Учреждение образования

«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Т. С. Онискевич

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ ПО ОСНОВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(ЭКСПРЕСС-КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПСИХОЛОГОВ)

Репозиторий БрГУ

Брест
БрГУ имени А.С.Пушкина
2010

УДК 51+378(075)
ББК 22+74.58
О 58

Печатается по решению редакционно-издательского

Совета БрГУ им. А. С. Пушкина

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент,
зав. кафедрой методик дошкольного образования БрГУ им. А.С.Пушкина
Т. С. Будько

Кандидат физико-математических наук, доцент,
декан факультета довузовской подготовки БрГУ им. А.С.Пушкина
Е. И. Мирская

Онискевич, Т.С.

Конспекты лекций по основам высшей математики: экспресс-курс для студентов-психологов / Т. С. Онискевич; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ им. А.С.Пушкина, 2010. – 78 с.

ISBN

Лекционный экспресс-курс содержит необходимый для сдачи экзамена по основам высшей математики материал, адаптированный в соответствии со спецификой гуманитарной специальности «Психология». Удобная форма подачи материала, специально подобранные примеры содействуют самостоятельному усвоению и эффективному повторению программы курса.

Предназначен для студентов психологических специальностей университетов.

УДК 51+378(075)
ББК 22+74.58

ISBN

© Онискевич Т.С.,2010
© Издательство БрГУ
им. А.С.Пушкина, 2010

Репозиторий БрГУ

Оглавление

Глава 1
Теория множеств
1.1. Основные понятия…… ……5
1.2. Операции над множествами……...7
1.3. Соответствия и отношения……...10
1.4. Элементы теории множеств в анализе психологических явлений……...12
Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ
2.1. Высказывания и операции над ними……..15
2.2. Формулы и законы логики высказываний……..18
Глава 3
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
3.1. Матрицы. Основные понятия……..21
3.2. Операции над матрицами…….....22
3.3. Определители квадратных матриц и их свойства……..23
3.4. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения ……..25
3.5. Решение систем линейных уравнений……27
3.6. Применение элементов линейной алгебры в психологии…….30
Глава 4
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
4.1. Понятие функции……..32
4.2. Элементарные функции……35
4.3. Предел функции……38
4.4. Непрерывность функций……..39
4.5. Производная…….....41
4.6. Правила дифференцирования…….....42
4.7. Таблица производных……...44
4.8. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции……...44
4.9. Неопределённый интеграл……...48
4.10. Определённый интеграл……...50
4.11. Использование математического анализа в психологии……...53

Репозиторий БрГУ

Глава 5
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Основы комбинаторики……54
5.2. Вероятность случайного события……56
5.3. Действия над событиями……60
5.4. Основные теоремы теории вероятностей……62
5.5. Формула полной вероятности и формула Байеса……64
5.6. Формула Бернулли……66
5.7. Формула Пуассона ……67
5.8. Локальная формула Муавра – Лапласа ……...68
5.9. Интегральная формула Муавра – Лапласа…….. 68
5.10. Случайные величины. Закон распределения случайной величины……..70
5.11. Функция распределения случайной величины. Ее свойства…….71
5.12. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины……73
5.13. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения...74
5.14. Числовые характеристики непрерывной случайной величины…76
5.15. Применение вероятностных методов в психологии……...77

Литература……...78

Репозиторий БрГУ

Глава 1
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные понятия

Множество – понятие неопределяемое, используемое для описания совокупностей математических объектов (чисел, точек, функций и т. д.) Основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, понимаемое как единое целое».

В математике множества обозначаются большими буквами латинского алфавита *A, B, C, … X, У, Z*. О предметах, составляющих множество, говорят, что они являются элементами множества. Элементы множеств обозначают малыми буквами латинского алфавита: *a, b, c, …x, y, z*.

Если элемент *a* принадлежит множеству *A*, то это записывают: $a \in A$. Множества могут быть ***конечными*** и ***бесконечными***; конечное множество состоит из конечного числа элементов, бесконечное – из бесконечного их числа.

Пример:

Бесконечные множества – числовые множества:
N – множество натуральных чисел,
Z – множество целых чисел,
Q – множество рациональных чисел,
I – множество иррациональных чисел,
R – множество действительных чисел.

Множества, не содержащие ни одного элемента, называются ***пустыми*** множествами: $\varnothing$.

Задать множество – значит указать, какие элементы принадлежат множеству, а какие не принадлежат.

Задать множество можно следующими способами:

1) ***перечислением всех элементов***, из которых состоит множество. Например, $A = \{a,b,c,d,f\}$.

2) ***указанием характеристического свойства***, т.е. свойства, которым обладают только элементы данного множества и ни один элемент из другого множества не обладает этим свойством. Пример: *C* – множество натуральных чисел, не превосходящих десяти, $C = \{x / x \in N, x < 10\}$ или $C = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Репозиторий БрГУ

3) ***перечислением первых элементов*** множества (перечисление продолжается до тех пор, пока не выявится закономерность получения последующих элементов). Пример: $X = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$, $У = \{2,4,8,16, \ldots\}$.

4) в виде ***промежутков на числовой прямой*** (используется только для множеств, состоящих из действительных чисел). Примеры:

$[2; 5] = \{x / x \in R, 2 \le x \le 5\}$ $\qquad$ $(-\infty; 3] = \{x / x \in R, x \le 3\}$

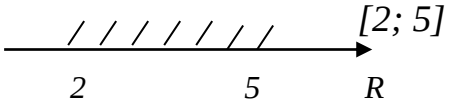


Рисунок 1.1

Рисунок 1.2

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Записывают $B \subset A$.

Пример: $A = \{a,b,c\}$. Подмножествами множества A будут: ***собственные подмножества***: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$; ***несобственные подмножества***: $\{a,b,c\}$, $\varnothing$.

Два множества А и В называется ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, в которое включаются все рассматриваемые в данный момент множества, называется ***универсальным U***. На рисунке его принято изображать в виде прямоугольника. Например, при решении задач с действительными числами универсальным будет множество R, а при рассмотрении множества студентов некоторой группы универсальным будет множество студентов университета.

Наглядно можно изобразить множества с помощью ***кругов Эйлера*** (***диаграмм Венна***).

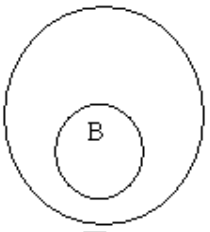


Рисунок 1.3

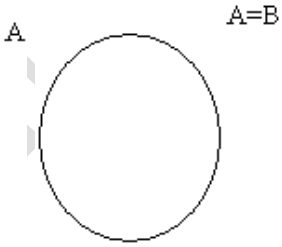


Рисунок 1.4

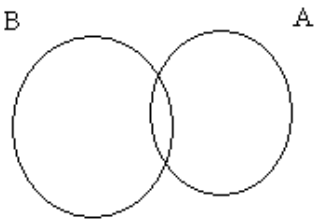


Рисунок 1.5

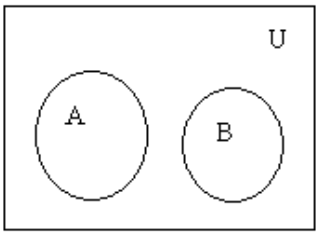


Рисунок 1.6

На рисунке 1.3 изображены множества A и B, которые находятся в отношении включения $(B \subset A)$, на рисунке 1.4 – в отношении равенства $(A = B)$, на рисунке 1.5 – в отношении пересечения, рисунок 1.6 показывает универсальное множество U и его подмножества A и B.

Репозиторий БрГУ

1.2. Операции над множествами

Пересечением двух множеств А и В называется множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих множествам A и B одновременно.

Символическая запись определения: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Объединением двух множеств А и В называется множество $A \cup B$, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Символическая запись определения: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Разностью множеств А и В называется множество $A \backslash B$, которое состоит из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Символическая запись определения: $A \backslash B = \{x/x \in A \text{ и } x \in B\}$

Дополнением множества В до множества А называется множество B'_A, которое состоит из элементов множества A, не принадлежащих множеству B, при условии, что множество B является подмножеством множества A.

Символическая запись определения: $B'_A = \{x/x \in A, x \in B, B \subset A\}$

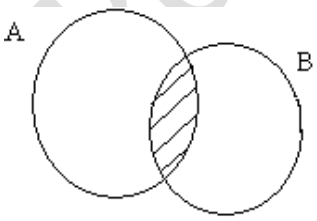
Примеры:

---

1. Если $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, то $A \cap B = \{2,4\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $A \backslash B = \{1,3,5\}$, $B \backslash A = \{6,8\}$.

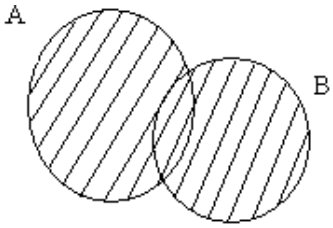
2. Если Х – множество любителей психологи, У – множество любителей математики, то $A \cap B$ – множество людей, любящих и математику, и психологию; $A \cup B$ – множество людей, которые любят хотя бы одну из наук: либо математику, либо психологию (либо обе науки одновременно).

Графическая иллюстрация данных выше определений (рисунки 1.7 – 1.11):



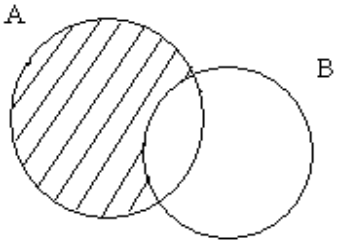
$A \cap B$

Рисунок 1.7



$A \cup B$

Рисунок 1.8



A/B

Рисунок 1.9

Репозиторий БрГУ

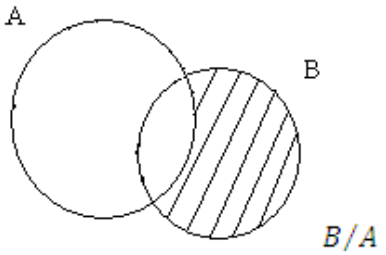


Рисунок 1.10

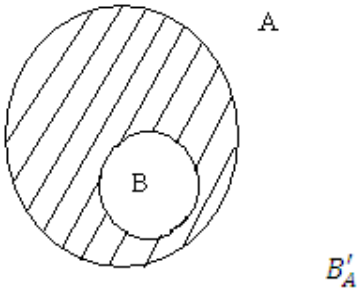


Рисунок 1.11

Свойства операций объединения и пересечения множеств:

1. Коммутативность $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
2. Ассоциативность $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Дистрибутивность $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. Законы де Моргана $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
5. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
6. $A \cap U = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
7. $A \cup U = U$, $A \cup \varnothing = A$.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где элемент x взят из множества A, а элемент y взят из множества B.

Символическая запись определения $A \times B = \{(x; y) \mid X \in x, y \in Y\}$.

Если два множества, участвующие в декартовом произведении, равны, то такое декартово произведение называется ***декартовым квадратом*** множества.

Пример:

Если $X = \{1,2,3\}$; $У = \{5, 6\}$, тогда $X \times Y = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)\}$, $X \times X = X^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

Декартовым произведением n множеств A_1, A_2, ... A_n называется множество всевозможных ***кортежей длины n***, в которых первая компонента (координата) принадлежит множеству A_1, вторая компонента – множеству A_2, и т.д., n-я – множеству A_n . ***Кортеж длины n*** – это упорядоченная последовательность n элементов, среди которых могут быть одинаковые. Кортеж длины 2 – это ***упорядоченная пара***, кортеж длины 3 – ***упорядоченная тройка*** и т. д. Элементы кортежа называются его ***компонентами*** или ***координатами***. Два кортежа называются ***равными***, если их длины равны и соответствующие координаты совпадают.

Репозиторий БрГУ

Символическая запись определения декартова произведения n множеств:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$.

Способы задания декартова произведения двух множеств:

1. С помощью перечисления упорядоченных пар элементов – пример рассмотрен выше.

2. С помощью графа, на котором два элемента, соединенные стрелкой, обозначают упорядоченную пару:

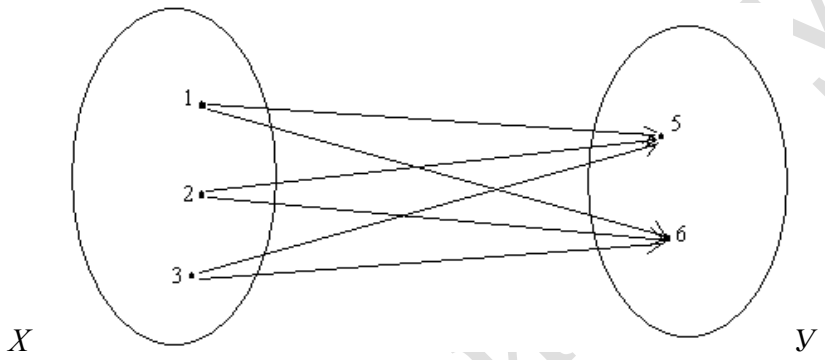


Рисунок 1.12

3. С помощью графика на координатной плоскости:

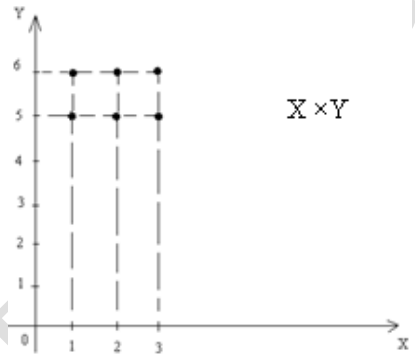


Рисунок 1.13

Количество элементов в объединении ***n(A∪B)*** и декартовом произведении ***n(A×B)*** двух множеств ***A*** и ***B*** вычисляется соответственно по следующим формулам:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

В рассмотренном выше примере $n(X \times У) = n(X) \cdot n(У) = 3 \cdot 2 = 6$.

1.3. Соответствия и отношения

Соответствием *R* между множествами *X* и *Y* называется подмножество *R* декартова произведения $X \times Y$: $R \subset X \times Y$.

Множество *X* называют ***областью отправления*** данного соответствия, а множество *У* – его ***областью прибытия***.

