

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матгьсік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плецохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2013

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 21 ад 01.02.2012 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2013

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus № 21 from February 01, 2012,
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Костко В.С. Дийодид олова, его полиморфизм и светочувствительные свойства	5
Овсюк Е.М., Казмерчук К.В. Частица со спином 1 в сферическом пространстве Римана: приближение Паули в поле магнитного заряда.....	18
Пашкевич Г., Шиховец А., Лапчук А., Крючин А., Богдан А. Минимизация спектров в лазерных проекторах линейным перемещением дифракционных оптических элементов на основе кода Баркера или M-последовательностей	28
Плетюхов В.А. Матричная формулировка теории киральной частицы со спином 1	38
Секержицкий В.С., Саванчук Е.А. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле.....	44
Серый А.И. О поправках к критерию Стонера для ядерной материи.....	48

МАТЭМАТЫКА

Жернова Т.Н., Кальчук И.В., Харкевич Ю.И. Приближения функций класса $Lip 1$ интегралами типа Пуассона	61
Зубей Е.В., Юдов А.А. Классификация кривых пространства Минковского, касательные подпространства к которым во всех точках являются изотропными.....	68
Козинский А.А., Козлов В.А. Математические модели веб-системы «Тренажер русского языка для иностранных студентов».....	74
Мадорский В.М. О приближенном решении нелинейной дифференциальной задачи второго порядка	80
Матысик О.В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве.....	87
Мельникова И.Н., Куцин Д.Ю. Некоторые свойства решений систем трех дифференциальных уравнений.....	93
Нестеренко А.Н. О некоторых свойствах третьего модуля непрерывности	100
Савчук В.Ф. К вопросу об апостериорном выборе параметра регуляризации в неявном методе итераций решения операторных уравнений с приближенным оператором	104
Силаева З.Н. Моделирование в интерактивных геометрических системах.....	111
Трофимук А.А. Конечные группы с фиттинговыми факторами свободными от кубов	118
Худяков А.П., Янович Л.А. Линейные и квадратичные алгебраические интерполяционные многочлены для операторов, заданных на множестве функциональных матриц	122
Звесткі аб аўтарах	132

INDEX

PHYSICS

Kostko V.S. Tin Diiodide, its Polymorphism and Light-sensitive Properties	5
Ovsiyuk E.M., Kazmerchuk K.V. Particle with Spin 1 in the Spherical Riemann Space: Pauli Approximation in the Magnetic Monopole Potential.....	18
Pashkevich G., Shihovets A., Lapchuk A., Kryuchin A., Bogdan A. Minimization of Speckle in Laser Projector Linear Movement of the Diffractive Optical Element, Based on the Barker Code or M-sequence.....	28
Pletyukhov V.A. Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with spin 1	38
Sekerzhitsky V.S., Savanchuk E.A. About Criteria of Stability Solid State of Electron-proton Matter in Magnetic Field	44
Sery A.I. On Corrections to Stoner Criterion for Nuclear Matter	48

MATHEMATICS

Zhernova T.N., Kalchuk I.V., Kharkevich Yu.I. On Approximation of the Function of Class Lip 1 by Poisson-type Integrals	61
Zubej E.V., Yudov A.A. Grading Curve of Minkowski Space to Tangent Space which at all Points are Isotropic	68
Kazinski A., Kozlov V. Mathematical Models of Web-based «Russian language Trainer for Foreign Students»	74
Madorski V.M. On Approximate Solution of Non-linear Differential Problem of Second Order	80
Matysik O.V. On the Approximate Solution of Linear Equations with Unbounded Operator in the Hilbert Space.....	87
Melnikova I.N., Kutsin D.Y. Some Features of the Solution of the System of Three Differential Equations	93
Nesterenko O.N. Some Properties of the Third Modulus of Continuity	100
Savchuk V.F. To the Question of A posteriori Choice of Regularization Parameter in the Implicit Method of Iterations for Solving Operator Equations with Approximate Operator.....	104
Silayeva Z.N. Modeling in Interactive Geometric Systems	111
Trofimuk A.A. Finite Groups with Cube-free Fitting Factors	118
Hudiyakov A.P., Yanovich L.A. The Linear and Quadratic Algebraic Interpolation Polynomials for Operators, Defined on the Set of Functional Matrices	122
Information about the authors	132

УДК 539.26 + 541.22 + 771.531.1 + 772.19

В.С. Костко

ДИЙОДИД ОЛОВА, ЕГО ПОЛИМОРФИЗМ И СВЕТОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

На основании результатов исследования светочувствительности дийодида олова в атмосферах различных газов, ее зависимости от давления, определения продуктов фотолиза в SnI_2 с помощью кварцевого измерителя толщины и методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии делается вывод о его полиморфизме, роли кислорода в светочувствительных свойствах SnI_2 , его механизме светочувствительности.

Введение

Интерес к галогенидам тяжелых металлов (как в СССР, так и за рубежом) достиг своего пика в 60-70-х годах XX века и обусловлен был поиском светочувствительных сред, альтернативных традиционным галоидосеребряным фотографическим средам.

Развитие бессеребряной фотографии обусловлено было, прежде всего, потребностями техники в светочувствительных материалах, обладающих новыми, по сравнению с галоидосеребряными материалами, характеристиками. Классический фотографический процесс на галогенидах серебра слишком громоздкий и медленный, не всегда отвечает возросшим требованиям его разрешающая способность. Другой важной причиной, стимулирующей прогресс бессеребряной фотографии, является острый дефицит серебра на мировом рынке.

Стремительное развитие цифровой фотографии, казалось бы, решило все перечисленные проблемы и отодвинуло на задний план бессеребряную фотографию. Однако следует учитывать, что не во всех областях науки и техники на смену традиционным фотографическим слоям пришла цифровая техника. Сюда можно отнести частично медицину, ядерную физику и другие области науки и техники. Кроме того, обнаруженные эффекты светочувствительности бессеребряных структур полупроводник–металл позволяют использовать их, например, в таких направлениях, как опто-техника (голографические решетки, зеркала, микрошкалы, линзы и др.); электроника (фотошаблоны, элементы микросхем, CD-диски); вычислительная техника (запоминающие устройства); литография (печатные формы); бессеребряная фотография (регистрирующие среды, получение как позитивного, так и негативного изображения на одних и тех же слоях).

То, что практический интерес с подобными разработкам не ослабевает, подтверждает такой факт: на IX Московском международном салоне инноваций и инвестиций (2009 г.) авторские разработки «Способ получения позитивного или негативного изображения на бессеребряных светочувствительных слоях» и «Способ нанесения рельефного изображения на диэлектрическую подложку» удостоены золотой и бронзовой медалей соответственно.

С теоретической точки зрения исследования физических закономерностей, происходящих в квантово-размерных структурах, к которым относятся тонкопленочные светочувствительные структуры, представляют дополнительный интерес по той причине, что физические процессы в них определяются квантовыми свойствами частиц. Законы, используемые для макротел, не всегда применимы для описания микрообъектов.

В связи с этим необходимы дополнительные исследования по определению физических закономерностей именно для наноструктур.

В настоящей работе представлены результаты исследований полиморфизма, светочувствительности дийодида олова, предлагается модель его механизма светочувствительности.

1. Полиморфизм дийодида олова

Еще в ранних исследованиях тонких пленок дийодида олова (SnI_2), полученных термическим напылением в вакууме на подложку, находившуюся при комнатной температуре, было замечено, что пленки получались желтого цвета, в то время как исходный порошок SnI_2 был красным. Последующее медленное нагревание пленки в вакууме приводило к тому, что ее цвет изменялся на красный, который вновь становился желтым при повышении температуры пленки выше ~ 381 К. Много позже на основании этого было сделано предположение, что при определенных условиях в дийодиде олова имеет место полиморфное превращение α - SnI_2 -модификации в β - SnI_2 -модификацию.

Полиморфизм (от греч. *polymorphos* – многообразный) – это способность некоторых веществ существовать в состояниях с различной атомно-кристаллической структурой [1]. Некоторым твердым телам свойственна не одна, а две и более кристаллические структуры, устойчивые при различных температурах и давлениях. Такие структуры называют полиморфными формами, или модификациями вещества, а переход от одной модификации к другой – полиморфными превращениями. Полиморфные модификации принято обозначать греческими буквами. Модификацию, устойчивую при нормальной и более низкой температуре, обозначают буквой α и модификации, устойчивые при более высоких температурах, обозначают соответственно буквами β , γ , δ и т. д.

Первое упоминание о возможном полиморфизме SnI_2 приводится в работе [2]. Низкотемпературной фазе α - SnI_2 (порошок красного цвета) соответствует кристаллическая структура моноклинной сингонии, пространственная группа симметрии ($C2/m$) с параметрами решетки $a = 14.17 \text{ \AA}$, $b = 4.535 \text{ \AA}$, $c = 10.87 \text{ \AA}$ и $\beta = 92.0^\circ$ [2–4].

Результаты исследований порошков и пленок методами ED XRF-анализа (энергодисперсионный рентгенофлуоресцентный анализ; отечественный термин – рентгенорадиометрический анализ) и РФС-анализа (рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия) показали, что соотношение количества олова и йода как в исходных порошках, так и в напыленных из них пленках в обоих случаях оставалось неизменным и равным 1:2.

Несмотря на то, что ED XRF-анализ пленок подтвердил соответствие состава пленок стехиометрическому соединению SnI_2 , рентгенограммы тонких пленок, полученных вакуумным испарением с молибденовых испарителей на стеклянные подложки при комнатной температуре, сильно отличались от рентгенограмм исходного порошка. На рентгенограммах, полученных от пленок, в области углов $10^\circ \leq 2\theta \leq 110^\circ$ наблюдались шесть рефлексов. Установлено, что вещество, полученное соскабливанием пленки с подложки, обладает гексагональной кристаллической структурой с постоянными элементарной ячейки $a = 4.506 \text{ \AA}$ и $c = 6.946 \text{ \AA}$ [5,6].

Таким образом, установлено, что дийодид олова (SnI_2) обладает явлением полиморфизма и может находиться в двух модификациях: моноклинной α - SnI_2 и гексагональной β - SnI_2 . Модификация β - SnI_2 , обладающая свойством светочувствительности, образуется в результате нагрева α - SnI_2 модификации.

2. Исследования светочувствительности SnI_2 в атмосферах различных газов и ее зависимость от давления

Слои SnI_2 , нанесенные термическим вакуумным испарением на диэлектрические подложки (кварц, стекло, лавсан, бумага), обладают фотографической чувствительностью. Под воздействием света в них образуется в атмосфере воздуха видимое, а в вакууме скрытое изображение, которое становится видимым в вакууме лишь при одновременном облучении и прогреве слоя при $134\text{--}138^\circ\text{C}$ [7].

Для выяснения факторов, влияющих на светочувствительность слоев SnI_2 , были проведены измерения последней в атмосферах различных газов, а также воздухе как при атмосферном давлении и комнатной температуре, так и при различных давлениях. Мерой эффективности фотохимических превращений являлась величина, обратная экспозиции (произведение плотности потока излучения на время его воздействия) фотоактивного света, необходимой для того, чтобы вызвать одинаковые изменения коэффициента пропускания либо отражения зондирующего луча. Эта величина называется светочувствительностью.

Для исследования светочувствительных свойств тонких слоев использовались два пучка света, один из которых вызывал фотохимические превращения (его называют фотоактивным), а другой служил зондом, т.е. использовался для регистрации изменений пропускания (отражения). Длина волны света, использовавшегося в качестве зонда, выбиралась вне области собственного поглощения полупроводника с таким расчетом, чтобы по возможности не вызывать фотохимических превращений.

Криостат с помещенным внутри него исследуемым образцом предварительно откачивался до вакуума $\sim 5\text{--}10^{-5}$ мм рт.ст., а затем наполнялся газом под необходимым давлением. После $10\text{--}15$ минут выдержки проводилось измерение светочувствительности, величина которой пропорциональна изменению пропускания (оптической плотности) образца. При температуре 293 K в атмосферах аргона и азота, также как и в вакууме, пленки SnI_2 были нечувствительны к падающему излучению в диапазоне $300\text{--}520$ нм.

При напуске в криостат NH_3 происходило разрушение тонких слоев SnI_2 агрессивной средой аммиака, что исключало возможность определения степени светочувствительности SnI_2 в этой среде. Это свойство тонких пленок SnI_2 может быть использовано в датчиках аммиака.

Чувствительность пленок к падающим световым потокам в атмосфере кислорода примерно в три раза превосходит светочувствительность на воздухе при аналогичных условиях облучения. На рисунке 1 представлена зависимость светочувствительности S тонких слоев SnI_2 от давления воздуха (кислорода) P . Очевидна линейная зависимость светочувствительности SnI_2 от давления кислорода в интервале $0,45\text{--}0,9$ кГ/см².

По этому поводу можно высказать предположение, что светочувствительность пленок SnI_2 объясняется взаимодействием двуйодистого олова с кислородом под действием падающего излучения. В результате чего чувствительность должна изменяться пропорционально давлению. Действительно, в интервале $0,45\text{--}0,9$ кГ/см² обнаружена линейная зависимость светочувствительности S от давления воздуха (кислорода) в криостате (рисунок 1).

В пользу высказываемого предположения о главенствующей роли кислорода газообразного, а не хемисорбированного O_2 на поверхности SnI_2 в образовании его светочувствительности может говорить то обстоятельство, что при откачке криостата всего до $10^{-1}\text{--}10^{-3}$ мм рт.ст. или продувании его азотом N_2 происходит значительное падение светочувствительности, когда маловероятно удаление хемисорбированного кислорода.

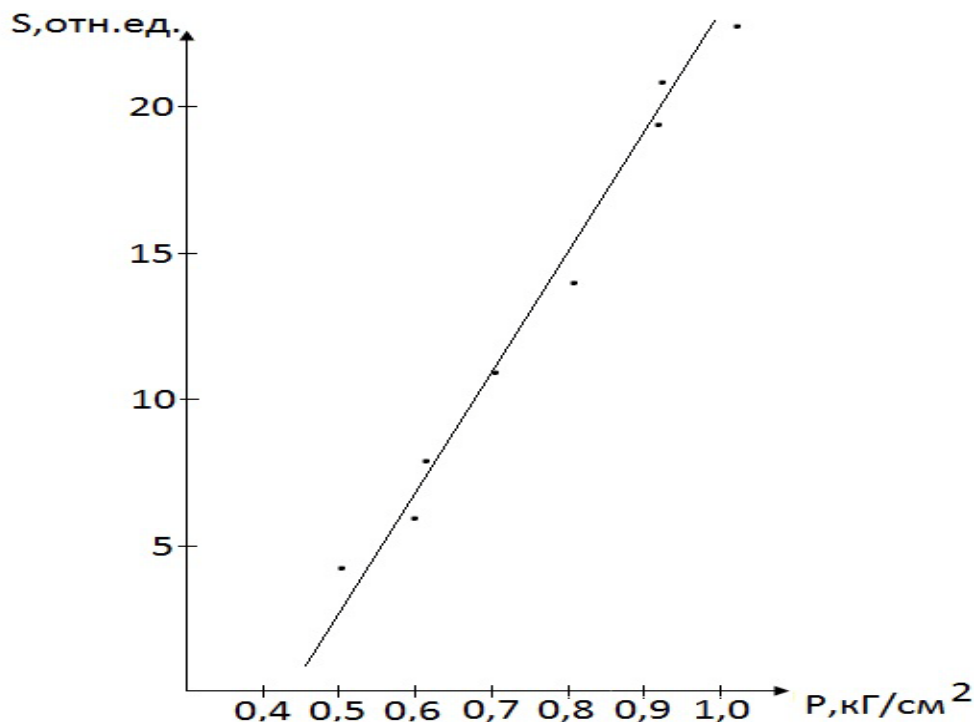


Рисунок 1 – Залежність світлочувствительності тонких шарів SnI₂ від тиску повітря

3. Визначення продуктів фотостимульованих перетворень в SnI₂ з допомогою кварцевого вимірювача товщини

На основі результатів досліджень світлочувствительності тонких шарів SnI₂ в атмосферах різних газів було виявлено суттєве вплив атмосферного кисню на утворення продуктів фотостимульованих перетворень в SnI₂. Хімічні перетворення, що відбуваються в SnI₂ під дією світла, супроводжуються взаємодією SnI₂ з зовнішньою газообразною середою, повинні призводити до зміни маси вихідного речовини. З метою визначення зміни маси вихідного речовини був використаний кварцевий вимірювач товщини (КИТ). Метод КИТ не претендує на високу точність, порівняльну з точністю методу РФС (рентгеновської фотоелектронної спектроскопії). Разом з тим автор вважає цільовим показати доступний і простий метод, що дозволяє реєструвати фотохімічні перетворення, що відбуваються в світлочувствительних шарах, при неможливості проведення РФС-вимірювань.

Суть методу КИТ заключається в наступному. Відомо, що принцип вимірювання товщини напыленного речовини з допомогою КИТ оснований на явленні зміни частоти коливань кварцевого резонатора (датчика) пропорційно масі напыленного на нього речовини:

$$\Delta f = km = k\mu N / N_A, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, m – маса напыленного речовини.

Неважко показати, що молекулярна маса продуктів фотостимульованих перетворень μ_2 зв'язана з молекулярною масою двоїстого олова μ_1 і зміни частоти кварцевого датчика після напылення Δf_1 і після облучення Δf_2 співвідношенням:

$$\mu_2 = \mu_1 \Delta f_2 / \Delta f_1. \quad (2)$$

Методика измерений состояла в следующем. На предварительно очищенный кварцевый резонатор в вакууме напылялась защитная пленка алюминия толщиной 500 нм. Поверх алюминиевой пленки напылялся слой SnI_2 , в результате чего частота кварцевого резонатора изменилась на $\Delta f_1 = 3,07$ кГц. После облучения кварца на воздухе фотоактивным светом, частота резонатора увеличилась на 1,92 кГц, т.е. $\Delta f_2 = 1,15$ кГц. На рисунке 2 иллюстрируются результаты облучения кварцевого резонатора запыленного SnI_2 . Из графика видно, что с течением времени частота резонатора возрастает (это свидетельствует об уменьшении массы продуктов реакции) и достигает насыщения. Насыщение указывает на то, что все напыленное вещество прореагировало и образовались стабильные во времени продукты реакции. Из проведенных измерений и формулы (2) следует, что молекулярная масса продуктов реакции равна 140 а.е.м. На основании этого были высказаны предположения о том, что возможным продуктом засветки тонких слоев, изготовленных из SnI_2 , могут являться оксид – SnO либо диоксид – SnO_2 [8].

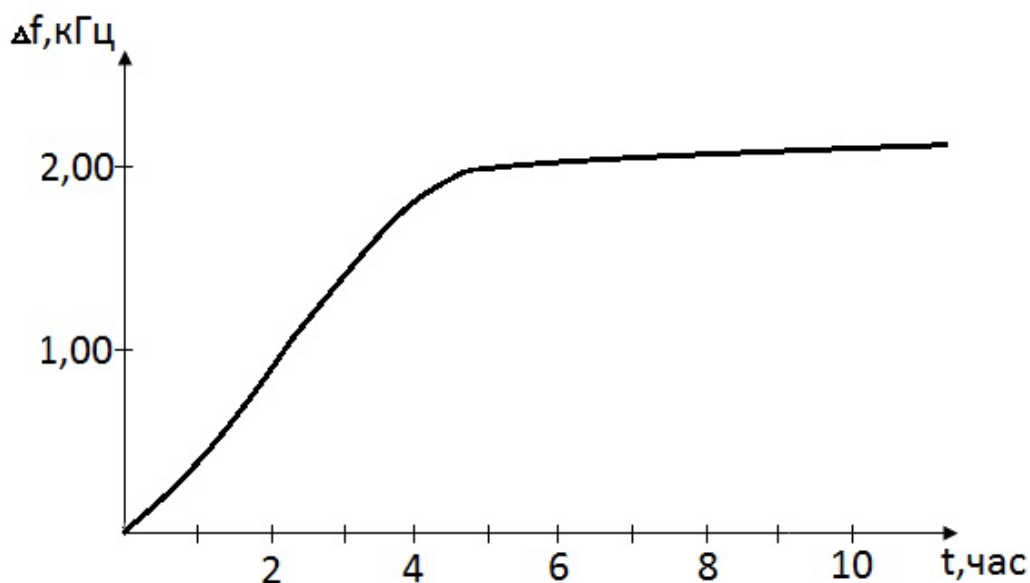


Рисунок 2 – Зависимость изменения частоты КИТ от длительности облучения тонких слоев SnI_2

4. Исследования светочувствительных слоев SnI_2 методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии

С целью определения и сравнения элементного состава тонких слоев SnI_2 , подвергнутых и неподвергнутых световому облучению, были выполнены исследования названных слоев методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФС) [9, 10].

РФС-измерения проведены на электронном спектрометре ЭС-2401 с использованием Mg K_α (1253,6 эВ) излучения. Давление в системе составляло примерно 10^{-8} Па до включения рентгеновской пушки. Измерения проводились методом съемки по точкам, с шагом 1,0 эВ для общего сканирования (10–1000 эВ) и с шагом 0,2 эВ при сканировании отдельных пиков: С 1s (282–292 эВ), Sn 3d (484–504 эВ), О 1s (530–539 эВ) и I 3d (617–639 эВ). В качестве внешнего стандарта использовалась линия С 1s (285,0 эВ).

Таблица 1 – Энергии связи и площади спектральных линий

Линия	до травления		после травления	
	$E_{св}$, эВ	S , отн. ед.	$E_{св}$, эВ	S , отн. ед.
Пленка незасвеченная				
C 1s _{1/2}	285.00	374.54	285.00	170.36
Sn 3d _{5/2}	487.71	3423.94	487.13	3683.84
Sn 3d _{3/2}	496.10	2280.71	495.48	2452.97
O 1s _{1/2}	532.42	505.75	531.26	231.36
I 3d _{5/2}	619.96	4965.16	619.59	6290.26
I 3d _{3/2}	631.47	3571.81	631.11	4113.99
Пленка засвеченная				
C 1s _{1/2}	285.00	289.52	285.00	132.76
Sn 3d _{5/2}	487.81	4631.90	487.30	6279.12
Sn 3d _{3/2}	496.22	3054.44	495.72	4110.60
O 1s _{1/2}	531.89	2004.67	531.31	1754.46
I 3d _{5/2}	619.97	213.52	619.92	274.74
I 3d _{3/2}	631.97	120.50	631.38	181.26

В таблице 1 и на рисунках 3, 4 представлены результаты исследования методами РФС тонких слоев, приготовленных термическим испарением SnI₂ в вакууме. При определении площади пиков для вычитания фона использовался метод, предложенный Ширли [11], и аппроксимация формы кривой гауссианом. На рисунке 3 изображены данные РФС этих слоев до (3а), и после засветки (3б).

На рисунке 4 приведены результаты измерений на тех же слоях, но после ионно-лучевого распыления верхнего слоя с целью удаления адсорбированных на поверхности примесей (кислород, пары воды, углеводородные загрязнения и т.д.). На спектрах отчетливо заметны спин-орбитальные дублеты 3d_{5/2} и 3d_{3/2}, соответствующие фотоионизации атомов олова и йода. Отношение интенсивностей этих линий равно 2:3. Символом А помечены линии Оже (Auger). На присутствие в слое кислорода указывает спектральная линия O 1s_{1/2}, расположенная между пиками олова и йода.

Как следует из спектров, представленных на рисунке 3, в результате засветки тонкой пленки йод из анализируемого слоя практически полностью возгоняется. Вместе с тем интенсивность линии, отражающей содержание кислорода, существенно возрастает. На основании этого экспериментального факта можно утверждать, что в результате облучения светом диiodида олова на воздухе происходит «фотоокисление» олова и удаление йода из слоя, что должно приводить к уменьшению толщины пленки. Аналогичное изменение толщины в тонких слоях галогенидов свинца было отмечено авторами работ [12].

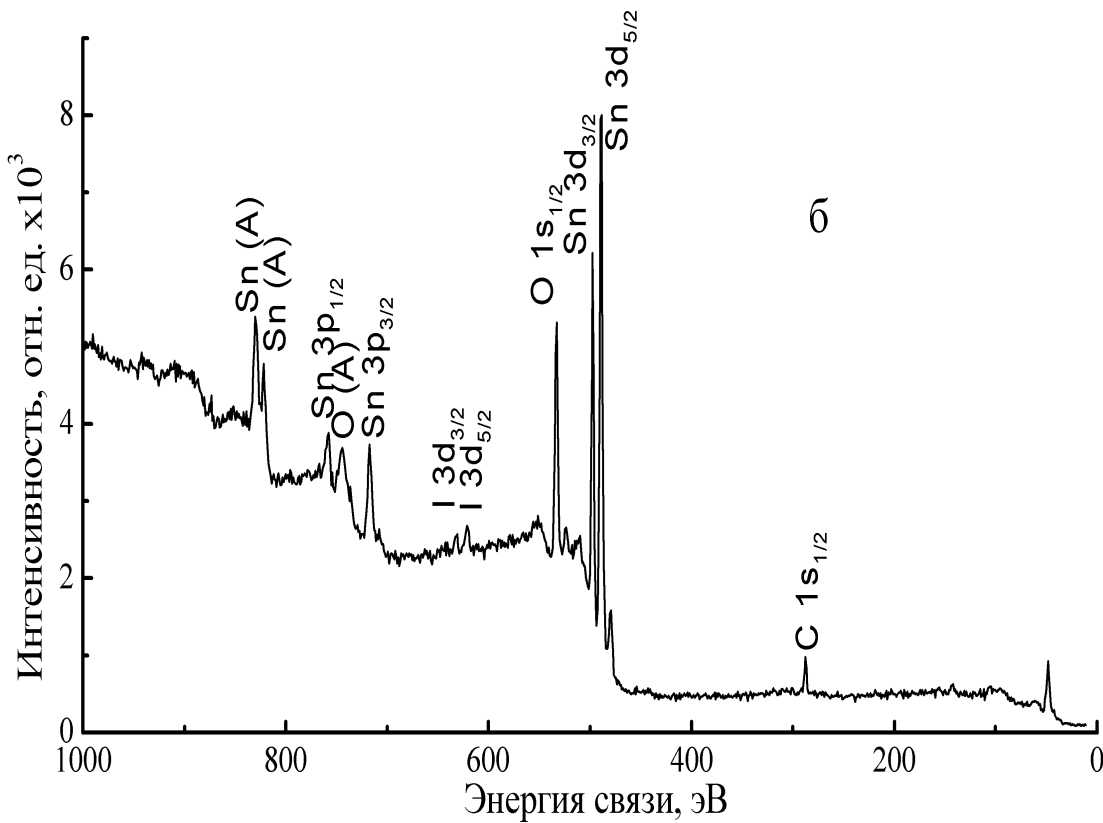
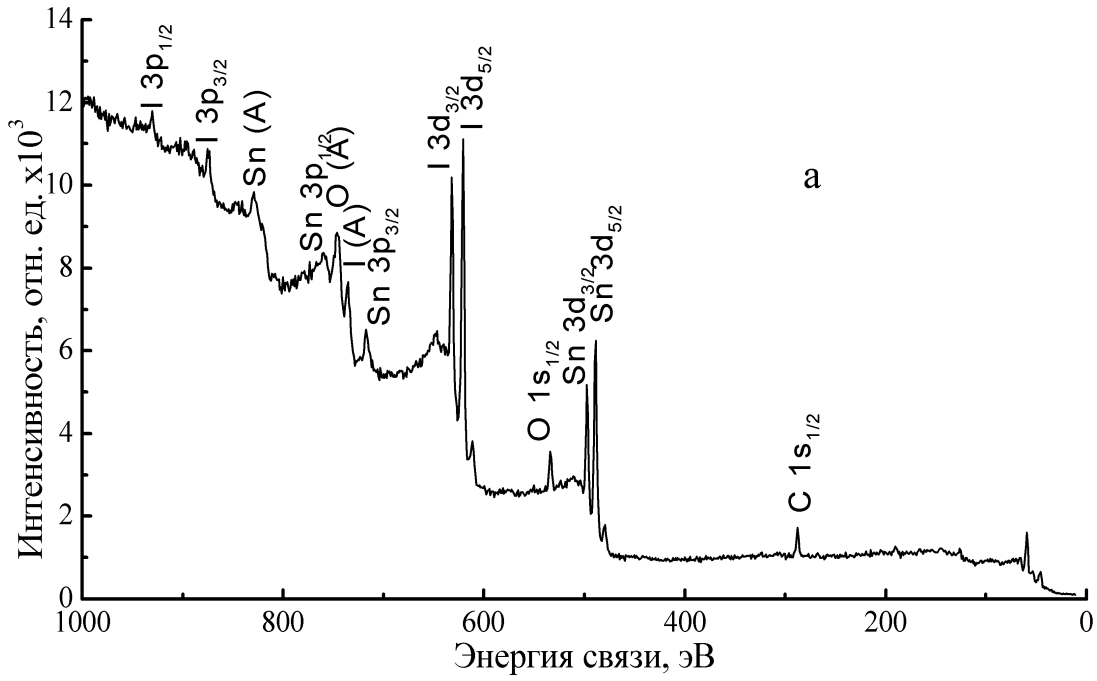


Рисунок 3 – Результаты РФС-исследований пленок: а) незасвеченная и б) засвеченная (время засветки ~30 мин), без предварительного ионного травления

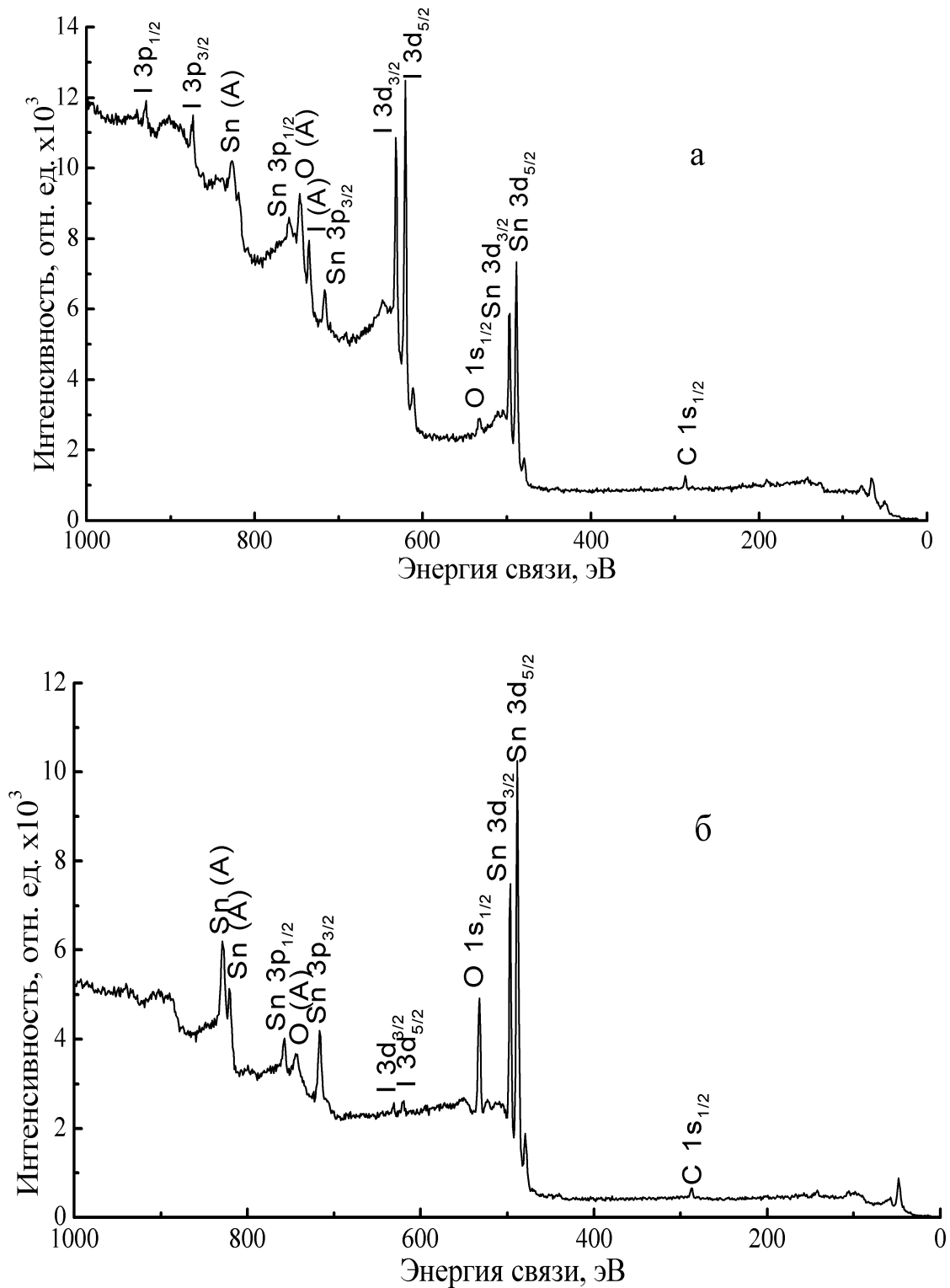


Рисунок 4 – Результаты РФС-исследований пленок: а) незасвеченная и б) засвеченная (время засветки ~30 мин), после ионного травления ($t = 3$ мин, $I = 4$ мкА)

Объем «фотоокисленного» олова меньше объема необлученного дийодида олова, поэтому происходит сжатие экспонированных участков кристаллов дийодида олова. Это приводит к деформациям в экспонированных областях. Количественные данные об относительной концентрации элементов в пленках приведены в таблице 2. Соответствующие концентрации элементов рассчитаны по формуле:

$$\frac{n_{e-aa}}{n_{Sn}} \approx \frac{\sigma_{Sn} \cdot I_{e-aa}}{\sigma_{e-aa} \cdot I_{Sn}},$$

где n – концентрация исследуемого элемента, σ – сечение фотоионизации выбранного энергетического уровня элемента рентгеновским излучением (таблица 3) [13], I – интенсивность спектральной линии, нормированные относительно олова (Sn).

Таблица 2 – Относительная концентрация элементов в пленках

Элемент	до травления	после травления
Пленка незасвеченная		
Sn	1.000	1.000
I	1.182	1.137
O	1.450	0.874
Пленка засвеченная		
Sn	1.000	1.000
I	0.050	0.019
O	3.064	2.143

Таблица 3 – Сечения фотоионизации электронных уровней атомов элементов рентгеновским излучением, отнесенные к уровню C1s

Атом	Z	1s _{1/2}	3d _{3/2}	3d _{5/2}
O	8	2.85		
Sn	50		11.1	16.1
I	53		13.3	19.3

Из таблиц 1, 2 следует, что после травления, в результате которого удалялся поверхностный, загрязненный слой, существенно изменяется относительное содержание кислорода и углерода. Последнее обстоятельство может свидетельствовать об адсорбционном происхождении большей части кислорода и углерода в пленке при синтезе. Для наглядности содержание элементов веществ и соединений в пленках до и после воздействия света, определенное методом РФС, приведено на рисунке 5 а, б в виде диаграмм.

В процессе травления содержание SnI₂ и SnO₂ как в незасвеченной, так и в засвеченной пленке меняется незначительно (рисунок 5). Избыток свободного кислорода, адсорбированный поверхностным слоем, почти полностью удаляется после травления.

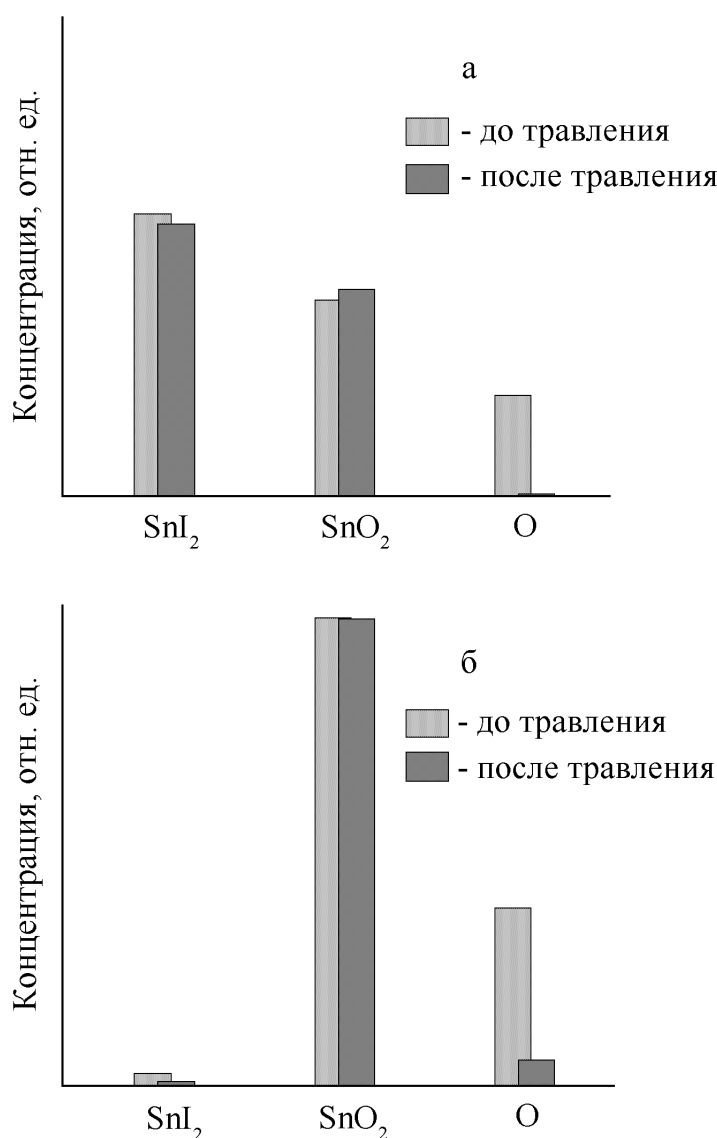


Рисунок 5 – Пленка а) незасвеченная и б) засвеченная

В обоих случаях травление поверхности приводит к заметному уменьшению содержания углерода в поверхностном слое, большая часть которого обусловлена слоем углеводородов, оседающих на образце в результате проникновения в объем спектрометра паров диффузионного масла, дегазации органических прокладок и т.д. Оставшийся в пленке углерод можно объяснить загрязнением в процессе приготовления пленки, как, впрочем, и существование в незасвеченной пленке SnO₂ (довольно низкий вакуум в системе при синтезе).

Как и в незасвеченной пленке, в пленке, подвергшейся воздействию света, концентрация углерода после травления снижается более чем в два раза. По сравнению с незасвеченной пленкой после аргонового травления остается больше кислорода, что можно объяснить проникновением кислорода вглубь образца в ходе засветки вследствие возникновения деформаций, о которых упоминалось выше. Уменьшение содержания углерода в засвеченной пленке по сравнению с незасвеченной объясняется особенностями самой засветки. Одновременное воздействие на пленки света и температуры выше комнатной способствовало испарению легколетучих углеводородов с поверхности даже из более глуболежащих слоев пленки.

Таким образом, на основании результатов исследования светочувствительности дийодида олова в атмосферах различных газов, ее зависимости от давления, определения продуктов фотолиза в SnI₂ с помощью кварцевого измерителя толщины и методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии можно сделать вывод о том, что облучение таких пленок интегральным световым потоком приводит практически к полному превращению SnI₂ → SnO₂, следствием чего и является обесцвечивание пленок.

5. О механизме светочувствительности SnI₂

Рентгеновскими методами (рентгено-спектральный, РФС-метод, оже-спектроскопия) установлено, что конечным продуктом засветки SnI₂ является SnO₂. Фотолиз (или фотодиссоциация) твердых тел, к которым принадлежит йодид олова, является сложным процессом и состоит, на наш взгляд, из двух основных стадий.

Первая стадия – электронная, поскольку предполагается, что в начальный момент под действием света в веществе разрушаются связи, в результате чего могут появляться свободные электроны, ионы, атомы. Вторая – ионная стадия включает диффузию атомов (ионов) к местам агрегации и образование новых соединений. Эту стадию называют диффузионной. Если электронная стадия в твердом теле связана с переносом заряда, то характерной особенностью ионной стадии фотолиза является транспорт массы.

Процесс переноса электронов к поверхности твердого тела или от нее сопровождается образованием двойного слоя. Двойной слой может возникать за счет инжекции носителей заряда в зону полупроводника или экстракции их из нее, поскольку при этом плотность носителей тока (особенно вблизи поверхности, где влияние электрических контактов наиболее велико) существенно изменяется. Вторым примером может служить фотоотклик полупроводника. Фотоэлектроны, возбужденные светом из валентной зоны в зону проводимости, часто возвращаются в основное состояние через поверхностные центры (центры рекомбинации). Поэтому существующий вблизи поверхности двойной слой решающим образом влияет на скорость такого процесса.

