

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матгьсік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плецохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2013

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 21 ад 01.02.2012 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2013

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus № 21 from February 01, 2012,
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Ворсин Н.Н. Генерация низкотемпературного шума на основе параметрического эффекта	5
Адамчук Д.В., Демидчик А.В., Шепелевич В.Г. Структура и микротвёрдость быстрозатвердевших фольг сплавов висмут-медь с малым содержанием меди	10
Овсюк Е., Веко О., Неагу М., Балан В., Редьков В. Некоторые свойства параметров группы Лоренца и уравнения транзитивности в поляризованной оптике	18
Плетюхов В.А., Стражев В.И. Релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином $3/2$	30
Сабуть А.В., Секержицкий С.С., Лиопо В.А. Расчет геометрических характеристик атомно-кластерных систем	37
Савенко В.С., Зеленкевич А.И. Генерирование и пробег двойникующих дислокаций в условиях электропластичности	44
Серый А.И. К вопросу о магнитных полях белых карликов и сверхновых II типа	50

МАТЭМАТЫКА

Киндыбалюк А., Притула Н. Обоснование применения степенных базисных функций метода конечных элементов к сингулярно возмущенной краевой задаче адвекции – диффузии	59
Козинский А.А., Козлов В.А. Применение быстрого преобразования Фурье для анализа звуковых данных	66
Мадорский В.М. О частично регуляризованных итерационных методах с негладким оператором	74
Матысик О.В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором	77
Натынчик Е.А., Шило Т.И. Системы второго порядка, правые части которых являются полиномами третьей степени относительно искомых функций	84
Савчук В.Ф. К вопросу об априорном выборе параметра регуляризации в неявном методе итераций решения операторных уравнений с приближенным оператором	93
Трофимук А.А., Фенчук И.Н. О конечных разрешимых группах с небольшими индексами максимальных подгрупп	99
Юдов А.А., Ковалик Н.С. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа	106
Звесткі аб аўтарах	116

INDEX

PHYSICS

Vorsin N.N. Generation of Cold Noise on the Basis of Parametrical Effect.....	5
Adamchuk D.V., Demidchik A.V., Shepelevich G.V. Structure and Microhardness of Rapidly Solidified Foils Bismuth-Copper with a Low Content of Copper.....	10
Ovsiyuk E., Veko O., Neagu M., Balan V., Red'kov V. Some Properties of Parameters of Lorentz Matrices and Transitivity Equations in Polarization Optics	18
Pletyukhov V.A., Strazhev V.I. Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with Spin - 3/2	30
Sabutz A.V., Sekerzhitsky S.S., Liopo V.A. Calculation of Geometric Characteristics of Atomic Cluster Systems	37
Savenko V.S., Zelenkevich A.I. Generating and Run the Dvoinikuyushchikh of Dislocations in the Conditions of Electroplasticity.....	44
Sery A.I. On the Problem of Magnetic Fields of white Dwarfs and Type II Supernovae	50

MATHEMATICS

Kindybaluk A., Prytula N. Rationale for the Use of Power Basis Functions in Finite Element Method for Singularly Perturbed Boundary Value Problem Advection – Diffusion.....	59
Kozinskiy A.A., Kozlov V.A. Usage of Fast Fourier Transformation for Sound Data Analysis.....	66
Madorski V.M. Nonlocal in Part Regulariside Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed	74
Matysik O.V. The Method of Iterations Implicit Type for Solutions of Linear Equations with an Unbounded Operator.....	77
Natynchik E.A., Shilo T.I. Second-order System, the Right-Which is a Polynomial of the ThirdDegree with Respect to the Unknown Functions	84
Savchuk V.F. To the Question About Apriori Choice of Parameter Regularization in the Implicit Iteration Method for Solution of the Operator Equations with Approximately Operator	93
Trofimuk A.A., Fenchuk I.N. On Finite Solvable Groups with a Small Indexes of Maximal Subgroups	99
Yudov A.A., Kowalik N.S. Classification of One-Dimensional Submanifolds of Space 1R_4 Space Tangent Mnimoevklid and Evklid Type.....	106
Information about the authors	116