Если $a \in X$, то ***образом*** этого элемента называется множество *R(a)* всех элементов $y \in У$, таких, что *aRy*. ***Прообразом*** элемента $в \in У$ при том же соответствии назовем множество $R^{-1}(в)$ элементов $x \in X$, таких, что *xRв*. Образ всего множества *X* называется ***множеством (областью) значений*** – *R(X)*, это множество концов всех стрелок. Прообраз всего множества *У* при соответствии *R* называют ***областью определения*** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(У)$, это множество начал всех стрелок.

Пример:

Возьмем множество учеников *X={Ваня, Даша, Ира}* и множество типов темперамента *У={сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик}*. Построим граф соответствия *R:* «Ученик *x* обладает темпераментом *y*».

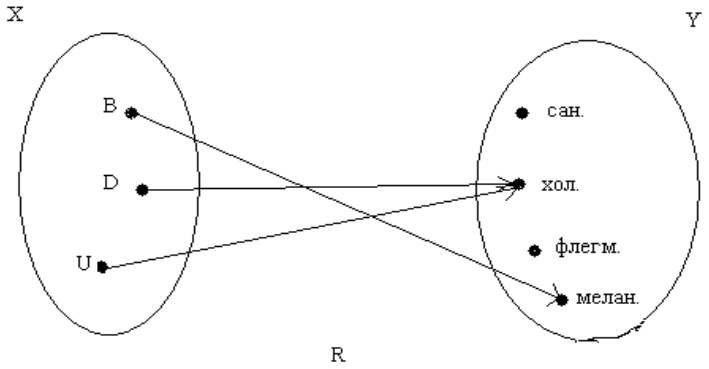


Рисунок 1.14

На рисунке 1.14: *R(Ваня)= {меланхолик}*, *R(Даша)= {холерик}*, *R(Ира)={холерик}*, R^{-1} *(сангвиник)= Ø*, R^{-1}*(флегматик)= Ø*, R^{-1} *(холерик)= {Даша, Ира}*, R^{-1}*(меланхолик) = {Ваня}*. Область определения соответствия $R^{-1}(У)$= =*X={Ваня, Даша, Ира}*, множество значений *R(X)= {холерик, меланхолик}*.

Если при соответствии *R* образ каждого элемента $x \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент, то *R* называют ***функциональным соответствием*** или ***функцией***. Другими словами, соответствие *R* функционально, если из того, что xRy_1 и xRy_2, можно сделать вывод, что $y_1=y_2$.

Репозиторий БрГУ

Соответствие *R*, для которого области отправления и прибытия совпадают, называется ***отношением***, заданным на множестве *X*. Для элементов *x* и *y* из множества *X,* связанных отношением *R,* можно записать: *xRy* или *R(x)=y.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***рефлексивным***, если для всех $x \in X$ выполняется *xRx.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***антирефлексивным***, если ни для какого $x \in X$ не выполняется *xRx.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***симметричным***, если для всех $x \in X$, $y \in X$ выполняется: *если xRy, то yRx.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***асимметричным***, если ни для каких $x \in X$, $y \in X$ не выполняется: *если xRy, то yRx.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***антисимметричным***, если для $x \in X$, $y \in X$ выполняется: *если xRy и yRx, то x=y.*

Отношение *R*, заданное на множестве *X*, называется ***транзитивным***, если для $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, выполняется: *если xRy и yRz, то xRz.*

Пример:

Рассмотрим отношение *R: «учиться в одной группе»* на множестве студентов. Проверим выполнение следующих свойств:

1. Рефлексивность: для любого студента *x* выполняется *xRx,* т.е. *«студент x учится в одной группе сам с собой» - и.*
2. Симметричность: для двух студентов *x* и *y* выполняется *если xRy, то yRx,* т.е. *«если студент x учится в одной группе со студентом y, то студент y учится в одной группе со студентом x» - и.*
3. Транзитивность: для трех студентов *x, y, z* выполняется: *если xRy и yRz, то xRz,* т.е. *«если студент x учится в одной группе со студентом y, а студент y учится в одной группе со студентом z, то студенты x и z учатся в одной группе» - и.*

Отношение *R* на множестве *X* называется ***отношением эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Рассмотренное в примере отношение «учиться в одной группе» на множестве студентов является отношением эквивалентности.

Отношение *R* на множестве *X* называется ***отношением толерантности***, если оно рефлексивно и симметрично. Примером отношения толерантности может служить отношение «быть знакомым» на множестве людей.

Репозиторий БрГУ

Отношение R на множестве X называется ***отношением строгого порядка***, если оно антирефлексивно, асимметрично, транзитивно. Примерами являются отношения «выше», «дальше», «тяжелее».

Отношение R на множестве X называется ***отношением нестрогого порядка***, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно. Примерами являются отношения «не выше», «не меньше», «не больше».

Рассмотренные отношения и их свойства находят применение при составлении тестов, в вопросах голосования и т.д.

1.5. Элементы теории множеств в анализе психологических явлений

Применение в психологии теории множеств связано, во-первых, с психологическими, а, во-вторых, с математическими интерпретациями психологических явлений.

В оценках общественного мнения часто присутствуют три множества: множество S социальных общностей, мнения которых сравниваются между собой; множество M вопросов, на которые должны ответить члены этих общностей; множество K мнений по каждому из вопросов.

Психологическая интерпретация различных явлений необходима в связи с тем, что психика человека определяется многокачественностью жизни, множеством многозначных внешних и внутренних отношений, в которых существует психика. Структура психики является многоуровневой, многоаспектной, а ее проявления в процессе развития и функционирования вариативными и изменчивыми. Эта множественность убеждает в том, что понятие о множестве, мыслимом в виде единого целого, является одним из фундаментальных понятий психологии. Психические образования, такие как личность, индивидуальность, характер, интеллект, психическая норма, отклонения от нормы, проявляют себя множествами психических явлений и поведенческих качеств во множествах ситуаций. Здесь психологи имеют дело с множествами множеств, которые могут быть разбиты на более простые [2, с. 51].

Все психические проявления могут и должны исследоваться сначала в качественном, а затем и в количественном отношении. Количественное выражение психологических исследований – это множества числовых данных. Путем сопоставления этих данных с различными исходными множествами дает возможность получить различные интерпретации исследуемых явлений, среди которых можно выделить подмножества адекватных и неадекватных интерпретаций. Адекватные интерпретации или гипотезы принимаются, неадекватные отбрасываются, малоадекватные

Репозиторий БрГУ

корректируются. Таким образом математическая обработка психологических данных позволяет делать выводы в психологических исследованиях.

Очень часто психология использует декартово произведение множеств для моделирования различных психических образований. Например, для качественной интерпретации возможных типов интеллекта по тестам Д. Векслера можно использовать табличное представление возможных типов интеллекта. Типы интеллекта получаются в результате сочетания различных уровней вербального и невербального интеллекта человека. По сути это результат декартового произведения двух множеств, изображенного в виде таблицы (таблица 1.1), где по горизонтали расположены уровни вербального, а по вертикали – невербального интеллекта. На главной диагонали получены уровни общего интеллекта [2, с. 190].

Таблица 1.1 – ***Интерпретация типов интеллекта по тестам Д. Векслера***

		ОВ	В	ХН	Н	СН	ПУ	УД
	В	ОВ	ОВ*В	ОВ*ХН	ОВ*Н			
В		В*ОВ	В	В*ХН	В*Н	В*СН		
	Н	ХН*ОВ	ХН*В	ХН	ХН*Н	ХН*СН		
	Н	Н*ОВ	Н*В	Н*ХН	Н	Н*СН	Н*ПУ	
	Н		СН*В	СН*ХН	СН*Н	СН	СН*ПУ	СН*УД
	ПУ				ПУ*Н	ПУ*СН	ПУ	ПУ*УД
	УД					УД*СН	Д*ПУ	УД

Условные обозначения, использованные в таблице 1.1 – уровни интеллекта: ОВ – очень высокий, В – высокий, ХН – хорошая норма, Н – норма, СН – сниженная норма, ПУ – пограничный уровень, УД – умственный дефект.

Теория множеств находит свое применение и в такой сфере психологии, как психодиагностика. В психодиагностике существуют различные теории личности, в которых модели личности могут быть представлены формализованно в виде множеств свойств и отношений

Репозиторий БрГУ

между ними. В этом случае личность $\mathcal{H}$ – это множество $\mathcal{L}$ внешних особенностей поведения или деятельности человека, за которыми скрываются внутренние психические явления, со множеством отношений $\mathcal{R}$ между ними: $\mathcal{H} = \{\mathcal{L}, \mathcal{R}\}$, где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ в различных психологических концепциях интерпретируются по-разному [2, с. 193].

Репозиторий БрГУ

Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1 Высказывания и операции над ними

Повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно, называется ***высказыванием.***

Обозначаются высказывания большими буквами латинского алфавита: *A, B, C, … X, Y, Z*. Высказывания бывают ***истинными (и)*** или ***ложными (л)***.

Предложение с одной или несколькими переменными, которое преобразуется в высказывание при подстановке вместо всех переменных их значений, называется ***предикатом.***

Примеры:

1. *"Студент x изучает психологию"* – предикат; *"Студент 15 группы изучают психологию"* – высказывание.
2. Высказывание *A*: *"Человек – существо мыслящее" – и*; высказывание *B: "Насекомое – существо мыслящее" – л*.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение (истинное или ложное), называется ***элементарным (простым) высказыванием***.

Высказывание, образованное из элементарных, называется ***составным*** или ***сложным***.

Образование составного высказывания из элементарных называется ***логической операцией***.

Существуют следующие операции над высказываниями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.

Отрицанием высказывания *A* называется высказывание $\overline{A}$ – *"не A"*, которое является истинным тогда, когда высказывание *A* ложно, а ложным тогда, когда *A* истинно.

Набор всевозможных значений истинности для А и $\overline{A}$ отражает таблица 2.1, называемая ***таблицей истинности***.

Таблица 2.1

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
И	Л	И
Л	И	Л

Отрицание любого высказывания можно построить с помощью слов: “неверно, что”. Поскольку А – высказывание, то можно построить его отрицание $\overline{\overline{A}}$ – двойное отрицание. Очевидно, что А=$\overline{\overline{A}}$ (см. таблицу 2.1).

Конъюнкцией двух высказываний А и В называется составное высказывание *A∧B (A&B) – “A и B”*, которое истинно в том, и только в том случае, когда оба высказывания *A* и *B* истинны. Набор всевозможных значений истинности конъюнкции показан в таблице 2.2:

Таблица 2.2

A	**B**	**A∧B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией двух высказываний А и В называется составное высказывание *A∨B* – “*A или B*” , которое является истинным тогда, когда хотя бы одно из высказываний А или В истинно. Таблица истинности дизъюнкции – таблица 2.3:

Таблица 2.3

A	**B**	**A∨B**
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Импликацией двух высказываний *A* и *B* называют составное высказывание *A⇒B (A→B),(A⊃B) “если A, то B”*, которое ложно тогда и только тогда, когда первое высказывание, т.е. *A*, истинно, а *B* ложно. Таблица истинности импликации – таблица 2.4:

Таблица 2.4

A	**B**	**A⇒B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленцией двух высказываний А и В называется составное высказывание *A⇔B (A↔B) – "A тогда и только тогда, когда B"*, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны. Таблица истинности эквиваленции – таблица 2.5:

Таблица 2.5

A	**B**	**A⇔B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Следует сделать оговорку, что логические операции не учитывают смысл высказываний; они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством – быть истинными и ложными.

Примеры:

1. Высказывание *A: "Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина был основан в 1945 году"*; высказывание $\overline{A}$*: "Неверно, что Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина был основан в 1945 году ".*

2. Высказывание *B: "Треугольник ABC прямоугольный"*; высказывание $\overline{B}$*: "Неверно, что треугольник ABC прмоугольный"*, т.е. *"Треугольник ABC – тупоугольный или остроугольный".*

3. Высказывание *A: "Студент добросовестно готовился к экзамену",* высказывание *B: "Студент сдал экзамен блестяще",* высказывание *A∧B: "Студент добросовестно готовился к экзамену и сдал его блестяще".*

4. *A∧B: «Число 30 двузначное и четное ”.*

5. Высказывание *A: “Фестиваль “Славянский базар” проводится в Витебске”,* высказывание *B: “Брест – самый западный город Беларуси”,* Высказывание *A∨B: “ Славянский базар” проводится в Витебске или Брест – самый западный город Беларуси”.*

6. *A∨B: “13≤23”.*

7. *A⇒B: “Если число 30 двузначное, то оно четное ”.*

8. Высказывание *A: “Треугольник ABC является прямоугольным”,* высказывание *B: “Квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон”,* высказывание *A⇔B: “Треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон”.*

9. *A⇔B: “Стать хорошим психологом можно тогда и только тогда, когда овладеешь математическими методами”.*

2.2. Формулы и законы логики высказываний

Логической формулой, или ***формулой логики высказываний*** называется предложение, составленное из элементарных (простых) высказываний *(A, B, C, … X, Y, Z)*, знаков логических операций *(¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔)* и скобок.

Для того, чтобы из из высказывания получить формулу, надо:

1) выделить все элементарные высказывания и логические операции, образующие данное составное высказывание;
2) заменить их соответствующими буквами и символами;
3) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Пример:

Дано предложение: *“Если человек доброжелателен и контактен, то с ним легко общаться”.* Обозначим: *A – “Человек является доброжелательным”, B – “Человек является контактным”, C – “С человеком легко общаться”.* Формула будет такой: *(A∧B) ⇒C*

Логические операции выполняются в следующей последовательности: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔. Это позволяет упрощать запись, избавляясь от лишних

скобок. Например, вместо формулы $((A \wedge B) \vee (\bar{A} \vee B)) \Rightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$ можно записать $A \wedge B \vee \bar{A} \vee B \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$.

Способ *"вычисления истинности"* логических формул – построение таблицы истинности.

Пример:

Построить таблицу истинности для формулы $\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow B$.