Сформированный в результате переноса зарядов двойной слой на поверхности полупроводника следует интерпретировать как пространственный заряд, образованный распределенными в твердом теле ионами. Как электрические, так и химические свойства твердого тела значительно изменяются при образовании на его поверхности двойного слоя [14].

Образование двойного слоя на поверхности полупроводника может объяснить фотохимические преобразования, происходящие в тонких пленках дийодида олова на диэлектрике (стекло).

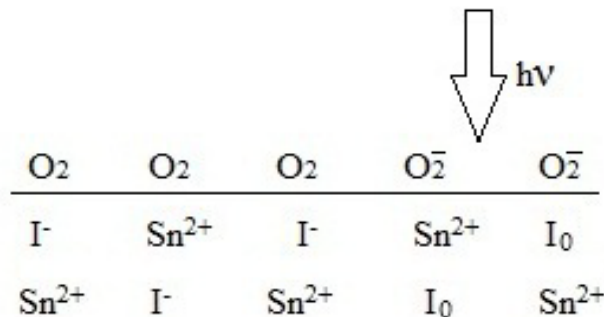
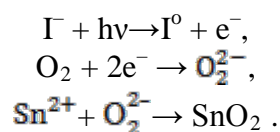


Рисунок 6 – Схематическое изображение двойного слоя

Известно, что кислород не может длительное время существовать в атомарном состоянии. Довольно быстро атомы его группируются в молекулы, и химическая активность кислорода при этом понижается, но остается достаточно высокой. Молекулярный кислород, абсорбированный открытой поверхностью полупроводника, является центрами захвата свободных электронов, образованных в результате превращения иона йода Γ в нейтральный атом I_0 и свободный электрон e^- (рисунок 6). Иод не взаимодействует непосредственно с благородными металлами, инертными газами, кислородом, азотом, углеродом. Иод испаряется в виде молекулы I_2 . Молекула кислорода способна захватить два свободных электрона, превращаясь при этом в ион O_2^{2-} . На следующем этапе происходит соединение иона олова Sn^{2+} с ионом кислорода, завершающийся образованием молекулы SnO_2 :



Заклучение

Установлено, что дийодид олова (SnI_2) обладает явлением полиморфизма и может находиться в двух модификациях: моноклинной α - SnI_2 и гексагональной β - SnI_2 . Модификация β - SnI_2 , обладающая свойством светочувствительности, образуется в результате нагрева α - SnI_2 -модификации.

На основании результатов исследования светочувствительности дийодида олова в атмосферах различных газов, ее зависимости от давления, определения продуктов фотолиза в SnI_2 с помощью кварцевого измерителя толщины и методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии делается вывод о том, что облучение тонких пленок интегральным световым потоком приводит практически к полному превращению $SnI_2 \rightarrow SnO_2$.

Воздействие световых излучений на тонкопленочные структуры приводит к состоянию термодинамической неравновесности, связанной с отклонением функции распределения атомов по энергии от термодинамического равновесия. В этих условиях энергия возбуждения расходуется на отрыв электронов от ионов йода с последующим образованием молекулы йода и его возгонкой из слоя. Образовавшиеся свободные электроны захватываются молекулами абсорбированного кислорода с последующим электростатическим их взаимодействием с ионами олова. Процесс завершается образованием молекулы SnO_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров – М. : Сов. энцикл., 1983. – 928 с.
2. Green, M., Kuku, T.A. // J. Phys. Chem. Solids. – 1983. – Vol. 44, № 16. – P. 999–1008.
3. Howie, R.A., Moser, W., Trevena, I.C. // Acta Crystallogr. – 1972. – Vol. B28, № 10. – P. 2965–2971.
4. Игуменцев, А.Н. Условия получения, кристаллическая структура и составы плёнок PbI_2 b SnI_2 / А.Н. Игуменцев [и др.] // Вісник Брєсцк. ун-та. – 1998. – № 4. – С. 37–42.
5. Костко, В.С. Структура тонких пленок дийодида олова / В.С. Костко [и др.] // Вісник Брєсцк. ун-та. – 2000. – № 6. – С. 65–69.

6. Kostko, V.S., Kostko, O.V., Makovetskij, G.I., Yanushkevich, K.I. // *Phys. stat. sol. (b)* – 2002. – Vol. 229, № 3. – P. 1349–1352.
7. Костышин, М.Т. О светочувствительности двуиодистого олова / М.Т. Костышин, В.С. Костко // Тез. докл. IV Всесоюз. совещания по фотохимии, (Ленинград, нояб. 1981 г.) – Л., 1981. – С. 51.
8. Костышин, М.Т. Фотохимический эффект в тонких слоях SnI₂ / М.Т. Костышин, В.С. Костко // I Всесоюз. конф. Оптич. изобр. и регистр. среды : тез. докл. / Л., 1982. – С. 127.
9. Костко, В.С. К вопросу о стехиометричности тонких пленок / В.С. Костко [и др.] // материалы 53-й науч.-техн. конф. профессоров, преподавателей, научных работников и аспирантов Бел. гос. политехн. академии, (Минск, 2–5 февр. 1999 г.). – Минск, 1999. – Ч. 2. – С. 70.
10. Ващула, И.В. Исследование тонких поликристаллических слоев методами рентгеноструктурного анализа и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии / И.В. Ващула, В.П. Конашук, О.В. Костко // Науч.-метод. конф. молодых ученых (18–19 мая 1999 г.) : сб. материалов. – Брест : БрГУ, 1999. – С. 11.
11. Shirley, D.A. High-resolution x-ray photoemission spectrum of the valence bands of gold / D.A. Shirley // *Phys. Rev.* – 1972. – Vol. B 5, № 12. – P. 4709–4714.
12. Dawood, R.I. The photodecomposition of lead iodide / R.I. Dawood, A.J. Forty, M.R. Tubbs // *Proc. Roy. Soc.* – 1965. – Vol. A 284, № 1397. – P. 272–288.
13. Анализ поверхности твердого тела методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии : метод. рекомендации / Бел. гос. технолог. универ.; сост. В.В. Поплавский, И.М. Жарский. – Минск, 1993. – 34 с.
14. Моррисон, С. Химическая физика поверхности твердого тела / С. Моррисон. – М., 1980. – С. 488.

V.S. Kostko. Tin Diiodide, its Polymorphism and Light-sensitive Properties

On the basis of the research results of tin diiodide light-sensitivity in the atmospheres of different gases, its dependence on pressure, finding the resultants of photolysis SnI₂ with the help of quartz gauge of thickness and by the method of X-ray photoelectronic spectrography the author comes to the conclusion about its polymorphism, the role of oxygen in the light-sensitive properties of SnI₂, its mechanism of light-sensitivity.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.11.2013

УДК 539.12

Е.М. Овсиук, К.В. Казмерчук

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Частица со спином 1 в сферическом пространстве Римана S_3 исследуется в поле магнитного заряда. В релятивистском уравнении Даффина–Кеммера проведено разделение переменных с использованием D -функций Вигнера, при этом возникают три квантовых числа (E, j, m) : энергии, квадрата и третьей проекции обобщенного полного момента. В радиальной системе уравнений выполнен переход к нерелятивистскому приближению – задача сводится к трем зацепляющимся дифференциальным уравнениям второго порядка. Полученная система оказывается достаточно сложной. Полному анализу поддается только особый случай минимального значения квантового числа j_{\min} . При этом можно дополнительно учесть внешние сферически-симметричные электрические поля. Детально исследованы обобщенные на пространство Римана случаи кулоновского поля и поля осциллятора; построены точные волновые функции и найдены спектры энергий частицы.

1. Разделение переменных в релятивистском уравнении Даффина–Кеммера

Известно, что спин существенно влияет на поведение квантово-механической частицы в поле дираковского монополя [1; 2]. В частности, частица со спином 1/2 обнаруживает существование особого класса решений, которые можно сопоставлять связанным состояниям в системе «частица в потенциале монополя» (простое изложение вопроса см., например, в [3]). В [3] было показано, что такие простые и выделенные состояния возможны и для частицы со спином 1 в поле монополя. Однако до недавнего времени других точных решений в этой системе найти не удавалось. В работе [4] было проведено исследование нерелятивистского приближения в системе «векторная частица в поле монополя». Оказалось, что в таком подходе можно построить точные решения для всех значений обобщенного полного момента j ; удается также учесть дополнительное присутствие внешних сферически-симметричных потенциалов, тем самым получить спектры для частицы со спином 1, модифицированные присутствием внешнего монопольного потенциала. Этот анализ был обобщен на случай пространств Лобачевского в [5]. В настоящей работе аналогичное исследование выполнено в сферическом пространстве Римана S_3 . Напомним, что в этой геометрической модели сингулярная нить Дирака – это замкнутая линия конечных размеров.

Используя общеквариантный тетрадный формализм Даффина–Кеммера [3], рассмотрим задачу о векторной частице в поле монополя. Исходное уравнение в сферической тетраде имеет следующий вид [3]:

$$\left[i \beta^0 \partial_t + i \left(\beta^3 \partial_r + \frac{1}{\sin r} (\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) \right) + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta, \phi}^k - M \right] \Phi(x) = 0, \quad (1.1)$$

$$\Sigma_{\theta, \phi}^k = i \beta^1 \partial_\theta + \beta^2 \frac{i \partial_\phi + (i j^{12} - k) \cos \theta}{\sin \theta},$$

где $k = eg/\hbar c$ – квантующийся согласно Дираку (см. в [1]) параметр $|k| = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ Ниже применим циклическое представление для матриц Даффина–Кеммера [3], в котором матрица ij^{12} имеет диагональную структуру

$$iJ^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{vmatrix}, \quad t_3 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Три компонента сохраняющегося общего момента [1] задаются в этом базисе формулами [3]

$$J_1^k = l_1 + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} (iJ^{12} - \kappa), \quad J_2^k = l_2 + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} (iJ^{12} - \kappa), \quad J_3^k = l_3. \quad (1.2a)$$

Согласно общей методике [3], волновая функция векторной частицы с квантовыми числами (ε, j, m) должна строиться как

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t} [f_1(r) D_k, f_2(r) D_{k-1}, f_3(r) D_k, f_4(r) D_{k+1}, f_5(r) D_{k-1}, f_6(r) D_k, f_7(r) D_{k+1}, f_8(r) D_{k-1}, f_9(r) D_k, f_{10}(r) D_{k+1}], \quad (1.2b)$$

где $D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ обозначается для краткости символом D_σ . При нахождении 10 радиальных уравнений для f_1, \dots, f_{10} предстоит воспользоваться рекуррентными соотношениями [6]

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{k-1} &= a D_{k-2} - c D_k, & \frac{-m - (k-1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k-1} &= -a D_{k-2} - c D_k, \\ \partial_\theta D_k &= (c D_{k-1} - d D_{k+1}), & \frac{-m - k \cos \theta}{\sin \theta} D_k &= -c D_{k-1} - d D_{k+1}, \\ \partial_\theta D_{k+1} &= (d D_k - b D_{k+2}), & \frac{-m - (k+1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k+1} &= -d D_k - b D_{k+2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+k-1)(j-k+2)}, & b &= \frac{1}{2} \sqrt{(j-k-1)(j+k+2)}, \\ c &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+k)(j-k+1)}, & d &= \frac{1}{2} \sqrt{(j-k)(j+k+1)}. \end{aligned}$$

Из (1.1) получаем систему радиальных уравнений

$$\begin{aligned} -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_2 - i \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_3 - M f_8 &= 0, \\ i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} f_3 - M f_{10} &= 0, \\ i\varepsilon f_5 + i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_8 + i \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_9 - M f_2 &= 0, \\ i\varepsilon f_7 - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_{10} - i \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} f_9 - M f_4 &= 0, \\ -i\varepsilon f_2 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_1 - M f_5 &= 0, & -i\varepsilon f_4 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} f_1 - M f_7 &= 0, \\ - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r} \right) f_6 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_5 + d f_7) - M f_1 &= 0, \\ i\varepsilon f_6 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} (-c f_8 + d f_{10}) - M f_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$i \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_2 - d f_4) - M f_9 = 0, \quad -i \varepsilon f_3 - \frac{d}{dr} f_1 - M f_6 = 0. \quad (1.4)$$

Величина j может принимать только следующие значения:

если $k = \pm 1/2$,

$$j = |k|, |k| + 1, \dots;$$

если $k = \pm 1, \pm 3/2, \dots$

$$j = |k| - 1, |k|, |k| + 1, \dots \quad (1.5)$$

Обратимся к состояниям с $j_{\min} = |k| - 1$. Вначале следует исследовать $j_{\min} = 0$ – ситуацию, возникающую при $k = \pm 1$; соответствующая волновая функция не будет зависеть от угловых переменных θ, ϕ . Пусть $k = +1$ и $j_{\min} = 0$, тогда подстановка имеет вид:

$$\Phi^0(t, r) = e^{-i\varepsilon t} (0, f_2, 0, 0, f_5, 0, 0; f_8, 0, 0). \quad (1.6a)$$

Легко проверяется, что угловой оператор $\Sigma_{\theta, \phi}$ действует на Φ_0 как нулевой оператор: $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi_0 = 0$, поскольку $(j^2 - k) \Phi^0 \equiv 0$. В результате получаем только три нетривиальных радиальных уравнения:

$$\begin{aligned} i \varepsilon f_5 + i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_8 - M f_2 &= 0, \\ -i \varepsilon f_2 - M f_5 &= 0, \quad -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_2 - M f_8 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6b)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} f_5 &= -i \frac{\varepsilon}{M} f_2, \quad f_8 = -\frac{i}{M} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_2, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + \varepsilon^2 - M^2 \right) f_2 &= 0; \end{aligned}$$

с помощью подстановки

$$f_2(r) = \frac{1 + \cos r}{\sin r} F_2(r)$$

приходим к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) F_2 = 0, \quad F_2 = e^{\pm \sqrt{M^2 - \varepsilon^2} r}, \quad r \in [0, \pi]. \quad (1.6c)$$

Последнее дает знакомое по электронному случаю решение экспоненциального типа, пригодное для описания «связанных состояний» при $\varepsilon < M$. Однако, никакого квантования уровней энергии на решениях (1.6c) из-за компактности сферического пространства получить не удастся. С требованиями непрерывности совместим единственный выбор $\varepsilon = M$. Предположим теперь, что $\varepsilon > M$, тогда имеем решения:

$$F_2 = e^{\pm i \sqrt{\varepsilon^2 - M^2} r}, \quad r \in [0, \pi]; \quad (1.6d)$$

требуя выполнения равенства $F_2(0) = F_2(\pi) = 1$, можно получить правило квантования:

$$\varepsilon^2 = M^2 + 4n^2. \quad (1.6e)$$

Ситуация при $j_{\min} = 0$ и $k = -1$ выглядит аналогично:

$$\Phi^0(t, r) = e^{-i\varepsilon t} (0, 0, 0, f_4, 0, 0, f_7, 0, 0, f_{10}); \quad (1.7a)$$

система радиальных уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
 i \varepsilon f_7 - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_{10} - M f_4 &= 0, \\
 -i f_4 - M f_7 &= 0, \quad i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_4 - M f_{10} = 0;
 \end{aligned} \tag{1.7b}$$

в итоге находим

$$\begin{aligned}
 f_7 &= -i \frac{\varepsilon}{M} f_4, \quad f_{10} = \frac{i}{M} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_4, \\
 f_4 &= \frac{1 + \cos r}{\sin r} F_4, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) F_4 = 0.
 \end{aligned} \tag{1.7c}$$

Теперь переходим к анализу случая минимального $j_{min} = |k| - 1$ с полуцелыми значениями $k = \pm 3/2, \pm 2, \dots$. Вначале рассмотрим положительные k ; должны исходить из подстановки

$$k \geq 3/2, \quad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t} (0, f_2 D_{k-1}, 0, 0; f_5 D_{k-1}, 0, 0; f_8 D_{k-1}, 0, 0). \tag{1.8}$$

Используя рекуррентные соотношения

$$\partial_\theta D_{k-1} = \sqrt{\frac{k-1}{2}} D_{k-2}, \quad \frac{-m - (k-1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k-1} = -\sqrt{\frac{k-1}{2}} D_{k-2},$$

получаем

$$i\beta^1 \Phi^0 = i \sqrt{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} -if_5 D_{k-2} \\ 0 \\ +f_8 D_{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_2 D_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 \frac{i \partial_\phi + (ij^{12} - k) \cos \theta}{\sin \theta} \Phi^0 = \sqrt{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} -f_5 D_{k-2} \\ 0 \\ -if_8 D_{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +if_2 D_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и дальше находим $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi^0 = 0$. Следовательно, радиальная система для функций f_2, f_5, f_8 удовлетворяет (1.6b). Случай $j_{min} = |k| - 1$ с отрицательными k выглядит аналогично предыдущему:

$$k \leq -3/2, \quad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t} (0, 0, 0, f_4 D_{k+1}, 0, 0, f_7 D_{k+1}, 0, 0, f_1 D_{k+1}); \tag{1.9}$$

тождество $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi^0 \equiv 0$ выполняется, и система радиальных уравнений аналогична (1.7b). Итак, описание состояний с $j_{min} = |k| - 1$ завершено; все они дают решения экспоненциального типа. В то же время это единственный случай, который удастся решить до конца, т. е. решить радиальные уравнения.

2. Нерелятивистское приближение

При осуществлении перехода к нерелятивистскому описанию будем пользоваться известной методикой [7]. В системе (1.4) выделим уравнения, с помощью которых можно исключить нединамические переменные:

$$\begin{aligned} & \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) f_6 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_5 + d f_7) \right] = M f_1, \\ & \left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_2 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_3 \right] = M f_8, \\ & \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_2 - d f_4) \right] = M f_9, \quad \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} f_3 \right] = M f_{10}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В оставшихся шести уравнениях исключаем нединамические переменные (2.1) и одновременно переходим к более симметричным обозначениям:

$$(f_2, f_3, f_4) \rightarrow (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \quad (f_5, f_6, f_7) \rightarrow (E_1, E_2, E_3); \quad (2.2)$$

в результате получим

$$\begin{aligned} & i\varepsilon M E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right] + \\ & + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_1 = 0, \\ & i\varepsilon M E_2 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} \left[-c \left(-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right) + \right. \\ & \left. + d \left(i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} \Phi_2 \right) \right] - M^2 \Phi_2 = 0, \\ & i\varepsilon M E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} \Phi_2 \right] - \\ & - i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_3 = 0, \\ & -i\varepsilon M \Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_1 = 0, \\ & -i\varepsilon M \Phi_2 - \frac{d}{dr} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_2 = 0, \\ & -i\varepsilon M \Phi_3 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Большие и малые компоненты будут вводиться соотношениями:

$$\Psi_j = \Phi_j + iE_j, \quad \psi_j = \Phi_j - iE_j. \quad (2.4)$$

Переписываем уравнения (2.3), собирая их в пары. Одновременно выделяя энергию поля формальной заменой $\varepsilon = (M + E)$, получаем

$$\begin{aligned} & i(M + E) M E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right] + \\ & + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_1 = 0, \end{aligned}$$

$$-i(M + E)M\Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2E_1 = 0, \quad (2.5a)$$

$$i(M + E)ME_2 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} \left[-c \left(-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2 \right) + \right. \\ \left. + d \left(i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2 \right) \right] - M^2\Phi_2 = 0,$$

$$-i(M + E)M\Phi_2 - \frac{d}{dr} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2E_2 = 0, \quad (2.5b)$$

$$i(M + E)ME_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2 \right] - \\ -i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2\Phi_3 = 0,$$

$$-i(M + E)M\Phi_3 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2E_3 = 0. \quad (2.5c)$$

Рассматриваем пару (2.5a):

$$iM^2E_1 + iEME_1 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)\Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}\Phi_2 - \\ -\frac{2c}{\sin^2 r}(c\Phi_1 - d\Phi_3) - M^2\Phi_1 - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}(\Phi_1 + \sqrt{2}c\Phi_2) = 0,$$

$$-iM^2\Phi_1 - iEM\Phi_1 - \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{2c}{\sin^2 r}(cE_1 + dE_3) - M^2E_1 = 0; \quad (2.6a)$$

переходим в ней к большим и малым компонентам:

$$M^2(\Psi_1 - \psi_1) + EM(\Psi_1 - \psi_1) + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2 + \psi_2) - \\ -\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 + \psi_1) - d(\Psi_3 + \psi_3)] - M^2(\Psi_1 + \psi_1) - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}[(\Psi_1 + \psi_1) + \sqrt{2}c(\Psi_2 + \psi_2)] = 0, \\ -iM^2(\Psi_1 + \psi_1) - iEM(\Psi_1 + \psi_1) + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)(\Psi_2 - \psi_2) + \\ + i\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 - \psi_1) + d(\Psi_3 - \psi_3)] + iM^2(\Psi_1 - \psi_1) = 0. \quad (2.6b)$$

После приведения подобных слагаемых система упрощается

$$-2M^2\psi_1 + EM(\Psi_1 - \psi_1) + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2 + \psi_2) - \\ -\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 + \psi_1) - d(\Psi_3 + \psi_3)] - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}[(\Psi_1 + \psi_1) + \sqrt{2}c(\Psi_2 + \psi_2)] = 0,$$

$$-2M^2\psi_1 - EM(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)(\Psi_2 - \psi_2) + \\ + \frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 - \psi_1) + d(\Psi_3 - \psi_3)] = 0. \quad (2.6c)$$

Из первого уравнения вычитаем второе, одновременно пренебрегая малыми компонентами на фоне больших:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_1 - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \Psi_1 - \frac{\sqrt{2}c(1 + \cos r)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0; \quad (2.6d)$$

полученное уравнение содержит только большие компоненты.

Аналогично рассмотрев пары уравнений (2.5c) и (2.5b), приходим к системе уравнений Паули:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_1 - \\ & - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \Psi_1 - \frac{\sqrt{2}c(1 + \cos x)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_2 - \\ & - \frac{2(c^2 + d^2)}{\sin^2 r} \Psi_2 - \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_2 - \sqrt{2}c \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_1 - \sqrt{2}d \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_3 = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_3 - \\ & - \frac{4d^2}{\sin^2 r} \Psi_3 - \frac{\sqrt{2}d(1 + \cos r)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко можно убедиться в справедливости тождества

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \frac{\cos r + 1}{\sin r} F = \frac{\cos r + 1}{\sin r} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME \right) F,$$

которое позволяет преобразовать систему (2.7) к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \right) F_1 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\begin{array}{c} \sqrt{2}c F_2 \end{array} \right), \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{2(c^2 + d^2)}{\sin^2 r} \right) F_2 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\sqrt{2}c F_1 + F_2 + \sqrt{2}d F_3 \right), \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{4d^2}{\sin^2 r} \right) F_3 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\begin{array}{c} \sqrt{2}d F_2 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

К сожалению, система (2.8) оказывается очень сложной. Использованный в аналогичной ситуации в случае плоского пространства метод диагонализации смешивающей матрицы здесь не применим.

3. Частица в присутствии монополя в состояниях минимального j : учет кулоновского и осцилляторного потенциалов

Рассмотрим уравнение, описывающее состояния векторной частицы с минимальным значением квантового числа j в присутствии монополя, добавив кулоновский потенциал:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r} \right)^2 - M^2 \right) F_2 = 0. \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) перейдем к переменной $x = 1 - e^{-2ir}$:

$$x(1-x)\frac{d^2 F_2}{dx^2} - x\frac{dF_2}{dx} + \left[\frac{1}{4} \frac{M^2 x}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{(\alpha x - 2\alpha + i\varepsilon x)^2}{x(1-x)} \right] F_2 = 0. \quad (3.2)$$

После подстановки $F_2 = x^A (1-x)^B f(x)$ уравнение (3.2) примет вид:

$$x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} - [(1+2A+2B)x - 2A]\frac{df}{dx} - \left[(A+B)^2 + \left(\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{M^2}{4} - \frac{A(A-1) + \alpha^2}{x} - \frac{1}{4} \frac{(i\varepsilon - \alpha)^2 + 4B^2 + M^2}{1-x} \right] f = 0. \quad (3.3a)$$

Требую

$$A = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}, \quad B = \pm \sqrt{-\left(\frac{i\varepsilon}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{M^2}{4}}, \quad (3.3b)$$

из (3.3a) получим более простое уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} - [(1+2A+2B)x - 2A]\frac{df}{dx} - \left[(A+B)^2 + \left(\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{M^2}{4} \right] f = 0. \quad (3.3c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрических функций

$$x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{df}{dx} - ab f = 0, \\ a = A+B - \frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2}, \quad b = A+B + \frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2}. \quad (3.4)$$

Выбираем

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon - \alpha)^2 - M^2}. \quad (3.5)$$

Условие полиномиальности $a = -n$ дает

$$1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2} - \sqrt{-(i\varepsilon - \alpha)^2 - M^2} - \sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2} = -2n,$$

откуда приходим к формуле для спектра энергий:

$$\varepsilon = \frac{M}{\sqrt{1 + \alpha^2/\nu^2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + \nu^2}{M^2}}, \quad \nu = n + \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2}. \quad (3.6)$$

В обычных единицах выражение для спектра энергий имеет вид:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2/\nu^2}} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 R^2} (\alpha^2 + \nu^2)}. \quad (3.7)$$

Теперь на фоне присутствия монополя в состояниях минимального значения j учтем внешний осцилляторный потенциал. Если обратиться к релятивистской частице в поле монополя, то возникающее уравнение не решается в гипергеометрических функциях. Поэтому рассматриваем здесь только нерелятивистской задачу – она описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + 2M \left(\varepsilon - \frac{K \tan^2 r}{2} \right)^2 \right) F_2 = 0. \quad (3.8)$$

В уравнении (3.8) перейдем к переменной $y = \cos^2 r$:

$$\left(4y(y-1)\frac{d^2}{dy^2} + (4y-2)\frac{d}{dy} - 2ME - MK\frac{y-1}{y} \right) F_2 = 0. \quad (3.9a)$$

Решения будем искать в виде $F_2(y) = y^a (1-y)^b f(y)$:

$$y(1-y)f'' + \left[2a + \frac{1}{2} - (2a+2b+1)y \right] f' - \left[-\frac{EM}{2} - \frac{KM}{4} + (a+b)^2 \right] f - \frac{1}{y} \left(-a^2 + \frac{a}{2} + \frac{KM}{4} \right) f + \frac{1}{1-y} \left(b^2 - \frac{b}{2} \right) f = 0.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при $y^{-1}, (1-y)^{-1}$, получаем

$$a = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{1+4KM}, \quad b = 0, \frac{1}{2}. \quad (3.9b)$$

Уравнение принимает более простой вид:

$$y(1-y)f'' + \left[2a + \frac{1}{2} - (a+b+1)y \right] f' - \left[-\frac{EM}{2} - \frac{KM}{4} + (a+b)^2 \right] f = 0. \quad (3.9c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрической функции:

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} f + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{df}{dx} - \alpha\beta F = 0, \quad \gamma = 2a + 1,$$

$$\alpha = a + b - \sqrt{\frac{2EM}{4} + \frac{KM}{4}}, \quad \beta = a + b + \sqrt{\frac{2EM}{4} + \frac{KM}{4}},$$

$$F_2(y) = y^a (1-y)^b F(\alpha, \beta, \gamma, y) = (\cos r)^{2a} (\sin r)^{2b} F(\alpha, \beta, \gamma, \cos^2 r). \quad (3.10a)$$

Для связанных состояний выбираем положительные значения параметров a, b :

$$2b = 1 > 0, \quad 2a = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{2} > 0, \quad (3.10b)$$

при этом

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2EM + KM},$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2EM + KM}. \quad (3.10c)$$

Условие обращения гипергеометрического ряда в полином $\alpha = -n$ дает

$$N + \frac{\sqrt{1+4KM}}{2} = \sqrt{2EM + KM}, \quad N = 2n + \frac{3}{2}.$$

Откуда находим формулу для спектра энергии

$$E = N \sqrt{\frac{K}{M} + \left(\frac{1}{2M}\right)^2} + \frac{1}{2M} \left(N^2 + \frac{1}{4}\right). \quad (3.11)$$

В обычных единицах формула имеет вид:

$$\varepsilon = \hbar \left(N \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\hbar^2}{4m^2 R^4}} + \frac{\hbar}{2mR^2} \left(N^2 + \frac{1}{4}\right) \right), \quad N = 2n + \frac{3}{2}. \quad (3.12)$$

Авторы благодарны В.М. Редькову за интерес к данной работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. Электродинамика с магнитным зарядом / В.И. Стражев, Л.М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 322 с.
2. Fushchych, W.I. Relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb and magnetic monopole field / W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, W.M. Susloparow // Nuovo Cimento A. – 1985. – Vol. 87. – P. 415–424.

3. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.
4. Ovsiyuk, E.M. Quasi-plane waves for a electromagnetic and spinor fields on the background of Lobachevsky geometry: simulating of a special medium / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // BGL-8 International Conference on Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics: programme and abstracts, Uzhgorod, 22–25 May 2012 / укл. А.М. Завілопуло. – Ужгород: ФОП Бреза А.Е., 2012. – С. 31.
5. Ovsiyuk, E. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsiyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov // Quantum groups and quantum integrable systems: Program and Abstracts of International Conference, Kiev, June 18–21, 2013 / National Academy of Sciences of Ukraine, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Institute of Mathematics. – Kiev, 2013. – P. 42.
6. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.
7. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи / Е.М. Овсиук, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 232 с.

E.M. Ovsiyuk, K.V. Kazmerchuk Particle with Spin 1 in the Spherical Riemann Space: Pauli Approximation in the Magnetic Monopole Potential

A particle with spin 1 in the spherical Riemann space S_3 is treated in presence of the Dirac magnetic monopole in non-relativistic approximation. In the relativistic Duffin–Kemmer–Peteau equation we have separated the variables using the Wigner D -functions. Thus there arise three quantum numbers (E, j, m) : the energy, the square and the third projection of the generalized total angular momentum. In the radial system of equations, transition to the non-relativistic approximation is performed and the problem is reduced to the system of three interrelated equations of second order. The resulting system is complex, complete analysis is possible only for a special case of minimal value of the quantum number j_{\min} , at this external spherically symmetric electric fields can be taken into account. The cases of Coulomb and oscillator potential are studied in detail – the exact wave functions and energy spectra of the particle have been constructed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2013

УДК 535.44

*Г. Пашкевич, А. Шиховец, А. Ланчук,
А. Крючин, А. Богдан*

МИНИМИЗАЦИЯ СПЕКЛОВ В ЛАЗЕРНЫХ ПРОЕКТОРАХ ЛИНЕЙНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ КОДА БАРКЕРА ИЛИ М-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе представлены результаты экспериментальных измерений эффективности подавления спекла при использовании предложенного авторами метода, основанного на линейном перемещении дифракционных элементов, созданных на базе 2D кода Баркера. Описана разработанная экспериментальная оптическая установка и использованные в работе оптические параметры. В эксперименте получены значения контраста спеклов C в пределах 4,4–5,3% и коэффициент подавления спеклов (коэффициент понижения контраста спеклов) $K > 8$. Однако экспериментально полученный коэффициент подавления спеклов примерно в 1,5 раза меньше, чем теоретически предсказанное значение. По мнению авторов, расхождение теоретических и экспериментальных данных происходит из-за неточного соответствия между оптимальными для подавления спеклов значениями параметров оптической установки и реальными, используемыми в эксперименте, параметрами метода. Анализ экспериментальных данных показывает, что реализация оптической установки с оптимальными параметрами позволит получить подавление спекловых шумов до уровня, близкого к предсказанному теорией.

Введение

Использование лазерного освещения в системах создания изображения позволяет получить малогабаритные устройства, обладающие большой оптической эффективностью и создающие изображение с высокой насыщенностью цвета. Таким образом, это оптимальное решение для многих оптических приборов [1–7]. Тем не менее, качество изображения, созданное с использованием лазерного излучения, сильно страдает из-за гранулированной модуляции интенсивности освещения, вызванной спеклами [8]. Спекл-шумы являются основным фактором, сдерживающим широкое внедрение лазерного освещения в технических устройствах [7–8]. Контраст спеклов C , который определяет глубину модуляции интенсивности света, обусловленную спеклами, является наиболее важным параметром для спеклов

$$C = \sigma_I / \langle I \rangle, \quad (1)$$

где σ_I и $\langle I \rangle$ стандартное отклонение и средняя интенсивность света на экране соответственно. Методы подавления спеклов основаны на усреднении спекловых шумов с использованием разнообразных длин волн, углов падения и поляризации лазерного излучения.

Одним из наиболее эффективных методов механизма подавления спеклов является усреднение, основанное на вибрации диффузора или специально изготовленного периодического дифракционного оптического элемента [9–17]. В предыдущих публикациях авторами был предложен метод подавления спекловых шумов на основе кода Баркера и М-последовательности и разработана соответствующая теория [18–20]. Разработанный метод основан на 2D-фазовой модуляции света, проходящего через дифракционный оптический элемент (ДОЭ) с кодом Баркера или М-последовательностью. Разработанная математическая модель дает следующую оценку для контраста метода [18–20]:

$$C = \alpha / N\sqrt{2}, \quad (2)$$

где N – длина кода Баркера, α – коэффициент (значение которого близко к единице), зависящий от параметров оптической схемы. Из уравнения (2) видно, что этот метод позволяет снизить контраст спеклов ниже чувствительности человеческого глаза (менее 5%) в случае применения код Баркера с $N = 13$ или на основе M -последовательностей длины $N \geq 13$. Было доказано, что этот метод широкополосный, и поэтому один ДОО с кодом Баркера может быть использован для красного, зеленого и синего лазерных пучков [18, 20]. Было также показано, что этот метод может быть реализован с помощью двух 1D ДОО с кодом Баркера, которые перемещаются в ортогональных направлениях [18] или одного 2D ДОО с кодом Баркера, который перемещается с заданной линейной скоростью в данном направлении [19]. Этот метод можно также реализовать на основе жидкокристаллических панелей и на основе микроэлектромеханических систем (MEMS). Возможны и смешанные реализации [20]. В случае реализации на панелях жидких кристаллов, MEMS или смешанной реализации, этот метод не требует никакой механической вибрации вообще.

В этой статье мы представляем экспериментальные измерения контраста спеклов и оптической эффективности 2D ДОО с кодом Баркера при его механическом перемещении с постоянной скоростью.

Экспериментальная установка

Оптическая схема для метода, предложенного в работе, показана на рис. 1. ДОО помещается в плоскости объекта. Однако, в общем случае ДОО может быть расположен в любой плоскости, сопряженной с плоскостью объекта [20]. ДОО с кодом Баркера был помещен на каретку плоттера. Для наилучшего подавления спекловых шумов предложено располагать ДОО под наклоном с определенным углом по отношению к направлению движения. Угол φ рассчитывается по формуле $\tan \varphi = 1/MN$ (см. рис. 1 (б)). Каретка плоттера может перемещаться только с тремя заданными скоростями. Оптическая схема сконструирована таким образом, что две скорости перемещения каретки плоттера близки к скорости, необходимой для достижения максимального эффекта подавления спеклов. Эффективность подавление спеклов в методе максимальна, если входное (NA_{1in}) и выходное (NA_{1out}) числовые значения апертуры проектора, входное (NA_{2in}) и выходное (NA_{2out}) числовые значения апертуры фотокамеры (или глаза), ширина элемента решетки кода Баркера (T) и его скорость (v_d) удовлетворяют следующим пяти условиям [18–20]:

$$NA_{1in} = d_1 / (2s_1) > \lambda / T; \quad (1)$$

$$NA_{1out} = d_1 / (2s_2) > N * NA_{2in} = N * d_2 / (2s_3); \quad (2)$$

$$\lambda / 2NA_{2in} > M * T_0; \quad (3)$$

$$\lambda / 2NA_{2out} > 3\Delta; \quad (4)$$

$$v_d \Delta t = K \cdot M \cdot NT; \quad (5)$$

где (см. рис 1.) λ – длина волны лазерного излучения; d_1 – диаметр апертуры объектива

проектора; S_1 – расстояние от плоскости объекта на объектив; S_2 – расстояние от объектива до экрана; d_2 – диаметр апертуры объектива фотокамеры, M – увеличение проектора; Δ – ширина одного фотоприемника камеры; $T_0 = NT$; Δt – время экспозиции; K – любое положительное целое число.

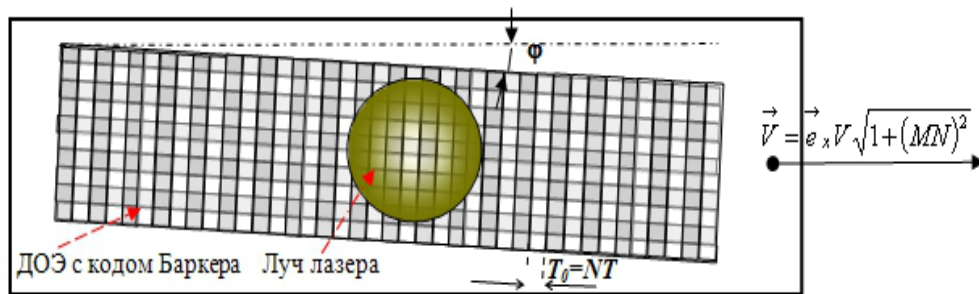
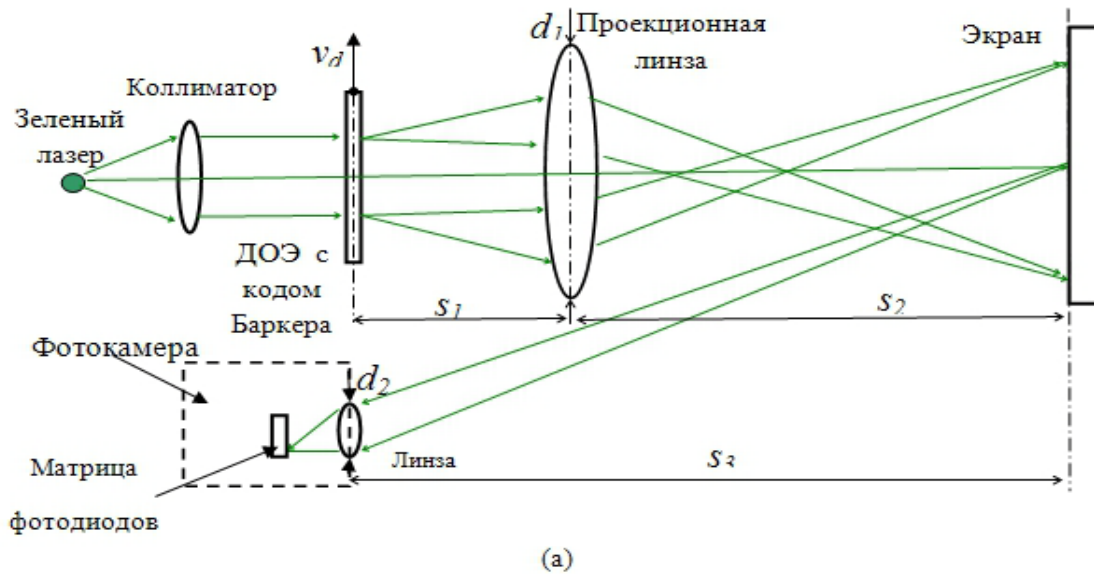


Рисунок 1 – (а) Принципиальная оптическая схема и (б) схема движения ДОЭ

Первое условие необходимо для максимального подавления спекл-эффекта и большой оптической эффективности, поскольку в этом случае почти все пространственные частоты рассеянного на дифракционной решетке света будут использоваться для создания образа и для усреднения спекловых шумов. Второе и третье уравнения обеспечивают условие того, что оптимальное подавление спеклов может быть получено только тогда, когда глаз (или фотокамера) не разрешает изображение одного периода решетки ДОЭ на экране ($M \cdot T_0$). Четвертое условие требуется, чтобы избежать усреднения спеклов в самой измерительной системе из-за конечного размера фотодиода камеры. Пятое условие важно для точного усреднения спеклового шума за интервал времени, равного экспозиции фотокамеры. Поскольку скорость каретки плоттера и время экспозиции камеры имеют конечное число дискретных значений, то последнее условие может быть реализовано только приблизительно.

2D ДОЭ на основе кода Баркера длиной $N=13$ с шириной элемент $T = 6$ мкм и

периодом решетки $T_0 = 7,8$ мкм была изготовлена с использованием электронно-лучевой литографии (для производства фотошаблонов) и фотолитографии (для получения ДОЭ из фотошаблонов). Глубина рельефа выбрана с учетом полуволнового фазового сдвига для зеленого лазера с длиной волны 532 нм.

