



Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
Г.М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара:
С.А. Марзан

Міжнародны савет
В.А. Главан (Малдова)
В.В. Дзікусар (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матысік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плецохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2014

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 94 ад 01.04.2014 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:

A.N. Sender

Deputy Editor-in-chief:

S.A. Marzan

International Board:

V.A. Glavan (Moldova)

V.V. Dzikussar (Russia)

V.G. Samoilenka (Ukraine)

Editorial Board:

A.V. Matysik

(managing editor)

Y.V. Amelkin

M.I. Lyavchuk

V.S. Monakhov

Y.A. Pletsukhov

A.F. Ravinski

Y.V. Radyno

V.F. Sauchuk

Y.S. Sekerhzitski

M.M. Trush

Registration Certificate

by Ministry of Information

of the Republic of Belarus

№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:

224665, Brest,

Boulevard Cosmonauts, 21

tel.: 23-34-29

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution

«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2014

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus № 94 from April 01, 2014, the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Андрусевич П.П., Плетюхов В.А. Квантовая теория безмассового поля со спиральностями $0, \pm 1$	5
Веко О.В., Казмерчук К.В., Овсюк Е.М. О точных решениях уравнений Клейна–Фока–Гордона и Шредингера в пространстве-времени де Ситтера: случай нестатических координат	11
Липо В.А., Никитин А.В., Сабуть А.В., Секержицкий С.С. Группы симметрии орбитальных и спиновых моментов электрона в атоме	19
Ревинский А.Ф., Петлицкая Т.С. Эффект Кондо и объёмный коллапс в церии	26
Серый А.И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме	30

МАТЭМАТЫКА

Будько Д.А. Теорема о неустойчивости положений равновесия в области треугольника Лагранжа ограниченной задачи четырёх тел	44
Зубей Е.В., Юдов А.А. Геометрические характеристики связанных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского	52
Кожух И.Г. Системы Льенара с ограниченными решениями	60
Козинский А.А., Гуносов А.А. Реляционная модель данных для программной системы расчета общей нагрузки кафедры	63
Мадорский В.М. Численное решение одномерных квазилинейных задач теплопроводности	69
Матысик О.В., Зайко В.С. Об одном регуляризирующем алгоритме некорректно поставленных задач с ограниченным оператором	76
Серая С.А., Трофимук А.А. О A_4 -свободных нормальных подгруппах групп с ограничениями на индексы некоторых максимальных подгрупп	92
Худяков А.П. Обобщенные экспоненциальные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа для функций скалярного и матричного аргумента	98
Памяти выдающегося ученого Гребеникова Евгения Александровича	110
Звесткі аб аўтарах	113

INDEX

PHYSICS

Andrusevich P.P., Pletyukhov V.A. Quantum Theory of a Massless Field with Helicity $0, \pm 1$	5
Veko O.V., Kazmerchuk K.V., Ovsyuk E.M. On Exact Solutions of the Klein–Fock–Gordon and Schrödinger Equations in Space-Time De Sitter: the Case of Non-Static Coordinate	11
Liopo V.A., Nikitin A.V., Sabutz A.V., Sekerzhitsky S.S. The Symmetry Group of Orbital and Spin Moments of Electrons in Atoms	19
Ravinski A.F., Petlitskaya T.S. The Condo Effect and Volume Collapse in Cerium.....	26
Sery A.I. On Some Polarizational Effects in Astrophysical Plasma.....	30

MATHEMATICS

Budzko D.A. Theorem On the Instability of Equilibrium Positions in the Domain of Lagrange’s Triangle of Restricted Four-Body Problem.....	44
Zubej E.V., Yudov A.A. Geometric Characteristics Connected Subgroup of a Lie Group of Rotations of Minkowski	52
Kozhuk I.G. Lienard System with Limited Solutions.....	60
Kazinski A., Gunosov A. The Relational Data Model for Software System for Calculation of the Total Load of the Department.....	63
Madorski V.M. The Numerical Solution of One-Dimensional Quasilinear Heat Conduction Problems	69
Matysik O.V., Zajko V.S. On a Regularizing Algorithm Ill-posed Problems with Bounded Operators.....	76
Seraja S.A., Trofimuk A.A. On A_4 -Free Normal Subgroups of Groups with Restrictions on Indexes of Some Maximal Subgroups	92
Hudyakov A.P. The Generalized Exponential Interpolation Polynomials of Hermite–Birkhoff type for Functions of Scalar and Matrix Argument	98
In Memory of the Distinguished Scientist Evgeniy Grebenikov	110
Information about the authors	113

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИРАЛЬНОСТЯМИ 0, ±1

Осуществлена процедура вторичного квантования безмассового поля, описываемого не распадающейся по группе Лоренца 11-компонентной системой тензорных уравнений первого порядка. На этой основе показана возможность описания теории безмассового поля со спиральностями 0, ±1 как единого физического объекта.

Введение

Как известно, в классической теории поля микрочастицу с целым спином 1 и ненулевой массой m обычно описывают с помощью системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$(\square - m^2)\psi_\mu(x) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (2)$$

где $\psi_\mu(x)$ – четырёхмерный вектор. Уравнение (2) имеет вид калибровки Лоренца и играет для уравнения (1) роль дополнительного условия, исключающего «лишнюю» степень свободы.

Описание безмассовых частиц (полей) в таком подходе осуществляется путём предельного перехода $m \rightarrow 0$, т.е. замены уравнения (1) на уравнение Даламбера. При этом безмассовый аналог исходной массивной частицы обладает проекциями спина (спиральностью) ±1, значение же спиральности, равное нулю, теряется.

Однако в современных теоретико-полевых моделях фундаментальных частиц и их взаимодействий нередко возникает необходимость совместного описания безмассовых полей не только с максимальным, но и промежуточными значениями спиральности [1–3]. В работах [4–6] было показано, что такое описание в рамках не распадающейся по полной группе Лоренца теории возможно при использовании формализма дифференциальных линейных уравнений первого порядка – теории релятивистских волновых уравнений (РВУ).

В работе [6], в частности, рассматривается 11-компонентная система

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (3)$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 = 0, \quad (4)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (5)$$

в которой величины ψ_0 и $\psi_{[\mu\nu]}$ – соответственно скаляр и антисимметричный тензор. Уравнение (3) совпадает по виду с (2), но играет здесь уже не роль дополнительного условия, а равноправного уравнения. Величины ψ_0 , ψ_μ выступают в системе (3)–(5) в качестве потенциалов; компоненты тензора $\psi_{[\mu\nu]}$ – напряжённости.

Система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований

$$\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (6)$$

где произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ ограничен условием

$$\square \Lambda = 0. \quad (7)$$

Поэтому по аналогии с электромагнитным полем есть основания считать, что данная градиентная инвариантность в совокупности с уравнением (3) приводит к исключению двух из четырёх степеней свободы вектор-потенциала ψ_μ . Независимыми остаются только две его компоненты, связанные с поперечной поляризацией векторного поля. Ещё одна степень свободы обусловлена потенциалом скалярного поля ψ_0 .

Однако для окончательного и точного ответа на вопрос о числе степеней свободы рассматриваемого поля и их физической интерпретации необходимо провести процедуру вторичного квантования системы (3)–(5), к осуществлению которой мы и переходим.

Вторичное квантование

Прежде всего нетрудно убедиться, что потенциалы $\psi_\mu(x)$, $\psi_0(x)$ удовлетворяют уравнениям второго порядка вида

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \psi_0 = 0, \quad (8)$$

$$\square \psi_0 = 0, \quad (9)$$

т.е. действительно описывают безмассовое поле. При этом градиентный член $\partial_\mu \psi_0$ в (8) выступает в роли внутреннего источника (типа «тока смещения») для векторной составляющей поля.

Общие решения этих уравнений можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k (C_{\mu k} e^{ikx} + C_{\mu k}^+ e^{-ikx}), \quad (10)$$

$$\psi_0(x) = \sum_k N_k (B_k e^{ikx} + B_k^+ e^{-ikx}), \quad (11)$$

где N_k – нормировочный множитель, $kx = k_\mu x_\mu$, $k_\mu = (\vec{k}, i\omega)$ – четырёхмерный волновой вектор, удовлетворяющий условию $k^2 = k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0$.

Для исключения нефизических решений системы (3)–(5) будем использовать базис, предложенный в работе [7] при квантовании поля нотофа – безмассового поля со спиральностью 0, переносщего во взаимодействиях спин 1, а именно:

$$e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, k_\mu, n_\mu, \quad (12)$$

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, e_\mu^{(i)} k_\mu = 0, e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, n_\mu^2 = -1. \quad (13)$$

Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор k_μ и $k_\mu n_\mu \neq 0$.

Разложим амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ по этому базису

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k0} n_\mu, \quad (14)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (15)$$

Теперь учтём, что система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований (6), (7). Условие (7) означает, что калибровочную функцию $\Lambda(x)$ также можно представить в виде разложения, аналогичного (14), (15):

$$\Lambda(x) = \sum_k N_k (\lambda_k e^{ikx} + \lambda_k^+ e^{-ikx}), \quad (16)$$

где λ_k, λ_k^+ – произвольные амплитуды.

Подставляя разложения (10), (14)–(16) в преобразование (6), получаем калибровочные преобразования для амплитуд $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$

$$C_{\mu k} \rightarrow C_{\mu k} + i\lambda_k k_\mu, \quad (17)$$

$$C_{\mu k}^+ \rightarrow C_{\mu k}^+ - i\lambda_k^+ k_\mu. \quad (18)$$

Из (17), (18) следует, что амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu, -i\lambda_k^+ k_\mu$ соответственно. В разложениях (14), (15) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu$ и $c_{k3}^+ k_\mu$. Отбрасывая их, получим для $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ выражения

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu, \quad (19)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (20)$$

Далее переходим в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda}, \quad (21)$$

первые два орта которого ($\lambda = 1, 2$) соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (12), (13), третий $e_\mu^{(3)}$ и четвёртый $e_\mu^{(4)}$ – продольной и скалярной поляризациям потенциала $\psi_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu} \quad (22)$$

и векторы k_μ, n_μ в базисе (21), (22) имеют компоненты

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i). \quad (23)$$

Окончательные выражения для амплитуд $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ в ортонормированном базисе (21) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)}, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda}^+ e_\mu^{(\lambda)}, \quad (24)$$

где использованы обозначения

$$c_{k4} = i c_{k0}, \quad c_{k4}^+ = i c_{k0}^+. \quad (25)$$

Лангранжиан системы (3)–(5) может быть представлен в форме

$$L = -\psi_\mu \partial_\mu \psi_0 - \frac{1}{2} \psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{4} \psi_{[\mu\nu]}^2. \quad (26)$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_A)} \partial_\nu \psi_A - \delta_{\mu\nu} L \quad (27)$$

и его компоненты T_{44} вытекают выражения

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{,\mu}\partial_{,\nu}\psi_0 - \psi_{[\mu\alpha]}\partial_{,\nu}\psi_{,\alpha} - \delta_{\mu\nu}L, \quad (28)$$

$$T_{44} = -\psi_{,4}\partial_{,4}\psi_0 - \psi_{[4\alpha]}\partial_{,4}\psi_{,\alpha} - L. \quad (29)$$

Подставляя в (29) разложения (10), (11), с учетом (24) получим для энергии поля

$$E = \int T_{44} d^3x \quad (30)$$

формулу

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{\lambda=1,2,4} (c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda}^+ + c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+) + (b_k^+ b_k^+ + b_k b_k^+) \right], \quad (31)$$

в которой

$$b_k = \frac{B_k}{\omega}, \quad b_k^+ = \frac{B_k^+}{\omega}, \quad (32)$$

а также учтено, что $N = 1/\sqrt{2V\omega}$ (V – нормировочный объем).

Вторичное квантование рассматриваемого поля осуществляется, как обычно, путем замены амплитуды $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^+, b_k, b_k^+$ на операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^+]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2, 4), \quad (33)$$

$$[b_k, b_{k'}^+]_- = \delta_{kk'} \quad (34)$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (33), (34) следует, что собственные значения операторов $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^+, b_k, b_k^+$ равны целым положительным числам или нулю.

Уравнение (3), входящее в рассматриваемую классическую систему (3)–(5) в качестве составной части, для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого на операторы $\widehat{\psi}_{,\mu}$, а не на волновые функции Ψ гильбертова пространства физических состояний поля, на которые действуют эти операторы. Точнее говоря, будем использовать более слабое условие [8; 9]

$$\partial_{,\mu} \widehat{\psi}_{,\mu}^{(+)} \Psi = 0, \quad (35)$$

в котором операторы $\widehat{\psi}_{,\mu}^{(+)}$ содержат только положительно-частотные части.

Из условия (35) вытекает соотношение

$$\left(\sum_k (\omega c_{k4} e^{ikx}) \right) \Psi = 0, \quad (36)$$

из которого, в свою очередь, следует, что функция Ψ при всех k должна удовлетворять равенству

$$c_{k4} \Psi = 0. \quad (37)$$

Учитывая, что операторы c_{k4} и $(-c_{k4}^+)$ эрмитово сопряжены, имеем также

$$\Psi^* c_{k4}^+ = 0. \quad (38)$$

Из (37), (38) вытекает условие

$$(\Psi, c_{k4}^+ c_{k4} \Psi) = 0, \quad (39)$$

благодаря которому исчезает среднее значение части оператора энергии (31), связанной со скалярной составляющей вектор-потенциала $\psi_{,\mu}$.

В результате для среднего значения энергии квантового поля получается выражение

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\Psi, \sum_k \omega \sum_{\lambda=1,2} (c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} + c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+) \Psi) + \frac{1}{2}(\Psi, \sum_k \omega (b_k^+ b_k + b_k b_k^+) \Psi). \quad (40)$$

Дальнейшая процедура квантования осуществляется в соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля.

Формула (40) показывает, что вклад в энергию квантованного поля дают две степени свободы, связанные с поперечными колебаниями векторной составляющей Ψ_μ , и одна степень свободы, приходящаяся на скалярный потенциал Ψ_0 . Окончательно, с учетом нераспадения системы (3)–(5) по группе Лоренца, можно сделать вывод о том, что указанная система тензорных уравнений дает совместное описание взаимосвязанных безмассовых полей со спиральностями 0, ± 1 как единого физического объекта.

Заклучение

Из полученных результатов следует вывод о принципиальной возможности совместного описания безмассовых полей с различными значениями спиральности как единого физического объекта в рамках теории обобщенных релятивистских волновых уравнений первого порядка. Ранее в литературе такое описание в данном подходе не предлагалось. Основное значение этого факта заключается в существенном расширении рамок теории РВУ с точки зрения ее приложения в современных полевых моделях, таких как SU(n)-калибровочные модели фундаментальных взаимодействий, теория суперструн.

Еще более широкие возможности в данном отношении представляют собой РВУ, волновая функция которых преобразуется по приводимому представлению полной группы Лоренца, содержащему кратные (повторяющиеся) неприводимые представления этой группы. Уравнения данного типа являются в настоящее время предметом исследования авторов и будут темой последующих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – № 8. – P. 2273–2284.
2. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.
3. Dvoeglazov, V.V. Photon–notoph equations / V.V. Dvoeglazov // arxiv: physics / 9804010 v. – Дата доступа : 17. 04. 1998.
4. Плетюхов, В.А. Безмассовые частицы в теории релятивистских волновых уравнений / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 3. – С. 3–11.
5. Андрусевич, П.П. Безмассовые и массивные калибровочно-инвариантные поля в теории обобщенных релятивистских волновых уравнений / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – №1. – С. 36–45.
6. Плетюхов, В.А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – №1. – С. 80–88.
7. Огиевецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–224.
8. Прохоров, Л. В. Квантование электромагнитного поля / Л.В. Прохоров // УФН. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.

9. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М. : Наука. – 1969. – 623 с.

P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov Quantum Theory of a Massless Field with Helicity 0, ±1

Implemented procedure of second quantization of a massless field described by 11-component system of tensor equations. On this basis, the possibility of a massless field theory description with helicity 0, ±1 as a single physical entity is showed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.02.14

УДК 539.12

О.В. Веко, К.В. Казмерчук, Е.М. Овсюк

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ФОКА–ГОРДОНА И ШРЕДИНГЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ДЕ СИТТЕРА: СЛУЧАЙ НЕСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Показано, что в расширяющейся Вселенной де Ситтера, параметризуемой нестатическими координатами, можно ввести обобщенное уравнение типа Шредингера для частицы со спином ноль, при этом оператор энергии определенным образом зависит от времени в соответствии с законом расширения Вселенной. Построены точные решения этого уравнения, движение по пространственным степеням свободы квантуется. Найденная зависимость волновой функции от времени такова, что решения не являются стационарными с фиксированными значениями энергии, при этом квадрат модуля волновой функции не зависит от времени, т. е. расширение Вселенной в некотором смысле скрыто от наблюдения. В нестатических координатах решено релятивистское уравнение Клейна–Фока–Гордона. Зависимость волновой функции от временной координаты описывается в терминах гипергеометрических функций, движение по пространственным степеням свободы квантуется так же, как и для нерелятивистской частицы. В релятивистском и нерелятивистском случаях найдены асимптотики решений при бесконечно больших временах в прошлом и будущем. Учтено неминимальное взаимодействие частиц с кривизной пространства через скаляр Риччи.

1. Нерелятивистский предел в теории скалярной частицы на фоне римановой геометрии

Рассмотрим вопрос о шредингеровском уравнении в римановом пространстве-времени. Будем исходить из общековариантной тензорной системы уравнений первого порядка, для общности анализа включим дополнительный член взаимодействия с внешним гравитационным фоном через скалярную кривизну:

$$\begin{aligned} (i \partial_\alpha + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) \Phi(x) &= \frac{mc}{\hbar} \Phi_\alpha, \\ (\frac{i}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} + \frac{e}{c\hbar} A_\alpha) g^{\alpha\beta} \Phi_\beta &= \frac{mc}{\hbar} \Gamma \Phi; \end{aligned} \quad (1)$$

используем обозначение:

$$1 + \sigma \frac{R(x)}{m^2 c^2 / \hbar^2} = \Gamma(x), \quad \sigma = \frac{1}{6}.$$

Рассматривая пространство-время с метрикой $dS^2 = c^2 dt^2 + g_{kl}(x) dx^k dx^l$, проведем в (1) расщепление (3+1), выделим энергию покоя подстановками:

$$\Phi \Rightarrow \exp(-i \frac{mc^2 t}{\hbar}) \Phi, \quad \Phi_0 \Rightarrow \exp(-i \frac{mc^2 t}{\hbar}) \Phi_0, \quad \Phi_l \Rightarrow \exp(-i \frac{mc^2 t}{\hbar}) \Phi_l$$

и исключим векторную (нединамическую) переменную Φ_l . При этом из (1) получаем

$$\begin{aligned} (i\hbar \partial_t + mc^2 + eA_0) \Phi(x) &= mc^2 \Phi_0(x), \quad \left[i\hbar \partial_t + mc^2 + i\hbar \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} + eA_0 \right] \Phi_0 + \\ + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + \frac{e}{c} A_k \right) g^{kl} \left(i\hbar \partial_l + \frac{e}{c} A_l \right) \right] \Phi(x) &= mc^2 \Gamma \Phi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Вводим малую компоненту φ и большую компоненту Ψ [10], [11]:

$$\Phi - \Phi_0 = \varphi, \quad \Phi + \Phi_0 = \Psi,$$

при этом из уравнений (2) получаем

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\frac{+\varphi + \Psi}{2} = -mc^2\varphi, \quad \left(i\hbar\partial_t + i\hbar\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + eA_0 \right)\frac{\Psi - \varphi}{2} + \\ + \frac{1}{m}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k \right)g^{kl} \left(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \right]\frac{\Psi - \varphi}{2} = mc^2(\Gamma + 1)\frac{\varphi}{2} + mc^2(\Gamma - 1)\frac{\Psi}{2}. \quad (3)$$

Два разных случая следует рассматривать по отдельности. Первый случай реализуется, когда требуем выполнения равенства $\Gamma = 1$. Это означает, что начинать следовало в (1) только с учетом минимального взаимодействия скалярной частицы с гравитационным фоном без добавки, зависящей от скалярной кривизны $R(x)$. Тогда предыдущие уравнения дают (пренебрегаем малой компонентой φ по сравнению с большой Ψ)

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\frac{\Psi}{2} = -mc^2\varphi, \quad \left(i\hbar\partial_t + i\hbar\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} + eA_0 \right)\frac{\Psi}{2} + \\ + \frac{1}{m}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k \right)g^{kl} \left(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \right]\frac{\Psi}{2} = mc^2\varphi. \quad (4)$$

Исключая из второго уравнения малую компоненту с помощью первого уравнения, приходим к уравнению типа Шредингера:

$$\left[i\hbar\left(\partial_t + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t}\right) + eA_0 \right]\Psi = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k \right)(-g^{kl}) \left(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \right]\Psi. \quad (5)$$

В статической метрике определитель метрического тензора не зависит от нуля, соответственно член в левой части, связанный с производной по времени от $\sqrt{-g}$, исчезает. Если определитель зависит от времени согласно $\sqrt{-g} = \sqrt{g(t)}\sqrt{-g(x^1, x^2, x^3)}$, то подстановкой $\Psi = g(t)^{-1/4}\Phi(t, x^1, x^2, x^3)$ уравнение (5) приводится к более простому виду:

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\Psi = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g(x)}}\partial_k\sqrt{-g(x)} + \frac{e}{c}A_k \right)(-g^{kl}(t, x)) \left(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \right]\Psi. \quad (6)$$

В случае $\Gamma \neq 1$ вместо (6) получим более общее уравнение:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{24}\frac{\hbar^2 R(x)}{m^2 c^2} \right) (i\hbar\partial_t + eA_0) + \frac{i\hbar}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial t} \right]\Psi = \\ = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}}\partial_k\sqrt{-g} + \frac{e}{c}A_k \right)(-g^{kl}) \left(i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \right] + \hbar^2\frac{R(x)}{6}\Psi. \quad (7)$$

Полученное уравнение следует рассматривать как обобщенное уравнение Шредингера в пространстве-времени с ненулевой скалярной кривизной $R(x) \neq 0$, учитывающее неминимальное взаимодействие с внешним геометрическим фоном.

Сделаем несколько дополнительных замечаний. Нужно обратить внимание на то, что волновой функцией уравнения Шредингера – нерелятивистского предела исходного уравнения Клейна–Фока–Гордона – является вовсе не скалярная функция исходного уравнения Клейна–Фока–Гордона. В действительности мы имеем следующее представление:

$$\Psi = \Phi + \Phi_0, \quad \Phi_0 \in \{ \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \}. \quad (8)$$

Этот факт следует рассматривать как логичную необходимость. Действительно, пусть мы начинаем с вещественного поля частицы со спином 0. Взаимодействовать с электромагнитным полем такая частица не может, однако нерелятивистский предел по-прежнему должен существовать; при этом мы приходим к тому, что нерелятивистская волновая функция $\Psi(x)$ обязательно будет комплексной функцией. Действительно, в силу первого уравнения в (1) составляющая

$$\Phi_0 = i \frac{\hbar}{mc} \nabla_0 \Phi, \quad \Phi^* = +\Phi$$

является комплексной функцией координат. Данная ситуация тем более удовлетворительна еще и потому, что принципиально важно: невозможно написать уравнение Шредингера для вещественного поля – оно обязательно должно быть комплексным.

2. Уравнение Шредингера в пространстве де Ситтера, разделение переменных

Уравнение (7) при отсутствии электромагнитного поля упрощается

$$i\hbar \left[\left(1 + \frac{1}{24} \lambda^2 R(x)\right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} \right] \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} g^{kl} \partial_l - \frac{1}{6} R(x) \right) \Psi. \quad (9)$$

Будем рассматривать случай пространства де Ситтера, параметризованного нестатическими координатами [12]

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 \cosh^2 \frac{ct}{\rho} \left[dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad R^2(x) = +\frac{1}{\rho^2}; \quad (10)$$

далее будем пользоваться безразмерными координатами. Координаты (t, r, θ, ϕ) связаны с 5-мерными координатами (они позволяют отождествить пространство де Ситтера с поверхностью в 5-мерном пространстве с группой движения $SO(4,1)$) соотношениями:

$$\begin{aligned} (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 &= -\rho^2 = -1, \\ \xi^1 &= \cosh t \sin r \sin \theta \cos \phi, \quad \xi^2 = \cosh t \sin r \sin \theta \sin \phi, \\ \xi^3 &= \cosh t \sin r \cos \theta, \quad \xi^0 = \sinh t, \quad \xi^4 = \cosh t \cos r, \\ t &\in (-\infty, +\infty), \quad r \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (11)$$

Будем использовать обозначение для комптоновской длины волны частицы $\lambda^2 = \hbar^2 / (m^2 c^2)$. Уравнение Шредингера принимает соответственно вид:

$$i\hbar \left[\left(1 + \frac{1}{24} \frac{\lambda^2}{\rho^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4g} \frac{\partial g}{\partial t} \right] \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} g^{kl} \partial_l - \frac{1}{6} \frac{1}{\rho^2} \right) \Psi. \quad (12)$$

Уравнение (12) можно упростить подстановкой

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi(t) \Phi(x), \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{24} \frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)^{-1/4\mu}, \quad \varphi(t) = \left(\cos \hbar^6 \frac{ct}{\rho} \right)^{-1/4\mu}, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi &= -\frac{\hbar^2}{2m\mu} \left(-\frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \partial_k \sqrt{-g(x)} g^{kl}(x) \partial_l - \frac{1}{6} \frac{1}{\rho^2} \right) \Phi. \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем явное представление для уравнения Шредингера; при этом введем безразмерную временную координату и используем следующую единицу измерения энергии:

$$\tau = \frac{ct}{\rho}, \quad \left[\frac{\hbar c}{\rho} \right] = \left[\frac{\hbar^2}{\mu \rho^2} \right] = \text{энергия},$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\hbar^2}{2m\rho^2}, \quad \frac{\hbar c}{\rho} / \frac{\hbar^2}{2m\mu\rho^2} = 2\mu \frac{\rho}{\hbar mc} = \sigma, \quad (14)$$

тогда уравнение Шредингера запишется в виде:

$$\cosh^2 \tau \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \right) \Phi = - \left(\frac{1}{\sin^2 r} \partial_r \sin^2 r \partial_r - \frac{\mathbf{I}^2}{\sin^2 r} \right) \Phi. \quad (15)$$

Переменные разделяем подстановкой:

$$\Phi = T(\tau) R(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \mathbf{I}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm},$$

$$\frac{1}{T(\tau)} \cosh^2 \tau \left(i\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \right) T(\tau) = - \frac{1}{R(r)} \left(\frac{1}{\sin^2 r} \partial_r \sin^2 r \partial_r - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r} \right) R(r) = \Lambda;$$

в результате приходим к двум уравнениям:

$$\cosh^2 \tau \left(i\sigma \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{6} \right) T(\tau) = \Lambda T(\tau), \quad \left(\frac{1}{\sin^2 r} \frac{d}{dr} \sin^2 r \frac{d}{dr} + \Lambda - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r} \right) R(r) = 0. \quad (16)$$

3. Уравнение Шредингера, решение дифференциальных уравнений

Обращаемся к анализу уравнений в пространстве де Ситтера (16). Уравнение по временной переменной решается прямым интегрированием:

$$i\sigma \frac{dT}{T} = \left(\frac{\Lambda}{\cosh^2 \tau} - \frac{1}{6} \right) d\tau \quad \Rightarrow \quad T(\tau) = e^{i\sigma^{-1}(\tau/6 - \Lambda \tanh \tau)}. \quad (17)$$

Обращаем внимание на то, что найденная зависимость волновой функции от времени, хотя является экспоненциальной, говорит, что здесь речь не идет о стационарных состояниях квантово-механической частицы с фиксированной энергией. При этом, однако, квадрат модуля волновой функции (плотность вероятности распределения частиц в пространстве) не зависит от времени:

$$|\Phi(t, x)|^2 dV = f(x) dV.$$

При устранении из исходного уравнения члена неминимального взаимодействия с кривизной пространства соотношение (17) упрощается: $T(\tau) = e^{-i\sigma^{-1} \Lambda \tanh \tau}$.

В радиальном уравнении устраним член с первой производной:

$$R(r) = \frac{1}{\sin r} F(r), \quad F'' + \left(\Lambda + 1 - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r} \right) F = 0. \quad (18)$$

Вводим переменную:

$$z = 1 - e^{-2ir}, \quad z = 2 \sin r e^{i(-r + \frac{\pi}{2})}, \quad (z = 0 \leftrightarrow r = 0, \quad z = 1 \leftrightarrow r = +\infty);$$

уравнение примет вид:

$$4(1-z)^2 \frac{d^2 F}{dz^2} - 4(1-z) \frac{dF}{dz} - \left(\Lambda + 1 + l(l+1) \frac{4(1-z)}{z^2} \right) F = 0.$$

Используя подстановку $F = z^a (1-z)^b f(z)$, получим

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a + 2b + 1)z] \frac{df}{dz} + \left[\frac{\Lambda + 1}{4} - (a+b)^2 + \frac{a(a-1) - l(l+1)}{z} + \left(b^2 - \frac{\Lambda + 1}{4} \right) \frac{1}{1-z} \right] f = 0;$$

требуя $a = l + 1, -l, b = \pm \frac{\sqrt{\Lambda + 1}}{2}$, приходим к уравнению гипергеометрического типа:

$$z(1-z)\frac{d^2f}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\frac{df}{dz} - \left[(a+b)^2 - \frac{\Lambda+1}{4} \right] f = 0,$$

$$\gamma = 2a, \quad \alpha = a+b - \frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}, \quad \beta = a+b + \frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}.$$

Выберем

$$a = l+1, \quad b = -\frac{\sqrt{\Lambda+1}}{2}, \quad \gamma = 2l+2, \quad \alpha = l+1 - \sqrt{\Lambda+1}, \quad \beta = l+1. \quad (19)$$

Гипергеометрический ряд превращается в полином, если $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – это дает спектр для Λ :

$$\Lambda = (n+l+1)^2 - 1; \quad (20)$$

соответствующие решения задаются согласно

$$F = (1 - e^{-2ir})^{l+1} e^{+i(n+l+1)r} F(-n, l+1, 2l+1, z) =$$

$$= (2i)^{l+1} (\sin r)^{l+1} e^{+inr} F(-n, l+1, 2l+1, 1 - e^{-2ir}). \quad (21)$$

Отмечаем, что эти решения обращаются в ноль в особых точках $r = 0, +\pi$ ($z = 1, 0$).

4. Частица Клейна–Фока–Гордона в модели де Ситтера

Уравнение Клейна–Фока–Гордона в безразмерной форме имеет вид:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (x) \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{1}{6} + m^2 \right] \Psi(x) = 0 \quad \left(\frac{M^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \Rightarrow M^2 \right). \quad (22)$$

В нестатических координатах пространства де Ситтера уравнение принимает вид:

$$\cosh^2 t \left(\frac{1}{\cosh^3 t} \partial_t, \cosh^3 t \partial_r, + \frac{1}{6} + m^2 \right) \Psi(x) = \frac{1}{\sin^2 r} (\partial_r \sin^2 r \partial_r - \mathbf{I}^2) \Psi(x). \quad (23)$$

Переменные разделяем подстановкой:

$$\Phi(x) = T(t) R(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \mathbf{I}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm},$$

получаем (K^2 – постоянная разделения)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{\tan r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{\sin^2 r} + K^2 \right) R(r) = 0, \quad (24)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3 \operatorname{th} t \frac{d}{dt} + \frac{1}{6} + m^2 + \frac{K^2}{\cosh^2 t} \right) T(t) = 0. \quad (25)$$

Отметим, что в пределе пространства Минковского уравнение (25) примет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + m^2 + K^2 \right) T(t) = 0, \quad T = e^{-i\epsilon t}, \quad K^2 = \epsilon^2 - m^2 > 0.$$

Отметим также, что уравнение (24) совпадает (точностью до замены обозначения $\Lambda \iff K^2$) с уже исследованным уравнением (16). Таким образом, предстоит исследовать только уравнение (25).