УДК 621.373.1

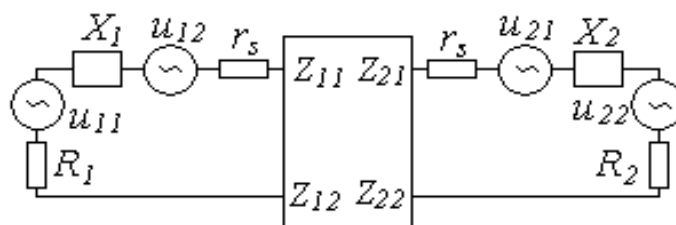
Н.Н. Ворсин

ГЕНЕРАЦИЯ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ШУМА НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Приводятся результаты исследований параметрических генераторов шума, представляющих собой параметрические преобразователи частоты вверх. Эквивалентная шумовая температура сигнала таких генераторов шума может быть сделана в несколько раз меньше их физической температуры, что позволяет заменить ими в ограниченном частотном диапазоне криогенные генераторы шума.

К настоящему времени известны СВЧ-устройства [1], построенные на нелинейных или невзаимных элементах (диодах, транзисторах), которые представляют собой радиационный холодильник и способны выполнять функцию генератора шума (ГШ), у которого шумовая температура сигнала оказывается существенно ниже физической температуры генерирующего элемента. Эффект радиационного холодильника на основе нелинейного резистора не является удивительным, и для него существуют термодинамическая [2] и статистическая [3] теории. Ниже приведено описание еще одного прибора, обладающего свойством радиационного холодильника, действующего на основе параметрического эффекта.

Основой для построения параметрического ГШ является параметрический преобразователь частоты вверх (ППВ), который является невзаимным устройством. Сигнал низкой частоты, поступающий в низкочастотный порт ППВ, передается в высокочастотный порт с усилением мощности, а передача сигнала в обратном направлении сопровождается ослаблением мощности. Благодаря данному свойству невзаимности, существует возможность создать однонаправленный поток мощности теплового шума от цепи с меньшей физической температурой в цепь с большей физической температурой, где эта мощность рассеивается в окружающую среду. Для определения условий функционирования этого механизма выразим эквивалентную шумовую температуру выходного сигнала параметрического ГШ через параметры его эквивалентной цепи, показанной на рисунке 1.



Элементы НЧ-резонатора имеют первый индекс 1, элементы ВЧ-резонатора – первый индекс 2. Каждый из резонаторов включает в себя импеданс варактора, сопротивление потерь варактора r_s с его источником шума u_{12} , u_{21} , индуктивный реактианс X , сопротивление нагрузки R с источником шума u_{11} , u_{22}

Рисунок 1 – Эквивалентная схема ППВ

На данном рисунке параметрический диод-варактор представлен в виде эквивалентного четырехполюсника [4] с z-параметрами:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{1}{j\omega_1 C_0}; z_{12} = \frac{m}{2j\omega_1 C_0}; \\ z_{21} &= \frac{m}{2j\omega_2 C_0}; z_{22} = \frac{1}{j\omega_2 C_0}; \end{aligned} \quad (1)$$

Тепловые шумы, порождаемые сопротивлениями низкочастотного – (R_1) и высокочастотного (R_2) резонаторов, а также сопротивлениями потерь варактора (r_s) в этих резонаторах, обозначены соответственно u_{11} , u_{12} , u_{21} , u_{22} .

Средние квадраты этих напряжений определяются формулой Найквиста [2, 3]. При данных обозначениях мощность, идущая от R_1 в цепь ППВ в окрестности частоты ω_1 , выразится следующей формулой:

$$P_1 = u_{11}^2 \frac{|z_{22} + r_s + X_2 + R_2|^2 r_s - \frac{m^2 (R_2 + r_s)}{\omega_1 \omega_2 C_0^2}}{|\Delta|^2}, \quad (2)$$

где $\Delta = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$, $\omega_2 = \omega_1 + \omega_n$ (ω_n – частота изменения емкости варактора – частота накачки).

