} \|z\|^{s+1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|(g_m(A))(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq [(b_1 + 1)\delta]^{s+1} \|z\|^{s+1} + m\gamma\delta \leq [(b_1 + 1)\delta]^{s+1} \|z\|^{s+1} + \\ &+ \gamma \left\{ 1 + \frac{(s+1)}{\beta e} \left[\frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{s+1} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (18) есть $O\left(\frac{s}{\delta^{s+1}}\right)$ и, как следует из [3], он опти-

мален в классе решений $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен $s > 0$, не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближенного решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

2. Бакушинский, А. Б. Один общий приём построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
5. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
7. Константинова, Я.В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.
8. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
9. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
10. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

***V.F. Savchuk* On the Gradient Method with Variable Step Solving Ill-posed Problems**

In the Hilbert space for the solution of ill-posed problems with a positive bounded self-adjoint operator is investigated explicit iterative method. We give conditions for the convergence of the method in the original norm of the Hilbert space. An estimate of the accuracy of the proposed method in the case of a priori choice of the number of iterations. The possibility of applying the rule to stop residual. We prove the convergence of the method. An estimate of the moment stop and error estimate.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2014

УДК 512.542

А.А. Трофимук, В.О. Лукьяненко

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ИЗ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА ≤ 2

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G , у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга ≤ 2 . В частности, производная длина такой группы G не превышает 7, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Кроме того, если группа G A_4 -свободна, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина группы G не превышает 5; если группа G имеет нечетный порядок, то G метанильпотентна, а производная длина группы G не превышает 4.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ p -группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X < P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P , в том числе и P . Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X .

В.С. Монаховым в [3] были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2 . В частности, доказано следующее утверждение:

Если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2 , то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Метациклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечетного порядка [2, теорема III.11.5]. Кроме того, нормальный ранг бициклической группы нечетного порядка ≤ 2 . Однако хорошо известно, что бициклические 2-группы имеют нормальный ранг ≤ 3 .

А.А. Трофимук в работе [4] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Доказано следующее утверждение:

Пусть G – разрешимая непримарная группа и $F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Если силовские подгруппы в $F(G)$ бициклические, то производная длина группы G не превышает 6.

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга не превышает 2. Доказана следующая теорема.

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из подгруппы Фиттинга $F(G)$. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы G не превышает 7. В частности, если:*

- 1) группа G A_4 -свободна, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина группы G не превышает 5;
- 2) группа G имеет нечетный порядок, то G метанильпотентна, а производная длина группы G не превышает 4.

1. Вспомогательные результаты

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 – единичная группа; A_n – знакопеременная группа степени n .

В доказательствах основной теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Формацией называется класс групп X , который удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) если $G \in X$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in X$;
- 2) если $G/N_1 \in X$ и $G/N_2 \in X$, то $G/N_1 \cap N_2 \in X$.

Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in F$. Произведение $FN = \{G \in G \mid G^H \in F\}$ формаций F и H состоит из всех групп G , для которых H -корадикал принадлежит формации F . Как обычно, $F^2 = FF$. Формация F называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in F$ следует, что $G \in F$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через N и A соответственно.

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть F – формация. Тогда NF – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [5, с. 36], произведение NF является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то NF – насыщенная формация.

Обозначим через $d(G)$ – число минимальных образующих p -группы G .

Лемма 2 ([6, теорема 44.12]). Пусть N – подгруппа p -группы G , такая, что $d(N) = 2$. Если $N \leq \Phi(G)$, то N метациклическая.

Лемма 3 Пусть P – p -группа и $r_n(P) \leq 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 3.

Доказательство. Если $\Phi(P) = 1$, то P – абелева группа. Предположим, что $\Phi(P) \neq 1$. Так как $\Phi(P)$ нормальна в P , то $d(\Phi(P))$ не превышает 2. Если $d(\Phi(P)) = 1$, то $\Phi(P)$ – циклическая и P – метабелева группа. Если $d(\Phi(P)) = 2$, то $\Phi(P)$ – метациклическая по лемме 2. Значит, производная длина группы P не превышает 3.

Лемма 4 ([7, лемма 12]). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда $H \in N^3 \cap A^4$.

Лемма 5 ([7, лемма 13]). Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

Лемма 6 ([2, лемма VI.8.1]). Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$. Тогда H циклическая.