Для сокращения записи введем обозначение $m^2/4 + 1/24 = M^2$. В функции $T(t)$ из уравнения (25) выделим множитель $T(t) = (\cosh^{-\frac{3}{2}} t) f(t)$; уравнение для $f(t)$ следующее:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left((M^2 - 3/4) + \frac{(K^2 - 3/4)}{\operatorname{ch}^2 t} \right) f(t) = 0. \quad (26)$$

Перейдем в (26) к переменной u :

$$y = \tanh t,$$

$$(1-y^2) \frac{d^2 f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + \left[(K^2 - 3/4) + \frac{M^2 - 3/4}{1-y^2} \right] f(y) = 0; \quad (27)$$

это уравнение можно отождествить с уравнением Лежандра [13]:

$$(1-y^2) \frac{d^2 W}{dy^2} - 2y \frac{dW}{dy} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-y^2} \right) W = 0,$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}, \quad \nu+1 = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}, \quad \mu = \pm i \sqrt{M^2 - 3/4}. \quad (28)$$

Перейдем в (27) к новой переменной $z = (1-y)/2$, сделаем подстановку (параметр γ зафиксируем позже):

$$f = (1-y^2)^\gamma F = [4z(1-z)]^\gamma F,$$

в результате приходим к уравнению:

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} + (K^2 - 3/4) + \frac{M^2 - 3/4}{4z(1-z)} \right] z^\gamma (1-z)^\gamma F = 0$$

или

$$z(1-z)F'' + 2\gamma(1-z)F' - 2\gamma zF' + (1-2z)F' +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{1-z} F + \frac{\gamma}{1-z} F + \frac{1}{1-z} \frac{M^2 - 3/4}{4} F +$$

$$+ \frac{M^2 - 3/4}{4} \frac{1}{z} F + \frac{\gamma(\gamma-1)}{z} F + \frac{\gamma}{z} F +$$

$$+ (K^2 - 3/4) F - 2\gamma(\gamma-1)F - 4\gamma F - 2\gamma^2 F = 0.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при $(1-z)^{-1}$ и z^{-1} :

$$\gamma = \pm \frac{i\sqrt{M^2 - 3/4}}{2} = \frac{\mu}{2}; \quad (29)$$

в результате приходим к уравнению гипергеометрического типа (вспоминаем, что $K^2 - 3/4 = \nu(\nu+1)$):

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{dz^2} + [(\mu+1) - 2(\mu+1)z] \frac{dF}{dz} + [\nu(\nu+1) - 2\gamma(2\gamma+1)] F = 0.$$

Находим параметры гипергеометрического уравнения:

$$a = \mu - \nu, \quad b = \mu + \nu + 1, \quad c = \mu + 1,$$

$$F(z) = F(a, b, c, z), \quad f(z) = z^{\mu/2} (1-z)^{\mu/2} F(z); \quad (30)$$

напоминаем, что

$$z = \frac{1 - \tanh t}{2}, \quad 1-z = \frac{1 + \tanh t}{2},$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{K^2 - 1/2}, \quad \mu = \pm i \sqrt{M^2 - 3/4}.$$

Найдем поведение этого решения при $t \rightarrow +\infty$:

$$t \rightarrow +\infty, \quad z = \frac{1 - \tanh t}{2} \rightarrow 0, \quad F(a, b, c, 0) = 1,$$

$$f(z) = z^{\mu/2} (1-z)^{\mu/2} F(z) \sim \left(\frac{1 - \tanh t}{2} \right)^{\mu/2} = e^{-\mu t} = e^{\mp i \sqrt{M^2 - 3/4} t}. \quad (31)$$

Эти асимптотики, по-видимому, можно рассматривать как отвечающие решениям с «положительной» и «отрицательной» энергией $\pm\sqrt{M^2 - 3/4}$ соответственно.

Чтобы получить описание построенных решений около точки $t \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow 1$), воспользуемся соотношением Куммера [13]:

$$U_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}U_2 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}U_6,$$

$$U_1 = F(a, b, c, z), \quad U_2 = F(a, b, a+b+1-c, 1-z),$$

$$U_6 = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z). \quad (32)$$

При $z \rightarrow 1$ ($t \rightarrow -\infty$) это соотношение дает (с учетом $c-a-b = -\mu$)

$$f(z) = \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(\frac{1+\tanh t}{2} \right)^{\mu/2} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{1+\tanh t}{2} \right)^{-\mu/2} \right] =$$

$$= \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} e^{\mu} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\mu} \right].$$

Это суперпозиция двух осциллирующих решений, поскольку $\mu = \pm i\sqrt{M^2 - 3/4}$.

Авторы благодарны В.М. Редькову за полезные советы в работе над задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cunningham, E. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 8. – P. 77–98.
2. Cunningham, E. The Application of the Mathematical Theory of Relativity to the Electron Theory of Matter / E. Cunningham // Proc. London Math. Soc. – 1911–1912. – Vol. 10. – P. 116–127.
3. Bateman, H. On the conformal transformations of the space of four dimensional and their applications to geometric optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 7. – P. 70–92.
4. Bateman, H. The transformation of the electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1910. – Ser. 8. – P. 223–264.
5. Bateman, H. The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion on the Basis of Maxwell's Equations / H. Bateman. – Cambridge : University press, 1915. – 160 p.
6. Pauli, W. Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1940. – Bd. 13. – S. 204–208.
7. Gürsey, F. On a conform invariant spinor wave equation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1956. – Vol. 3, № 10. – P. 988–1006.
8. Gürsey, F. On some conform invariant worldlines / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. A. – 1956. – Vol. 21. – P. 129–142.
9. Gürsey, F. Reformulation of general relativity in accordance with Mach's principle / F. Gürsey // Ann. Phys. – 1963. – Vol. 24. – P. 211–244.
10. Kisel, V.V. Scalar particle in Riemannian space, nonminimal interaction, and non-relativistic approximation / V.V.Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Non-Euclidean geometry in modern physics: Proceedings of the International Conference BGL-5, Minsk, October 10–13, 2006 / National Academy of Sciences of Belarus, B.I. Stepanov Institute of Physics; Eds.: Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2006. – P. 111–115.

11. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 495 с.
12. Хокинг, С. Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. – М. : Мир, 1977. – 429 с.
13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk, E.M. Ovsyuk On Exact Solutions of the Klein–Fock–Gordon and Schrödinger Equations in Space-Time De Sitter: the Case of Non-Static Coordinate

It is shown that in extending de Sitter universe one can formulate a quantum mechanical non-relativistic equation of Schrödinger type for a spin zero particle; at this the energy operator varies in time accordingly to law of expansion of the sitter model. Exact solution of this equation are constructed; the spatial motion is quantized. Though the wave functions depend on time, their squared modulus do not depend on time, so the expansion of the universe is escaped from observation. In the same non-static coordinates, exact solution of the relativistic Klein–Fock–Gordon equation are found. Dependence of the wave function is expressed in term of hypergeometric functions. Spatial motion is quantized in the same manner as for Schrödinger particle. In both cases, there are found asymptotical behavior of the solutions at infinite times in the future and the past. Non-minimal interaction with the curvature through Ricci scalar is taken into account.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.02.14

УДК 538.911(076.1)

В.А. Лиопо, А.В. Никитин, А.В. Сабуть, С.С. Секержицкий

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ОРБИТАЛЬНЫХ И СПИНОВЫХ МОМЕНТОВ ЭЛЕКТРОНА В АТОМЕ

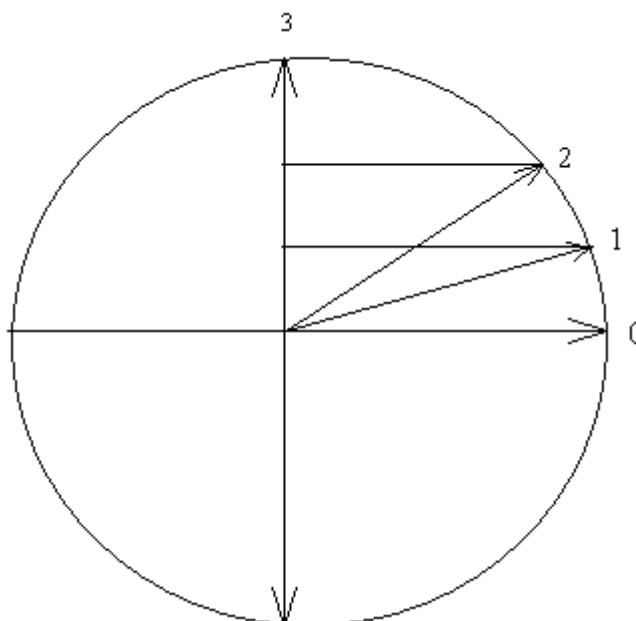
Для множества значений квантовых чисел создана аддитивная группа с бинарной операцией и условием цикличности. При этом использованы матричные представления точечных групп симметрии. Рассмотренная методика для описания симметрий орбитального момента импульса также позволяет говорить, что симметрия этих векторов определяет их конгруэнтности в соответствующем пространстве. Эта методика применима для описания симметрии магнитных моментов.

Введение

При описании состояний электронов в атомах за основу берется принцип запрета Паули. Этот принцип гласит: «Квантовые числа n, l, m, s у каждого электрона строго индивидуальные. Все элементарные частицы, для которых выполняется указанный принцип, подчиняются статистике Ферми–Дирака и называются фермионами. У электрона в атоме число n определяет уровень его энергии и может принимать только целочисленные значения. Наименьшее значение $n=1$ соответствует K уровню. При $n=2,3,4\dots$ приходим к уровням L, M, N и т.д. Наряду с квантовым числом n , поведение электрона на соответствующем уровне энергии описывается орбитальным числом l , которое может принимать значения $0,1,2,\dots,(n-1)$. Число l определяет квантование модуля орбитального момента электрона и его ориентации. Квантовое число m называется магнитным и определяет характеристики магнитных моментов электронов в атоме. Число m может принимать значения $-l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, l$. Электрон, находящийся в состоянии n, l, m на первых порах рассматривается как частица, вращающаяся на определенной орбите вокруг ядра. При переходе из состояния n в n' электрон поглощает ($n < n'$) или излучает ($n > n'$) энергию. Каждый атом характеризуется индивидуальным набором квантовых переходов. Экспериментально было установлено, что при действии магнитного поля на вещество наблюдается расщепление спектральной линии. Это привело к понятию спина как характеристики собственного момента импульса электрона. Спин электрона может принимать значения $s = \frac{1}{2}$ или $s = -\frac{1}{2}$. Все перечисленные квантовые числа (n, l, m) указаны в атомных единицах, определяемых постоянной Планка (\hbar).

Симметрия взаимориентаций орбитальных моментов электронов в атоме

Орбитальный момент импульса электрона – это векторная величина. Взаимориентация векторов орбитального момента подчиняется условиям квантования. При выбранном направлении одного из векторов орбитального момента импульса электрона проекции остальных векторов на это направление равны отношениям целых чисел.



Рисунк 1 – Ориентации векторов $l(0,1,2)$ относительно вектора $l_{\max} = 3$

На рисунке 1 в качестве примера приведена взаимоориентация векторов момента импульса при $l = 3, 2, 1, 0$ (т.е. $l_{\max} = 3$). Общее число орбитальных моментов равно $l_{\max} + 1 = n$. Все эти моменты лежат в угловом интервале от 0 до $\frac{\pi}{4}$. В общем случае множество моментов импульсов l_j образуют аддитивную группу с бинарной операцией $e_k \oplus e_m = e_{k+m}$. Матрица Кэли для этого множества приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Взаимодействие орбитальных моментов импульса электрона (матрица Кэли)

	$e = l_{\max}$	1	2	...	$e = l_{\max} - 2$	$e = l_{\max}$
$e = l_{\max}$	e	1	2	...	$l - 1$	$e = l_{\max} - 2$
l_1	l_1	2	3	...	l	e
l_2	l_2	3	4	...	e	1
...
$e = l_{\max} - 2$	$l - 1$	l	e	...	$l - 3$	$l - 2$
l	l	e	1	...	$l - 2$	$l - 1$

Рассмотренная группа является циклической с порядком l_{\max} . Для этой группы можно построить изоморфную ей кристаллографическую группу поворота. Матричное представление кристаллографических групп активно используется в кристаллофизике.

Группы вращения и их матричное представление

Если имеется какой-либо объект, пространственное движение которого приводит его к начальному, исходному состоянию, то это движение является операцией сим-

метрии. Если при таком движении хотя бы одна точка остается неподвижной, то такая операция симметрии называется точечной.

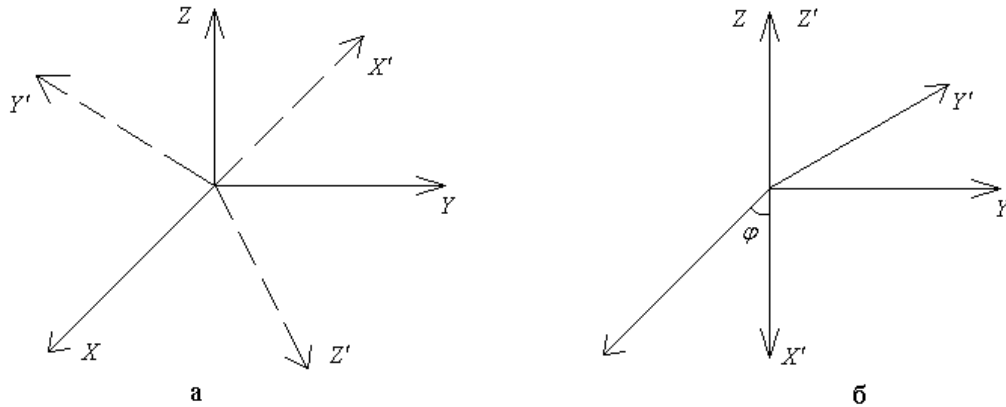


Рисунок 2 – Произвольное точечное движение (а), вращение вокруг оси z на угол φ (б)

Рассмотрим объект с точечной симметрией. «Закрепим» на этом объекте ортогональную систему координат (x, y, z) , начало которой расположено в точке, сохраняющей свое положение. После выполнения точечной операции объект переходит в начальное положение. Закрепленная на объекте координатная система (x, y, z) переходит в (x', y', z') . Описание взаимориентаций координатных осей после точечного движения, осуществляется матрицей Эйлера:

$$|E| = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} \quad (1)$$

На рисунке 2б приведено вращение объекта на угол φ вокруг оси z . Матрица этого вращения (R) в соответствии с формулой (1) примет вид:

$$|R| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Очевидно, что поворот на любой угол, кратный φ , является операцией точечной симметрии. Так как при вращении на угол 360° (2π радиан) объект совпадает n раз, то $\frac{360^\circ}{\varphi^\circ}$ (или $\frac{2\pi}{\varphi[\text{rad}]}$) является целым числом, равным n и это число определяет порядок оси вращения. Совокупность матриц R, R^2, \dots, R^n образует циклическую группу [7]. Матрица R в формуле (2) является матрицей-генератором группы.

Если элементарный угол поворота такой, что полученная мультипликативная группа вращения имеет такой же порядок, как и группа орбитальных моментов электрона в атоме, то она изоморфна аддитивной группе, приведенной в таблице 1. Таким образом, взаимоориентация векторов орбитальных моментов импульса электронов в атоме может рассматриваться как группа вращений этих векторов во внутреннем атомном пространстве. Эта группа может быть представлена изоморфной ей группой вращения в ортогональном (декартовом) пространстве. При этом легко учесть не только взаимоориентации, но и модули векторов орбитальных моментов электронов.

Группы симметрии спина электрона

Электроны в атомах при одинаковых квантовых состояниях (числа n, l, m) могут находиться в одном из двух спиновых состояний: $s = +\frac{1}{2}$ или $s = -\frac{1}{2}$. Так как их спин был введен как вектор собственного момента электрона, то векторы \vec{s} и $-\vec{s}$ рассматриваются как два спиновых противоположно направленных состояния. Следовательно, можно ввести понятие плоскости зеркального отражения в спиновом пространстве электрона, которая либо перпендикулярна этому вектору \vec{s} , либо параллельна ему. В первом случае \vec{s} рассматривается как полярный вектор, во втором – как аксиальный. Наличие такого «зеркала» в спиновом пространстве электрона в атоме можно описать той же группой, что и группа антисимметрии в «зарядовом пространстве» электрона и позитрона. Эти две частицы совершенно идентичны во всем, кроме заряда. Если их описать матрицами

$$e^- = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix}, e^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ +e \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то зарядовое c -зеркало описывается группой:

$$(c) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (m_c). \quad (4)$$

Действительно, $(c)(-e) \Rightarrow (+e)$, $(c)(+e) \Rightarrow (-e)$.

Плоскость отражения в зарядовом пространстве обуславливает так называемую c -симметрию. Эта симметрия, в соответствии с теоремой Э. Нётер, определяет закон сохранения электрического заряда, а также подчеркивает условность «приписывания» знаков электрону и позитрону. Но абсолютным является то, что эти два «состояния» элементарного заряда имеют противоположные знаки, а при образовании системы этот заряд исчезает:

$$\begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ +e \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -e \\ +e \end{pmatrix} \Rightarrow (0)$$

Исчезновение знака отражает «исчезновение» массы $(m_e + m_p)$. Это процесс аннигиляции. Так как e и p имеют разные знаки, то в пределах одной системы, когда расстояние между ними невелико, процесс аннигиляции неизбежен. В принципе возможно существование (квази)устойчивой системы, когда e^+ и e^- вращаются вокруг

общего центра масс и нейтрального «центра зарядов». Два спиновых состояния электрона $s = \pm \frac{1}{2}$ связаны пространственной симметрией (P -симметрия). Плоскость зеркального отражения существует в спиновом пространстве (m_s). Эта плоскость формирует группу того же вида, что и для (c).

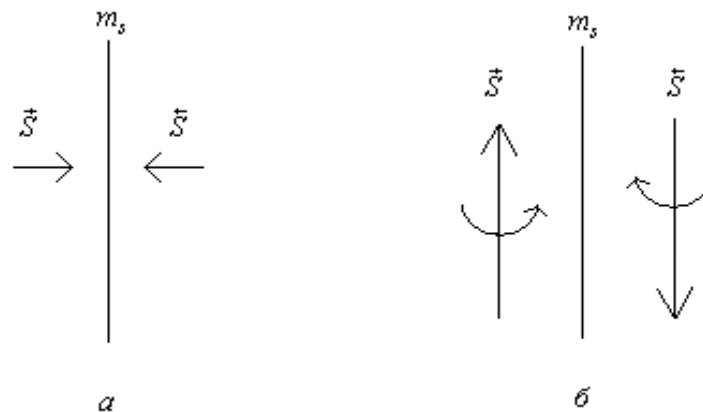
Если состояние \vec{s} и \bar{s} представить матрицами:

$$(\vec{s}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, (\bar{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указанный подход к описанию симметрии спиновых состояний электрона рассматривает спин как полярный вектор (рис. 3а). Если векторы \vec{s} и \bar{s} аксиальные (рис. 3б), то плоскость отражения m_s параллельна \vec{s} и \bar{s} .



**Рисунок 3 – Действие спинового зеркала m_s на вектор спина:
(а) спин – полярный вектор, (б) – спин – аксиальный вектор**

Очевидно, e^+ и e^- также можно рассмотреть как векторы аксиальные или полярные в своеобразном зарядовом пространстве. В любом случае симметрия $s = \pm \frac{1}{2}$ и $e = \pm 1$ описывается точечной группой второго порядка, например, отражения в плоскости или поворот вокруг оси 2, или любой другой группой второго порядка.

Все сказанное относится только к рассмотрению геометрических симметрий в спиновом и зарядовом пространствах. Электрон и позитрон, спин $\left(+\frac{1}{2}\right)$ и антиспин $\left(-\frac{1}{2}\right)$ описывают разные состояния даже в случае равенства n, l, m . В частности, при

возбуждении K -серии рентгеновского излучения в рентгеновской трубке «выбиваются» электроны с самого нижнего уровня атомов антиматери. Электроны с разными спинами должны вести себя одинаково. Однако на самом деле возбуждаются две K_{α} -линии: K_{α_1} и K_{α_2} . Их длины волн отличаются на величину $4 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} = 4 \cdot 10^{-13} \text{ м}$. Для брэгговских углов $\theta > 60^\circ$ разрешение K_{α_1} и K_{α_2} даже не требует прецизионных методик. Различия энергетических параметров спиновых состояний с одинаковыми квантовыми числами n, l, m выходит за рамки анализа геометрических симметрий. Физическая нетождественность электрона и позитрона видна уже из самого факта существования «электронного мира».

Заклучение

Квантовые состояния электронов в атоме были первоначально описаны на основе атома водорода, затем водородоподобного атома. Далее было установлено, что обнаруженные для таких систем соотношения между квантовыми числами n, l, m, s сохраняют свой вид для всех атомов. Это объяснило последовательность элементов в периодической системе Д.И. Менделеева. Инвариантность описания взаимосвязей квантовых состояний электронов в атомах независимо от их места в периодической системе говорит о наличии симметрий, связывающих различные состояния электронов.

Показано, что взаимоориентации векторов орбитальных моментов электронов описывается аддитивной группой порядка n (главное квантовое число). Изоморфной ей является точечная группа вращения того же порядка в декартовом пространстве. Если в эту группу вращения ввести дополнительный элемент отражения в плоскости перпендикулярной ей оси вращения, будет получена точечная группа $\frac{n}{m}$, которая описывает симметрию магнитных моментов электрона.

Векторы спина электрона $\vec{s} = +\frac{1}{2}$ и $\vec{s} = -\frac{1}{2}$ обладают зеркальной симметрией независимо от того, являются эти векторы полярными или аксиальными. Группа симметрии спинов электрона изоморфна группе симметрии электрон-позитронной (e, p) пары.

Следовательно, взаимосвязи различных орбитальных и спиновых состояний электрона в атоме можно рассматривать как своеобразное вращение (для орбитальных моментов) и отражения (для спинов) в соответствующих внутренних пространствах атомов. Этим группам симметрии сопоставляются изоморфные им точечные группы, которые эффективно используются в кристаллофизике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вигнер, Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер. – М : Мир. – 1971. – 318 с.
2. Эллиот, Дж. Симметрия в физике: в 2-х т. / Дж. Эллиот, П. Добер. – М. : Мир, 1983. – Т. 1 – 384 с, Т. 2. – 410 с.
3. Шубников, А.В. Симметрия в науке и искусстве / А.В. Шубников, В.А. Копчик. М. : Наука, 1978. – 339 с.
4. Hawking, S. The universe in a nutshell / S. Hawking. – N-Y, Toronto, London, Sidney, Auckland : Bantam books, 2012. – 216 p.
5. Вайнштейн, Б.К. Современная кристаллография / Б.К. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – 383 с.

-
6. Лиопо, В.А. Матричная кристаллография / В.А. Лиопо. – Гродно : ГрГУ, 1998. – 78 с.
 7. Любарский, Г.Я. Теория групп и физика / Г.Я. Любарский. – М. : Наука, 1986. – 293 с.

V.A. Liopo, A.V. Nikitin, A.V. Sabutz, S.S. Sekerzhitsky The Symmetry Group of Orbital and Spin Moments of Electrons in Atoms

For a plurality of quantum numbers created with the additive group of a binary operation and the condition of cyclicity. Here we have used the matrix representations of point symmetry groups. Our procedure for the description of the orbital angular momentum symmetry also suggests that the symmetry of these vectors defines their congruence in the corresponding space. This technique is applicable to describe the symmetry of the magnetic moments.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.02.14

УДК 538.91

А.Ф. Ревинский, Т.С. Петлицкая

ЭФФЕКТ КОНДО И ОБЪЁМНЫЙ КОЛЛАПС В ЦЕРИИ

На сегодняшний день нет общепринятой теории, объясняющей качественно и количественно одно из примечательных свойств церия: изменение его объёма при фазовом переходе между двумя различными аллотропическими модификациями. Среди множества гипотез относительно объёмного коллапса в церии можно выделить гипотезу, согласно которой ответственным за $\gamma - \alpha$ фазовый переход является механизм Кондо. В данной статье рассматривается физическая природа $\gamma - \alpha$ фазового перехода в церии на основе модели эффекта Кондо.

Введение

Церий, являясь элементом из группы лантаноидов с незаполненной $4f$ -оболочкой, представляет собой интерес для исследователей прежде всего по причине наличия в нём так называемого $\gamma - \alpha$ фазового перехода [1]. Суть данного превращения состоит в следующем. Две структурно изоморфные модификации церия α и γ имеют одинаковую кристаллическую структуру гранецентрированного куба. При комнатной температуре и несколько повышенном давлении (0,2 ГПа) экспериментально наблюдается вышеуказанный $\gamma - \alpha$ переход, который сопровождается существенным (до 20%) уменьшением объёма. Такое явление получило в литературе название объёмного коллапса [2]. Уникальность его состоит в том, что резкое сжатие кристалла церия происходит без изменения его пространственной группы O_h^5 , а только за счёт уменьшения размеров элементарного куба.

На сегодняшний день вопрос о физической природе указанного явления остаётся открытым. При этом имеется достаточно много различных гипотез и предложений относительно механизма объёмного коллапса в церии, наиболее полный обзор которых представлен в [3]. Однако единой теории данного явления не существует.

В данной работе на основе анализа ранее проведённых нами расчётов и эффективной массы электронов [4] установлена взаимосвязь между эффектом Кондо и объёмным коллапсом в церии.

Основы теории эффекта Кондо

Эффект Кондо был обнаружен экспериментально ещё в 30-х годах прошлого столетия и подробно представлен в книге [5]. Суть его состоит в аномальной температурной зависимости электрического сопротивления, в частности, благородных металлов вблизи абсолютного нуля (рисунок 1).

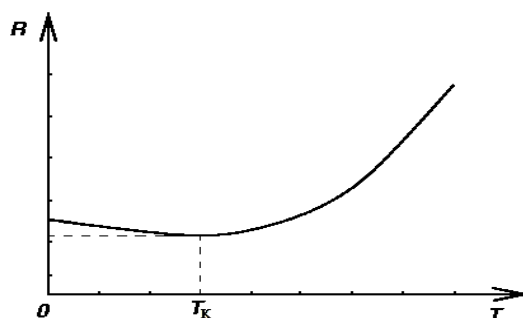


Рисунок 1 – Температурный ход сопротивления проводника

Аномалия проявляется в том, что сопротивление при понижении температуры вначале понижается, проходя через минимум при некоторой температуре $T = T_K$ (температура Кондо). Далее при $T \rightarrow 0$ сопротивление проводника растёт вопреки предсказаниям стандартных теорий о физике электрического сопротивления. Только в 1964 г. японским физиком Юном Кондо было дано объяснение аномалии электрического сопротивления проводника при $T \rightarrow 0$. Оказалось, что виной всему являются примеси, в частности атомы с незаполненными d - или f - оболочками, обладающие некомпенсированным спином и представляющие собой дополнительные центры рассеяния для электронов проводимости. Естественно, что эффект Кондо имеет заведомо квантовую природу, т.к. обусловлен обменным взаимодействием электронов проводимости с магнитными моментами ионов примеси.

Гамильтониан взаимодействия при этом запишется в виде [6]:

$$\hat{H} = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + J \sum_{k,k'} C_{k\sigma}^+ \vec{\sigma}_{\sigma\sigma'} C_{k'\sigma'} \vec{S}, \quad (1)$$

где ε_k – энергия электрона, $C_{k\sigma}^+$ и $C_{k\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения электрона, J – обменный интеграл, $\vec{\sigma}_{\sigma\sigma'}$ – матрицы Паули, \vec{S} – спин иона примеси. Задача с гамильтонианом (1) решается точно только в случае весьма существенных упрощений [6], которые не искажают физику проблемы. Было получено, что магнитная восприимчивость системы при $T \rightarrow 0$ конечна и равна

$$\chi(0) = \text{const} T_K^{-1}. \quad (2)$$

Здесь температура Кондо определяется из уравнения

$$k_B T_K = \varepsilon_F \exp \left[-\frac{1}{Jg(\varepsilon_F)} \right], \quad (3)$$

где $g(\varepsilon_F)$ – плотность состояний на поверхности Ферми. Факт, что магнитная восприимчивость (2) при $T \rightarrow 0$ выходит на т.н. «плато», объясняется тем, что при $T = T_K$ осуществляется переход от слабого взаимодействия в системе свободный электрон-примесь к сильному взаимодействию в данной системе при понижении температуры. В результате роста указанного взаимодействия создаётся повышенная плотность электронов проводимости вокруг иона примеси. Другими словами, в окрестности магнитного момента примеси образуется своего рода «шуба» из электронов проводимости, которая полностью компенсирует величину данного магнитного момента, способствуя одновременно росту примесного вклада в сопротивление проводника. В такого рода кондовских процессах принимают участие только зонные электроны вблизи поверхности Ферми, энергия которых находится в очень узком интервале

$$\Delta\varepsilon = k_B \cdot T_K. \quad (4)$$

Здесь начало отсчёта энергии выбрано на поверхности Ферми.

Явление увеличения обменного взаимодействия, описываемое гамильтонианом (1), при понижении температуры $T < T_K$, получило название резонанса Абрикосова–

Сула [5]. Данный резонанс сопровождается резким увеличением плотности электронных состояний $g(\varepsilon_F)$ на поверхности Ферми.

Следует подчеркнуть, что проблема Кондо именно связана с проблемой т.н. «тяжёлых фермионов». В соединениях церия и урана эффективная масса электрона вблизи поверхности Ферми больше массы свободного электрона в тысячу раз. Различие эффективной массы электрона и массы свободного электрона обусловлено взаимодействием электрона внутри кристалла с окружающими ионами и электронами, а также фононами. В нашем случае такая существенная перенормировка эффективной массы объясняется при помощи явления «прилипания» электронов проводимости к магнитным ионам церия или урана.

Модель проводника с утяжелёнными и «приклеенными» электронами проводимости к магнитным ионам получила название «решётки Кондо» [7].

Тяжёлые фермионы и объёмный коллапс в церии

Ранее нами [8] при использовании экспериментальных данных об электронной теплоёмкости церия для γ - и α - фаз соответственно было получено, что фазовый переход γ - α в церии сопровождается увеличением эффективной массы электронов проводимости в 1,6 раза. Ранее было замечено [7], что «утяжеление» фермионов, как правило, связано с эффектом Кондо.

Известно также [1], что металл церия является парамагнетиком. При этом ионы Ce^{3+} имеют локальный магнитный момент $\mu = 2,5\mu_B$. Другими словами, ионы церия Ce^{3+} и представляют собой те самые «магнитные примеси», к которым «прилипают» электроны проводимости, образуя т.н. «гало» зонных электронов вокруг иона Ce^{3+} . Ионы Ce^{3+} вместе с «прилипшими» зонными электронами образуют кондо-решётку. Естественно, такого рода кондовский процесс должен привести к полной компенсации магнитного момента Ce^{3+} и резкому увеличению плотности состояний вблизи уровня Ферми (резонанс Абрикосова-Сула). Расчёты зонной структуры церия [4] показали, что в окрестности уровня Ферми действительно находится пик плотности электронных состояний $g(\varepsilon_F)$.

На рисунке 2 представлены результаты расчётов плотности электронных состояний церия.

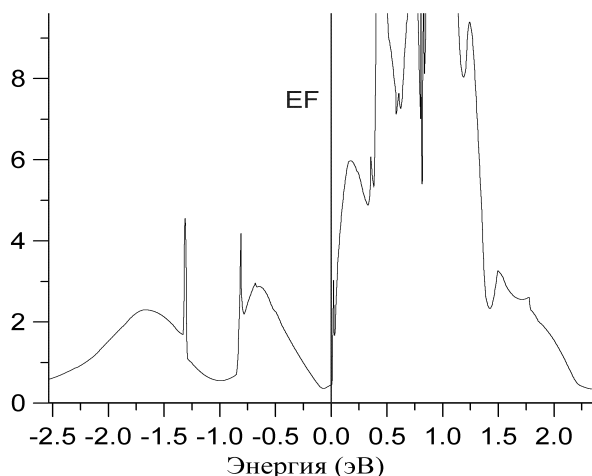


Рисунок 2 — Плотность электронных состояний в церии (сост/эВ·яч)

Такого рода механизм фазового перехода $\gamma-\alpha$ с участием кондовских процессов предлагается также в работе [9], где проведены первопринципные расчёты электронной структуры церия с учётом хаббардовского отталкивания зонных электронов в приближении DMFT.

Таким образом, на основе анализа полученных результатов можно сделать вывод, что природа фазового превращения $\gamma-\alpha$ в церии однозначно связана с эффектом Кондо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Handbook on the physics and chemistry of rare earths / ed.: Karl A. Gschneidner, LeRoy Eyring. – Vol. 1: Metals. – Amsterdam [etc.] : North-Holland, 1982. – P. 337–377.
2. Allen, J.W. Kondo volume collapse and the alpha-gamma transition in Cerium / J.W. Allen, R.M. Martin // Physical Review Lett. – 1982. – Vol. 49, № 15. – P. 1106–1110.
3. Николаев, А.В. Загадка $\gamma-\alpha$ и других фазовых переходов в церии / А.В. Николаев, А.В. Цвященко // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, №7 – С. 701–726.
4. Ревинский, А.Ф. Распределение электронной плотности и фононный спектр церия / А.Ф. Ревинский, В.А. Петрова, В.В. Тригук // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – №2. – С. 82–85.
5. Абрикосов, А.А. Основы теории металлов / А.А. Абрикосов. – М. : Наука, 1987. – 521 с.
6. Вигман, П.Б., Точное решение $s-d$ обменной модели при $T=0$ // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 31, в.7. – С. 392–398.
7. Мошчалков, В.В. Немагнитные кондо-решётки / В.В. Мошчалков, Н.Б. Брандт // Успехи физических наук. – 1986. – Т. 149, в. 10. – С. 525–629.
8. Ревинский, А.Ф. О $\gamma-\alpha$ фазовом переходе в церии / А.Ф. Ревинский, Т.С. Петлицкая // Вестник БарГУ. – 2014.
9. Held, K. The Cerium Volume Collapse: Results from the Local Density Approximation and Merger of Dynamical Mean-Field Theory approach / K. Held, A. K. McMahan, R. T. Scalettar // Physical Review Lett. – 2001. – Vol. 87, № 27. – P. 276404-1 – 276404-4.

A.F. Ravinski, T.S. Petlitskaya The Condo Effect and Volume Collapse in Cerium

Nowadays there is no generally accepted theory to explain qualitatively and quantitatively one of the remarkable properties of cerium: the change of its volume in phase transition between two different allotropic modifications. There are many hypotheses about the collapse in *Ce*. But one of the most known is the hypothesis that $\gamma \rightarrow \alpha$ phase transition is due to Kondo effect. This article discusses the physical nature of the phase transition in cerium based on the model of the Condo effect.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.03.14

УДК 524.3+535.3+537.6+539.171

А.И. Серый**О НЕКОТОРЫХ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЭФФЕКТАХ
В АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ**

Рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Рассмотрены конечные значения спиновой поляризации нуклонов с учетом энергии магнитного поля. Сделано уточнение выражения для угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов в магнитном поле в поляризованной по спину среде.