Шумовая мощность, идущая в том же частотном диапазоне в обратном направлении (от ППВ к R_1), определится аналогичной формулой:

$$P_2 = R_1 \frac{\overline{u_{12}^2} |z_{22} + r_s + X_2 + R_2|^2 + |z_{12}^2|^2 (\overline{u_{21}^2} + \overline{u_{22}^2})}{|\Delta|^2}. \quad (3)$$

Полагая для наглядности одинаковой физическую температуру T_ϕ всех элементов цепи, определим отношение P_2/P_1 , которое при этом условии совпадает с отношением шумовой температуры сигнала ППВ к его физической температуре. После некоторых преобразований это отношение принимает следующий вид:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_u}{T_\phi} = \frac{1 + d \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2}{1 + d \frac{\omega_1}{\omega_2}}. \quad (4)$$

В (4) через d обозначена величина

$$d = \frac{m^2}{4\omega_1^2 C_0^2 r_s^2} \cdot \frac{r_s (r_s + R_2)}{|z_{22} + r_s + X_2 + R_2|^2}, \quad (5)$$

вбирающая в себя громоздкость формулы.

Минимизация величины шумовой температуры T_u требует максимально возможного значения параметра d . Согласно (5) это реализуется при настройке ВЧ-резонатора на частоту ω_2 , и равенстве нулю сопротивления нагрузки этого резонатора ($R_2 = 0$). Последнее означает, что электромагнитная шумовая мощность, передаваемая из НЧ-резонатора в ВЧ-резонатор, будет рассеиваться там только в сопротивлении потерь варактора. Поскольку ВЧ-резонатор в этом случае оказывается ненагруженным,

его можно назвать холостым резонатором по аналогии с ВЧ-резонатором регенеративного параметрического усилителя.

Если условия резонанса и ненагруженности ВЧ-резонатора выполнены, то параметр d представляет собой квадрат т.н. динамической добротности варактора на частоте ω_1 :

$$d = \tilde{Q}^2 = \frac{m^2}{4\omega_1^2 C_0^2 r_s^2}. \quad (6)$$

Данная величина в качественном параметрическом элементе на умеренных частотах может достигать нескольких сотен.

Оптимальное значение отношения ω_1/ω_2 , обеспечивающее минимум величины шумовой температуры, выражается простой формулой:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{1+d}-1}{d}, \quad (7)$$

которая на практике играет лишь оценочную роль, поскольку минимум $T_{ш}$ тупой и уменьшение ω_2 по отношению к оптимальному значению в 2-3 раза приводит к небольшому увеличению $T_{ш}$. Достижимая при оптимальном значении холостой частоты величина шумовой температуры равна

$$T_{ш} = T_{\phi} \frac{2(\sqrt{1+d}-1)}{d}. \quad (8)$$

Данная формула позволяет оценить предельные возможности достижения низких шумовых температур в параметрических ГШ. Например, для $d > 100$ и $T_{\phi} = 300$ К получим $T_{ш} < 60$ К. Реализация таких значений $T_{ш}$ в транзисторных ГШ на частотах в десятки ГГц является проблематичной.

Существенным достоинством параметрического ГШ является его широкополосность, обусловленная тем, что параметрическое взаимодействие колебаний НЧ- и ВЧ-резонаторов приводит к взаимной компенсации их реактансов вблизи резонансной частоты. Выходной импеданс низкочастотного резонатора, который должен быть согласован с нагрузкой R_1 , равен

$$z_{\text{вых}} = r_s + z_{11} + X_1 + \frac{m^2}{4\omega_1\omega_2 C_0^2 (z_{22} + r_s + R_2 + X_2)}. \quad (9)$$