В качестве источника когерентного света использовано излучение полупроводникового лазера (лазерная указка) с длиной волны 532 нм и мощностью излучения ~ 10 мВт. Оптическая система лазерной указки не идеальна, поскольку лазерный луч внутри указки испытывает сильное рассеяние на боковых стенках, и это приводит к созданию мелкой дифракционной картины на экране и, в конечном итоге, к завышенным значениям контраста спеклов в эксперименте. Чтобы минимизировать эффект влияния интерференционных полос на результаты измерения контраста спеклов, предложена следующая методика. Сначала измерялся контраст спеклов небольшой равномерно освещенной части экрана (достаточно большой, чтобы иметь большое количество декоррелированных областей в одной части). Результирующий контраст спеклов вычислялся как среднее от контраста спеклов малых областей. Изображение с экрана просматривалось фотокамерой с апертурой входного зрачка диаметром 1,5–2 мм. Для фотографирования использовалась цифровая фотокамера Canon PowerShot A630 с 8,0-мегапиксельной ПЗС-матрицей.

В эксперименте ДОЭ перемещался со скоростью 0,0018 м/с и время экспозиции фотокамеры составляло 0,6 с. Таким образом, во время экспозиции сдвиг ДОЭ составлял $\Delta L = 13,8 * T_0$, который немного выше, чем $\Delta L = 13 * T_0$ (почти на ширину одного элемента решетки T), что является условием для оптимального подавления спеклов. Поскольку временное разрешение глаза равно 0,04 с (примерно в 15 раз меньше, чем выдержка камеры) скорость ДОЭ в проекторе должна быть в 15 раз выше ($\sim 0,027$ м/с). Уменьшить длину периода ДОЭ позволяет пропорциональное уменьшение скорости ДОЭ. Параметры экспериментальной установки представлены в таблице 1. Во втором ряду представлены параметры, используемые для первого эксперимента, а третий ряд параметров используется для второго эксперимента. Из данных таблицы 1 следует, что почти все оптические параметры находятся в пределах желаемого диапазона для подавления спеклов предложенным в работе методом.

Таблица 1 – Параметры экспериментальной установки для измерения эффективности подавления спеклов

N	S1 (мм)	D1 (мм)	S2 (мм)	D2 (мм)	S3 (мм)	N	M	NA1in	NA1out	NA2in	$\lambda/2$ NA2in (мм)
1	56	20	280	2	1100	13	5	0.17	0.0357	0.0009	0.29
2	60	20	260	1.6	1150	13	4.7	0.11	0.038	0.0065	0.41

Экспериментальные результаты и обсуждение

На рисунке 2 показаны фотографии фрагмента ДОЭ с кодом Баркера (а) и распределение интенсивности света в плоскости Фурье коллимированного зеленого лазерного пучка после его дифракции на ДОЭ (б), а также распределение интенсивности света в горизонтальном направлении вдоль центрального ряда дифракционной картины (в). Измерение интенсивности (рис. 2) получено в результате съемки изображения с экрана с помощью цифровой камеры и, следовательно, распределение интенсивности сильно модулируется спекл-шумами. Несмотря на сильные спекл-шумы, можно увидеть, что распределение интенсивности в плоскости Фурье (оггибающей дифракционной

решетки) имеет форму Sinc функции с шириной центрального максимума, определяемого шириной T элемента решетки. Это распределение интенсивности в плоскости Фурье хорошо согласуется с теорией и, следовательно, это подтверждает, что ДОЭ изготовлен правильно и имеет необходимые оптимальные параметры.

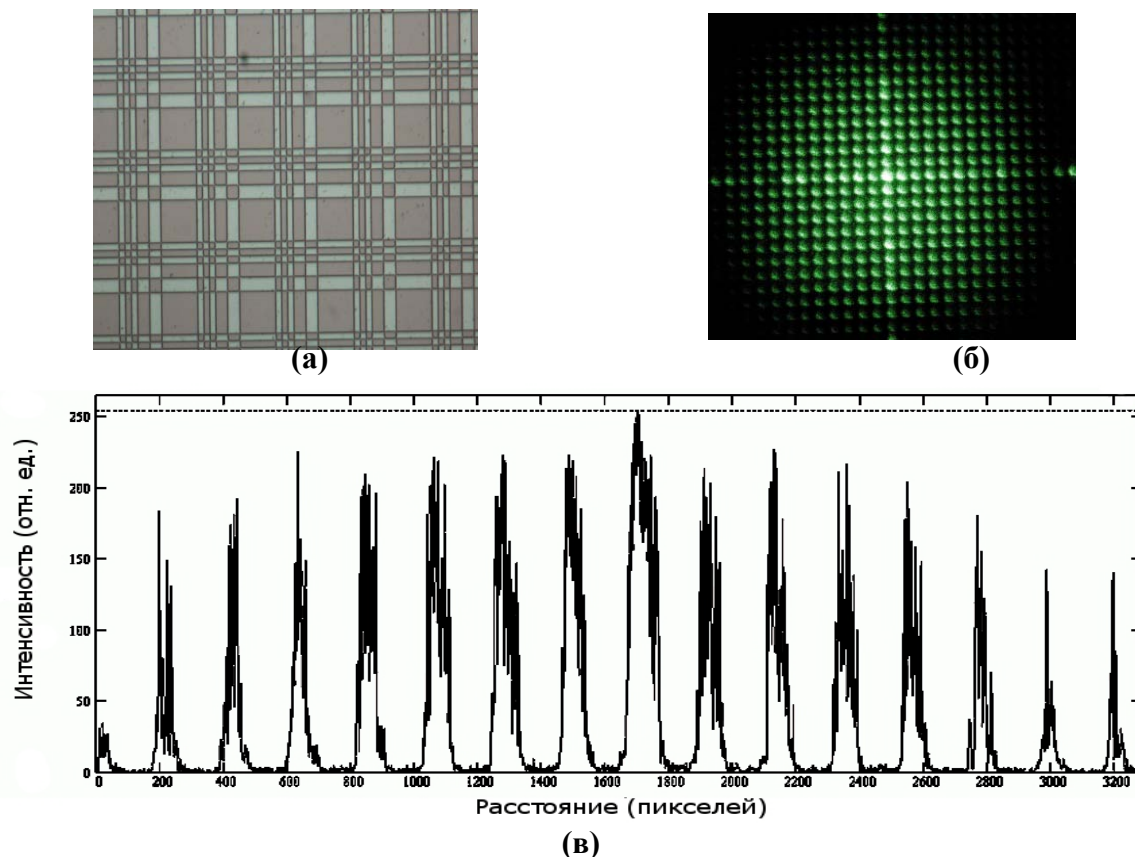


Рисунок 2 – ДОЭ с кодом Баркера: (а) фотография ДОЭ с кодом Баркера; (б) фотография интенсивности дифракционных максимумов коллимированного зеленого лазерного луча продифрагировавшего на ДОЭ с кодом Баркера; (в) распределение интенсивности дифракционных порядков вдоль центральной вертикальной линии

На рисунке 3 представлена фотография распределение интенсивности зеленого лазерного пучка, спроектированного на экран без (а) и с движущимся (б) ДОЭ (параметры экспериментальной установки приведены во второй строке табл.1). Данные для изображения взяты с фотодиодов зеленого света фотокамеры. Без ДОЭ (рисунок 4 (а)), интенсивность света на экране сильно модулируется спеклами и практически невозможно увидеть характер распределения интенсивности света на экране. Напротив, в изображении лазерного пятна, полученного с использованием движущегося ДОЭ (рисунок 4 (б)), спекл-шумы сильно подавлены и хорошо видно тонкую структуру распределения интенсивности света на экране, хотя все еще видна и слабая модуляции интенсивности света спеклами.

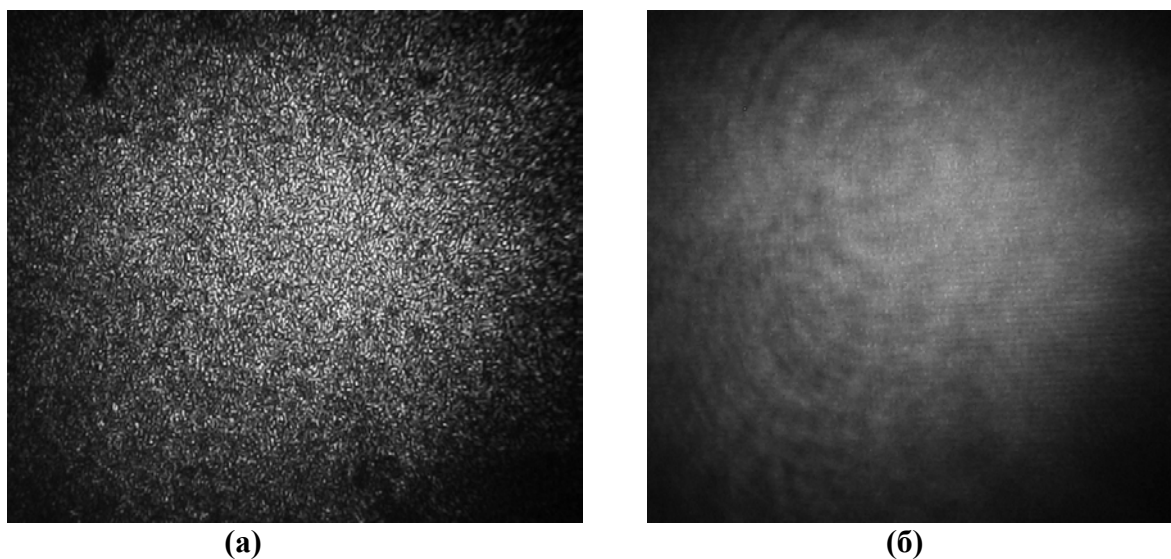
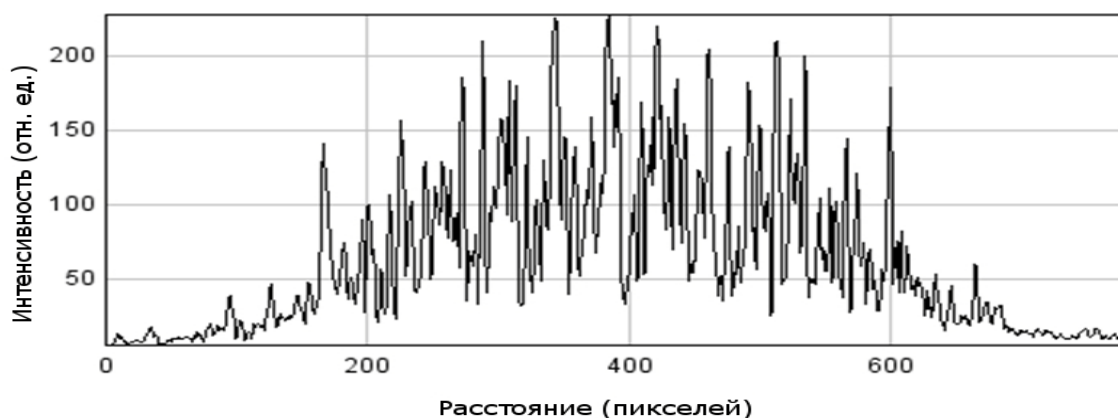
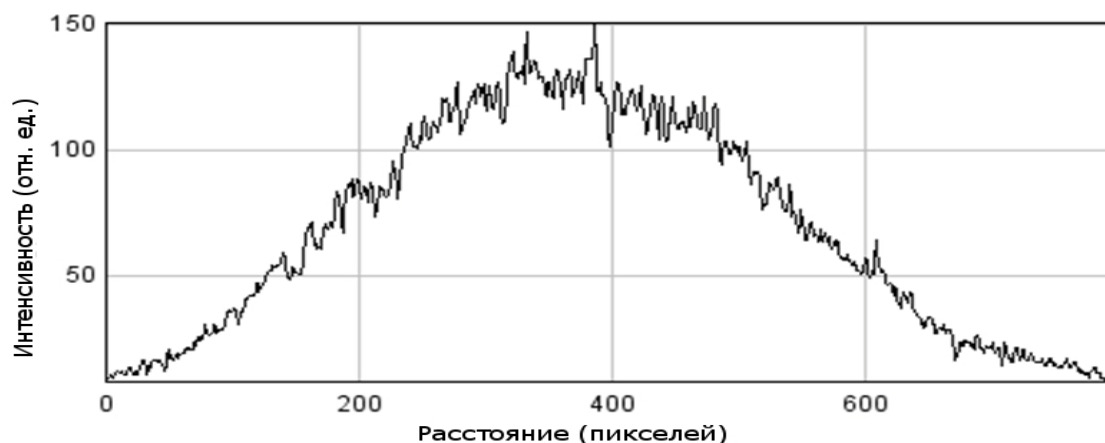


Рисунок 3 – Фотография распределения интенсивности в лазером пятне на экране без (а) и с подвижным ДОЭ с кодом Баркера (б)



(а)



(б)

Рисунок 4 – Распределение интенсивности в изображении лазерного пятна на экране вдоль вертикальной линии, проходящей через центр: (а) без ДОЭ; (б) с подвижным ДОЭ

В таблице 2 представлены измеренные значения контраста спеклов от разных небольших частей экрана и средний контраст спеклов (среднее значение по всем частям экрана) для двух случаев (первый эксперимент): без и с подвижным ДОЭ. Первоначальный контраст спеклов без ДОЭ был меньше ($C_b = 0,45$), чем предсказывает теория ($C_t = 0,707$, $K = 0,707 / 0,45 = 1,57$). Таким образом, в нашем методе измерения контраста спеклов существует начальное усреднение спекловых шумов. Это первоначальное усреднение может быть связано с конечными размерами фотодиода фотокамеры или обусловлено неполной когерентностью лазерного пучка. Данные в таблице 2 показывают, что контраст спеклов уменьшился с 0,45 до 0,054 с коэффициентом подавления спеклов $K = C_b / C_c = 8,3 \pm 1,5$. Хотя мы получаем большое подавление спеклов, коэффициент, предсказанный теорией, больше в 1,5 раза [18–20], чем получено в эксперименте. Есть несколько причин этого несоответствия: 1) не оптимальная скорость движения ДОЭ, так как $v\Delta t = 13,7\lambda_0$, вместо $13\lambda_0$; 2) не оптимальный угол наклона структуры ДОЭ, потому что $\tan \varphi = 17/200 = 1/11,76$ вместо $\tan \varphi = 1/13$; 3) вибрация ДОЭ в вертикальном направлении вследствие вибрации каретки плоттера; 4) изображение периода решетки определяется разрешением фотокамеры. Все четыре фактора сильно влияют на контраст спеклов и могут существенно уменьшить эффективность подавления спеклов.

Из данных, представленных в таблице 2, видно, что измеренный контраст спеклов значительно изменяется от области к области. Это можно объяснить небольшим значением площадей экрана, по которым проводились измерения (большая ошибка, связанная с небольшим числом декоррелированных областей в пределах одной области экрана), а также тем фактом, что свет на экран также модулируется дифракционной картиной лазерного освещения, связанной с рассеянием света боковыми стенками лазерного излучателя. Очевидно, что дифракционные полосы на экране увеличивают контраст спеклов больше (в относительных единицах) для освещения с использованием подвижного ДОЭ с кодом Баркера, потому что в этом случае интенсивность модуляции спеклами низкая, а интенсивность модуляции интерференционными полосами сохраняется неизменной. Таким образом, реальное значение снижения контраста спеклов в определенной степени является большим, чем полученное в нашем эксперименте.

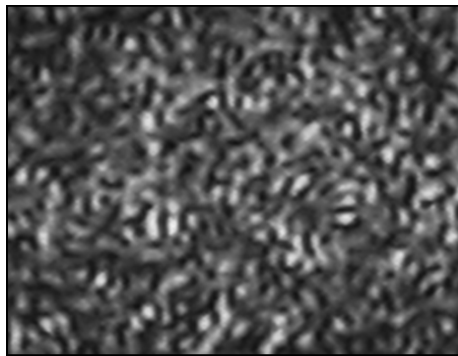
Таблица 2 – Контраст спеклов, измеренный без и с подвижным 2D ДОЭ с кодом Баркера длиной $N = 13$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Ср.	Откл.
без ДОЭ	0.41	0.49	0.52	0.41	0.45	0.52	0.39	0.41	0.40	0.5	0.4	0.51	0.49	0.45	0.47
с ДОЭ	0.049	0.056	0.063	0.050	0.070	0.047	0.060	0.045	0.006	0.055	0.044	0.048	0.060	0.054	0.0076

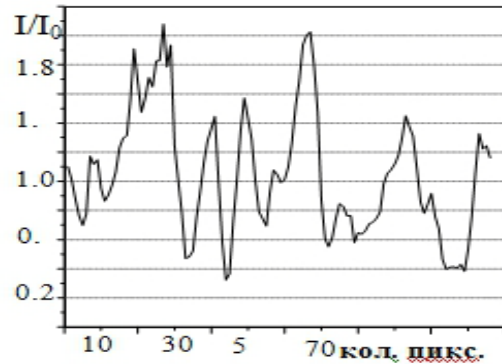
Сравнивая интенсивность света на экране без и при наличии ДОЭ с кодом Баркера, можно сделать вывод, что различия между ними незначительны и находятся в пределах ошибки измерений. Таким образом, практически весь рассеянный дифракционной решеткой свет собирается объективом проектора и оптическая эффективность в этом случае близка к 100%, если пренебречь светом, отраженным от пластины с ДОЭ.

В работе была проведена оптимизация оптических параметров экспериментальной установки для второго эксперимента для улучшения эффективности подавления спеклов (третий ряд табл. 1). Угол наклона ДОЭ был максимально приближен к оптимальному значению. Апертура фотокамеры была снижена с 2 до 1,5 мм, и расстояние от камеры до экрана было увеличено от 1100 до 1150 мм. Камера имеет относительно

высокий уровень шума при низкой интенсивности света и относительно низкую чувствительность фотодиодов. С учетом этого было снижено увеличение фотокамеры примерно в два раза для того, чтобы компенсировать снижение потока мощности света в связи с сокращением диаметра объектива фотокамеры и увеличением расстояния до экрана. Результаты этих экспериментов представлены на рисунке 5.



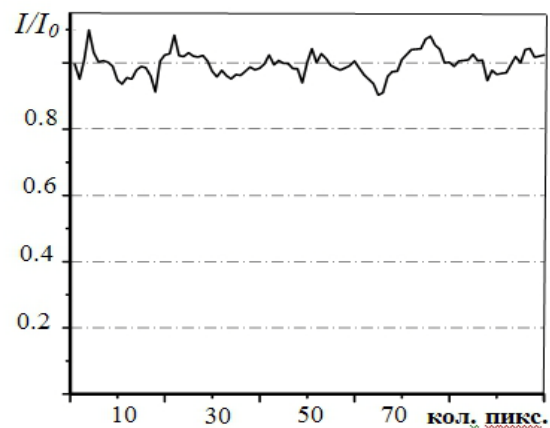
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 5 – Распределение интенсивности света с длиной волны 532 нм на экране вдоль вертикальной линии близко к центру: (а) и (б) без ДООЭ, (в) и (г) с движущимися ДООЭ с кодом Баркера; (а) и (в) 2D распределения, (б) и (г) распределение вдоль вертикальной линии; $S_{бдоэ} = 0,42$; $S_{сдоэ} = 0044$, $K = S_{бдоэ} / S_{сдоэ} = 8,5$

В новом эксперименте получен контраст спекла 0,044 (начальное значение 0,42) и коэффициент подавление спеклов $\sim 8,5$. Это заметно лучше, чем в первом эксперименте, но это по-прежнему ниже, чем теоретический прогноз. Предполагаем, что расхождение между теорией и экспериментом может быть объяснено не оптимальной скоростью ДООЭ и интерференционными полосами в осветительном лазерном пучке. Дальнейшая оптимизация метода ограничена нашими техническими возможностями.

Заключение

Измерена эффективность подавления контраста спеклов методом, основанным на перемещении 2D ДООЭ, созданного на основе кода Баркера с длиной $N = 13$. Получено высокое подавление контраста спеклов с коэффициентом подавления спеклов $K =$

Сбдоэ / Ссдоэ> 8. Экспериментально подтверждена высокая оптическая эффективность метода (близкая к 100%). Полученная в эксперименте эффективность подавление спеклов оказалась меньше, чем предсказанная теорией, с коэффициентом примерно 1,5, что, по мнению авторов, является следствием не оптимальной скорости ДОЭ, вибраций и интерференционных полос в осветительном лазерном пучке. Для проверки этих предположений требуется провести дополнительные экспериментальные исследования с оптимальными параметрами проектора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trisnadi, J.I. Overview and applications of Grating Light ValveTM based optical write engines for high-speed digital imaging / J.I.Trisnadi, C.B. Carlisle, V. Monteverde // MOEMS Display and Imaging Systems II, edited by Hakan Urey, David L. Dickensheets, Proc. SPIE 5348. – 2004. – P. 52–64.
2. Kowarz, M.W. Conformal grating electromechanical system (GEMS) for high-speed digital light modulation / M.W.Kowarz, J.C. Brazas, J.G. Phalen // IEEE, 15th Int. MEMS Conf. Digest. – 2002. – P. 568–573.
3. Mobile projectors using scanned beam displays / Sprague R. [et.al] // Mobile Displays, Technology and Applications.–Wiley. – 2008.
4. Davis, W.O. MEMS-based picoprojector display / W.O. Davis, R. Sprague, J. Miller // Proc. IEEE/LEOS Opt. MEMS & Nanophoton. – 2008. – P. 31–32.
5. Spatial optical modulator (SOM): high density diffractive laser projection display / Yun S.K. [et.al] // Proc. SPIE 6487, 648710. – 2007.
6. A novel diffractive micro-optical modulator for mobile display applications / Yun S.K. [et.al] // Proc. SPIE 6887, 688702. – 2008.
7. Chellappan, K.V. Laser-based displays: A review / K.V. Chellappan, E. Erden, H. Urey // Appl. Opt. – 2010. – Vol. 49, №25. – P. 79–98.
8. Goodman, J.W. Speckle Phenomena in Optics. Theory and Applications / J.W. Goodman // Roberts & Company, 2006.
9. Laser speckle reduction by multimode optical fiber bundle with combined temporal spatial and angular diversity / Mehta D.S. [et.al] // Appl. Opt. – 2012. – Vol. 51, № 12. – P. 1894–1904.
10. Janssens, P. Future prospects of high-end laser projectors / P. Janssens, K. Malfait // Proc. SPIE 7232. – 2009. – P. 723–234.
11. Speckle reduction in laser projection systems by diffractive optical elements / Wang L. [et.al] // Appl. Opt. – 1998. – Vol. 37. – P. 1770–1775.
12. Kubota, Sh. Very efficient speckle contrast reduction realized by moving diffuser device / Sh. Kubota, J. W. Goodman // Appl. Opt. – 2010. – Vol. 49, № 23. – P. 4385–4391.
13. Trisnadi, J.I. Hadamard speckle contrast reduction / J. I. Trisnadi // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – P. 11–13.
14. Replacing two-dimensional binary phase matrix by a pair of one-dimensional dynamic phase matrices for laser speckle reduction / Gao W. [et.al] // J. Display Technol. – 2012. – Vol. 8, № 5. – P. 291–295.
15. Speckle suppression in scanning laser display / Yurlov V. [et.al] // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47. – P. 179–187.
16. Speckle suppression in scanning laser displays: Aberration and defocusing of the projection system / Yurlov V. [et.al] // Appl. Opt. – 2009. – Vol. 48. – P. 80–90.
17. Akram, M.N. Speckle reduction in line-scan laser projectors using binary phase codes / M.N. Akram, V. Kartashov, Zh. Tong // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35, № 3. – P. 444–445.
18. Full speckle suppression in laser projectors using two Barker code-type optical dif-

fractive elements / Lapchuk A. [et.al] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 1. – P. 22-31.

19. Optimal speckle suppression in laser projectors using a single two-dimensional Barker code diffractive optical element / Lapchuk A. [et.al] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 2 – P. 227–332.

20. Optical schemes for speckle suppression by Barker code diffractive optical elements / Pashkevich G. A. [et.al] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2013. – Vol. 30, № 9 – P. 1760–1767.

***G. Pashkevich, A. Shihovets, A. Lapchuk, A. Kryuchin, A. Bogdan* Minimization of Speckle in Laser Projector Linear Movement of the Diffractive Optical Element, Based on the Barker Code or M-sequence**

The paper presents the results of experimental measurements of the speckle suppression efficiency using a method based on the linear displacement of diffractive elements created on the basis of 2D Barker code. The experimental setup and optical parameters used in the method are described. The speckle contrast in the range of 4.4 -5.3% and the speckle suppression coefficient (speckle contrast reduction factor) $K > 8$ are obtained in the experiments. However, the experimentally obtained speckle suppression efficiency is approximately 1.5 times less than the theoretically predicted value. We suggest that the discrepancy between theory and experimental data is due to inexact matching between the optimal for speckle suppression parameters of optical setup and the actual used in our experiments.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.09.2013

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов**МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ КИРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1**

С использованием кратных (повторяющихся) неприводимых представлений группы Лоренца в подходе Гельфанда–Яглома дана матричная формулировка релятивистского волнового уравнения для частицы со спином 1 и дополнительным внутренним квантовым числом, являющимся аналогом понятия киральности в теории дираковских частиц.

Введение

Как известно (см., напр., [1–4]), использование кратных (повторяющихся) неприводимых представлений группы Лоренца в теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) позволяет описывать не только спиновые свойства микрообъектов, но и их внутреннюю структуру, в том числе дополнительные (изоспиновые) степени свободы в рамках не распадающихся по группе Лоренца уравнений.

В работе [5] на примере спина $3/2$ показано, как можно в рамках подхода Гельфанда–Яглома [6] ввести понятие киральности для частиц с ненулевой массой, используя кратные представления. Ещё больший интерес в этом смысле представляет собой теория киральной частицы со спином 1, поскольку к настоящему времени имеются экспериментальные указания в пользу существования таких частиц (см. [7] и приведенные здесь ссылки).

В настоящей работе на основе вышеуказанного подхода предложена матричная интерпретация теории частицы со спином 1, ненулевой массой и дополнительным внутренним квантовым числом – киральностью. Дана также тензорная форма построенного РВУ.

Матричная интерпретация теории киральной частицы со спином 1 в подходе Гельфанда–Яглома

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$\begin{array}{ccc}
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \\
 (0, 1) & \swarrow \quad \searrow & (1, 0) \\
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &
 \end{array} \quad (1)$$

с точки зрения возможности построения на её основе релятивистского волнового уравнения первого порядка для частицы со спином 1, ненулевой массой и дополнительной (помимо спина) внутренней степенью свободы. Данная схема содержит два представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, которые неразличимы по отношению к собственной группе Лоренца, но могут отличаться поведением при операции пространственного отражения.

Матрица γ_4 , играющая основную роль в РВУ стандартного вида

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \quad (2)$$

в подходе Гельфанда–Яглома (все необходимые сведения, касающиеся подхода Гельфанда–Яглома, можно найти в работе [5]), в рассматриваемом случае имеет блочно-диагональную структуру

$$\gamma_4 = C^0 \otimes (C^1 \otimes I_3), \quad (3)$$

где C^0 , C^1 – спиновые блоки, соответствующие спинам 0 и 1 в том смысле, что если блок C^S имеет ненулевые собственные значения, то частица обладает спином S . И поскольку содержащиеся в схеме (1) представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$, которые формируют спиновый блок C^0 , между собой не зацепляются, то этот блок размерности 2×2 является нулевым. Другими словами, на основе схемы зацеплений (1) РВУ, описывающее частицу со спином 0, построить нельзя.

Для исследования блока C^1 введём следующую нумерацию входящих в (1) неприводимых представлений:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 1, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2, (0, 1) \sim 3, (1, 0) \sim 4.$$

Тогда для блока C^1 получается общее выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где c_{ij} – произвольные комплексные числа, на которые требование инвариантности РВУ (2) относительно преобразований собственной группы Лоренца в данном случае никаких ограничений не накладывает.

Условие инвариантности РВУ (2) относительно операции пространственного отражения (Р-инвариантность) приводит к ограничениям

$$c_{14} = \pm c_{13}, \quad c_{41} = \pm c_{31}, \quad c_{24} = \pm c_{23}, \quad c_{42} = \pm c_{32}. \quad (5)$$

При этом знак «+» в соотношениях (5) берётся тогда, когда представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ являются истинно векторными; знак «-» берётся при псевдовекторном характере указанных представлений. Следовательно, при одинаковом характере обоих представлений (одновременно векторном или псевдовекторном) спиновый блок C^1 (4) принимает вид

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & \pm c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} & \pm c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ \pm c_{31} & \pm c_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где верхние (нижние) знаки коррелируют между собой.

Спиновый блок C^1 (6) имеет характеристический полином

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c_{13}c_{31} + c_{23}c_{32}) = 0, \quad (7)$$

из которого следует, что два собственных значения этого блока равны нулю. Ненулевой корень $\pm\sqrt{2(c_{13}c_{31} + c_{23}c_{32})}$ является единственным (с точностью до знака). Таким образом, РВУ (2) со схемой зацеплений (1), спиновым блоком C^1 (6) матрицы γ_4 (3) описывает частицу с массой

$$\frac{m}{\sqrt{2(c_{13} c_{31} + c_{23} c_{32})}},$$

спином 1 и не содержит изоспиновых степеней свободы. При выборе $2(c_{13} c_{31} + c_{23} c_{32}) = 1$ данное РВУ сводится к известному уравнению Даффина–Кеммера [8; 9] для векторной частицы, базирующемся на схеме зацеплений

$$(0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 0).$$

Остается рассмотреть случай, когда одно из представлений $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ в схеме зацеплений (1) – истинно векторное, а второе $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ – псевдовекторное. Тогда условие

P -инвариантности теории приводит к соотношениям

$$c_{14} = c_{13}, \quad c_{41} = c_{31}, \quad c_{24} = -c_{23}, \quad c_{42} = -c_{32}, \quad (8)$$

и мы получаем следующее выражение для спинового блока C^1 :

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} & -c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{31} & -c_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Характеристический полином блока C^1 (9) имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c_{13} c_{31} + c_{23} c_{32}) + 4c_{13} c_{31} c_{23} c_{32} = 0. \quad (10)$$

Его корни равны

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{2c_{13} c_{31}}, \quad \lambda_2 = \pm\sqrt{2c_{23} c_{32}}. \quad (11)$$

Последнее означает, что в общем случае полученное РВУ описывает частицу со спином 1 и двумя массами: $m_1 = m/\sqrt{2c_{13} c_{31}}$, $m_2 = m/\sqrt{2c_{23} c_{32}}$.

Нас интересует случай, когда $m_1 = m_2$, то есть когда выполняется условие

$$c_{13} c_{31} = c_{23} c_{32}. \quad (12)$$

При условии (12) мы приходим к РВУ для частицы со спином 1, одной массой и двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному квантовому числу, смысл которого будет выяснен ниже.

Произвол в выборе элементов c_{13} , c_{31} , c_{23} , c_{32} , остающийся после наложения на них условия (12) и очевидных требований вещественности и положительности выражений $c_{13} c_{31}$, $c_{23} c_{32}$, используем для построения лагранжевой формулировки теории. Лагранжиан уравнения (2) можно представить в виде

$$L = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi, \quad (13)$$

где $\bar{\psi} = \psi^+ \eta$, η – матрица лоренц-инвариантной билинейной формы $\bar{\psi}\psi$. В базисе Гельфанда–Яглома матрица η имеет аналогичную (3) структуру

$$\eta = \eta^0 \oplus (\eta^1 \otimes I_3), \quad (14)$$

где

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & & & \\ & \eta_{22}^0 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^1 & & & \\ & \eta_{12}^1 & & \\ & & 0 & \eta_{34}^1 \\ & & \eta_{43}^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Элементы η_{ij}^s в (15) без уменьшения общности могут быть выбраны равными ± 1 [10] и при этом

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{11}^1, \quad \eta_{22}^0 = -\eta_{22}^1, \quad \eta_{43}^1 = \eta_{34}^1. \quad (16)$$

Требование релятивистской инвариантности лагранжиана (13) приводит к соотношениям

$$c_{31} \eta_{11}^1 = c_{13}^* \eta_{34}^1, \quad c_{32} \eta_{22}^1 = c_{23}^* \eta_{34}^1. \quad (17)$$

Условия (12), (16), (17) будут удовлетворены, если положить, например,

$$c_{13} = c_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (18)$$

$$-\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = \eta_{11}^1 = -\eta_{22}^1 = \eta_{34}^1 = 1. \quad (19)$$

Тогда для блоков C^1 , η^0 , η^1 получаем окончательно вид

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Выражения (3), (20) определяют матрицу γ_4 в РВУ (2), остальные матрицы γ_i находятся по формуле

$$\gamma_i = [I^{i4}, \gamma_4]_-, \quad (22)$$

где I^{i4} – «бусты» представления (1). Параметр m в (2) выступает при этом в роли массы частицы.

Тензорная формулировка

Тензорная форма построенного в предыдущем пункте матричного РВУ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m \psi_\mu &= 0, \\ \partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + m \tilde{\psi}_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m \psi_{[\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где величины ψ_μ , $\tilde{\psi}_\mu$, $\psi_{[\mu\nu]}$ сопоставляются представлениям $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$,

$(0, 1) \oplus (1, 0)$ соответственно, $\tilde{\psi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\alpha\beta]}$, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви–Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$). В этом нетрудно убедиться, если записать систему (23) в матричной фор-

ме (2) в тензорном базисе

$$\psi = (\psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}) - \text{столбец} \quad (24)$$

и найти минимальные полиномы матриц γ_μ в обоих случаях. Они оказываются совпадающими, а именно:

$$\gamma_\mu (\gamma_\mu^2 - 1) = 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что обе формулировки (Гельфанда–Яглома и тензорная) связаны преобразованием подобия, т.е. эквивалентны.

Осуществляя в системе (23) подстановки

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &= \psi_\mu - i\tilde{\psi}_\mu, & \varphi_{[\mu\nu]} &= \psi_{[\mu\nu]} - i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}, \\ \chi_\mu &= \psi_\mu + i\tilde{\psi}_\mu, & \chi_{[\mu\nu]} &= \psi_{[\mu\nu]} + i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}, \end{aligned} \quad (26)$$

преобразуем её к прямой сумме двух 7-компонентных систем

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + m \varphi_\mu = 0, \quad (27)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\beta + m \varphi_{[\mu\nu]} = 0;$$

$$\partial_\nu \chi_{[\mu\nu]} + m \chi_\mu = 0, \quad (28)$$

$$-\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \chi_\beta + m \chi_{[\mu\nu]} = 0.$$

Отметим, во-первых, что системам (27), (28) по отдельности нельзя сопоставить лагранжиан, удовлетворяющий стандартным в теории РВУ требованиям. Лагранжева формулировка возможна для этих систем лишь при их совместном рассмотрении. Во-вторых, каждая из систем (27) и (28) инвариантна в смысле собственной группы Лоренца, но при операции Р-инверсии они переходят друг в друга. Так что в смысле полной группы Лоренца система (27), (28) (а значит и система (23)) является нераспадающейся.

Наконец, очевидно, что двукратно вырожденные состояния векторной частицы, описываемой системой (23), связаны между собой операцией Р-инверсии. Следовательно, дополнительное внутреннее квантовое число, о котором говорилось в предыдущем пункте, различает указанные Р-сопряжённые состояния и может трактоваться как киральность по аналогии с понятием киральности для безмассовых частиц. Иными словами, каждая из систем (27), (28) описывает векторную частицу с определенным значением этого квантового числа – киральную частицу со спином 1 и ненулевой массой.

Заключение

Итак, использование расширенного (включая кратные) набора неприводимых представлений группы Лоренца позволяет в рамках теории РВУ для частиц с ненулевой массой учитывать дополнительные помимо спина внутренние степени свободы. Как показано в данной работе на примере частицы со спином 1, одной из таких степеней свободы может быть квантовое число, являющееся аналогом понятия киральности в теории безмассовых частиц. Следует отметить, что для построения теории безмассовых киральных частиц со спиральностью S достаточно использования представлений $(0, S)$ и $(S, 0)$, причём понятия киральности и спиральности, по-существу, совпадают. Для частиц с ненулевой массой это, очевидно, уже не так: понятия киральности и спиральности (проекция спина на направление импульса) здесь имеют различный смысл, а теория РВУ таких частиц базируется с необходимостью на наборе зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца, включая кратные (см. также [5]).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Фёдоров // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
2. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Фёдоров // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
3. Богуш, А.А. Уравнение для частицы со спином $1/2$, обладающей аномальным магнитным моментом / А.А. Богуш, В.В. Кисель // Известия вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.
4. Плетюхов, В.А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // ЯФ. – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.
5. Плетюхов, В.А. Релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином $3/2$ / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 30–36.
6. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т.18. – Вып. № 8. – С. 703–733.
7. Чижов, М.В. Теория и феноменология киральных частиц со спином 1 / М.В. Чижов // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42. – Вып. 1. – С. 169–350.
8. Duffin, R.J. On the characteristic matrices of covariant systems / R.J. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54. – P. 1114.
9. Kemmer, H. The particles aspect of meson theory / H. Kemmer // Proc. Roy. Soc. – 1939. – Vol. A173. – P.91–116.
10. Фёдоров Ф.И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф.И. Фёдоров // ДАН СССР. – 1952. – Т. 82. – С. 37–40.

V.A. Pletyukhov. Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with spin 1

Nondissociating P- invariant relativistic wave equation for chiral particle with spin 1 is obtained. Matrix and tensor formulations of this equation are considered.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.09.2013

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий, Е.А. Саванчук**О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ТВЕРДОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОГО ВЕЩЕСТВА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного замагниченного электронно-протонного вещества. Показано, что при низких температурах сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние электронно-протонного вещества является устойчивым. При высоких температурах влияние сильного магнитного поля на устойчивость твердого состояния незначительно.

Рассмотрим вопрос о состоянии водорода при плотностях, превышающих порог полной ионизации. Как отмечалось в [1–3], вследствие кулоновских взаимодействий положительно заряженные ядра электронно-протонного вещества могут совершать колебания относительно некоторых точек равновесия. В этом случае следует говорить о твердом состоянии вещества [1; 4]. В [5] указывалось, в частности, что при плотностях порядка и ниже ядерной плотности может образовываться кристаллическая решетка, разрушением которой можно объяснить, например, внезапные изменения периода пульсара PSR 0833-45. Для нас не будет иметь принципиального значения вопрос о том, имеем мы дело с кристаллической структурой или же с аморфным веществом. Следуя приближенным оценкам [1], полагаем, что при определенных условиях протоны образуют упорядоченную структуру, обладающую некоторыми свойствами твердого тела. Оценим области значений массовой плотности, при которых твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества при низких и высоких температурах устойчиво (не переходит в плазменное состояние).

Предположим, что в электронно-протонном замагниченном веществе имеет место фаза твердого тела. Воспользуемся для оценки ее границ приближенным методом, изложенным в [1] для сверхплотного водорода и в [4] для сверхплотного электронно-ядерного вещества произвольного (но однородного) химического состава. Следуя [1], разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним протоном в каждой, упакованные максимально плотно. Считаем электронный заряд распределенным по ячейке равномерно. Это предположение, строго говоря, неверно, но, как отмечалось в [1], отклонения от равномерного распределения для предстоящих оценок незначительны. Также пренебрегаем в первом приближении взаимодействием протона с соседними ячейками [1]. Радиус такой ячейки

$R \approx \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$, где m_p – масса протона, ρ – массовая плотность вещества. Выражение

для кулоновского взаимодействия протона с электронным «облаком» своей ячейки в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3}r^2. \quad (1)$$

Протон находится в электростатической трехмерной изотропной потенциальной яме, граница которой, определяемая условием $r = R$, выше дна на величину $U_0 = e^2 / (2R)$.

Потенциал (1) осцилляторного типа, поэтому при оценочных расчетах для случая малых колебаний протон в ячейке можно, с определенной степенью точности, ото-

ждествить с изотропным гармоническим осциллятором, частота нулевых колебаний которого дается выражением:

$$\omega_0 = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3}} \pi \rho. \quad (2)$$

Средняя энергия рассматриваемого осциллятора при температуре T [1; 4]:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}. \quad (3)$$

Условие малости величины $\langle \varepsilon \rangle$ по сравнению с U_0 принято в [1; 4] в качестве критерия устойчивости твердого состояния вещества. При $T = 0$ из (3) имеем энергию нулевых колебаний протона $\varepsilon_0 = 1,5 \hbar \omega_0$.