Введение. Постановка задачи

В работе продолжены исследования, начатые в [1, с. 30–37; 2, с. 50–58; 3, с. 48–60] с целью объяснить происхождение магнитных полей вследствие спиновой поляризации нуклонов в астрофизике, а также исследования, начатые в [4, с. 43–48; 5, с. 30–36] с целью получения формулы для угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотона. Объект исследований – поляризованные по спину в магнитном поле электронный газ, электронно-протонная (ер-) и электронно-нуклонная (енр-) системы при взрывах Сверхновых II типа и в оболочках белых карликов классов DA [6, с. 185] в приближениях крайнего вырождения и невырождения, а также плоскополяризованный фотон. Цель работы – дополнение и уточнение полученных ранее результатов.

Уточнение вывода критерия Стонера через флуктуации энергии

Критерий Стонера для 1-компонентного Ферми-газа имеет вид [7, с. 199]:

$$\nu_0 g > 1. \quad (1)$$

Обоснуем (1) через флуктуации энергии в зависимости от флуктуаций спиновой плотности. Рассмотрим Ферми-газ с контактными взаимодействиями, выражаемым константой g , в основном состоянии без магнитного поля и в слабополяризованном состоянии в магнитном поле δB . Совместный учёт изменения плотности полной энергии без взаимодействия (δw_0) и плотности энергии взаимодействия (δw_{int}) вместе с энергией в магнитном поле (δw_B) даёт [7, с. 199; 8, с. 692]:

$$\begin{aligned} \delta w &= \delta w_0 + \delta w_{int} + \delta w_B = \left((\delta n_\uparrow)^2 + (\delta n_\downarrow)^2 \right) (2\nu_0)^{-1} + g \delta n_\uparrow \delta n_\downarrow - (\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow) \mu \delta B = \\ &= (\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow)^2 (1 - \nu_0 g) (4\nu_0)^{-1} - (\delta n_\uparrow - \delta n_\downarrow) \mu \delta B. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) $\delta n_\uparrow, \delta n_\downarrow$ – отклонения концентрации от равновесной для частиц со спинами, ориентированными по направлению и против направления магнитного поля $\delta \vec{B}$. Если собственный магнитный момент частиц $\mu > 0$, то спины сонаправлены с собственными магнитными моментами, $\delta n_\uparrow > \delta n_\downarrow$, и тогда $\delta w_B < 0$, т.к. δB в (2) берется по абсолютной величине; при $\mu < 0$ спины направлены противоположно собственным магнитным моментам, $\delta n_\uparrow < \delta n_\downarrow$, но $\mu \delta n_\uparrow > \mu \delta n_\downarrow$, и тогда все равно $\delta w_B < 0$. Т.о., при выполнении (1) появление ненулевого магнитного момента энергетически выгодно при сколь угодно малом δB , т.к. должно быть $\delta w < 0$ (1-е слагаемое в конечном выражении

в (2) отрицательно в силу (1)). Т.е. при выводе критерия Стонера через флуктуации плотности энергии слагаемое δw_B (и вообще наличие магнитного поля) можно не учитывать. Отсутствие слагаемых $g(\delta n_{\uparrow})^2$, $g(\delta n_{\downarrow})^2$ обусловлено принципом Паули.

Рассмотрим смещение плотности энергии np -смеси по аналогии с (2). С учетом сохранения общего числа частиц для нейтронов (n) и протонов (p) имеем:

$$\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}, \quad i = n, p. \quad (3)$$

Для плотности энергии без учета взаимодействий с учетом (2), (3) получаем:

$$\delta w_0 = \delta w_{0n} + \delta w_{0p} = \sum_{i=n,p} \left((\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2 \right) (2v_{0i})^{-1} = \sum_{i=n,p} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow})^2 (4v_{0i})^{-1}. \quad (4)$$

Изменение плотности энергии ядерного взаимодействия выглядит аналогично δw_{int} в (2) как для протонов, так и для нейтронов, а также появляется «интерференционное» слагаемое δw_{int}^{np} (константы контактного ядерного взаимодействия для разных сортов нуклонов и взаимной ориентации их спинов см. в [1, с. 31]):

$$\begin{aligned} \delta w_{int} &= \delta w_{int}^p + \delta w_{int}^n + \delta w_{int}^{np} = \sum_{i=n,p} g_{ii} \delta n_{i\uparrow} \delta n_{i\downarrow} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + \\ &+ g_{np}^{\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=n,p} g_{ii} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow})^2 - \frac{1}{2} \tilde{g} \prod_{i=n,p} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}). \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывать слагаемое δw_B не обязательно, т.к. оно все равно отрицательно (рассуждения аналогичны приведенным после (2)):

$$\delta w_B = \sum_{i=n,p} \gamma_i \mu_{Я} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}) \delta B < 0, \quad \gamma_p = 2.79, \quad \gamma_n = -1.91. \quad (6)$$

При $\delta B = 0$ соотношение между концентрациями нуклонов различных сортов имеет вид [1, с. 33] (v_{0i} – плотность числа состояний на уровне Ферми):

$$\delta n_{i\uparrow} = v_{0i} \tilde{g} \delta n_{j\uparrow} \lambda_i^{-1}, \quad \lambda_i = 1 - v_{0i} g_{ii}, \quad i = n, p; \quad j \neq i. \quad (7)$$

Используя (7), можно выразить, например, $\delta n_{n\uparrow}$ через $\delta n_{p\uparrow}$ и подставить в (4) и (5). Тогда окончательно получаем:

$$\delta w = \delta w_0 + \delta w_{int} = (\delta n_{p\uparrow} - \delta n_{p\downarrow})^2 \left(\frac{1}{4v_{0p}} - \frac{g_{pp}}{4} + \frac{v_{0n} \tilde{g}^2}{4\lambda_n^2} - \frac{g_{mn} v_{0n}^2 \tilde{g}^2}{4\lambda_n^2} - \frac{v_{0n} \tilde{g}^2}{2\lambda_n} \right). \quad (8)$$

После некоторых преобразований получаем:

$$\delta w = (\delta n_{p\uparrow} - \delta n_{p\downarrow})^2 (\lambda_p \lambda_n - v_{0p} v_{0n} \tilde{g}^2) (4v_{0n} v_{0p} \lambda_n^2)^{-1}. \quad (9)$$

Условие $\delta w \leq 0$ приводит к результату, совпадающему с [1, с. 33]:

$$\lambda_p \lambda_n - \nu_{0p} \nu_{0n} \tilde{g}^2 \leq 0. \quad (10)$$

Если из (7) выразить, наоборот, $\delta n_{p\uparrow}$ через $\delta n_{n\uparrow}$, то результат не изменится.

Энергия, связанная с магнитным полем, при спиновой поляризации
Индукция магнитного поля при спонтанной намагниченности [9, с. 316, 327]:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = (\chi^{-1} + 4\pi)\vec{I} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 4\pi\vec{I} = 4\pi\vec{k}_0 \mu_Y \sum_{i=n,p} n_i p_{0i} \gamma_i. \quad (11)$$

Здесь p_{0i} – степень спиновой поляризации нуклонов заданного сорта, \vec{k}_0 – единичный вектор, μ_Y – ядерный магнетон. Предполагается, что для электронов (1) не выполняется. Тогда плотность энергии магнитного поля с учетом (11) равна

$$w_{0B} = \frac{B^2}{8\pi} = 2\pi\mu_Y^2 (n_p p_{0p} \gamma_p + n_n p_{0n} \gamma_n)^2. \quad (12)$$

А плотность энергии собственных магнитных моментов нуклонов заданного сорта в поляризованном магнитном поле равна

$$w_{iB} = -\gamma_i \mu_Y B n_i p_{0i}. \quad (13)$$

С учетом (11) – (13) полная энергия, связанная с поляризованным магнитным полем нуклонов, равна:

$$w_B = w_{0B} + w_{pB} + w_{nB} = -2\pi\mu_Y^2 (n_p p_{0p} \gamma_p + n_n p_{0n} \gamma_n)^2. \quad (14)$$

Поправка к энергии отдельно взятого нуклона в магнитном поле с учетом (11) имеет вид (стрелки соответствуют направлениям спинов)

$$\Delta E_{B(i)}^{\uparrow\downarrow} = \mp \gamma_i \mu_Y B = \mp 4\pi\gamma_i \mu_Y^2 \sum_{j=n,p} n_j p_{0j} \gamma_j. \quad (15)$$

Учет энергии магнитного поля в пределе крайнего вырождения

Рассмотрим вырожденную электронно-нуклонную плазму. Согласно [3, с. 55, 56], запишем выражение для плотности энергии с учетом ядерной, а также обменной и корреляционной энергии нуклонов, а также плотности энергии (14), связанной с магнитным полем:

$$w_{deg}^{np}(p_{0p}, p_{0n}) = \sum_{i=p,n} w_i + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) - \\ - \frac{e^2 (6\pi^2)^{4/3}}{8\pi^3} (n_{p+}^{4/3} + n_{p-}^{4/3}) - \frac{w_0}{2} (F(X_+) + F(X_-)) + w_B, \quad n_{i\pm} = \frac{n_i}{2} (1 \pm p_{0i}), \\ w_i = \frac{3(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_i} (n_{i+}^{5/3} + n_{i-}^{5/3}) + g_{ii} n_{i+} n_{i-}, \quad w_0 = \frac{3m_p c^2 n_p \alpha^2}{\pi^3}, \quad X_{\pm} = \frac{\pi \hbar (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}}{4m_p c \alpha},$$

$$F(X) = \int_0^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{X}{P(s)} \right) + \frac{X}{P(s)} - \frac{X^2}{P^2(s)} \ln \left(1 + \frac{P(s)}{X} \right) \right) P^2(s) ds, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (16)$$

Также учтем равенство химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина (T_{3i} – проекция изоспина нуклонов, $i = n, p$). В отличие от [3, с. 56], учтем также (15):

$$E_{Fi}^{\uparrow} = E_{Fi}^{\downarrow}; E_{Fi}^{\uparrow, \downarrow} = \frac{(6\pi^2 n_{i\pm})^{2/3} \hbar^2}{2m_i} + g_{ii} n_{i\mp} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{j\mp} + \left(\frac{1}{2} + T_{3i} \right) \Lambda_{\pm} + \Delta E_{B(i)}^{\uparrow, \downarrow},$$

$$T_{3j} = -T_{3i}; \Lambda_{\pm} = -\frac{w_0}{2n_p} \sum_{i=+, -} F(X_i) - \frac{w_0 X_{\pm}}{3n_{p\pm}} \left(\int_0^{+\infty} P(s) ds - X_{\pm} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{P(s)}{X_{\pm}} \right) ds \right) - \frac{e^2}{\pi} (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}. \quad (17)$$

При $p_{0i} = 1$ вместо (17) используется неравенство:

$$E_{Fi}^{\uparrow} \leq E_{Fi}^{\downarrow}, \quad i = n, p. \quad (17a)$$

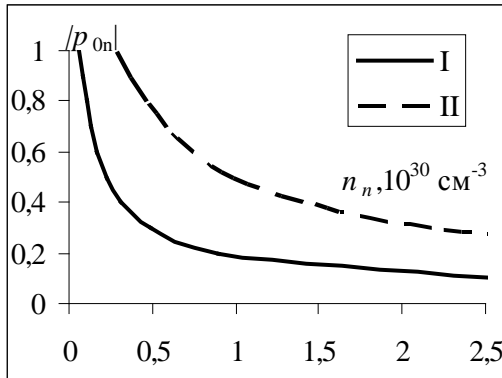


Рисунок 1 – Значение p_{0n} , соответствующее $E_{Fi}^{\uparrow} = E_{Fi}^{\downarrow}$ ($i = n, p$) в зависимости от n_n при заданном n_p .

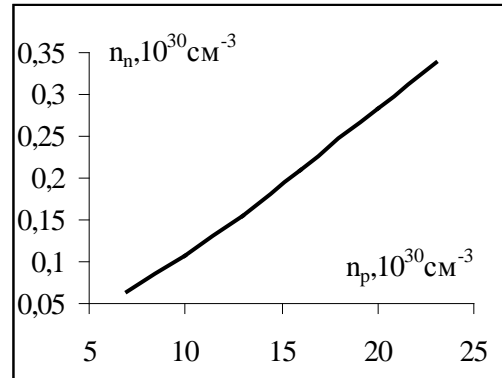


Рисунок 2 – Зависимость максимального значения n_n , при котором ещё $p_{0n} = -1$, от n_p

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (16) не от 4, а от 2 аргументов, т.к. на остальные 2 наложены связи в (17). Хотя (17) всегда имеет решение в отсутствие спиновой поляризации, нужно найти поляризованное решение, и чтобы при этом плотность энергии в (16) была меньше по сравнению с неполяризованным состоянием при заданных n_n, n_p . При $n_n = 0$ плотность энергии в (16) зависит от 1 аргумента, т.к. на 2-й наложена связь в (17).

Численные результаты при $n_n = 0$ практически не отличаются от полученных в [3, с. 56], влияние (14) и (15) мало, при $p_{0p} \sim 0.9$ и $n_p \sim 10^{30} \text{ см}^{-3}$ имеем $B \sim 10^9$ Гс. Численные данные при $n_n \neq 0$ представлены в таблице 1, а также на рисунке 1 для случаев:

I. $n_p = 7 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, $p_{0p} \approx 0.945$; II. $n_p = 2 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$, $p_{0p} \approx 0.903$. При этом всегда $p_{0n} < 0$, а плотность полной энергии ниже, чем при $p_{0p} = p_{0n} = 0$ и тех же значениях n_p, n_n . На рисунке 2 представлена зависимость максимальной концентрации нейтронов, при которой их поляризация ещё полная, от n_p .

Таблица 1 – Значения равновесной степени поляризации и индукции магнитного поля при различных фиксированных значениях концентраций

p_{0n}	$n_p = 7 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$			$n_p = 2 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$		
	$n_n, 10^{32} \text{ см}^{-3}$	p_{0p}	$B, 10^9 \text{ Гс}$	$n_n, 10^{32} \text{ см}^{-3}$	p_{0p}	$B, 10^9 \text{ Гс}$
-0,01	0,746	0,945	2,08	3,185	0,906	3,60
-0,001	19,63	0,945	3,56	77,64	0,912	4,17
-0,0001	420,84	0,945	5,23	1477,9	0,919	5,05

Учет энергии магнитного поля в пределе крайнего невырождения

Рассмотрим плотность энергии невырожденной электронно-нуклонной системы при конечной поляризации согласно [3, с. 49, 50, 57] и с учетом (14):

$$\begin{aligned}
 w_{non\ deg}^{np}(p_{0p}, p_{0n}) &= \sum_{i=p,n} w_i^T + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) + w_B + \\
 &+ w_{exch}^T + w_{corr}^T; \quad w_i^T = \frac{3\pi^{3/2} (m_i kT)^{5/2}}{2m_i (2\pi\hbar)^3} \sum_{j=+,-} (4y_{ij} - y_{ij}^2) + w_{Ni}^T, \quad w_{Np}^T = g_{pp}^T n_{p+} n_{p-}, \\
 w_{corr}^T &= -\frac{kT}{8\pi} \left(4\pi e^2 \sum_{j=+,-} \frac{\partial n_{pj}}{\partial \mu_{0pj}} \right)^{3/2} = -\frac{(kT)^{7/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{9/4}}{2^{3/2} \pi^{7/4} (\hbar c)^3} \left(\sum_{j=+,-} y_{pj} \sqrt{1-x_{pj}} \right)^{3/2}, \\
 y_{i\pm} &= 1 - \sqrt{1-x_{i\pm}}, \quad x_{i\pm} = \frac{(2\pi\hbar)^3 n_{i\pm}}{2(\pi m_p kT)^{3/2}}, \quad i = n, p, \\
 w_{exch}^T &= -\frac{e^2 m_p^2 (kT)^2}{8\pi^2 \hbar^4} \left(\exp\left\{ \frac{2\mu_{0p+}}{kT} \right\} + \exp\left\{ \frac{2\mu_{0p-}}{kT} \right\} \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Запишем равенства химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина согласно [3, с. 52, 57] и с учетом (15):

$$\begin{aligned}
 \mu_{i+} &= \mu_{i-}, \quad \mu_{i\pm} \approx \mu_{0i\pm} + g_{ii}^T n_{i\mp} + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} n_{j\mp} + \left(\frac{1}{2} + T_{3i} \right) (\mu_{exch\pm} + \mu_{corr\pm}) + \Delta E_{B(i)}^{\uparrow,\downarrow}, \\
 i = n, p; \quad T_{3j} &= -T_{3i}, \quad \mu_{0i\pm} = kT \ln(\sqrt{2} y_{i\pm}), \quad \mu_{exch\pm} = -\frac{\alpha \sqrt{m_p c^2 kT} y_{p\pm}}{\sqrt{\pi(1-x_{p\pm})}}, \\
 \mu_{corr\pm} &= -\frac{3(kT)^{1/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{3/4}}{\sqrt{2}\pi^{1/4}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x_{p\pm}}} \right) \left(\sum_{i=+,-} (\sqrt{1-x_{pi}} + x_{pi}) - 2 \right)^{1/2} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (18) не от 4, а лишь от 2 аргументов (при заданной температуре), т.к. на ос-

тальные 2 наложены связи в (19). При $n_n = 0$ получаем зависимость плотности энергии в (18) от 1 аргумента (при заданной температуре), т.к. на 2-й наложена связь в (19).

Отметим, что при $p_{0p} \neq 0$ полная плотность энергии понижается с ростом p_{0p} , но без учета корреляционной энергии $\mu_{p+} < \mu_{p-}$, а с ее учетом $\mu_{p+} > \mu_{p-}$, что составляет трудность, связанную с расходимостью μ_{0p-} при $p_{0p} \rightarrow 1$, а также с приближенностью самой системы (18), (19). Уточнение задачи, приводящее к значительным математическим трудностям, пригодно для общего случая, когда критерий невырождения может и не выполняться. При этом: а) в формуле для w_{corr}^T из (18) в производной заменяем $\mu_{0p\pm}$ на $\mu_{p\pm}$ из (19), и получается нелинейная самосогласованная дифференциальная система уравнений; б) $\mu_{0i\pm}$ находим без приближений (т.к. формула в (19) все равно приближенная, хотя и более точная по сравнению с общепринятой), но тогда надо решать интегральное уравнение либо алгебраическое уравнение, в котором неизвестная величина входит в бесконечный ряд; в) дальнейшее уточнение заключается в замене в предыдущем пункте $\mu_{0i\pm}$ на $\mu_{i\pm}$. В итоге получаем нелинейную интегродифференциальную систему уравнений.

Вместе с тем, применяя формулу Веденова-Ларкина в приближении крайнего невырождения, получаем согласно [10, с. 460–462]:

$$\frac{\partial n_{p\pm}}{\partial \mu_{p\pm}} = \frac{n_{p\pm}}{kT} \Rightarrow w_{corr}^T = -\frac{(4\pi e^2 n_p)^{3/2}}{8\pi\sqrt{kT}} \Rightarrow \mu_{corr\pm} = \frac{\partial w_{corr}^T}{\partial n_{p\pm}} = -\frac{3(4\pi e^2)^{3/2} n_p^{1/2}}{16\pi\sqrt{kT}}. \quad (19a)$$

Из (19a) видно, что корреляционные части плотности энергии и химического потенциала вообще не зависят от спиновой поляризации, поэтому в приближении крайнего невырождения их можно не учитывать.

В этом случае данные расчетов при $n_n = 0$ приведены в таблице 2 и на рисунке 3, на котором введены обозначения: I. $n_p = 10^{25} \text{ см}^{-3}$. II. $n_p = 10^{26} \text{ см}^{-3}$. Здесь представлена зависимость значения p_{0p} , при котором $\mu_{p+} = \mu_{p-}$, от значения T . Полная плотность энергии понижается с ростом p_{0p} во всем диапазоне значений p_{0p} , если при этом зафиксировать любое из значений $T \sim 10^4 \text{ К}$ и любое из значений $n_p \sim 10^{25} \div 10^{26} \text{ см}^{-3}$ (при фиксированном $T \sim 10^3 \text{ К}$ фиксируем $n_p \sim 10^{24} \text{ см}^{-3}$).

Данные расчетов при $n_n \neq 0$ приведены в таблице 2 и на рисунке 4, на котором введены обозначения: I. $n_p = 10^{26} \text{ см}^{-3}$. II. $n_p = 0,9 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$. Здесь представлена зависимость значения p_{0n} , при котором $\mu_{n+} = \mu_{n-}$, от значения T при фиксированном n_p . Равновесное значение p_{0p} при этом практически такое же, как и при $n_n = 0$, а значение p_{0n} практически не зависит от n_n при заданном n_p .

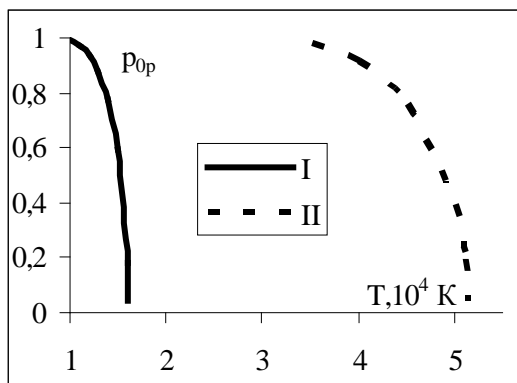


Рисунок 3 – Значение p_{0p} , соответствующее равенству химических потенциалов протонов при заданном T

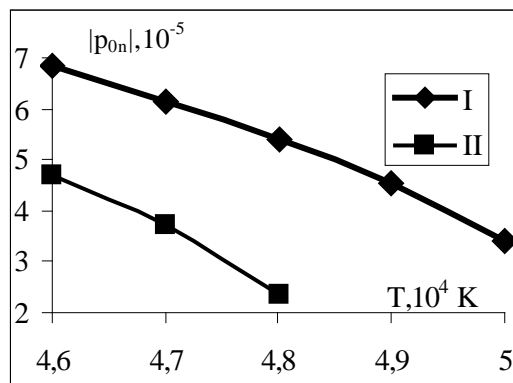


Рисунок 4 – Значения $|p_{0n}|$, соответствующее равенству химических потенциалов нейтронов при заданных T, n_p

Таблица 2 – Значения равновесной степени поляризации и индукции магнитного поля при различных фиксированных значениях температуры и концентраций

$T, 10^4 \text{ K}$	$n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	p_{0p}	$n_n, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$p_{0n}, 10^{-5}$	$B, 10^4 \text{ Гс}$
0,7	1	0,99998	0	0	0,177
1,608	1	0,0414	0	0	0,007
3	10	0,9961	0	0	1,766
5,13	10	0,0404	0	0	0,072
4,6	9	0,5495	0,0009	-4,74	0,877
4,6	9	0,5495	9	-4,70	0,877
4,8	9	0,2856	0,0009	-2,36	0,456
4,8	9	0,2856	9	-2,34	0,456
4,6	10	0,7165	0,001	-6,86	1,270
4,6	10	0,7165	10	-6,79	1,270
5,0	10	0,3889	0,001	-3,43	0,689
5,0	10	0,3889	10	-3,40	0,689

Уточнение выражения для угла комптоновского вращения

Вблизи поверхностей замагниченных астрофизических объектов может происходить такое явление, как комптоновское вращение плоскости линейной поляризации фотона. В [4, с. 43–48; 5, с. 30–36] было получено выражение для угла вращения на единицу пройденного фотоном расстояния в полностью поляризованном по спину электронном газе. При этом исследовалось следующее выражение для матричного элемента комптоновского рассеяния вперед:

$$\Omega = \frac{-i\alpha(2\pi\hbar)^4 c e_\mu (e'_\nu)^*}{\hbar V S_0 \omega} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}_0(\zeta_1) \mathcal{Q}_{\mu\nu} \Psi_0(\zeta_2). \quad (20)$$

Здесь ω, e_μ, e'_ν – частота, а также компоненты вектора поляризации начального и конечного фотонов соответственно, V – нормировочный объём для фотона, S_0 – нор-

мировочная площадь для электрона в плоскости (xy); δ -функция содержит компоненты y, z, t . Распишем подробнее волновые функции в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= A_0 i(2eB\hbar)^{1/2} U_0(x) u_0, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 0 & -m_e c^2 - \varepsilon_0 & 0 & p_z c \end{bmatrix}^T, \\ U_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar c \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + m_e c^2)} \sqrt{eB\hbar}}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_z^2 c^2}, \\ \zeta_k &= \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \left(x_k + \frac{cp_y}{eB}\right), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь m_e, p_y, p_z – масса электрона, а также компоненты его импульса вдоль осей y и z . В интеграле черта над электронной волновой функцией означает дираковское сопряжение [11, с. 102], причем, вместо u_0 имеем (T означает транспонирование):

$$\bar{u}_0 = (u_0^*)^T \gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & -m_e c^2 - \varepsilon_0 & 0 & -p_z c \end{bmatrix}. \quad (22)$$

При движении фотона под углом θ к линиям индукции магнитного поля запишем выражения для 4-импульса фотона, а также виртуального электрона в R - и S -процессах:

$$\begin{aligned} \hbar k_x &= 0, \quad \hbar k_y = \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta, \quad \hbar k_z = \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta, \\ \vec{g} &= \vec{p} + \hbar\vec{k} \Rightarrow cg_0 = \varepsilon_0 + \hbar\omega, \quad cg_2 = p_y c + \hbar\omega \sin\theta, \quad cg_3 = p_z c + \hbar\omega \cos\theta, \\ \vec{f} &= \vec{p} - \hbar\vec{k} \Rightarrow cf_0 = \varepsilon_0 - \hbar\omega, \quad cf_2 = p_y c - \hbar\omega \sin\theta, \quad cf_3 = p_z c - \hbar\omega \cos\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение для $Q_{\mu\nu}$ при нахождении начального и конечного электрона на нулевом уровне Ландау имеет вид (матрицы Дирака γ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) берутся в стандартном представлении [11, с. 104]):

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= \gamma_\nu G_B(g, \rho) \gamma_\mu + \gamma_\mu G_B(f, \eta) \gamma_\nu, \quad \rho_k = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \left(x_k + \frac{cg_2}{eB}\right), \quad \eta_k = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \left(x_k + \frac{cf_2}{eB}\right), \\ G_B(\lambda, x) &= \sqrt{eB\hbar c^3} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\lambda) G_n(\lambda, x_1, x_2), \quad \tilde{m}_{(n)} c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + 2nBe\hbar c}, \\ G_n(\lambda, x_1, x_2) &= U_n(x_1) U_n(x_2) \tilde{G}(\lambda) \beta_1 + (1 - \delta_{0n}) U_{n-1}(x_1) U_{n-1}(x_2) \tilde{G}(\lambda) \beta_2 + \\ &+ (1 - \delta_{0n}) i \sqrt{\frac{2neB\hbar}{c}} (U_{n-1}(x_1) U_n(x_2) \gamma_1 \beta_1 - U_n(x_1) U_{n-1}(x_2) \beta_1 \gamma_1), \\ \tilde{G}(\lambda) &= \gamma_0 \lambda_0 - \gamma_3 \lambda_3 + m_e c, \quad J_n(\lambda) = (c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_{n\lambda}^2 - i \cdot 0)^{-1}, \quad \varepsilon_{n\lambda} = \sqrt{\tilde{m}_{(n)}^2 c^4 + \lambda_3^2 c^2}, \\ U_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x), \quad H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \\ \beta_1 &= \frac{1}{2} (I_4 + i\gamma_2 \gamma_1), \quad \beta_2 = \frac{1}{2} (I_4 - i\gamma_2 \gamma_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь I_4 – единичная матрица 4×4 . Линейно поляризованный фотон можно представить в виде суперпозиции 2 фотонов с круговыми поляризациями. Выбирая для фотона, движущегося в плоскости (yz), правую (+) или левую (–) круговую поляризацию, запишем для начального и конечного фотона:

$$e_{(\pm)} = e'_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \mp i & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}^T. \quad (25)$$

Учитывая, что в $Q_{\mu\nu}$ $\mu, \nu = \overline{1,4}$, получаем сумму из 16 выражений, каждое из которых содержит интеграл, вид которого не зависит от поляризации фотона, т.к. компоненты вектора поляризации (25) в подынтегральном выражении (20) нигде не присутствуют. При вычислении разности выражений (20) для правой и левой круговой поляризации отличными от нуля оказываются лишь разности для случаев $\mu = 2, \nu = 1$ и $\mu = 1, \nu = 2$, а также $\mu = 3, \nu = 1$ и $\mu = 1, \nu = 3$. В [4, с. 46] была рассмотрена лишь 1-я пара случаев и получен результат:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^{(+)} + \Omega_{21}^{(+)} - \Omega_{12}^{(-)} - \Omega_{21}^{(-)} &= \frac{2c\alpha(2\pi\hbar)^4 \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \cos \theta}{\hbar V S_0 \omega} \chi_2, \\ \chi_2 &= iA_0^2 \sqrt{Be(\hbar c)^{5/2}} (m_e c^2 + \varepsilon_0) \pi c \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{2n-2} (J_n(g)\tilde{\Lambda}(g) - J_n(f)\tilde{\Lambda}(f)), \\ \tilde{\Lambda}(\lambda) &= -\varepsilon_0 \lambda_0 + p_z c \lambda_3 + m_e^2 c^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь рассмотрим случаи $\mu = 3, \nu = 1$ и $\mu = 1, \nu = 3$. Каждое из этих выражений, в силу (24), представляет собой сумму матричных произведений. Большинство из них, однако, не требует вычислений, что позволяет сделать предварительные упрощения. Действительно, несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 \gamma_1 \tilde{X} \gamma_3 u_0 = \bar{u}_0 \gamma_3 \tilde{X} \gamma_1 u_0 = 0, \quad \tilde{X} &= \beta_1, \gamma_0 \beta_1, \gamma_3 \beta_1, \beta_2, \gamma_0 \beta_2, \gamma_3 \beta_2, \\ \bar{u}_0 \gamma_1 \beta_1 \gamma_1 \gamma_3 u_0 = \bar{u}_0 \gamma_3 \gamma_1 \beta_1 \gamma_1 u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда вместо (24) для Q_{13} и Q_{31} будем использовать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{13} &= -\gamma_3 G_B''(g, \rho) \gamma_1 + \gamma_1 G_B'(f, \eta) \gamma_3, \quad \tilde{Q}_{31} = \gamma_1 G_B'(g, \rho) \gamma_3 - \gamma_3 G_B''(f, \eta) \gamma_1, \\ G_B'(\lambda, x) &= ieB\hbar c \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda) \sqrt{2n} U_{n-1}(x_1) U_n(x_2) \gamma_1 \beta_1, \\ G_B''(\lambda, x) &= ieB\hbar c \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda) \sqrt{2n} U_n(x_1) U_{n-1}(x_2) \beta_1 \gamma_1. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом (20), (25), (28) получаем:

$$\Omega_{13}^{(+)} + \Omega_{31}^{(+)} = \frac{\alpha c (2\pi\hbar)^4 \sin \theta}{2\hbar V S_0 \omega} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}_0(\zeta_1) (\tilde{Q}_{13} - \tilde{Q}_{31}) \Psi_0(\zeta_2),$$

$$\Omega_{13}^{(-)} + \Omega_{31}^{(-)} = \frac{\alpha c (2\pi\hbar)^4 \sin\theta}{2\hbar V S_0 \omega} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}_0(\zeta_1) (\tilde{Q}_{31} - \tilde{Q}_{13}) \Psi_0(\zeta_2) \quad (29)$$

При вычитании нижнего выражения (29) из верхнего учтем, что не равными нулю согласно (28) оказываются следующие комбинации:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 \gamma_1 \gamma_1 \beta_1 \gamma_3 u_0 &= \bar{u}_0 \gamma_3 \beta_1 \gamma_1 \gamma_1 u_0 = -2p_z c (m_e c^2 + \varepsilon_0), \\ \bar{\Psi}_0(\zeta_1) \tilde{Q}_{13} \Psi_0(\zeta_2) &= -\bar{\Psi}_0(\zeta_1) \tilde{Q}_{31} \Psi_0(\zeta_2). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда с учетом (29) и (30) получим:

$$\begin{aligned} \Omega_{13}^{(+)} + \Omega_{31}^{(+)} - \Omega_{13}^{(-)} - \Omega_{31}^{(-)} &= \frac{2c\alpha (2\pi\hbar)^4 \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \sin\theta}{\hbar V S_0 \omega} \chi_3, \\ \chi_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}_0(\zeta_1) \tilde{Q}_{13} \Psi_0(\zeta_2). \end{aligned} \quad (31)$$

Вычисляя χ_3 с учетом (21), (24), (28), получаем:

$$\begin{aligned} \chi_3 &= iA_0^2 \sqrt{Be} (\hbar c)^{5/2} (m_e c^2 + \varepsilon_0) \pi p_z c \hbar \omega \sin\theta \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n} \phi^{2n-2} (J_n(g) + J_n(f)), \\ \phi &= \frac{\hbar \omega \sin\theta}{\sqrt{\hbar c Be}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Складывая (26) и (31), с учетом (32) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2,3} (\Omega_{1j}^{(+)} + \Omega_{j1}^{(+)} - \Omega_{1j}^{(-)} - \Omega_{j1}^{(-)}) &= \frac{2c\alpha (2\pi\hbar)^4 \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}')}{\hbar V S_0 \omega} iZ, \\ Z &= A_0^2 \sqrt{Be} (\hbar c)^{5/2} (m_e c^2 + \varepsilon_0) \pi c \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{2n-2} (J_n(f) \tilde{f} - J_n(g) \tilde{g}), \\ \tilde{g} &= (g_0 \varepsilon_0 - m_e^2 c^3) \cos\theta - p_z (c g_3 \cos\theta + \sqrt{2n\hbar\omega} \sin^2\theta), \\ \tilde{f} &= (f_0 \varepsilon_0 - m_e^2 c^3) \cos\theta - p_z (c f_3 \cos\theta - \sqrt{2n\hbar\omega} \sin^2\theta). \end{aligned} \quad (33)$$

В [4, с. 46, 47] было показано, что угол поворота плоскости поляризации фотона на единицу пройденного пути можно выразить по формулам (n_e – концентрация электронов, \vec{q} – вектор их спиновой поляризации, ω – частота фотона, $\vec{n} = \vec{k} / |\vec{k}|$):

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} (\vec{q} \cdot \vec{n}) \operatorname{Re} W_2(\omega), \quad 2 \operatorname{Re} W_2(\omega) (\vec{q} \cdot \vec{n}) = \operatorname{Re}(F_{(-)} - F_{(+)}), \quad (34)$$

$$\Omega^{(\pm)} = (\varepsilon_0 + \hbar\omega) \frac{i(2\pi\hbar)^4 c F_{(\pm)}}{V S_0 \varepsilon_0 \hbar \omega} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}'). \quad (35)$$

Тогда с учетом (33) – (35), а также (21), получаем:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{(\pi\hbar c)^2 \alpha c n_e}{\hbar\omega(\varepsilon_0 + \hbar\omega)} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{2n-2} (J_n(g)\tilde{g} - J_n(f)\tilde{f}). \quad (36)$$

Вклады в (36), обусловленные выражениями (26) и (31), ведут себя по-разному в зависимости от того, выбирается ли приближение $p_z = 0$ или производится усреднение по p_z . Классификация нулевых и ненулевых вкладов во вращение приведена в таблице 3, где обращение вклада в ноль может происходить по разным причинам: I. Т.к. $p_z = 0$, а это множитель перед всем выражением. II. Т.к. $\cos\theta = 0$, а это множитель перед всем выражением. III. Т.к. $\sin\theta = 0$, а это множитель перед всем выражением. IV. Т.к. $\cos\theta = 0$, и подынтегральное выражение является нечетной функцией относительно p_z , а пределы интегрирования симметричны относительно значения $p_z = 0$.