Таблица 2.6

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow B$
и	и	л	л	л	и
и	л	л	и	и	л
л	и	и	л	и	и
л	л	и	и	и	л

Если формула содержит три переменных, то для нее будет 8 различных наборов значений истинности. Если в формуле *n* переменных, то различных наборов значений истинности будет 2^n.

Две логические формулы называются ***равносильными***, если их таблицы истинности совпадают.

В логике высказываний существуют следующие равносильности или ***законы логики***, связанные с законами мышления:

I. $A \equiv A$ – закон тождества;

II. $A \wedge \bar{A} \equiv Л$ – закон противоречия;

III. $A \vee \bar{A} \equiv И$ – закон исключенного третьего;

IV. $A \equiv \bar{\bar{A}}$ – снятие отрицания;

V. $A \wedge A \equiv A$; $A \vee A \equiv A$;

VI. $A \wedge B \equiv B \wedge A$; $A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативность;

VII. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ – ассоциативность;

VIII. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$– дистрибутивность;

IX. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$; $\overline{A \vee B} \equiv \bar{B} \wedge \bar{A}$ – законы Де Моргана;

X. $A \wedge И \equiv A$; $A \vee Л \equiv A$;

XI. $A \wedge Л \equiv Л$; $A \vee И \equiv И$;

XII. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$; $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;

XIII. $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \equiv B$; $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv B$;

XIV. $A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$; $A \Rightarrow B \equiv \overline{A \wedge \bar{B}}$ – замена импликации.

Доказать эти законы можно с помощью таблиц истинности.

Логическая формула называется ***тождественно истинной*** или ***тавтологией,*** если она принимает только значение “*и*” при любом наборе значений истинности входящих в нее переменных.

Логическая формула называется ***тождественно ложной***, или ***противоречием,*** если она принимает только значение “*л*” при любом наборе значений истинности входящих в нее переменных.

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы играют важную роль в математической логике, так как являются моделями для многих задач. Так, тождественно истинные формулы используются при построении логических выводов одних утверждений из других, тождественно ложные – при анализе совместности утверждений. Аксиомы, теоремы, статьи законодательства – примеры тождественно истинных высказываний.

Логика является незаменимой в психологических иследованиях, где проводится оценка выдвигаемых гипотез (предположений) на предмет их истинности или ложности, которая осуществляется на основе статистических критериев.

Репозитор

Глава 3
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Матрицы. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Элементами матрицы называются числа, составляющие матрицу.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C,.. или иначе $A = (a)$, $B = (b)$…. Для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца. Матрица размера $m \times n$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Равными называются матрицы $A = (a)$ и $B = (b)$ одинакового размера, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Примеры:

1) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

элементами являются: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = -2$.

2) Для матриц C и B

$$C = \begin{pmatrix} & 2 \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} & -1 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

C B, так как элементы $a_{12} = 2$ и $b_{12} = -1$ не совпадают.

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки.

Матрицей-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов и равно ***n*** .

Диагональной называется матрица, у которой все недиагональные элементы равны 0.

Главную диагональ квадратной матрицы порядка ***n*** образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица третьего порядка.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, остальные нули. Например,

Репозиторий БрГУ

E = | 0 1 – единичная матрица третьего порядка. (E.

3.2. Операции над матрицами

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число **λ** называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, m$;

Пример:

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1) & 2\cdot 3\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 8 & 14\end{pmatrix}.$$

2. Сложение матриц

Суммой двух матриц A **и** ***B*** одинакового размера $\boldsymbol{m \times n}$ называется матрица $\boldsymbol{C = A+B}$, элементы которой $\boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$ для $i = 1, 2,\ldots,m$; $j = 1, 2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Пример:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0 & 2+3\\ 5+1 & 4+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & 11\end{pmatrix}.$$

3. Произведение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. ***Произведением матрицы A*** *размера* $\boldsymbol{m\times n}$ ***и матрицы B*** *размера* $\boldsymbol{n\times k}$ называется такая матрица ***C*** *размера* $\boldsymbol{m\times k}$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов *i-й* строки матрицы A на соответствующие элементы *j-го* столбца матрицы B, т.е. $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$.

Пример:

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 3\cdot 3+(-2)\cdot(-1)\\ 0\cdot 2+4\cdot 1 & 0\cdot 3+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Репозиторий БрГУ

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 3\cdot 4 \\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Как видно из примера, не всегда $A \cdot B = B \cdot A$.

При умножении матриц единичная матрица E играет роль единицы, т.е. $AE = EA = A$ для любой квадратной матрицы A того же порядка, что и матрица E.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 + 3\cdot 0 & 7\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 1 & -1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3. Определители квадратных матриц и их свойства

Для каждой квадратной матрицы A вводится число , называемое ее ***определителем***.

Для матрицы первого порядка определитель равен ее элементу a_{11}.

Для матрицы второго порядка A = ее определитель вычисляется следующим образом:

$$\boxed{|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad (3.1)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\cdot 2 - 3\cdot(-1) = 14 + 3 = 17.$$

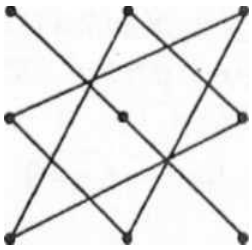
Для матрицы третьего порядка A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ определитель вычисляется по формуле:

$$\boxed{|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.} \qquad (3.2)$$

Репозиторий БрГУ

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (3.2), легко запомнить, пользуясь схемой (рисунок 3.1), которая называется ***правилом треугольника*** или ***правилом Саррюса*** (для знака «плюс» основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали, для знака «минус» — параллельны побочной диагонали).

$$+ \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad -$$



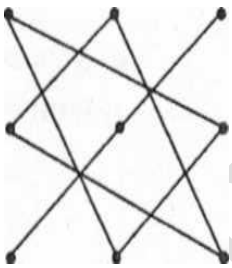


Рисунок 3.1

Пример:

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ найдём $|A|$, пользуясь правилом Саррюса:

$|A| = (-1) \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) =$

$= -20 - 24 + 0 - 72 - 0 + 6 = -110.$

Свойства определителей:

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на это число.
3. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
4. Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Репозиторий БрГУ

6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
7. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: |C|= |A|·|B|, где $C = A \cdot B$.

3.4. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения

Системой линейных уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, \dots x_n$ называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.3)$$

где a_{ij}, $(i = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots n)$ — произвольные числа, называемые ***коэффициентами при неизвестных,*** b_i, $(i = 1, 2, \dots m)$ – ***свободными членами*** уравнений.

Решением системы *(3.3)* называется такая совокупность ***n*** чисел $(x_1, x_2, \dots x_n)$, что при подстановке их в систему каждое уравнение системы обращается в тождество.

Совместной называется система уравнений, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместной называется система уравнений, не имеющая решений.

Определенной называется совместная система уравнений, имеющая единственное решение.

Неопределенной называется совместная система уравнений, имеющая более одного решения.

Пример:

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Репозиторий БрГУ

совместная и определенная, так как имеет единственное решение (1,1); система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

несовместная; а система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

множество решений ($x_1 = c$, $x_2 = 3 - 2c$, где c — любое число).

Равносильными или ***эквивалентными*** называются системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений.

Элементарными преобразованиями системы (3.3) называются:

1) умножение уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;
2) умножение уравнения системы на любое число λ и прибавление полученного произведения к другому уравнению системы;
3) вычеркивание нулевого уравнения ($0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$) из системы;
4) перестановка двух уравнений системы.

Справедлива следующая **теорема**:

Элементарные преобразования системы уравнений преобразуют систему в ей эквивалентную.

Репозиторий БрГУ

3.5. Решение систем линейных уравнений

1. Правило Крамера

Предположим, что матрица системы A является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A| \neq 0$. Тогда решение системы является единственным и находится по ***формулам Крамера:***

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.4)$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример:

Решим систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

Здесь $\Delta = |A| = 2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

По формулам (3.4) имеем: $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=1.$

2. Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в том, что элементарные преобразования совершают не над уравнениями системы (3.3), а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Для системы (3.3) запишем ***расширенную матрицу,*** последний столбец которой состоит из свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу к такому виду, чтобы в последней строке матрицы все члены, кроме n-го, были равны нулю. Система линейных уравнений, соответствующая этой матрице, будет эквивалентна исходной. Затем из последнего уравнения системы, соответствующей преобразованной матрице, находим x_n. Все остальные решения могут быть найдены последовательно, начиная с последнего уравнения.

Проиллюстрируем метод Гаусса на примерах с различными видами систем.

Примеры:

Репозиторий БрГУ

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 12x_3 + 6x_4 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов (вертикальной чертой отделён столбец из свободных членов). Затем преобразуем её, умножив первую строку поочерёдно на (-1), (-4), (-2) и прибавив соответственно ко второй, третьей, четвёртой строкам. В результате получим из первоначальной матрицы преобразованную:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 12 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right)$$

Второй матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ -2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 4 \\ -20x_3 - 9x_4 = -8 \\ -9x_4 = -3 \end{cases}$$

Решая последовательно все уравнения системы, начиная с последнего, получим:

$x_4 = \frac{1}{3}$, $\quad 20x_3 = 8 - 9x_4$;

$20x_3 = 8 - 3$, $\quad 20x_3 = 5$,

$x_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $\quad 2x_2 = 8x_3 + 3x_4 - 4$;

$2x_2 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4$, $\quad 2x_2 = -1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad x_1 = 2 - x_2 - 4x_3 - 3x_4$;

$x_1 = 2 + \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3}$, $\quad x_1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = \frac{1}{3}$.

2) Решить систему уравнений

Репозиторий БрГУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -16 \end{array}\right)$$

Первую строку матрицы последовательно умножили на (-2), (-5), (-3) и сложили соответственно со второй, третьей и четвертой строками. На втором шаге из третьей строки вычли вторую. В результате получаем, что система несовместна, т.к. уравнение, соответствующее третьей строке матрицы:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3,$$

не имеет решения.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4;$$

$$2x_2 = 1 - x_3 + x_4 = 1 - \frac{5}{2}x_4 + 4 + x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_4;$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}x_4 + 4 + x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;$$

Репозиторий БрГУ

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4\,,$$

где x_4 – свободное неизвестное, оно может принимать любые действительные значения, т.е. система имеет бесконечное множество решений.

3.6. Применение элементов линейной алгебры в психологии

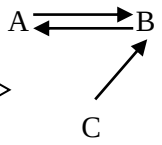
Матрицы являются незаменимым средством описания многомерных объектов. Многомерную матрицу легко изобразить на плоскости как в целом, так и по частям. Этим обеспечивается своеобразная «символическая» наглядность матричных описаний в психологии.

Например, для психодиагностики социальных общностей малого объема (из нескольких человек) – так называемых «малых групп», социопсихолог Дж. Морено предложил использовать социоматрицы и социограммы, являющиеся элементами метода социометрии [2, с. 203].

Социоматрица – это квадратная помеченная матрица, в строках и столбцах которой обозначены члены группы, а элементами матрицы являются условно обозначенные отношения влечения (1 или +) либо отвращения (0 или –). По преобладанию определенных элементов в матрице можно количественно определить степень эмоциональной связности, разобщенности или даже враждебности между членами одной или нескольких групп, выделить лидеров и отверженных, друзей и врагов, недругов. Для наглядного представления служат социограммы – графы, эквивалентные социоматрицам (рисунок 3.2).

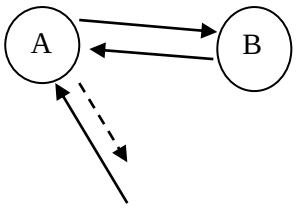
а)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 0 & 1 & - \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array} \Longleftrightarrow$$



б)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 1 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array} \Longleftrightarrow$$



Репозиторий БрГУ

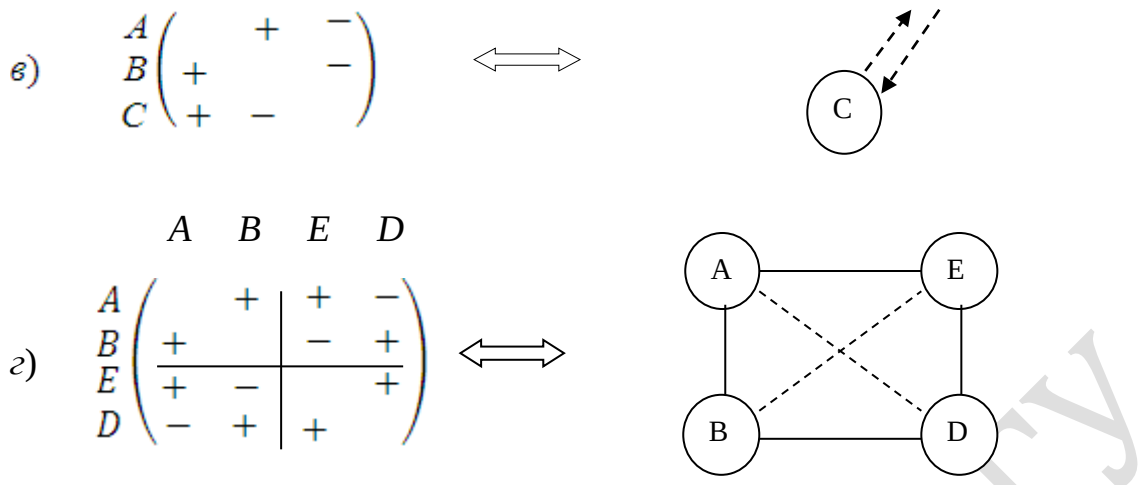


Рисунок 3.2. ***Примеры социоматриц и эквивалентных им социограмм.***

На рисунке 3.2 изображены: а, в – друзья и отверженный, б – эмоциональный лидер; A, B, C – члены малой группы; г – внутригрупповые и межгрупповые отношения на персональном уровне: A, B – члены одной, E, D – члены другой группы.

Репозиторий БрГУ

Глава 4
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Понятие функции

Понятие функции было введено в гл. 1, раздел 1.3. Рассмотрим частный случай этого понятия, а именно ***числовые функции***. Область отправления и область прибытия в данном случае — множество действительных чисел.