Основные недостатки изложенного выше подхода очевидны: модель изотропно-гармонического осциллятора некорректна при $r \sim R$ (и тем более при $r \geq R$), а электронное «облако» весьма чувствительно к движению протона, и любое перемещение последнего приведет к деформации ячейки. Однако, даже с помощью такой грубой модели можно провести приближенные оценки границ фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе.

В сверхсильном магнитном поле с индукцией B глубина потенциальной ямы изменяется на величину

$$\Delta U_0 = \frac{e^2 B^2 R^2}{8m_p c^2} \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где φ – угол между направлениями вектора индукции и движения протона. При этом разность высот границы потенциальной ямы и ее дна равна

$$U_0(B) = U_0 + \Delta U_0 \approx U_0 \left(1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2} \sin^2 \varphi \right) = U_0 \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi \right), \quad \omega_B = \frac{eB}{2m_p c}. \quad (5)$$

Энергетический спектр протона, совершающего колебания около положения равновесия в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B , определяется выражением [6; 7]:

$$\varepsilon = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} (2l + |m| + 1) + \hbar \omega_B m + \hbar \omega_0 \left(g + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа. При нулевой температуре $l = m = g = 0$, и энергия нулевых колебаний протона в магнитном поле

$$\varepsilon_0(B) = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \approx \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left(1 + 2 \sqrt{1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}} \right). \quad (7)$$

При $B = 0$ имеем $\varepsilon_0(B) = \varepsilon_0$. Из (4) и (7) следует, что при значениях $\sin^2 \varphi \neq 0$ увеличение с ростом индукции магнитного поля $U_0(B)$ превалирует над увеличением $\varepsilon_0(B)$.

Для вычисления средней энергии протона в присутствии магнитного поля при $T \neq 0$ воспользуемся известными соотношениями статистической физики:

$$\langle \varepsilon \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln z), \quad z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) G(\varepsilon_i), \quad (8)$$

где ε_i – энергия осциллятора в определенном квантовом состоянии, $G(\varepsilon_i)$ – число квантовых состояний, соответствующих энергии ε_i , равное единице для каждого составляющего энергии. Энергия ε_i определяется формулой (6). Считая, как и в [7], $2l + |m| = n_1 + n_2$ и $m = n_1 - n_2$, где $n_1 = 0, 1, 2, \dots$ и $n_2 = 0, 1, 2, \dots$, и подставляя (6) в (8), получим следующее выражение для функции состояний трехмерного осциллятора в магнитном поле:

$$z = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar(\omega + \omega_0/2)}{kT}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right)}, \quad \omega = \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} \quad (9)$$

Тогда средняя энергия колеблющегося при температуре T в магнитном поле с индукцией B протона может быть представлена в виде:

$$\langle \varepsilon(B) \rangle = \hbar\omega \cdot \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \cdot \operatorname{cth} \alpha_0. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения: $\alpha = \frac{\hbar\omega}{2kT}$, $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2kT}$. При $B = 0$ имеем $\omega = \omega_0$, и (10) переходит в (3). Для низких температур (если ω_B не превышает значительно ω_0) $\operatorname{cth} \alpha \approx 1$, $\operatorname{cth} \alpha_0 \approx 1$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx \varepsilon_0(B)$. Для высоких температур $\operatorname{cth} \alpha \approx 1/\alpha$, $\operatorname{cth} \alpha_0 \approx 1/\alpha_0$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx 3kT \approx \langle \varepsilon \rangle$.

Твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества является устойчивым и не переходит в плазменное при $\langle \varepsilon(B) \rangle \ll U_0(B)$. Если $\omega_B = u\omega_0$, то условие $\varepsilon_0(B) = 3kT$ соответствует массовая плотность

$$\rho = \rho_0 \approx 1,79 \cdot 10^{-6} \left(\frac{T}{2\sqrt{1+u^2} + 1} \right)^2 \text{ (г/см}^3\text{)}. \quad (11)$$

Критерии устойчивости твердого состояния замагниченного вещества при низких ($\rho \gg \rho_0$) и высоких ($\rho \ll \rho_0$) температурах имеют соответственно вид:

$$\rho^{1/6} \ll 50,5 \frac{1+u^2 \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1+u^2} + 1}, \quad (12)$$

$$\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} \frac{T}{1+u^2 \sin^2 \varphi}. \quad (13)$$

При $B = 0$ из (11)–(13) получаем: $\rho_0 \approx 1,98 \cdot 10^{-7} T^2$ (г/см³), $\rho^{1/6} \ll 16,8$ при $\rho \gg \rho_0$, $\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} T$ при $\rho \ll \rho_0$.

Выражение в правой части неравенства (12) при $B = \text{const}$ имеет наименьшее значение, если $\varphi = 0$. Тогда при оценочных расчетах в качестве критерия устойчивости твердого состояния холодного замагниченного электронно-протонного вещества можно принять

условие:

$$\rho^{1/6} \leq 0,1 \frac{50,5}{2\sqrt{1+u^2} + 1} \quad \text{или} \quad \rho \leq \frac{1,56 \cdot 10^4}{\left(2\sqrt{1+u^2} + 1\right)^6} \quad (\text{г/см}^3). \quad (14)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние является устойчивым: локализуя движение протона в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, магнитное поле одновременно облегчает выход протона из электростатической потенциальной ямы вдоль линий индукции.

Аналогично для горячего замагниченного электронно-протонного вещества из (13) находим:

$$\rho^{1/3} \geq 2,65 \cdot 10^{-4} T \quad \text{или} \quad \rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3 \quad (\text{г/см}^3), \quad (15)$$

что совпадает с условием устойчивости твердого состояния в отсутствие магнитного поля.

Отметим в заключение, что в веществе сверхплотных сильно замагниченных астрофизических объектов индукция магнитного поля вряд ли может превышать значение $B_{\max} = 2c\sqrt{2\pi\rho}$, поскольку при $B > B_{\max}$ плотность энергии магнитного поля будет больше плотности энергии покоя вещества. Это означает, что в приведенных выше соотношениях допустимы значения $u^2 < 1,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц, Д.А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д.А. Киржниц // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
2. Абрикосов, А.А. Некоторые свойства сильно сжатого вещества / А.А. Абрикосов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 39, № 6 (12). – С. 1797–1805.
3. Hamada, T. Models for zero-temperature stars / T. Hamada, E.E. Salpeter // *Astrophys. J.* – 1961. – V. 134, № 3. – P. 683–698.
4. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
5. Смит, Ф.Г. Пульсары / Ф.Г. Смит. – М. : Мир, 1979. – 267 с.
6. Fock, V. Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators in Magnetfeld / V. Fock // *Zs. f. Physik.* – 1928. – Bd. 47, № 2. – Z. 446–447.
7. Дубнер, В.М. Заряженный осциллятор в магнитном поле / В.М. Дубнер // Известия вузов. Физика. – 1966. – № 4. – С. 167–168.

V.S. Sekerzhitsky, E.A. Savanchuk About Criteria of Stability Solid State of Electron-proton Matter in Magnetic Field

An appreciation of criteria of stability solid state of dense magnetized electron-proton matter is formulated. The strong magnetic field a range senses of substance dense by low temperatures decrease. The solid state of electron-proton matter is stability by. Influence of strong magnetic field on stability solid state is unimportant by high temperatures.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.10.2013

УДК 524.3+537.6+539.171

А.И. Серый**О ПОПРАВКАХ К КРИТЕРИЮ СТОНЕРА
ДЛЯ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ**

Рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Рассматриваются конечные значения спиновой поляризации нуклонов и критерий Стонера. Показано существование диапазона температур и плотностей, в котором имеет место энергетическая выгода спиновой поляризации нуклонов.

Введение. Постановка задачи

В работе продолжены исследования, начатые в [1, с. 30–37; 2, с. 50–58] с целью объяснить происхождение магнитных полей вследствие спиновой поляризации нуклонов в астрофизике. Объект исследований – электронно-протонная (eр-) и электронно-нуклонная (eнр-) системы при взрывах Сверхновых II типа и в оболочках белых карликов классов DAP и DAN [3, с. 185] в приближениях крайнего вырождения и невырождения. У белых карликов в тесных двойных системах намагниченность может возникнуть (наряду с другими путями) при аккреции водорода [4]. Рассмотрим плотности, при которых критерий Стонера выполнен лишь для нуклонов, но не для электронов [2, с. 51]. Поэтому энергия электронов не учтена, присутствие электронов учтено в равенстве длин ядерного протон-протонного и нейтрон-нейтронного рассеяния.

Учет корреляционной кулоновской энергии вырожденных протонов

Корреляционная энергия кулоновского взаимодействия жидкой протонной подсистемы вычисляется во 2-м порядке теории возмущений по фреиховской константе в рамках диаграммной техники Фейнмана [5, с. 67–112] или Мацубары [5, с. 195–202]. Рассмотрим соответствующее выражение согласно [6, с. 205, 206]:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} w_{corr} = \frac{-\hbar c p_{Fp}}{8\pi^3 m_p c} \int_0^{+\infty} \kappa^4 \ln \left(1 + \frac{P_{Fp}^2}{\kappa^2 \hbar^2 P(s)} \right) P^2(s) ds, \quad P(s) = 1 - s \cdot \arctg \left(\frac{1}{s} \right),$$

$$p_{Fp} = (3\pi^2 n_p)^{1/3} \hbar, \quad \kappa^2 = 4\pi \hbar c \nu \alpha, \quad \nu = \frac{m_p p_{Fp}}{\pi^2 \hbar^3}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (1)$$

Здесь n_p , m_p – концентрация и масса протонов, $P(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 0$, $P(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Если несобственный интеграл в (1) сходится равномерно по α , то его можно интегрировать по α (от 0 до α). Тогда с учетом обозначений в (1) получаем:

$$w_{corr} = -w_0 F(X), \quad w_0 = \frac{3m_p c^2 n_p \alpha^2}{\pi^3},$$

$$F(X) = \int_0^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{X}{P(s)} \right) + \frac{X}{P(s)} - \frac{X^2}{P^2(s)} \ln \left(1 + \frac{P(s)}{X} \right) \right) P^2(s) ds, \quad X = \frac{\pi p_{Fp}}{4m_p c \alpha}. \quad (2)$$

Перепишем (2) с учетом новых обозначений:

$$X_{\uparrow,\downarrow} = \frac{\pi\hbar(6\pi^2 n_{p\uparrow,\downarrow})^{1/3}}{4m_p c\alpha}, \quad n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2} + \delta n_{p\uparrow,\downarrow}, \quad n_p = \sum_{i=\uparrow,\downarrow} n_{pi}, \quad w_{corr} = -\frac{w_0}{2} \sum_{i=\uparrow,\downarrow} F(X_i). \quad (3)$$

В конечном интервале значений n_p можно считать, что несобственный интеграл в (2) сходится равномерно, и его можно дифференцировать по параметру n_p . Тогда, согласно (3), дифференцируя по $n_{p\uparrow,\downarrow}$ и сразу разлагая по $\delta n_{p\uparrow,\downarrow}$, находим корреляционные поправки к химическому потенциалу протонов:

$$E_{corr\uparrow,\downarrow} = \frac{\partial w_{corr}}{\partial n_{p\uparrow,\downarrow}} = \frac{w_{corr}}{n_p} - \frac{2w_0 X}{3n_p} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{2w_0 X^2}{3n_p} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{P(s)}{X}\right) ds + Z \delta n_{p\uparrow,\downarrow},$$

$$Z = \frac{4w_0 X}{9n_p^2} \left(2 \int_0^{+\infty} P(s) ds - XG \right), \quad G = \int_0^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{P(s)}{X}\right) + \frac{P(s)}{P(s)+X} \right) ds. \quad (4)$$

Применяя алгоритм, использованный при выводе критерия Стонера для вырожденного электронно-нуклонного вещества с поляризованными по спину нуклонами [1, с. 33], можно убедиться, что корреляционную поправку к эффективной константе протон-протонного взаимодействия g_{pp} дает лишь выражение Z в (4):

$$\Delta g_{pp}^{corr} = -\frac{2c\alpha\hbar}{(3\pi^2)^{2/3} n_p^{2/3}} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{\pi\hbar^2 G}{4m_p n_p^{1/3} (3\pi^2)^{1/3}}. \quad (5)$$

Т.к. $X = X(n_p)$, то 2-й интеграл в (5) зависит от n_p как от параметра. Численно 1-й интеграл в (5) приближенно равен 0.785398. Согласно [1, с. 34], запишем выражение для флуктуаций плотности энергии вырожденной протонно-нейтронной системы

$$\delta w = \sum_{i=n,p} \frac{(\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2}{2\nu_{0i}} + \sum_{i=n,p} \tilde{g}_{ii} \delta n_{i\uparrow} \delta n_{i\downarrow} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}). \quad (6)$$

Учтем соотношение $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$ и связь между $\delta n_{p\uparrow}$, $\delta n_{n\uparrow}$ при $B = 0$ [1, с. 33]:

$$\delta n_{i\uparrow} = \nu_{0i} \tilde{g} \lambda_i^{-1} \delta n_{j\uparrow}, \quad \tilde{g} = g_{np}^{\uparrow\downarrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}, \quad \lambda_i = 1 - \nu_{0i} \tilde{g}_{ii}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим (как и через нахождение полюсов магнитной восприимчивости) критерий Стонера для вырожденной протонно-нейтронной системы:

$$\nu_{0n} \nu_{0p} \Xi + \tilde{g}_{nn} \nu_{0n} + \tilde{g}_{pp} \nu_{0p} - 1 \geq 0, \quad \nu_{0i} = \frac{m_i P_{Fi}}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad \Xi = \tilde{g}^2 - \tilde{g}_{pp} g_{nn},$$

$$g_{np}^{\uparrow\uparrow} = 2J_{np} a_t > 0, \quad g_{np}^{\uparrow\downarrow} = J_{np} (a_t + a_s) < 0, \quad g_{ii} = J_{ii} a_i < 0, \quad J_{ij} = \pi\hbar^2 \frac{m_i + m_j}{m_i m_j},$$

$$\tilde{g}_{pp} = g_{pp} + \Delta g_{pp}^{exch} + \Delta g_{pp}^{corr}, \Delta g_{pp}^{exch} = \frac{2\pi e^2}{(3\pi^2 n_p)^{2/3}}, \tilde{g}_{nn} = g_{nn}. \quad (8)$$

Длины s -рассеяния (в 10^{-13} см) [7, с. 20, 30, 31]: $a_s = -23.71$, $a_t = 5.42$, $a_p = a_n = -17.2$ (когда протонная энергия Хартри компенсируется фоном электронов).

Представив интегралы G в виде бесконечных рядов, можно перенести параметры из подынтегральных выражений в пределы интегрирования. При $n_p < 2.9 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$ возможно $X < P(s)$ и $X > P(s)$, поэтому каждый интеграл разбивается на 2 – от 0 до s_1 и от s_1 до $+\infty$, где $X = P(s_1)$ при заданном n_p , т.е. $s_1 = s_1(n_p)$. Тогда получим:

$$G = \frac{2}{X} \int_{s_1}^{+\infty} P(s) ds + \int_0^{s_1} \ln(P(s)) ds - s_1 \ln X + s_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (j-1)}{j} X^j \int_0^{s_1} P^{-j}(s) ds + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (j+1)}{j X^j} \int_{s_1}^{+\infty} P^j(s) ds. \quad (9)$$

При $n_p > 2.9 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$ $X > P(s)$ при любом s , и тогда в (9) остается 1-й интеграл и последняя сумма, причем $s_1 = 0$. Результаты для (8) представлены в таблице 1 и графически на рисунках 1, 2. Принятые обозначения: I – модель, в которой учтено лишь контактное ядерное взаимодействие, II – также учтена обменная кулоновская протон-протонная поправка, III – помимо обменной поправки учтена еще и корреляционная.

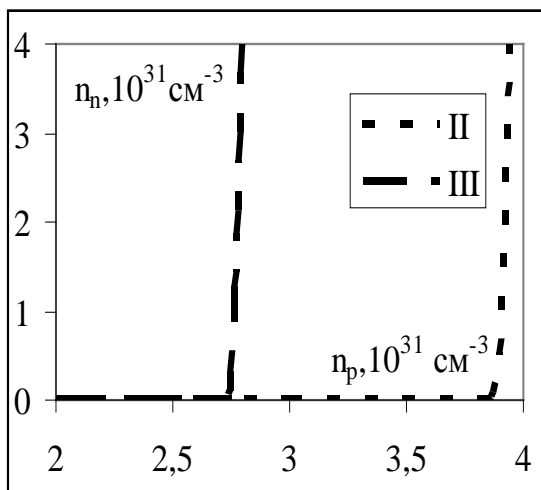


Рисунок 1 – Область ферромагнетизма для низких плотностей

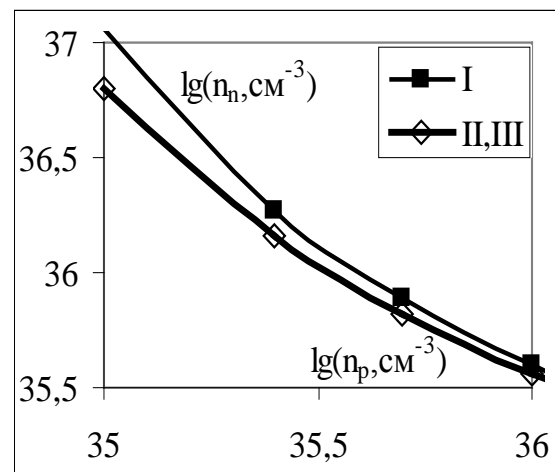


Рисунок 2 – Область ферромагнетизма для высоких плотностей

Из рисунков 1 и 2 и данных таблицы 1 видно, что качественно графики не отличаются от полученных при учете лишь обменной поправки для кулоновского протон-протонного взаимодействия [1, с. 35], т.е. имеются 2 области ферромагнетизма на диаграмме (n_p, n_n) , причем обе несколько уменьшаются по сравнению со случаем учета лишь обменной поправки (на рисунке 2 различия почти нет).

Таблица 1 – Минимальные значения n_n и соответствующие им n_p

Область	минимальное n_n	значения n_p , при которых есть ферромагнетизм		
		I	II	III
Левая	0	---	$< 3.85 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$< 2.73 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
	$+\infty$	---	$6.91 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$4.68 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
Правая	$+\infty$	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.079 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.127 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$
	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Возникает, однако, вопрос о правильности предположения о жидком (газообразном) состоянии протонов. Не учитывая ядерную энергию взаимодействия протонов, считая, что она в твердой и жидкой фазе практически одинакова, запишем выражение для плотности энергии протонной подсистемы в жидкой фазе:

$$w_{ж} = \frac{3}{5} n_p \varepsilon_{Fp} + w_{exch} + w_{corr}, \quad \varepsilon_{Fp} = \frac{p_{Fp}^2}{2m_p}, \quad w_{exch} = -\frac{e^2 (3\pi^2)^{4/3} n_p^{4/3}}{4\pi^3}. \quad (10)$$

При $n_p = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ $w_{TT} \approx -0.035 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$ [2, с. 52]. С учетом (2), (10) $w_{ж} \approx -0.016 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$, т.е. $w_{TT} < w_{ж}$, и система неустойчива по отношению к кристаллизации. Т.е. под оболочками белых карликов вблизи порога нейтронизации водород может быть кристаллическим, т.к. фреlixовская константа больше единицы: согласно [6, с. 202], условие $m_p e^2 (\hbar p_{Fp})^{-1} > 1$ соответствует $n_p < 1.42 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$, что целиком включает в себя диаграмму на рисунке 1.

Несмотря на это, представленные результаты имеют смысл, т.к.: 1) выше порога нейтронизации возникает вопрос о влиянии последней на агрегатное состояние водорода; 2) при кристаллизации радиус локализации отдельного протона не больше размеров кристаллической ячейки [6, с. 210], но при дефектах решетки локализация электронов и протонов может быть андерсоновской, т.е. область локализации должна возрасти [3, с. 82, 83], что также может оказывать влияние на вопрос об агрегатном состоянии; 3) полученные результаты правомерны для диаграммы на рисунке 2, хотя в этой области влияние корреляционной кулоновской энергии, как и обменной, мало; 4) для рисунка 1 полученные результаты сравнимы с результатами для невырожденного водорода (где ферромагнетизм возможен до $n_p \sim 10^{30} - 10^{31} \text{ см}^{-3}$ [2, с. 53, 56]), который должен существовать в верхних слоях белых карликов и не должен быть кристаллическим.

Критерий Стонера для невырожденного электронно-нуклонного вещества

Рассмотрим вопрос о спиновых флуктуациях в невырожденном электронно-нуклонном веществе. Для начала потребуется вывести соотношение между флуктуациями спиновой плотности для нейтронов и протонов.

В слабом магнитном поле B (по оси z) меняется баланс между разными проекциями спинов нуклонов. Далее рассуждаем аналогично [1, с. 33] с заменой вырожденного химического потенциала на невырожденный [8, с. 194]. Здесь T_{3i} – проекция изоспина, T – температура, $\mu_{я}$ – ядерный магнетон, $\vec{\mu}_i$ – собственный магнитный момент нуклона, $\gamma_i = |\vec{\mu}_i| / \mu_{я}$, $\gamma_p = 2.793$, $\gamma_n = -1.913$. Стрелки соответствуют направлениям проекций спинов. Тогда с учетом зеемановской энергии $\pm \gamma_i / \mu_{я} B$ и энергии между-

клонного взаимодействия запишем выражения для химических потенциалов $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$:

$$\mu_{i\uparrow,\downarrow} \approx \mu_{0i\uparrow,\downarrow} \mp 2T_{3i} |\gamma_i| \mu_{Я} B + \tilde{g}_{ii}^T \xi_{i\downarrow,\uparrow} + g_{np}^{T\downarrow} \xi_{j\downarrow,\uparrow} + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} \xi_{j\uparrow,\downarrow}, x_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{(2\pi\hbar)^3 \xi_{i\uparrow,\downarrow}}{2(\pi m_i kT)^{3/2}},$$

$$\frac{\mu_{0i\uparrow,\downarrow}}{kT} \approx \ln\left(\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1 - x_{i\uparrow,\downarrow}}\right)\right), \xi_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{n_i}{2} + \delta n_{i\uparrow,\downarrow}, i = n, p, j = p, n, \delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}. \quad (11)$$

Формулы (11) – приближенные, т.к. обменная и корреляционная кулоновская поправка для протонов в \tilde{g}_{pp}^T – усредненная. На самом деле для отдельного протона она зависит от импульса протона [8, с. 289], что должно быть учтено при получении формулы для $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$. Но это сильно усложняет задачу математически даже при получении приближенного выражения для $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$.

Эффективную константу протон-протонного взаимодействия найдем из флуктуаций плотности ядерной, кулоновской обменной и корреляционной энергии [2, с. 55]:

$$\delta w_{Np} + \delta w_{exch} + \delta w_{corr} = \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) \left(-\frac{g_{pp}^T}{2} - \frac{\alpha\pi(\hbar c)^3}{m_p c^2 kT} + \frac{3\pi^2 \alpha^{3/2} (\hbar c)^{9/2} n_p^{1/2}}{2(m_p c^2)^{3/2} (kT)^2} \right) =$$

$$= -\frac{\tilde{g}_{pp}^T}{2} \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) \Rightarrow \tilde{g}_{pp}^T = g_{pp}^T + \frac{2\alpha\pi(\hbar c)^3}{m_p c^2 kT} - \frac{3\pi^2 \alpha^{3/2} (\hbar c)^{9/2} n_p^{1/2}}{(m_p c^2)^{3/2} (kT)^2}. \quad (12)$$

Усредненные по температуре константы ядерного межнуклонного взаимодействия выразим согласно [7, с. 19, 69], где эффективные радиусы (в фм) [7, с. 20, 30] $r_{0p} = r_{0n} = 2.79$ (с учетом электронного фона), $r_{0t} = 1.76$, $r_{0s} = 2.70$:

$$\tilde{g}_{mm}^T = g_{mm}^T, \quad g_{ii}^T = -\frac{2\pi\hbar^2}{m_i} f_i(q_i), \quad q_i \approx \sqrt{6m_i kT}, \quad \frac{1}{f_i(q_j)} = -\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2} r_{0i} \left(\frac{q_j}{\hbar} \right)^2, \quad i = n, p,$$

$$g_{np}^{T\downarrow} = -\frac{\pi\hbar^2}{m_{np}^*} (f_s(q_{np}) + f_t(q_{np})), \quad g_{np}^{T\uparrow\uparrow} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m_{np}^*} f_t(q_{np}),$$

$$\frac{1}{f_i(q_{np})} = -\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2} r_{0i} \left(\frac{q_{np}}{\hbar} \right)^2, \quad i = t, s, q_{np} \approx \sqrt{3(m_n + m_p)kT}. \quad (13)$$

Приравнявая химические потенциалы $\mu_{i\uparrow} = \mu_{i\downarrow}$ и выполняя приближенные разложения по $\delta n_{i\uparrow,\downarrow}$ в (11), получим:

$$kT \left(\frac{2}{n_i} + \frac{(\pi\hbar)^3}{(\pi m_i kT)^{3/2}} - \frac{\tilde{g}_{ii}^T}{kT} \right) \delta n_{i\uparrow} \approx 2T_{3i} |\gamma_i| \mu_{Я} B + \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}, \quad \tilde{g}^T = g_{np}^{T\downarrow} - g_{np}^{T\uparrow\uparrow}. \quad (14)$$

Решая (14) при $B = 0$ и $B \neq 0$, выразим $\delta n_{i\uparrow}$ (\vec{k}_0 – орт оси z):

$$\delta n_{i\uparrow}^{B=0} = \frac{v_{0i}^T \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}}{\lambda_i^T}, \delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0} = 2T_{3i} \mu_{Я} B \left(\gamma_i / v_{0i}^T \lambda_j^T - \tilde{g}^T v_{0p}^T v_{0n}^T / \gamma_j \right) \Omega_T^{-1},$$

$$\Omega_T = \lambda_p^T \lambda_n^T - (\tilde{g}^T)^2 v_{0p}^T v_{0n}^T, \lambda_i^T = 1 - v_{0i}^T \tilde{g}_{ii}^T; v_{0i}^T = \left(\frac{2kT}{n_i} + \frac{\pi^{3/2} \hbar^3}{m_i^{3/2} \sqrt{kT}} \right)^{-1}. \quad (15)$$

В выражении для v_{0i}^T 1-е слагаемое в скобках возникает из-за нахождения n_i под логарифмом; им нельзя пренебречь по сравнению со 2-м, т.к. это противоречит условию невырождения. Это создает проблемы при согласовании выражения для критерия Стонера с результатом в [2, с. 55] для электронно-протонного вещества через флуктуации энергии, где, вследствие наличия одного сорта нуклонов, соотношения (15) не требовались. Запишем вспомогательные соотношения

$$\delta n_{i\uparrow}^{B=0} = \frac{\tilde{v}_{0i}^T \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}}{\tilde{\lambda}_i^T}, \delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0} = 2T_{3i} \mu_{Я} B \left(\gamma_i / \tilde{v}_{0i}^T \tilde{\lambda}_j^T - \tilde{g}^T \tilde{v}_{0p}^T \tilde{v}_{0n}^T / \gamma_j \right) \tilde{\Omega}_T^{-1},$$

$$\tilde{\Omega}_T = \tilde{\lambda}_p^T \tilde{\lambda}_n^T - (\tilde{g}^T)^2 \tilde{v}_{0p}^T \tilde{v}_{0n}^T, \tilde{\lambda}_i^T = 1 - \tilde{v}_{0i}^T \tilde{g}_{ii}^T; \tilde{v}_{0i}^T = \frac{2m_i^{3/2} \sqrt{kT}}{3\pi^{3/2} \hbar^3}. \quad (15a)$$

Далее можно рассмотреть 2 способа вывода критерия Стонера.

Во-первых, можно вывести критерий Стонера через условие отрицательности флуктуаций энергии при спонтанном нарушении спинового баланса. Опираясь на результаты [1, с. 34; 2, с. 54, 55], аналогично запишем выражение для плотности энергии невырожденной нейтронно-протонной смеси:

$$\delta w^T = g_{np}^{T\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}) +$$

$$+ \sum_{i=n,p} \left(\frac{3\pi^{3/2} \hbar^3}{4m_i^{3/2} \sqrt{kT}} - \frac{\tilde{g}_{ii}^T}{2} \right) \left((\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2 \right). \quad (16)$$

Преобразуем (16) с учетом $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$ и взаимосвязи между $\delta n_{p\uparrow}, \delta n_{n\uparrow}$ при $B = 0$ в (15). Из условия $\delta w^T < 0$ получим (в зависимости от выбора $\delta n_{i\uparrow}$):

$$v_{0i}^T \tilde{v}_{0j}^T \tilde{\Xi}_T + \tilde{g}_{ii}^T v_{0i}^T + \tilde{g}_{jj}^T \tilde{v}_{0j}^T - 1 > 0, \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 \left(2 - \frac{v_{0i}^T \tilde{\lambda}_i^T}{\tilde{v}_{0i}^T \lambda_i^T} \right) - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nn}^T. \quad (17)$$

Т.о., возникает проблема получения одинаковых результатов при оставлении в (16) только $\delta n_{p\uparrow}$ или только $\delta n_{n\uparrow}$. При использовании (15a) вместо (15) получаем вместо (17) результат, не зависящий от выбора $\delta n_{i\uparrow}$ при подстановке в (16) (сравни с (8)):

$$\tilde{v}_{0n}^T \tilde{v}_{0p}^T \Xi_T + \tilde{g}_{nn}^T \tilde{v}_{0n}^T + \tilde{g}_{pp}^T \tilde{v}_{0p}^T - 1 > 0, \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nn}^T. \quad (17a)$$

Кроме того, этот результат, как и (16), при $n_n = 0$ совпадает с результатом, полученным в [2, с. 54, 55] для водородной плазмы.

Во-вторых, можно найти критерий Стонера через полюсы магнитной восприимчивости системы. Выражение для намагниченности с учетом $\delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0}$ в (15) и (15а) имеет, соответственно, вид, сходный с формулами в [1, с. 33] (\vec{k}_0 – единичный вектор):

$$\vec{M} = 4\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}} \sum_{i=n,p} T_{3i} / \gamma_i / \delta n_{i\uparrow},$$

$$\vec{M} = 2\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}}^2 B \Omega_T^{-1} \Gamma_T, \quad \Gamma_T = v_{0p}^T \gamma_p^2 \lambda_n^T + v_{0n}^T \gamma_n^2 \lambda_p^T - 2\tilde{g}^T \prod_{i=n,p} v_{0i}^T / \gamma_i /, \quad (18)$$

$$\vec{M} = 2\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}}^2 B \tilde{\Omega}_T^{-1} \tilde{\Gamma}_T, \quad \tilde{\Gamma}_T = \tilde{v}_{0p}^T \gamma_p^2 \tilde{\lambda}_n^T + \tilde{v}_{0n}^T \gamma_n^2 \tilde{\lambda}_p^T - 2\tilde{g}^T \prod_{i=n,p} \tilde{v}_{0i}^T / \gamma_i / . \quad (18a)$$

$\Gamma_T > 0, \tilde{\Gamma}_T > 0$, т.к. $\tilde{g}^T < 0, \lambda_i^T > 0, \tilde{\lambda}_i^T > 0, v_{0i}^T > 0, \tilde{v}_{0i}^T > 0$ в силу (13)–(15а). Переход магнитной восприимчивости $\chi = |\vec{M}| / B$ через $\pm \infty$ к $\chi < 0$ дает критерий Стонера. В случае (18) из условия $\Omega_T \leq 0$ получаем (сравни с (8)):

$$v_{0n}^T v_{0p}^T \Xi_T + \tilde{g}_{nm}^T v_{0n}^T + \tilde{g}_{pp}^T v_{0p}^T - 1 \geq 0, \quad \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nm}^T. \quad (19)$$

Этот результат в точности не совпадает ни с (17), ни с (17а); поэтому при $n_n = 0$ (19) не совпадает с результатом, полученным в [2, с. 54, 55] для водородной плазмы. В случае (18а) из условия $\tilde{\Omega}_T \leq 0$ получаем результат, совпадающий с (17а) и, следовательно, с результатами для водородной плазмы при $n_n = 0$.

Т.о., хотя критерий Стонера и выводится различными путями, но, в отличие от приближения крайнего вырождения, в приближении крайнего невырождения результаты не совпадают. Возможно, во 2-м случае корректен лишь подход через флуктуации энергии. Обращение магнитной восприимчивости в бесконечность формально приводит к бесконечным флуктуациям спиновой плотности, что должно соответствовать полной поляризации, а при отличной от нуля температуре это в принципе невозможно.

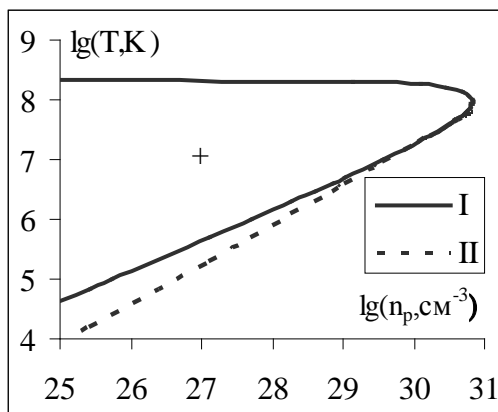


Рисунок 3 – Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (17а)

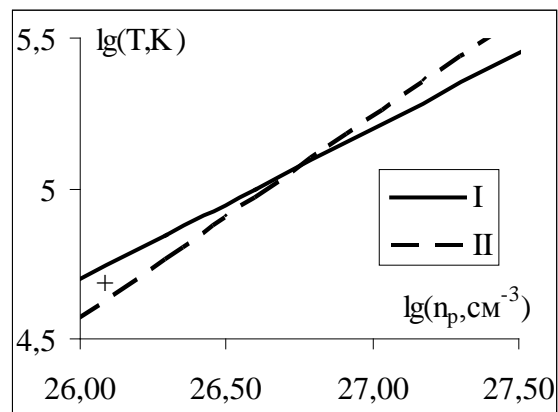


Рисунок 4 – Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (19) без учета корреляционной энергии

Для рассмотрения критерия Стонера введем параметр изоспиновой асимметрии

$$\eta = (n_n - n_p) / (n_n + n_p). \quad (20)$$

Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (17а) при $n_n = 0$ представлен на рисунке 3 (область «+», ограниченная кривой I; при $n_n \neq 0$ качественных изменений не наблюдается, зависимости от η нет, т.к. \tilde{g}_{nn}^T и \tilde{v}_{0n}^T не зависят от n_n); область, аналогичная рисунку 2, по-видимому, отсутствует. «Точка поворота» кривой I при $n_n = 0$ соответствует $n_{pmax} \approx 6.8 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, $T_{кр} \approx 9.5 \cdot 10^7 \text{ К}$; при $n_n \neq 0$ $n_{pmax} \approx 8.9 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, $T_{кр} \approx 1.2 \cdot 10^8 \text{ К}$. Без учета корреляционной энергии ферромагнетизм независимо от n_p , n_n для чистого водорода предсказывается до $T \approx 2.09 \cdot 10^8 \text{ К}$, а для нуклонной среды до $T \approx 2.69 \cdot 10^8 \text{ К}$. Кривая II на рисунках 3 и 4 соответствует $kT = 7.5 \varepsilon_{Fp}$ (приблизительный порог невырождения). Для (19) без учета корреляционной энергии (иначе решение вообще не существует) ферромагнетизм предсказывается ниже кривой I на рисунке 4, т.е. с т.зр. применимости приближения невырождения результаты корректны в области «+» на рисунке 4. В нуклонной среде при $\eta < 0$, т.е. с преобладанием протонов, данная область также существует, но при $\eta > 0$ кривая I целиком лежит ниже кривой II. Т.о., результаты на рисунках 3 и 4 сильно различаются. Данные трудности требуют дальнейших исследований для промежуточных температур, а также рассмотрения зависимости плотности энергии от конечных значений спиновой поляризации.

Энергия при конечных значениях спиновой поляризации нуклонов

Критерий Стонера не позволяет найти конкретные значения спиновой поляризации нуклонов. Выясним, каким значениям соответствует минимум энергии электронно-нуклонной системы. Вопрос рассмотрим для электронно-протонной и электронно-нуклонной системы, причем как для вырожденного, так и для невырожденного случая. Поскольку экспериментально подтверждено, что ядерное псевдомагнитное поле с т.зр. воздействия на отдельный нуклон на 2 порядка превосходит обычное магнитное поле, возникающее при спиновой поляризации, не будем учитывать плотность энергии этого магнитного поля, а также плотность энергии нуклонов в этом магнитном поле. Квантование Ландау также не учитываем, т.к. $B \ll m_p^2 c^3 (e\hbar)^{-1}$.

Рассмотрим вырожденную электронно-нуклонную плазму. Согласно (1)–(4), (6), (8), (10), а также с учетом ядерной энергии, запишем выражение для плотности энергии нуклонов; также учтем равенство химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина (в т.ч. опираясь на результаты из [1, с. 33]):

$$\begin{aligned} w_{deg}^{np}(p_{0p}, p_{0n}) &= \sum_{i=p,n} w_i + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) - \\ &- \frac{e^2 (6\pi^2)^{4/3}}{8\pi^3} (n_{p+}^{4/3} + n_{p-}^{4/3}) - \frac{w_0}{2} (F(X_+) + F(X_-)), \quad X_{\pm} = \frac{\pi\hbar (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}}{4m_p c \alpha}, \\ w_i &= \frac{3(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_i} (n_{i+}^{5/3} + n_{i-}^{5/3}) + g_{ii} n_{i+} n_{i-}, \quad n_{i\pm} = \frac{n_i}{2} (1 \pm p_{0i}). \end{aligned} \quad (21)$$

$$E_{Fi}^{\uparrow} = E_{Fi}^{\downarrow}; E_{Fi}^{\uparrow, \downarrow} = \frac{(6\pi^2 n_{i\pm})^{2/3} \hbar^2}{2m_i} + g_{ii} n_{i\mp} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{\downarrow\downarrow} n_{j\mp} + \left(\frac{1}{2} + T_{3i}\right) \Lambda_{\pm}, \quad i = n, p;$$

$$T_{3j} = -T_{3i}; \Lambda_{\pm} = -\frac{w_0}{2n_p} \sum_{i=+,-} F(X_i) - \frac{w_0 X_{\pm}}{3n_{p\pm}} \left(\int_0^{+\infty} P(s) ds - X_{\pm} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{P(s)}{X_{\pm}} \right) ds \right) -$$

$$-\frac{e^2}{\pi} (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}, \quad (22)$$

$$E_{Fi}^{\uparrow} \leq E_{Fi}^{\downarrow}. \quad (22a)$$

Неравенство (22a) используется вместо (22) при полной поляризации.

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (21) не от 4, а от 2 аргументов, т.к. на остальные 2 наложены связи в (22). Хотя (22) всегда имеет решение в отсутствие спиновой поляризации, нужно найти поляризованное решение, и чтобы при этом плотность энергии в (21) была меньше по сравнению с неполяризованным состоянием при заданных n_n, n_p . При $n_n = 0$ плотность энергии в (21) зависит от 1 аргумента, т.к. на 2-й наложена связь в (22). Без учета корреляционной энергии плотность энергии, по-видимому, минимальна при полной поляризации независимо от n_p . С учетом корреляционной энергии значение p_{0p} , при котором плотность энергии минимальна для заданного n_p : а) не превосходит 0.963 ни при каких n_p ; б) уменьшается с ростом n_p практически линейно (см. рисунок 5); в) достигает значения $p_{0p} \approx 0.943$ при $n_p \approx 7 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ (т.е. вблизи порога нейтронизации). Все это может быть связано с расходимостью корреляционной составляющей E_{Fi}^{\downarrow} при $p_{0p} \rightarrow 1$; вопрос о физическом смысле этой расходимости требует отдельных исследований.