Таблица 3 – Условия обращения в ноль различных вкладов во вращение

Случаи	при $p_z = 0$			при усреднении по p_z		
	$\theta = 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\mu = 2, \nu = 1$ и $\mu = 1, \nu = 2$	$\neq 0$	$\neq 0$	II	$\neq 0$	$\neq 0$	II
$\mu = 3, \nu = 1$ и $\mu = 1, \nu = 3$	I, III	I	I	III	$\neq 0$	IV

Т.о., формула (31) дает отличный от нуля вклад во вращение (что приводит к отличию результатов данной работы (формула (36)) от полученных в [5, с. 31, 33, 34]) лишь в случае усреднения по p_z при $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi/2$. При $\theta = \pi/2$ (т.е. $\vec{k} \perp \vec{B}$, или, что равносильно, $\vec{n} \perp \vec{q}$) полный вклад во вращение в любом случае обращается в ноль, как и должно следовать из (34).

При $\hbar\omega < \varepsilon_0$ полюса в $J_n(f)$ нет [12, с. 322]. Сместим полюсы с вещественной оси в $J_n(g)$ путем замены [12, с. 323]:

$$\varepsilon_{ng} \rightarrow \varepsilon_{ng} - i\Gamma_n / 2, \quad 3m_e c^2 \Gamma_n \approx 16(2n-1)\alpha(\mu_B B)^2, \quad (37)$$

$$\text{Re}(J_n(g)) = G(G^2 + \Gamma_n^2 \varepsilon_{ng}^2)^{-1}, \quad G = c^2 g_0^2 - \varepsilon_{ng}^2 + \Gamma_n^2 / 4. \quad (38)$$

Пусть $T = 0$ К, $\hbar\omega < m_e c^2$, и тогда для всех электронов $\hbar\omega < \varepsilon_0$. При усреднении произвольной функции Ξ по p_z будем, как и в [5, с. 33], использовать формулы:

$$\langle \Xi(w) \rangle = \frac{(m_e c^2)^2 \mu_B B}{2\pi^2 (\hbar c)^3 n_e} \int_{-w_1}^{+w_1} \Xi(w) dw, \quad w = \frac{p_z}{m_e c}, \quad w_1 = \frac{p_{z,max}}{m_e c} = \frac{\pi^2 (\hbar c)^3 n_e}{(m_e c^2)^2 \mu_B B}. \quad (39)$$

Тогда согласно (36) – (39), как и в [5, с. 33], получим:

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{\alpha m_e c \mu_B B}{4\hbar^2 \omega} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{2n-2} (R_n - S_n),$$

(40)

$$R_n = \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{\Omega_1(w) (\Omega_2(w) \cos \theta - 2\sqrt{2nw} \sin^2 \theta) dw}{\Omega_3(w) \left(\Omega_1^2(w) + \frac{\Gamma_n^2}{\hbar^2 \omega^2} \left(1 + 4n \frac{\mu_B B}{m_e c^2} + \left(w + \frac{\hbar \omega}{m_e c^2} \cos \theta \right)^2 \right) \right)}, \quad (41)$$

$$Q_n = \frac{\hbar \omega}{m_e c^2} \sin^2 \theta - 4n \frac{\mu_B B}{\hbar \omega}, \quad \Omega_1(w) = \tilde{\Omega}_1^{(+)}(w) + \frac{\Gamma_n^2}{4\hbar \omega m_e c^2}, \quad \tilde{\Omega}_1^{(\pm)}(w) = Q_n \pm \Omega_2(w),$$

$$\Omega_2(w) = 2\left(\sqrt{1+w^2} - w \cos \theta\right), \quad \Omega_3(w) = \sqrt{1+w^2} + \frac{\hbar \omega}{m_e c^2}. \quad (42)$$

Выражения для элементов s -процесса представим в виде (43), выделяя часть $S_n^{(0)}$, найденную в [5, с. 33, 34]:

$$S_n = \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{(-\Omega_2(w) \cos \theta + 2\sqrt{2nw} \sin^2 \theta) dw}{\tilde{\Omega}_1^{(-)}(w) \Omega_3(w)} = S_n^{(0)} \cos \theta + \frac{2\sqrt{2n}}{\cos \theta} \Delta S_n,$$

$$\Delta S_n = -\frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2\hbar \omega}{m_e c^2} \right) I_n \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \tilde{I}_{1n} \sin^2 \theta + \tilde{I}_{2n}. \quad (43)$$

Интеграл I_n был вычислен в [5, с. 33, 34]. Для вычисления остальных интегралов введем следующие обозначения ($\tilde{\theta}(\xi)$ – функция Хевисайда):

$$y_1 = \frac{w_1 + \sqrt{1+w_1^2} - 1}{w_1 + \sqrt{1+w_1^2} + 1}, \quad p_n = -\frac{4 \cos \theta}{Q_n + 2}, \quad q_n = \frac{2 - Q_n}{2 + Q_n}, \quad \mu_n = 4q_n - p_n^2, \quad Y_n =$$

$$= \left(\left(\arctg \left(\frac{p_n + 2y_1}{\sqrt{|\mu_n|}} \right) - \arctg \left(\frac{p_n - 2y_1}{\sqrt{|\mu_n|}} \right) \right) \tilde{\theta}(\mu_n) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2y_1 - \sqrt{|\mu_n|})^2 - p_n^2}{(2y_1 + \sqrt{|\mu_n|})^2 - p_n^2} \right| \tilde{\theta}(-\mu_n) \right),$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_e c^2 + \hbar \omega}{m_e c^2 - \hbar \omega}}, \quad v_n = p_n^2 - 4y_1^2. \quad (44)$$

Интегралы \tilde{I}_{1n} и \tilde{I}_{2n} имеют вид:

$$\tilde{I}_{1n} = \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{m_e c^2 dw}{m_e c^2 \sqrt{1+w^2} + \hbar \omega} = 2 \operatorname{arsh}(w_1) - \frac{4\hbar \omega}{\sqrt{m_e^2 c^4 - \hbar^2 \omega^2}} \arctg \left(\frac{y_1}{\lambda} \right),$$

$$\tilde{I}_{2n} = \sin^2 \theta \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{dw}{Q_n - \Omega_2(w)}. \quad (45)$$

Интеграл \tilde{I}_{2n} берется по-разному в зависимости от значения Q_n :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n} &= -\frac{1+\cos^2\theta}{2\cos\theta} \ln \left| \frac{1-y_1\cos\theta}{1+y_1\cos\theta} \right| - \ln \left| \frac{1+y_1}{1-y_1} \right|, Q_n = -2; \\ \tilde{I}_{2n} &= \frac{2}{Q_n+2} (\tilde{I}_{2n}^{(1)} \sin^2\theta - 2\tilde{I}_{2n}^{(2)}), \tilde{I}_{2n}^{(2)} = \int_{-y_1}^{+y_1} \frac{\sin^2\theta dy}{(1-y^2)(y^2+p_n y+q_n)} = \\ &= \frac{Q_n+2}{4} \ln \left| \frac{1+y_1}{1-y_1} \right| + \left(\frac{Q_n-2}{4} + \sin^2\theta \right) \tilde{I}_{2n}^{(1)} + \frac{(Q_n+2)\cos\theta}{4} \tilde{I}_{2n}^{(3)}, y = th\left(\frac{t}{2}\right), t = arsh w, \\ \tilde{I}_{2n}^{(1)} &= \int_{-y_1}^{+y_1} \frac{dy}{y^2+p_n y+q_n}, \tilde{I}_{2n}^{(3)} = \int_{-y_1}^{+y_1} \frac{y dy}{y^2+p_n y+q_n}, Q_n \neq 2. \end{aligned} \quad (46)$$

При этом интегралы $\tilde{I}_{2n}^{(1)}, \tilde{I}_{2n}^{(3)}$ в (46) берутся по-разному в зависимости от μ_n :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2n}^{(3)} &= -\frac{4p_n y_1}{v_n} + \ln \left| \frac{p_n+2y_1}{p_n-2y_1} \right|, \mu_n = 0; \tilde{I}_{2n}^{(3)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y_1^2+p_n y_1+q_n}{y_1^2-p_n y_1+q_n} \right| - \frac{p_n}{\sqrt{|\mu_n|}} Y_n, \mu_n \neq 0; \\ \tilde{I}_{2n}^{(1)} &= \frac{8y_1}{v_n}, \mu_n = 0; \tilde{I}_{2n}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{|\mu_n|}} Y_n, \mu_n \neq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Представленные численные результаты дополняют результаты из [5, с. 32].

Таблица 4 – Величина угла поворота при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $p_z = 0$

$B, 10^{13} \text{ Гс}$		1-й пик		$d\varphi/dx = 0$	2-й пик	
		$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$d\varphi/dx, \text{ рад/см}$	$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$d\varphi/dx, \text{ рад/см}$
1	$\beta = 45^\circ$	0,10972	-490,4	0,109863	0,110003	488,4
	$\beta = 60^\circ$	0,10718	-342,1	0,107316	0,107449	340,54
4	$\beta = 45^\circ$	0,3864	-13,36	0,38905	0,39161	12,75
	$\beta = 60^\circ$	0,3629	-9,50	0,36522	0,36746	9,00

Заключение. Основные результаты

Рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Рассмотрены конечные значения спиновой поляризации нуклонов. В отличие от более ранних исследований, учтена энергия магнитного поля, возникающего вследствие спиновой поляризации нуклонов. Найдены значения спиновой поляризации при различных температурах и концентрациях нуклонов, а также соответствующие значения индукции магнитных полей. Сделано уточнение выражения для угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов в магнитном поле в поляризованной по спину среде.

Часть идей, лежащих в основе данной работы, принадлежат В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2012. – № 1. – С. 30–37.
2. Серый, А.И. К вопросу о магнитных полях белых карликов и Сверхновых II типа / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2013. – № 1. – С. 50–58.
3. Серый, А.И. О поправках к критерию Стонера для ядерной материи / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2013. – № 2. – С. 48–60.
4. Серый, А.И. О комптоновском вращении при движении фотонов под произвольным углом к линиям индукции магнитного поля / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 2. – С. 43–48.
5. Серый, А.И. О комптоновском вращении в магнитном поле с учетом ширины резонанса / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2012. – № 2. – С. 30–36.
6. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол. : Д.М. Алексеев [и др]. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – Т. 1. Ааронова–Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.
7. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов. – М. : Физматлит, 2003. – 392 с.
8. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол. : Д.М. Алексеев [и др]. – М. : Сов. энциклопедия, 1994. – Т. 4. Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. 704 с.
9. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3. Электричество. – 688 с.
10. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц / Статистическая физика : в 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – 3-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. IX – 496 с.
11. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.
12. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.

A.I. Sery On Some Polarizational Effects in Astrophysical Plasma

We consider the question of ferromagnetism of electron-nucleon matter in degenerate and non-degenerate state regarding inter-nucleon nuclear (in contact approximation), as well as proton exchange and correlation Coulomb energy. Finite values of spin polarization of nucleons are considered regarding the energy of magnetic field. Refinement is made for the expression for Compton rotation angle of the plane of polarization of photons in magnetic field in spin polarized medium.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.03.14

УДК 517.977

Д.А. Будько

ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОБЛАСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА ЛАГРАНЖА ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

Рассматривается ограниченная круговая задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Обсуждаются вопросы устойчивости решений задачи типа положений равновесия, располагающихся в области треугольника Лагранжа. Предлагается простое доказательство неустойчивости таких решений для любых значений параметров на основе символьных преобразований, которое не использует численных расчётов. Проводится анализ квадратичной части функции Гамильтона, выводится необходимое и достаточное условие устойчивости положений равновесия в первом приближении в виде системы неравенств, и показывается, что в области треугольника Лагранжа одно из неравенств системы не выполняется. Таким образом, на основе теоремы Ляпунова делается вывод о неустойчивости положений равновесия, располагающихся в области треугольника Лагранжа. Приведенное доказательство является простым, полностью основано на символьных вычислениях и позволяет исследовать решения на устойчивость при любых значениях параметров задачи, ограничившись рассмотрением лишь первого приближения.

Введение

Задача n -тел заключается в изучении n материальных точек, движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимного притяжения, определяемых вторым законом Ньютона. Поэтому в общем случае модель задачи n -тел представляет собой систему $3n$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Ещё в конце XIX века Пуанкаре, Пенлеве, Брунсом и др. было доказано [1], что такие системы не могут быть проинтегрированы в конечном виде при $n \geq 3$. Поскольку решение задачи двух тел ($n = 2$) имеется, то следующей по сложности является так называемая ограниченная задача трёх тел [2]. В ограниченной задаче трёх тел считается, что два тела движутся согласно известному решению задачи двух тел. Третье тело обладает настолько малой массой, что не влияет на движение двух тел, а само движется под действием гравитации, создаваемой двумя телами. Даже исследование такой упрощённой модели, как ограниченная задача трёх тел, в плоской круговой постановке оказалось чрезвычайно сложным и затянулось более чем на 200 лет. При этом исследована устойчивость по Ляпунову простейших частных решений – стационарных – коллинеарных решений Эйлера и треугольных решений Лагранжа. Напомним [3], что треугольному решению Лагранжа соответствует равномерное движение трёх тел по круговым кеплеровским орбитам, при котором тела образуют равносторонний треугольник в любой момент времени.

Следует отметить, что конфигурации Эйлера и Лагранжа реализуются даже в Солнечной системе. Классическим примером треугольника Лагранжа является конфигурация, образованная Солнцем, Юпитером и одним из астероидов Троянской группы. Поскольку массы астероидов различны, можно выделить наиболее массивный астероид и считать, что именно он вместе с Солнцем и Юпитером образует треугольник Лагранжа. Тогда можно рассмотреть ограниченную задачу четырёх тел, где к перечисленным телам добавим астероид с пренебрежимо малой массой и будем исследовать

его движение в поле тяготения трёх основных тел. Такая постановка задачи является простым и естественным обобщением известной ограниченной задачи трёх тел [4–7].

Рассмотрим ограниченную задачу четырёх тел, сформулированную на основе треугольных решений Лагранжа задачи трёх тел [4–7]. В рамках этой модели три тела P_0, P_1, P_2 , обладающие в общем случае различными массами m_0, m_1, m_2 , движутся согласно известному треугольному решению Лагранжа, а четвертое тело P_3 имеет настолько малую массу, что не влияет на движение основных трёх тел, а само движется в гравитационном поле, создаваемом тремя телами. Исследовать движение четвертого тела P_3 удобно во вращающейся системе координат, с центром в точке P_0 , в которой тела P_0, P_1, P_2 фиксированы на плоскости Oxy в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$. В литературе [1–3] равносторонний треугольник с вершинами P_0, P_1, P_2 принято называть треугольником Лагранжа. Выполняя стандартные вычисления и преобразования, можно показать, что гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{1}{1 + \mu_1 + \mu_2} \left(\mu_1 x + \frac{\mu_2}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_2 y - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2\mu_2}{\sqrt{(2x-1)^2 + (2y-\sqrt{3})^2 + 4z^2}} \right), \quad (1)$$

где p_x, p_y, p_z – импульсы, канонически сопряжённые координатам x, y, z , и массовые параметры задаются формулами

$$\mu_1 = m_1 / m_0, \quad \mu_2 = m_2 / m_0.$$

Зная функцию Гамильтона, несложно выписать уравнения движения тела P_3 и показать, что все положения равновесия лежат в плоскости Oxy ($z = 0$). При этом соответствующие равновесные положения определяются двумя алгебраическими уравнениями, которые могут быть представлены в следующем виде

$$(y - x\sqrt{3}) \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right) - \mu_1 (y + \sqrt{3}(x-1)) \left(\frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right) = 0, \\ 2y \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right) + \mu_2 (y + \sqrt{3}(x-1)) \left(\frac{1}{((x-1/2)^2 + (y-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1 \right) = 0. \quad (2)$$

Каждое из уравнений (2) представляет собой кривую на плоскости Oxy при заданных значениях μ_1, μ_2 . Поэтому каждому решению системы уравнений (2) соответствует точка пересечения двух кривых (рисунок 1).

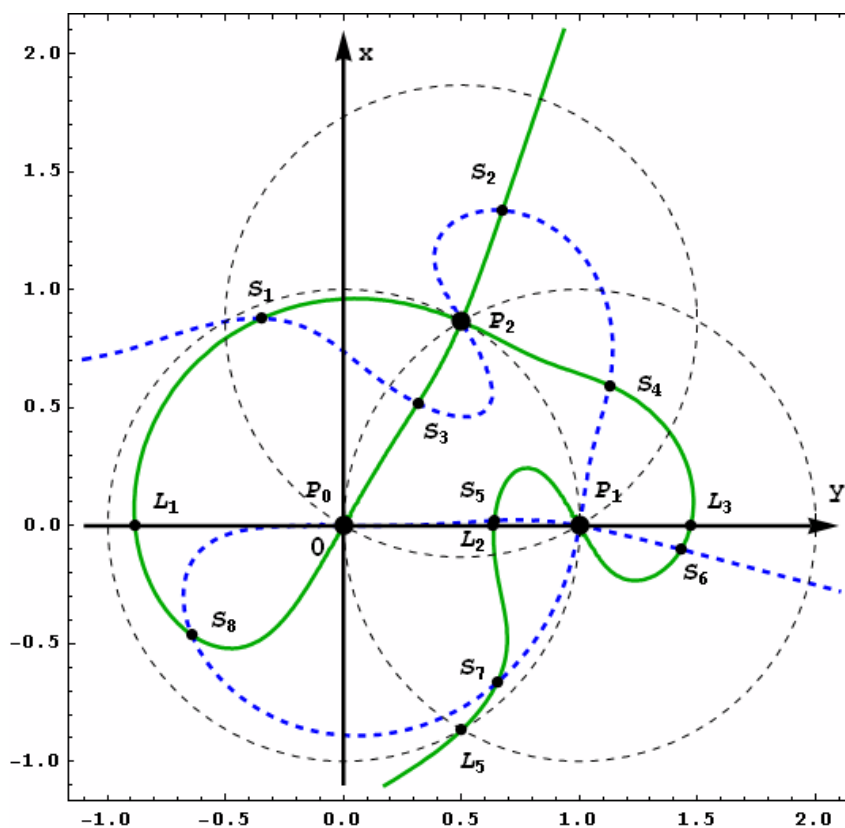


Рисунок 1 – Положения равновесия S_1, S_2, \dots, S_8
при $\mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0.35$.

Отметим, что интерес к этой задаче был вызван ещё в 40-х годах прошлого века, когда в работах П. Педерсена [4] были выполнены первостепенные численные расчёты. Далее исследования по этой задаче проводили К. Симо [8], Р. Аренсторф [9], К. Мейер и Д. Шмидт [10; 11], Р. Мёкель и М. Хэмптон [12], Д. Маранхао и Я. Либрэ [13], Е. Леандро [14] и другие математики. При этом основное внимание в этих работах уделялось проблеме существования и поиска равновесных решений, определения условий выпуклости центральных конфигураций в этой задаче. Проблеме устойчивости равновесных решений посвящено небольшое количество работ, и рассмотрены только частные случаи ограниченной задачи четырёх тел, обладающих симметрией. Целостный анализ устойчивости по Ляпунову равновесных решений в строгой нелинейной постановке был проведён в [5]. Следует отметить, что доказательство устойчивости или неустойчивости равновесных решений в этих работах сопровождалось громоздкими символическими преобразованиями, численными расчётами и применением аппарата КАМ-теории (теория условно-периодических решений на многомерных торах).

В этой работе мы докажем неустойчивость некоторых равновесных решений без использования теорем КАМ-теории, ограничившись рассмотрением лишь квадратичной части разложения гамильтониана системы. А именно – будет показана неустойчивость равновесных решений, находящихся внутри треугольника Лагранжа, вершинами которого являются тела P_0, P_1, P_2 . При этом математики [4–14] сходятся во мнении,

что рассматриваемая ограниченная задача четырёх тел может иметь 8, 9 или 10 равновесных решений в зависимости от значений параметров μ_1, μ_2 . Соответственно, в области треугольника Лагранжа может располагаться 2, 3 или 4 равновесных решения (рисунок 1).

Вопросам разработки символьно-численных алгоритмов для нахождения решений и проблеме бифуркации системы посвящены работы [6; 15; 16]. Случай, когда на четвертое тело действуют не только плоские возмущения, но и возмущения, выводящие его из орбитальной плоскости тел (пространственная формулировка), описан в работах [17–19].

Анализ квадратичной части H_2 разложения гамильтониана

В окрестности равновесного решения (x_0, y_0) функция Гамильтона (1) может быть представлена в виде

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \dots \quad (3)$$

Первый член H_0 разложения функции Гамильтона по возмущениям является постоянной, которая не влияет на уравнения движения, и может быть отброшен. Член H_1 обнуляется в силу уравнений, определяющих равновесные решения. Поэтому первый отличный от нуля член в разложении (3) является квадратичным и имеет вид

$$H_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - p_y x + p_x y + h_{20} x^2 + h_{11} x y + h_{02} y^2, \quad (4)$$

где коэффициенты h_{20}, h_{11}, h_{02} определяются по формулам:

$$\begin{aligned} h_{20} = & \frac{-1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\ & \left. + \mu_1 \frac{2(x_0 - 1)^2 - y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{2(x_0 - 1/2)^2 - (y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right), \\ h_{11} = & \frac{-3}{(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\ & \left. + \mu_1 \frac{(x_0 - 1)y_0}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0 - 1/2)(y_0 - \sqrt{3}/2)}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right), \\ h_{02} = & \frac{1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\ & \left. + \mu_1 \frac{(x_0 - 1)^2 - 2y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0 - 1/2)^2 - 2(y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Несложно выписать линеаризованные уравнения возмущенного движения (с функцией H_2), которые представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(1 + h_{20} + h_{02}) + 1 - 2h_{20} - h_{11}^2 - 2h_{02} + 4h_{20}h_{02} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются характеристические показатели

$$\lambda_{1,3} = \pm i\sigma_1, \quad \lambda_{2,4} = \pm i\sigma_2,$$

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{1 + h_{20} + h_{02} \pm \sqrt{4h_{20} + h_{20}^2 + h_{11}^2 + 4h_{02} - 2h_{20}h_{02} + h_{02}^2}}.$$

Поскольку равновесные решения гамильтоновой системы могут быть устойчивыми только, если характеристические показатели являются различными чисто мнимыми числами, то необходимое и достаточное условие устойчивости в первом приближении эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 2h_{20} - h_{11}^2 - 2h_{02} + 4h_{20}h_{02} > 0 \\ 1 + h_{20} + h_{02} > 0 \\ 4h_{20} + h_{20}^2 + h_{11}^2 + 4h_{02} - 2h_{20}h_{02} + h_{02}^2 > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема о неустойчивости равновесных решений

Докажем теорему о неустойчивости по Ляпунову всех равновесных решений, располагающихся в области треугольника Лагранжа, то есть в области, ограниченной неравенствами

$$0 < y < x\sqrt{3}, \quad y < \sqrt{3}(1 - x). \quad (7)$$

Для этого покажем, что второе неравенство из (6) не выполняется в области (7), то есть имеет место

$$1 + h_{20} + h_{02} < 0. \quad (8)$$

Подставим выражения для h_{20} , h_{02} (4) в неравенство (8)

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{-1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\ & \left. + \mu_1 \frac{2(x_0 - 1)^2 - y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{2(x_0 - 1/2)^2 - (y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \mu_1 \frac{(x_0 - 1)^2 - 2y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0 - 1/2)^2 - 2(y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \Big) < 0.$$

Упрощая (9), получим

$$\frac{1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} + \frac{\mu_1}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{3/2}} + \frac{\mu_2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} \right) > 1,$$

и далее запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} - 1 + \frac{\mu_1}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{3/2}} - \mu_1 + \\ & + \frac{\mu_2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - \mu_2 > 1 + \mu_1 + \mu_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (2) линейны относительно μ_1, μ_2 , поэтому коэффициенты для параметров μ_1, μ_2 , выраженные через x, y , имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_1 &= - \frac{(\sqrt{3}x - y) \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right)}{(\sqrt{3}(x - 1) + y) \left(\frac{1}{((x - 1)^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right)}, \\ \mu_2 &= - \frac{2y \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1 \right)}{(\sqrt{3}(x - 1) + y) \left(\frac{1}{((x - 1/2)^2 + (y - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1 \right)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя выражения (11) только в левую часть неравенства (10), после некоторых преобразований получим

$$\frac{\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right)}{\sqrt{3}(x_0 - 1) + y_0} > 1 + \mu_1 + \mu_2. \tag{12}$$

Известно [2], что параметры μ_1, μ_2 должны быть достаточно малыми, чтобы треугольная конфигурация Лагранжа была устойчива в первом приближении, а именно

$$0 < \mu_{1,2} < \frac{2}{25 + 3\sqrt{69}} \approx 0.0400642 \tag{13}$$

Далее, учитывая, что $\sqrt{3} > 1 + \mu_1 + \mu_2$, потому как параметры μ_1, μ_2 малы (13), усилим неравенство (12), поделив левую часть на $\sqrt{3}$, а правую – на $1 + \mu_1 + \mu_2$. Получим

$$\frac{1 - \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}}}{\sqrt{3}(x_0 - 1) + y_0} > 1. \quad (14)$$

Решая систему неравенств, состоящую из (7) и (14), получим (7). Таким образом, используя теорему Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [20], делаем вывод о неустойчивости решений, находящихся в области треугольника Лагранжа.

Теорема. Все равновесные решения (x_0, y_0) , принадлежащие области треугольника Лагранжа (7), являются неустойчивыми по Ляпунову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейской комиссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре, А. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре // Избр. тр.: в 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.; М.: Наука, 1972. – Т. 2. – С. 3–452.
2. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей – М.: Наука, 1982. – 656 с.
3. Lagrange, J.L. Essais sur le probleme de trois corps / J.L. Lagrange // Oeuvres complètes. – Paris: Gauthier – Villars, 1876. – Vol. 6. – P. 162–178.
4. Pedersen, P. Librationspunkte im restringierten Vierkorperproblem / P. Pedersen // Danske vid. Selsk. Math.-Fys. – 1944. – Vol. 21, №6. – P. 1–80.
5. Budzko, D.A. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // Lecture Notes in Computer Science. – Berlin, Heidelberg, 2011. – Vol. 6885: Computer Algebra in Scientific Computing 2011. – P. 88–100.
6. Budzko, D.A. Symbolic-Numerical Analysis of Equilibrium Solutions in a Restricted Four-Body Problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // Programming and Computer Software. – 2010. – Vol. 36, N2. – P. 68–74.
7. Budzko, D.A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of restricted planar four-body problem // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 5th International Workshop CASTR'2009, Siedlce, Poland, 28–31 Jan. 2009 / University of Podlasie; Eds.: L. Gadowski [and others]. – Siedlce, 2009. – P. 28–36.
8. Sim, C. Relative equilibrium solutions in the four body problem / C. Sim // Celest. Mech. – 1978. – Vol. 18, №2. – P. 165–184.
9. Arenstorf, R.F. Central configurations of four bodies with one inferior mass / R.F. Arenstorf // Celest. Mech. – 1982. – Vol. 28. – P. 9–15.
10. Meyer, K. Bifurcation of a central configuration / K. Meyer // Celest. Mech. – 1987. – Vol. 40, №3–4. – P. 273–282.
11. Meyer, K. Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem / K. Meyer, D. Schmidt // Ergodic Theory Dyn. Syst. – 1988. – Vol. 8. – P. 215–225.
12. Hampton, M. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem / M. Hampton, R. Moeckel // Invent. Math. – 2006. – Vol. 163, №2. – P. 289–312.

13. Maranhao, D. Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem / D. Maranhao, J. Llibre // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1999. – Vol. 71, №1. – P. 1–14.
14. Leandro, E.S.G. On the central configurations of the planar restricted four-body problem / E.S.G. Leandro // *Journal of Differential Equations*. – 2006. – Vol. 226, №1. – P. 323–351.
15. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Symbolic-Numeric Methods for Equilibrium Positions Search in the Restricted Four-Body Problem // *Programming and Computer Software*. – 2013. – № 2. – P. 30–37.
16. Budzko, D.A., Scherba, S.A. Symbolic-numeric analysis of restricted five-body problem using computer algebra // *Programming and Computer Software*. – 2014. – № 3. – P. 133–142.
17. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Equilibrium Positions and Stability in the Spatial Circular Restricted Four-Body Problem // *Classical and Celestial Mechanics: Selected Papers*. – Siedlce, 2012. – P. 7–19.
18. Будько, Д.А. Положения относительного равновесия и анализ их устойчивости в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня // *Вестник Брестского университета. Серия 4*. – 2012. – №2. – С. 42–51.
19. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Stability of Equilibrium Positions in the Spatial Circular Restricted Four-Body Problem // *Lecture Notes in Computer Science*. – Berlin, Heidelberg, 2012. – Vol. 7442 : *Computer Algebra in Scientific Computing 2012*. – P. 72–83.
20. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов; под ред. Г. Мюнтц. – Череповец : Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.

D.A. Budzko Theorem On the Instability of Equilibrium Positions in the Domain of Lagrange's Triangle of Restricted Four-Body Problem

The restricted circular four-body problem, formulated on the basis of triangular Lagrange's solutions, is considered. Problems on stability of equilibrium positions that are situated in the domain of Lagrange's triangle are discussed. We propose simple proof about instability of such solutions under any values of parameters using only symbolic transformations. Quadratic part of Hamiltonian function is analyzed and necessary and sufficient condition of stability of solutions is obtained in the form of system of inequalities. Then it is shown that one of the inequalities is not fulfilled in the domain of Lagrange's triangle. Finally using Lyapunov theorem we conclude about instability of equilibrium positions.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.03.14

УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗНЫХ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ВРАЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

В работе исследуются связные подгруппы Ли группы Ли вращений пространства Минковского. Находятся инвариантные плоскости и прямые для таких групп Ли и их образы стационарности.

Инвариантные объекты играют важную роль для характеристики исследуемой группы движений. Целью данной работы является нахождение инвариантных подпространств подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского и их образов стационарности.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1, т. е. пространство 1R_4 – пространство Минковского. Пусть G – группа Ли движений пространства Минковского, H – группа Ли вращений пространства Минковского, \overline{G} – алгебра Ли группы Ли G , \overline{H} – алгебра Ли группы Ли H . Рассмотрим в пространстве 1R_4 базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\overline{e}_1^2 = -1$, $\overline{e}_2^2 = \overline{e}_3^2 = \overline{e}_4^2 = 1$, $(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0, i \neq j$. Базис i_1, i_2, \dots, i_{10} в алгебре Ли \overline{G} зададим следующим образом:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52},$$

$$i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке β -м столбце стоит единица, а остальные элементы нули.

Для векторов пространства \overline{H} определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором.

Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли \overline{G}_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot a$, где c – любое из \overline{G}_i . В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса \overline{G}_i .