Функция – это соответствие (закон), согласно которому каждому значению переменной x из некоторого множества X отвечает одно вполне определенное число y. Функция записывается в виде $y = f(x)$, число x называется ***аргументом***, а y – ***значением*** функции. Множество X называется ***областью определения*** функции. Соответствующие значения y образуют ***множество значений*** функции.

Функции можно задавать:

а) аналитически с помощью формул;

б) таблицами;

в) графически.

Примеры:

1. Аналитический способ: $y = x^3 + 2$; $y = \sin^2 x$.

2. Табличный способ: таблицы составляются по данным экспериментального изучения связи между двумя величинами, например, в результате измерения влажности воздуха в различные часы дня (таблица 4.1). В этой таблице φ определена как функция t.

Таблица 4.1

Время (t),ч.	9	10	11	12	13	14	15
Влажность (φ), %	89	87	86	85	83	82	80

3. Графический способ заключается в следующем: в прямоугольной системе координат задается некоторое множество точек $M(x;y)$, и при этом никакие две точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy. Это множество точек определяет функцию $y = f(x)$. Абсциссы точек являются значениями аргумента, ординаты — значениями функции (рисунок 4.1).

Функция называется ***возрастающей,*** если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция ***убывающая,*** если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Иначе это можно записать так: функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_2 > x_1$, верно неравенство

Репозиторий БрГУ

$$f(x_2) > f(x_1)\big(f(x_2) < f(x_1)\big).$$

Возрастающая (рисунок 4.1,а) и убывающая (рисунок 4.1,б) функции называются ***монотонными.***

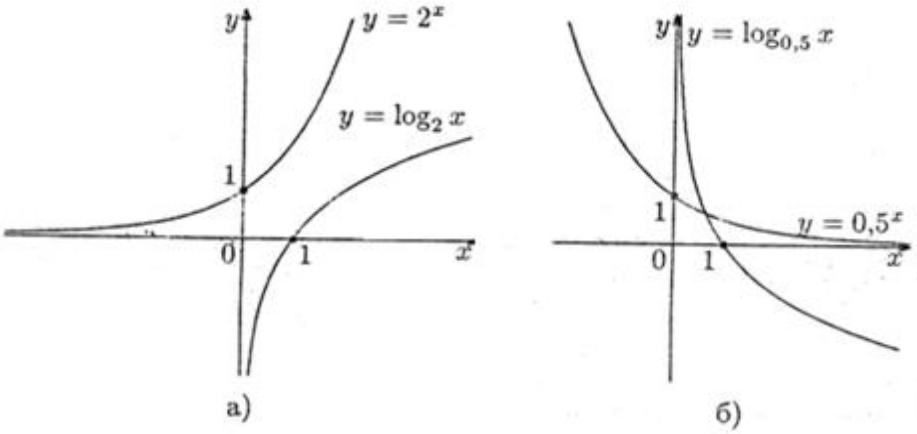


Рисунок 4.1

Примеры:

Возрастающими являются функции:

- ✓ площадь S квадрата, зависящая от его стороны *a*: $S = a^2$;
- ✓ численность народонаселения в городе Энске с течением времени при условии, что рождаемость выше смертности: $y = 50000 \cdot e^{t/32}$, где $e \approx 2{,}7$;
- ✓ путь, пройденный телом, в зависимости от времени движения: $S = t + 2t^2$;

Убывающими являются такие функции:

- ✓ время проезда от Минска до Бреста по железной дороге в зависимости от скорости: $t = \frac{180}{v}$;
- ✓ число больных гриппом в городе Энске с течением времени в данный зимний период при ежедневном контроле, если прирост выздоровевших больше прироста заболевших: $y = 20000 \cdot e^{-t/10}$.

Функция ***четная,*** если $y(-x) = y(x)$, и ***нечетная***, если $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции. Например: $y = \cos x$ — четная функция, *а* $y = \sin x$ — нечетная (рисунок 4.2). Функция $y = 2^x$ не является как четной, так и нечетной, поскольку $2^{-x} \neq 2^x$ и $2^{-x} \neq -2^x$.

Функция является ***периодической*** с периодом *T*, если для любого значения аргумента $y(x + T) = y(x)$, т.е. функция повторяет свои значения через данный промежуток *T*. Периодическими являются, например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ (см. рисунок 4.2).

Периодические функции описывают, в частности, звуковые и электромагнитные волны (сигналы).

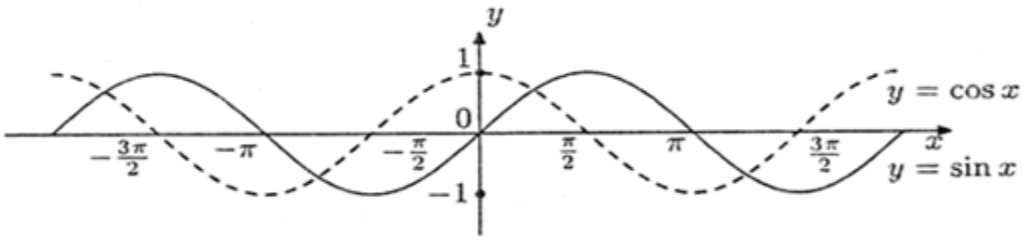


Рисунок 4.2

Функция ***ограничена***, если $|f(x)| \leq M$ для некоторого действительного числа $M > 0$ и для любого значения x из области определения функции. Функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ — ограниченные функции, поскольку выполняется: $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$.

Ограниченность играет важную роль и в природных явлениях, и в социальных.

Нулями функции называются значения аргумента, обращающие функцию в нуль. Например, нулями функции $y = x^2 - 4$ являются значения $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Пример:

График зависимости между стимулом и реакцией изображен на рисунке 4.3.

Рисунок 4.3

Проанализируем этот график [1, с. 109]. Рассмотренная функция возрастает до точки перенасыщения, а далее стремительно убывает. Она ограничена, поскольку изменяется от нулевого значения до максимального, определенного точкой перенасыщения. Функция непериодическая, нуль функции при $x = 0$.

Пусть имеют две функции $y = f(x)$ и $\zeta = \varphi(y)$. Тогда для тех x, для которых значения $y = f(x)$ принадлежат области определения функции $\varphi(y)$, можно определить функцию $\zeta = (f(x))$. Эта функция называется ***сложной функцией*** или ***композицией функций*** f и φ и обозначается

$$\zeta = (\varphi o f)\ (x)$$

Пример:

Для функций $y = -x^2 + 4$, $\zeta = 2y - 2$ их композицией будет функция

$\zeta = 2(-x^2 + 4) - 2 = -2x^2 + 6.$

4.2. Элементарные функции

В таблице 4.2 приведен перечень известных из школьного курса функций и их графиков. Эти функции называются ***основными элементарными функциями.***

Элементарными функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций (перечисленных в таблице 4.2) с помощью алгебраических операций и композиций функций.

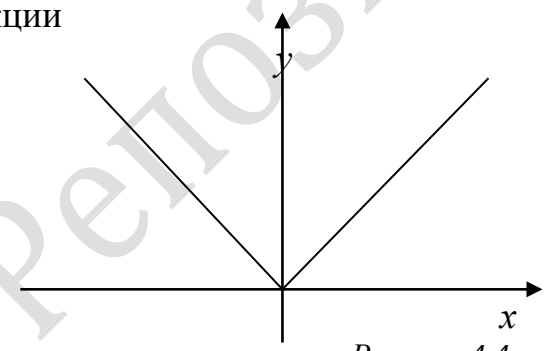
Примеры:

1. Функция

$$y = \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{(\sqrt[3]{x}+5)^3} + \sqrt{lg^3 x} - 1$$

является элементарной, так как она получена с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции.

2. Функция $y = |x|$ (рисунок 4.4) является примером неэлементарной функции



$y = |x|$

Рисунок 4.4

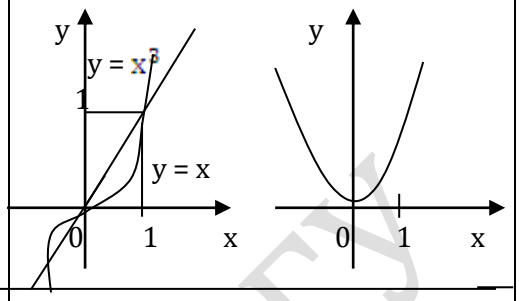
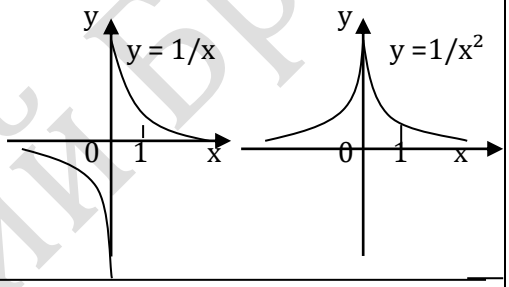
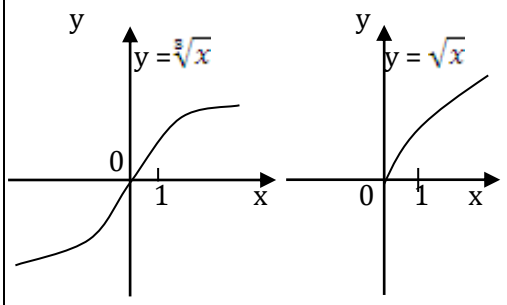
Таблица 4.2 – ***Основные элементарные функции***

Аналитическое	Область	Область	График

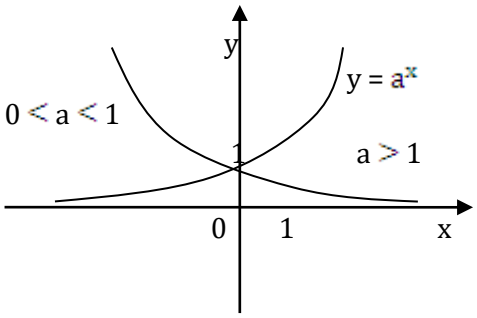
Репозиторий БрГУ

задание	определения X	значений Y	

1. Степенная функция

$y = x^n$, $n \in N$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, Если n нечетно; $[0, +\infty]$, если n четно	
$y = x^{-n}$, $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup (-0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (-0, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty]$, если n четно	
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$	$(-\infty, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty]$, если n четно	$(-\infty, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty]$, если n четно	

2.Показательная функция

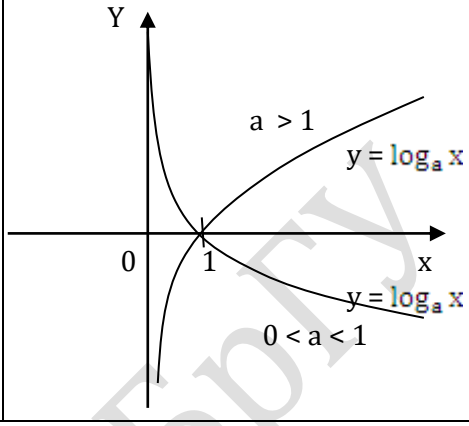
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	

Продолжение таблицы 4.2

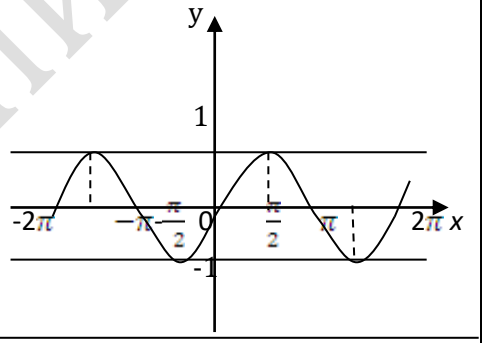
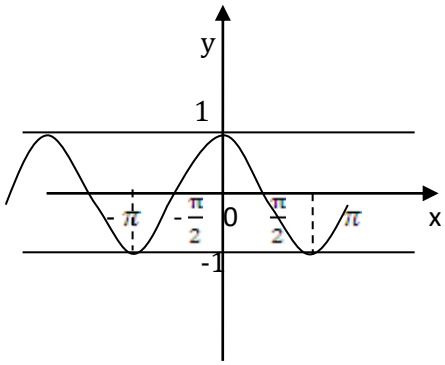
Репозиторий БрГУ

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График

3.Логарифмическая функция

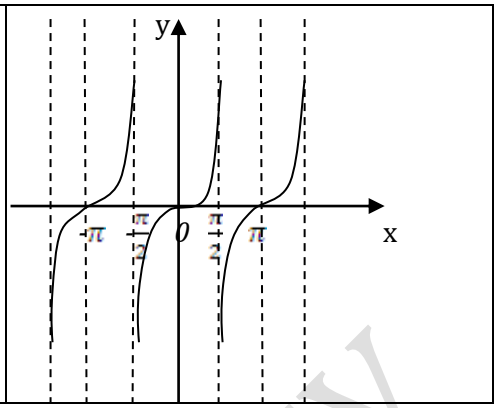
$y = \log_a x_1$ $a > 0$, $a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	

4.Тригонометрические функции

y = sin x	$(-\infty, +\infty)$	[-1,1]	
У = cos x	$(-\infty, +\infty)$	[-1,1]	

Продолжение таблицы 4.2

Репозиторий БрГУ

y = tg x	$(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty, +\infty)$	

4.3. Предел функции

Понятие предела является математическим выражением факта одновременного стремления двух связанных величин к некоторым значениям.

Примеры:

✓ если вы читаете литературу со скоростью 60 страниц в час, то при стремлении времени чтения к двум часам числе прочитанных страниц будет стремиться к 120;

✓ если количество рекламных вставок равно 30 в час, то при приближении времени просмотра телепередачи к трем часам число реклам будет приближаться к 90;

✓ вы усиленно работаете над своим характером, чтобы быть похожим на Васю, который нравится Марине, а она нравится вам; тогда, если вы станете похожим на Васю, степень благосклонности Марины к вам будет почти такой же, как и к Васе [1, с. 112].