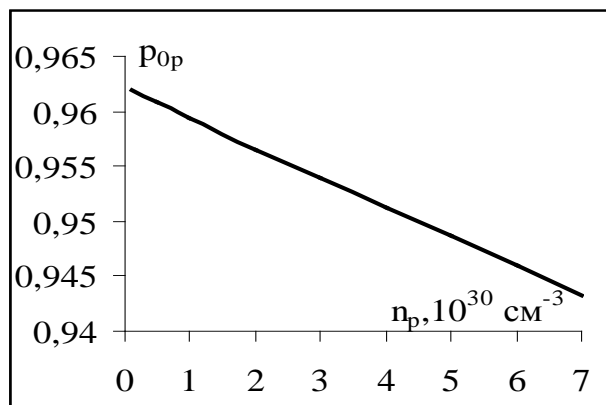


Рисунок 5 – Значение p_{0p} , соответствующее минимуму энергии вырожденных протонов при заданном n_p

Рассмотрим невырожденную электронно-нуклонную систему при конечной поляризации, используя вывод уточненного выражения для плотности энергии невзаимодействующих протонов [2, с. 54], выражения для плотностей обменной [8, с. 290], корреляционной [5, с. 460, 461], ядерной энергий [6, с. 199] (в т.ч. с учетом (11), (12)).

$$\begin{aligned}
 w_{Np}^T &= g_{pp}^T n_{p+} n_{p-}, \quad w_{exch}^T = -\frac{e^2 m_p^2 (kT)^2}{8\pi^2 \hbar^4} \left(\exp\left\{ \frac{2\mu_{0p+}}{kT} \right\} + \exp\left\{ \frac{2\mu_{0p-}}{kT} \right\} \right), \\
 w_{corr}^T &= -\frac{kT}{8\pi} \left(4\pi e^2 \sum_{j=\uparrow, \downarrow} \frac{\partial n_{pj}}{\partial \mu_{0pj}} \right)^{3/2} = -\frac{(kT)^{7/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{9/4}}{2^{3/2} \pi^{7/4} (\hbar c)^3} \left(\sum_{j=+,-} y_{pj} \sqrt{1-x_{pj}} \right)^{3/2}, \\
 \mu_{0i\pm} &= kT \ln(\sqrt{2} y_{i\pm}), \quad y_{i\pm} = 1 - \sqrt{1-x_{i\pm}}, \quad x_{i\pm} = \frac{(2\pi\hbar)^3 n_{i\pm}}{2(\pi m_p kT)^{3/2}}, \quad i = n, p.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) найдем обменную и корреляционную поправки кулоновского взаимодействия к химическим потенциалам протонов:

$$\begin{aligned}
 \mu_{exch\uparrow, \downarrow} &= \frac{\partial w_{exch}^T}{\partial n_{p\uparrow, \downarrow}} \Rightarrow \mu_{exch\pm} = -\frac{\alpha \sqrt{m_p c^2 kT} y_{p\pm}}{\sqrt{\pi(1-x_{p\pm})}}; \quad \mu_{corr\uparrow, \downarrow} = \frac{\partial w_{corr}^T}{\partial n_{p\uparrow, \downarrow}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu_{corr\pm} &= -\frac{3(kT)^{1/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{3/4}}{\sqrt{2}\pi^{1/4}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x_{p\pm}}} \left(\sum_{i=+,-} (\sqrt{1-x_{pi}} + x_{pi}) - 2 \right) \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Запишем равенства химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина, а также выражение для плотности энергии нуклонов

$$\begin{aligned}
 \mu_{i+} &= \mu_{i-}, \quad \mu_{i\pm} \approx \mu_{0i\pm} + g_{ii}^T n_{i\mp} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{j\mp} + \left(\frac{1}{2} + T_{3i} \right) (\mu_{exch\pm} + \mu_{corr\pm}), \\
 i = n, p; \quad T_{3j} &= -T_{3i}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 ,0 w_{non\ deg}^{np} (p_{0p}, p_{0n}) &= \sum_{i=p,n} w_i^T + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) + \\
 + w_{exch}^T + w_{corr}^T; \quad w_i^T &= \frac{3\pi^{3/2} (m_i kT)^{5/2}}{2m_i (2\pi\hbar)^3} \sum_{j=+,-} (4y_{ij} - y_{ij}^2) + w_{Ni}^T.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (26) не от 4, а лишь от 2 аргументов (при заданной температуре), т.к. на остальные 2 наложены связи в (25). При $n_n = 0$ получаем зависимость плотности энергии в (26) от 1 аргумента (при заданной температуре), т.к. на 2-й наложена связь в (25). Плотность энергии водородной плазмы минимальна при $p_{0p} \rightarrow 1$, если значения T, n_p согласуются с критерием невырождения и с (17а) (а также с рисунком 3 при учете корреляционной энергии). При этом при $p_{0p} \neq 0$ без учета корреляционной энергии $\mu_{p+} < \mu_{p-}$, с учетом корреляционной энергии $\mu_{p+} > \mu_{p-}$, что составляет определенную трудность. Это может быть связано с расходимостью μ_{0p-} при $p_{0p} \rightarrow 1$; вопрос о физическом смысле этой расходимости требует отдельных исследований. Это может быть связано как с невозможностью полной поляризации при $T \neq 0$, так и, например, с необходимостью уточнения формулы Веденова–Ларкина в [5, с. 460, 461].

Т.к. при рассматриваемых плотностях ядерная энергия, по крайней мере, на 2 и более порядков меньше других составляющих энергии, при учете нейтронов (причем в

Сверхновых II типа вряд ли может быть $n_n \gg n_p$) ситуация качественно не меняется, т.е. плотность энергии уменьшается с изменением p_{0n} от 0 до -1 (т.е. $p_{0n} \uparrow \downarrow p_{0p}$).

Магнитные поля в белых карликах и при взрывах Сверхновых II типа
Индукция магнитного поля при спонтанной намагниченности [9, с. 316, 327]:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = (\chi^{-1} + 4\pi)\vec{I} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 4\pi\vec{I} = 4\pi\vec{k}_0\mu_{\text{Я}} \sum_{i=n,p} n_i p_{0i} \gamma_i. \quad (27)$$

Если $p_{0i} \sim 1$, то магнитные поля в верхних расплавленных слоях белых карликов при $n_n = 0$ вследствие спиновой поляризации протонов могут достигать значений до 10^4 Гс. Важен вопрос о возможности усиления магнитного поля в более глубоких слоях белых карликов, где плотность водорода близка к порогу нейтронизации, но водород является кристаллическим, и протоны, локализуясь в пределах ячейки, подчиняются статистике Бозе и могут ориентировать свои спины во внешнем поле независимо друг от друга. Здесь важным является соотношение $\zeta = \gamma_p \mu_{\text{Я}} B (kT)^{-1}$, где $\gamma_p = 2.7928$, B – магнитное поле, возникшее в верхних слоях за счет спиновой поляризации протонов и проникшее во внутренние слои, T – температура внутренних слоев. Спиновая поляризация и усиление магнитного поля до 10^9 Гс возможны лишь при $\zeta \gg 1$. Дальнейшие рассуждения рассмотрим в таблице 2 для 2 видов белых карликов: I. Одиночный белый карлик. II. Практически потухший белый карлик, на который началась аккреция водорода со звезды-компаньона в тесной двойной системе.

Таблица 2 – Сравнение условий для возможности усиления магнитного поля

Белый карлик	Внутренние слои	Объяснение	ζ	Может ли магнитное поле быть усилено
I	Горячее внешних	это естественно при остывании изолированной звезды	< 1	Нет, оно остается порядка 10^4 Гс
II	Холоднее внешних	внешние слои нагрелись сильнее за счет аккреции	> 1	Да, и достичь порядка 10^9 Гс

Для Сверхновых II типа формула (27) дает оценку $B \sim 10^7 - 10^{13}$ Гс при $n_p \sim n_n \sim 10^{30} - 10^{36} \text{ см}^{-3}$. С учетом температурных ограничений, вопрос о возможности ферромагнетизма уместно рассматривать для внешних слоев, успевших достаточно остыть. Приведенные результаты сравнимы с оценками, полученными в рамках других моделей. В [10] в модели асимметричного коллапса с вращением и джетами (со ссылками на другие работы) приведены оценки $B \sim 10^{12} - 10^{16}$ Гс. В [11] в рамках магнитной гидродинамики через моделирование неустойчивостей Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца утверждается, что данный механизм более эффективен по сравнению с сжатием магнитного поля $B \sim 10^6$ Гс ударной волной. В [12] в рамках аналогичной модели с проведением лазерных экспериментов была также дана оценка $B \sim 10^6$ Гс.

Заключение. Основные результаты

В рамках статистической термодинамики рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Вопрос рассматривался как для конечных значений спиновой поляризации нуклонов, так и через критерий Стонера. Последний рассматривался как через нахождение полюсов магнитной восприимчивости, так и через флуктуации энергии. Показано, что возможна энергетическая выгода спиновой поляризации протонов и нейтронов в определенном диапазоне температур и плотностей. Показано, что в рамках концепции ферромагнетизма возможно объяснение происхождения магнитных полей до $B \sim 10^{13}$ Гс при взрывах Сверхновых II типа, до $B \sim 10^4$ Гс в одиночных водородных белых карликах и до $B \sim 10^9$ Гс в остывших белых карликах на начальной стадии аккреции водорода со стороны массивного компаньона в тесной двойной системе.

Часть идей, лежащих в основе данной работы, принадлежат В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А.И. Серый // Веснік Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
2. Серый, А.И. К вопросу о магнитных полях белых карликов и Сверхновых II типа / А.И. Серый // Веснік Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 50–58.
3. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол.: Д.М. Алексеев [и др]. // М. : Сов. энцикл., 1988. – Т. I. Ааронова–Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.
4. Cumming, Andrew. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs / Andrew Cumming // ASP Conference Series. – P. 1–13.
5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособ. для вузов : в 10 т. / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – Т. IX Статистическая физика : в 2 ч., Ч. 2: Теория конденсированного состояния / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // 3-е изд., стереот. – М. : Физматлит, 2001. – 496 с.
6. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов. – М. : Физматлит, 2003. – 392 с.
7. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский. – М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V: Статистическая физика. – Ч. I. – 616 с.
9. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3: Электричество. – 688 с.
10. Wheeler, J. Craig. Magnetic Fields in Core-collapse Supernovae: Possibilities and Gaps / J. Craig Wheeler, Akiyama Shizuka [Electronic resource]. – Mode of access : www.int.washington.edu/talks/WorkShops/int_04_2/People/Wheeler_C/Wheeler_INT.pdf.
11. Jun, Byung-II. On the Origin of Strong Magnetic Fields in Young Supernova Remnants / Byung-II Jun, Michael L. Norman [Electronic resource]. – Mode of access : arXiv.org/abs/astro-ph/9601035v1.

12. Fryxell, Bruce. Supernova Rayleigh-Taylor Instabilities / Bruce Fryxell [Electronic resource]. – Mode of access: www.mpa-garching.mpg.de/hydro/NucAstro/PDF_10/fryxell.pdf.

A.I. Sery On Corrections to Stoner Criterion for Nuclear Matter

We consider the question of ferromagnetism of electron-nucleon matter in degenerate and non-degenerate state regarding inter-nucleon nuclear (in contact approximation), as well as proton exchange and correlation Coulomb energy. Finite values of spin polarization of nucleons and Stoner criterion are considered. The existence of range of temperatures and densities has been shown where energetic preference of spin polarization of nucleons takes place.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2013

УДК 517.5

Т.Н. Жернова, И.В. Кальчук, Ю.И. Харкевич

**ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $Lip\ 1$
ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ПУАССОНА**

В работе исследуются аппроксимативные свойства интегралов типа Пуассона, а именно найдены полные асимптотические разложения для точной верхней грани отклонений функций с класса $Lip\ 1$ от их интегралов типа Пуассона в равномерной метрике.

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|.$$

Множество функций $f \in C$, которые удовлетворяют неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h|,$$

будем обозначать через $Lip\ 1$ и называть классом Липшица порядка 1.

Рассмотрим краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах. То есть уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq \rho < 1, -\pi \leq x \leq \pi,) \tag{2}$$

Решение уравнения (2), что удовлетворяет граничное условие

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{3}$$

где $f(x)$ – суммируемая 2π -периодическая функция, можем записать в виде

$$P(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \tag{4}$$

Функцию (4) принято называть интегралом Пуассона функции f , а величину

$$K_1(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)}$$

называют ядром Пуассона.

Рассмотрим теперь краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta(\Delta u) = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (5), что удовлетворяет граничные условия

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial u(\rho, x)}{\partial \rho} |_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{6}$$

можем записать в виде

$$B(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right] \rho^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \tag{7}$$

Функцию (7) принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции f , а величину

$$K_2(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right] \rho^k \cos kt = \frac{(1 - \rho^2)^2 (1 - \rho \cos t)}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)^2}$$

называют бигармоническим ядром Пуассона.

В работе будем рассматривать некоторое обобщение интеграла Пуассона и бигармонического интеграла Пуассона, а именно интеграл вида

$$\mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(\rho, t) dt, \quad (8)$$

который принято называть интегралом типа Пуассона, где

$$K(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \alpha k(1 + \rho)(1 - \rho)^{\beta} \right] \rho^k \cos kt - \text{ядро интеграла типа Пуассона}$$

и $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\beta \geq 1$, $0 \leq \rho < 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ из (8) получим интеграл Пуассона, а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, из (8) получим бигармонический интеграл Пуассона.

$$\text{Обозначим } \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C = \sup_{f \in \text{Lip}1} \|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x)\|_C. \quad (10)$$

Определение 1. Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)$ такая, что можно записать при $\rho \rightarrow 1-$ асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла типа Пуассона и класса $\text{Lip}1$ в метрике пространства C .

Определение 2. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ называется полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-$, если для всех $n \in \mathbb{N}$

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|)$$

и при любом $m \in \mathbb{N}$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^m g_n(\rho) + o(g_m(\rho)), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Кратко будем записывать этот факт следующим образом

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона и бигармонических интегралов Пуассона на классах $\text{Lip}1$ достаточно хорошо изучены.

Первые результаты, связанные с исследованием величин $\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_C$ были получены И.П. Натансоном в 1950 г. [1]. В частности, им была решена задача Колмогорова-Никольского на классах $\text{Lip}1$ для интеграла Пуассона, а именно установлено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_C = \frac{2}{\pi}(1 - \rho) |\ln(1 - \rho)| + O(1 - \rho), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

В работе [2] в 1950 г. А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + \varepsilon_\rho, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{1-\rho} \left\{ \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t^t} + 1 \right\} dt.$$

Далее в 1961 г. в работе Л.В.Малей [3] было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса $\text{Lip}1$ от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c \cong \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-,$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + \ln 2 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{-i}}{i} \right).$$

В 1973 г. этот результат был передоказан Е.Л. Штарком [4].

В.А. Баскаков в работе [5] (1975 г.) записал аналогичные асимптотические разложения, но по степеням $\frac{1}{\delta} \left(\delta = -\frac{1}{\ln \rho} \right)$ при $\delta \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} \left[\frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi \delta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}}.$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на других функциональных классах изучались в работах Л.И. Баусова [6], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [7; 8].

Что же касается вопроса аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона, то здесь нужно отметить, что С. Каниев в 1963 г. [9] нашел асимптотическое равенство вида

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Позже, в 1968 г. Р. Руч [10] уточнила результат С. Каниева (уточнила порядок остаточного члена):

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} \right), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

В 1976 г. Л.П. Фалалеев [11] нашел полное асимптотическое разложение при $\rho \rightarrow 1-$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi} \left\{ (1-\rho) + (1-\rho^2) \ln \frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (1-\rho)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \nu_k (1-\rho)^k \right) \right\},$$

где

$$\nu_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i 2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1) 2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1) 2^{k-1}} \right).$$

Отметим также, что аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на разных функциональных классах изучались в работах Т.И. Аманова и Л.П. Фалалеева [12], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [13; 14].

Главной целью данной работы является нахождение полного асимптотического разложения для величины

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_{CC} = \sup_{f \in \text{Lip}1} \|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x)\|,$$

при $\rho \rightarrow 1-$, которое позволяет выписывать константы Колмогорова-Никольского произвольного порядка малости.

Имеет место теорема.

Теорема. При $\rho \rightarrow 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C &= \frac{2\alpha}{\pi} (1-\rho)^\beta \left[\ln \frac{1}{4} + (1+\ln 2)(1-\rho) + (1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \ln(1-\rho)^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}} \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \\ \gamma_k &= \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right), \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Убедимся сначала в том, что $K(\rho, t) \geq 0$. Запишем ядро типа Пуассона в виде

$$K(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \alpha k (1+\rho)(1-\rho)^\beta \right] \rho^k \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt + \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt.$$

Учитывая, что для первого слагаемого из правой части последнего равенства имеет место представление

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)} \quad (11)$$

(см. формулу (1.447.3) из [15]), найдем аналогичное представление для суммы $\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt$.

$$\text{Используя формулу (1.447.1) [15], имеем } \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt = \frac{\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t , получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt = \frac{\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \quad (12)$$

На основе формул (11) и (12) будем иметь

$$\begin{aligned} K(\rho, t) &= \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)} + \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \frac{\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} = \\ &= \frac{(1-\rho^2)(1-2\rho \cos t + \rho^2) + 2\alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta (\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2)}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку знаменатель дроби из правой части последнего равенства всегда положительный, то рассмотрим его числитель. Первое слагаемое числителя

$$\begin{aligned} (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2) &= (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2\cos^2 t-\rho^2\cos^2 t+\rho^2) = \\ &= (1-\rho^2)\left[(1-\rho\cos t)^2+\rho^2(1-\cos t)\right] = (1-\rho^2)\left[(1-\rho\cos t)^2+\rho^2\sin^2 t\right] > 0, \end{aligned}$$

а потому, показав, что второе слагаемое меньше первого, можем сделать вывод, что числитель будет положительным. Это вытекает из следующих соображений.

Необходимо показать, что

$$2\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta(\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2) < (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2). \quad (13)$$

Так как $2\alpha \leq 1$ и $(1+\rho)(1-\rho)^\beta = (1-\rho^2)(1-\rho)^{\beta-1} \leq (1-\rho^2)$, то для доказательства (13) достаточно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2 < 1-2\rho\cos t+\rho^2,$$

или

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2 > 0.$$

Действительно

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2 \geq 1-3\rho+3\rho^2-\rho^3 = (1-\rho)^3 > 0, \rho \in (0,1).$$

Итак, $K(\rho,t) > 0$, $\rho \in (0,1)$. А поскольку $K(0,t) = \frac{1}{2} > 0$, то получаем, что $K(\rho,t) > 0$ при $0 \leq \rho < 1$.

Также нетрудно убедиться, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho,t) dt = 1$.

Учитывая (8) и предыдущее равенство, можем записать

$$f(x) - \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho, f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t)) K(\rho,t) dt.$$

Поскольку $f \in \text{Lip}1$, то $|f(x) - f(x+t)| \leq |t|$. Тогда

$$|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho, f, x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(\rho,t) dt.$$

Поскольку функция $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, принадлежит классу $\text{Lip}1$ и превращает последнее неравенство в равенство, то, согласно (10), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho))_C &= \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(\rho,t) dt = 2 \int_0^{\pi} t K(\rho,t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + \alpha k (1+\rho)(1-\rho)^\beta] \rho^k \cos kt \right) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right) dt + \frac{2}{\pi} \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \int_0^{\pi} t \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

В работе Е.Л. Штарка [4] показано, что для первого интеграла из правой части равенства (14) при $\rho \rightarrow 1 -$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad (15)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Преобразуем теперь второй интеграл из правой части равенства (14)

$$\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \int_0^\pi t \cos ktdt = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^{2j-1}}{2j-1}.$$

Используя формулу (1.513.1) из [15]

$$\ln \frac{1+\rho}{1-\rho} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \rho^{2k-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt &= -\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} = \\ &= \alpha(1-\rho)^\beta (1+\rho) [\ln(1-\rho) - \ln(1+\rho)] = \\ &= \alpha(1-\rho)^\beta \left[\{2 - (1-\rho)\} \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_c &= \frac{2\alpha}{\pi} (1-\rho)^\beta \left[2 \ln(1-\rho) - (1-\rho) \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho) \right] + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-. \end{aligned} \quad (17)$$

Разлагая функцию $\varphi(\rho) = -(1+\rho) \ln(1+\rho)$ в ряд Тейлора по степеням $(1-\rho)$, будем иметь

$$-(1+\rho) \ln(1+\rho) = -2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Выполняя тождественные преобразования в квадратных скобках выражения (17), находим

$$\begin{aligned} 2 \ln(1-\rho) - (1-\rho) \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho) &= \ln(1-\rho)^2 + \\ &+ (1-\rho) \ln \frac{1}{(1-\rho)} + \ln \frac{1}{4} + (1 + \ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (17), получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 0$, получим уже известный результат Е.Л. Штарка [4], а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$ будем иметь результат Л.П. Фалалеева [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72, № 1 – С. 11–14.
2. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тимман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 1 – С. 17–20.

3. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. – 1961, №3. – С.25–32.
4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
5. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.
6. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – Т. 46, № 3. – С. 15–31.
7. Zhyhallo, K.M. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych. // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №1. – P. 86–98.
9. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
10. Pych, P. On a biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203 – 213.
11. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения: материалы всесоюзного симпозиума. – Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1976. – С. 163–167.
12. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Алма-Ата, 1976: тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
13. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals/ K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.
14. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №3. – P. 399–413.
15. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

T.N. Zhernova, I.V. Kalchuk, Yu.I. Kharkevich On Approximation of the Function of Class Lip_1 by Poisson-type Integrals

In this paper we investigate the approximation properties of Poisson-type integrals, namely, we found a complete asymptotic decomposition for the least upper bound of the deviation the functions from the class Lip_1 of their Poisson-type integrals in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.05.13

УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, КАСАТЕЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА К КОТОРЫМ ВО ВСЕХ ТОЧКАХ ЯВЛЯЮТСЯ ИЗОТРОПНЫМИ

В работе изучаются одномерные подмногообразия пространства Минковского. Рассматривается класс многообразий, касательные подпространства к которым во всех точках являются изотропными. Для таких многообразий строится канонический репер, и находятся дифференциальные инварианты, определяющие указанные многообразия с точностью до движений пространства Минковского.

Группу Ли G движений пространства 1R_4 (пространства Минковского) будем задавать как совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию:

$$A\varepsilon_{4,1}A^T = \varepsilon_{4,1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли \bar{G} будет задаваться как совокупность матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1} + \varepsilon_{4,1}B = 0$.

Точки пространства 1R_4 будем задавать в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x. \quad (4)$$

Группа G действует в пространстве 1R_4 слева по правилу:

$$x \rightarrow a \cdot x. \quad (5)$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4 : G = H \otimes T_4. \quad (6)$$

Алгебра Ли \overline{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \overline{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4 :

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \quad (7)$$

Базис в алгебре Ли \overline{G} группы Ли G движений пространства 1R_4 берется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке, β -м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули.

Причем векторы i_5, i_6, \dots, i_{10} образуют базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H , векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4 , а операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA \quad A, B \in \overline{G}. \quad (9)$$

С точностью до изоморфизма получается 13 подгрупп Ли группы Ли вращений пространства 1R_4 : $G_1 - G_{13}$. Алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}, \overline{G}_{13}$, задаются соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Классификация кривых пространства Минковского

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства 1R_4 . Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства 1R_4 , причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным. Ниже классифицируются по эквивалентности относительно основной группы одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке изотропное касательное пространство.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ изотропного типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f) = \{i_1 + i_3\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1 + i_3, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}({}^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 [1] $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \{h \in H | Adh(K'_1) = K'_1\}, \quad (10)$$

а ее алгебра Ли \overline{H}_1 условием:

$$\overline{H}_1 = \{v \in \overline{H} | adv(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (11)$$

Пусть

$$\varphi = \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in \overline{H}, \quad (12)$$

$$k = i_1 + i_3 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \quad (13)$$

Тогда:

$$ad\varphi = [\varphi, k] = \lambda(i_5 - i_8) + \mu i_6 + \nu(i_7 + i_{10}) + s i_9 + \psi, \quad (14)$$

где $\psi \in \overline{H}$.

По условию $ad\varphi(k) \subset K'_1$ получим: $\mu = -\sigma, \nu = -s$. Таким образом, $\overline{H}_1 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}$ и совпадает с \overline{G}_{13} , а группа H_1 совпадает с группой G_{13} . Группа H образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13}.$$

Условие (4) из [1]: $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ не выполняется, т.к. $\dim H - \dim H_1 = 6 - 4 = 2$, а $\dim Q_1 = 3$.

Система Пфаффа, задающая исходное пространство K'_1 будет иметь вид:

$$w^2 = 0, w^4 = 0, w^1 - w^3 = 0. \quad (15)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} w^1 \wedge w_1^2 + w^3 \wedge w_3^2 + w^4 \wedge w_4^2 &= 0, w^1 \wedge w_1^4 + w^2 \wedge w_2^4 + w^3 \wedge w_3^4 = 0, \\ w^2 \wedge w_2^1 + w^3 \wedge w_3^1 + w^4 \wedge w_4^1 - w^1 \wedge w_1^3 - w^2 \wedge w_2^3 - w^4 \wedge w_4^3 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда в силу системы (15):

$$\begin{cases} w^1 \wedge w_1^2 + w^3 \wedge w_3^2 = 0; \\ w^1 \wedge w_1^4 + w^3 \wedge w_3^4 = 0; \\ w^3 \wedge w_3^1 - w^1 \wedge w_1^3 = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} w^1 \wedge (w_1^2 - w_2^3) = 0, \\ w^1 \wedge (w_1^4 + w_3^4) = 0, \\ w^3 \wedge (w_3^1 - w_3^1) = 0; \end{cases} \quad (17)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 = \lambda w^1, \\ w_1^4 - w_3^4 = \mu w^1; \end{cases} \quad (18)$$

Вместе с (15) получим систему

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 - \lambda w^1 = 0, \\ w_1^4 - w_3^4 - \mu w^1 = 0, \\ w^1 - w^3 = 0, \\ w^2 = 0, \\ w^4 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{|e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(\text{Im } f_1))$ алгебры \overline{G}_{13} ([1] §1, §2). Пространство K'_2 , определяемое системой (19), состоит из векторов:

$$\left\{ t(i_1 + i_3) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 + i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \nu i_6 + \theta i_9 \right\}, \quad (20)$$

где ν, θ – произвольные, а λ, μ – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 –орбиты пространств вида (20) при всевозможных λ, μ . Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли \bar{H}_2 . Алгебра Ли \bar{H}_2 определяется условием:

$$\bar{H}_2 = \{\varepsilon \in H_1 \mid [\varepsilon, K'_2] \subset K'_2\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} k_2 &= t(i_1 + i_3) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 + i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \nu i_6 + \theta i_9, \\ \varepsilon &= \alpha i_6 + \beta i_9 + \gamma(i_5 + i_8) + \delta(i_7 + i_{10}), \\ ad\varepsilon = [\varepsilon, k_2] &= \alpha t(i_1 + i_3) + \left(\frac{\alpha \mu t}{2} + \frac{\beta \lambda t}{2}\right)(i_7 + i_{10}) + \left(\frac{\beta \mu t}{2} - \frac{\alpha \lambda t}{2}\right)(i_5 + i_8), \end{aligned}$$

Но так как $ad\varepsilon(k_2) \subset K'_2$, то $\beta \lambda = 0, \beta \mu = 0$, и так как λ, μ – фиксированные, то получаем $\bar{H}_2 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}$ и совпадает с \bar{G}_8 , а группа H_2 совпадает с группой G_8 . Группа G_{13} образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13} \supset G_8.$$

Рассмотрим систему (18) и найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} w_1^1 \wedge w_1^2 + w_1^2 \wedge w_2^2 + w_1^3 \wedge w_3^2 + w_1^4 \wedge w_4^2 - w_2^1 \wedge w_1^3 - w_2^2 \wedge w_2^3 - w_2^3 \wedge w_3^3 - w_2^4 \wedge w_4^3 - \\ - \lambda w^2 \wedge w_2^1 - \lambda w^3 \wedge w_3^1 - \lambda w^4 \wedge w_4^1 = 0, \\ w_1^1 \wedge w_1^4 + w_1^2 \wedge w_2^4 + w_1^3 \wedge w_3^4 + w_1^4 \wedge w_4^4 + w_3^1 \wedge w_1^4 + w_3^2 \wedge w_2^4 + w_3^3 \wedge w_3^4 + w_3^4 \wedge w_4^4 - \\ - \mu w^3 \wedge w_3^1 - \mu w^2 \wedge w_2^1 - \mu w^4 \wedge w_4^1 - \mu w^1 \wedge w_1^1 = 0. \end{aligned}$$

В силу системы (19) и системы (*)

$$\begin{cases} w_2^1 = w_1^2, \\ w_3^1 = w_1^3, \\ w_4^1 = w_1^4, \\ w_3^2 = -w_2^3, \\ w_4^2 = -w_2^4, \\ w_4^3 = -w_3^4. \end{cases} \quad (*)$$

Получим

$$\begin{cases} (\lambda w_1^3 + \mu w_2^4 + \lambda w_1^3) \wedge w^1 = 0, \\ (-\lambda w_2^4 + \mu w_1^3 + \mu w_1^3) \wedge w^1 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Применяя лемму Картана к системе (21), получим

$$\begin{cases} (2\lambda w_1^3 + \mu w_2^4) = pw^1, \\ (-\lambda w_2^4 + 2\mu w_1^3) = qw^1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} w_1^3 = \frac{\lambda p + \mu q}{2\lambda^2 + 2\mu^2} w^1, \\ w_2^4 = \frac{\mu p - \lambda q}{\lambda^2 + \mu^2} w^1. \end{cases} \quad (22)$$

Введем замену $\begin{cases} \delta = \frac{\lambda p + \mu q}{2\lambda^2 + 2\mu^2}, \\ \sigma = \frac{\mu p - \lambda q}{\lambda^2 + \mu^2}, \end{cases}$ тогда (22) переписывается в виде

$$\begin{cases} w_1^3 = \delta w^1, \\ w_2^4 = \sigma w^1. \end{cases} \quad (23)$$

В силу системы (23), система (19) примет вид

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 - \lambda w^1 = 0, \\ w_1^4 + w_3^4 - \mu w^1 = 0, \\ w^1 - w^3 = 0, \\ w^2 = 0, \\ w^4 = 0, \\ w_1^3 = \delta w^1, \\ w_2^4 = \sigma w^1. \end{cases} \quad (24)$$

Эта система определяет подпространство $K'_3 = d\pi_{|e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(\text{Im } f_1))$ алгебры \overline{G}_8 ([1] §1,§2). Пространство K'_3 , определяемое системой (1.24), состоит из векторов:

$$\left\{ t(i_1 + i_2) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 - i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \delta i_6 + \sigma i_9 \right\}. \quad (25)$$

Надо изучить H_1 -орбиты пространств вида (25) при всевозможных δ, σ . Найдем группу стационарности H_3 пространства K'_3 и ее алгебру Ли \overline{H}_3 . Алгебра Ли \overline{H}_3 определяется условием:

$$\overline{H}_3 = \left\{ \xi \in H_3 \mid [\xi, K'_3] \subset K'_3 \right\}$$

Пусть

$$\begin{aligned} k_3 &= t(i_1 + i_3) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 - i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \delta i_6 + \sigma i_9, \\ \xi &= \alpha(i_5 - i_8) + \beta(i_7 + i_{10}) + \gamma i_6, \end{aligned}$$

$$ad\xi(k_3) = [\xi, k_3] = \gamma t(i_1 + i_3) + \left(-\frac{\gamma\lambda t}{2} - \alpha\delta t - \sigma\beta t \right)(i_5 - i_8) + \left(-\frac{\gamma\mu t}{2} + \alpha\sigma t - \delta\beta t \right)(i_7 + i_{10}).$$

Но так как $ad\xi(k_3) \subset K'_3$, то $a = 0, b = 0$, и получаем $\overline{H}_3 = \{i_6\}$ и совпадает с \overline{G}_2 , а группа H_3 совпадает с группой G_2 . Группа G_8 образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13} \supset G_8 \supset G_2.$$

Рассмотрим систему (23) и найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$w_1^1 \wedge w_1^3 + w_1^2 \wedge w_2^3 + w_1^3 \wedge w_3^3 + w_1^4 \wedge w_4^3 - \delta w^2 \wedge w_2^1 - \delta w^3 \wedge w_3^1 - \delta w^4 \wedge w_4^1 = 0,$$

$$w_2^1 \wedge w_1^4 + w_2^2 \wedge w_2^4 + w_2^3 \wedge w_3^4 + w_2^4 \wedge w_4^4 - \sigma w^2 \wedge w_2^1 - \sigma w^3 \wedge w_3^1 - \sigma w^4 \wedge w_4^1 = 0.$$

В силу системы (24) получим:

$$\begin{cases} w^1 \wedge (\lambda w_2^3 - \mu w_3^4) = 0, \\ w^1 \wedge (\lambda w_3^4 - \mu w_2^3) = 0. \end{cases}$$

Применим лемму Картана:

$$\begin{cases} \lambda w_2^3 - \mu w_3^4 = s w^1, \\ \lambda w_3^4 - \mu w_2^3 = r w^1. \end{cases} \quad (26)$$

Перепишем (26) в виде:

$$\begin{cases} w_2^3 = a w^1, \\ w_3^4 = b w^1, \end{cases} \quad (27)$$

где $\begin{cases} a = \frac{s\lambda + r\mu}{\lambda^2 - \mu^2}; \\ b = \frac{s\mu + r\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}. \end{cases}$

В силу системы (27), система (24) переписывается в виде

$$\begin{aligned} w_1^2 = (a + \lambda)w^1, w_1^4 = (\mu - b)w^1, w^1 - w^3 = 0, w^2 = 0, w^4 = 0, w_1^3 = \delta w^1, w_4^2 = \sigma w^1, \\ w_2^1 = a w^1, w_3^1 = b w^1. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, канонизация репера закончена. Все формы выражены через базисную форму. Коэффициенты при этом называются дифференциальными вариантами.

Теорема. Совокупность изотропных кривых пространства Минковского, имеющая характеристическую цепочку $H \supset G_{13} \supset G_8 \supset G_2 \supset e$, имеет характеризующую систему (28) и зависит от шести дифференциальных вариантов $(\lambda, \mu, p, q, r, s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Прямая эквивалентность подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства 2R_4 / А. А. Юдов // Деп. ВИНТИ. – Минск, 1989. – № 1498-В89.
2. Юдов, А.А. О редуктивности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 1R_4 / А.А. Юдов, О.В. Пинчук // Вестник БрГУ. – 2011. – № 1. – С. 123–128.
3. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 2R_4 / А.А.Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.

E.V. Zubej, A.A. Yudov Grading Curve of Minkowski Space to Tangent Space which at all Points are Isotropic

In this paper we study one-dimensional submanifold of Minkowski space. We consider the class of manifolds, tangent subspace to which all points are isotropic. For such manifolds constructed canonical frame, differential invariants and are defining these varieties up to motions of Minkowski space.

УДК 004.6

А.А. Козинский, В.А. Козлов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЕБ-СИСТЕМЫ «ТРЕНАЖЕР РУССКОГО ЯЗЫКА ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ»

Статья посвящена описанию некоторых математических моделей, созданных в рамках проектирования и внедрения веб-системы «Тренажер русского языка для иностранных студентов». Для описания в настоящей статье выбрана модель данных, использованная для хранения информации о пользователях, учебном содержании, статистических показателях результатов тестирования и другие. Второй математической моделью, описанной авторами, является модель организации видеоконференцсвязи. Модель видеоконференцсвязи отражает сущность сетевого взаимодействия пользователей. При ее создании использованы технологии: Ajax, HTML, Ghostscript, ActiveMQ, Flex, Grails, Tomcat, Radis и др. Математические компоненты модели видеоконференцсвязи используют теорию защиты сигнала методами криптографического анализа, шифрования пользовательских данных, сжатия видеосигнала с использованием кодека MPEG-4 FFMPEG.

Результаты проектирования используются в обучении, проведении вебинаров, видеоконференций.

Введение

В условиях осуществления основной деятельности Брестским государственным университетом имени А.С. Пушкина активизирована работа по привлечению иностранных студентов. Данное обстоятельство является основанием разработки автоматизированных систем обучения. Остро стоит вопрос обучения русскому языку иностранных студентов университета. Перед одним из авторов статьи была поставлена задача создания такой системы. При этом одной из важнейших задач проектирования была разработка и реализация ряда математических моделей с учетом особенностей учебного процесса для иностранных студентов. При создании модели учтены следующие особенности: значительный объем преподаваемого материала, особенности взаимодействия обучаемых с преподавателем, необходимость мониторинга эффективности обучения.

Некоторые из реализованных моделей описаны в настоящей работе.

Применение метода декомпозиции для построения логической модели приложения RLT

Применение метода декомпозиции для решения сложной задачи проектирования веб-приложения позволило создать логическую модель проекта. Схема логической модели представлена на рисунке 1.

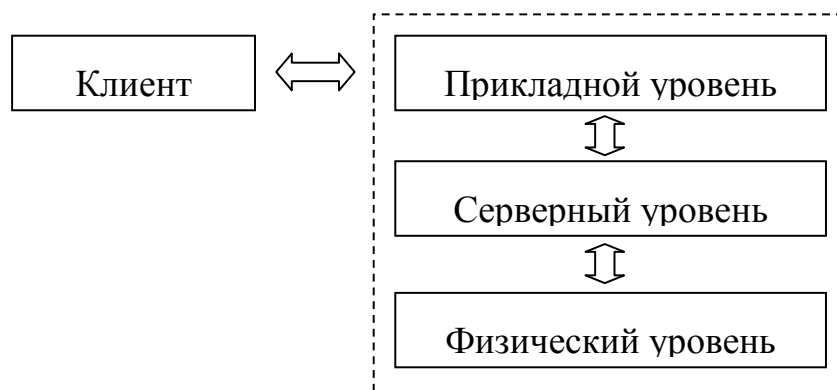


Рисунок 1 – Логическая модель реализации веб-приложения RLT

Физический уровень – это самый нижний уровень системы. На нем, как на фундаменте, расположены все остальные уровни RLT.

Физический уровень представляет собой выделенный персональный компьютер, называемый сервером, подключенный к источнику питания. Он выполняет базовые низкоуровневые действия по вычислению переданных ему данных, после чего возвращает результат верхнему уровню. Задачи физического уровня решены средствами сети.

Серверный уровень отвечает за выполнение инструкций и сценариев тренажера. Слово «серверный» здесь обозначает логический сервер – программный комплекс, функции которого реализованы автором в приложении. Основным компонентом серверного уровня является база данных, фрагменты модели и реализация которой представлены ниже.

Прикладной уровень представлен файлами скриптов для обработки контента. С данным уровнем системы непосредственно работает пользователь программы. Этот уровень формально можно назвать «направляющим» или «устанавливающим». Он является фактическим генератором команд для других уровней. К прикладному уровню относится пользовательский интерфейс приложения (*GUI*).

Общая схема взаимодействия пользователя с системой отражена на рисунке 1.

Опишем подробнее некоторые элементы логической модели.

Основным элементом серверного уровня является база данных. Инфологическая модель базы реализована средствами PHP MyAdmin и представлена на рисунке 2.

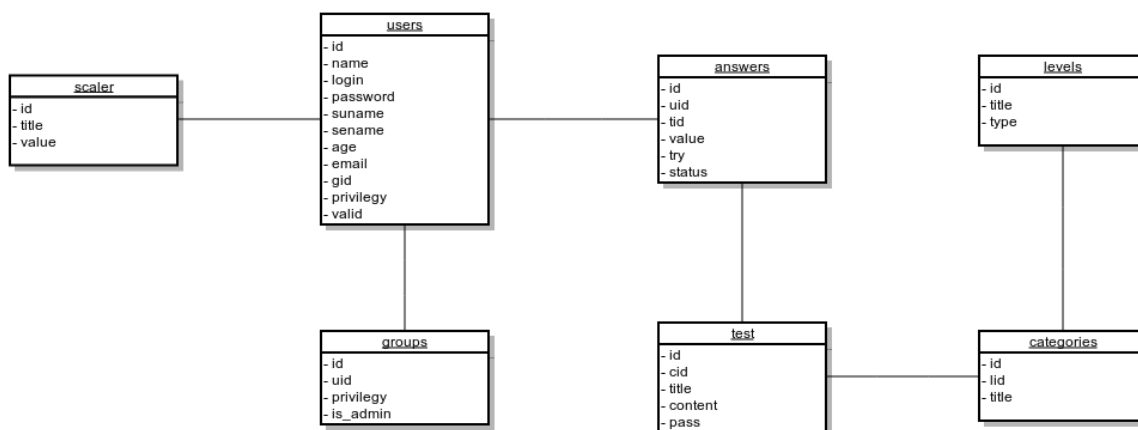


Рисунок 2 – Схема базы данных системы RLT

Фрагмент реализации модели приведен в листинге дампа данных.