2. Доказательство основной теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathbf{F} = \mathbf{N}^4 \cap \mathbf{NA}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Пусть F_p – силовская p -подгруппа в $F(G)$, тогда $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$ – силовская p -подгруппа в $F(G/\Phi(G))$. Так как $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p/F_p \cap \Phi(G)$, то $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \leq r_n(F_p) \leq 2$. Поэтому $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация \mathbf{F} насыщена, то $G \in \mathbf{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [2] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп N_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. По теореме I.4.5 [2] для каждого N_i фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut}(N_i)$. По лемме I.9.6 [2] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(N_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = G/F.$$

Так как N_i – элементарная абелева p_i -подгруппа порядка p_i^k , то $N_i \leq F_{p_i}$ и $k \leq 2$, поскольку $\Phi(N_i) = 1$ и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

- 1) $\text{Aut}(N_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;
- 2) $\text{Aut}(N_i)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$;

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathbf{A} \subset \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$ по лемме 4. Так как $\mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$ – формация, то $G/F \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$. Поэтому $G \in \mathbf{F}$.

Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathbf{A}^4$. Из леммы 1 следует, что $F \in \mathbf{A}^3$, поэтому производная длина G не превышает 7. Так как $G \in \mathbf{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть группа G является A_4 -свободной. Тогда, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 5, получим, что $G/F \in \mathbf{A}^2$. Поэтому $G \in \mathbf{N}^3$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, а так как по лемме 1 $F \in \mathbf{A}^3$, то производная длина группы G не превышает 5.

Пусть группа G имеет нечетный порядок. Тогда, используя лемму 6, получим, что $G/F \in \mathbf{A}$. Поэтому $G \in \mathbf{N}^2$ и нильпотентная длина группы G не превышает 2, а производная длина группы G не превышает 4 по лемме 1.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа. – 2006.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С.Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
4. Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
6. Berkovich, Y. Groups of Prime Power Order Volume 1 / Yakov Berkovich. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2008.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

A.A. Trofimuk, V.O. Lukyanenko On Finite Groups Whose Normal Rank of Sylow Subgroups of the Fitting Subgroup is at Most 2

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group G whose normal rank of Sylow subgroups of the Fitting subgroup is at most 2. In particular, the derived length of such group does not exceed 7 and the nilpotent length of such group does not exceed 4. Besides, if G is A_4 -free then the nilpotent length of G is at most 3 and the derived length of G is at most 5; if G has odd order, then G is metanilpotent and the derived length of G is at most 4.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.11.2014

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Арлоў А.Ц. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт кафедры мікраэлектронікі Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Аўчыннікаў Я.В. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, намеснік дэкана факультэта інавацыйных тэхналогій машынабудавання Гродненскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Басін В.І. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Богдан А.У. – намеснік дырэктара Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Зазерын А.І. – аспірант кафедры мікраэлектронікі Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Зубей К.У. – выкладчык кафедры алгебры, геаметрыі і матэматычнага мадэлявання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Клімовіч В.У. – выпускнік (2014 г.) фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Ліёпа В.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры теарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Лук’яненка У.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, намеснік дэкана факультэта інфармацыйных сістэм Гомельскага дзяржаўнага тэхнічнага ўніверсітэта імя П.В. Сухога

Львоў А.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік Фізічнага інстытута РАН (Расія)

Ляўчук М.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута фізікі НАН РБ

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Макаед І.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Паддубны А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Усходнееўрапейскага Нацыянальнага ўніверсітэта імя Л. Украінкі (г. Луцк, Украіна)

Панцялеева Е.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры матэматычнага аналізу, дыферэнцыяльных ураўненняў і іх прылажэнняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Пашкевіч Г.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы навуковы супрацоўнік Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Саванчук Я.А. – магістрант фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Сарокін В.Г. – загадчык лабараторыяй кафедры матэрыялазнаўства і рэсурсазберагальных тэхналогій Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Саўчук В.Ф. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Секяржыцкі С.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Секяржыцкі У.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Струк В.А. – доктар тэхнічных навук, прафесар, галоўны навуковы супрацоўнік НДЧ Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Трафімук А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры, геаметрыі і матэматычнага мадэлявання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Ульянава В.А. – аспірант кафедры мікраэлектронікі Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Фікс А.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар Томскага політэхнічнага ўніверсітэта (Расія)

Юдаў А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры, геаметрыі і матэматычнага мадэлявання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацыі па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума Дзяржаўнага вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастанова Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасыллак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 22.12.2014. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 11,85. Ул.-выд. арк. 9,37.

Тыраж 100 экз. Заказ № 408

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.