Понятие предела является одним из основных в математике. Рассмотрим любую функцию, например $y = x^3$; зададим любое значение x, к примеру, $x = 2$. Возьмём последовательность чисел x, близких к числу 2, и вычислим значения $y_i = x_i^3$. Один из вариантов последовательностей чисел x_i и y_i приведен в таблице 4.3:

Таблица 4.3

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03	2,04
y	7,53	7,64	7,76	7,88	8	8,12	8,24	8,36	8,49

Приведенная в таблице последовательность чисел имеет следующую закономерность: чем меньше число x отличается от числа 2, тем меньше соответствующее значение y отличается от числа 8. Т. е. при стремлении

числа x к 2 число y стремится к 8, какие бы последовательности чисел x_i и $y_i = x_i^3$ мы ни рассматривали.

Число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ при стремлении x к a (или в точке $x = a$), если для всех значений x $(x \neq a)$, сколь угодно мало отличающихся от a, соответствующие значения y сколь угодно мало отличаются от A.

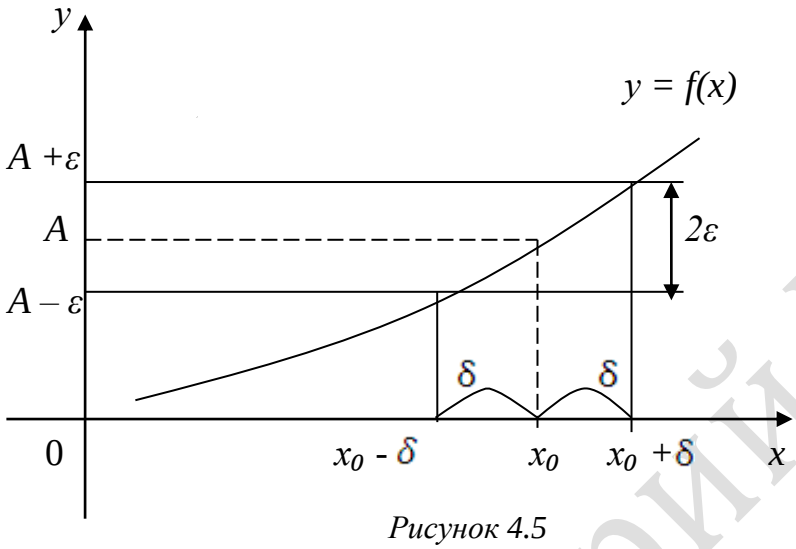


Рисунок 4.5

Число A — ***предел функции*** $y=f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) — A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Пример:

Предел функции $y=x^2$ в точке $x=2$ равен 4. Записываем: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

4.4. Непрерывность функций.

С пределом функции тесно связана ее непрерывность, означающая малое изменение функции при малом изменении аргумента.

Пусть функция $f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некотором интервале с центром в x_0 (т.е. в окрестности x_0). Очевидно, что при $x=x_0$ функция имеет значение $y = f(x_0)$, а при $x=x_0+\Delta x$ значение функции $y = f(x_0+\Delta x)$. Приращение функции равно

$$\Delta y= f(x_0+\Delta x)- f(x_0),$$

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\mathbf{x_0}$, если она определена в самой этой точке и некоторой ее окрестности и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \text{ либо иначе } \lim_{x \to x0} f(x) = f(x_0),$$

Это условие непрерывности используется при вычислении пределов, а именно: если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то при вычислении ее предела в этой точке нужно подставить в функцию вместо аргумента x значение x_0.

Примеры:

1. $\lim_{x \to 2} e^{3x+2} = e^8$

2. $\lim_{x \to 0} (\sin x + 2x^2 - 3\cos 4x) = -3$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b), то говорят, что функция ***непрерывна на этом интервале***. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала соответственно справа и слева, то говорят, что $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a, b]$.

Непрерывность играет большую роль в природе и в обществе.

Примеры:

✓ Непрерывность в природе: известно, что рост и развитие организма происходит непрерывно, испытывая малые изменения за малый промежуток времени. Представьте, что было бы, например, с шестилетним ребенком, если бы вдруг однажды за один день его рост увеличился на 10 см. Это была бы катастрофа для всего организма, ведь за кратчайший срок изменилась бы деятельность всех органов и систем.

✓ Непрерывность в обществе: постепенное (непрерывное) развитие дает возможность осуществлять прогноз и корректировку, учитывая огромное множество различных факторов; при больших скачках (разрывах) в развитии возможны социально-экономические взрывы (дефолты, революции).

✓ Один из важнейших вопросов психологии: можно ли повлиять на характер человека? Ответ будет положительным, если соответствующая

работа осуществляется медленно и постепенно, а скачки, связанные с разрывами различных психических процессов, могут привести негативным последствиям [1, с. 120].

4.5. Производная

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Тогда приращению Δx независимой переменной x соответствует приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Однако более важным для исследования свойств функции является не само приращение Δy, а относительное приращение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел относительного приращения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Этот предел обозначается

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

Дифференцируемой называется функция, которая имеет производную.

Дифференцированием называется операция нахождения производной.

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график некоторой функции (рисунок 4.6). Касательная прямая к графику в точке $(x, f(x))$образует с осью Ox угол α, для которого

$$\boxed{tg\ \alpha = f'(x)}$$

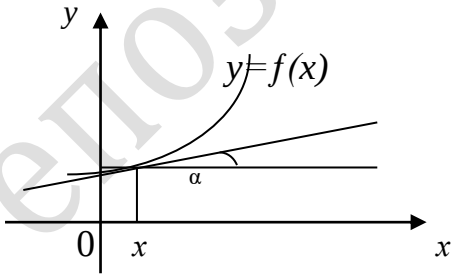


Рисунок 4.6

Физический смысл производной

Репозиторий БрГУ

Пусть $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t. Тогда $\Delta S(t)=S(t+\Delta t)-S(t)$ – участок пути, проходимый за время Δt. Отношение $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ есть средняя скорость на участке $\Delta S(t)$ пути, а

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=S'(t)=V(t)$$

есть ***мгновенная скорость*** в точке t.

Если же $V(t)$ скорость в точке t, то $\frac{\Delta V(t)}{\Delta t}$ есть среднее ускорение на участке времени Δt, а

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V(t)}{\Delta t}=V'(t)=a(t)$$

есть ***ускорение в момент времени*** t.

Таким образом, вторая производная от пути

$$a(t)=V'(t)=(S'(t))'=S''(t)$$

есть ускорение в момент времени t.

В общем случае, если $y(t)$ описывает произвольный процесс, разворачивающийся во времени, то $y'(t)$ есть скорость этого процесса. Для функции с аргументом x, не обязательно обозначающим время, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения y относительно изменения x, а $y'(x)$ – мгновенная скорость изменения y.

Пример:

Пусть некоторый физиологический процесс описывается формулой $y=4t^3+5t^2-3t$. Найти скорость в момент времени $t=2$.

$V(t)=y'(t)=12t^2+10t-3$. $y'(2)=12\cdot 2^2+10\cdot 2-3=65$ *ед. скорости.*

4.6. Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю, т.е

$$\boxed{c'=0}$$

2. Производная аргумента равна 1, т.е.

$$\boxed{x'=1}$$

Репозиторий БрГУ

В следующих правилах будем полагать, что $u=u(x)$ и $\upsilon=\upsilon(x)$ – дифференцируемые функции.

3. Производная алгебраической суммы функций равна сумме производных этих функций, т.е.

$$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$$

4. Производная произведения двух функций равна

$$(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)' = cu'$$

6. Производная частного двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}$$

(при условии, что $\upsilon \neq 0$).

7. Производная сложной функции.

Пусть заданы функции $y=f(x)$ и $z=g(y)$, для которых определена сложная функция $z=g(f(x))$. Тогда, если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z=g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то производная сложной функции $z=(g \circ f)(x)$ в точке x_0 вычисляется по формуле

$$(g\ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

1. Производная обратной функции

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$ и производная $f'(x_0)$ существует, то производная обратной функции в точке $y_0 = f(x_0)$ вычисляется по формуле

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Репозиторий БрГУ

4.7. Таблица производных

Все основные элементарные функции являются дифференцируемыми и имеют производные, приведенные в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Функция y	Производная y'	Функция y	Производная y'
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$u+v$	$u' + v'$	$log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
uv	$u'v + v'u$	$\sin x$	$\cos x$
cu	cu'	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	tg x	$\frac{1}{cos^2 x}$
x^n	nx^{n-1}	$arcsin\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$g(f(x))$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

4.8. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_2 > x_1$, верно неравенство

$$f(x_2) > f(x_1)\big(f(x_2) < f(x_1)\big).$$

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания функции.

Если производная дифференцируемой функции положительная (отрицательная) внутри некоторого промежутка X, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Репозиторий БрГУ

Точкой максимума функции *y=f(x)* называется такая точка x_0, что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Точкой минимума функции *y=f(x)* называется такая точка x_1, что в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_1).$$

Максимумом и ***минимумом*** функции называются значения функции в точках x_0(точка максимума) и x_1(точка минимума). Максимум и минимум функции объединяются общим названием ***экстремума*** функции.

На рисунке 4.7: x_1, x_2, x_3, x_4 – точки экстремумов, а *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции.

Следует заметить, что определенные выше максимум и минимум функции не обязательно являются ее наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[a, b]$, в связи с чем они называются ***локальными*** максимумами и минимумами. Локальных максимумов и минимумов может быть много, в то время как наибольшее и наименьшее значения функции равны конкретным числам *M* и *m*.

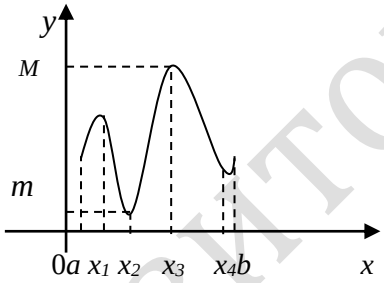


Рисунок 4.7

Необходимое условие экстремума

Если в точке x_0 дифференцируемая функция *y=f(x)* имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ имеет экстремум (минимум) в точке *x = 0*, но не дифференцируема в ней (рисунок 4.8, *а*). Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ также имеет в точке *x = 0* минимум (рисунок 4.8, *б*), но производная ее в этой точке не существует. Поэтому необходимое условие экстремума может быть сформулировано следующим образом.

Репозиторий БрГУ

Для того, чтобы функция *y=f(x)* имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала, т.е. чтобы точка x_0 была критической.

Это условие не является достаточным, что показывает пример, приведенный на рисунке 4.8, *в*.

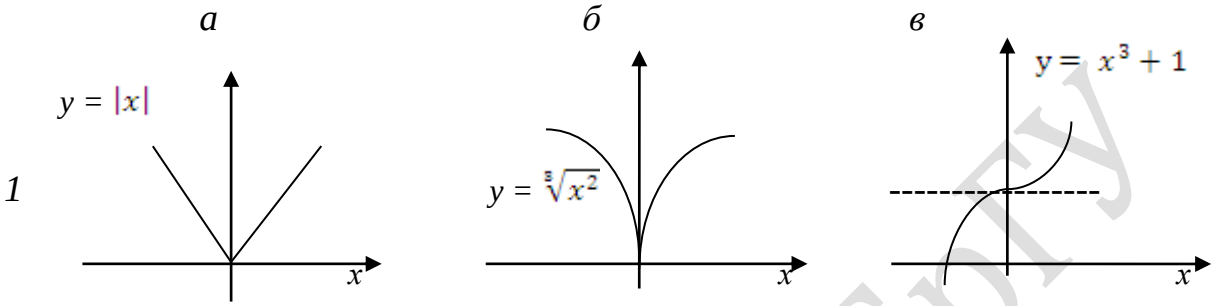


Рисунок 4.8

Достаточные условия экстремума

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема в δ-окрестности точки x_0. Тогда, если в этой точке производная меняет знак, имеет место локальный экстремум.

Действительно, если в левой половине δ-окрестности производная больше нуля, то в ней функция возрастает. Если при этом в правой половине δ-окрестности производная меньше нуля, то в ней функция убывает. Таким образом, если в стационарной точке x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума. Точно так же если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума (рисунок 4.9).

Рисунок 4.9

Репозиторий БрГУ

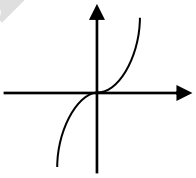
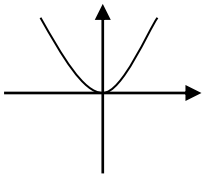
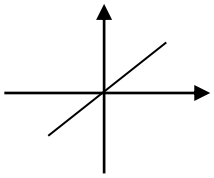
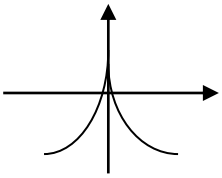
Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a,b]$, необходимо:
1. Найти критические точки на этом отрезке.
2. Подсчитать значения в этих точках и на концах отрезка.
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

Примеры:

1. Исследуем на экстремум следующие функции: x^3, x^2, x, $1\text{-}x^{2/3}$. Решение представим в виде таблицы (таблица 4.5).

Таблица 4.5

$f(x)$	x^3	x^2	x	$1\text{-}x^{2/3}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$\frac{-2}{3}x^{-1/3}$
Критическая точка x_0	0	0	Нет	0
$f'(x_0)$	0	0	1	Не существует
Знак $f'(x_0)$ (лев., прав.)	+ +	– +	+ +	+ –
Экстремум	Нет	min	Нет	max
График				

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3\text{-}3x+1$ на отрезке $[-2,2]$.

$f'(x) = 3x^2\text{-}3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

$$f(-1) = 3,\ f(1) = -1,\ f(-2) = -1,\ f(2) = 3.$$

Репозиторий БрГУ

Итак, $f(2) = f(-1) = 3$ – наибольшее, а $f(1) = f(-2) = -1$ – наименьшее значение.

4.9. Неопределённый интеграл

Первообразная и неопределённый интеграл

Обратной операцией для дифференцирования функции является нахождение её первообразной.

Первообразной для функции $y= f(x)$ называется такая функция $F(x)$,что $F'(x)=f(x)$ для всех x из области определения $f(x)$.