Листинг фрагмента дампа данных

```

DROP TABLE IF EXISTS `users`;
CREATE TABLE IF NOT EXISTS `users` (
  `id` smallint(5) unsigned NOT NULL auto_increment,
  `login` varchar(15) NOT NULL,
  `password` varchar(32) default NULL,
  `name` varchar(60) NOT NULL,
  `surname` varchar(60) NOT NULL,
  `sename` varchar(60) NOT NULL,

```

```

`age` tinyint(3) unsigned NOT NULL,
`email` varchar(40) NOT NULL,
`gid` smallint(5) unsigned NOT NULL,
`privilege` tinyint(3) unsigned NOT NULL default '3',
`valid` tinyint(3) unsigned NOT NULL default '1',
PRIMARY KEY (`id`),
UNIQUE KEY `login` (`login`,`email`)
) ENGINE=MyISAM AUTO_INCREMENT=4 DEFAULT CHARSET=cp1251 AUTO_INCREMENT=4;

```

Прикладной уровень представлен компонентами, реализующими проведение видеоконференций, статистический мониторинг, интерфейс пользователей, анализ звуковых данных [1] и др. Перечисленные компоненты для RLT являются наиболее интересными и сложными в реализации. Остановимся на их описании подробнее.

Статистический мониторинг предназначен для анализа результатов обучения отдельных студентов и агрегированных данных групп. Внешний вид окна отчета о результатах обучения отдельного студента представлен на рисунке 3.



Рисунок 3 – Вид отчета по статистическим показателям результатов тестирования

Система видеоконференцсвязи

Опыт использования RLT показал необходимость разработки дополнительного компонента для видеоконференцсвязи пользователей. Клиентская часть представлена браузером. Для создания серверной части использованы технологии Ajax, HTML, Ghostscript, ActiveMQ, Flex, Grails, Tomcat, Radis и другие.

Основную трудность в реализации серверной части составляет передача потока видеоданных. Для решения задачи минимизации трафика применены алгоритмы сжатия сигнала Хаффмана [3] и PPM (Prediction by Partial Matching) [4].

Фрагмент программного кода алгоритма сжатия видеоданных реализован средствами Java (листинг 2).

Листинг фрагмента программного кода алгоритма сжатия видеоданных

```
public static String postURL(String targetURL, String urlParameters)
{
    return postURL(targetURL, urlParameters, "text/xml");
}

public static String postURL(String targetURL, String urlParameters, String
contentType)
{
    URL url;
    HttpURLConnection connection = null;
    int responseCode = 0;
    try {
        //Create connection
        url = new URL(targetURL);
        connection = (HttpURLConnection)url.openConnection();
        connection.setRequestMethod("POST");
        connection.setRequestProperty("Content-Type", contentType);

        connection.setRequestProperty("Content-Length", "" +
Integer.toString(urlParameters.getBytes().length));
        connection.setRequestProperty("Content-Language", "en-US");

        connection.setUseCaches (false);
        connection.setDoInput(true);
        connection.setDoOutput(true);

        //Send request
        DataOutputStream wr = new DataOutputStream (
connection.getOutputStream ());
        wr.writeBytes (urlParameters);
        wr.flush ();
        wr.close ();

        //Get Response
        InputStream is = connection.getInputStream();
        BufferedReader rd = new BufferedReader(new InputStreamReader(is));
        String line;
        StringBuffer response = new StringBuffer();
        while((line = rd.readLine()) != null) {
            response.append(line);
            response.append('\r');
        }
        rd.close();
        return response.toString();
    } catch (Exception e) {

        e.printStackTrace();
        return null;
    }
}
```

```
    } finally {
        if(connection != null) {
            connection.disconnect();
        }
    }
}

//
// parseXml() -- return a DOM of the XML
//
public static Document parseXml(String xml)
throws ParserConfigurationException, IOException, SAXException {
    DocumentBuilderFactory docFactory = DocumentBuilderFactory
        .newInstance();
    DocumentBuilder docBuilder = docFactory.newDocumentBuilder();
    Document doc = docBuilder.parse(new InputSource(new StringReader(xml)));
    return doc;
}

//
// urlEncode() -- URL encode the string
//
public static String urlEncode(String s) {
    try {
        return URLEncoder.encode(s, "UTF-8");
    } catch (Exception e) {
        e.printStackTrace();
    }
    return "";
}

//
// encodeURIComponent() -- Java encoding similiar to JavaScript encodeURIComponent
//
public static String encodeURIComponent(String component) {
    String result = null;

    try {
        result = URLEncoder.encode(component, "UTF-8")
            .replaceAll("\\%28", "(")
            .replaceAll("\\%29", ")")
            .replaceAll("\\%20", "%20")
            .replaceAll("\\%27", "'")
            .replaceAll("\\%21", "!")
            .replaceAll("\\%7E", "~");
    } catch (UnsupportedEncodingException e) {
        result = component;
    }

    return result;
}
```

Система кодирования и шифрования данных

Для сокрытия данных пользователей системы и предотвращения несанкционированного доступа к веб-приложению применяется компонент кодирования и шифрования данных. Шифрование данных обеспечивает двойной алгоритм MD5 [5] хеширования с дополнительным разделителем. В качестве основы для сжатия и кодирования потока данных между пользователями применяется алгоритм сжатия сигнала Хаффмана, а также дополнительный алгоритм PPM (Prediction by Partial Matching).

Заключение

Практика реализации web-приложения RLT показала, что важными задачами проектирования является реализация математических моделей. Основными этапами проектирования автоматизированной системы управления предприятием

общественного питания являются: изучение предметной области; разработка объектной модели; реализация объектов, интерфейса, связей; тестирование и внедрение.

В настоящей статье представлено описание некоторых моделей и основные особенности их реализации. Сложность проекта вызвала необходимость применения многоуровневого подхода для создания сложной системы, которой является «Система обучения русскому языку иностранных студентов». Реализованными уровнями системы являются: физический, серверный, прикладной.

Приложение внедрено в учреждениях образования и коммерческих предприятиях, что отражено актами внедрения. В настоящее время выполняется сопровождение системы RLT и проектирование модулей прикладного уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов, В.А. Применение быстрого преобразования Фурье для анализа звуковых данных / А.А. Козинский, В.А. Козлов // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка, Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 66–73.

2. BigBlueButton: открытое решение организации конференций [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://habrahabr.ru/post/112066/>. – Дата доступа : 01.10.2013.

3. Код Хаффмана – Википедия [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B4_%D0%A5%D0%B0%D1%84%D1%84%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B0. – Дата доступа : 01.10.2013.

4. Алгоритм сжатия PPM – Википедия [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D1%81%D0%B6%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%8F_PPM. – Дата доступа : 01.10.2013.

5. MD5 – Википедия [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://ru.wikipedia.org/wiki/MD5>. – Дата доступа : 01.10.2013.

A. Kazinski, V. Kozlov Mathematical Models of Web-based «Russian language Trainer for Foreign SStudents»

The article describes some mathematical models created in the design and implementation of web-based "Russian language trainer for foreign students." For descriptions in this article the data model was selected to store information about users, educational content, statistics of the test results, and others. The second mathematical model, described by the authors is the model of video conferencing. The model captures the essence of videoconferencing networking users. At its creation technology used: Ajax, HTML, Ghostscript, ActiveMQ, Flex, Grails, Tomcat, Radis etc. Mathematical model components use videoconferencing theory of signal protection methods of cryptanalysis, encryption of user data, video compression codec using the MPEG-4 FFMPEG.

The results of the design used in training, webinars, video conferencing.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.13

УДК 917.948

В.М. Мадорский**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО
ПОРЯДКА**

В работе рассматриваются способы приближенного решения нелинейных дифференциальных задач второго порядка. Для получения приближенного сеточного решения используется метод конечных разностей и квазиньютоновские методы. Сеточное решение восстанавливается с помощью сплайн-аппроксимации и отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева.

Среди приближенных методов решения краевых задач разностные методы в идейном плане наиболее прозрачны. Рассмотрим этот метод на примере решения 2π – периодической нелинейной задачи.

Пусть дана дифференциальная задача

$$F(x^{(n)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t) = 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi), \dots, x^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}(2\pi), \quad (2)$$

где $x(t)$ – 2π -периодическая n раз дифференцируемая по t функция. Если же функция $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическая, то всегда можно перейти от $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодической задачи к 2π -периодической, введя замену $u = \omega t$.

Для решения дифференциальной задачи (1), (2) разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на N частичных отрезков точками $t_i = ih, h = \frac{2\pi}{N}, i = 0, 1, \dots, N$. Заменяем производные в дифференциальной задаче (1), (2) линейными комбинациями значений $x_i = x(t_i), i = 0, 1, \dots, N$, следующим образом:

$$x^{(n)}(t_i) = \sum_{j=0}^{N_A-1} c_{jmn} x_{m+i+j}, \quad (3)$$

где N_A – число точек аппроксимации производной, i – номер точки, в которой вычисляется значение производной, m – номер точки, по которой происходит аппроксимация значения производной (может принимать значения от 0 до $N_A - 1$), n – порядок аппроксимируемой производной. Недостающие значения x_{-1}, x_{-2}, \dots и x_{N+1}, x_{N+2}, \dots определяем, используя периодичность функции. С помощью метода неопределенных коэффициентов находим значения коэффициентов c_{jmn} .

Осуществляя, таким образом, дискретизацию дифференциальной задачи (1), (2), получаем систему нелинейных уравнений в следующем операторном виде:

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n). \quad (4)$$

Уравнение (4) решаем одним из регуляризованных методов, предлагаемых в монографии [1].

Замечание. Матрицы регуляризованных процессов являются положительно-определенными, что позволяет рационально организовать вычисления. Рациональная организация вычислений позволяет утверждать, что количество операций умножения и деления на каждом шаге вычислительного процесса в регуляризованных процессах лишь незначительно выше, чем в стандартном методе Ньютона.

Рассмотрим краевую периодическую задачу Дуффинга:

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma x = F(\sin t, \cos t) \quad (5)$$

$$x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi). \quad (6)$$

Заменяя дифференциальную краевую задачу ее разностной аппроксимацией на сетке, получим систему нелинейных уравнений. При решении нелинейной системы квазиньютоновскими методами на каждой итерации необходимо решать линейную систему, матрица которой представляет собой матрицу Якоби системы нелинейных уравнений и является диагональной, причем количество диагоналей матрицы равно количеству точек, по которым были аппроксимированы производные. Если исходная матрица содержит n диагоналей, то при применении регуляризованных алгоритмов используют матрицу, которая содержит $(2n-1)$ диагоналей. Частным, но важным случаем рассмотренных выше подходов является метод, использующий пятидиагональную прогонку.

Так как производная функции, как правило, изменяется более плавно, чем сама функция, то для расчетов мы можем использовать матрицу Якоби, которая бы получалась при аппроксимации производных по трём точкам. При таком подходе мы практически не проигрываем в точности, но при этом можем очень значительно (на порядки) сократить количество операций, а значит и время решения задачи. Эта экономия возможна вследствие того, что матрица Якоби при таком подходе будет трехдиагональной, а матрица $f'(x_n)f'(x_n)$ пятидиагональной, следовательно, при решении линейной системы мы можем использовать вместо классического метода Гаусса, его вариант – метод матричной прогонки, который учитывает специфику таких систем и является очень быстрым.

Метод трёхдиагональной прогонки достаточно широко освещен в литературе. Гораздо больший интерес представляет метод пятидиагональной прогонки.

Метод прогонки для пятидиагональной матрицы.

Пусть необходимо найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, причем матрица системы имеет пятидиагональный вид.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 x_1 + d_1 x_2 + e_1 x_3 = g_1, \\ b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 + e_2 x_4 = g_2, \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 + e_3 x_5 = g_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n-2} x_{n-4} + b_{n-2} x_{n-3} + c_{n-2} x_{n-2} + d_{n-2} x_{n-1} + e_{n-2} x_n = g_{n-2}, \\ a_{n-1} x_{n-3} + b_{n-1} x_{n-2} + c_{n-1} x_{n-1} + d_{n-1} x_n = g_{n-1}, \\ a_n x_{n-2} + b_n x_{n-1} + c_n x_n = g_n. \end{array} \right. \quad (7)$$

Метод прогонки состоит из двух этапов — прямой прогонки и обратной.

1 этап: прямая прогонка.

Прямая прогонка состоит в том, что каждое неизвестное x_i выражается через x_{i+1} и x_{i+2} с помощью прогоночных коэффициентов A_i, B_i, C_i :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i x_{i+2} + C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (8)$$

Из первого уравнения системы (7) найдём: $x_1 = -\frac{d_1}{c_1} x_2 - \frac{e_1}{c_1} x_3 + \frac{g_1}{c_1}$. С другой стороны, в силу (8) $x_1 = A_1 x_2 + B_1 x_3 + C_1$. Приравняв коэффициенты в обоих выражениях для x_1 , имеем, $A_1 = -d_1/c_1$, $B_1 = -e_1/c_1$, $C_1 = g_1/c_1$.

Используя простые рассуждения, нетрудно найти:

$$A_i = \frac{-a_i A_{i-2} B_{i-1} - b_i B_{i-1} - d_i}{p_i}, \quad B_i = -\frac{e_i}{p_i}, \quad C_i = \frac{-a_i (A_{i-2} C_{i-1} + C_{i-2}) - b_i C_{i-1} + g_i}{p_i},$$

где $p_i = c_i + a_i (A_{i-2} A_{i-1} + B_{i-2}) + b_i A_{i-1}$, $i = 3, 4, \dots, n-2$.

2 этап: обратная прогонка

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных x_i . Воспользуемся формулой (8) при $i=n-2$ и последним уравнением системы (7), после несложных преобразований имеем формулы, по которым находим x_n и x_{n-1} :

$$x_n = \frac{C_n A_{n-1} - A_n C_{n-1}}{B_n A_{n-1} - B_{n-1} A_n}, \quad x_{n-1} = \frac{C_{n-1} - B_{n-1} x_n}{A_{n-1}}.$$

Далее, используя формулу (8) и найденные на первом этапе значения прогоночных коэффициентов, последовательно вычисляем все неизвестные $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1$.

Нетрудно подсчитать число действий умножения и деления, необходимых для решения системы (7) с помощью метода прогонки. Получим, что при реализации метода прогонки для пятидиагональной матрицы выполняется $14n$ операций умножения и деления. Для сравнения отметим, что при использовании метода Гаусса число действий умножения и деления близко к $n^3/3$. Естественно, если матрица системы позволяет использовать метод прогонки, то следует использовать именно его.

Перейдем к обсуждению численного эксперимента, где показаны преимущества использования регулировки шага β_n .

Рассмотрим задачи:

$$x'' + x^3 = -\cos t + \cos^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \quad (9)$$

$$x'' + x^3 = -10 \sin t + 1000 \sin^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (10)$$

$$x'' + x^3 = -10 \cos t + 1000 \cos^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (11)$$

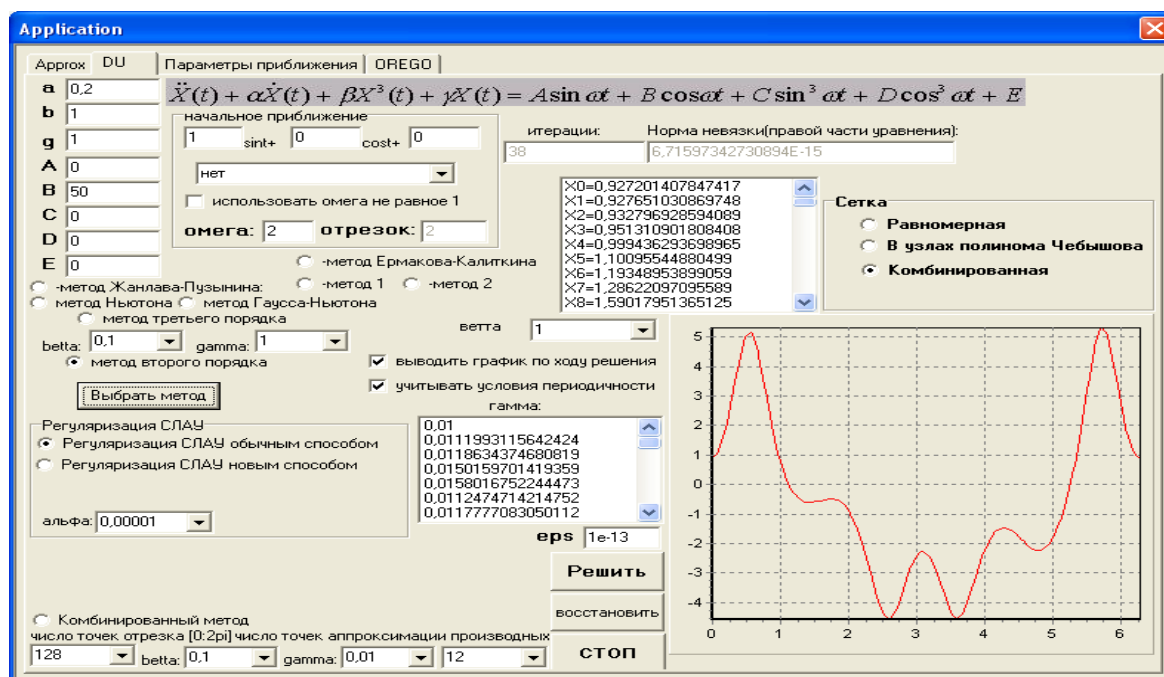
Нетрудно заметить, что точное решение для задач (9), (10), (11) будет соответственно $x(t) = \cos t$, $x(t) = 10 \sin t$, $x(t) = 10 \cos t$.

Результаты просчетов сведены в таблицу.

Таблица – Влияние шаговой длины на сходимость итерационных процессов

Метод	Задача	Входные данные	Результат
Стрельбы	(9)	a=1.4, b=0.1, m=2π	Не работает
Стрельбы с множителем β _n	(9)	a=1.4, b=0.1, m=2π, eps=10 ⁻⁵	23 итерации
Стрельбы	(10)	a=10.3, b=2, m=π/2	Не работает
Стрельбы с множителем β _n	(10)	a=10.3, b=2, m=π/2, eps=10 ⁻⁵	41 итерация
Стрельбы с множителем β _n	(11)	a=10.3, b=2, m=0	Не работает
Параллельной пристрелки	(9)	l=3, a _i =2cost _i , b _i =-2sint _i	Не работает
Пар.пристр. с множ. β _n	(9)	l=3, a _i =2cost _i , b _i =-2sint _i , eps=10 ⁻⁵	45 итераций
Параллельной пристрелки	(10)	l=2, a _i =16sint _i , b _i =16cost _i	Не работает
Пар.пристр. с множ. β _n	(10)	l=2, a _i =16sint _i , b _i =16cost _i , eps=10 ⁻⁵	38 итераций
Квазилинеаризации	(10)	x _j ⁰ =sint _j	Не работает
Квазилинеар. с множ. β _n	(10)	x _j ⁰ =sint _j , eps=10 ⁻⁵	10 итераций
Квазилинеаризации	(11)	x _j ⁰ =11cost _j +2	Не работает
Квазилинеар. с множ. β _n	(11)	x _j ⁰ =11cost _j +2, eps=10 ⁻⁵	16 итераций

Как видно из предлагаемой выше таблицы, методы стрельбы, параллельной пристрелки и квазилинеаризации являются неэффективными при данных начальных приближениях. Если же применять стрельбу, параллельную пристрелку и квазилинеаризацию в сочетании с квазиньютоновскими методами, где шаговые длины находятся по различным формулам [1], то методы начинают «работать», при этом скорость сходимости существенно зависит от способа выбора шаговой длины.



В предлагаемом выше окне программы решается существенно нелинейная периодическая задача Дуффинга. Программа позволяет менять вид уравнения, способ регулирования шага, начальное приближение, порядок метода и способ восстановления сеточного решения.

Среди способов восстановления сеточного решения, как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач теории колебаний, наиболее эффективным является метод восстановления решения отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева первого рода. Это связано с тем, что ошибки вычислений на компьютере подчиняются нормальному закону. Тем не менее, требовать точности вычислений большей чем $1e - 10$ по норме невязки нецелесообразно, поскольку может наступить так называемая «разболтка» (приближенные решения начинают хаотически блуждать вокруг точного решения). В приведенной выше таблице приближенные решения получены значительно более грубыми в связи с тем, что при рассмотренных начальных приближениях, которые являлись весьма «плохими», разболтка наступала уже при норме невязки порядка $1e - 5$. Для получения более точного решения целесообразно применять методы более высокого порядка, например, методы локально сходящиеся с кубической скоростью [1].

The screenshot shows a window titled "методы" (methods) with a list of numerical methods on the left and a mathematical formula for method 10 on the right. The formula is:

$$10. \quad x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \quad \beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f'(x_{n-1})\|}{\beta_n \|f'(x_n + \Delta x_n)\|} \right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1} \|f'(x_{n+1})\|^2}{\beta_n \|f'(x_n)\|^2} \cdot \frac{\gamma_n \|f'(x_{n-1})\| \cdot \|f'(x_{n+1})\| \cdot \|f'(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|}{\|f'(x_n)\| \cdot \|f'(x_n + \Delta x_n)\| \cdot \|f'(x_{n+2})\|}, \quad \gamma_0 = \frac{\|f'(x_0 + \Delta x_0)\| \beta_0^2}{\|f'(x_1)\|},$$

$$\|f'(x_{-1})\| = \|f'(x_0)\|.$$

The list of methods includes:

- гамма меняется с шагом(способ I)
- гамма меняется с шагом(способ II)
- гамма меняется с шагом(способ III)
- гамма меняется с шагом(способ IV)
- Ермаков-Калиткин
- Жанлав-Пузынин
- гамма меняется с шагом(способ V)
- гамма меняется с шагом(способ VI)
- гамма меняется с шагом(способ VII)
- гамма меняется с шагом(способ VIII)
- гамма меняется с шагом(способ IX)
- гамма меняется с шагом(способ X)
- гамма меняется с шагом(способ XI)
- гамма меняется с шагом(способ XII)
- способ XIII
- способ XIV
- способ XV
- способ XVI
- способ XVII
- способ XVIII
- способ XIX
- способ XX
- способ XXI
- способ XXII
- ускорение сходимости(24)
- ускорение сходимости(25)
- ускорение сходимости(26)
- ускорение сходимости(27)
- ускорение сходимости(28)
- ускорение сходимости(29)
- ускорение сходимости(30)
- ускорение сходимости(31)

Рассмотренные выше методы, обладая достаточно широкой областью сходимости и локально квадратичной скоростью сходимости, в случае большой размерности нелинейных систем могут потребовать значительных временных затрат для их решения. Предлагаемые в [1] нелокальные методы, локально сходящиеся с кубической скоростью, обладают более узкой областью сходимости, но, как показала вычислительная практика решения существенно нелинейных задач теории колебания, если построить гибридный из нелокальных методов, локально сходящихся с квадратичной скоростью и методов локально сходящихся с кубической скоростью, гибридный алгоритм оказывается существенно эффективнее. Переход может осуществляться при

норме невязки порядка $10^{-1} \div 10^{-2}$. В предлагаемом ниже окне программы показана работа «гибрида». Как видно из окна программы, начальное приближение может быть достаточно «плохим», и тогда на первом этапе мы применяем нелокальный квазиньютоновский метод, локально сходящийся с квадратичной скоростью. Метод «работает» до тех пор, пока норма невязки на приближенном решении нестановится достаточно малой, например, норма невязки становится порядка $1e-1 - 1e-3$. Далее включается нелокальный, как правило, нерегуляризованный метод третьего порядка. Этот метод позволяет получить достаточно точное приближенное сеточное решение. Норма невязка на этом сеточном решении получается порядка $1e-10 - 1e-13$. После получения такого достаточно точного сеточного решения включается механизм восстановления с помощью сплайн-аппроксимации или аппроксимации рядами Фурье по полиномам Чебышева первого рода. Второй способ аппроксимации, как видно из окна программы, оказывается предпочтительнее.

Form1
Рассматривается уравнение
 $X'' + UX' + VX^3 + SX = F(\cos(t), \sin(t)), X(0) = X(2\pi)$ $U = 0.2$ $V = 1$ $S = 1$

Правая часть $F(\cos(t), \sin(t)) = E \cos(t) + H \sin(t) + G(\text{Acos}(t) + \text{Bsin}(t))^3$
 $E = 50$ $H = 0$ $G = 0$ $A = 0$ $B = 5$

Начальные приближения: $C \cos(t) + D \sin(t)$ Радиус единственности
 $C = 10$ $D = 10$ $q = 0,1$ $0,000466301254152411$

Точность метода НЬЮТОНА $1E-1$
Точность метода 3-ГО ПОРЯДКА $1E-13$
Начальное количество шагов 48

Количество шагов 48
Бета(-1) 1 Бета(0) $1E-1$

НЕЛОК. РЕГУЛЯРИЗ. МЕТОД НЬЮТОНА
Кол-во итераций 36
Норма функции $0,00609784610089848$
Бета 1

МЕТОД 3-го ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ
Кол-во итераций 2
Норма функции $8,50211395273947E-16$
Бета $0,999999997309124$

Аппроксимация
ФУРЬЕ 90 СПЛАЙНЫ 5
Точность аппроксимации
 $2,82349478552357E-8$ $14,9418330277041$

График функции

Найденное решение
 $x[1] = 1,58397195906578$
 $x[2] = 1,8499436667217$
 $x[3] = 2,78957347031581$
 $x[4] = 4,05888642967312$
 $x[5] = 4,8647389747942$
 $x[6] = 4,46880726104952$
 $x[7] = 3,21451998771832$
 $x[8] = 1,9262501199394$
 $x[9] = 1,00381943393614$
 $x[10] = 0,486308251348564$
 $x[11] = 0,293533724407296$
 $x[12] = 0,318240425301736$
 $x[13] = 0,446143101945733$
 $x[14] = 0,561407181377737$
 $x[15] = 0,551060886323436$
 $x[16] = 0,310600763244739$
 $x[17] = -0,252454888379721$
 $x[18] = -1,2165957599522$
 $x[19] = -2,6001289886436$
 $x[20] = -4,14396070943592$
 $x[21] = -5,03272489469843$

Начать работу Продолжить Прервать процесс Выход

Метод конечных разностей также эффективно применяется при решении неперриодических краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве тестового примера может быть рассмотрена краевая задача с полиномиальной правой частью:

$$x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma x^m = f(t), \text{ где } f(t) - \text{полином}$$

$$A_1 x(a) + A_2 x'(a) = A; B_1 x(b) + B_2 x'(b) = B, x \in [a, b]$$

Ниже предлагается скриншот реализации программы решения существенно нелинейной неперриодической задачи с полиномиальной правой частью. При восстановлении полученного приближенного решения, как показала вычислительная практика, целесообразно использовать аппроксимацию кубическими сплайнами или сплайнами пятого порядка. Количество точек разбиения отрезка интегрирования должно быть в пределах 200–500. Значительное увеличение числа точек разбиения

может привести к нежелательному накоплению ошибок округления и счета. Аппроксимацию производных, участвующих в задаче, целесообразно осуществлять достаточно точно. С учетом требуемой точности приближенного решения 7–11 точек достаточно для хорошей аппроксимации первой и второй производной задачи.

В подтверждение всего вышесказанного можно рассмотреть предлагаемое окно программы.

Решение нелинейной краевой задачи Дуффинга

О программе

Решение краевой задачи Дуффинга | Процесс решения СДУ

Уравнение

Правая часть
 периодическая многочлен

Общий вид
 $x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m$
 $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 0$ $m = 4$ $p = 8$

a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
2	0	0	0	0	0	0	0	1

Решаемое уравнение: $x'' + x^4 = 2 + t^8$

Отрезок
 $a = 0$ $b = 2$ $n = 250$ $h = 0,008$
 Число узлов для аппроксимации производных = 11

Краевые условия
 $a_1 x(a) + b_1 x'(a) = A_1$ $a_1 = 1$ $b_1 = 0$ $A_1 = 0$
 $a_2 x(b) + b_2 x'(b) = A_2$ $a_2 = 1$ $b_2 = 1$ $A_2 = 8$

Метод решения СДУ
 Регуляриз. метод Ермакова-Калиткина
 Регуляриз. модифицир. метод Ньютона
 Модифицированный метод Ньютона
 Метод Ермакова-Калиткина
 Метод Жанлава-Пузырина

Аппроксимация
 ряд Фурье сплайн
 Гармоники = 16 Число узлов = 500 Порядок сплайна = 5
 Ошибка (Фурье) = 1,62550E+04
 Ошибка (сплайн) = 8,08346E-12

Решение Количество итераций = 83
 Норма невязки = 7,19688E-14

t=0,0	x[0]=0,0
t=0,008	x[1]=0,000063999999999998
t=0,016	x[2]=0,000259999999999995
t=0,024	x[3]=0,000575999999999993
t=0,032	x[4]=0,001023999999999991
t=0,04	x[5]=0,001599999999999988
t=0,048	x[6]=0,002303999999999986
t=0,056	x[7]=0,003135999999999983
t=0,064	x[8]=0,004095999999999981
t=0,072	x[9]=0,005183999999999979
t=0,08	x[10]=0,006399999999999976
t=0,088	x[11]=0,007743999999999974
t=0,096	x[12]=0,009215999999999971
t=0,104	x[13]=0,010815999999999969
t=0,112	x[14]=0,012543999999999967
t=0,12	x[15]=0,014399999999999964
t=0,128	x[16]=0,016383999999999962
t=0,136	x[17]=0,01849599999999996
t=0,144	x[18]=0,020735999999999957
t=0,152	x[19]=0,023103999999999955
t=0,16	x[20]=0,025599999999999952
t=0,168	x[21]=0,02822399999999995
t=0,176	x[22]=0,030975999999999948
t=0,184	x[23]=0,033859999999999945
t=0,192	x[24]=0,036863999999999943
t=0,2	x[25]=0,03999999999999994
t=0,208	x[26]=0,043263999999999938
t=0,216	x[27]=0,046655999999999935
t=0,224	x[28]=0,050175999999999933
t=0,232	x[29]=0,053823999999999931
t=0,24	x[30]=0,057599999999999928
t=0,248	x[31]=0,061503999999999926
t=0,256	x[32]=0,065535999999999923
t=0,264	x[33]=0,069695999999999921

Старт | Стоп | Формулы дифференцирования | График не выводить результаты

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005 – 186 С.

V.M. Madorski On Approximate Solution of Non-linear Differential Problem of Second Order

The ways of approximate solution of non-linear differential problems of second order are considered in the article. The method of finite difference and quasiNewton methods are used to get approximate grid solution. Grid solution is restored with the help of spline-approximate and the segment of Furie by Chebushov's polynomial

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.10.13

УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве для решения операторных уравнений первого рода с неограниченным линейным и самосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Изучен случай неединственного решения уравнения. Показано, что в этом случае метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с неограниченным линейным и самосопряженным оператором A , для которого нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если точное решение уравнения (1) всё же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы [1–6]. В настоящей работе предлагается неявный итерационный метод

$$(A^{2k} + B)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y, \quad x_0 = 0, k \in N. \quad (2)$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный положительный и самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE, b > 0, E$ – тождественный оператор. Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ , т.е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$(A^2 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3)$$

2. Сходимость метода в энергетической норме. Сходимость методов (2) и (3) в сходной норме пространства H была изучена в статье [7]. Там показано, что метод (3) сходится при условии $b > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня

погрешности δ так, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, в [7] получены априорные оценки погрешности метода и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ (см. [9–10]). Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства.

Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}B^n(A^{2k} + B)^{-n}y = B^n(A^{2k} + B)^{-n}x$.

Как было показано в [7], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки требовалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, где E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(AB^n(A^{2k} + B)^{-n}x, B^n(A^{2k} + B)^{-n}x \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдём максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda \left(\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \right)^{2n}$ при $\lambda \in (-\infty; +\infty)$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $2s = 1$

функций, оцененных в [7]. Там показано, что при условии $b > 0$ $\max_{\lambda \in (-\infty; +\infty)} f(\lambda) \leq \left(\frac{b}{8kn} \right)^{\frac{1}{2k}}$.

Следовательно, справедлива оценка $\|x - x_n\|_A^2 \leq \left(\frac{b}{8kn} \right)^{\frac{1}{2k}} \|x\|^2$. Отсюда

$\|x - x_n\|_A \leq \left(\frac{b}{8kn} \right)^{\frac{1}{4k}} \|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $2s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [7], справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n} \right] (y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta)$. Обозначим через

$g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right]^2$ подынтегральную функцию, а через

$g_1(x) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right]$, тогда $g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была

оценена в [7], где показано, что при условии $b > 0$ $g_1(\lambda) \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}$. При $b > 0$ имеем

$$\frac{b}{\lambda^2 + b} \leq 1 \quad \text{для } \forall \lambda \in (-\infty; +\infty), \quad \text{поэтому } 1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \leq 1. \quad \text{Отсюда } g(\lambda) \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Таким образом, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta^2$, следовательно, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq (2k)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}} \delta$,

$n \geq 1$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + (2k)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}} \delta$ и $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{4k}} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Итак, доказана

Теорема 1. При условии $b > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{\frac{1}{4k}} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{b}{8kn}\right)^{\frac{1}{4k}} \|x\| + (2k)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}} \delta. \quad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по n . Для этого при заданном δ найдём такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = b 2^{\frac{3+2k}{2}} k^{\frac{1+2k}{2}} \|x\|^{2k} \delta^{-2k}. \quad (6)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдём её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{\frac{10k-3}{8k}} k^{\frac{2k-1}{8k}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии $b > 0$ в энергетической норме имеет вид (7) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (6).

Замечание 1. Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра b . Но n_{opt} зависит от b и, поскольку $b > 0$, то за счет его выбора можно получить $n_{opt} = 1$, т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом

шаге итераций. Для этого достаточно взять $b_{opt} = 2^{\frac{3+2k}{2}} k^{\frac{1+2k}{2}} \|x\|^{-2k} \delta^{2k}$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε ($0 < \varepsilon < \|A\|$) было $P_\varepsilon x = 0$,

$P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - B^n (A^{2k} + B)^{-n} \right] y_\delta$, то для

выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H и, следовательно, для сходимости в исходной норме гильбертова пространства H не требуется истокообразной представимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^* Ax = A^* y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left((A^* A)^{2k} + B \right) x_{n+1,\delta} = B x_{n,\delta} + (A^* A)^{2k-1} A^* y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N.$$

3. Сходимость метода в случае неединственного решения. Ниже считаем, что нуль является собственным значением оператора A , следовательно, уравнение (1) имеет неединственное решение.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$, $y \in H$, $b > 0$, тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последующем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение.

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим $A(A^{2k} + B)x_n = ABx_{n-1} + A^{2k}y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим $(A^{2k} + B)(Ax_n - \Pi(A)y) = B(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(A^{2k} + B)v_n = Bv_{n-1}$. Отсюда $v_n = B(A^{2k} + B)^{-1}v_{n-1}$, следовательно, $v_n = B^n(A^{2k} + B)^{-n}v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е.

$(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $b > 0$, то $\|B(A^{2k} + B)^{-1}\| \leq 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|B^n(A^{2k} + B)^{-n} v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь $\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \rightarrow 0$, откуда $Av_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ (см. [8]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, значит, $\Pi(A)y \in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} (A^{2k} + B)x_n &= Bx_{n-1} + A^{2k-1} \Pi(A)y = Bx_{n-1} + A^{2k} x^* = \\ &= (A^{2k} + B)x_{n-1} - A^{2k} x_{n-1} + A^{2k} x^* = (A^{2k} + B)x_{n-1} - A^{2k} (x_{n-1} - x^*). \end{aligned}$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + A^{2k} (A^{2k} + B)^{-1} (x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два:

$$\begin{aligned} P(A)x_n &= P(A)x_{n-1} + (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0, \\ \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} \Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} + \\ &+ (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} [\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}] = \Pi(A)x_{n-1} + (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} [x^* - \Pi(A)x_{n-1}], \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} [x^* - \Pi(A)x_{n-1}]$ получим $\omega_n = \omega_{n-1} - (A^{2k} + B)^{-1} A^{2k} \omega_{n-1} = B(A^{2k} + B)^{-1} \omega_{n-1}$ и, аналогично v_n , можно показать, что $\omega_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т.е. итерационный процесс (2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М: Наука, 1986. – 178с.
3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Бакушинский, А.Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А.Б. Бакушинский, В.Н. Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181 – 185.
6. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рукицкий, В.Я. Стеценко. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
7. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166 – 176.
9. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I – го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Известия АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1976. – № 2. – С. 19 – 23.
10. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37 – 42.

O.V. Matysik On the Approximate Solution of Linear Equations with Unbounded Operator in the Hilbert Space

In the Hilbert space for the solution of operator equations of the first kind with unlimited linear and self-adjoint operators to offer an implicit iterative method. The case of nonunique solutions of the equation. It is shown that in this case the method converges to the solution with a minimum norm. To prove the convergence of the proposed method in the energy norm of the Hilbert space, apriori error estimates. The use of the energy norm can make the method effective and when there is no information about sourcewise representation of the exact solution of the equation.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.13

УДК 517.923

*И.Н. Мельникова, Д.Ю. Куцин***НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В настоящей работе найдены условия, с помощью которых можно выделить классы систем трех уравнений первого порядка, не имеющих решений с бесконечными компонентами. Эта проблема классификации не нова, однако, для такого вида систем еще далека от завершения. Рассматриваемый метод позволяет выписывать условия отсутствия подвижных особых точек в решениях таких систем и проверять их сравнительно легко на практике.

Рассмотрим систему вида

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(z)x_1^{p_{11}}x_2^{p_{12}}x_3^{p_{13}} + P_1^1(x_1, x_2, x_3, z) \\ p_2(z)x_1^{q_{21}}x_2^{q_{22}}x_3^{q_{23}} + Q_2^1(x_1, x_2, x_3, z) \\ p_3(z)x_1^{q_{31}}x_2^{q_{32}}x_3^{q_{33}} + Q_3^1(x_1, x_2, x_3, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_i(x_1, x_2, x_3, z) \\ Q_i(x_1, x_2, x_3, z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где x_1, x_2, x_3, z – комплексные переменные, $P_i, Q_i (i=1, 2, 3)$ – полиномы относительно x_1, x_2, x_3 , коэффициенты которых являются аналитическими функциями относительно z . Через p_{ij} и q_{ij} ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$) обозначены степени многочленов P_i и $Q_i (i=1, 2, 3)$ по x_1, x_2, x_3 , не содержащиеся в P_i^1 и $Q_i^1 (i=1, 2, 3)$. Изучим для нее условия существования решений со свойством

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3(z) \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0. \quad (2)$$

Найдем условия, при выполнении которых система (1) имеет единственное решение с подвижными полярными особыми точками или вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все компоненты решения стремились бы к бесконечности.

С помощью замены $x_i = \frac{1}{u_i}$ ($i=1, 2, 3$), сведем систему (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= -\frac{p_1(z) + (\dots)}{q_1(z) + (\dots)} u_1^{-r_{11}+2} u_2^{-r_{12}} u_3^{-r_{13}}, \\ \frac{du_2}{dz} &= -\frac{p_2(z) + (\dots)}{q_2(z) + (\dots)} u_1^{-r_{21}} u_2^{-r_{22}+2} u_3^{-r_{23}}, \\ \frac{du_3}{dz} &= -\frac{p_3(z) + (\dots)}{q_3(z) + (\dots)} u_1^{-r_{31}} u_2^{-r_{32}} u_3^{-r_{33}+2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r_{ij} = p_{ij} - q_{ij}$ ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$).