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b, b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b. \quad (1)$$

Будем рассматривать алгебру Ли \overline{H} . Элементы базиса этой алгебры будем зада-

вать в виде:

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данной работе находятся инвариантные одномерные и двумерные подпространства для групп Ли $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}$ и G_{13} , соответствующих алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}$ и \overline{G}_{13} , задаваемых соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Рассмотрим группу G_1 . Найдем одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$a \cdot i_9 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, -a_4, 0, a_2) = \mu \cdot a. \quad (2)$$

$$\text{Отсюда следует система: } \begin{cases} \mu \cdot a_1 = 0, \\ \mu \cdot a_2 = -a_4, \\ \mu \cdot a_3 = 0, \\ \mu \cdot a_4 = a_2. \end{cases}$$

Решив данную систему можно сделать вывод, что при $\mu = 0$ инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1 + e_3\}$; при $\mu \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_9 = v \cdot a + \sigma \cdot b, \\ b \cdot i_9 = p \cdot a + q \cdot b. \end{cases} \quad (3)$$

Систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} v \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1 = 0, v \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2 = -a_4, v \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3 = 0, v \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = a_2, \\ p \cdot a_1 + q \cdot b_1 = 0, p \cdot a_2 + q \cdot b_2 = -b_4, p \cdot a_3 + q \cdot b_3 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = b_2. \end{cases} \quad (4)$$

Достаточно рассмотреть 6 случаев:

- 1⁰. $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1;$
- 2⁰. $a_1 = 1, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1;$
- 3⁰. $a_1 = 1, a_4 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 1;$
- 4⁰. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1;$
- 5⁰. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_4 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 1;$
- 6⁰. $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 1; .$

Рассмотрим случай 1⁰. Получаем систему:

$$\begin{cases} v \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, v \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = -a_4, v \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3 = 0, v \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = 0, \\ p \cdot 1 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 0 + q \cdot 1 = -b_4, p \cdot a_3 + q \cdot b_3 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} v = 0, \sigma = -a_4, v \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3 = 0, v \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = 0, \\ p = 0, q = -b_4, p \cdot a_3 + q \cdot b_3 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Подставив уравнение $q = -b_4$ в уравнение $q \cdot b_4 = 1$, можно заметить, что в случае 1^0 система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1 = \{i_9\}$ в случае 1^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 2^0 . Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot 0 = -a_4, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = 0, \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = a_2, \\ p \cdot 1 + q \cdot 0 = 0, p \cdot a_2 + q \cdot 0 = -b_4, p \cdot 0 + q \cdot 1 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu = 0, \sigma = 0, a_4 = 0, a_2 = 0, \\ p = 0, q = 0, -b_4 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из решения системы следует, что вектор a имеет вид $a(1,0,0,0)$, а вектор $b(0,0,1,0)$. Таким образом, инвариантное пространство имеет вид $\{e_1, e_3\}$.

Рассмотрим случай 3^0 . Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = a_2, \\ p \cdot 1 + q \cdot 0 = 0, p \cdot a_2 + q \cdot 0 = -1, p \cdot a_3 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 0 + q \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu = 0, \sigma = a_2, \\ p = 0, p \cdot a_2 = -1, q = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из предпоследнего уравнения системы видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1 = \{i_9\}$ в случае 3^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 4^0 . Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = -a_4, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = 0, \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = 1, \\ p \cdot 1 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 1 + q \cdot 0 = -b_4, p \cdot 0 + q \cdot 1 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu = -a_4, \sigma = 0, \nu \cdot a_4 = 1, \\ p = -b_4, q = 0, p \cdot a_4 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Подставив первое уравнение системы в третье, получим $\nu^2 = -1$. Из данного уравнения видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1 = \{i_9\}$ в случае 4^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Рассмотрим случай 5^0 . Получаем систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = 1, \\ p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 1 + q \cdot 0 = -1, p \cdot a_3 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 0 + q \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \nu = 0, \nu \cdot a_3 = 0, \sigma = 1, \\ p = -1, q = 0, p \cdot a_3 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из решения системы следует, что $a_3 = 0$, а, следовательно, вектор a имеет вид $a(0,1,0,0)$, а вектор $b(0,0,0,1)$. Таким образом, инвариантное пространство имеет вид $\{e_2, e_4\}$.

Рассмотрим случай 6^0 . Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = 0, \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 = 0, \\ p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0, p \cdot 0 + q \cdot 0 = -1. \end{cases} \quad (15)$$

Из последнего уравнения системы видно, что система инвариантности противоречива. Следовательно, можно сделать вывод, что относительно $G_1 = \{i_9\}$ в случае 6^0 нет инвариантных двумерных пространств.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{pe_1 + qe_3\}$; и следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 инвариантны такие одномерные пространства, как: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{pe_2 + qe_4\}$, и только следующие двухмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2 + \lambda e_4\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_1 + e_3, e_2\}$, $\{e_1 + e_3, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$, $\{pe_2 + qe_4, e_1, e_3\}$.

Теорема 3. Относительно группы G_3 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Рассмотрим группу G_5 . Найдем одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_6 = \lambda \cdot a, \\ a \cdot i_9 = \mu \cdot a. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае данная система приводится к виду:

$$a_3 = \lambda a_1, a_1 = \lambda a_3, \lambda a_2 = 0, \lambda a_4 = 0, \mu a_1 = 0, \mu a_3 = 0, a_2 = -\mu^2 a_2, a_4 = \mu^2 a_4 \quad (17)$$

Решив данную систему, можно сделать вывод, что при $\lambda = 0$ и $\mu = 0$ решений нет; при $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$ решений нет; при $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1 + e_3\}$; при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_6 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b, \\ a \cdot i_9 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b, \\ b \cdot i_6 = s \cdot a + t \cdot b, \\ b \cdot i_9 = p \cdot a + q \cdot b. \end{cases} \quad (18)$$

Перепишем данную систему в виде:

$$\begin{cases} \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1 = a_3, \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2 = 0, \lambda \cdot a_3 + \mu \cdot b_3 = a_1, \lambda \cdot a_4 + \mu \cdot b_4 = 0, \\ \nu \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1 = 0, \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2 = -a_4, \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3 = 0, \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4 = a_2, \\ s \cdot a_1 + t \cdot b_1 = b_3, s \cdot a_2 + t \cdot b_2 = 0, s \cdot a_3 + t \cdot b_3 = b_1, s \cdot a_4 + t \cdot b_4 = 0, \\ p \cdot a_1 + q \cdot b_1 = 0, p \cdot a_2 + q \cdot b_2 = -b_4, p \cdot a_3 + q \cdot b_3 = 0, p \cdot a_4 + q \cdot b_4 = b_2. \end{cases} \quad (19)$$

Рассматриваем 6 случаев. В случае 1^0 система инвариантности примет вид:

$$\mu = 0, a_3^2 = 1, a_3 a_4 = 0, -a_4 b_3 = 0, -a_4 b_4 = 1, -b_4^2 = 1. \quad (20)$$

Из последнего уравнения системы видно, что в случае 1^0 система инвариантности противоречива.

В случае 2^0 система инвариантности примет вид:

$$\lambda = 0, \mu = 1, b_4 = 0, s = 1, t = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, v = 0, \sigma = 0, p = 0, q = 0. \quad (21)$$

Из решения системы следует, что вектор a имеет вид $a(1,0,0,0)$, а вектор $b(0,0,1,0)$. Таким образом, получаем инвариантное подпространство в виде $\{e_1, e_3\}$.

В случаях 3^0 и 4^0 системы инвариантности противоречивы.

В случае 5^0 из системы инвариантности следует:

$$\lambda = 0, \mu = 0, s = 0, t = 0, a_3 = 0, v = 0, \sigma = 1, p = -1, q = 0. \quad (22)$$

Следовательно, вектор a имеет вид $a(0,1,0,0)$, а вектор $b(0,0,0,1)$. Таким образом, получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_2, e_4\}$.

В случае 6^0 система инвариантности противоречива. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 5. Относительно группы G_5 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Рассмотрим группу G_6 , соответствующую алгебре Ли $\overline{G_6}$, задаваемой базисом $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$. Введем обозначения:

$$A = \{i_5 - i_8\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$B = \{i_7 + i_{10}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Рассмотрим одномерные инвариантные подпространства. Система инвариантности имеет вид:

$$a \cdot A = \lambda \cdot a, a \cdot B = \mu \cdot a. \quad (25)$$

В этом случае данная система приводится к виду:

$$\lambda a_1 = a_2, \lambda a_2 = a_1 + a_3, \lambda a_3 = -a_2, \lambda a_4 = 0, \mu a_1 = a_4, \mu a_2 = 0, \mu a_3 = -a_4, \mu a_4 = a_1 + a_3.$$

Решив эту систему, получаем, что инвариантное подпространство имеет вид: $\{e_1 - e_3\}$.

Если рассмотрим двумерные инвариантные подпространства, то система инвариантности имеет вид:

$$aA = \lambda a + \mu b, aB = \nu a + \sigma b, bA = sa + tb, bB = pa + qb. \quad (26)$$

Аналогично рассматривая 6 случаев, получаем теорему.

Теорема 6. Относительно группы G_6 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 7. Относительно группы G_7 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 8. Относительно группы G_8 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4\}$, $\{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 9. Относительно группы G_9 инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 10. Относительно группы G_{10} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 11. Относительно группы G_{11} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$.

Теорема 12. Относительно группы G_{12} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_4\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 13. Относительно группы G_{13} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}$, $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Инвариантные прямые и плоскости

Рассмотрим группу G_1 . Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{pe_1 + qe_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$ и $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_1 и 3-плоскость $[0, \overline{a_3e_1 + a_1e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_2 инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}]$ и $[0, \overline{pe_2 + qe_4}]$, а также инвариантны 2-плоскости: $[0, \overline{e_1 + e_3}, \overline{e_2}]$, $[0, \overline{e_1 + e_3}, \overline{e_4}]$, $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантны относительно группы G_2 и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_3 . Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1 - e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_2}]$, $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_3 и 3-плоскость $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_4 . Относительно нее инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно данной группы и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_5 инвариантны только следующие прямые: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1}, \overline{e_3}]$, $[0, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$. Инвариантна относительно данной группы и 3-плоскости: $[0, \overline{e_1 \pm e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Относительно группы G_6 инвариантны только прямые: $[0, \overline{e_1 - e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_2}]$, $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_4}]$, $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_2 + \lambda e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_6 и 3-плоскость $[0, \overline{e_1 - e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_4}]$.

Рассмотрим группу G_7 . Относительно нее инвариантны только прямые $[0, \overline{e_1 - e_3}]$ и $[0, \overline{e_4}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2}]$ и $[0, \overline{e_1 - e_3, e_4}]$. Инвариантны относительно группы G_7 и 3-плоскости $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2, e_4}]$ и $[0, \overline{e_1, e_2, e_3}]$.

Рассмотрим группу G_8 . Относительно нее инвариантны только прямые $[0, \overline{e_1 - e_3}]$, а также 2-плоскости: $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2}]$, $[0, \overline{e_1 - e_3, e_4}]$, $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4}]$. Инвариантна относительно группы G_8 и 3-плоскость $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2, e_4}]$.

Относительно групп G_9 , G_{10} и G_{13} инвариантна прямая $[0, \overline{e_1 - e_3}]$ и 3-плоскость $[0, \overline{e_1 - e_3, e_2, e_4}]$.

Относительно группы G_{11} инвариантна прямая $[0, \overline{e_1}]$ и 3-плоскость $[0, \overline{e_2, e_3, e_4}]$.

Относительно группы G_{12} инвариантна прямая $[0, \overline{e_4}]$ и 3-плоскость $[0, \overline{e_1, e_2, e_3}]$.

Образы стационарности групп Ли

Рассмотрим группу $G_1 = \{i_9\}$, где

$$i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольный элемент из алгебры вращений $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix}$.

Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{pe_1 + qe_3\}$; и следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$.

Зафиксируем $\overline{e_1}$. Рассмотрим вектор $(1,0,0,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(1,0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (0, \alpha, \beta, \gamma) = \lambda \cdot \overline{e_1} = (\lambda, 0, 0, 0).$$

Из этого следует, что $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

Зафиксируем $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор $(0,0,1,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (\beta, -\delta, 0, \omega) = \mu \cdot \overline{e_3} = (0, 0, \mu, 0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \delta = 0, \omega = 0$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 14. Среди подгрупп Ли $G_1 - G_{13}$ образы стационарности имеют только следующие подгруппы Ли: $G_1, G_2, G_3, G_5, G_6, G_8, G_9, G_{11}, G_{12}$ и G_{13} . Образы стационарности этих подгрупп Ли задаются соответственно в виде:

- 1) для G_1 образ стационарности – $\{R_0, {}^0R_2\}$;
- 2) для G_2 образ стационарности – $\{R_0, {}^0R_2\}$;
- 3) для G_3 образ стационарности – $\{R_0, {}^0R_2^1\}$;
- 4) для G_5 образ стационарности – $\{R_0, {}^1R_2\}$;
- 5) для G_6 образ стационарности – $\{R_0, {}^0R_1^1, {}^0R_2^1\}$;
- 6) для G_8 образ стационарности – $\{R_0, {}^1R_1^1, {}^1R_2^1\}$;
- 7) для G_9 образ стационарности – $\{R_0, {}^0R_1^1\}$;
- 8) для G_{11} образ стационарности – $\{R_0, {}^1R_1\}$;
- 9) для G_{12} образ стационарности – $\{R_0, R_1\}$;
- 10) для G_{13} образ стационарности – $\{R_0, R_1^1\}$;

где 0 сверху обозначает точечную неподвижность соответствующей k -плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Прямая эквивалентность подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства 2R_4 / А. А. Юдов // Деп. ВИНТИ. – Минск, 1989. – № 1498-В89.
2. Юдов, А.А. О редуктивности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 1R_4 / А.А. Юдов, О.В. Пинчук // Вестник БрГУ. – 2011. – № 1. – С. 123–128.
3. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 2R_4 / А.А.Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.

E.V. Zubej, A.A. Yudov Geometric Characteristics Connected Subgroup of a Lie Group of Rotations of Minkowski

This paper investigates the connected subgroup of a Lie group of rotations of Minkowski space. Are invariant planes and lines for such Lie groups and their images are stationary.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.04.14

УДК 517.925

И.Г. Кожух**СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ**

Дается определение динамической системы с ограниченными решениями, исследуется поведение траекторий одной ограниченной системы Льенара и ограниченной квадратичной системы с инвариантной прямой. Доказаны теоремы о возможных состояниях равновесия рассматриваемой системы, а также об условиях существования предельных циклов, их кратности и расположения на фазовой плоскости.

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ – аналитические функции, определенные в некоторой области действительной плоскости R^2 .

Будем называть систему (1) ограниченной, если все ее траектории при $t > 0$ являются ограниченными. Множество таких систем включает в себя в качестве правильного подмножества диссипативные системы, т.е. такие системы, единственными стационарными состояниями которых могут быть состояния покоя и для которых выполняется условие $\Phi \dot{q} \leq 0$, где Φ есть линейная функция скорости $\Phi = -b\dot{q}$. Отметим также, что периодическое движение в диссипативных системах невозможно, т.к. энергия при движении системы всегда убывает.

Из ограниченности системы следует, в отдельных случаях, существование предельного цикла, например, для уравнения Ван-дер-Поля и Релея [1], или его единственность [5]. В ряде случаев существенной является и ограниченность системы в некоторой конечной области, в частности, при выяснении характера резонансного движения спутников планет.

В настоящей статье исследуется поведение траекторий ограниченной системы Льенара и ограниченной квадратичной системы с инвариантной прямой

$$\dot{x} = y - f(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad (2)$$

где $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k x^k$, $g(x) = x + \sum_{k=1}^n g_k x^k$, и f_k, g_k – действительные числа, $f_n \neq 0$.

Очевидно [1], что система (1) будет ограниченной, если для нее бесконечность неустойчива или при больших значениях величины $x^2 + y^2$ все ее траектории замкнуты. Если же на экваторе сферы Пуанкаре у ограниченной системы имеются состояния равновесия, то к ним не могут стремиться полутраектории при $t \rightarrow +\infty$. Например, у таких систем в бесконечности не может быть состояний равновесия с эллиптической областью и т.п.

Лемма 1. Система (2) является ограниченной тогда и только тогда, когда n – нечетное число, $f_n > 0$, а особенности на концах оси Oy не имеют полутраекторий, стремящихся к ним при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Замена $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{u}{z}$, $dt = z^{n-1} d\tau$ приводит к системе

$$\begin{cases} x'_\tau = f_n z + f_{n-1} z^2 + \dots + f_1 z^n - z^n u, \\ u'_\tau = f_n u - g_n + f_{n-1} u z + \dots + f_1 z^{n-1} u - z^{n-1} u^2 - q_{n-1} z - \dots - q_2 z^{n-2} - z^{n-1}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное состояние равновесия в точке $z = 0, u = \frac{q_n}{f_n}$ типа простого узла. Отсутствие траекторий, стремящихся к этой особенности при $t \rightarrow +\infty$, возможно лишь при четном $n - 1$ и $f_n > 0$. При этом учитываем, что ограниченные системы могут обладать узлом в бесконечности только в том случае, если замена $dt = z^{n-1}d\tau$ такова, что число $n - 1$ – четное. Поэтому, как показано в [3], ограниченные квадратичные системы имеют в бесконечности единственное состояние равновесия типа седло-узла. Другая особенность этой системы в бесконечности находится на концах оси ординат. Ее исследованием завершается доказательство леммы.

Отметим также, что при $\sum_{k=2}^n g_k^2 = 0$ для ограниченной системы (2) концы оси Oy являются седлами. В одном частном случае достаточные условия диссипативности для уравнения Лъенара найдены в [4].

Теорема 1. Ограниченная система (2) с простыми состояниями равновесия в конечной части плоскости при $n = 3$ не имеет центров.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что система (2) имеет в конечной части плоскости либо единственное состояние равновесия в точке $O(0,0)$, либо три в точках $O, S\left(\frac{1}{g_3 x_0}, y_2\right)$ и $N(x_0, y_3)$. При доказательстве достаточно рассмотреть для определенности точку $O(0,0)$.

Пусть эта точка является центром. Тогда из равенства нулю двух первых ляпуновских величин следует, что $3f_3 = 2f_2 g_2, f_2 g_2 g_3 = 0$. Если $f_2 = 0$ или $g_2 = 0$, то $f_3 = 0$, а значит, согласно лемме 1 система является неограниченной. Если же $g_3 = 0, g_2 \neq 0$, то в конечной части плоскости эта система имеет два простых состояния равновесия, одно из которых – седло. Согласно теореме Пуанкаре и доказанной выше лемме 1 заключаем, что и в этом случае система (2) является неограниченной. Теорема доказана.

Предельные циклы ограниченной системы (2), если они существуют, при $n = 3$ могут охватывать либо одно из состояний равновесия в точках O или N , либо все три состояния равновесия в точках O, S и N . При $3f_1 f_3 > f_2^2$ предельные циклы и петли сепаратрисы седла отсутствуют согласно критерию Дюлака.

Если система (2) при $n = 3$ имеет в конечной части плоскости единственную особенность в точке O , то у нее существует хотя бы один предельный цикл, например, при $f_1 < 0$. В случае $g_2 = g_3 = 0$ этот цикл – единственный [3]. При $f_1 = 0, g_2^2 + g_3^2 > 0, 2f_2 g_2 > 3f_3$ начало координат есть неустойчивый фокус первой степени негрубости. Следовательно, существует хотя бы один предельный цикл, окружающий точку O , а общее число предельных циклов, с учетом их кратности, при этом нечетно. При переходе $f_1 = 0$ к $f_1 > 0$ указанный выше фокус переходит в грубый устойчивый, из которого рождается грубый предельный цикл. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Существуют ограниченные системы (2) с единственным состоянием равновесия в конечной части плоскости при $n = 3$, имеющие по крайней мере два предельных цикла с учетом их кратности. Общее число предельных циклов при этом четное.

Рассмотрим теперь квадратичную систему с инвариантной прямой, которую, не теряя общности, можно считать заданной уравнением $x = 0$. Предельные циклы могут существовать только тогда, когда она приводится к виду

$$\dot{x} = xy, \dot{y} = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \quad (3)$$

где, a_{ij} – действительные числа. Опуская различные вырожденные случаи, будем полагать, что система (3) имеет единственную особенность в бесконечности.

$$\text{Пусть} \quad a_{01} a_{11} \neq 0 \quad (4)$$

т. к. в противном случае, согласно критерию Дюлака, эта система не имеет предельных циклов.

Аналогично лемме 1 доказывается лемма 2.

Лемма 2. Для ограниченности системы (3) с единственной особенностью в бесконечности необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_{02} = 0, \quad a_{01} < 0, \quad 4a_{20} < -1. \quad (5)$$

Учитывая, что $a_{01} < 0$, $a_{11} \neq 0$, с помощью невырожденного преобразования систему (3) можно привести к случаю, когда

$$a_{01} = -1, \quad a_{11} = 1. \quad (6)$$

При выполнении условий (5) и (6) преобразованная система имеет на оси Oy единственное состояние равновесия, которое является простым устойчивым узлом при $a_{00} < 0$ и простым седлом при $a_{00} > 0$, причем ω -сепаратрисы этого седла лежат на прямой $x = 0$, а по одной α -сепаратрисе находятся в плоскостях $x < 0$ и $x > 0$. Согласно критерию Дюлака эта система в полуплоскости $x < 0$ не имеет предельных циклов.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5) и (6). Тогда при $a_{00} > 0$ существуют системы вида (3), фокус которых окружен нечетнократным предельным циклом, а при $a_{00} < 0$ существуют системы вида (3) с петлей сепаратрисы седла.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Состояние равновесия системы (3), удовлетворяющее условиям (5) и (6) с парой чисто мнимых корней характеристического уравнения может быть только фокусом первой степени негрубости. В частности, такая система не имеет центров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости // Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – Наука, 1976. – 496 с.
2. Dickson, R.J. Bounded quadratic systems in the planet / R.J. Dickson, Z.M Perko // Journ of Differential Equations – 1970. – Vol. 7, № 2. – P. 251–273.
3. Lins, A. On Lienard's equation / A. Lins, W. Mels, C.C. Pugh // Lect. Notes Math. – 1977. – Vol. 597 – P. 335–357.
4. Kroopnick, A.J. Note on bounded L^P solutions of generalized Lienard equation / A.J. Kroopnick // Pacific Journ of Mathematica. – 1981. – Vol. 94, №1. –P. 171–175.
5. Столяров, В.В. Об исследовании одной динамической системы / В.В. Столяров // Сб. «Управление, надежность, навигация». – Саранск, 1981.– С. 56–59.
6. Кожух, И.Г. Качественное исследование одного класса динамических систем на плоскости: / дисс. ... канд. физ.-мат. наук. / И.Г. Кожух. – Минск, 1981. – С.118.

***I.G. Kozhuk* Lienard System with Limited Solutions**

The behavior of the trajectory of the Lienard limited and restricted quadratic system with an invariant line is studied. The theorems on the possible equilibrium states of the systems as well as the existence of multiplicity of limited cycles are proved.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.03.14

УДК 004.6

А.А. Козинский, А.А. Гуносков

РЕЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ РАСЧЕТА ОБЩЕЙ НАГРУЗКИ КАФЕДРЫ

Статья посвящена описанию модели данных для программной системы расчета общей нагрузки кафедры высшего учебного заведения. Приводятся основные этапы и порядок формирования общей нагрузки кафедры. Рассматривается структура и особенности реализации основных элементов разработанной модели данных. Описываются некоторые особенности процесса преобразования логической модели данных в физическую средствами MySQL Workbench. Настоящая статья также содержит фрагмент программного кода на языке SQL для создания схемы базы данных. Актуальность разработки модели объясняется значительным объемом работ для расчета общей нагрузки кафедры и других задач автоматизации управления подразделениями вуза. Эффективность такой работы зависит от степени использования современных информационных технологий.

Введение

Одним из направлений деятельности высшего учебного заведения является управление образовательными процессами. Один из этапов управления – планирование учебной нагрузки. Это многоэтапная процедура, которая проводится перед началом каждого учебного года. В процедуру планирования вовлечено множество подразделений вуза, таких, как ректорат, учебно-методический отдел, деканаты и кафедры. Большая часть планирования осуществляется на кафедрах, выполняющих учебную нагрузку. Расчет общей нагрузки кафедры обычно производится с помощью электронных таблиц Microsoft Excel или другими способами. Особенность таких расчетов в том, что они носят изолированный характер. Данные необходимые для расчетов хранятся в той же таблице с расчетами и не могут быть использованы в других подразделениях. В силу того, что данные, как правило, вносятся в файлы электронных таблиц вручную, процесс расчета является трудоемким и занимает продолжительное время. Выходом из этой ситуации может стать создание программной системы для автоматизации процесса расчета общей нагрузки кафедры, которая в будущем должна использоваться на различных этапах управления (планирование учебного процесса, анализ результатов и т.п.).

В настоящей статье описана реляционная модель данных для программной системы расчета общей нагрузки кафедры, которая в дальнейшем будет использоваться на различных этапах управления учебным процессом.

Описание модели данных

Созданию модели данных предшествовал анализ предметной области. Объектом исследования являлась процедура планирования образовательных процессов. Предмет исследования – расчет общей нагрузки кафедры.

Согласно документированной процедуры ДП 7.3.0-2012 системы менеджмента качества [1, с. 17], для расчета объема учебной работы на кафедрах учебно-методический отдел (УМО) разрабатывает «Нормы времени университета для расчета объема учебной нагрузки профессорско-преподавательского состава на учебный год» в соответствии с «Примерными нормами времени для расчета объема учебной работы и основных видов учебно-методической, научно-исследовательской и других работ, выполняемых профессорско-преподавательским составом высших учебных заведений».

Расчет учебной нагрузки осуществляется на основании [1, с. 17]:

– рабочих учебных планов;

- сведений о составе студентов, количестве групп и подгрупп на учебный год;
- норм времени университета для расчета объема учебной нагрузки профессорско-преподавательского состава на учебный год;
- «Положения об организации самостоятельной работы студентов»;
- решения ректората и постановления Совета Университета.

На основе проведенного анализа было выполнено построение реляционной модели данных. Реляционная модель данных – это теория построения баз данных, которая является приложением к задачам обработки данных таких разделов математики, как теории множеств и логика первого порядка [2]. Таким образом, созданная модель является математической моделью данной предметной области.

Были созданы сущности `qualifications` (квалификации), `forms_of_education` (формы обучения), `types_of_standards` (типы стандартов), `types_of_plans` (типы планов). Атрибуты и экземпляры созданных сущностей представлены на рисунке 1.

qualifications		forms_of_education	
id	description	id	Description
1	Математик-программист	1	Очная дневная
2	Математик-экономист	2	Заочная
3	Физик. Программист	3	Очная вечерняя

types_of_standards		types_of_plans	
id	description	id	Description
1	Специальность	1	Базовый
2	Направление специальности	2	Рабочий
3	Специализация		

Рисунок 1 – Сущности `qualifications`, `forms_of_education`, `types_of_standards`, `types_of_plans`

Сущность `specializations` (специализации) предназначена для хранения информации о специальностях, направлениях специальностей, специализации. В качестве ключа используется код специальности/направления специальности/специализации, т.к. данный атрибут полностью соответствует требованиям, предъявляемым к первичному ключу. Сущность `level_of_education` (уровень образования) хранит информацию об уровнях образования. Структура сущностей `specializations` и `level_of_education` представлена на рисунке 2.

В сущности `directions_of_specialization` (направления специализации) вместо текстовых значений квалификации, типа стандарта, специальности и уровня образования используются внешние ключи на соответствующие характеристические сущности, что исключает излишнее дублирование данных. Одним из внешних ключей сущности `directions_of_specialization` является атрибут `directions_of_specialization_id`. Он является указателем на идентификатор (`id`) собственной сущности и служит для организации цепочек подчиненности: специальность → направление специальности → специализация. Структура сущности показана на рисунке 3.

specializations		forms_of_education	
code_specialization	description	id	description
1-31 03 06	Экономическая кибернетика (по направлениям)	1	Незаконченное высшее (не менее двух лет обучения в вузе)
1-31 03 06-01	Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)	2	Образовательная программа бакалавра
1-31 03 06-01 06	Математические методы и информационные технологии в логистике	3	Образовательная программа специалиста
1-31 03 06-01 04	Информационные технологии управления в экономике		

Рисунок 2 – Сущности specializations, level_of_education

Например, из данных, приведенных на рисунке 3, следует, что существует специальность «Экономическая кибернетика», направление специальности «Математические методы и компьютерное моделирование в экономике» и данное направление имеет две специализации: «Математические методы и информационные технологии в логистике» и «Информационные технологии управления в экономике».

id	qualifications id	types of standards id	specializations code	level of education id	directions of specialization id
1	2	1	1-31 03 06	3	NULL
2	2	2	1-31 03 06-01	3	1
3	2	3	1-31 03 06-01 06	3	2
4	2	3	1-31 03 06-01 04	3	2

Рисунок 3 – Сущность directions_of_specialization

В рабочих учебных планах также присутствует информация о факультетах и кафедрах. Кафедры могут как входить в состав какого-либо факультета, так и быть общеуниверситетскими. Выполнять нагрузку могут не только кафедры, но и некоторые подразделения вуза. Для хранения информации о подразделениях вуза, их иерархии и составе выполняемых функций созданы сущности: divisions (отделы), property_divisions (свойства отделов), characteristics_divisions (характеристики отделов). Для сущности divisions используется такой же подход как и для сущности directions_of_specialization с целью организации цепочек подчиненности. На основе атрибута divisions_id выстраивается иерархия подразделений, например: Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина → Физико-математический факультет → Кафедра математического моделирования. Сущности property_divisions и characteristics_divisions служат для определения свойств отделов. Пример структуры и хранимых данных представлен на рисунке 4.

divisions			
id	short description	description	divisions id
1	БрГУ имени А.С. Пушкина	Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина	
2	ФМФ	Физико-математический факультет	1
3	ПМТП	Кафедра прикладной математики и технологий программирования	2
4	ММ	Кафедра математического моделирования	2

characteristics_divisions	
divisions id	property divisions id
1	1
2	2
3	3
4	3

property_divisions		
id	description	explanation
1	Университет	Университет
2	Факультет	Отдел является факультетом
3	Кафедра	Отдел является кафедрой

Рисунок 4 – Сущности divisions, characteristics_divisions, property_divisions

Для хранения данных об учебных планах и дисциплинах учебного плана созданы следующие сущности:

- types_of_plans (типы планов) – содержит информацию о типе учебных планов, например, базовый, рабочий;
- plans (планы) – используется для хранения основной информации об учебном плане (факультет, выпускающая кафедра, учебный год, специальность, курс и др.);
- components (компоненты) – используется для хранения информации о видах компонентов (обязательный, вузовский и т.п.);
- cycles_of_disciplines (цикл дисциплин) – содержит информацию о циклах дисциплин (основные, социально-гуманитарные, дисциплины специализации);
- disciplines (дисциплины) – содержит информацию о полных и кратких наименованиях дисциплин (программирование, методы численного анализа);
- lines_plans (строки планов) – включает информацию о дисциплинах учебного плана, такую, как ссылка на учебный план, ссылка на цикл дисциплин, ссылка на наименование дисциплины и др.;
- content_lines_plans (содержание строк планов) – хранит информации о распределении учебной нагрузки дисциплины по семестрам.

Также создан ряд сущностей для хранения данных о студенческих группах, подгруппах и лекционных потоках.

Реализация модели данных

Проектирование реляционной модели данных проводилось в приложении MySQL Workbench. Кроме средств для создания логической модели данных, данное приложение обладает возможностью визуального проектирования физической модели [3]. Физическая модель данных проектировалась исходя из предполагаемого объема

хранимой информации. Данный объем в первую очередь зависит от количественного состава студентов и преподавателей. В Брестском государственном университете имени А.С. Пушкина количество студентов составляет около 9 тысяч и около 600 преподавателей [4].

На этапе физического моделирования для каждого атрибута выбран соответствующий тип данных. Типы данных выбирались исходя из допустимых диапазонов значений. «Щедрость» при назначении типа данных увеличивает размер записи, что впоследствии может привести к замедлению поиска необходимой записи в базе данных, т.к. записи хранятся на диске последовательно. Для большинства таблиц выбран тип хранилища InnoDB. Основным отличием InnoDB от других типов хранилищ СУБД MySQL является наличие механизма транзакций и внешних ключей [5]. Для текстовых полей установлена кодировка UTF-8. Также на этапе физического моделирования к некоторым полям добавлялись индексы. Как правило, поля которые должны быть проиндексированы выбираются на этапе оптимизации запросов к базе данных [6, с. 273]. Однако MySQL Workbench автоматически добавляет индексы к первичным ключам, ключам-кандидатам и внешним ключам. На рисунке 5 представлен фрагмент схемы физической модели данных.