Пример:

Для функции $y=3x^2$ первообразной является функция $F(x)=x^3$, а также функция $F_1(x)=x^3+5$.

Как видно из примера, первообразная не определяется однозначно.

Если две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$, то их разность $F_1(x)-F_2(x) = C = const$ (является постоянной функцией). Отсюда следует, что множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ состоит из функций, отличающихся друг от друга на постоянную.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных этой функции.

Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Если функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а выражение $f(x)dx$ ***подынтегральным выражением***.

Пример:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Репозиторий БрГУ

Достаточным условием для существования неопределённого интеграла от функции $f(x)$ является непрерывность этой функции.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная неопределённого интеграла (т.е. каждой его составляющей первообразной функции) равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла (т.е. от каждой его составляющей первообразной функции) равен подынтегральному выражению:

$$d(\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака неопределённого интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме неопределённых интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1\ (x) \pm\ f_2\ (x))dx = \int f_1\ (x)dx \pm \int f_1\ (x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + c, то \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^a\, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} +\ C, где\ a \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{l}{\ln a}a^x +\ C, где\ a > 0, a \neq 1.$
4. $\int e^x\, dx = e^x + C.$

Репозиторий БрГУ

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C.$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Примеры:

1. $\int (\sin x + e^x)dx = -\cos x + e^2 + C.$
2. $\int \frac{dx}{5sin^2\ x} = -\frac{1}{5}ctg\ x + C.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\ dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$

4.10. Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ ... < x_n = b$. На каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,..., n)$ возьмем некоторую точку c_i.

Интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма

$$S_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ ... + f(c_n)(x_n - x_{n-1}), \text{или}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,,}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Обозначим наибольшую из длин Δx_i через λ.

Определённым интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, который обозначается

$\int_a^b f(x)dx$, называется предел интегральных сумм

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \qquad (*)$$

Репозиторий БрГУ

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Интегрируемой называется функция, для которой существует предел, обозначенный (*). Из условия $\lambda \to 0$ *следует, что* $n \to \infty$. Числа *a* и *b* называются ***пределами интегрирования***. Функция *f(x)* носит название ***подынтегральной функции.***

Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]*, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Пример:

Пусть *y=A* – постоянная функция на отрезке *[a,b]*. Тогда интегральная сумма имеет вид:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = A(b-a).$$

Она зависит от способа разбиения отрезка на части и

$$\int_a^b A dx = A(b-a).$$

Полученное число равно площади заштрихованного прямоугольника на рисунке 4.10.

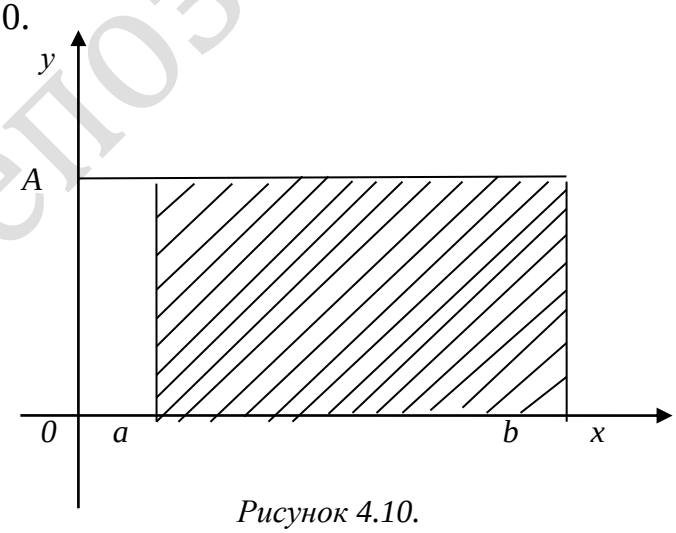


Рисунок 4.10.

Репозиторий БрГУ

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx,$ где α - произвольное число.

2. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ где $a<c<b$.

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, $a>в$

5. Если для всех $x\epsilon[a, b]$ выполняется $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Для $x \geq a$ производная определённого интеграла

$$\int_a^x f(t)dt$$

равна значению подынтегральной функции в точке x: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

7. Теорема о среднем: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \epsilon [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

8.Оценка модуля интеграла: если $f(x)$ интегрируема на [a,b], то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

9. Формула Ньютона – Лейбница (связывает неопределённый и определённый интегралы): если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], а функция $F(x)$- какая-либо её первообразная (т.е. $F'(x) = f(x')$), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Репозиторий БрГУ

Пример:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4.$$

4.11. Использование математического анализа в психологии

Понятие функции и производное от него понятие функциональной схемы и функционирования тех или иных психических процессов, психики в целом, широко применяется в психологии. Для описания различных психических процессов необходимы многие элементарные функции – от константы до экспоненциальной и гиперболической функций. К числу психологических констант можно отнести время, затраченное человеком на выполнение элементарной арифметической операции (сложение, умножение, вычитание, деление в пределах одного десятичного разряда, а также перенос из разряда в разряд), – в уме без записи или с записью результата. Это время составляет приблизительно 1 сек. [2, с. 73].

Линейная функция широко применяется для построения психометрических шкал. Например, как было показано В. И. Николаевым, латентное время реакции испытуемого линейно зависит от количества информации, перерабатываемой испытуемым в эксперименте: $y=a_1x+a_0$, причем $a_0=0$, $a_1=0{,}03$ *бит/с* [2, с. 74].

Известный психофизический закон Г.Т. Фехнера $R=a\cdot lnS+b$ выражается линейной зависимостью ощущения R от натурального логарифма интенсивности стимула S, a и $в$ – константы, определяемые психологическими и физическими условиями опыта.

Показательная функция с основанием e $y = e^x = exp[x]$ (экспонента) использовалась еще И.Ф. Гербартом для описания временной динамики представлений. Экспоненциальная функция применяется также для описания законов вероятностных распределений и эмпирических зависимостей в психологии.

Любая прогнозная модель в психологическом прогнозировании является моделью случайного процесса как случайной функции, аргументом которой служит время.

Репозиторий БрГУ

Глава 5
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Основы комбинаторики

Упорядоченным называется множество, в котором учитывается порядок следования элементов. Так, например, множества *{а, в, с}* и *{а, с, в}* есть различные упорядоченные множества.

Кортежом длины ***k*** называется упорядоченная последовательность, состоящая из k элементов, в которой известно, какой элемент за каким следует и сколько раз повторяется (см. п.1.3). Основное отличие кортежа от упорядоченного множества состоит в том, что элементы кортежа могут повторяться.

Сформулируем основные правила комбинаторики.

1. Правило суммы

Пусть из множества X элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 — другими n_2 способами и т.д., элемент a_k – n_k способами, отличными от предыдущих. Тогда выбор одного из элементов a_1, или a_2, или и т.д., a_k можно произвести

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

способами.

2. Правило произведения

Пусть X — некоторое множество, из которого выбор элемента a_1 можно осуществить n_1 способами, после этого выбор элемента a_2 можно осуществить n_2 способами и т.д., наконец, элемент a_k можно выбрать n_k способами. Тогда одновременный выбор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в указанном порядке можно осуществить

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Пример:

Пусть в продаже имеется 17 видов авторучек и 5 видов блокнотов. Тогда выбор одной принадлежности (или авторучки, или блокнота) можно

сделать 22 способами (22 = 17 + 5). Выбрать же две принадлежности (авторучку и блокнот) можно 85 способами (17·5=85).

---

3. Основные комбинации и формулы для их подсчета

Основными комбинациями, рассматриваемыми в комбинаторике, являются комбинации без повторений и с повторениями. Это перестановки, размещения и сочетания.

Пусть некоторое множество *X* состоит из *n* элементов. Будем переставлять элементы этого множества всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя лишь их порядок. Каждая из полученных комбинаций (в том числе и первоначальная) носит название ***перестановки***. Общее число перестановок из *n* элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

где *n!* («эн факториал») – это произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Следует отметить, что 0!=1.

Каждое упорядоченное подмножество n-элементного множества X, состоящее из k элементов, называется ***размещением из n элементов по k элементов***. Через A_n^k обозначают число всех размещений из *n* элементов по *k* (читается: «*A* из *n* по *k*»). Для числа размещений справедлива формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)).$$

Кортеж длины k, составленный из элементов n-элементного множества X, называют ***размещением с повторениями из n элементов по k***. Число таких кортежей обозначают $\overline{A_n^k}$ вычисляют по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k.$$

Сочетанием из n элементов по k элементов называется каждое неупорядоченное *k*-элементное подмножество множества *X*, состоящего из *n* элементов. Число всех сочетаний из *n* элементов по *к* элементов обозначается C_n^k *(«C* («цэ») из *n* по *k»)*. Для числа сочетаний справедливы формулы:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Примеры:

1. Пусть в группе 25 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны из этой группы три делегата на конференцию?

Последовательность выбора делегатов не играет роли, поэтому здесь необходимо составить из имеющихся 25 элементов множества студентов различные трехэлементные подмножества. Это сочетания из 25 по 3:

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\cdot(25-3)!} = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1} = 2300.$$

2. Сколько существует способов распределения призовых мест на олимпиаде среди 25 участников? Необходимо составить различные упорядоченные трехэлементные подмножества из элементов 25-элементного множества. Это размещения без повторений из 25 по 3:

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25\cdot 24\cdot 23 = 13800.$$

3. Сколькими способами можно составить список из 25 студентов?

В задаче необходимо найти число различных упорядоченных множеств из 25 элементов, т.е. число перестановок из 25 элементов:

$$P_{25}=25!$$

4. Сколькими способами группе студентов из 25 человек могут быть выставлены экзаменационные оценки в ведомости, если известно, что неудовлетворительной оценки не получил никто?

Все удовлетворительные оценки – это 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Их семь. Значит, необходимо составить различные кортежи длины 25 из элементов семиэлементного множества. Число таких кортежей – это число размещений с повторениями из семи элементов по 25:

$$\overline{A_7^{25}} = 7^{25}.$$

5.2. Вероятность случайного события

Предметом теории вероятностей является анализ закономерностей в случайных явлениях. Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей является психология. Практическое значение вероятностных методов состоит в том, что они позволяют по известным характеристикам простых случайных явлений прогнозировать характеристики более сложных явлений.

Пространством элементарных событий называют множество Ω взаимоисключающих исходов эксперимента такое, что каждый

интересующий результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества. Элементы множества Ω называются ***элементарными*** событиями и обозначаются ω: $\Omega=\{\omega\}$. Элементарные события нельзя разложить на составляющие их события.

Событием называется исход испытания. Это понятие является первичным в теории вероятностей. События обозначаются большими латинскими буквами *A, B, C, ... A, B, C, ...* $\subseteq \Omega$. Любое событие *A* из пространства Ω можно составить из элементарных событий.

Среди событий отличают достоверное и невозможное события. ***Достоверное событие*** — это такое событие Ω, которое всегда происходит. ***Невозможное событие*** $\emptyset$ — это событие, которое не может произойти.

Примеры событий: *A* – выпадение орла при бросании монеты, *B* – выигрыш в лотерею, *C* – реакция испытуемого на раздражитель и т.д.

Два события называются ***совместными*** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в данном опыте. Два события называются ***несовместными*** в данном опыте, если они одновременно не могут произойти.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытаний обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Примеры:

В опыте с бросанием игральной кости (кубика) элементарными событиями являются выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Они образуют полную группу. В этом же опыте событиями являются выпадения четного или нечетного числа.

Совместными событиями в этом опыте будут выпадение четного числа и числа, делящегося на 3 (выпадение числа 6 фиксирует появление того и другого события).

Несовместными событиями здесь будут выпадение числа 5 и четного числа.

Если имеем дело со случайными событиями, то невозможно предсказать заранее исход того или иного опыта. Однако при исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под вероятностью события понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существуют различные подходы к определению вероятности.

1. Классическое определение вероятности

Классической схемой, или ***схемой случаев***, называется испытание, при котором число элементарных исходов конечно, и все из них равновозможны.

Случай ω называется благоприятным некоторому событию *A,* если его появление влечет наступление события *A* (т.е. ω входит в число элементов, составляющих *A).* Например, при бросании игральной кости возможны шесть случаев, при этом событию *A* – появлению нечетного числа очков – благоприятны лишь три случая: выпадение 1, 3, 5 и неблагоприятны остальные три.

Классической вероятностью события *A* называется отношение числа *m* случаев, благоприятных событию *A,* к числу *n* всех случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Из определения следуют свойства вероятности:

1. Значение вероятности заключено между нулем и единицей:

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0;$$

3. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

Пусть пространство Ω состоит из *n* элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Тогда для каждого ω_i благоприятным исходом будет только само ω_i и для него $m = 1$. Поэтому

$$P(\omega_i) = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, если в классической схеме пространство Ω состоит из *n* элементарных равновозможных событий, то вероятность каждого из них равна $1/n$.

Примеры:

1. В опыте с бросанием игральной кости число всех исходов *n* равно 6 и все они равновозможны. Пусть событие *A* означает появление нечетного числа. Тогда для этого события благоприятными исходами будут

появления чисел 1, 3, 5. Их количество m равно 3. Поэтому вероятность события A равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. В книге 250 страниц. Какова вероятность того, что мы откроем книгу на странице с номером, кратным 10?

Пусть событие A: «Номер открытой страницы есть число, кратное 10».Согласно классическому определению вероятности, $P(A)=\frac{m}{n}$, где n — число всех возможных случаев, m — число случаев, благоприятных событию. Число n всех равновозможных случаев, образующих полную группу, равно 250. Найдем число случаев, благоприятных событию, т.е. число страниц с номером, кратным 10. Его можно вычислить, пользуясь тем, что номер нужной страницы имеет вид $10m$, где m – натуральное число, причем $0\leq 10m \leq 250$. Откуда находим $m \leq \frac{250}{10}=25$. Подставив полученные числа в формулу классического определения вероятности, получим:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{25}{250}=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

---

2. Статистическое определение вероятности

Пусть было проведено n испытаний, в каждом из которых могло появиться некоторое событие A. Появление события A было зафиксировано m раз. Вероятность события A оценивается ***относительной частотой*** (частостью) появления события A, которая представляет собой отношение числа событий, в которых появилось событие A, к общему числу событий:

$$P(A)\approx\frac{m}{n}.$$

Многочисленные эксперименты такого рода показывают, что при больших n отношение m/n, называемое остается примерно постоянным.