Наряду с системой (3) будем рассматривать и системы:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du_1} &= -\frac{q_1(z) + (\dots)}{p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-2} u_2^{r_{12}} u_3^{r_{13}}, \\ \frac{du_2}{du_1} &= -\frac{p_2(z)q_1(z) + (\dots)}{q_2(z)p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-r_{21}-2} u_2^{r_{12}-r_{22}+2} u_3^{r_{13}-r_{23}}, \\ \frac{du_3}{du_1} &= -\frac{p_3(z)q_1(z) + (\dots)}{q_3(z)p_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{11}-r_{31}-2} u_2^{r_{12}-r_{32}} u_3^{r_{13}-r_{33}+2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{dz}{du_2} = -\frac{q_2(z) + (\dots)}{p_2(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}} u_2^{r_{22}-2} u_3^{r_{23}},$$

$$\frac{du_1}{du_2} = -\frac{q_2(z)p_1(z) + (\dots)}{p_2(z)q_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}-r_{11}+2} u_2^{r_{22}-r_{12}-2} u_3^{r_{23}-r_{13}}, \quad (5)$$

$$\frac{du_3}{du_2} = -\frac{p_3(z)q_2(z) + (\dots)}{q_3(z)p_2(z) + (\dots)} u_1^{r_{21}-r_{31}} u_2^{r_{22}-r_{32}-2} u_3^{r_{23}-r_{33}+2},$$

$$\frac{dz}{du_3} = -\frac{q_3(z) + (\dots)}{p_3(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}} u_2^{r_{32}} u_3^{r_{33}-2}, \quad (6)$$

$$\frac{du_1}{du_3} = -\frac{q_3(z)p_1(z) + (\dots)}{p_3(z)q_1(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}-r_{11}+2} u_2^{r_{32}-r_{12}} u_3^{r_{33}-r_{13}-2},$$

$$\frac{du_2}{du_3} = -\frac{p_2(z)q_3(z) + (\dots)}{q_2(z)p_3(z) + (\dots)} u_1^{r_{31}-r_{21}} u_2^{r_{32}-r_{22}+2} u_3^{r_{33}-r_{23}-2}.$$

Через (...) обозначены функции, которые обращаются в ноль при любом из $u_i = 0 (i = 1, 2, 3)$.

С помощью метода, основанного на голоморфности правых частей указанных систем дифференциальных уравнений, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 1. При выполнении условий

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 2, r_{21} = 0, r_{22} = 2, r_{23} = 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} = 2, \quad (7)$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 2, r_{21} \leq 0, r_{22} = 2, r_{23} \leq 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \quad (8)$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{21} \leq 0, r_{22} = 2, r_{23} = 0, r_{31} = 0, r_{32} = 0, r_{33} = 2, \quad (9)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого

$$q_1(z_0)q_2(z_0)q_3(z_0) \neq 0, \quad (10)$$

система (3) имеет единственное решение

$$x_i = f_i(z), (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

со свойством

$$f_1(z) \rightarrow \infty, \quad f_2(z) \rightarrow \infty, \quad f_3(z) \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{-m+i} \quad (a_0 \neq 0, m > 0), \\ x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{-n+i} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \\ x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{-l+i} \quad (c_0 \neq 0, l > 0), \end{aligned} \quad (12)$$

Точка z_0 для функции этого решения является полюсом.

Доказательство. При условии (7)–(10) правые части системы (3) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3 и z в окрестности точки $(0, 0, 0, z_0)$. Тогда по теореме Коши [1,3] эта система имеет единственное голоморфное решение в окрестности точки z_0 решение $u_i(z) (i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z) = 0$. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma} (z - z_0)^{m+\sigma} \quad (a_0 \neq 0, m > 0), \\
 u_2 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{\sigma} (z - z_0)^{n+\sigma} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \\
 u_3 &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{\sigma} (z - z_0)^{l+\sigma} \quad (c_0 \neq 0, l > 0).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Возвращаясь от системы (3) к системе (1), получим для нее решение (11) со свойством (2). Существование у системы (1) решения (11) со свойством (2) доказано.

Покажем единственность такого решения. Пусть $x_i = \varphi_i(z) (i = 1, 2, 3)$ – любое решение системы (1), обладающее свойством $\varphi_i(z) \rightarrow \infty (i = 1, 2, 3)$ при $z \rightarrow z_0$. Тогда решение системы (3)

$$x_i = \frac{1}{\varphi_i(z)} \equiv \Phi_i(z) \quad (i = 1, 2, 3)
 \tag{14}$$

будет обладать свойством $\Phi_i(z) \rightarrow 0 (i = 1, 2, 3)$ при $z \rightarrow z_0$. По теореме Пенлеве [1,2] это означает, что решение (14) системы (3) совпадает в окрестности точки z_0 с голоморфным решением (13) полученным по теореме Коши. Тогда решение $x_i = \varphi_i(z) (i = 1, 2, 3)$ системы (1) совпадает с решением (12), что и доказывает единственность решения.

Теорема 2 При выполнении условий

$$r_{11} < 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 2, r_{21} \leq 0, r_{22} \leq 2, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} \leq 2,
 \tag{15}$$

или

$$r_{11} \leq 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{21} \leq 0, r_{22} \leq 2, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} \leq 2,
 \tag{16}$$

или

$$r_{11} \leq 2, r_{12} \leq 0, r_{13} \leq 0, r_{21} \leq 0, r_{22} \leq 2, r_{23} \leq 0, r_{31} \leq 0, r_{32} \leq 0, r_{33} < 2,
 \tag{17}$$

или

$$r_{11} = 2, r_{12} < 0, r_{13} < 0, r_{21} < 0, r_{22} = 2, r_{23} < 0, r_{31} < 0, r_{32} < 0, r_{33} = 2,
 \tag{18}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (10), система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство. Правые части системы (3) при выполнении условий (15)–(18) и (10) являются однозначными аналитическими функциями от $u_i (i = 1, 2, 3)$ и z в окрестности точки $(0, 0, 0, z)$. Тогда по теореме Коши существует единственное решение $u_i(z) (i = 1, 2, 3)$ системы (3), голоморфное в окрестности точки z_0 и удовлетворяющее начальным условиям $u_i(z) = 0$. Очевидно, что хотя бы одна компонента этого решения будет тождественным нулем. Следовательно, система (1) не будет иметь решений (11), обладающих свойством (2).

Теорема 3. При выполнении условий

$$\begin{aligned}
 r_{11} &\geq \max \{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max \{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max \{0, r_{23}\}, \\
 r_{22} &= r_{12} + 2, \quad r_{33} = r_{13} + 2,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место

$$p_1(z_0)q_2(z_0)g_3(z_0) \neq 0.
 \tag{20}$$

Система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-1)/m} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\
 x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-n)/m} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\
 x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-l)/m} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Для всех функций этого решения z_0 является полюсом, как правило, критическим.

Доказательство. Правые части системы (4) при выполнении условий (18) и (19) представляют собой однозначные аналитические функции относительно u_1, u_2, u_3, z в окрестности точки $(0, 0, 0, z_0)$. Следовательно, система (4) имеет по теореме Коши единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1)$, голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$z(0) = z_0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0. \tag{22}$$

Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 z(u_1) &= z_0 + \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma} u_1^{\sigma+m} \quad (a_0 \neq 0, m > 0), \\
 u_2(u_1) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{\sigma} u_1^{\sigma+n} \quad (b_0 \neq 0, n > 0), \\
 u_3(u_1) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{\sigma} u_1^{\sigma+l} \quad (c_0 \neq 0, l > 0).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Возвращаясь от системы (4) к системе (1), получим для последней решение (11), обладающее свойством (2) и имеющее вид (21).

Покажем единственность этого решения.

Пусть $x_i = \varphi_i(z) (i=1, 2, 3)$ – любое решение системы (1) со свойством $\varphi_i(z) \rightarrow \infty (i=1, 2, 3)$ при $z \rightarrow z_0$. Очевидно, что решение (14) системы (4) при этом будет обладать свойством

$$\Phi_i(z) \rightarrow 0 \quad (i=1, 2, 3) \text{ при } z \rightarrow z_0. \tag{24}$$

Тогда в плоскости переменной u_1 существует путь G , оканчивающийся в точке $u_1 = 0$, что решение

$$z = \Phi^{-1}_1(u_1) \equiv \psi(u_1), u_j = \Phi_j(\psi(u_1)) \equiv \tau_j(u_1) (j=2, 3). \tag{25}$$

Системы (4) будет обладать свойством

$$\psi(u_1) \rightarrow z_0, \tau_j(u_1) \rightarrow 0 (j=2, 3) \text{ при } u_1 \rightarrow 0 \tag{26}$$

вдоль пути G . По теореме Пенлеве это означает, что решение (25) системы (4) совпадает в окрестности точки $u_1 = 0$ с голоморфным решением (23), полученным по теореме Коши и определяемым начальными условиями (22). В этом случае решение $\varphi_i(z) (i=1, 2, 3)$ системы (1) совпадает с решением (21), что и требовалось доказать.

Теорема 4. При выполнении условий

$$\begin{aligned}
 r_{11} &\geq \max\{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max\{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max\{0, r_{23}\}, \\
 r_{22} &< r_{12} + 2, \quad r_{33} \leq r_{13} + 2,
 \end{aligned} \tag{27}$$

или

$$r_{11} \geq \max \{2, r_{21} + 2, r_{31} + 2\}, \quad r_{12} \geq \max \{0, r_{32}\}, \quad r_{13} \geq \max \{0, r_{23}\}, \quad (28)$$

$$r_{22} \leq r_{12} + 2, \quad r_{33} < r_{13} + 2,$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (20), система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство. Правые части системы (3) при выполнении условий (27) или (28) и (20) представляют собой однозначные аналитические функции от u_1, u_2, u_3, z в окрестности точки $(0, 0, 0, z_0)$. Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z(u_1), u_2(u_1), u_3(u_1)$, голоморфное относительно u_1 в окрестности точки $u_1 = 0$ и удовлетворяющее начальным условиям (22). У этого решения, очевидно, функции $u_2(u_1) \equiv 0$ или $u_3(u_1) \equiv 0$, или обе функции одновременно представляют собой тождественный ноль. Отсюда и получается заключение теоремы.

Теорема 5. При выполнении условий

$$r_{22} \geq \max \{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, \quad r_{21} \geq \max \{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max \{0, r_{12}\}, \quad (29)$$

$$r_{11} = r_{21} + 2, \quad r_{33} = r_{23} + 2,$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место

$$p_2(z_0)q_1(z_0)g_3(z_0) \neq 0 \quad (30)$$

система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-m)/n} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0),$$

$$x_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-1)/n} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \quad (31)$$

$$x_3 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-l)/n} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0).$$

Для всех функций этого решения точки z_0 являются полюсом, как правило, критическим.

Теорема 6. При выполнении условий

$$r_{21} \geq \max \{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, \quad r_{21} \geq \max \{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max \{0, r_{12}\}, \quad (37)$$

$$r_{11} < r_{21} + 2, \quad r_{33} \leq r_{23} + 2,$$

или

$$r_{21} \geq \max \{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, \quad r_{21} \geq \max \{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max \{0, r_{12}\}, \quad (38)$$

$$r_{11} \leq r_{21} + 2, \quad r_{33} < r_{23} + 2,$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (30), система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Теорема 7. При выполнении условий

$$r_{33} \geq \max \{2, r_{13} + 2, r_{23} + 2\}, \quad r_{31} \geq \max \{0, r_{21}\}, \quad r_{32} \geq \max \{0, r_{12}\}, \quad (39)$$

$$r_{11} = r_{31} + 2, \quad r_{11} = r_{32} + 2,$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место

$$p_3(z_0)q_1(z_0)g_2(z_0) \neq 0 \quad (40)$$

система (1) имеет единственное решение (11) со свойством (2). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{(i-m)/l} \quad (\alpha_0 \neq 0, m > 0), \\
 x_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{(i-n)/l} \quad (\beta_0 \neq 0, n > 0), \\
 x_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (z - z_0)^{(i-l)/l} \quad (\gamma_0 \neq 0, l > 0),
 \end{aligned} \tag{41}$$

Для всех функций этого решения точка z_0 являются полюсом, как правило, критическим.

Теорема 8. При выполнении условий

$$\begin{aligned}
 r_{33} \geq \max \{2, r_{13} + 2, r_{23} + 2\}, \quad r_{31} \geq \max \{0, r_{21}\}, \quad r_{32} \geq \max \{0, r_{12}\}, \\
 r_{11} < r_{31} + 2, \quad r_{22} \leq r_{32} + 2,
 \end{aligned} \tag{42}$$

или

$$\begin{aligned}
 r_{21} \geq \max \{2, r_{12} + 2, r_{32} + 2\}, \quad r_{21} \geq \max \{0, r_{31}\}, \quad r_{23} \geq \max \{0, r_{12}\}, \\
 r_{11} \leq r_{21} + 2, \quad r_{33} < r_{23} + 2,
 \end{aligned} \tag{43}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место (40), система (1) не имеет решений, обладающих свойством (2) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Доказательство теорем 5–8 основывается на голоморфности [1,3] в окрестности точки $(0,0,0,z_0)$ правых частей систем (5)–(6) и проводится в полной аналогии с доказательствами теорем 3 и 4.

Точки $z_0 \in D$, в которых

- 1) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0$,
- 2) $g_1(z_0)g_2(z_0)g_3(z_0) = 0$,
- 3) $p_2(z_0)g_1(z_0)g_3(z_0) = 0$,
- 4) $p_3(z_0)g_1(z_0)g_2(z_0) = 0$

отнесем к подвижным точкам системы (1). Тогда из ранее изложенного следует, что при выполнении любого из условий (7)–(9),(19),(29),(39), (42) система (1) имеет единственное решение, для всех функций которого точки z_0 является подвижным полюсом. А при выполнении любого из условий (13)–(16),(25),(26),(31),(32),(36),(37) система (2) вовсе не имеет решений с подвижной особой точкой, при приближении к которой хотя бы по некоторому пути все функции решений стремились бы к бесконечности.

Таким образом, полученные условия выделяют классы систем вида (1), не имеющих решений (11) со свойством (2) при $z \rightarrow z_0$. Проведенные исследования позволяют дать более полную характеристику аналитических свойств решений системы трех дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными

правыми частями вида $\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3, z)}{Q_i(x_1, x_2, x_3, z)}$, $i = (1, 2, 3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений/ В.В.Голубев. – М.:ГИТТЛ,1950. – 436с.

2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.

3. Мельникова, И.Н. К вопросу о классификации подвижных особых точек решений дифференциальных систем / И.Н. Мельникова // Совершенствование профессионального психолого-педагогического мастерства в условиях непрерывного образования : сб. научн. ст. – БГПУ им. М. Танка, Минск, 1991.– С. 191–196 .

I.N. Melnikova, D.Y. Kutsin Some Features of the Solution of the System of Three Differential Equations

In the article the conditions are found which help to distinguish the system class of three equations of the first order which do not have solutions with infinite components. This classification problem is not new; nevertheless, it is far from completion for these types of systems. The considered method allows drawing the conditions of the absence of motile peculiar points in the solution of such systems and checking them is quite easy in practice.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.10.13

УДК 517.518.2

А.Н. Нестеренко**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРЕТЬЕГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ**

В работе получены новые неравенства для третьих равномерных модулей непрерывности функций, равномерно непрерывных на оси.

Пусть $UC(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ рассматриваем ее k -ый модуль непрерывности при $k=1$, $k=2$ и $k=3$:

$$\omega_k(f, t) = \sup \left\{ \left| \Delta_h^k(f, x) \right| : x \in \mathbb{R}, 0 < h \leq t \right\}, \quad t > 0,$$

где $\Delta_h^k(f, x)$ – k -ая конечная разность функции f в точке $x \in \mathbb{R}$ с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^1(f, x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2(f, x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta_h^3(f, x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Отметим, что свойства модулей непрерывности функций, заданных на \mathbb{R} , в целом аналогичны свойствам модулей непрерывности функций, заданных на отрезке, которые детально изложены, например, в монографиях [1], [2].

Для модулей непрерывности первого порядка хорошо известен критерий того, что данная функция является модулем непрерывности некоторой функции ([1] – [3]). Для модулей непрерывности старших порядков такой критерий до сих пор не получен. В связи с этим представляет интерес неравенство для второго модуля непрерывности, установленное С.В. Конягиным [4]:

$$2\omega_2(f, T) \leq \omega_2(f, T+t) + \omega_2(f, T-t) + 2\omega_2(f, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f \in UC(\mathbb{R}).$$

В работе [5] доказан аналог неравенства С.В. Конягина для третьего модуля непрерывности в следующей форме:

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+1)u) + \omega_3(f, (N-1)u) + 6N\omega_3(f, u), \quad u > 0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В настоящей работе получены некоторые аналоги и обобщения этого неравенства.

Лемма 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k < N$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ верно тождество

$$\begin{aligned} & \Delta_{(N+k)h}^3(f, x-kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x+kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) = \\ & = \Delta_{kh}^2(f, x+3Nh) + 2\Delta_{kh}^2(f, x+(3N-k)h) + \Delta_{kh}^2(f, x+(3N-2k)h) - \\ & \quad - 3\Delta_{kh}^2(f, x+(2N-k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x-kh). \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая определение третьей конечной разности и выражение для второй конечной разности с шагом $2h$ через такую же разность с шагом h [1, с. 158], получаем

$$\begin{aligned} & \Delta_{(N+k)h}^3(f, x-kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x+kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) = \\ & = f(x+(3N+2k)h) - 3f(x+(2N+k)h) + 3f(x+Nh) - f(x-kh) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+f(x+(3N-2k)h)-3f(x+(2N-k)h)+3f(x+Nh)-f(x+kh)- \\
 &\quad -2f(x+3Nh)+6f(x+2Nh)-6f(x+Nh)+2f(x)= \\
 &= \Delta_{2kh}^2(f, x+(3N-2k)h)-3\Delta_{kh}^2(f, x+(2N-k)h)-\Delta_{kh}^2(f, x-kh)= \\
 &= \Delta_{kh}^2(f, x+3Nh)+2\Delta_{kh}^2(f, x+(3N-k)h)+\Delta_h^2(f, x+(3N-2k)h)- \\
 &\quad -3\Delta_{kh}^2(f, x+(2N-k)h)-\Delta_{kh}^2(f, x-kh).
 \end{aligned}$$

Лемма 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $u > 0$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 8\omega_2(f, ku).$$

Доказательство следует из тождества леммы 1 и очевидного неравенства

$$|\Delta_h^2(f, x)| \leq \omega_2(f, u), \quad 0 < h \leq u, \quad x \in \mathbb{R},$$

при этом случай $N = k$ тривиален.

Теорема 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T+t) + \omega_3(f, T-t) + 8\omega_2(f, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Далее через $[a]$ обозначим целую часть числа $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для заданных чисел $T \geq 0$ и $t \geq 0$, $t \leq T$, положим $N_n := [nT]$, $k_n := [nt]$, $n \geq 1$. Применим неравенство леммы 2 к числам N_n , k_n и $u = \frac{1}{n}$ и перейдем в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Учитывая непрерывность функции ω_3 на промежутке $[0, +\infty)$ [1, с. 162], а также соотношения $N_n \frac{1}{n} \rightarrow T$, $n \rightarrow \infty$, и $k_n \frac{1}{n} \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$, получим доказываемое неравенство.

Следствие 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T+t) + \omega_3(f, T-t) + 16\omega_1(f, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство следует из теоремы 1 и неравенства [1, с. 164]

$$\omega_2(f, u) \leq 2\omega_1(f, u), \quad u \geq 0.$$

Теорема 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $u > 0$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 6Nk^2\omega_3(f, u).$$

Доказательство. Пусть $h \in (0, u]$ – произвольное фиксированное число. Рассматривая третью конечную разность как разность вторых конечных разностей, для произвольных $l \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
 &|\Delta_h^2(f, x+(l+m)h) - \Delta_h^2(f, x+lh)| = \\
 &\quad \left| \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta_h^2(f, x+(l+k+1)h) - \Delta_h^2(f, x+(l+k)h)) \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_h^3(f, x+(l+k)h) \right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |\Delta_h^3(f, x+(l+k)h)| \leq \omega_3(f, u)m.
 \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку и выражение для второй конечной разности с шагом kh через такую же разность с шагом h [1, с. 158], для произвольных $l \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_{kh}^2(f, x + (l+m)h) - \Delta_{kh}^2(f, x + lh) \right| = \\ & \left| \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2(f, x + (i+j+l+m)h) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2(f, x + (i+j+l)h) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_3(f, u) m = mk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Применим это неравенство для оценки правой части тождества леммы 1:

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_{kh}^2(f, x + 3Nh) + 2\Delta_{kh}^2(f, x + (3N-k)h) + \Delta_h^2(f, x + (3N-2k)h) - \right. \\ & \quad \left. - 3\Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x - kh) \right| = \\ & = \left| \Delta_{kh}^2(f, x + 3Nh) - \Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h) + 2(\Delta_{kh}^2(f, x + (3N-k)h) - \right. \\ & \quad \left. - \Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h)) + \Delta_{kh}^2(f, x + (3N-2k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x - kh) \right| \leq \\ & \leq (N+k+2N+3N-k)k^2 \omega_3(f, u) = 6Nk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) \right| \leq 6Nk^2 \omega_3(f, u),$$

откуда

$$\begin{aligned} 2 \left| \Delta_{Nh}^3(f, x) \right| & \leq \left| \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) \right| + \left| \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) \right| + 6Nk^2 \omega_3(f, u) \leq \\ & \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 6Nk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Если h пробегает весь промежуток $(0, u]$, то Nh пробегает весь промежуток $(0, Nu]$, поэтому из полученного неравенства и определения точной верхней грани и следует утверждение теоремы 2.

Следствие 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $0 < t \leq T$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T + (k+1)t) + \omega_3(f, T - (k-1)t) + 6 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) k^2 \omega_3(f, t),$$

в частности, при $k = 2$

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T + 3t) + \omega_3(f, T - t) + 24 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) \omega_3(f, t).$$

Доказательство. Для произвольных $0 < t \leq T$ положим $N := \left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil$. Тогда

$Nt \leq T < (N+1)t$, поэтому

$$\begin{aligned} 2\omega_3(f, T) & \leq 2\omega_3(f, (N+1)t) \leq \\ & \leq \omega_3(f, (N+1+k)t) + \omega_3(f, (N+1-k)t) + 6(N+1)2^k \omega_3(f, t) \leq \\ & \leq \omega_3(f, T + (k+1)t) + \omega_3(f, T - (k-1)t) + 6 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) 2^k \omega_3(f, t). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.

2. Шевчук, И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А. Шевчук. – К. : Наукова думка, 1992. – 224 с.
3. Никольский, С.М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // ДАН СССР. – 1946. – Т. 52, № 3. – С. 191 – 194.
4. Конягин, С.В. О вторых модулях непрерывности / С.В. Конягин // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 1–3.
5. Безкрила, С. І. Про треті модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Украин. матем. журн. (в печати).

O.N. Nesterenko Some Properties of the Third Modulus of Continuity

We obtain new inequalities for third uniform modulus of continuity of functions uniformly continuous on an axis.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.13

УДК 519.6+517.983.54

В.Ф. Савчук

К ВОПРОСУ ОБ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве изучается неявный метод итераций решения операторных уравнений I рода с неотрицательным самосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае апостериорного выбора параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F . Решается уравнение

$$Ax = y. \quad (1)$$

Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением.

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha A^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η , $\|A - A_\eta\| \leq \eta$. Тогда метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A_\eta^k)x_{(n+1)(\delta, \eta)} = x_{n(\delta, \eta)} + \alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_{0(\delta, \eta)} = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Предполагаем, что $0 \in \sigma(A_\eta)$ и $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$

Случай приближенной правой части уравнения y_δ и точного оператора A для метода (2) изучен в работе [1]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи (1), доказана сходимость метода (2) в энергетической норме гильбертова пространства. Докажем сходимость метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим оценку погрешности метода и оценку для момента останова. Подобные вопросы изучались в [2], но только для других методов.

Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η , но принадлежит его спектру.

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left. \begin{aligned} &\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \\ &\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \varepsilon = b(\delta + \|x^*\|_\eta), b > 1. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3).

3. Случай самосопряжённой задачи. Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (3) запишем в виде:

$$x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta, \quad (3^1)$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^k)^n} \right] \geq 0$. В [1] получены следующие условия для функций $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \gamma = k\alpha^{1/k}, (n > 0), \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s}, (n > 0), 0 < s < \infty, \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha} \right)^{s/k}, \quad (6)$$

(здесь s – степень истокорпредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \gamma_0 = 1, (n > 0), \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, и выполнено условие (6) с $s_0 > 1$. Тогда для $G_{m\eta} = E - A_\eta g_m(A_\eta)$ справедливо соотношение для $\forall v \in \overline{R(A)}$:

$$n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \quad (9)$$

Доказательство

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза [3, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$

ограничены не зависящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\|$ и по условию (6) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\| = n^{1/k} \|A_\eta (E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{1/k} \gamma_1 n^{-1/k} = \gamma_1, \quad (n > 0, \eta > 0).$$

Для элементов вида $v = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (6) имеем

$$\begin{aligned} n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| &= n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A\omega\| \leq n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} (A - A_\eta)\omega\| + \\ &+ n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta \omega\| \leq \left(\gamma_1 \eta + n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^2 |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|\omega\| \leq \\ &\leq (\gamma_1 \eta + n^{1/k} \gamma_2 n^{-2/k}) \|\omega\| = (\gamma_1 \eta + \gamma_2 n^{-1/k}) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По теореме Банаха-Штейнгауза $n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, и выполнены условия (6) и (8). Если для некоторых $v_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \leq \bar{n} = \text{const}$ и $\eta_p \rightarrow 0$ имеем $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} v_0 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то $G_{n_p \eta_p} v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство

В силу неравенства (7) последовательность $v_p = G_{n_p \eta_p} v_0$ ограничена, т. е.

$$\|v_p\| = \|G_{n_p \eta_p} v_0\| \leq \gamma_0 \|v_0\|, \quad p \in N = \{1, 2, \dots\}.$$

Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \rightharpoonup v$, ($p \in N' \subseteq N$). Тогда $A_{\eta_p} v_p \rightharpoonup A_{\eta_p} v$, ($p \in N'$). По условию $\omega_p = A_{\eta_p} v_p \rightarrow 0$, значит, $A_{\eta_p} v = 0$. Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p} , то $v = 0$. Теперь

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, G_{n_p \eta_p} v_0) = (v_p, (E - A_{\eta_p} g_{n_p}(A_{\eta_p})) v_0) = (v_p, v_0) - \\ &- (A_{\eta_p} v_p, g_{n_p}(A_{\eta_p}) v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A_{\eta_p}) v_0) \rightarrow (v, v_0) = (0, v_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

так как $\omega_p \rightarrow 0$, $\|g_{n_p}(A_{\eta_p})\| \leq \gamma n_p^{1/k} \leq \gamma \bar{n}^{1/k}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $v_p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$ по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, ($0 < \eta \leq \eta_0$), $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (6), (7) с $s_0 > 1$.

Пусть параметр $m(\delta, \eta)$ выбран по правилу (4). Тогда $(\delta + \eta)^k m(\delta, \eta) \rightarrow 0$, $x_{m(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Доказательство

Имеем $x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta$, тогда

$$\begin{aligned} x_{n(\delta, \eta)} - x^* &= -x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}x^* - \\ &- x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{m\eta}x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta))x^* - \\ &- x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{m\eta}x^* + x^* - A_\eta g_n(A_\eta)x^* - x^* + \\ &+ g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \tag{10}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - A_\eta x^* &= -A_\eta G_{m\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*; \\ A_\eta x_{n(\delta, \eta)} &= A_\eta x^* - A_\eta G_{m\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*; \\ A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta &= -A_\eta G_{m\eta}x^* - y_\delta + (E - A_\eta g_n(A_\eta))A_\eta x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta = \\ &= -A_\eta G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}A_\eta x^* - (E - A_\eta g_n(A_\eta))y_\delta = \\ &= -A_\eta G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}A_\eta x^* - G_{m\eta}y_\delta = -A_\eta G_{m\eta}x^* - G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{m\eta}x^* - G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*). \tag{11}$$

Покажем, что $\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. В силу (7) имеем $\|G_{m\eta}\| = \|E - A_\eta g_n(A_\eta)\| \leq \gamma_0$, ($n > 0$, $0 < \eta \leq \eta_0$). Для элементов вида $u = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (8) имеем

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta}u\| &= \|G_{m\eta}A\omega\| \leq \|G_{m\eta}(A - A_\eta)\omega\| + \|G_{m\eta}A_\eta\omega\| \leq \\ &\leq \left(\gamma_0\eta + \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|\omega\| \leq (\gamma_0\eta + \gamma_1 n^{-1/k}) \|\omega\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Итак,

$$\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\|\eta). \tag{13}$$

По условию (5) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$, а $\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| +$

$$+ \|y - A_{\eta}x^*\| = \|y_{\delta} - y\| + \|Ax^* - A_{\eta}x^*\| \leq \delta + \|(A - A_{\eta})x^*\| \leq \delta + \|x^*\|\eta, \quad \text{ПОЭТОМУ} \quad \text{ПОЛУЧИМ}$$

$$\|g_n(A_{\eta})(y_{\delta} - A_{\eta}x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\|\eta).$$

В силу леммы 1

$$\sigma_{m\eta} = n^{1/k} \|A_{\eta}G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \quad (14)$$

Применим правило останова (4), тогда $\|A_{\eta}x_{m(\delta,\eta)} - y_{\delta}\| \leq b(\delta + \|x^*\|\eta)$, $b > 1$ и из (7) и (11) получим

$$\|A_{\eta}G_{m\eta}x^*\| \leq (b+1)(\delta + \|x^*\|\eta). \quad (15)$$

Действительно, из (11) $\|A_{\eta}G_{m\eta}x^*\| \leq \|A_{\eta}x_{m(\delta,\eta)} - y_{\delta}\| + \|G_{m\eta}(y_{\delta} - A_{\eta}x^*)\| \leq b(\delta + \|x^*\|\eta) + (\delta + \|x^*\|\eta) = (b+1)(\delta + \|x^*\|\eta)$. Для $\forall n < m$ $\|A_{\eta}x_{n(\delta,\eta)} - y_{\delta}\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A_{\eta}G_{n\eta}x^*\| \geq \|A_{\eta}x_{n(\delta,\eta)} - y_{\delta}\| - \|G_{n\eta}(y_{\delta} - A_{\eta}x^*)\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta).$$

Следовательно, для $\forall n < m$

$$\|A_{\eta}G_{n\eta}x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta). \quad (16)$$

Из (16) и (14) при $n = m-1$ $\frac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/k}} = \|A_{\eta}G_{m-1,\eta}x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\|\eta)$ или

$$(m-1)^{1/k}(\delta + \|x^*\|\eta) \leq \frac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0 \quad (\text{так как из (14) } \sigma_{m\eta} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0).$$

Если при этом $m(\delta,\eta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$, то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_m(A_{\eta})(y_{\delta} - A_{\eta}x^*)\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \gamma m^{1/k}(\delta,\eta)(\delta + \|x^*\|\eta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \rightarrow x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n, \eta_n)} \rightarrow x^*$, $\delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) выполняется $\|A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^*\| \leq (b+1)(\delta_n + \|x^*\|\eta_n) \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0$. Следовательно, имеем $A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^* \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0$ и по лемме 2 получаем, что при $\delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0$ выполняется $G_{m\eta_n}x^* \rightarrow 0$. Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n, \eta_n)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta_n}x^*\| + \gamma m^{1/k}(\delta_n, \eta_n)(\delta_n + \|x^*\|\eta_n) \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если $x^* = A^s z$, $s > 0, \|z\| \leq \rho$, то справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho \right]^{k/(s+1)}}; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \left[c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\|_\eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \\ &+ k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho \right]^{k/(s+1)}} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\|_\eta). \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство

Оценим заново элемент $\|A_\eta G_{m-1, \eta} x^*\|$. В силу (6) и леммы 1.1 [2, с. 91]

$$\begin{aligned} \|A_\eta G_{m-1, \eta} x^*\| &= \|A_\eta G_{m-1, \eta} A^s z\| \leq \|A_\eta G_{m-1, \eta} (A^s - A_\eta^s) z\| + \\ &+ \|A_\eta^{s+1} G_{m-1, \eta} z\| \leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho, \end{aligned}$$

где $\beta_{m-1, s} = c_s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) \leq [2k(m-1)\alpha]^{-1/k} c_s = c_s \gamma_1 (m-1)^{-1/k}$, $\beta_{m-1, s} \rightarrow 0$,

$m \rightarrow \infty$. Здесь $c_s = \text{const}$ (при $0 < s \leq 1$ $c_s \leq 2$). Сопоставляя это с (16), получим

$$(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) \leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho. \quad \text{Отсюда} \quad \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k} \rho \geq$$

$\geq (b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho$, тогда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho} \right]^{k/(s+1)}.$$

Поскольку $\beta_{m-1, s} = c_s \gamma_1 \frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq c_s \gamma_1$ (так как при $m > 1$ $\frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq 1$), то

$(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho \geq (b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho$, и, значит, получим следующую

оценку для m :
$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho \right]^{k/(s+1)}}.$$

Из (10) и (13) имеем $\|G_{m\eta} x^*\| = \|G_{m\eta} A^s z\| \leq \|G_{m\eta} (A^s - A_\eta^s) z\| + \|G_{m\eta} A_\eta^s z\|$. По лемме 1.1 [2, с. 91] $\|G_{m\eta} (A^s - A_\eta^s) z\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho$, что даёт в оценку $\|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\|$ вклад $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$ [2, с. 111]. Норму $\|G_{m\eta} A_\eta^s z\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [2, с. 91] и (15):

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta} A_\eta^s z\| &= \|A_\eta^s G_{m\eta} z\| = \|A_\eta^{s+1} G_{m\eta} z\|^{s/(s+1)} \|G_{m\eta} z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta^s z\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq \|A_\eta G_{m\eta} (A_\eta^s - A^s) z\| + \\ &+ \|A_\eta G_{m\eta} A^s z\|^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \leq [\beta_{ms} \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\|_\eta)]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|G_{m\eta} x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + [\beta_{ms} \eta \rho + (b+1) \times \\ &\times (\delta + \|x^*\|_\eta)]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \gamma m^{1/k} (\delta + \|x^*\|_\eta) \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + [c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\|_\eta)]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \\ &+ k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{[(b-1)(\delta + \|x^*\|_\eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho]} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\|_\eta). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (18) есть $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$ и, как следует из [2], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z , на практике их значение не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.
2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука. – 1986. – 178 с.
3. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

V.F. Savchuk To the Question of A posteriori Choice of Regularization Parameter in the Implicit Method of Iterations for Solving Operator Equations with Approximate Operator

In a Hilbert space is studied implicit iterative method for solving operator equations of type I with non-negative self-adjoint bounded operator. The convergence of the method of choice in the case of a posteriori regularization parameter in the initial norm of a Hilbert space, assuming that the errors are not only in the right side of the equation, but also the operator. Obtain an estimate for error of the method the estimate for the moment stop.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.10.13

УДК 514.115+004.942

З.Н. Силаева

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье обсуждаются возможности, которые открывает использование современных компьютерных программ динамической геометрии (интерактивных геометрических систем) в учебном процессе вуза.

Введение

Какие навыки стремится развить у своих студентов вузовский преподаватель математики? Цель отдельного учебного занятия заключается в обучении студентов приемам решения определенного вида задач по определенной дисциплине. Но в конечном итоге каждый преподаватель стремится к гораздо большему – научить студентов логически рассуждать, обучить их таким приемам мышления, которые помогли бы им решить любую задачу, не обязательно математическую.

К сожалению, в последнее время школьники и часть студентов вуза логически рассуждать не умеют. Думается, что этот вызывающий тревогу факт порожден реформами образования (отменой школьных устных экзаменов по математике, заменой вступительных экзаменов в вуз тестированием). Не последнюю роль сыграло здесь и бурное развитие мультимедиасредств, вырабатывающее у человека привычку получать новую информацию легко. Но раз уж компьютеризация всех сфер человеческой деятельности является сегодняшней реальностью, то необходимо искать пути ее использования для достижения образовательных целей.

На протяжении нескольких последних десятилетий в мире активно разрабатываются компьютерные программы, использование которых может облегчить и разнообразить процесс обучения математике. Это программы динамической геометрии, или интерактивные геометрические системы. Среди них наиболее известны Cabri (Франция), The Geometer's Sketchpad (США) и «Математический конструктор» (Россия) [1]. Эти программы позволяют создавать компьютерные чертежи, которые существенно отличаются от обычных, так как в них заложена возможность изменяться согласно желанию пользователя. Динамический чертеж – это целая серия чертежей, связанных воедино алгоритмом построения. Таким образом, работая с программой динамической геометрии, пользователь получает не статичный чертеж, а чертеж-модель, представляющий собой нечто среднее между обычным чертежом и физической моделью. Как показывает опыт, работа с такими динамическими моделями «пробуждает» геометрические представления обучаемых, активизирует их мыслительные процессы, увеличивает самостоятельность. Динамическая модель дает возможность проводить геометрические эксперименты: выдвигать гипотезы, а затем проверять их с помощью программы. Все это, несомненно, развивает у обучаемых интерес к предмету.

В данной статье мы остановимся на некоторых вариантах использования средств динамической геометрии в образовательном процессе физико-математического факультета нашего вуза.

Интерактивные методические разработки

Прежде всего, обратим внимание на возможности, которые предоставляет программа «Математический конструктор» с точки зрения демонстраций свойств

геометрических объектов. Как уже отмечалось, динамический чертеж представляет собой не одну фигуру, а целое их семейство, удовлетворяющее одной и той же совокупности условий [1]. Кроме того, программа позволяет производить измерения геометрических величин и строить траектории движущихся точек. Это открывает простор для создания электронных методических разработок, в которых изложение теоретического материала сопровождается динамическими моделями. Такая разработка создана на факультете, в частности, по теме «Линии второго порядка». В ней можно увидеть в динамике процесс вычерчивания эллипса с помощью нерастяжимой нити, поработать с аналогичными моделями для гиперболы и параболы, наглядно пронаблюдать некоторые свойства линий второго порядка. Положительный эффект от использования таких разработок достигается в связи с тем, что студенты знакомятся со свойствами фигур не только теоретически, но и путем непосредственного экспериментирования с моделями, что способствует улучшению восприятия материала.

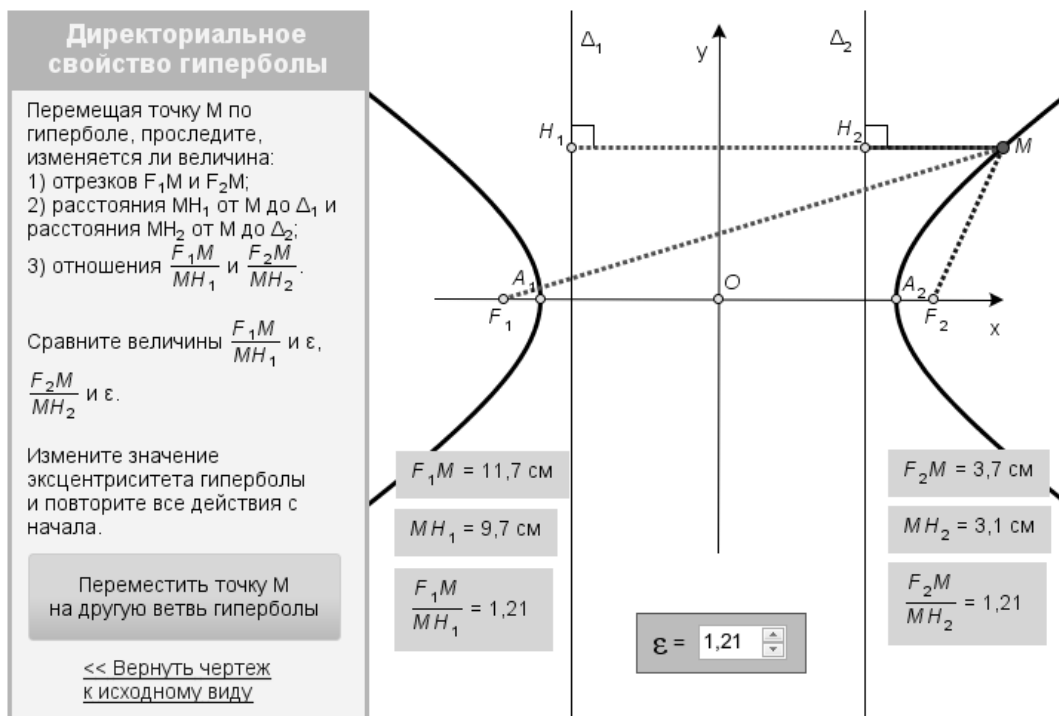


Рисунок 1 – Динамическая модель из методической разработки «Линии второго порядка»

Проекты на тему «Геометрические построения на плоскости»

Наиболее естественно переносятся в окно программы динамической геометрии задачи, связанные с геометрическими построениями на плоскости. С помощью инструментария программы на экране компьютера, как на листе бумаги, можно выполнять классические геометрические построения циркулем и линейкой (а также преобразования фигур, измерения и вычисления, построение траекторий движущихся точек и т.д.). При этом программа «запоминает» порядок построений, так что при изменении исходных данных соответствующим образом изменяется и вся конструкция.