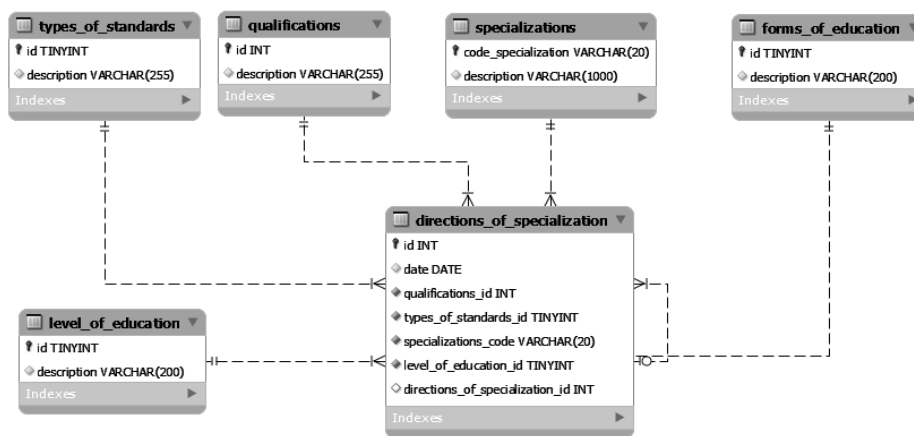


Рисунок 5 – Фрагмент схемы физической модели данных

Фрагмент программного кода на языке SQL для создания схемы базы данных приведен ниже:

Фрагмент программного кода

```
CREATE TABLE IF NOT EXISTS `webinedub`.`divisions` (
  `id` INT UNSIGNED NOT NULL AUTO_INCREMENT,
  `short_description` VARCHAR(45) NOT NULL COMMENT 'краткое наименование',
  `description` VARCHAR(255) NOT NULL COMMENT 'наименование',
  `divisions_id` INT UNSIGNED NULL,
  PRIMARY KEY (`id`),
  INDEX `fk_divisions_divisions_idx` (`divisions_id` ASC),
  CONSTRAINT `fk_divisions_divisions`
  FOREIGN KEY (`divisions_id`) REFERENCES `webinedub`.`divisions` (`id`)
  ON DELETE RESTRICT ON UPDATE RESTRICT) ENGINE = InnoDB COMMENT = 'отделы';
CREATE TABLE IF NOT EXISTS `webinedub`.`property_divisions` (
  `id` INT UNSIGNED NOT NULL AUTO_INCREMENT,
  `description` VARCHAR(45) NOT NULL COMMENT 'наименование',
  `explanation` VARCHAR(255) NOT NULL COMMENT 'примечание\n',
  PRIMARY KEY (`id`),
  UNIQUE INDEX `descriptions_UNIQUE` (`description` ASC)) ENGINE = InnoDB COMMENT = 'свойства отделов';
```

```
CREATE TABLE IF NOT EXISTS `webinedudb`.`characteristics_divisions` (  
  `divisions_id` INT UNSIGNED NOT NULL AUTO_INCREMENT COMMENT 'id отдела',  
  `property_divisions_id` INT UNSIGNED NOT NULL COMMENT 'id свойства отдела',  
  PRIMARY KEY (`divisions_id`, `property_divisions_id`),  
  INDEX `fk_characteristics_divisions_property_divisions_idx` (`property_divisions_id` ASC),  
  CONSTRAINT `fk_characteristics_divisions_divisions`  
    FOREIGN KEY (`divisions_id`) REFERENCES `webinedudb`.`divisions` (`id`)  
    ON DELETE RESTRICT ON UPDATE RESTRICT,  
  CONSTRAINT `fk_characteristics_divisions_property_divisions`  
    FOREIGN KEY (`property_divisions_id`) REFERENCES `webinedudb`.`property_divisions` (`id`)  
    ON DELETE RESTRICT ON UPDATE RESTRICT) ENGINE = InnoDB COMMENT = 'характеристика  
отделов';
```

Заклучение

В настоящей статье представлено описание реляционной модели данных для программной системы расчета общей нагрузки кафедры. Приведен фрагмент программного кода для создания схемы базы данных. Модель данных универсальна и разработана для решения задач управления подразделением вуза. В числе актуальных задач, для решения которых будет применена модель: управление нагрузкой преподавателей, автоматизация управлением расписанием занятий, отчеты о выполнении запланированной нагрузки и др. Все перечисленные задачи должны опираться на созданную базу данных. Широкий круг задач налагает повышенные требования ко всем уровням моделирования. Такие требования выполнены для представленных в настоящей работе результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проектирование образовательных программ и планирование образовательных процессов [Тест]: ДП 7.3.0-2012 1. – Введ. 2002-05-07.
2. Реляционная база данных – Википедия [Электронный ресурс] Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Реляционная_база_данных. – Дата доступа: 04.03.2014.
3. MySQL : MySQL Workbench 6.0 [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.mysql.com/products/workbench>. – Дата доступа: 04.03.2014.
4. Общие сведения | Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.brsu.by/univer/obshchie-svedeniya>. – Дата доступа: 04.03.2014.
5. InnoDB – Википедия [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/wiki/InnoDB>. – Дата доступа: 04.03.2014.
6. Кириллов, В.В. Введение в реляционные базы данных / В.В. Кириллов, Г.Ю. Громов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 464 с.: ил. + CD-ROM

A. Kazinski, A. Gunosov The Relational Data Model for Software System for Calculation of the Total Load of the Department

The article is devoted to the description of data models for a software system for calculation of the total load of the Department of higher education institutions. Main stages and procedures of forming the total load of the Department. In the article the structure and peculiarities of implementation of the main elements of the developed model data. Describes some peculiarities of the transformation process of logical data model into a physical means MySQL Workbench. The relevance of the model is explained by the significant amount of work to calculate the total load of the Department and other tasks of automation of office management of the University. The efficiency of such work depends on the degree of use of modern information technologies.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.04.14

УДК 517-518.948

В.М. Мадорский**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

В статье для численного решения одномерных квазилинейных задач теплопроводности применяются ряд квазиньютоновских итерационных процессов для решения систем нелинейных численных уравнений. Показано, что квазиньютоновские итерационные процессы, предложенные В.М. Мадорским, эффективнее метода В.И. Пузынина.

Рассматривается класс квазилинейных задач теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, t, u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + f(x, t, u), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= \mu_1(x), x \in [a; l], \\ u(a, t) &= \mu_2(t), t \in [t_0; t_1], \\ u(l, t) &= \mu_3(t), t \in [t_0; t_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения задач (1) – (2) проводим трехточечную дискретизацию производных по x и заменяем производную по t правым разностным отношением. Задача дискретизируется с использованием чисто неявной схемы. В результате чего имеем систему нелинейных численных уравнений

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = \frac{\partial K(x, t, u)}{\partial x} \frac{y_{n+1}^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{2h} + K(x_n, t_m, y_n^m) \frac{y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}}{h^2} + g(x_n, t_m, y_n^m) \left(\frac{y_{n+1}^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{2h} \right)^n + f(x_n, t_m, y_n^m) \quad (3)$$

(здесь $\frac{\partial K(x, t, u)}{\partial x}$ программно считается в аналитическом виде, и переменные x, t, u и производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ заменяются на $x_n, t_m, y_n^m, \frac{y_{n+1}^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{2h}$ соответственно), которую решаем квазиньютоновскими методами [1].

Из класса уравнений (1) часто выделяется класс квазилинейных уравнений теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + f(x, t, u), \quad (4)$$

с начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(a, t) = \mu_1(t), \\ u(b, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = \mu_3(x), \end{cases} \quad (2a)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – функции, определяющие начально-краевые условия; $x \in [a, b], t \in [0, T]$; $\alpha, \beta, n \in N$.

Для нахождения численного решения рассматриваемых задач производим дискретизацию на трехточечном шаблоне, позволяющем работать с чисто неявной схемой

и на шести точечном шаблоне для возможности применения метода Кранка-Николсон. Для этого производим разбиение отрезков $[a, b]$ и $[0, T]$ на n частей:

$$t_i = a + i\tau; x_i = a + ih; i = 0, \dots, n; h = \frac{b-a}{n}, \tau = \frac{T}{n}.$$

После дискретизации на трехточечном шаблоне наши дифференциальные задачи (4) сводятся к решению систем нелинейных численных уравнений вида:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{t} = (u_i^j)^\alpha \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (u_i^j)^\beta \left(\frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right)^n + f(x_i, t_j, u_i^j). \quad (5)$$

Для решения систем нелинейных уравнений (5) совместно с условиями (2а) используем квазиньютоновские методы [1].

Для получения высокоточного приближенного решения задачи часто приходится решать большие системы (порядка многих сотен тысяч) уравнений.

Несмотря на то, что системы нелинейных уравнений имеют трехдиагональную структуру, напрямую использовать метод трехдиагональной матричной прогонки не представляется возможным без предварительной линеаризации.

Таким образом, нелинейная задача сводится к последовательности линейных задач, решение которых при определенных условиях сводится к решению исходной нелинейной численной задачи.

Запишем задачу (4),(2) в операторном виде

$$f(x) = 0; f(D \subset X \rightarrow X) \quad X - \text{В-пространство}. \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) рассматривается итерационный процесс в предположении, что оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^{(2)}, \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \leq B, \left\| f''(x) \right\| \leq K, \quad \forall x \in D.$$

Алгоритм решения операторного уравнения (6) имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n) \Delta x_n = -f(x_n), \quad n=0,1,2,\dots \quad (7)$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (8)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2}{\beta_n (\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1})\|^2)} \right), \quad (9)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n)\|^2 (\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2})\|^2)}{\beta_n (\|f(x_{n+2})\|^2 (\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_n)\|^2))}, \quad \gamma_0 = \frac{\beta_0^2 (\|f(x_0)\|^2 + \|f(x_1)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2},$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Относительно процесса (7) – (9) справедлива

Теорема. Пусть в шаре $S(x_0, r)$, $r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1 - q_0}$ выполняются условия теоремы.

Тогда итерационный процесс (7) – (9) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$. $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\|$.

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины с нормами невязок. Из (6) при $\beta_{n+2} < 1$ имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}\|f(x_{n+1})\|^2}{\beta_{n+1}(\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2})\|^2)\beta_{n+1}} = \frac{\|f(x_{n+1})\|^2}{\|f(x_{n+2})\|^2}. \tag{10}$$

Из (7) следует соотношение

$$\beta_{n+2}\|f(x_{n+2})\|^2 = \beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|^2. \tag{11}$$

Из условий теоремы и (11) следует, что последовательность норм невязок монотонно убывает к нулю, шаговые длины β_i образуют монотонно возрастающую к единице последовательность $[1, \{q_i\} \downarrow 0, q_i = 1 - \beta_i(1 - \varepsilon_i), \varepsilon_i = 0.5KB^2\sqrt{\beta_i}\|f(x_i)\|$.

Пусть $\beta_{n+1} < 1$, тогда

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|^2}{\beta_n(\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1})\|^2)} = \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|^2\|f(x_n)\|^2}{\beta_{n-1}\|f(x_{n+1})\|^2(\|f(x_{n-1})\|^2 + \|f(x_n)\|^2)} > \\ &> \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|^2}{\beta_{n-1}(\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_n)\|^2)q_n} > \dots > \frac{\gamma_0\|f(x_0)\|^2}{\beta_0(\|f(x_0)\|^2 + \|f(x_1)\|^2)\prod_{i=0}^n q_i}. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) следует, что при некотором k параметр β_k становится равным единице, а из сходимости последовательности норм невязок к нулю следует, что при некотором номере итерации m выполняется соотношение $\overline{\varepsilon}_m = 0.5KB^2\|f(x_m)\| < 1$, так что при $i = \max(m, k)$ начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона. Таким образом, итерационный процесс (7) – (9) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$.

Часто более эффективным является квазиньютоновский процесс с частичной регуляризацией. В этом случае на шаге 1 решается линейная система $(\alpha\beta_n\|f'(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -f(x_n)$, $n=1,2,\dots$, $\alpha \ll 1$, E – единичная матрица.

Эффективность приближенного решения исследуем, во-первых, на ряде модельных задач и, во-вторых, рассматривая корреляцию точного решения и решения, полученного с использованием принципа Рунге.

Исследование решений класса задач проводим с помощью приложения «Уравнение теплопроводности». В нем такие функции, как $K(x, t, u)$, $g(x, t, u)$, $f(x, t, u)$, а также значение целочисленной переменной n и точное решение $u(x, t)$ (если такое имеется) вводятся в соответствующих полях. В приложении имеется такой интерактив, как автоматическое изменение функции $f(x, t, u)$ при изменении любой из вышеперечис-

численных функций. Функцию $f(x, t, u)$ можно сгенерировать или проверить по нажатию на соответствующую кнопку. Также имеются поля для ввода отрезков $[a; l]$ и $[t_0; t_1]$, которым принадлежат переменные x и t соответственно, поля, отображающие начальные и граничные условия – функции $u(x, t_0)$, $u(a, t)$, $u(l, t)$. При изменении отрезков $[a; l]$ и $[t_0; t_1]$ автоматически изменяются начальные и граничные условия. Еще в приложении присутствуют поля для ввода значений N и M – количества точек разбиения вышеуказанных отрезков соответственно, поля для ввода точности решения системы нелинейных уравнений, точности приближенного решения, полученного на каждом слое; поле для ввода формулы, по которой пересчитывается шаговая длина β_{n+1} . Если в формуле пересчета β_{n+1} присутствует γ , то в пользовательском интерфейсе приложения появляется поле для ввода формулы, по которой пересчитывается γ_{n+1} .

После численного решения уравнения можно посмотреть решение в специально отведенной таблице, размер которой изменяется по нажатию на соответствующую кнопку, расположенную над правым верхним углом таблицы. В связи с большим количеством слоев решения его вывод в обычный DataGridView занимает много времени. Поэтому в приложении имеется постраничный вывод решения. По окончании решения уравнения автоматически выводится последняя страница. Решение можно просмотреть в отдельном окне. Скриншот рабочей программы представлен ниже

Уравнение теплопроводности

$K(x, t, u) = x^2 t^2 u$
 $g(x, t, u) = u$
 $f(x, t, u) = x + 2^2 t^2 x^2 - ((t^2 u + x^2 t^2)(t + 2^2)$
 $n = 2$
 $u(x, T_0) = 0$
 $u(a, t) = 0$
 $u(l, t) = ((0.1^2 t) + (0.01^2 (t^2)))$
 $[a, l] = [0, 0.1]$
 $[T_0, T_1] = [0, 3]$
 $N = 10$
 $M = 100$
 $eps\ System = 0,001$
 $eps\ Equation = 0,000001$

Условие задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, t, u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + f(x, t, u)$$

Решение

	0	0,01	0,02	Нормы
3	0	0,0514565...	0,064	2,5552213...
*				

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Показать решение в новом Показать точность

Почное решение = $x^2 t + x^2 t^2$ Проверить f Сгенерировать f Решить

Beta[n + 1] = 1 Проверить точность решения

Численные эксперименты были проведены для разных отрезков интегрирования и разной требуемой точности по принципу Рунге для нижеприведенных двух конкретных задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2t - 27u^2 x^4 - 6u^3 x - (3x^2)^2 u$$

$$u(x, t_0) = x^3, u(a, t) = t^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2x^2 t + 3t^2 - 12x^2 t^4 u^2 - 2u^3 t^2 - u(2xt^2)^2$$

$$u(x, t_0) = 0, u(a, t) = t^3, u(l, t) = t^2 + t^3$$

Результаты численного эксперимента приведены в таблицах 1, 2, из которых следует, что с увеличением отрезка интегрирования для достижения необходимой точности требуется уменьшение «eps Equation».

Таблица 1 – Зависимость точности решения от величины отрезка интегрирования и «eps Equation» для первой модельной задачи

$u(l, t)$	$1 + t^2$	$8 + t^2$	$1 + t^2$	$1 + t^2$
$[a; l]$	$[0; 1]$	$[0; 2]$	$[0; 1]$	$[0; 1]$
$[t_0; t_1]$	$[0; 1]$	$[0; 5]$	$[0; 8]$	$[0; 10]$
N	10	10	10	10
M	100	100	100	1000
eps System	0,01	0,01	0,01	0,01
eps Equation	0,01	0,0001	0,0001	0,00005
Точное решение	$x^3 + t^2$	$x^3 + t^2$	$x^3 + t^2$	$x^3 + t^2$
β_{n+1}	1	1	1	1
Точность, полученная при решении уравнения с помощью принципа Рунге	0,000170438 956612797	$6,9907474 \cdot 10^{-5}$	$8,3413704 \cdot 10^{-5}$	$4,6627447 \cdot 10^{-5}$
Норма разности приближенного и точного решения	0,000488761 840299903	$8,9073535 \cdot 10^{-6}$	$1,7602659 \cdot 10^{-6}$	$2,9606363 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2 – Зависимость точности решения от величины отрезка интегрирования и «eps Equation» для второй модельной задачи

$[a; l]$	$[0; 1]$	$[0; 1]$	$[0; 1]$	$[0; 1]$
$[t_0; t_1]$	$[0; 1]$	$[0; 5]$	$[0; 8]$	$[0; 10]$
N	10	10	10	10
M	100	100	1000	1000
eps System	0,01	0,01	0,01	0,01
eps Equation	0,01	0,0001	0,0001	0,00005
Точное решение	$x^2 t^2 + t^3$	$x^2 t^2 + t^3$	$x^2 t^2 + t^3$	$x^2 t^2 + t^3$
β_{n+1}	1	1	1	1
Точность, полученная при решении уравнения с помощью принципа методом Рунге	$1,8929032 \cdot 10^{-5}$	$7,6811409 \cdot 10^{-5}$	$1,2080983 \cdot 10^{-5}$	$1,8929032 \cdot 10^{-5}$
Норма разности приближенного и точного решения	0,003989511 3392741	0,008245882 1350430	0,014943426 8885795	0,022251256 7091038

Для проверки эффективности различных квазиньютоновских методов рассмотрим модельную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^2 + t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(u^2 + t^2) + (2x + t)^2 2u - x, \quad (13)$$

для которой известно решение $u(x, t) = x^2 + tx$.

После замены производных их разностными аппроксимациями решение задачи (13) может быть сведено к решению системы:

$$\frac{y_k^{m+1} - y_k^m}{\tau} = (1 - \sigma) \left((y_k^2 + t^2) \frac{y_{k+1}^{m+1} - 2y_k^{m+1} + y_{k-1}^{m+1}}{h^2} + 2y_k \left(\frac{y_{k+1}^{m+1} - y_{k-1}^{m+1}}{2h} \right)^2 - f(x, t + \tau, y_k) \right) + \\ + \sigma \left((y_k^2 + t^2) \frac{y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_{k-1}^m}{h^2} + 2y_k \left(\frac{y_{k+1}^m - y_{k-1}^m}{2h} \right)^2 - f(x, t, y_k) \right); k = \overline{0; N}.$$

При $\sigma = 0$ получим абсолютно устойчивую чисто неявную схему, а при $\sigma = 0.5$ имеем схему Кранка-Николсон.

Данную систему решаем с помощью нерегуляризованных, частично регуляризованных или регуляризованных нелокальных итерационных процессов, предложенных В.М. Мадорским [1]. Для сравнения рассмотрим также классический метод Пузынина [2].

Контроль погрешности будем производить по следующему правилу: сравниваем значения в узлах на соответствующих слоях, полученные с шагом τ и $\tau/2$; если они находятся в пределах заданной нормы погрешности, то не изменяем шаг и переходим к следующему слою; иначе дробим шаг до тех пор, пока не получим удовлетворяющие нас значения; на следующем слое действуем в обратном порядке – если последний шаг, полученный на предыдущем слое, даёт значения, удовлетворяющие некоторому заданному дополнительному ограничению на невязку, то пробуем его увеличить и т.д. Данный подход с «пульсирующим» шагом обеспечивает наиболее разумный способ выбора τ .

Заметим, что методы, обеспечивающие прогноз-коррекцию, позволили отыскать решение задачи на каждом из слоев с точностью вплоть до девятого порядка, с той оговоркой, что для решения задачи выбран алгоритм, не подразумевающий увеличение шага при достижении достаточной, заведомо установленной точности по правилу Рунге на каком-либо слое, а также установлен начальный шаг порядка $1e-8$.

В таких условиях решение задачи обладает высокой точностью, но временные затраты на просчёт велики: на процессоре с частотой 1600 MHz просчёты в области $(x, t) \in ([0;1] \times [0;1])$ с разбиением интервала по x на 20 отрезков заняли около двух часов.

Обратим внимание, что решение задачи без значительных потерь в точности можно проводить и на временных интервалах большей длины.

Нами проводился численный эксперимент по приближенному решению систем нелинейных численных уравнений, получающихся при дискретизации дифференциальной задачи на трехточечном шаблоне, позволяющем использовать чисто неявную абсолютно устойчивую схему, и дискретизация проводилась на шеститочечном шаблоне, позволяющем использовать метод Кранка-Николсон. Полученные абсолютно устойчивые схемы позволяли применение квазиньютоновских методов как неполного прогноза, так и методов полного прогноза. Результаты работы методов сравнивались с результатами применения метода В.И. Пузынина для решения систем нелинейных численных уравнений. Численные эксперименты на модельных задачах показали, что метод В.И. Пузынина не позволяет получить точность приближенного решения выше, чем $1e-4$. В тоже время методы полного и неполного прогноза позволяли получить высокоточные приближенные численные решения.

Результаты работы приведены в таблице 3:

Таблица 3 – Эффективность решения задачи (3) в зависимости от выбора метода решения и точности, требуемой по принципу Рунге

Заданная точность по Рунге	Методы					
	Пузынина		Частично-регуляризованный, неполный прогноз		Частично-регуляризованный, полный прогноз	
	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон
1E-5	3.4997E-4	3.7118E-4	6.7641E-5	8.5971E-5	6.7641E-5	8.5971E-5
1E-7	3.1683E-4	3.1541E-4	8.2967E-6	5.3701E-6	8.2967E-6	5.3701E-6
1E-9	3.1160E-4	3.1177E-4	4.9980E-7	6.5124E-7	4.9980E-7	6.5124E-7
1E-11	-	-	4.6912E-8	2.4295E-8	4.6912E-8	2.4295E-8

На основе таблицы и нижеследующих скриншотов можно сделать вывод о том, что квазиньютоновские методы полного и неполного прогноза [1] существенно эффективнее метода Пузынина [2] для слабоустойчивых систем рассмотренного выше типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 174с.
2. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. –Т.32, № 6. – С. 846–856.

***V.M. Madorski* The Numerical Solution of One-Dimensional Quasilinear Heat Conduction Problems**

In an article for the numerical solution of one-dimensional quasi-linear heat on duction problems apply a number of quasi-Newton iterative methods for solving systems of nonlinear equations numerical. It is shown that the quasi-Newton iterative processes proposed V. Madorski, efficient method of V. Puzynin.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.04.14

УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик, В.С. Зайко

ОБ ОДНОМ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве исследуется метод итераций с переменным шагом решения некорректных задач с положительно определенным ограниченным самосопряженным оператором. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора числа итераций при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Изучен случай неединственного решения уравнения, и доказана сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства. Методом решена численная модельная задача.

Введение

В статье изучается метод итерации явного типа решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным методом простой итерации $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n)$, $x_0 = 0$ [1–9] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с методом простой итерации в следующем: для достижения оптимальной точности здесь потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций [1–9].

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным [1–9] или переменным [10] шагом зависит от суммы шагов по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаги по антиградиенту были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [9–10]. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удастся сделать, выбирая для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении прикладных некорректных задач, встречающихся в гравиметрии, технике, экономике, геологоразведке, сейсмике, космических исследованиях (спектроскопии), медицине (компьютерной томографии).

Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

с ограниченным положительно определенным самосопряженным оператором $A: H \rightarrow H$, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы. В настоящей работе предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} &= \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

В случае приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ уравнения (1) приближения (2) примут вид

$$\begin{aligned} x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} &= \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

По индукции покажем, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_{n+1}y + \alpha_n(E - \alpha_{n+1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{n+1}A)(E - \\ &\quad - \alpha_n A) \dots (E - \alpha_2 A)y = \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k+1} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{n-i+1}A)y. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (2) и (4) при $n = 0$ следует, что $x_1 = \alpha_1 y$, и, следовательно, при $n = 0$ формула (4) верна. Предположим, что (4) верна при $n = p$, т.е.

$$x_{p+1} = \alpha_{p+1}y + \alpha_p(E - \alpha_{p+1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A) \dots (E - \alpha_2 A)y.$$

Докажем, что (4) верна при $n = p + 1$. Из (2) получим

$$\begin{aligned} x_{p+2} &= x_{p+1} - \alpha_{p+2}(Ax_{p+1} - y) = \alpha_{p+2}y + (E - \alpha_{p+2}A)x_{p+1} = \\ &= \alpha_{p+2}y + (E - \alpha_{p+2}A)[\alpha_{p+1}y + \alpha_p(E - \alpha_{p+1}A)y + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \\ &\quad - \alpha_p A)y + \alpha_{p-2}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A)y + \dots + \alpha_2(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A) \dots (E - \alpha_3 A)y + \alpha_1(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A) \dots (E - \\ &\quad - \alpha_3 A)(E - \alpha_2 A)y] = \alpha_{p+2}y + \alpha_{p+1}(E - \alpha_{p+2}A)y + \alpha_p(E - \alpha_{p+2}A)(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)y + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+2}A)(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)y + \alpha_{p-2}(E - \alpha_{p+2}A)(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{p+2}A) \dots (E - \alpha_3 A)(E - \alpha_2 A)y = \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \alpha_{p-k+2} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i+2}A)y. \end{aligned}$$

Следовательно, по индукции формула (4) верна.

Далее для упрощения считаем $\|A\| = 1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1}y - [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A) \dots (E - \alpha_2 A)]y = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \{1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n \lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_n \lambda) \dots (1 - \alpha_2 \lambda)]\} dE_\lambda y. \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n \lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_n \lambda) \dots (1 - \alpha_2 \lambda)] = (1 - \alpha_1 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda). \quad (5)$$

При $n = 1$ получим $1 - \lambda \alpha_1 = 1 - \alpha_1 \lambda$, значит, при $n = 1$ формула (5) верна.

Предположим, что данная формула верна при $n = p$:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda[\alpha_p + \alpha_{p-1}(1 - \alpha_p \lambda) + \alpha_{p-2}(1 - \alpha_p \lambda)(1 - \alpha_{p-1} \lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_p \lambda) \times \dots \times \\ \times (1 - \alpha_3 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda)] = (1 - \alpha_1 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p \lambda). \end{aligned}$$

Докажем, что рассматриваемая формула верна при $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 - \lambda[\alpha_{p+1} + \alpha_p(1 - \alpha_{p+1}\lambda) + \alpha_{p-1}(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_p\lambda) + \alpha_{p-2}(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \\ & - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p-1}\lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_p\lambda)\dots(1 - \alpha_3\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)] = \\ & = 1 - \alpha_{p+1}\lambda + \lambda(1 - \alpha_{p+1}\lambda)[- \alpha_p - \alpha_{p-1}(1 - \alpha_p\lambda) - \alpha_{p-2}(1 - \\ & - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p-1}\lambda) - \dots - \alpha_1(1 - \alpha_p\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_3\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)] = \\ & = 1 - \lambda\alpha_{p+1} + \lambda(1 - \alpha_{p+1}\lambda)\left[-\frac{1}{\lambda}\{1 - (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)\}\right] = \\ & = 1 - \lambda\alpha_{p+1} - (1 - \alpha_{p+1}\lambda) + (1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times \\ & \times (1 - \alpha_p\lambda) = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p+1}\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (5) верна.

Таким образом, имеем $x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)\dots(1 - \alpha_n\lambda)dE_{\lambda}y =$
 $= \int_0^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k(1 - \beta\lambda)^l(1 - \gamma\lambda)^m dE_{\lambda}y$. Здесь k, l, m – натуральные показатели, где
 $l + m + k = n$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, 1]$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$\left. \begin{aligned} & |(1 - \alpha\lambda)| < 1, \text{ (т.е. } 0 < \alpha < 2), \\ & |(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1, \\ & |(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Докажем сходимость процесса (2) при точной правой части y . Справедлива
Теорема 1. *Итерационный процесс (2) при условии (6) сходится в норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Поскольку

$$x - x_n = \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k(1 - \beta\lambda)^l(1 - \gamma\lambda)^m dE_{\lambda}y + \int_{\varepsilon}^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k(1 - \beta\lambda)^l(1 - \gamma\lambda)^m dE_{\lambda}y,$$

то, считая $k = l = m = n/3$, при условиях (6) получим

$$\left\| \int_{\varepsilon}^1 \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k(1 - \beta\lambda)^l(1 - \gamma\lambda)^m dE_{\lambda}y \right\| \leq q^{n/3} \left\| \int_{\varepsilon}^1 dE_{\lambda}x \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь $q = \max_{\lambda \in [\varepsilon, 1]} |(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$. В силу свойств спектральной функции [12]

$$\left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k(1 - \beta\lambda)^l(1 - \gamma\lambda)^m dE_{\lambda}y \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} dE_{\lambda}y \right\| = \left\| \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda}x \right\| = \|E_{\varepsilon}x\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\|x - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Условие $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$ равносильно совокупности условий $\alpha\beta < \alpha + \beta$ и $(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta$ [11]. Отсюда $\alpha + \beta < 8$.*

Докажем сходимость процесса (3) при приближенной правой части уравнения (1). Справедлива

Теорема 2. При условии (6) итерационный процесс (3) сходится, если выбрать число итераций n из условия $n\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Рассмотрим $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|$, где $x_n - x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)](y - y_\delta) = \int_0^1 \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m] dE_\lambda (y - y_\delta)$.

Оценим на $[0,1]$ максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m] > 0.$$

Сначала докажем по индукции, что

$$\lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \dots (1 - \alpha_n\lambda)] \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n. \tag{7}$$

Обозначим левую часть равенства (7) через $z_n(\lambda)$. При $n=1$ имеем

$$z_1(\lambda) = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda)}{\lambda} = \alpha_1 \leq \alpha_1, \text{ значит, при } n=1 \text{ (7) верна.}$$

Пусть (7) выполняется при $n=p$, т.е. что $z_p(\lambda) \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_p$. Докажем, что (7) справедлива при $n=p+1$:

$$\begin{aligned} z_{p+1}(\lambda) &= \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p+1}\lambda)}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} + \\ &+ \frac{(1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)\alpha_{p+1}\lambda}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} + \\ &+ \alpha_{p+1}(1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda) \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_p + \alpha_{p+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (7) верна.

Поэтому $g_n(\lambda) \leq k\alpha + l\beta + m\gamma$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$. Если $k = l = m = n/3$,

то $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно потребовать, чтобы $(k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Получим оценку скорости сходимости. Предположим, что точное решение x истокообразно представимо, т.е. что $x = A^s z, s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и

$$x - x_n = \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \lambda^s dE_\lambda z. \text{ Оценим максимум подынтегральной функ-}$$

ции $f(\lambda) = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \dots (1 - \alpha_n\lambda)\lambda^s = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i\lambda) \lambda^s = \frac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\lambda)$. Обозна-

чим $c_i = \frac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$. Нетрудно показать [11], что $|\varphi_i(\lambda)| \leq$

$$\leq \max \left\{ \left| (1 - \alpha_i M) M^{c_i} \right|, \left| \left(\frac{c_i}{e\alpha_i} \right)^{c_i} \right| \right\}, \text{ где } M = \|A\|. \text{ Поскольку } \|A\| = 1, \text{ то получим}$$

$$\begin{aligned}
|f(\lambda)| &= \prod_{i=1}^n |\varphi_i(\lambda)| \leq \max \left\{ \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i), \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{e\alpha_i} \right)^{c_i} \right\} = \\
&= \max \left\{ (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n), \left[s / \left(e \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \right]^s \right\} = \\
&= \max \left\{ |(1 - \alpha)^k (1 - \beta)^l (1 - \gamma)^m|, s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \right\}.
\end{aligned}$$

При $k = l = m = n/3$ ($n = 3p$, $p \in N$) получим

$$|f(\lambda)| \leq \max \left\{ (1 - \alpha)^{n/3} (1 - \beta)^{n/3} (1 - \gamma)^{n/3}, s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \right\}.$$

Для достаточно больших n $|(1 - \alpha)^{n/3} (1 - \beta)^{n/3} (1 - \gamma)^{n/3}| \leq s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$, поэтому

для таких n справедлива оценка $|f(\lambda)| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} = s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$.

Поэтому $\|x - x_n\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\|$. Отсюда

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 3. Если $x = A^s z$, $s > 0$, то для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta. \quad (8)$$

Замечание 2. Для упрощения считали $\|A\| = 1$. На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда $\|A\| < \infty$.

При $k = l = m = n/3$ оценка (8) примет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \delta.$$

Ее оптимальная по n оценка имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (9)$$

и получается при $n_{\text{опт}} = s \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка (9) для метода (3) при неточности в правой части уравнения (1) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода простой итерации [1–9]. Следовательно, метод (3) не дает преимуществ в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций. Но он дает выигрыш в следующем: в методе простых итераций с постоянным шагом [1–9] требуется условие $0 < \alpha \leq 1,25$, а в методе (3) $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, а γ выбирается из условия $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$. Итак, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для метода простых итераций с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (3), для достижения оптимальной точности по-

требуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом простой итераций [1-9].

Рассмотрим погрешность метода (3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (3), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей η_n , т.е.

$$z_{n+1} = z_n - \alpha_{n+1}(Az_n - y_\delta) + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad z_0 = 0. \quad (10)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем (3) из (10), в результате получим

$$\varepsilon_{n+1} = (E - \alpha_{n+1}A)\varepsilon_n + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0, \quad \eta_0 = 0. \quad (11)$$

По индукции докажем, что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{n-i}A) \eta_{n-k-1}. \quad (12)$$

Из (11) при $n=1$ и из (12) при $n=2$ получим $\varepsilon_2 = \alpha_2\eta_1$, т.е. при $n=2$ (12) верна.

Пусть (12) справедлива при $n=p$: $\varepsilon_p = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A) \eta_{p-k-1}$. Докажем, что (12) справедлива при $n=p+1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+1} &= (E - \alpha_{p+1}A)\varepsilon_p + \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A) \left[\sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A) \eta_{p-k-1} \right] + \\ &+ \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A) [\alpha_p \eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_p A) \eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E - \alpha_p A)(E - \\ &- \alpha_{p-1}A) \eta_{p-3} + \dots + \alpha_2(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A) \dots (E - \alpha_3 A) \eta_1] + \alpha_{p+1}\eta_p = \\ &= \alpha_p (E - \alpha_{p+1}A) \eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A) \eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E - \\ &- \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A) \eta_{p-3} + \dots + \alpha_2(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \\ &- \alpha_{p-1}A) \dots (E - \alpha_3 A) \eta_1 + \alpha_{p+1}\eta_p = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{p+1-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p+1-i}A) \eta_{p-k}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (12) верна.