При статистическом определении ***вероятностью*** события A называется постоянная величина, вокруг которой колеблются значения частостей при неограниченном возрастании числа n.

Пример:

Английский ученый Пирсон произвел 23 000 бросаний монеты [3, с. 8]. При этом герб появился 11 512 раз. Значит, относительная частота появления герба равна: $\frac{11512}{23000}=0{,}5005\approx 0{,}5$. Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

5.3. Действия над событиями

Если событие *A* обязательно произойдет при появлении события *B*, то говорят, что событие ***B*** является ***частным случаем*** события ***A***. Этот факт обозначается $B \subset A$. В терминах элементарных событий это означает, что каждое элементарное событие, входящее в *B*, входит также и в *A*.

События *A* и *B* называют ***равными*** если они состоят из одних и тех же элементарных событий, т.е. в данном опыте могут появиться или не появиться вместе (в этом случае $A \subset B$ и $B \subset A$).

Суммой (объединением) событий *A* и *B* называется такое событие $C = A + B$ $(A \cup B)$, которое означает наступление хотя бы одного из них (либо *A,* либо *B,* либо *A* и *B* одновременно).

Произведением (пересечением) событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном наступлении события *A* и события *B,* и обозначается $C = A \cdot B$ $(A \cap B)$.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию *A,* если оно выполняется тогда и только тогда, когда не выполняется событие *A*.

Разностью событий *A* и *B* называется событие, состоящее в наступлении *A* и не наступлении *B*. Разность обозначается $A - B$ $(A \backslash B)$.

Примеры:

1. Пусть производится выбор одного из чисел от 1 до 30. Пусть событие *B* означает выбор четного числа, событие *A* – выбор числа, кратного 4. 1. Пусть производится выбор одного из чисел от 1 до 30. Пусть событие *B* означает выбор четного числа, событие *A* – выбор числа, кратного 4. Тогда $A \subset B$, так как каждое число, кратное 4, является четным.

2. Пусть производится выбор одного из чисел от 1 до 30. Если событие *B* — выбор числа, кратного 5, а событие *A* — выбор числа, оканчивающегося цифрами 0 или 5, то $A = B$.

3. Пусть при выборе одного из чисел от 1 до 10 событие *A* означает выбор четного числа. Значит, A = {2, 4, 6, 8, 10}, т.е. событие *A* состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел 2, 4, 6, 8, 10. Событие *B* — выбор числа, кратного 3. B ={3, 6, 9}, т.е. событие *B* состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел 3, 6, 9. Тогда событие $A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3 (при этом не исключается, что число кратно и 2 и 3), т.е. A + B = {2, 3, 4, 6, 8, 10}. состоит из элементарных событий — выборов одного из чисел Событие $A \cdot B$ означает выбор числа, кратного и 2 и 3 одновременно, т.е. A · B ={6}.

Операции над событиями можно представить как операции над множествами. При этом события представляются подмножествами универсального множества Ω (достоверное событие). С помощью диаграммам Венна это изображено на рисунке 5.1.

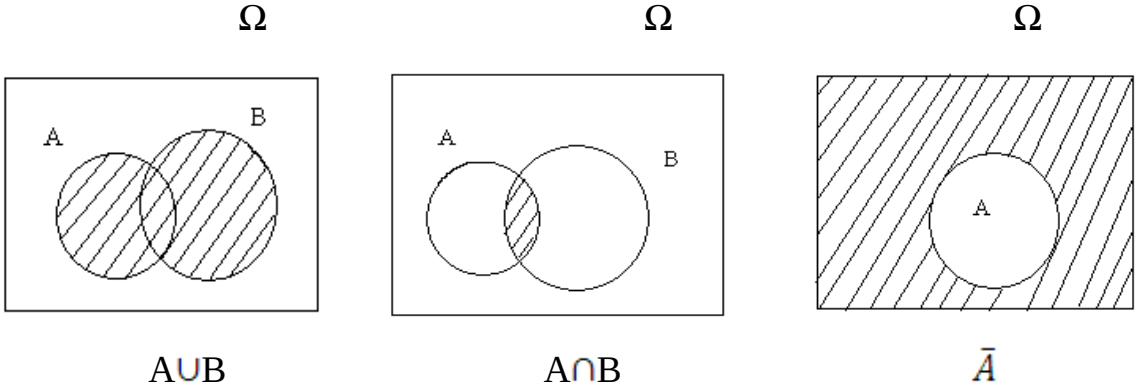


Рисунок 5.1

Свойства операций над событиями:

1. $\bar{\bar{A}}=A$.
2. A+B = B+A, A·B = B ·A – коммутативность.
3. (A+B)+C=A+(B+C),(A·B)·C=A·(B·C) – ассоциативность.
4. A(B+C)=AB+AC – дистрибутивность.
5. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ – аналог законов Де Моргана.
6. A+A=A, A · A = A.
7. A + Ø = A, A · Ω =A.
8. A + Ω = Ω, A · Ø = Ø.
9. $A \cdot \bar{A} = \varnothing$, $A + \bar{A} = \Omega$.

5.4. Основные теоремы теории вероятностей

1. Теоремы сложения

- ✓ Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)} \qquad (*)$$

- ✓ Вероятность суммы совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)} \qquad (**)$$

- ✓ Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Примеры:

1. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором все числа – элементарные события – равновозможны, вероятность каждого из них равна $1/10$. Пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, тогда A и B несовместны и $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдем $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(A+B) = \frac{7}{10}$.

Проверим результат вычисления по формуле (*): $P(A+B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

2. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором все числа – элементарные события – равновозможны, вероятность каждого из них равна $1/10$. Пусть $A = \{2, 3, 5, 7, 10\}$, $B = \{2, 5, 6, 8, 9\}$, тогда $A \cdot B = \{2, 5\}$, $A + B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A \cdot B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P(A+B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$,

что соответствует формуле (**):

$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

3. Пусть в группе из 27 туристов 17 человек владеют английским языком, 6 – французским, а 2 – обоими языками. Найти вероятность того, что случайно выбранный из группы турист владеет по крайней мере одним из этих языков [3, с. 13].

Введем событие: А – «выбранный турист владеет английским», В – «выбранный турист владеет французским». Тогда событие А + В означает, что турист владеет хотя бы одним из этих языков. По условию задачи

$P(A) = \frac{17}{27}$, $P(B) = \frac{6}{27}$, $P(AB) = \frac{2}{27}$.

по формуле (**)имеем:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{17}{27} + \frac{6}{27} - \frac{2}{27} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$.

---

2. Условная вероятность и теоремы умножения

Событие A называется ***зависимым*** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет. Вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло событие

B, называется ***условной вероятностью*** события *A* и обозначается *P(A/B)* (или $P_B(A)$), говорят: «вероятность события *A* при условии *B*».

Условная вероятность *P(A/B)* определяется формулой (при *P(B)>0)*

$$P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Пример:

В рассмотренном выше примере 2 $P(A \cdot B) = 1/5$, $P(B) = 1/2$, поэтому условная вероятность равна

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Эту же вероятность можно найти непосредственно по определению. В состав события *B* входят 5 чисел, только 2 из чисел, входящих в *A*, входят также и в *B*. По классической формуле вероятности

$$P(A/B) = \frac{2}{5}.$$

События *A* и *B* называются ***независимыми***, если *P(A/B)=P(A)*, т.е. вероятность события *A* не зависит от того, произошло ли событие *B*.

Как следствие рассмотренной формулы условной вероятности можно рассмотреть **теоремы умножения вероятностей**:

- ✓ Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$\boxed{P(A\cdot B) = P(A/B)\cdot P(B)},\ P(B) > 0 \text{ или}$$

$$\boxed{P(A\cdot B) = P(B/A)\cdot P(A)},\ P(A) > 0$$

- ✓ Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$\boxed{P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)}$$

Часто последнее соотношение служит определением независимости событий, так что события называются ***независимыми***, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей.

Примеры:

1. Пусть события A и B несовместны и $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Это значит, что $P(A) \cdot P(B) \neq 0$. Найдем $P(A \cdot B) = P(\varnothing) = 0$. Поэтому $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Это означает, что несовместные события A и B зависимы.

2. Пусть событие A влечет за собой событие B, т.е. $A \subset B$, и $P(B) \neq 1$. Тогда $A \cdot B = A$, и $P(A \cdot B) = P(A)$. Поэтому $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Это означает, что если $A \subset B$, то события A и B – зависимы.

5.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Рассмотрим n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Они образуют ***полную группу событий***, если они попарно несовместны, а их сумма является достоверным событием, т.е.

$$H_i \cdot Hj = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{ и } H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega.$$

Такие события называются ***гипотезами***.

Простейшим примером полной группы событий является произвольное событие A и его дополнение $\bar{A}$. По теореме сложения вероятностей, для полной группы событий справедливо равенство

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Примеры:

1. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Рассмотрим события $H_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $H_2 = \{1, 3\}$, $H_3 = \{5, 7, 9\}$. Они попарно несовместны, а их сумма является достоверным событием Ω. Значит, H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий. Для них $P(H_1) = 5/10$, $P(H_2) = 2/10$, $P(H_3) = 3/10$, т.е. сумма их вероятностей равна 1.

2. В лесу растут деревья, среди которых 60 % берез, 10 % елей, и 30 % сосен. [3, с. 16]. Случайным образом выбирается для замера одно из деревьев. Обозначим гипотезы: H_1 – «выбранное дерево – береза», H_2 – «выбранное дерево – ель», H_3 – «выбранное дерево – сосна». Тогда события H_1, H_2, H_3 – попарно несовместны, $P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}1$, $P(H_3) = 0{,}3$. Значит, гипотезы H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий. Сумма их вероятностей равна 1.

Пусть события H_1, H_2, . . ., H_n образуют полную группу событий. Тогда для любого события A имеет место ***формула полной вероятности***:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i)}$$

Пример:

Рассмотрим предыдущий пример 2. Пусть при замере диаметра деревьев он оказался больше 15 см для 30 % берез, 40 % елей и 70 % сосен. Введем событие A – «диаметр случайно выбранного дерева больше 15 см». Найдем вероятность этого события. По условию примера, условные вероятности события A равны: $P(A/H_1) = 0{,}3$, $P(A/H_2) = 0{,}4$, $P(A/H_3) = 0{,}7$. Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}43.$$

В формулу полной вероятности входят вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, . . ., $P(H_n)$, которые называются априорными. Это вероятности гипотез H_i , вычисленные до опыта (*a priori*). Если событие A наступило, то эти вероятности изменяются. Это будут апостериорные условные вероятности, вычисленные после опыта (*a posteriori*) $P(H_1/A)$, $P_A(H_2/A)$, . . . , $P_A(H_n/A)$. Они могут быть найдены по ***формуле Байеса***:

$$\boxed{P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i)}}$$

Пример:

Пусть в условиях предыдущего примера диаметр случайно выбранного дерева оказался больше на 15 см, т.е. событие A наступило. Найти вероятность того, что измеренное дерево – береза. По формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}43} = 0{,}42.$$

5.6. Формула Бернулли

Опыты называются ***независимыми***, если вероятность исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Пусть проводятся n независимых опытов, в результате которых может появиться событие A с вероятностью p и не появиться с вероятностью q, причем $p+q = 1$. Такая схема называется ***схемой Бернулли***.

Пусть X – число появлений события A в n испытаниях Бернулли. Тогда вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз ($X=k$) вычисляется по ***формуле Бернулли:***

$$\boxed{P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Пример:

Вероятность попадания в мишень для конкретного стрелка равна 0,7. Какова вероятность того, что из 10 выстрелов будет 4 попадания в мишень?

Воспользуемся формулой Бернулли при $k = 4$, $n = 10$, $p = 0{,}7$. Искомая вероятность равна $P(X = 4) = C_{10}^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^6 = 0{,}0367$.

В n испытаниях Бернулли ***наивероятнейшее число k_0 появления события A*** определяется неравенством

$$\boxed{(n+1)p - 1 \le k_0 < (n+1)p}$$

Пример:

Всхожесть семян некоторого растения имеет вероятность 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из 7 посеянных.

По формуле $8 \cdot 0{,}8 - 1 \le k_0 < 8 \cdot 0{,}8$, поэтому $k_0 = 6$.

5.7. Формула Пуассона

Если в схеме испытаний Бернулли число испытаний n велико, вероятность p события A в одном испытании мала, а произведение $\lambda = np$ не превосходит 20, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится ровно в m испытаниях, находится по приближенной ***формуле Пуассона:***

$$\boxed{P(X = m) \cong \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} = p(m), m = 0,1,\dots,n}$$

Репозиторий БрГУ

Значения $p(m)$ имеются в таблицах значений функции Пуассона.

Пример:

В ходе проверки случайным образом отбирается 10 счетов. Найти вероятность того, что обнаружится один счет с ошибкой, если в среднем 3% счетов содержат ошибки.

Для решения задачи используем формулу Пуассона, в которой n = 10, p=0,03, $\lambda = np$ = 0,3. Имеем

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \approx \frac{e^{-0,3} \cdot (0,3)^1}{1!}.$$

По таблицам значений функции Пуассона находим $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \approx 0,2223$.

5.8. Локальная формула Муавра – Лапласа

Если число испытаний n достаточно велико, то вероятность появления события A ровно m раз в схеме из n испытаний Бернулли можно вычислять по приближенной ***формуле Муавра – Лапласа:***

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$$

где

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Причем $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – малая функция Лапласа (функция Гаусса), значения которой имеются в соответствующих таблицах.

Пример:

Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 70 грибов белых будет 20?