Перед отдельными студентами нашего факультета в рамках курсовых работ была поставлена задача изучения возможностей применения программы «Математический конструктор» для преподавания аналитической геометрии в вузе и создания с ее помощью проекта на тему «Метод пересечений решения задач на

построение на плоскости». В созданном проекте был представлен набор задач, решаемых указанным методом, и динамические модели к ним.

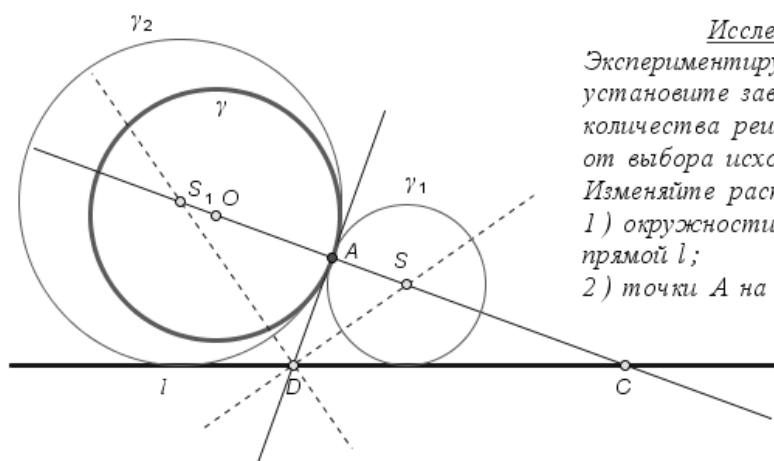
Учебный материал в проекте скомпонован следующим образом. В первом блоке рассмотрены элементарные задачи на построение (построение угла, равного данному, деление отрезка пополам и др.). Здесь обучаемый может проверить навыки решения элементарных задач средствами «Математического конструктора», т.е. с помощью виртуальных циркуля и линейки. При нажатии на кнопку «Проверить» программа выдает ответ о правильности построения в зависимости от того, имеется ли требуемая фигура на чертеже.

Убедившись в том, что он в достаточной мере владеет навыками решения элементарных задач на построение, обучаемый может перейти к следующему блоку «Некоторые простейшие геометрические места точек». В этом блоке для простейших фигур, заданных характеристическим свойством их точек, созданы динамические модели с использованием инструмента «След движущейся точки». Назначение этих моделей в том, чтобы наглядно, в динамике представить характеристические свойства точек рассматриваемых фигур (окружности, серединного перпендикуляра отрезка, пары параллельных прямых, пары пересекающихся прямых).

В третьем блоке рассмотрены примеры более сложных геометрических мест точек. Это множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом, и множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости есть положительная постоянная величина, отличная от 1. Для решения задачи на построение каждой из этих фигур создано по две динамических модели: одна с указанием, вторая с решением. При работе с первой моделью обучаемому предоставляется возможность самостоятельно построить на экране требуемую фигуру и автоматически проверить правильность построения. Если это не удалось, он может обратиться ко второй модели, где производится пошаговое построение решения задачи, а затем снова вернуться к первой.

В заключительном блоке рассмотрены задачи на построение, решаемые методом геометрических мест. При их решении требуется применять комбинации геометрических мест точек, которые были рассмотрены в первых трех блоках. Динамические модели для задач этого блока созданы по тому же принципу, что и в предыдущем случае.

Дана прямая l , окружность γ и точка $A \in \gamma$. Построить окружность, которая касается прямой l и окружности γ в точке A .



Исследование

Экспериментируя с моделью, установите зависимость количества решений задачи от выбора исходных данных. Изменяйте расположение:

- 1) окружности γ относительно прямой l ;
- 2) точки A на окружности γ .

Рисунок 2 – Динамическая модель к задаче на построение

Второй проект подобного рода создается на тему «Построения на плоскости (метод преобразований)». Здесь работа ведется в плане подбора задач на построение, решаемых методом преобразований, в которых поиск решения удобно было бы осуществлять с помощью моделей «Математического конструктора». К таким задачам студенты разрабатывают динамические указания, которые лишь наталкивают на путь решения задачи, но не дают готового решения. Особенно интересны в этом плане задачи с «богатым» исследованием, так как этап исследования с помощью «Математического конструктора» осуществляется путем непосредственной деформации динамической модели.

Компьютерный тренажер построения сечений многогранников

Стереометрия считается одним из самых сложных разделов школьной математики, и не напрасно. Ведь при ее изучении возникает необходимость развивать у школьников пространственное воображение, то есть умение по словесной формулировке задачи представлять в уме различные трехмерные конструкции. В связи с этим учителя часто прибегают к помощи наглядных пособий – моделям параллелепипеда, пирамиды и т.д. Ясно, что вооружиться «реальными» моделями на случаи всех решаемых задач невозможно. Такие попытки предпринимались в виде создания альбомов стереоскопических чертежей, которые хотя и предоставляют возможность увеличить количество фигур, дающих в зрительном восприятии объемное изображение, но обладают существенным недостатком: учащиеся не могут рассматривать такую модель с любой стороны. Использование программ динамической геометрии открывает новые пути решения рассматриваемой проблемы.

С помощью программ динамической геометрии можно создавать двумерные изображения трехмерных фигур с эффектом вращения вокруг одной или нескольких осей [2; 3]. Конечно, для правильного создания таких чертежей требуются определенные навыки трехмерного моделирования и некоторые затраты времени, но результат того стоит. С готовым чертежом ученик может работать, как с обычным чертежом в тетради – проводить дополнительные построения, строить сечения. Но в любой момент при необходимости он может «повернуть» изображение, выбирая наиболее выгодный ракурс.

В среде «Математический конструктор» студентами создан проект «Компьютерный тренажер построения сечений многогранников». Тренажер состоит из динамических моделей n -угольных призм и пирамид ($n=3, 4, 5, 6$), на ребрах или на гранях которых указаны точки, через которые требуется провести сечение. Построив сечение, можно тут же проверить результат, нажав на кнопку «Проверить». При этом программа выдает сообщение «Правильно» или «Неправильно» в зависимости от того, имеется ли требуемое сечение на чертеже. Возможность «вращения» динамической модели позволяет учащимся легче находить нужную последовательность построений и, что очень важно, избежать ошибок построения, т.к. при вращении скрещивающиеся прямые уже не кажутся пересекающимися, а неправильно построенное сечение будет «рассыпаться».

Задачи в тренажере подобраны так, чтобы учащийся переходил от простых задач к более сложным. При этом выбор метода построения сечения несуществен. В программе есть возможность скрывать лишние линии во избежание загромождения чертежа. Если же нужные для построения прямые пересекаются за пределами чертежа, можно повернуть или наклонить модель многогранника так, чтобы этого не происходило.

Созданный тренажер имеет следующие преимущества:

- позволяет отрабатывать навыки построения сечений путем самостоятельного решения учащимися большого количества задач;
- экономит время, т. к. учащийся не должен каждый раз строить заново сам многогранник, а только нужное сечение;
- позволяет каждому учащемуся работать в своем темпе, контролируя правильность построений путем автоматической проверки;
- развивает пространственное воображение за счет возможности поворота и наклона модели;
- развивает самостоятельность обучаемых и облегчает труд преподавателя.

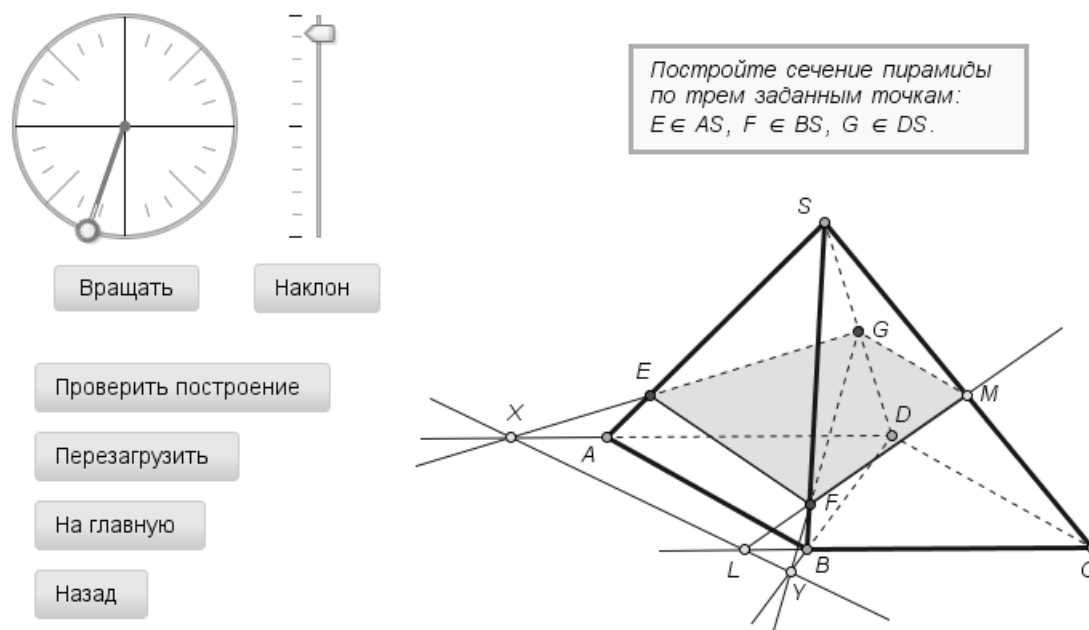


Рисунок 3 – Динамическая модель из тренажера построения сечений многогранников

В настоящее время работа над проектом продолжается: пополняется набор задач, составляются тесты проверки навыков с автоматическим выставлением отметок. Также планируется создать пошаговые демонстрации основных методов построения сечений многогранников.

Интерактивные модели по начертательной геометрии

Особенность вузовских дисциплин «Начертательная геометрия» и «Инженерная графика» состоит в том, что на занятии преподавателю за ограниченный промежуток времени приходится выполнять на доске множество чертежей, порой довольно сложных. При этом результат часто зависит от того, насколько удачно выбрано взаимное расположение исходных данных. Возникают ситуации, когда на построение затрачено много времени и сил, а чертеж получился неудачным (например, вышел за пределы доски или некоторые линии «слились»). Использование на занятии готовых плакатов в какой-то мере помогает решить эту проблему, но при этом возникает другая: чтобы понять процесс построения, студенты должны увидеть его в динамике. Именно здесь на помощь вновь приходят интерактивные геометрические системы, позволяющие «оживить» чертеж, сделать его динамичным.

Проект по начертательной геометрии, созданный студентами-курсовиками физико-математического факультета, включает в себя ряд динамических моделей,

иллюстрирующих метод прямоугольного треугольника построения натуральной величины отрезка, построение точки пересечения прямой и плоскости, линии пересечения двух плоскостей, а также задачи на перпендикулярность прямых и плоскостей, пересечение двух поверхностей и многое другое. Использование этого проекта на занятиях по указанным дисциплинам значительно облегчает труд преподавателя и способствует более глубокому усвоению студентами учебного материала.

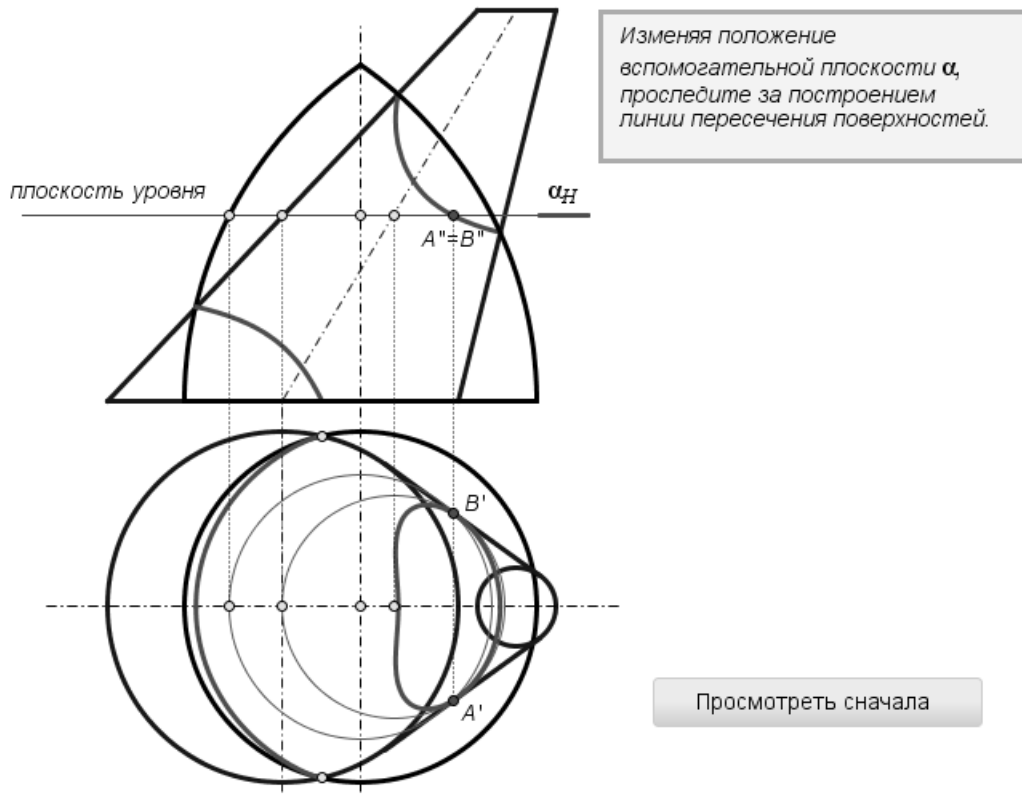


Рисунок 4 – Динамическая модель к задаче о пересечении геометрических тел

Заключение

Как видим, программа «Математический конструктор» может успешно и плодотворно применяться при изучении различных разделов геометрии. Основное достоинство программы заключается в интерактивности, способности активизировать мышление учащихся, заинтересовать их процессом самостоятельного добывания знаний, создать на занятиях творческую атмосферу. Конечно, используя новые компьютерные технологии, преподаватель должен заботиться и о том, чтобы учащиеся не утратили навыки работы с обычными чертежными инструментами, поэтому он должен сочетать на занятии использование программы и традиционные формы работы.

Упомянутые в статье проекты, созданные студентами в рамках курсовых работ, используются в учебном процессе нашего вуза при проведении лабораторных работ по аналитической геометрии, практических занятий по начертательной геометрии и инженерной графике. Компьютерный тренажер построения сечений многогранников используется самими студентами на уроках геометрии при прохождении ими педагогической практики в школе. Несомненно, выполнение студентами проектов подобного рода имеет положительный образовательный эффект. Ведь для того, чтобы создать динамическую модель к задаче, студент сначала должен глубоко проработать

алгоритм ее решения, и лишь затем разработать сценарий, что само по себе является творческой методической работой, развивающей способности логического мышления будущего выпускника вуза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровский, В.Н. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии / В.Н. Дубровский, Н.А. Лебедева, О.А. Белайчук // Компьютерные инструменты в образовании. – 2007. – №3. – С.47–56.
2. Дубровский, В.Н. Динамическая геометрия в школе. Занятие 6. Стереометрия в двумерных средах / В.Н. Дубровский, С.Н. Поздняков // Компьютерные инструменты в школе. – 2008. – №6. – С.24–38.
3. Дубровский, В.Н. Стереометрия с компьютером / В.Н. Дубровский // Компьютерные инструменты в образовании. – 2003. – №6. – С.3–11.

Z.N. Silayeva Modeling in Interactive Geometric Systems

In the paper the opportunities of interactive geometric systems applying in the high school educational process are discussed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.10.13

УДК 512.542

А.А. Трофимук**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ФИТТИНГОВЫМИ
ФАКТОРАМИ СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ**

Получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p -длины разрешимой группы G , у которой факторы цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ являются свободными от кубов. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а p -длина группы G не превышает 2 для любого простого p .

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m=2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m=3$ – от кубов.

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд (1), факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] группа G сверхразрешима.

В работе [2] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p -длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов.

Хорошо известен результат Бэра [1, с. 720], [3]:

Если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G) \quad (2)$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i , то G сверхразрешима.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если факторы цепочки вида (2) будут свободны от кубов.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых факторы цепочки вида (2) имеют порядок, свободный от кубов. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида (2) и факторы G_{i+1}/G_i имеют порядок, свободный от кубов, для всех i . Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. *$l_p(G) \leq 2$ для всех простых p .*

3. Если группа G A_4 -свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G . Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 – единичная группа; Z_n и D_n – циклическая и диэдральная группы порядка n ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n .

В доказательствах теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [4, 5]. Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через \mathfrak{N} и \mathfrak{A} соответственно.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2. Предположим, что в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (2) такая, что G_i нормальны в G и факторы G_{i+1}/G_i являются свободными от кубов для всех i . Тогда индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Доказательство. Уплотним участок ряда (2) между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга до главного следующим образом. Пусть $\bar{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \leq F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\bar{G} = G/G_i$. Так как \bar{G} разрешима, то \bar{N} – элементарная абелева p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Так как силовская p -подгруппа $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ свободна от кубов и \bar{N} содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то \bar{N} имеет порядок p или p^2 . Заменяя в (2) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним участок ряда от подгруппы Фраттини до подгруппы Фиттинга до ряда, факторы которого имеют порядки p или q^2 .

Итак, можно считать, что факторы ряда (2) имеют порядки p или q^2 . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу Фиттинга. Очевидно, что $\Phi(G) = G_0 \subseteq M$, а $G_m = F(G) \not\subseteq M$. Поэтому обязательно найдется

такое i , что $G_i \subseteq M$, но $G_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G , то $G_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |G_{i+1} : G_{i+1} \cap M|$. Поскольку $G_i \subseteq G_{i+1} \cap M$, то

$$|G_{i+1} : G_{i+1} \cap M| = \frac{|G_{i+1} : G_i|}{|G_{i+1} \cap M : G_i|}$$

и $|G : M|$ является простым числом или квадратом простого числа.

Лемма 3. [6, лемма 12] Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Лемма 4. [6, лемма 13] Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2. Доказательство теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \dots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

участок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по теореме III.4.2 [1] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i , $i = \overline{0, m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(G_i/\Phi(G)) \cong G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация \mathfrak{F} насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [1] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по теореме I.4.5 [1] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [1] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i -подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i , то M_i не содержит F . Поэтому по лемме 2 порядок $|F_i|$ равен p_i , либо p_i^2 , где p_i – простое число.

Поэтому возможны следующие варианты:

- 1) $Aut(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;
- 2) $Aut(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 3 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^4$. Поскольку $F/\Phi(G)$ – абелева фактор-группа и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$,

то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

2. Учитывая тот факт, что p -длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p .

3. Пусть группа G является A_4 -свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 4, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^3$. Поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3. Теорема доказана.

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является разрешимой группой, у которой существует нормальный ряд вида (2) с факторами, свободными от кубов. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5, 2-длина и 3-длина группы G равна 2. Значит, оценки, полученные в теореме, являются точными.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
2. Монахов В.С. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика и математика. – 2010. – №1. – С. 118–126.
3. Baer R. Supersolvable immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.
4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М: Наука. – 1978. – 272 с.
6. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

A.A. Trofimuk Finite Groups with Cube-free Fitting Factors

The estimations of the derived length, nilpotent length and p -length of solvable group G with cube-free factors of chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ are obtained. Here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G . In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5, the nilpotent length of G is at most 4, the p -length of G is at most 2 for every prime p .

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.13

УДК 519.652+517.548.5

А.П. Худяков, Л.А. Янович

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Рассматривается задача построения и исследования интерполяционных матричных многочленов лагранжева типа невысоких степеней для операторов, заданных на множестве непрерывно дифференцируемых функциональных матриц. В рамках данного исследования построены новые алгебраические матричные многочлены второй и третьей степени, содержащие дифференциалы Гаусса интерполируемой функции, а также определен класс многочленов, относительно которых они точны. Данные интерполяционные формулы содержат значения функции не только в узлах интерполяции, но и в промежуточных матрицах. Применение одной из формул рассмотрено на конкретном примере.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул, значительно усложняется их общий вид, что приводит соответственно к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Многие вопросы теории интерполирования операторов изложены в монографиях [1; 2].

Данная статья посвящена задаче построения и исследования алгебраических интерполяционных многочленов невысокого порядка для функций, заданных на множестве функциональных матриц.

Случай двух узлов. Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t) = [a_{ij}(t)]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = [a_{ij}^{(m)}(t)]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a, b]$ и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^n A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^m \int A^{(k)}(s)P_k(t, s)ds, \quad (1)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_j = C_j(t)$ ($j = \overline{0, n}$), $P_k(t, s)$ ($k = \overline{0, m}$) – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$. Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента A . Имеет место следующая

Теорема 1. Для формулы

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \quad (2)$$

где $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ – узлы интерполирования,

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \quad (3)$$

$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \quad (4)$$

выполняются условия

$$L_1(A_i) = F(A_i) \quad (i = 0, 1), \quad (5)$$

и она точна для матричных многочленов вида (1).

Доказательство. Покажем, что матричный многочлен (2) удовлетворяет интерполяционным условиям (5). Равенство $L_1(A_0) = F(A_0)$ имеет место, так как второе и третье слагаемые в правой части (2) обращаются в нуль. Так как $L_1(A)$ при $A = A_1$ принимает вид

$$L_1(A_1) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)] d\tau,$$

то, учитывая, что $\delta F[x + \tau h; h] = \frac{d}{d\tau} F[x + \tau h]$, получим

$$L_1(A_1) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n F(\sigma_{1i}) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot))] d\tau = F(A_1).$$

Докажем инвариантность формулы (2) относительно многочленов вида (1). Проведем доказательство для каждой из трех групп слагаемых в (1).

Очевидно, что $L_1(A) = F(A)$ для $F(A) = B$.

Пусть $F(A) = \sum_{j=0}^n A(t_j) C_j$. Так как $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)] \sum_{j=0}^n C_j$,

а $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = \sum_{j=0}^n (A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)) C_j$,

то после несложных вычислений получим

$$L_1(A) = \sum_{j=0}^n A_0(t_j) C_j + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] \sum_{j=0}^n C_j + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)) C_j = \sum_{j=0}^n A(t_j) C_j \equiv F(A).$$

Пусть $F(A) = \sum_{k=0}^m \int_{0T} A^{(k)}(s) P_k(t, s) ds$. Так как для $k \geq 1$ $\sigma_{1i}^{(k)}(s) = A_0^{(k)}(s)$, а $H_i^{(k)}(s) = A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)$, то будем иметь $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)] \int_T P_0(t, s) ds$,

$$\begin{aligned} \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = \\ = \sum_{k=0}^m \int_{0T} (A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)) P_k(t, s) ds - [A(t_i) - A_0(t_i)] \int_T P_0(t, s) ds. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2), после некоторых преобразований будем иметь $L_1(A) = \sum_{k=0}^m \int_{0T} A^{(k)}(s) P_k(t, s) ds \equiv F(A)$.

В силу линейного вхождения в формулу (2) функции $F(A)$ данная формула точна также для многочленов вида (1). Теорема 1 доказана.

Случай данной формулы при $n = 0$ рассмотрен в [1].

В частности, если узлы интерполирования A_i имеют вид $A_i = H + \alpha_i I$, где $H = H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ($i = 0, 1$) – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$), I – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$\begin{aligned} L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{A(t_i) - A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i)} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \end{aligned}$$

где $\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + (\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I = H(t) + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I$, $H_i(t) = A(t) - A(t_i) - H(t) + H(t_i) - (\alpha_0(t) - \alpha_0(t_i))I$.

Случай трех узлов. Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{0T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})] C_{5,j} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{0T^4} P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [A^{(k)}(s_3) - A^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – те же фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_{j_1 j_2} = C_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2} = D_{j_1 j_2}(t)$, $C_{i,j} = C_{i,j}(t)$ ($i = 3, 4, 5$), $(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0, n})$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t, s_1, s_2)$, $Q_k(t, s_1, s_2)$, $P_{k,i}(t, s)$ ($i = 3, 4, 5$), $(k = \overline{0, m})$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, $ds = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$.

Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}(t_{j_1}) - \sigma_{1i}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1) - \sigma_{1i}^{(k)}(s_2) = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A) = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} \quad (8)$$

и

$$F(A) = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (9)$$

при $i = 0, 1, \dots, n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = 0$.

Для функций (8), (9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [H(t_{j_1}) - H(t_{j_2})] D_{j_1 j_2}, \quad (10)$$

$$\delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [H^{(k)}(s_1) - H^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2. \quad (11)$$

Из (10) и (11) при $A(t) = \sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H(t) = H_i(t)$ для функций (8), (9) будем иметь $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = F(A) - F(A_0)$. Следовательно, $L_1(A) \equiv F(A)$ при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$, т.е. формула (2) точна также и для многочленов первой степени вида (6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A \in C^m[a, b]$. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} l_{21}(A) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_1(t_i)] [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [(A_1(t_i) - A_2(t_i))]^{-1} \times \\ &\quad \times \left([F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)] \right), \quad l_{22}(A) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \tau \delta^2 F \left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \tau \sigma(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot) \right] d\tau ds, \quad (12) \end{aligned}$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

Теорема 2. Если существуют матрицы $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ ($i = \overline{0, n}$), то для формулы

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \quad (13)$$

где $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{0, 2}$) – узлы интерполирования, $L_1(A)$ – многочлен, определенный формулой (2), выполняются условия

$$L_2(A_i) = F(A_i) \quad (i = \overline{0, 2}), \quad (14)$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (7).

Доказательство. Так как $l_{21}(A_0) = l_{21}(A_1) = 0$, $H_{i0}(t) = 0$ при $A = A_0$, $H_{i1}(t) = 0$ при $A = A_1$, то с учетом (5) имеем, что $L_2(A_i) = F(A_i)$ ($i = 0, 1$). Проверим далее выполнение условия $L_2(A_2) = F(A_2)$. Введем обозначения

$$l_{11}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)],$$

$$l_{12}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau. \quad (15)$$

Справедливо равенство

$$l_{11}(A_2) + l_{21}(A_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left([A_2(t_i) - A_1(t_i) + A_1(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] - F(\sigma_{1i}^{21}) + F(A_2) + [A_2(t_i) - A_0(t_i) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] \times \right.$$

$$\left. \times [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] \right) = F(A_2) - F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(\sigma_{1i}^{21})].$$

При $A = A_2$ направления $H_{i0}(t)$ и $H_{i1}(t)$ примут вид $H_{i0}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{02}(t)$, $H_{i1}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{12}(t)$, где $\sigma_{1i}^{02}(t) = A_0(t) + A_2(t_i) - A_0(t_i)$, поэтому, используя формулу $\delta F[\tilde{A} + s\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial s} F[\tilde{A} + s\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot))$ и $\tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)$, будем иметь

$$l_{22}(A_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \delta F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \tau s(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); A_2(\cdot) -$$

$$-\sigma_{li}^{02}(\cdot)]d\tau ds = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{li}^{01}(\cdot) + \tau(A_2(\cdot) - \sigma_{li}^{02}(\cdot)); A_2(\cdot) - \sigma_{li}^{02}(\cdot)]d\tau.$$

Аналогично, пользуясь соотношением $\delta F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{d}{d\tau} F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}]$ при

$$\tilde{A} = \sigma_{li}^{01}(\cdot) \text{ и } \tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{li}^{02}(\cdot), \text{ получим } l_{22}(A_2) = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [F(\sigma_{li}^{21}) - F(\sigma_{li}^{01})].$$

Тогда $L_2(A_2) = F(A_0) + l_{11}(A_2) + l_{12}(A_2) + l_{21}(A_2) + l_{22}(A_2) = F(A_2)$.

Таким образом, интерполяционные условия (14) выполняются.

Покажем, что формула (13) точна для многочленов вида (7). Пусть $F(A) = \tilde{P}_1(A)$.

Тогда, как показано было раньше, $L_1(A) \equiv \tilde{P}_1(A)$. Так как

$$\sigma_{li}^{01}(t_{j_1}) - \sigma_{li}^{01}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2}) \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sigma_{li}^{01}(t) \right\} \right|_{t=s_1} - \left. \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \sigma_{li}^{01}(t) \right\} \right|_{t=s_2} = A_0^{(k)}(s_1) -$$

$-A_0^{(k)}(s_2)$, то $F(\sigma_{li}^{01}) - F(A_0) = 0$ для $F(A) = \tilde{P}_1(A)$. Аналогично можно показать, что $F(\sigma_{li}^{21}) - F(A_2) = 0$. Следовательно $l_{21}(A) = 0$.

Для любых квадратных функциональных матриц $\tilde{A}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ соответствующего порядка и любой матричной функции $F(A)$, дважды дифференцируемой по Гаю в точке \tilde{A} , выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \delta^2 F[\tilde{A}; \tilde{H}_2 \tilde{H}_1] &= \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (F[\tilde{A} + \lambda_1 \tilde{H}_1 + \lambda_2 \tilde{H}_2] - \\ &\quad - F[\tilde{A} + \lambda_1 \tilde{H}_1] - F[\tilde{A} + \lambda_2 \tilde{H}_2] + F[\tilde{A}]). \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда из (16) при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$ после несложных преобразований будем иметь $\delta^2 \tilde{P}_1[\tilde{A}; \tilde{H}_2 \tilde{H}_1] \equiv 0$. Таким образом, $l_{22}(A) = 0$, и значит $L_2(A) \equiv \tilde{P}_1(A) = F(A)$.

Введем в рассмотрение функцию двух матричных переменных

$$\Phi(A, B) = \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [B(t_{j_3}) - B(t_{j_4})] C_{5,j}.$$

Очевидно, что функция $\Phi(A, B)$ обладает свойствами

$$\Phi(A + B, D) = \Phi(A, D) + \Phi(B, D), \quad \Phi(A, B + D) = \Phi(A, B) + \Phi(A, D),$$

$$\Phi(\lambda A, B) = \Phi(A, \lambda B) = \lambda \Phi(A, B), \quad A, B, D \in C^m[a, b], \quad \lambda \in R. \tag{17}$$

Пусть $F(A) = \Phi(A, A)$, что совпадает со вторым слагаемым в (7). В силу того, что $\sigma_{li}^{01}(t_{j_k}) - \sigma_{li}^{01}(t_{j_{k+1}}) = A_0(t_{j_k}) - A_0(t_{j_{k+1}})$ ($k=1, 3$), для этой функции справедливо равенство $F(\sigma_{li}^{01}) - F(A_0) = 0$. Аналогично показывается, что $F(\sigma_{li}^{21}) - F(A_2) = 0$.

Таким образом, учитывая, что $\sigma_{li}^{01}(t) = \sigma_{li}(t)$, будем иметь

$$l_{11}(A) = l_{21}(A) = 0. \quad (18)$$

Используя определение дифференциала Гаго первого порядка и свойства (17) функции $\Phi(A, B)$, которыми, в частности, обладает и $F(A) = \Phi(A, A)$, получим

$$\delta F[\tilde{A}; \tilde{H}] = \Phi(\tilde{A}, \tilde{H}) + \Phi(\tilde{H}, \tilde{A}). \quad (19)$$

Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)) &= \Phi(A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)); & \Phi(H_i(\cdot), \sigma_{1i}(\cdot)) &= \Phi(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_0(\cdot)); \\ \Phi(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)) &= \Phi(A_1(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)); & & \\ \Phi(H_i(\cdot), A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)) &= \Phi(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_1(\cdot) - A_0(\cdot)). & & \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда из (19) при $\tilde{A} = \sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot))$, $\tilde{H} = H_i(\cdot)$ и (20), учитывая свойства (17), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] &= \Phi(\sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)) + \Phi(H_i(\cdot), \sigma_{1i}(\cdot)) + \\ &+ \tau[\Phi(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot), H_i(\cdot)) + \Phi(H_i(\cdot), A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot))] = \Phi(A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)) + \\ &+ \Phi(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_0(\cdot)) + \tau[\Phi(A_1(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)) + \Phi(A(\cdot) - A_0(\cdot), A_1(\cdot) - A_0(\cdot))]. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисляя интеграл в (15) и проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned} l_{12}(A) &= \frac{1}{2}(\Phi(A_0, A) - 2\Phi(A_0, A_0) + \Phi(A_1, A) - \\ &- \Phi(A_1, A_0) + \Phi(A, A_0) + \Phi(A, A_1) - \Phi(A_0, A_1)). \end{aligned} \quad (21)$$

При $F(A) = \Phi(A, A)$ равенство (16) принимает вид $\delta^2 F[\tilde{A}; \tilde{H}_2 \tilde{H}_1] = \Phi(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2) + \Phi(\tilde{H}_2, \tilde{H}_1)$. В частности, при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \tau\tau(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot))$, $\tilde{H}_1 = H_{i0}(\cdot)$ и $\tilde{H}_2 = H_{i1}(\cdot)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \delta^2 F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \tau\tau(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot)] &= \Phi(H_{i0}(\cdot), H_{i1}(\cdot)) + \\ &+ \Phi(H_{i1}(\cdot), H_{i0}(\cdot)) = \Phi(A(\cdot) - A_0(\cdot), A(\cdot) - A_1(\cdot)) + \Phi(A(\cdot) - A_1(\cdot), A(\cdot) - A_0(\cdot)). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, вычисляя интеграл в (12), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} l_{22}(A) &= \frac{1}{2}(2\Phi(A, A) - \Phi(A_0, A) - \Phi(A, A_1) + \\ &+ \Phi(A_0, A_1) - \Phi(A_1, A) - \Phi(A, A_0) + \Phi(A_1, A_0)). \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $L_1(A) = F(A_0) + l_{11}(A) + l_{12}(A)$, то из равенств (13), (18), (21), (22) следует, что

$$L_2(A) = F(A_0) + \Phi(A, A) - \Phi(A_0, A_0) = F(A). \quad (23)$$

Переобозначим функцию $\Phi(A, B)$ следующим образом

$$\Phi(A, B) = \sum_{k=0}^m \int_{T^4} P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [B^{(k)}(s_3) - B^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds.$$

Пусть $F(A) = \Phi(A, A)$, что совпадает с третьим слагаемым в (7). Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0) = F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2) = 0$, следовательно $l_{11}(A) = l_{21}(A) = 0$. Очевидно, что переобозначенная функция $\Phi(A, B)$ также удовлетворяет свойствам (17) и соотношениям вида (20), поэтому для $F(A) = \Phi(A, A)$ выполняются равенства (19), (21), (22) и следовательно, (23). Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (7). Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{bmatrix} -t^3 + \alpha & t^2 + \beta \\ t^2 + \gamma & -t + \delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A) = e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - \theta) A_1(t)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Нетрудно заметить, что при $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - \theta) A_1(t)$ матрицы $\sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H_i(t)$ являются перестановочными, поэтому для $F(A) = e^{A(t)}$ справедливы равенства $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = H_i(t) e^{\sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))}$.

Кроме того, так как матрицы $A_1(t) - \sigma_{1i}(t) = (t_i + t_i^3 - t - t^3)I$, где I – единичная матрица второго порядка, являются скалярными, то имеют место соотношения $e^{\sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))} = e^{(t_i + t_i^3 - t - t^3)\tau} e^{\sigma_{1i}(t)}$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau &= \int_0^1 e^{(t_i + t_i^3 - t - t^3)\tau} d\tau H_i(t) e^{\sigma_{1i}(t)} = \\ &= \frac{1 - e^{t_i + t_i^3 - t - t^3}}{t + t^3 - t_i - t_i^3} (A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t)) e^{\sigma_{1i}(t)}. \end{aligned}$$

Тогда, сделав замену $\alpha_i(t) = \frac{1 - e^{t_i + t_i^3 - t - t^3}}{t + t^3 - t_i - t_i^3}$, будем иметь

$$\begin{aligned} L_1(A) &= e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}] + \frac{1}{n+1} \times \\ &\times \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) (A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t)) e^{\sigma_{1i}(t)} = A(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A(t_i)B_i(t) + C(t), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\text{где } B(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) e^{\sigma_{1i}(t)}, \quad B_i(t) = \frac{1}{n+1} \left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)} \right] - \alpha_i(t) e^{\sigma_{1i}(t)} \right),$$

$$C(t) = e^{A_0(t)} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left(A_0(t_i) [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)} \right] + \alpha_i(t) (A_0(t) - A_0(t_i)) e^{\sigma_{1i}(t)} \right).$$

Проверим выполнение интерполяционных условий для формулы (24). При $A = A_0(t)$ получим $L_1(A_0) = A_0(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_0(t_i)B_i(t) + C(t) = e^{A_0(t)} = F(A_0)$, а при $A = A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A_1) = A_1(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_1(t_i)B_i(t) + C(t) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left(\alpha_i(t) [A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] e^{\sigma_{1i}(t)} + [A_1(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)} \right] \right).$$

Далее, так как $\alpha_i(t) [A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] = \left(e^{t_i + t_i^3 - t - t^3} - 1 \right) I = e^{A_1(t) - \sigma_{1i}(t)} - I$, то

$$L_1(A_1) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left[e^{A_1(t)} - e^{\sigma_{1i}(t)} + e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)} \right] = e^{A_1(t)} = F(A_1). \quad \text{Таким образом,}$$

интерполяционные условия выполняются.

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в [3–8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К. : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
2. Макаров, В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – К. : Наукова думка, 2000. – 407 с.
3. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
4. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
5. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
6. Yanovich, L.A. On matrix function interpolation / L.A. Yanovich, I.V. Romanovski // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – № 1 (97). – P. 122–131.
7. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы для функций многих матричных переменных / Л.А. Янович, Ю.В. Романовский // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 365–379.
8. Янович, Л.А. Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций / Л.А. Янович, А.В. Тарасевич // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 102–111.

***A.P. Hudyakov, L.A. Yanovich* The Linear and Quadratic Algebraic Interpolation Polynomials for Operators, Defined on the Set of Functional Matrices**

The problem of construction and research of interpolation matrix polynomials Lagrange type of low degrees for operators defined on the set of continuously differentiable functional matrices is considered. In this study new algebraic matrix polynomials of the second and third degree, containing differentials Gateaux of interpolated function are constructed and the class of polynomials with respect to which they are exact is determined. The interpolation formulas contain the values of the functions not only in the nodes of interpolation, but in the intermediate matrices. The application one of the following formulas considered on the example.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.13

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Аўсіюк А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Богдан А.У. – намеснік дырэктара Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Жарнова Т.Н. – студэнтка 3 курса матэматычнага факультэта Усходнееўрапейскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Зубей К.У. – выкладчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казлоў В.А. – магістрант кафедры функцыянальнага аналізу Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Казмерчук К.В. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Кальчук І.У. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Усходнееўрапейскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Костка У.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Кручын А.А. – доктар тэхнічных навук, член-карэспандэнт Нацыянальнай акадэміі навук Украіны, намеснік дырэктара Інстытута праблем рэгістрацыі інфармацыі Нацыянальнай акадэміі навук Украіны (г. Кіеў)

Куцын Д.Ю. – студэнтка 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Лапчук А.С. – доктар тэхнічных навук, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута праблем рэгістрацыі інфармацыі Нацыянальнай акадэміі навук Украіны (г. Кіеў)

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Мельнікава І.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Несцярянка А.Н. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Кіеўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Т. Шаўчэнкі (Украіна)

Пашкевіч Г.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы навуковы супрацоўнік Навукова-даследчага інстытута прыкладной электронікі Нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта Украіны «Кіеўскі політэхнічны інстытут» (Украіна)

Плецохоў У.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Саванчук Я.А. – студэнт 5 курса фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Саўчук В.Ф. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Секяржыцкі У.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Сілаева З.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Трафімук А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Харкевіч Ю.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Усходнееўрапейскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Украінкі (г. Луцк, Украіна)

Худзякоў А.П. – выкладчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Шыхавец А.В. – малодшы навуковы супрацоўнік Інстытута проблем рэгістрацыі інфармацыі Нацыянальнай акадэміі навук Украіны (г. Кіеў)

Юдаў А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Яновіч Л.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, член-каррэспандэнт Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, галоўны навуковы супрацоўнік аддзела нелінейнага і стахастычнага аналізу Інстытута матэматыкі Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Інструкцыі па афармленні дысертацыі, аўтарэферата і публікацый па тэме дысертацыі, зацверджанай пастановай Прэзідыума дзяржаўнага Вышэйшага атэстацыйнага камітэта Рэспублікі Беларусь ад 24.12.1997 № 178 (у рэдакцыі пастановы Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 22.02.2006 № 2, ад 15.08.2007 № 4). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносак.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па левым краі);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па левым краі);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку, калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выпіска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А.В. Дзябёлая, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 01.11.2013. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 23,02. Ул.-выд. арк. 20,34.
Тыраж 100 экз. Заказ № 351.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб рэгістрацыі № 1/55 ад 14.10.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.