Так как $\|E - \alpha A\| \leq 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)\| \leq 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)(E - \gamma A)\| \leq 1$, то $\|\varepsilon_n\| \leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\eta$, где $\eta = \sup_i |\eta_i|$. Таким образом, с учетом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности метода итераций с переменным шагом (3)

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^s \left[\frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta + \eta).$$

Сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (3) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (13)$$

В разделе 3 показано, что $x_n = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m \right] y$, где k, l, m – натуральные показатели и $k + l + m = n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (13) в виде

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} y - A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m \right] y = \\ &= (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x. \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 3 $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_A^2 &= (A(x - x_n), x - x_n) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x, (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x \right) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^{2k} (E - \beta A)^{2l} (E - \gamma A)^{2m} x, x \right) = \\ &= \int_0^1 \lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m} d(E_\lambda x, x), \end{aligned}$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

Для оценки интересующей нас нормы найдем при $\lambda \in [0, 1]$ максимум подынтегральной функции $\psi(\lambda) = \lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m}$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, 1]$, положительных α, β, γ выполнялось условие (6). В разделе 3 показано, что для достаточно больших n справедливо $\lambda (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m \leq [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}$, поэтому

$$\lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m} \leq [2(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}.$$

В дальнейшем, для простоты, считаем, что $k = l = m = \frac{n}{3}$ ($n = 3p, p \in N$). Поэтому для

таких n справедлива оценка $\max_{\lambda \in [0, 1]} |\psi(\lambda)| \leq \left[\frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-1}$. Следовательно, при усло-

вии (6) получим следующую оценку $\|x - x_n\|_A \leq \left[\frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-1/2} \|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (13). Как показано в разделе 3, имеет место равенство

$$\begin{aligned} x_n - x_{n,\delta} &= A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta) = \\ &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] dE_\lambda (y - y_\delta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = (A(x_n - x_{n,\delta}), x_n - x_{n,\delta}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta), \right. \\
 &\quad \left. A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta) \right) = \\
 &= \left(A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right]^2 (y - y_\delta), y - y_\delta \right) = \\
 &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).
 \end{aligned}$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (6). В разделе 3 показано, что $|g_n(\lambda)| = \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] \right| \leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \xi_n(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right]^2 = \\
 &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] \right| \left| 1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right| \leq \\
 &\leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \left(1 + \left| (1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda) \right|^{n/3} \right) \leq \frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma),
 \end{aligned}$$

так как при условии (6) справедливо $\left| (1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda) \right|^{n/3} < 1$.

Итак, для любых $n \geq 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq \frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta^2$, поэтому

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1.$$

Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1$$

и при $n \rightarrow \infty$ $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, если в процедуре (3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то получим регуляризирующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 4. *Итерационная процедура (3) при условии (6) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать так, чтобы $\sqrt{n} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.*

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left[\frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-1/2} \|x\| + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1. \quad (14)$$

Оптимизируем полученную оценку (14) по n , т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части равенства (14), получим $3^{1/2}(\alpha + \beta + \gamma)^{-1/2} e^{-1/2} \|x\| = 3^{-1/2} 2(\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 3(\alpha + \beta + \gamma)^{-1} e^{-1/2} (2\delta)^{-1} \|x\|. \quad (15)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (14), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2e^{-1/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \quad (16)$$

Из (16) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α, β, γ . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, β, γ , и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α, β, γ возможно большими, удовлетворяющими условию (6), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$. Таким образом, доказана

Теорема 5. При условии (6) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (3) в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид (16) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (15).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Эти условия дает

Теорема 6. Если выполнены условия: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, где

$$E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda, \quad \varepsilon - \text{фиксированное положительное число } (0 < \varepsilon < 1), \text{ то из сходимости}$$

$x_{n,\delta}$ к решению x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = 0$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|^2 &= \int_0^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), x - x_{n,\delta}) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \frac{1}{\varepsilon} \|x - x_{n,\delta}\|_A^2. \end{aligned}$$

Поэтому из $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ следует $\|x - x_{n,\delta}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Теорема 6 доказана.

Замечание 3. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] y_\delta$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $E_\varepsilon x = 0$ и $E_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений (3) в норме пространства H не требуется предположения истокорпредставимости точного решения.

Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокорпредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокорпредставимости s . Тем не менее, метод (3) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [2; 5; 11].

Определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left. \begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (17)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила останова (17) к итерационному методу (3). Рассмотрим при $n = 3p$, $p = 1, 2, \dots$ семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/3} (1 - \beta\lambda)^{n/3} (1 - \gamma\lambda)^{n/3}]$. Из раздела 3 при условиях (6) получим

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| \leq \frac{n(\alpha + \beta + \gamma)}{3}, \quad (18)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left| (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \right| \leq 1, \quad (19)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) = (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, 1], \quad (20)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s \left[\frac{n(\alpha + \beta + \gamma)\varepsilon}{3} \right]^{-s}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (21)$$

Аналогично [11] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Если для некоторой подпоследовательности $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 7. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ ($m = 3p$, $p = 1, 2, 3, \dots$) в методе (3) выбран по правилу (17), тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $M(A) = \overline{R(A)} = H$. Так как

$$E - A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] =$$

$$= (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A),$$

то $A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] =$
 $= E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)$. Имеем

$$x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)]y_\delta,$$

следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = A^{-1}[E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)](y_\delta - y) -$$

$$- (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)x = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{\frac{n}{3}} (E - \beta A)^{\frac{n}{3}} (E - \gamma A)^{\frac{n}{3}} \right] (y_\delta -$$

$$- y) - (E - \alpha A)^{\frac{n}{3}} (E - \beta A)^{\frac{n}{3}} (E - \gamma A)^{\frac{n}{3}} x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - A g_n(A))x$$

(здесь и ниже $n = 3p$, $p = 1, 2, 3, \dots$). Значит,

$$Ax_{n,\delta} - y = -A(E - A g_n(A))x + A g_n(A)(y_\delta - y). \quad (22)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - A g_n(A))x - (E - A g_n(A))(y_\delta - y). \quad (23)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$\sigma_n = n \|A(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Кроме того, из (18) и (19)

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{n(\alpha + \beta + \gamma)}{3} \delta, \quad (26)$$

$$\|E - A g_n(A)\| \leq 1. \quad (27)$$

Применим правило останова (17). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$ и из (23) и (27) получим при $n = m$

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - A g_m(A))(y_\delta - y)\| \leq b\delta + \delta = (b+1)\delta.$$

Следовательно,

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \leq (b+1)\delta. \quad (28)$$

Для любого $n < m$ получим

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - A g_n(A))(y - y_\delta)\| \geq b\delta - \delta = (b-1)\delta,$$

т.е. для любого $n < m$

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (29)$$

Из (25) и (29) при $n = m-3$ получим $\frac{\sigma_{m-3}}{m-3} = \|A(E - A g_{m-3}(A))x\| \geq (b-1)\delta$ или, что то

же, $(m-3)\delta \leq \frac{\sigma_{m-3}}{b-1} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ (так как из (25) $\sigma_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$), следовательно,

$m\delta \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - A g_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - A g_m(A))x\| +$$

$$+ \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} m\delta \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n), \delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (28) $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, следовательно, при $\delta_n \rightarrow 0$ $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, и по лемме 3 $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда имеем $\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} m(\delta_n) \delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$.

Теорема 7 доказана. Имеет место

Теорема 8. Пусть выполняются условия теоремы 7 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$, тогда справедливы оценки $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m, \delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \left\{ 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (30)$$

Доказательство.

При $n = m - 3$ имеем $\|A(E - Ag_{m-3}(A))x\| = \|A^{s+1}(E - Ag_{m-3}(A))z\| \leq (s+1)^{s+1} \left[(m-3) \frac{(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-(s+1)} \|z\|$. Используя (29), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{s+1} \left[(m-3) \frac{(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-(s+1)} \|z\|$, откуда $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$.

При помощи неравенства моментов оценим выражение

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \|A^s(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \times \| (E - Ag_m(A))z \|^{1/(s+1)} \leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m, \delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{m(\alpha + \beta + \gamma)}{3} \delta \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \left\{ 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Замечание 4. Порядок оценки (30) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$ и, как следует из [2], он оптимален в классе решений $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 5. В формулировке теоремы 8 предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.

6. Сходимость метода в случае неединственного решения. Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение (1) имеет неединственное решение). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 9. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$. Тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

$$а) Ax_n \rightarrow \Pi(A)y, \quad \|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|;$$

б) метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения.

Доказательство.

Применим оператор A к методу (2), получим $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда

$$\begin{aligned} Ax_n - \Pi(A)y &= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y = \\ &= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} - (E - \alpha_n A)\Pi(A)y = (E - \alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) = \\ &= (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y). \end{aligned}$$

Обозначим $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $v_n = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_1 A)v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2$, $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$, $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$, то, воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A (для упрощения считаем, что $\|A\| = 1$), получим

$$\|v_n\| = \left\| \int_0^1 (1 - \alpha_1 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda) dE_\lambda v_0 \right\| = \left\| \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m dE_\lambda v_0 \right\|.$$

Здесь l, m, k – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Считаем, что $k = l = m = n/3$. Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &\leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^1 (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m dE_\lambda v_0 \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^{n/3}(\varepsilon_0) \|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Здесь $q = \max_{\lambda \in [\varepsilon_0, 1]} |(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$. Следовательно,

$v_n \rightarrow 0$, откуда $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (по теореме 2.1 из [8]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} x_n &= (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y = \\ &= (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A(x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)(x^* - x_{n-1}) = 0$.

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A(\Pi(A)x_{n-1} - \\ &- \Pi(A)x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A(\Pi(A)x_{n-1} - x^*), \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A(\Pi(A)x_{n-1} - x^*)$. Отсюда

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A) \dots (E - \alpha_1 A)\omega_0$$

и, аналогично v_n , можно показать, что $\omega_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тогда $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема 9 доказана.

Замечание 6. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т. е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{31}$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного

решения сформулированной задачи выберем функцию $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 1-s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$

С использованием квадратурной формулы правых прямоугольников при $m = 32, h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih, i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ интегрального уравнения (31).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения

\tilde{y}_i , $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно,

$\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении

(31) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами

$s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t, s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j$. Тогда получим равенство

$\sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав по-

следнее равенство в точках t_i , $i = \overline{1, m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j +$

$\rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1, m}$. Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения

\tilde{y}_i и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (32) методом итераций (3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1} \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j^{(n)} \right], \quad x_i^{(0)} = 0, \quad (33)$$

$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad i = \overline{1, m}.$$

Затем система (32) решалась методом простой итерации [1–9], который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j^{(n)} \right], \quad x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (34)$$

При счете выбирались: $\alpha = 0,8$, $\beta = 4,4$, $\gamma = 5,6$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. При решении задачи итерационными методами (33) и (34) на каждом шаге

итерации вычислялись: $\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – дискретная норма

невязки, $\|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма

разности между точным и приближенным решениями

$$\|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x(t_i) - x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2}.$$

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (17), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (33) потребовалось 6 итераций, при счете методом простой итерации (34) – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 10 и 48 итераций.

Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (3) требует примерно в 3,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации [1–9], что соответствует результатам раздела 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
7. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P.166–176.
9. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестник Белорусского университета. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
10. Константинова, Я. В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.
11. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 196 с.
12. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

O.V. Matysik, V.S. Zajko On a Regularizing Algorithm Ill-posed Problems with Bounded Operators

In a Hilbert space is studied iteration method with variable step ill-posed problems with a positive definite bounded self-adjoint operator. Investigated the convergence of the iteration method in the case of a priori and a posteriori choice of the number of iterations of the exact and approximate right sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. We study the case nonunique solutions of the equation and prove the convergence of the method in the energy norm of the Hilbert space. Method of numerical modeling problem solved.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.02.14

УДК 512.542

С.А. Серая, А.А. Трофимук

О A_4 -СВОБОДНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДЕКСЫ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Исследуется конечная A_4 -свободная нормальная подгруппа K группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой подгруппы не превышает 4, производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5, p -длина подгруппы K не превышает 2 для всех простых p . Построены примеры, показывающие точность полученных оценок. В доказательствах использовались фрагменты теории формаций и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Пусть K – нормальная подгруппа группы G . В 2000 г. Л.А. Шеметков предложил рассмотреть строение нормальной разрешимой подгруппы группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп.

В работе [2, теорема 3.1] Л.А. Шеметков показал, что если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K , равен простому числу, то подгруппа K сверхразрешима. Л.Я. Поляков [3, теорема 1] установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число либо квадрат простого числа. Если предположить, что в группе индексы максимальных подгрупп, не содержащих K , делятся еще и на кубы простых чисел, то группа может быть неразрешимой. Примером служит группа $PSL(2,7)$, индексы максимальных подгрупп которой равны 7 и 8.

Из утверждения М.В. Селькина [4, следствие 3.2.6] следует, что если в группе G все максимальные подгруппы, не содержащие нормальную подгруппу K , имеют примарные индексы, то либо группа K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(K)$ – разрешимый радикал группы K .

Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная A_4 , то A_4 -свободная нормальная подгруппа K группы G , у которой индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей K , примарен, является разрешимой.

В работе [5] В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская получили оценки производной, нильпотентной и p -длины нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число, квадрат простого числа или куб простого числа.

Следующая теорема даёт новую информацию о строении такой A_4 -свободной нормальной подгруппы K .

Теорема. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы

$K/\Phi(K)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы K не превышает 4, p -длина не превышает 2 для всех простых p .

Пример 1. С помощью компьютерной системы GAP построена группа $G = [E_{7,3}][[S]SL(2,3)]$, где S – экстраспециальная группа порядка 27. Ясно, что $|G| = 2^4 3^4 7^3$. В группе G существует нормальная A_4 -свободная подгруппа $K = [E_{7,3}][[S]Q_8]$ с единичной подгруппой Фраттини. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , принадлежат множеству $\{4, 9, 343\}$, а производная длина подгруппы K равна 5. Значит оценка производной длины в теореме точная.

Следствие 1. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел $p \in \{2, 3, 5\}$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример 2. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . A_4 -свободная группа $G = [E_{3^3}][[Z_{13}]Z_3]$ порядка 1053 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{3, 13, 27\}$, имеет производную длину равную 3, нильпотентную длину равную 3, 3-длина равную 2, 13-длина равную 1. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n . Следовательно, оценки производной длины, нильпотентной длины и p -длины, полученные в следствии 1, являются точными.

Следствие 2. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример 3. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . Группа $G = [E_{3^3}]SL(2,3)$ порядка 648 имеет нормальную A_4 -свободную подгруппу $K = [E_{3^3}]Q_8$ с единичной подгруппой Фраттини. Индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , принадлежат множеству $\{3, 4, 9\}$. Производная длина группы K равна 3. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2, является точной.

В случае, когда $K = G$ получим целый ряд следствий.

Следствие 3. Пусть G – A_4 -свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, p -длина не превышает 2 для всех простых p .

Следствие 4. Пусть G – A_4 -свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

1. Вспомогательные результаты

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных, абелевых и сверхразрешимых групп обозначают через \mathfrak{N} , \mathfrak{A} и \mathfrak{U} соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [6, с. 36] произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 ([7], лемма 9, лемма 10, лемма 11). **1.** Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метациклическая.

2. Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метабелева.

3. Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3, Z_6, S_3, [Z_3]Z_4, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, Z_4 \times S_3, Z_{24}, [Z_3]Z_8, Z_{31}, SL(2,3), [SL(2,3)]Z_2, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{24}]Z_2, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2, [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, если H – неприводимая A_4 -свободная группа, то производная длина H не превышает 2.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n .

Лемма 3 [7, лемма 7]. Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 4 [1, теорема 2.8]. Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда факторгруппа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 5 [1, теорема 2.16]. **1.** Если H – группа простого порядка p , то группа всех автоморфизмов $\text{Aut } H$ циклическая порядка $p-1$.

2. Если H – циклическая группа, то группа $\text{Aut } H$ абелева.

Лемма 6 [7, лемма 12-13]. **1.** Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{A}^3$.

Кроме того, если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 7 [8, лемма VI.6.9]. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда:

1. Если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_p(G/N) \leq l_p(G)$;

2. Если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то

$$l_p(G/N_1 \cap N_2) \leq \text{Max}\{l_p(G/N_1), l_p(G/N_2)\};$$

$$3. \quad l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G).$$

Лемма 8. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\text{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

1. Доказательство теоремы

Применим индукцию по порядку подгруппы K . Покажем, что $K \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Пусть N – произвольная нормальная неединичная подгруппа группы G и M/N – максимальная подгруппа группы G/N , не содержащая нормальную подгруппу KN/N . Тогда очевидно, что M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K . По условию теоремы индекс подгруппы M есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Так как $|G:M| = |G/K:M/K|$, то индекс максимальной подгруппы M/K в группе G/K есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы KN/N . Поэтому справедливо включение $KN/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы группы G . Тогда по индукции $K/K \cap N_1 \cong KN_1/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $K/K \cap N_2 \cong KN_2/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} формация, то $K \cong K/K \cap N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа.

Так как K – разрешимая подгруппа, то подгруппа Фраттини $\Phi(K)$ группы K является собственной подгруппой подгруппы Фиттинга $F = F(K)$ и $F = C_K(F)$. Так как F единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\Phi(K) = 1$, F – элементарная абелева подгруппа и существует максимальная в группе G подгруппа M такая, что $G = [F]M$. Очевидно, что подгруппа M не содержит подгруппу F , а, значит, по условию имеет индекс в группе G равный простому числу, квадрату простого или кубу простого числа.

Предположим сначала, что индекс подгруппы M является простым числом, т.е. $|F| = |G:M| = p$. Тогда по лемме 4 и лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой, как группа автоморфизмов группы F простого порядка p . Ясно, что в этом случае справедливо включение $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|F| = |G:M| = p^2$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, p)$. В этом случае по лемме 6(1) подгруппа $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2 \subset \mathfrak{F}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = |G:M| = p^3$. По лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(3, p)$. Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 6(2) $K/F \in \mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^3$ и $K \in \mathfrak{F}$. Пусть K/F действует приводимо на F . Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K . Так как $|F| = p^3$, то возможны две ситуации: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = p$, $|H_2| = p^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то по лемме 5 $K/C_K(F_i)$ –

циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1) \times K/C_K(F_2) \times K/C_K(F_3)$. Поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$. Если $F = H_1 \times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2) \in \mathfrak{U}^2$. Теперь $K/F \in \mathfrak{U}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1) \times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K \in \mathfrak{F}$.

Итак, в любом случае $K \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. По лемме 3 $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}^5$ и производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5. Так как $K \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина K не превышает 4. Так как метанильпотентная группа имеет p -длину ≤ 1 , то p -длина подгруппы K не превышает 2.

2. Доказательство следствия 1

Применим индукцию по порядку подгруппы K . Покажем, что $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Для случая, когда индекс максимальной подгруппы M , не содержащей K , является простым числом или квадратом простого числа, доказательство следствия 1 полностью повторяет доказательство теоремы.

Остается рассмотреть случаи, когда $|F| = |F(K)| = |G:M|$ равен либо 2^3 , либо 3^3 , либо 5^3 . Если $|F| = 2^3$ или $|F| = 3^3$, то по лемме 4 K/F изоморфна некоторой подгруппе либо полной линейной группы $GL(3,2)$, либо полной линейной группы $GL(3,3)$. Как в первом, так и во втором случае $K/F \in \mathfrak{U}^2$. Поэтому $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Пусть $|F| = 5^3$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой подгруппе полной линейной группы $GL(3,5)$.

Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 2(3) $K/F \in \mathfrak{U}^2$ и $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$. Пусть K/F действует приводимо на F . Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K . Так как $|F| = 5^3$, то возможны две ситуации: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = 5$, $|H_2| = 5^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то $K/C_K(F_i)$ – циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1) \times K/C_K(F_2) \times K/C_K(F_3)$, поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}$. Если $F = H_1 \times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2) \in \mathfrak{U}^2$. Теперь $K/F \in \mathfrak{U}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1) \times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$.

Итак, в любом случае $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2$. По лемме 3 $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}^3$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 3 и нильпотентная длина K не превышает 3.

Так как $K \in \mathfrak{N}^3$, то p -длина подгруппы K не превышает 2. Используя индукцию по порядку группы K , докажем, что p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Так как условие следствия наследуют все фактор-группы KN/N , то по лемме 7 можно считать, что $O_p(K) = \Phi(K) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Таким образом, подгруппа Фиттинга $F = F(K) = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α , обладающая дополнением M в группе G , т. е. $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G:M|$ и M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , то $\alpha \leq 2$ при $p > 5$ или $\alpha \leq 3$ при $p = 2$ и $p = 5$. Так как $C_K(F) = F$, то $O_p(K/F) = 1$ и фактор-группа K/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, p)$.

Если $|F| = p$, то по лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой порядка $p-1$ и p -длина группы K не превышает 1. Пусть $|F| = p^2$. Тогда для $p > 3$ по лемме 6 фактор-группа K/F является p' -группой, как группа изоморфная некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, p)$. В этом случае p -длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 2)$. Так как $O_2(K/F) = 1$, то из леммы 2(1) следует, что K/F – p' -группа и поэтому p -длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 5^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 5)$. Так как $O_5(K/F) = 1$, то из леммы 2(3) следует, что K/F – p' -группа и поэтому p -длина группы K не превышает 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т.32, №3. – С.533–559.
3. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // Конечные группы: сб. – Минск, 1966. – С.89–97.
4. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

S.A. Seraja, A.A. Trofimuk On A_4 -Free Normal Subgroups of Groups with Restrictions on Indexes of Some Maximal Subgroups

We study finite A_4 -free subgroup K of group G in which indexes of maximal subgroups that not contain K , are equal to prime numbers, squares of primes or cube of primes. In particular found that the nilpotent length of such groups does not exceed 4, the derived length of $K/\Phi(K)$ does not exceed 5, and p -length does not exceed 2 for all prime p . We construct examples showing the accuracy of the estimates. The proofs include fragments of the theory of formations and calculations in the system of computer algebra GAP

УДК 519.65+517.548.5

А.П. Худяков

ОБОБЩЕННЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА–БИРКГОФА ДЛЯ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО И МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА

Для функций скалярного аргумента построен и исследован обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа относительно экспоненциальных функций с произвольными показателями степени. Получены явное представление и оценка погрешности. Данная формула обобщена на случай функций матричного аргумента. В частных случаях показана инвариантность интерполяционной формулы относительно экспоненциальных матричных многочленов.

Введение

Интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и её производных. Эта задача с пропусками порядков производных в отличие от задачи эрмитова типа не всегда разрешима [1–3].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических операторных многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [4; 5]. В скалярном случае обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций построены и исследованы в [6; 7]. В [8; 9] они обобщены на случай функций матричного аргумента.

Интерполирование скалярных функций. Пусть имеется совокупность узлов $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, а также заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$. В узлах известны значения $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$) функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов x_j известно значение $D_{n+1}(f; x_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_{n+1}f(x) = D(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n)f(x),$$

где $D = \frac{d}{dx}$.

Функцию $f(x)$ будем интерполировать с помощью обобщенных полиномов относительно экспоненциальных функций вида $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ ($k = \overline{0, n+1}$). Построим многочлен $\tilde{L}_{n+1}(x)$ степени $n+1$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = \overline{0, n}); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j). \quad (1)$$

Введем следующие функции $g_m(y_0, y_1, \dots, y_m)$, заданные рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} g_0(y_0) &= -1, \quad g_1(y_0, y_1) = g_0(y_1)e^{\lambda_1 y_0} - g_0(y_0)e^{\lambda_1 y_1} = e^{\lambda_1 y_1} - e^{\lambda_1 y_0}, \\ g_2(y_0, y_1, y_2) &= -g_1(y_1, y_2)e^{\lambda_2 y_0} + g_1(y_0, y_2)e^{\lambda_2 y_1} - g_1(y_0, y_1)e^{\lambda_2 y_2}, \\ g_3(y_0, y_1, y_2, y_3) &= g_2(y_1, y_2, y_3)e^{\lambda_3 y_0} - g_2(y_0, y_2, y_3)e^{\lambda_3 y_1} + \end{aligned}$$

$$+ g_2(y_0, y_1, y_3)e^{\lambda_3 y_2} - g_2(y_0, y_1, y_2)e^{\lambda_3 y_3}$$

и в общем случае

$$g_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k g_{n-1}(y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n) e^{\lambda_n y_k} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. При перестановке любых двух соседних аргументов y_k, y_{k+1} местами функция $g_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ меняет знак на противоположный:

$$g_n(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \dots, y_n) = -g_n(y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n).$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ имеет место равенство $g_1(y_1, y_0) = -g_1(y_0, y_1)$. Предположим, что при $n = m$ данное утверждение верно, т. е. для любого $0 \leq k \leq m - 1$

$$g_m(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \dots, y_m) = -g_m(y_0, y_1, \dots, y_m).$$

Выберем произвольное $0 \leq p \leq m$. Тогда при $n = m + 1$ получаем, что

$$\begin{aligned} & g_{m+1}(y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \dots, y_{m+1}) = \\ & = (-1)^m \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} + \\ & \quad + (-1)^{m+p} g_m(y_0, y_1, \dots, y_p, y_{p+2}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_{p+1}} + \\ & \quad + (-1)^{m+p+1} g_m(y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_p} + \\ & + (-1)^m \sum_{k=p+2}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_p, y_{p+2}, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} = \\ & = -(-1)^m \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} - \\ & \quad - (-1)^{m+p} g_m(y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_p} - \\ & \quad - (-1)^{m+p+1} g_m(y_0, y_1, \dots, y_p, y_{p+2}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_{p+1}} - \\ & \quad - (-1)^m \sum_{k=p+2}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} = \\ & = -(-1)^m \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{m+1}) e^{\lambda_{m+1} y_k} = -g_{m+1}(y_0, y_1, \dots, y_{m+1}). \quad (2) \end{aligned}$$

Равенство (2) имеет место для $0 \leq k \leq m$. Отсюда следует справедливость леммы 1.

Лемма 2. Для любых вещественных чисел y_0, y_1, \dots, y_{n-1} и любых i и n ($0 \leq i \leq n - 1, n \geq 1$) справедливо равенство

$$g_n(y_i, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0.$$

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей леммы, применим метод математической индукции. При $n = 1$ получим

$$g_1(y_0, y_0) = e^{\lambda_1 y_0} - e^{\lambda_1 y_0} = 0.$$

Предположим, что при $n = m$ утверждение верно, т. е. для любого $0 \leq i \leq m - 1$

$$g_m(y_i, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = 0.$$

Выберем произвольное $0 \leq k \leq m$. Тогда при $n = m + 1$ получим

$$\begin{aligned}
& g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \dots, y_m) = (-1)^m g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} + \\
& + (-1)^m \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j g_m(y_k, y_0, y_1, \dots, y_{j-2}, y_j, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_{j-1}} = \\
& = (-1)^m \left(g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} + (-1)^{k+1} g_m(y_k, y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} \right).
\end{aligned}$$

Последовательно меняя местами соседние аргументы, в силу леммы 1 будем иметь

$$\begin{aligned}
& g_m(y_k, y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) = -g_m(y_0, y_k, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) = \\
& = g_m(y_0, y_1, y_k, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) = \dots = (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_m).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \dots, y_m) = (-1)^m \left(1 + (-1)^{2k+1} \right) g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) справедливо для произвольного i , где $0 \leq i \leq m$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Если $\tilde{g}_n = g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, то интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_n(x) e^{-\lambda_{n+1} x} D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (4)$$

где

$$L_n(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i g_n(x, x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(x, x_0, x_1, \dots, x_n),$$

удовлетворяет условиям (1).

Доказательство. Так как по лемме 1 при $k = i$

$$g_n(x_k, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (-1)^i g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-1)^i \tilde{g}_n,$$

а при $k \neq i$ по лемме 2 имеем $g_n(x_k, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$, то $L_n(x_k) = f(x_k)$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Аналогично, по лемме 2 при тех же значениях k , справедливы равенства $\Omega_n(x_k) = 0$. Таким образом, выполняется первая группа условий (1).

Многочлен $\Omega_n(x)$ представим в виде $\Omega_n(x) = e^{\lambda_{n+1} x} + \Phi_n(x)$, где $\Phi_n(x)$, а также многочлен $L_n(x)$ являются конечными линейными комбинациями слагаемых вида $\alpha_k e^{\lambda_k x}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа. Так как $D_{n+1}(e^{\lambda_k x}) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$, то $D_{n+1} \Phi_n(x) = D_{n+1} L_n(x) = 0$, и в силу того, что $D_{n+1}(e^{\lambda_{n+1} x}) = \lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} x}$, будем иметь $D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j)$, т. е. последнее равенство в (1) также выполняется. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим линейный случай экспоненциального интерполирования. Пусть x_0 и x_1 – узлы интерполирования и в этих узлах известны значения $f(x_0)$, $f(x_1)$ функции $f(x)$, а также в одном из узлов x_j известно значение оператора $D_2(f; x_j)$, где $D_2 f(x) = D(D - \lambda_1) f(x)$. Также пусть заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда формула (4) при $n = 1$ примет вид

$$\tilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_1(x)e^{-\lambda_2 x_j} D_2(f; x_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

где

$$L_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_1}}{e^{\lambda_1 x_0} - e^{\lambda_1 x_1}} f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} f(x_1),$$

$$\Omega_1(x) = e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0} + \frac{(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0})(e^{\lambda_2 x_0} - e^{\lambda_2 x_1})}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}}.$$

Заметим, что $\Omega_1(x_k) = 0$ при $k = 0, 1$, а многочлен $L_1(x)$ может быть представлен в виде

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} [f(x_1) - f(x_0)].$$

Отметим, что ряд интерполяционных формул других типов для функций, а также для операторов в общих линейных, гильбертовых и функциональных пространствах получен в [10, 11].

Построим представление остаточного члена для полинома (4). Приведем обобщенную теорему Ролля [12]. Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – некоторая чебышевская система функций. Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\hat{L}_{n+1}f(x) \equiv (D - b_n) \cdots (D - b_0)f(x) \equiv (D - b_n)\hat{L}_n f(x),$$

такой, что функции $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{0, n}$) являются решениями дифференциального уравнения $\hat{L}_{n+1}f(x) = 0$, а любое другое решение этого уравнения может быть представлено как линейная комбинация функций $\varphi_k(x)$. Тогда если функции $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$ аналитические в интервале (a, b) и если $f(x)$ также аналитическая и обращается в нуль $n + 2$ раз с учетом кратности, то $\hat{L}_{n+1}f(x)$ обращается в нуль на этом интервале по крайней мере один раз.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема $n + 2$ раз в интервале (a, b) , то остаточный член $R_{n+1}(x) = f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)$ формулы (4) имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-\lambda_{n+1}x} D_{n+1}(f; x) \right\}_{x=\eta}, \quad (5)$$

где $\xi, \eta \in [a; b]$.

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x \neq x_k$ ($k = \overline{0, n}$). Обозначим $K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\Omega_n(x)}$,

и пусть $\psi(u) = f(u) - L_n(u) - K\Omega_n(u)$. Тогда будем иметь

$$D_{n+1}(\psi; u) = D_{n+1}(f; u) - K\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n+1}u}.$$

Применим далее обобщенную теорему Ролля. Так как $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \dots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0$, и в нашем случае $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $b_i(x) = \lambda_i$, $\hat{L}_{n+1}(f; x) \equiv D_{n+1}(f; x)$, то функция $D_{n+1}(\psi; x)$ имеет, по крайней мере, один нуль ξ на

отрезке $[a, b]$: $D_{n+1}(\psi; \xi) = 0$, откуда $K = \frac{e^{-\lambda_{n+1}\xi} D_{n+1}(f; \xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}$, и следовательно,

$$f(x) - L_n(x) = K\Omega_n(x) = \frac{\Omega_n(x)e^{-\lambda_{n+1}\xi} D_{n+1}(f; \xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \\ &= \frac{\Omega_n(x)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \left(D_{n+1}(f; \xi) e^{-\lambda_{n+1}\xi} - D_{n+1}(f; x_j) e^{-\lambda_{n+1}x_j} \right) = \\ &= \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \frac{d}{dx} \left\{ D_{n+1}(f; x) e^{-\lambda_{n+1}x} \right\}_{x=\eta}, \end{aligned}$$

где $\xi, \eta \in [a; b]$. Теорема 2 доказана.

Преобразуем правую часть (5).

$$R_{n+1}(x) = \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)e^{-\lambda_{n+1}\eta}}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \left(\frac{d}{dx} D_{n+1}(f; x) \Big|_{x=\eta} - \lambda_{n+1} D_{n+1}(f; \eta) \right). \quad (6)$$

Введем обозначения: $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |D_{n+1}f(x)|$, $B_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{d}{dx} D_{n+1}f(x) \right|$,

$$C_n = \max_{x \in [a, b]} |\Omega_n(x)|, \quad \gamma_{n+1} = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Теорема 3. Оценка погрешности формулы (4) для любого $x \in [a, b]$ имеет вид

$$\left| f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) \right| \leq \frac{(b-a)C_n e^{-\lambda_{n+1}a}}{\gamma_{n+1}} [B_{n+1} + \lambda_{n+1}M_{n+1}]. \quad (7)$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что справедливы следующие неравенства: $|\xi - x_j| \leq b - a$, $e^{-\lambda_{n+1}\eta} \leq e^{-\lambda_{n+1}a}$, $\xi, \eta \in [a, b]$. Учитывая данные неравенства и (6), получим оценку (7).

Применение и точность интерполяционной формулы (4) проиллюстрируем на конкретном примере.