По формуле Муавра – Лапласа при n=70, m=20 имеем:

$$x = \frac{20 - 70 \cdot 0,25}{\sqrt{70 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 0,69.$$

По таблицам определяем значение $\varphi(0,69) = 0,3144$. Тогда

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=20) \approx \frac{1}{\sqrt{70 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(0,69) = 0,0868 \approx 0,087.$$

Репозиторий БрГУ

5.9. Интегральная формула Муавра – Лапласа

Для того, чтобы определить вероятность попадания числа *m* (появления события *A* в схеме Бернулли при большом числе испытаний *n*) в заданный промежуток *[а,в]*: $a \le m \le b$, можно использовать ***интегральную формулу Муавра – Лапласа:***

$$\boxed{P(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),}$$

где

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt}$$

– функция Лапласа, значения которой находятся по таблицам.

Для относительной частоты (частости) *m/n* появления события *A* в *n* испытаниях Бернулли справедлива приближенная формула

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Для числа *m* появлений события *A* справедлива приближенная формула

$$P(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

Примеры:

1. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью q = 0,25. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет находиться в пределах от 560 до 600.

Из условия задачи имеем *n*=768 испытаний Бернулли с вероятностью найти зрелый арбуз, равной *p=0,75*. Если *m* – число удачных выборов, то требуется найти вероятность $P(a \le m \le b)$, где *a* = 560, *b* = 600.

Поскольку

$$\frac{b-np}{\sqrt{npq}} = \frac{600 - 768\cdot 0{,}75}{\sqrt{768\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} = \frac{24}{11{,}977} = 2{,}00,$$

$$\frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{560-576}{11{,}977} = -1{,}34,$$

Репозиторий БрГУ

то по интегральной формуле Муавра – Лапласа получим:

$$P(560 \le m \le 600) = \frac{1}{2}\Phi(2) - \frac{1}{2}\Phi(-1) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}9545 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}8198 = 0{,}8872.$$

2. Сколько нужно произвести бросаний монеты, чтобы с вероятностью 0,99 можно было утверждать, что относительная частота выпадения герба отличается от 0,5 по модулю не более чем на $\varepsilon = 0{,}01$?

По формуле $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, в которой $\varepsilon = 0{,}01$, имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}01\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}99.$$

По таблицам значений функции Лапласа находим, что

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}58.$$

Откуда выражаем *n* и, подставляя *p=0,5; q=0,5*, получим:

$$n = \frac{2{,}58^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}01^2} = 16\,641.$$

5.10. Случайные величины. Закон распределения случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять определенное, но заранее не известное, значение. ***Дискретной*** называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные числа, которые можно пронумеровать. Например, число участников испытания, количество положительных тестов в психодиагностике.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать значения из некоторого бесконечного или конечного промежутка, т.е. возможные значения заполняют непрерывно некоторый промежуток. Например, скорость некоторого объекта, ошибка взвешивания на точных весах и т.д.

Случайные величины обозначаются большими буквами *X, Y, Z,* а их возможные значения – малыми буквами *x, y, z*. Запись *X= x* означает, что случайная величина *X* приняла значение *x*, запись *P(X=x)* означает вероятность того, что *X* приняла значение *x*.

Репозиторий БрГУ

Каждое значение дискретной случайной величины появляется с некоторой вероятностью. ***Законом распределения*** случайной величины называется соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями. О случайной величине говорят, что она имеет данный закон распределения. Простейшей формой задания закона распределения является таблица, называемая ***рядом распределения***, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности (таблица 5.1).

Таблица 5.1

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

В этой таблице $p_i = P(X = x_i)$ – это вероятность события $(X = x_i)$. Так как в каждом испытании случайная величина X принимает одно и только одно возможное значение, события $X = x_1$, $X = x_2$, … $X = x_n$ образуют полную группу, а, значит, сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Пример:

Всхожесть семян данного растения определяется вероятностью 0,6. Пусть X – случайная величина – число появившихся растений из 5 семян. Найти закон распределения X.

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4 ,5. Вероятности, соответствующие этим значениям случайной величины – $p_k = P(x = k),\ k = \overline{0,5}$. Вычислим эти вероятности. Можно считать, что имеется схема $n = 5$ испытаний Бернулли с вероятностью успешного результата $p = 0,6$. Тогда по формуле Бернулли $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. При $n = 5$, $p = 0,6$, $q = 0,4$ находим:

$p_0 = 0,01024$; $p_1 = 0,0768$;

$p_2 = 0,2304$; $p_3 = 0,3456$; $p_4 = 0,2592$; $p_5 = 0,07776$.

Таким образом, получаем закон распределения случайной величины X:

Таблица 5.2

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Можно проверить, что $\sum_{i=0}^{5} p_i = 1$.

Репозиторий БрГУ

5.11. Функция распределения случайной величины. Ее свойства

Другой формой закона распределения случайной величины является функция распределения *F(x)*, представляющая собой вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее *x*, т.е.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения иногда называют ***интегральной функцией распределения.***

Для дискретной случайной величины *X* с законом распределения $P(X = x_k) = p_k$, *k* = 1, 2, …, функция распределения имеет вид

$$\boxed{F(x) = \sum_{k, x_k < x} p_k}$$

где символ $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше *x*.

Графиком функции распределения дискретной случайной величины является график кусочно-постоянной функции. Скачки функции $F(x)$ в точках разрыва $x = x_k$ равны вероятностям этих значений $p_k = P(X = x_k)$. Сумма всех скачков равна 1.

Пример:

Построить график функции распределения для случайной величины предыдущего примера.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k, x_k < x} p_k.$$

При $x \le 0$, очевидно, $F(x) = 0$;
при $0 < x \le 1$ $F(x) = p_0 = 0{,}01024$;
при $1 < x \le 2$ $F(x) = p_0 + p_1 = 0{,}01024 + 0{,}0768 = 0{,}08704$;
при $2 < x \le 3$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}31744$;
при $3 < x \le 4$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}66304$;
при $4 < x \le 5$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}92224$;
при $x > 5$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.

График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 5.2.

Репозиторий БрГУ

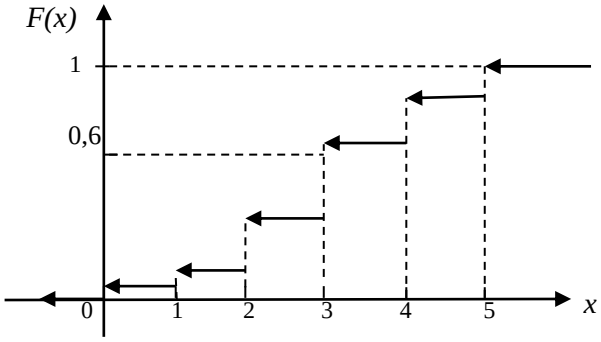


Рисунок 5.2

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими ***свойствами***:

1. Множество значений функции $F(x)$ находится на отрезке *[0; 1]:*

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.
3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу *(а; в)*, то $F(x)$=0 при $x \le a$, $F(x)$=1 при $x > в$.
4. Для $F(x)$ выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

5. Функция распределения непрерывна слева.
6. Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$.

В случае, когда $x_1 = a$ и $x_2 = в$, получим: $P(a \le X < в) = F(в) - F(a)$, т.е. вероятность принятия случайной величиной значения на промежутке *[а; в)* равна приращению функции распределения на этом промежутке.

5.12. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Математическое ожидание *MX* дискретной случайной величины *X* определяется формулой

$$\boxed{MX = \sum_k x_k p_k}$$

Репозиторий БрГУ

и имеет смысл среднего значения случайной величины. Если число значений случайной величины конечно и равно *n*, а вероятности $p_n = \frac{1}{n}$, то *MX* совпадает с обычным средним значением величин $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$MX = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $MC = C$, где $C = const$;
2. $M(CX) = C \cdot MX$, где $C = const$;
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$, для любых X и Y;
4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$, если X и Y независимы.

Для оценки **степени рассеивания** значений случайной величины вокруг ее среднего значения вводится понятие дисперсии.

Дисперсией (*DX*) называется математическое ожидание квадрата разности (*X – MX*):

$$\boxed{DX = M(X - MX)^2 = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k}$$

Для вычисления дисперсии обычно используют более удобную формулу

$$\boxed{DX = MX^2 - (MX)^2.}$$

Свойства дисперсии: $\sigma X = \sqrt{DX}$,

1. $DC = 0$, где $C = const$;
2. $D(CX) = C^2 DX$, где $C = const$;
3. $D(X \pm Y) = DX + DY$, если X и Y независимы.

Средним квадратическим отклонением называется величина

$$\boxed{\sigma X = \sqrt{DX},}$$

которая также является мерой рассеивания случайной величины *X*.

Пример:

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* для примера о всхожести семян из п. 5.10.

По формуле математического ожидания имеем:

$MX = 0 \cdot 0{,}01024 + 1 \cdot 0{,}0768 + 2 + 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}07776 = 3.$

Репозиторий БрГУ

Для вычисления дисперсии сначала найдем $MX^2 = 0^2 \cdot 0{,}01024 + 1^2 \cdot 0{,}0768 + 2^2 \cdot 0{,}2304 + 3^2 \cdot 0{,}3456 + 4^2 \cdot 0{,}2592 + 5^2 \cdot 0{,}07776 = 10{,}2$. По формуле дисперсии находим $DX = 10{,}2 - 3^2 = 1{,}2$. Тогда $\sigma X = \sqrt{1{,}2} \cong 1{,}905$

5.13. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения

Непрерывной называется случайная величина *X*, если ее функция распределения непрерывна.

Распределением непрерывной случайной величины называется совокупность вероятностей $P(a \le X \le b)$ для любых действительных чисел a и b.

Распределение непрерывной случайной величины однозначно определяется ее функцией распределения $F(x)$, так как

$$\boxed{P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).}$$

Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно, заданное определенное значение α, равна нулю.

$$P(X=\alpha) = 0$$

Все свойства функции распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.

Плотностью распределения вероятностей случайной величины *X* в точке *x* называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал *(x; x+Δx)* к длине Δ*x* отрезка *[x; x+Δx],* при стремлении Δ*x* к нулю:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

График функции *p(x)* (плотности распределения) называется ***кривой распределения.***

Справедливо следующее равенство:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt,}$$

Если случайная величина X имеет плотность, то она является непрерывной случайной величиной.

Репозиторий БрГУ

Плотность $p(x)$ однозначно определяет распределение случайной величины, поскольку вероятность попадания значений случайной величины *X* в интервал *(а; в)* равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$:

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)dx.}$$

Плотность распределения обладает следующими ***свойствами***:

1. Плотность распределения $p(x)$ – неотрицательная функция, т.е. $p(x) \ge 0$.
2. Из определения плотности следует, что $F'(x) = p(x)$, так что, если $F(x)$ дифференцируема, то она имеет плотность.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = F(+\infty) = 1.$

Если все возможные значения принадлежат отрезку *[а; в],* то

$$\int_a^b p(x)dx = 1,$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример:

Плотность вероятности случайной величины *X* задана функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение из интервала *(1; 2)*.

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

5.14. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание *MX* непрерывной случайной величины, имеющей плотность, определяется формулой

$$\boxed{MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,}$$

Репозиторий БрГУ

а ***дисперсия*** – формулой

$$DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x)dx$$

Для вычисления дисперсии также верна формула, справедливая для дискретной случайной величины:
$DX = MX^2 - (MX)^2,$

откуда для непрерывной случайной величины получаем

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (MX)^2.$$

Величина $\sigma X = \sqrt{DX}$ называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины.

Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин переносятся и на случай непрерывных случайных величин.

5.15. Применение вероятностных методов в психологии

Применение вероятностных методов в различных областях психологии является очень широким и разносторонним. Приведем лишь несколько примеров.

Чаще всего психология имеет дело со случайными величинами. Психические явления следует считать случайными. Вариативность, случайная или закономерная изменчивость – наиболее часто встречающиеся в психологических явлениях категории. Большинство психических процессов случайны, поскольку непредсказуемо изменчивы, вариативны и многообразны из-за сочетания многочисленных внутренних и внешних причин и обстоятельств. Любая прогнозная модель в психологии прогнозирования является моделью случайного процесса как случайной функции, аргументом которой является время.

В психологии труда используется оценка времени реакции водителей. Время реакции человека является случайной величиной, которая характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. Для того, чтобы установить факт влияния на время реакции, например, такого фактора, как утомление, нужно сравнить два условных

Репозиторий БрГУ

распределения – до утомления водителя и после утомления (т.е. состояния человека отдохнувшего и уставшего).

При верификации гипотез составляются матрицы условных распределений и тех ошибок, которые совершает испытуемый. При этом используются априорные вероятности гипотез, которые апостериори уточняются с помощью формул Байеса.

В математической статистике существуют критерии, с помощью которых на основе сравнения дисперсий двух распределений можно сделать выводы об истинности или ложности психологических гипотез. Это F-критерий (или критерий Фишера-Снедекора) для сравнения двух дисперсий и G-критерий Кохрана для сравнения нескольких дисперсий.

Таким образом, теоретико-вероятностные и математико-статистические методы и модели являются неотъемлемой частью психологического исследования и психологии как науки.

Репозиторий БрГУ

Литература:

1. Ганичева, А.В. Математика для психологов / А.В. Ганичева, В.П. Козлов. – М.: Аспект Пресс, 2005. – 238 с.
2. Суходольский, Г.В. Математическая психология / Г.В. Суходольский. – Харьков: Гуманитарный центр, 2006. – 358 с.
3. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов. III семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2007. – 144с.
4. Гусак, А.А. Теория вероятностей: справ. пособ. к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.
5. Булдык, Г.М. Руководство к решению задач и упражнений по теории вероятностей и математической статистике: Для практической и самостоятельной работы студентов экономических специальностей / Г.М. Булдык. – Минск: ФУАинформ, 2009. – 228 с.

Репозиторий БрГУ

Учебное издание

Онискевич Татьяна Сергеевна

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ ПО ОСНОВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (ЭКСПРЕСС-КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПСИХОЛОГОВ)

Репозиторий БрГУ