Пример. Пусть $f(t) = \sin e^t$. Рассмотрим частные случаи формулы (4) при $n = 1, 2, 3, 4$. Учитывая свойства функции $f(t)$, построим интерполяционные полиномы на неравномерных сетках. Для данного конкретного случая соответствующие системы узлов будут такими

$$1) t_0^1 = 0,279; t_1^1 = 1,71; t_j^1 = t_1^1;$$

$$2) t_0^2 = 1,248; t_1^2 = 1,644; t_2^2 = 1,908; t_j^2 = t_0^2;$$

$$3) t_0^3 = 0,071; t_1^3 = 1,274; t_2^3 = 1,656; t_3^3 = 1,883; t_j^3 = t_2^3;$$

$$4) t_0^4 = 0,453; t_1^4 = 0,968; t_2^4 = 1,38; t_3^4 = 1,857; t_4^4 = 1,985; t_j^4 = t_3^4.$$

Тогда интерполяционные многочлены примут вид

$$\tilde{L}_2(t) = 1,350 - 0,2449e^{1,7t} + 0,004374e^{3,7t},$$

$$\tilde{L}_3(t) = 1,079 - 0,2241e^{4,1t} + 0,199e^{4,3t} - 0,01476e^{4,9t},$$

$$\tilde{L}_4(t) = -0,7893 + 1,914e^{0,8t} - 0,8199e^{3,2t} + 0,9813e^{3,7t} - 0,4588e^{3,9t},$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_5(t) &= 0,43185 + 1,3006e^{2,4t} - 1,4190e^{3,3t} + \\ &+ 2,1562e^{4,2t} - 1,6309e^{4,3t} + 0,0017349e^{5,7t}. \end{aligned}$$

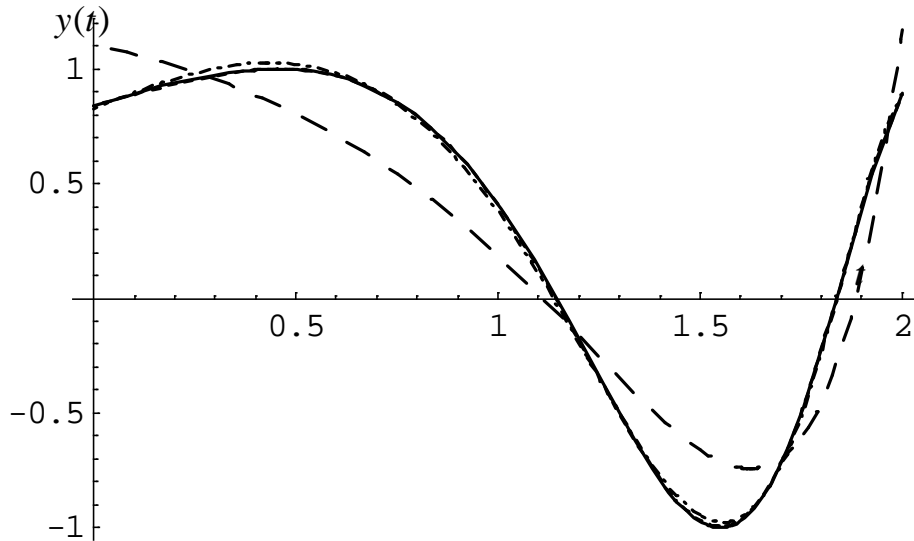


Рисунок 1

Точность приближения функции $f(t)$ многочленами $\tilde{L}_2(t)$, $\tilde{L}_4(t)$ и $\tilde{L}_5(t)$ изображается на графике (рисунок 1). Сплошной линией изображена интерполируемая функция $f(t)$, штриховой – $\tilde{L}_2(t)$, штрих-пунктирной – $\tilde{L}_4(t)$, пунктирной – $\tilde{L}_5(t)$.

Интерполяционные многочлены $\tilde{L}_4(t)$ и $\tilde{L}_5(t)$ более точно описывают поведение функции $f(t)$ на данном отрезке. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами равны

$$\|f(t) - \tilde{L}_2(t)\|_{C[0,2]} = \max_{t \in [0,2]} |f(t) - \tilde{L}_2(t)| = 0,3133; \quad \|f(t) - \tilde{L}_3(t)\|_{C[0,2]} = 0,2010;$$

$$\|f(t) - \tilde{L}_4(t)\|_{C[0,2]} = 0,02887; \quad \|f(t) - \tilde{L}_5(t)\|_{C[0,2]} = 0,005469.$$

С увеличением степени интерполяционного многочлена вида (4) в данном конкретном случае точность приближения повышается.

Интерполирование функций матричного аргумента. Рассмотрим сначала интерполяционную формулу Эрмита–Биркгофа первого порядка, построенную на основе экспоненциальных матричных функций вида $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ ($k = 0, 1, 2$), $A = A(t) \in X$, $t \in X$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – заданные действительные числа, а X – множество квадратных матриц.

Пусть $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – целая функция, $A_k = A_k(t) \in X$ ($k = 0, 1$) – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$ и в одном из узлов – значение $D_2(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_2 F(A) = (D - \lambda_1) D F(z) \Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}. \quad (8)$$

Для функции вида $B_1 F(A) B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X , значение оператора (8) вычисляется по формуле

$$D_2 (B_1 F(A) B_2; A) = B_1 D_2 F(A) B_2.$$

Теорема 4. Если матрица $[e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]$ обратима, то для интерполяционного многочлена

$$\tilde{L}_2(A) = L_1(A) + \frac{\Omega_1(A)e^{-\lambda_2 A_j} D_2(F; A_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (9)$$

где

$$L_1(A) = [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_1}] [e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]^{-1} F(A_0) + \\ + [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_0}] [e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_0}]^{-1} F(A_1), \quad (10)$$

$$\Omega_1(A) = e^{\lambda_2 A} - e^{\lambda_2 A_0} + [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_0}] [e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_0}]^{-1} [e^{\lambda_2 A_0} - e^{\lambda_2 A_1}],$$

выполняются условия $\tilde{L}_2(A_k) = F(A_k)$ ($k = 0, 1$); $D_2(\tilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j)$, где $j = 0$ или $j = 1$.

Если матрицы A_0 и A_1 перестановочны, то формула (9) точна для многочленов вида

$$P_2(A) = B + e^{\lambda_1 A} C + e^{\lambda_2 A} G, \quad (11)$$

где B, C, G – любые фиксированные матрицы из X .

Доказательство. Действительно, совпадение полинома $\tilde{L}_2(A)$ и интерполируемой функции $F(A)$ в узлах A_0 и A_1 следует из того, что $L_1(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_1(A_k) = 0$ при $k = 0, 1$. Так как $D_2(e^{\lambda_k A}) \equiv 0$ ($k = 0, 1$), а $D_2(e^{\lambda_2 A}) = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 A}$, то получим, что $D_2(\tilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j)$.

Докажем инвариантность формулы (9) относительно многочленов вида (11). Так как для $F(A) = B$ и $F(A) = e^{\lambda_1 A} C$, при условии перестановочности матриц A_0 и A_1 , выполняются тождества $L_1(A) \equiv F(A)$ и $D_2 F(A) \equiv 0$, то для этих функций $\tilde{L}_2(A) \equiv F(A)$. Далее, в силу того, что $D_2 F(A) = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 A} G$ для функции $F(A) = e^{\lambda_2 A} G$, то, учитывая перестановочность узлов, после несложных вычислений приходим к соотношению

$$\tilde{L}_2(A) = \left(e^{\lambda_1 A} [e^{\lambda_2 A_0} - e^{\lambda_2 A_1}] + [e^{\lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_1} - e^{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_0}] \right) \times \\ \times [e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]^{-1} G + \Omega_1(A) G = e^{\lambda_2 A} G \equiv F(A).$$

Таким образом, формула (9) точна для многочленов вида (11). Теорема 4 доказана.

Рассмотрим далее обобщенный вариант аналогичной задачи интерполирования для случая трех узлов и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ ($k = 0, 1, 2, 3$), $A = A(t) \in X$, $t \in \mathbb{C}$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, а X – множество квадратных матриц.

Пусть, как и ранее, $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – целая функция, $A_k = A_k(t) \in X$ ($k = 0, 1, 2$) – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, определенной на множестве X , и в одном из них – значение $D_3(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_3 F(A) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1) D F(z) \Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz},$$

причем $D_3(C_1 F(A) C_2) = C_1 D_3 F(A) C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы из X .

Введем функции $G_k(B_0, \dots, B_k)$ от матричных переменных $B_0, \dots, B_k \in X$ ($k = 1, 2, 3$), определяемые равенствами

$$\begin{aligned}
 G_1(B_0, B_1) &= e^{\lambda_1 B_1} - e^{\lambda_1 B_0}; \\
 G_2(B_0, B_1, B_2) &= -G_1(B_1, B_2)e^{\lambda_2 B_0} + G_1(B_0, B_2)e^{\lambda_2 B_1} - G_1(B_0, B_1)e^{\lambda_2 B_2}; \\
 G_3(B_0, B_1, B_2, B_3) &= G_2(B_1, B_2, B_3)e^{\lambda_3 B_0} - G_2(B_0, B_2, B_3)e^{\lambda_3 B_1} + \\
 &+ G_2(B_0, B_1, B_3)e^{\lambda_3 B_2} - G_2(B_0, B_1, B_2)e^{\lambda_3 B_3}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 5. Если матрица $G = G_2(A_0, A_1, A_2)$ обратима, то интерполяционный многочлен Эрмита-Биркгофа

$$\tilde{L}_3(A) = L_2(A) + \frac{\Omega_2(A)e^{-\lambda_3 A_j} D_3(F; A_j)}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \tag{13}$$

где $L_2(A) = G^{-1}(G_2(A, A_1, A_2)F(A_0) - G_2(A, A_0, A_2)F(A_1) + G_2(A, A_0, A_1)F(A_2))$,

$\Omega_2(A) = G^{-1}G_3(A, A_0, A_1, A_2)$, удовлетворяет условиям

$$\tilde{L}_3(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, 2); \quad D_3(\tilde{L}_3; A_j) = D_3(F; A_j).$$

Если матрицы A, A_0, A_1 и A_2 попарно перестановочны, то формула (13) точна для многочленов вида

$$P_3(A) = C_0 + e^{\lambda_1 A} C_1 + e^{\lambda_2 A} C_2 + e^{\lambda_3 A} C_3, \tag{14}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 – произвольные фиксированные матрицы из множества X .

Доказательство. Нетрудно заметить, что при $i = 0, 1, 2$ выполняются соотношения $G_2(A_i, A_1, A_2) = \delta_{i0}G, G_2(A_i, A_0, A_2) = -\delta_{i1}G, G_2(A_i, A_0, A_1) = \delta_{i2}G$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Отсюда следует, что $L_2(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_2(A_k) = 0$ при $k = 0, 1, 2$. Следовательно в узлах A_0, A_1 и A_2 многочлен $\tilde{L}_3(A)$ совпадает с функцией $F(A)$.

Многочлены $L_2(A)$ и $\Omega_2(A)$ можно представить в виде

$$L_2(A) = B_0 + G^{-1}e^{\lambda_1 A} B_1 + \sum_{k=0}^2 B_{k+2} e^{\lambda_2 A} F(A_k),$$

$$\Omega_2(A) = e^{\lambda_3 A} + \tilde{B}_0 + G^{-1}e^{\lambda_1 A} \tilde{B}_1 + \sum_{k=1}^3 \tilde{B}_{2k} e^{\lambda_2 A} \tilde{B}_{2k+1},$$

где B_k, \tilde{B}_ν ($k = 0, 1, \dots, 4; \nu = 0, 1, \dots, 7$) – некоторые фиксированные матрицы из множества X . Поэтому, так как $D_3(e^{\lambda_k A}) \equiv 0$ при $k = 1, 2$, то $D_3 L_2(A) \equiv 0$ и $D_3 \Omega_2(A) = D_3(e^{\lambda_3 A}) = \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_3 A}$, откуда следует, что $D_3(\tilde{L}_3; A_j) = D_3(F; A_j)$.

Используя рекуррентные соотношения (12), покажем, что формула (13) точна для многочленов вида (14). Для функции $F(A) = C_0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 L_2(A) &= L_2(C_0; A) = G^{-1}(G_2(A, A_1, A_2) - G_2(A, A_0, A_2) + G_2(A, A_0, A_1))C_0 = G^{-1} \times \\
 &\times \left((-G_1(A_1, A_2) + G_1(A_0, A_2) - G_1(A_0, A_1))e^{\lambda_2 A} - (G_1(A, A_2) - G_1(A, A_1))e^{\lambda_2 A_0} + \right. \\
 &\quad \left. + (G_1(A, A_2) - G_1(A, A_0))e^{\lambda_2 A_1} - (G_1(A, A_1) - G_1(A, A_0))e^{\lambda_2 A_2} \right) C_0 = G^{-1} \times \\
 &\times \left(-G_1(A_1, A_2)e^{\lambda_2 A_0} + G_1(A_0, A_2)e^{\lambda_2 A_1} - G_1(A_0, A_1)e^{\lambda_2 A_2} \right) C_0 = G^{-1} G C_0 = C_0.
 \end{aligned}$$

В то же время при $F(A) = e^{\lambda_k A} C_k$ ($k = 1, 2, 3$) справедливы равенства

$$L_2(A) = L_2(e^{\lambda_k A} C_k; A) = G^{-1} \left(e^{\lambda_1 A_1} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_0} - e^{\lambda_1 A_2} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_0} + e^{\lambda_1 A_2} e^{\lambda_2 A_1} e^{\lambda_k A_0} - \right. \\ \left. - e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_1} e^{\lambda_k A_0} + e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_2} e^{\lambda_k A_0} - e^{\lambda_1 A_1} e^{\lambda_2 A_2} e^{\lambda_k A_0} - e^{\lambda_1 A_0} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_1} + \right. \\ \left. + e^{\lambda_1 A_2} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_1} - e^{\lambda_1 A_2} e^{\lambda_2 A_0} e^{\lambda_k A_1} + e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_0} e^{\lambda_k A_1} - e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_2} e^{\lambda_k A_1} + \right. \\ \left. + e^{\lambda_1 A_0} e^{\lambda_2 A_2} e^{\lambda_k A_1} + e^{\lambda_1 A_0} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_2} - e^{\lambda_1 A_1} e^{\lambda_2 A} e^{\lambda_k A_2} + e^{\lambda_1 A_1} e^{\lambda_2 A_0} e^{\lambda_k A_2} - \right. \\ \left. - e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_0} e^{\lambda_k A_2} + e^{\lambda_1 A} e^{\lambda_2 A_1} e^{\lambda_k A_2} - e^{\lambda_1 A_0} e^{\lambda_2 A_1} e^{\lambda_k A_2} \right) C_k.$$

Тогда, учитывая попарную перестановочность матриц A, A_0, A_1 и A_2 , при $k = 1, 2$ получим

$$L_2(e^{\lambda_k A} C_k; A) = G^{-1} \left(- \left(e^{\lambda_1 A_2} - e^{\lambda_1 A_1} \right) e^{\lambda_2 A_0} + \left(e^{\lambda_1 A_2} - e^{\lambda_1 A_0} \right) e^{\lambda_2 A_1} - \right. \\ \left. - \left(e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_0} \right) e^{\lambda_2 A_2} \right) e^{\lambda_k A} C_k = G^{-1} G e^{\lambda_k A} C_k = e^{\lambda_k A} C_k.$$

Далее, так как $D_3(e^{\lambda_k A} C_k) = D_3(e^{\lambda_k A}) C_k = \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1) (\lambda_k - \lambda_2) e^{\lambda_k A} C_k$, то $D_3(e^{\lambda_k A} C_k) \equiv 0$ при $k = 0, 1, 2$, а

$$D_3(e^{\lambda_3 A} C_3) = \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_2) e^{\lambda_3 A} C_3. \quad (15)$$

Следовательно, для функции $F(A) = C_0 + e^{\lambda_1 A} C_1 + e^{\lambda_2 A} C_2$ выполняется тождество $\tilde{L}_3(A) \equiv F(A)$. Используя последнее равенство в (12) и формулу (15), для $F(A) = e^{\lambda_3 A} C_3$ будем иметь

$$\tilde{L}_3(A) = L_2(A) + \Omega_2(A) = G^{-1} \left(G_2(A, A_1, A_2) e^{\lambda_3 A_0} - G_2(A, A_0, A_2) e^{\lambda_3 A_1} + \right. \\ \left. + G_2(A, A_0, A_1) e^{\lambda_3 A_2} + G_2(A_0, A_1, A_2) e^{\lambda_3 A} - G_2(A, A_1, A_2) e^{\lambda_3 A_0} + \right. \\ \left. + G_2(A, A_0, A_2) e^{\lambda_3 A_1} - G_2(A, A_0, A_1) e^{\lambda_3 A_2} \right) C_3 = G^{-1} G e^{\lambda_3 A} C_3 = e^{\lambda_3 A} C_3.$$

Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (14). Теорема 5 доказана.

Рассмотрим далее на множестве квадратных матриц X аналогичный вариант интерполяционной задачи для случая произвольного числа узлов $A_0, A_1, \dots, A_n \in X$ и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$, $A \in X$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$), где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ – заданные действительные числа, удовлетворяющие условию $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1}$.

В данном случае в качестве оператора $D_{n+1}F(A)$ берется матрично-дифференциальный оператор

$$D_{n+1}F(A) = (D - \lambda_n) \cdots (D - \lambda_2) (D - \lambda_1) DF(z) \Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}. \quad (16)$$

При этом значение оператора (16) для матричной функции $\Phi(A)$ вида $\Phi(A) = C_1 F(A) C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы, а $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – целая функция, вычисляется по правилу $D_{n+1}\Phi(A) = C_1 D_{n+1}F(A) C_2$.

Ранее мы рассмотрели матричные функции $G_k(B_0, \dots, B_k)$ ($k = 1, 2, 3$), задаваемые равенствами (12). Доопределим данные функции в общем случае при $k = n$ по формуле

$$G_n(B_0, B_1, \dots, B_n) =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k G_{n-1}(B_0, \dots, B_{k-1}, B_{k+1}, \dots, B_n) e^{\lambda_n B_k} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

При этом будем считать, что $G_0(B_k) = -I$ ($k = 0, 1, \dots, n$), где I – единичная матрица.

Приведем две леммы, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 3. При перестановке любых двух соседних аргументов B_k, B_{k+1} местами функция $G_n(B_0, B_1, \dots, B_n)$ меняет знак на противоположный:

$$G_n(B_0, B_1, \dots, B_{k-1}, B_{k+1}, B_k, B_{k+2}, \dots, B_n) = -G_n(B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n).$$

Лемма 4. Для любых матриц B_0, B_1, \dots, B_{n-1} из множества X и любых i и n ($0 \leq i \leq n-1, n \geq 1$) справедливо равенство

$$G_n(B_i, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0.$$

Доказательства данных лемм полностью повторяют доказательства лемм 1 и 2, если в них заменить скалярные переменные y_0, y_1, \dots, y_n матрицами B_0, B_1, \dots, B_n и вместо скалярных функций $g_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ рассматривать матричные функции $G_n(B_0, B_1, \dots, B_n)$.

Теорема 6. Если матрица $\tilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \dots, A_n)$ обратима, то матричный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A) e^{-\lambda_{n+1} A_j} D_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (18)$$

где

$$L_n(A) = \tilde{G}_n^{-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i G_n(A, A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) F(A_i), \quad (19)$$

$$\Omega_n(A) = (-1)^n \tilde{G}_n^{-1} G_{n+1}(A, A_0, A_1, \dots, A_n), \quad (20)$$

удовлетворяет условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j). \quad (21)$$

Доказательство. Так как по лемме 3 при $k = i$

$$G_n(A_k, A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) = (-1)^i G_n(A_0, A_1, \dots, A_n) = (-1)^i G_n,$$

а при $k \neq i$ по лемме 4 имеем $G_n(A_k, A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n) = 0$, то $L_n(A_k) = F(A_k)$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Аналогично (по лемме 4) при тех же значениях k справедливы равенства $\Omega_n(A_k) = 0$. Таким образом, выполняется первая группа условий (21).

Многочлен $L_n(A)$ можно представить в виде

$$L_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} B_{k,\nu} e^{\lambda_k A} C_{k,\nu}, \quad (22)$$

где m_k – соответствующие натуральные числа, а $B_0, B_{k,\nu}, C_{k,\nu}$ – некоторые фиксированные матрицы из множества X . Из (17) и (20) следует, что $\Omega_n(A) = e^{\lambda_{n+1} A} + \Phi_n(A)$, где функция $\Phi_n(A)$ имеет представление вида (22).

Так как $D_{n+1}(e^{\lambda_k A}) \equiv 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$, то $D_{n+1}L_n(A) \equiv D_{n+1}\Phi_n(A) \equiv 0$. Поэтому в силу того, что $D_{n+1}(e^{\lambda_{n+1} A}) = \lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} A}$, учитывая структуру

многочлена (18), получим, что $D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j)$, т. е. последнее условие в (21) также выполняется. Теорема 6 доказана.

Построим формулу, аналогичную (18), в которой оператор $D_{n+1}F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A)$, $A \in X$, дифференцируемой по Гато $n+1$ раз в узле $A_j \in X$. Рассмотрим матрично-дифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{n+1}F(A) &\equiv \tilde{D}_{n+1}F(A; H_{n+1}H_n \cdots H_1) = \\ &= (D_{H_{n+1}} - \lambda_n H_{n+1}) \cdots (D_{H_3} - \lambda_2 H_3) (D_{H_2} - \lambda_1 H_2) D_{H_1} F(A), \end{aligned} \quad (23)$$

где $D_{H_k}F(A) = \delta F[A; H_k]$ ($k=1, 2, \dots, n+1$) – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_k \in X$. Легко убедиться, что на множестве перестановочных матриц решением уравнения $\tilde{D}_{n+1}F(A) = 0$ являются функции $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ ($k=0, 1, \dots, n$), а также любая фиксированная матрица из множества X .

Теорема 7. Если матрицы $\tilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \dots, A_n)$ и H_1, H_2, \dots, H_{n+1} обратимы, то матричный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A)(H_{n+1}H_n \cdots H_1)^{-1} e^{-\lambda_{n+1}A_j} \tilde{D}_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (24)$$

где $L_n(A)$ и $\Omega_n(A)$ определяются по формулам (19) и (20) соответственно, совпадает в узлах A_0, A_1, \dots, A_n с функцией $F(A)$. Если матрица A_j и направления H_1, H_2, \dots, H_{n+1} попарно перестановочны, то многочлен (24) удовлетворяет также условию

$$\tilde{D}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; A_j) = \tilde{D}_{n+1}(F; A_j). \quad (25)$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 6 следует, что $L_n(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_n(A_k) = 0$ при $k=0, 1, \dots, n$. Тогда, учитывая структуру многочлена (24), получим, что в узлах A_0, A_1, \dots, A_n он совпадает с интерполируемой функцией $F(A)$.

Так как матрица A_j перестановочна с направлениями H_1, H_2, \dots, H_{n+1} , то

$$D_{H_k} \varphi_\nu(A) \Big|_{A=A_j} = \delta \varphi_\nu[A_j; H_k] = \lambda_\nu e^{\lambda_\nu A_j} H_k \quad (k, \nu = 1, 2, \dots, n+1), \quad (26)$$

где $\varphi_\nu(A) = e^{\lambda_\nu A}$, откуда при условии попарной перестановочности указанных в теореме матриц следует, что

$$\tilde{D}_{n+1}(\varphi_\nu; A_j) = \lambda_\nu (\lambda_\nu - \lambda_1) \cdots (\lambda_\nu - \lambda_n) e^{\lambda_\nu A_j} H_{n+1} H_n \cdots H_1. \quad (27)$$

Таким образом, $\tilde{D}_{n+1}(\varphi_\nu; A_j) = 0$ при $\nu = 1, 2, \dots, n$ и

$$\tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j) = \lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} A_j} H_{n+1} H_n \cdots H_1.$$

Поэтому в силу указанных в доказательстве теоремы 6 представлений многочленов $L_n(A)$ и $\Omega_n(A)$ в виде линейных комбинаций матричных экспонент и учитывая структуру многочлена (24), получим равенство (25). Теорема 7 доказана.

Ряд других интерполяционных формул Эрмита–Биркгофа имеется в [2; 4; 5; 10; 11].

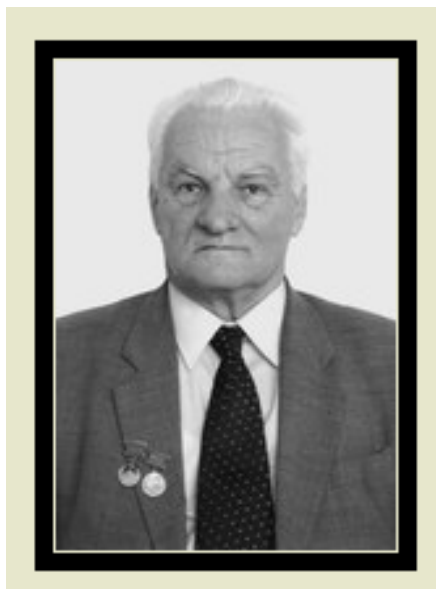
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков, Н.П. Линейные аппроксимации функционалов / Н.П. Жидков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 262 с.
2. Ибрагимов, И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.
3. Турецкий, А.Х. Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск : Вышэйшая школа, 1968. – 320 с.
4. Янович, Л.А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита–Биркгофа в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
5. Янович, Л.А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Актуальные проблемы современного анализа: сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы; отв. ред. Ю.М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 198–215.
6. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П Худяко в // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
7. Худяков, А.П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
8. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
9. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларусі. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
10. Макаров, В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – К. : Наукова думка, 2000. – 407 с.
11. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К. : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
12. Хаусхолдер, А.С. Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер ; под ред. Л.А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

***A.P. Hudyakov* The Generalized Exponential Interpolation Polynomials of Hermite–Birkhoff type for functions of scalar and matrix argument**

For functions of a scalar argument the generalized interpolation polynomial of Hermite–Birkhoff type with particular to functions with arbitrary exponents is constructed and researched. The explicit representation of error and its estimation are obtained. This formula is generalized to the case of functions of matrix argument. In particular cases the invariance of the interpolation formula with respect to exponential matrix polynomials is shown.

**Памяти выдающегося ученого
Гребеникова Евгения Александровича**



29 декабря 2013 года на 82-м году жизни скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор, Лауреат Государственной Премии СССР, Лауреат Премии Совета Министров СССР Евгений Александрович Гребеников.

Ушел из жизни выдающийся ученый, талантливый педагог, замечательный товарищ, приятный собеседник и заботливый семьянин.

Е.А. Гребеников родился 20 января 1932 года в молдавском селе Слобозия Марэ в семье православного священника и учительницы начальных классов.

Окончив с отличием гимназию, он в 1949 году успешно сдал вступительные экзамены и был зачислен студентом астрономического отделения механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, который окончил в 1954 году, получив диплом с отличием. В этом же году Евгений Александрович поступает в аспирантуру при университете, закончил её успешной защитой кандидатской диссертации на тему: «Аналитическая теория движения восьмого спутника Сатурна – Япета». Еще студентом он начал заниматься научно-исследовательской работой под руководством выдающихся ученых-астрономов профессоров Н.Д. Моисеева и Г.Н. Дубошина. Будучи активным участником научных семинаров по небесной механике и теории дифференциальных уравнений на мехмате МГУ, молодой ученый Гребеников свои главные научные интересы сосредоточил на вопросах, касающихся проблем аналитической и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений к исследованию задач нелинейной механики.

Результаты этих исследований были положены в основу его докторской диссертации «Качественное исследование дифференциальных уравнений небесной механики», успешно защищенной в 1967 году. В этой диссертации впервые обоснована применимость известного метода Крылова–Боголюбова к так называемым резонансным многочастотным системам дифференциальных уравнений «с медленными и быстрыми фазовыми переменными». Для таких систем Евгений Александрович разработал общую аналитическую теорию возмущений произвольного порядка по отношению к малому параметру и предложил метод интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных, который применим для нахождения функций преобразования

Крылова–Боголюбова. Исследуя многочастотные системы, он разработал способ оптимального выбора алгоритма для определения неизвестных функций, возникающих в усреднённых системах высокого порядка. В отношении к резонансным системам дифференциальных уравнений указанный способ был наиболее сложен при применении метода Крылова–Боголюбова.

Е.А. Гребениковым была предложена и обоснована новая идея разработки таких вариантов асимптотических методов, которые минимизируют отклонение решений усреднённых уравнений от решений первоначальных уравнений, используя для этого пошаговую коррекцию начальных условий в сочетании с принципом гибкого усреднения и принципом нелинейных многочастотных систем, рассматриваемых на многомерных торах. На основании такого подхода Е.А. Гребеников и его ученики исследовали новые динамические аспекты известных проблем, таких как ограниченная задача трех и более тел с различными резонансами, резонансы гамильтоновых систем, движение геостационарного спутника, задачи в физике высоких энергий, математическое моделирование в биологии, геологии и других дисциплинах.

Последние 15 лет Евгений Александрович и его ученики активно развивали область математики, называемую гомографической динамикой Лагранжа–Винтнера. Благодаря современным системам компьютерной математики им удалось найти новые многопараметрические классы точных решений. Вместе со своими учениками им были разработаны новые эффективные методы линеаризации гамильтоновых систем в окрестности любого стационарного решения, а также программное обеспечение для символьной нормализации гамильтонианов в окрестности этих решений. Другими словами, этот эффективный программный инструментарий применим для одной из наиболее сложных проблем небесной механики и космодинамики – проблемы устойчивости по Ляпунову для стационарных решений ограниченных задач многих тел. Эти результаты базировались на теории существования условных периодических решений для многомерных гамильтоновых систем на соответствующих торах (КАМ-теория).

Е.А. Гребеников – автор 24 монографий и учебников, а также более 200 научных статей, опубликованных в различных отечественных и зарубежных изданиях. В 1968 году ему было присвоено ученое звание профессора.

Плодотворная научная деятельность Евгения Александровича Гребеникова была отмечена Государственной Премией СССР (1971 г.), Премией Совета Министров СССР (1983 г.), Премией имени академика Н.М. Крылова Национальной Академии Наук Украины (1999 г.), а малой планете Солнечной Системы № 4268 присвоено его имя «Гребеников». Кроме того профессор Е.А. Гребеников являлся действительным членом Академии Нелинейных Наук, почетным членом Академии Наук Республики Молдова и доктором «honoris causa» четырех иностранных университетов.

Свою активную научную работу Е.А. Гребеников сочетал с обучением и подготовкой кадров различного уровня, в том числе и дипломированных научных кадров. Под его научным руководством успешно защитили диссертации многие соискатели ученой степени кандидата или доктора физико-математических наук как в бывших республиках Советского Союза, так и за рубежом. Преподавательскую деятельность он начал учителем математики в одной из школ Краснопресненского района г. Москвы, затем продолжил ее в качестве ассистента, доцента, профессора на мехмате МГУ, в Российском Университете Дружбы Народов (заведующим кафедрой), в Государственном Университете Электроники и Информатики (профессор), в Государственном Техническом Университете (заведующим кафедрой). Последние 20 лет Евгений Александрович работал в Вычислительном центре РАН имени А.А. Дородницына, являлся главным научным сотрудником отдела нелинейного анализа и проблем безопасности.

Работу в ВУЗах г. Москвы Гребеников Е.А. сочетал с работой по совместительству в Техническом Университете Республики Молдова (профессор), в Академии Подляской Республики Польша (заведующий кафедрой) и под его руководством защищены две кандидатские диссертации. Он поддерживал тесные научные связи с ВУЗами многих бывших союзных республик (Казахстан, Беларусь, Украина, Молдова и др.).

Тесные деловые, научные и учебные связи долгое время Евгений Александрович поддерживал с Брестским государственным университетом имени А.С. Пушкина. Будучи профессором кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, он читал спецкурс по вопросам космодинамики, руководил подготовкой дипломных работ студентов, являлся научным руководителем ассистента кафедры – соискателя ученой степени кандидата физико-математических наук. За его огромный вклад в науку он был включён в состав Международного совета редколлегий журнала «Вестник Брестского университета» и сборника научных трудов «Ученые записки Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина».

Всю свою сознательную жизнь Евгений Александрович посвятил развитию отечественной науки. Его отличали высокая работоспособность, настойчивость и целеустремленность в достижении поставленной цели. Он был примером порядочности, человечности, искренности, доброжелательности, а также приятным собеседником, обладающим огромной эрудицией и неподдельным чувством юмора.

Светлая память о нём навсегда останется в наших сердцах.

М.Э. Чесновский, А.Н. Сендер, В.А. Главан, В.В. Дикуссар, В.И. Корзюк, И.П. Мартынов, А.Н. Прокопеня, В.Г. Самойленко, В.Б. Таранчук, Г.Ч. Шушкевич, Н.И. Юрчук, И.Г. Кожух, В.Ф. Савчук, А.В. Чичурин, О.В. Матысик.

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Аўсіюк А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Андрусевіч П.П. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Будзько Д.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і камп’ютарных сістэм Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Века В.У. – магістрант фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Гунасаў А.А. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Зайко В.С. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Зубей К.У. – выкладчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казмерчук К.В. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Кожух І.Р. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, прафесар, прфесар кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Ліёпа В.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Нікіцін А.В. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Плецохоў У.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Пятліцкая Т.С. – магістрант дзённага аддзялення спецыяльнасці «Фізіка» Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Равінскі А.Ф. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Сабуць А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Секяржыцкі С.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серая С.А. – студэнтка 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Трафімук А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Худзякоў А.П. – выкладчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Юдаў А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Аўсіюк А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Андрусевіч П.П. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Будзько Д.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і камп'ютарных сістэм Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Века В.У. – магістрант фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Гунасаў А.А. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Зайко В.С. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Зубей К.У. – выкладчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казмерчук К.В. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Кожух І.Р. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, прафесар, прфесар кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Ліёпа В.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Нікіцін А.В. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Плецюхоў У.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Пятліцкая Т.С. – магістрант дзённага аддзялення спецыяльнасці «Фізіка» Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Равінскі А.Ф. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Сабуць А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Секарыжыцкі С.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серая С.А. – студэнтка 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Трафімук А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Худзякоў А.П. – выкладчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Юдаў А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацыі па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума Дзяржаўнага вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастановы Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасьцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 04.06.2014. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 13,25. Ул.-выд. арк. 8,19.

Тыраж 100 экз. Заказ № 242.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.