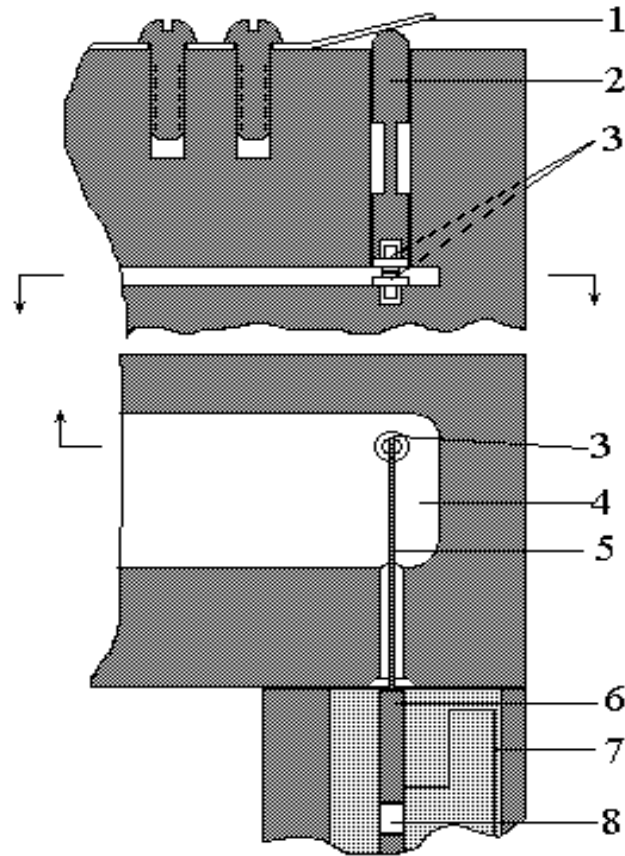
Условие согласования на центральной частоте рабочего диапазона ω_{10} при $R_2 = 0$ выражается равенством

$$R_1 = r_s \left(1 + d \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} \right), \quad (10)$$

а условие реализации максимально плоской АЧХ согласования имеет при этом следующий вид:

$$\omega_{20} = \omega_{10} \sqrt[3]{d}. \quad (11)$$

Заметим, что условие широкополосности согласования (11) не совпадает с условием получения минимальной шумовой температуры на центральной частоте (7). На практике, видимо, следует отдавать предпочтение условию (11), что означает более низкое значение холостой частоты, большую широкополосность генерируемого шума при некотором увеличении его шумовой температуры.



- 1 – прижимная пружина; 2 – дроссельный держатель диода;
 3 – варакторные диоды; 5 – индуктивность НЧ резонатора;
 6 – выходная микрополосковая линия;
 7 – дроссель подачи смещения на диоды;
 8 – разделительный конденсатор

Рисунок 2 – Конструкция макета параметрического ГШ

Результаты экспериментов

Экспериментальный макет параметрического ГШ был построен на основе варакторов ЗА410Г, имеющих емкость перехода 0,5 пф, емкость корпуса 0,25 пф, индуктивность выводов 0,2 нГн. Макет представляет собой балансный преобразователь вверх, с параллельным включением диодов по низкой и последовательным по высокой частоте. Конструкция макета показана на рисунке 2. Частоты настроек сигнального и холостого резонаторов составляют соответственно 1,65 и 16,68 ГГц. Частота накачки равна 15,03 ГГц. Низкочастотный резонатор образован емкостями варакторов и отрезком высокоомной коаксиальной линии 5. Холостой резонатор – импедансом варакторов и коротким отрезком низкоомной волноводной линии. Волновод холостого резонатора имеет ширину 9,7 мм, т.е. является запредельным для разностной частоты, что упрощает реализацию высокого импеданса по данной частоте в контуре варакторов. Мощность накачки на варакторы подается через фильтр в виде двух резонансных стержней, запирающий резонатор на холостой частоте. Для обеспечения возможности настройки и измерения параметров холостого резонатора данный фильтр сделан съемным.

Величина шумовой температуры сигнала ГШ измерялась в диапазоне 1–2 ГГц приемником П5-4, снабженным малошумящим транзисторным УВЧ. Первоначально проводилась калибровка приемника по криогенному генератору Г2-5, обеспечивающему $T_{ш} = 80–85$ К. После этого вход приемника подключался к параметрическому ГШ и измерялась шумовая температура его сигнала. Погрешность таких измерений, видимо, составляет 15–20%, однако несомненно, что во всем диапазоне параметрический ГШ имеет меньшую, чем криогенный шумовую температуру. На рисунке 3 показан график частотной зависимости $T_{ш}$, в котором положение точек определено путем осреднения результатов нескольких циклов калибровка – измерение.

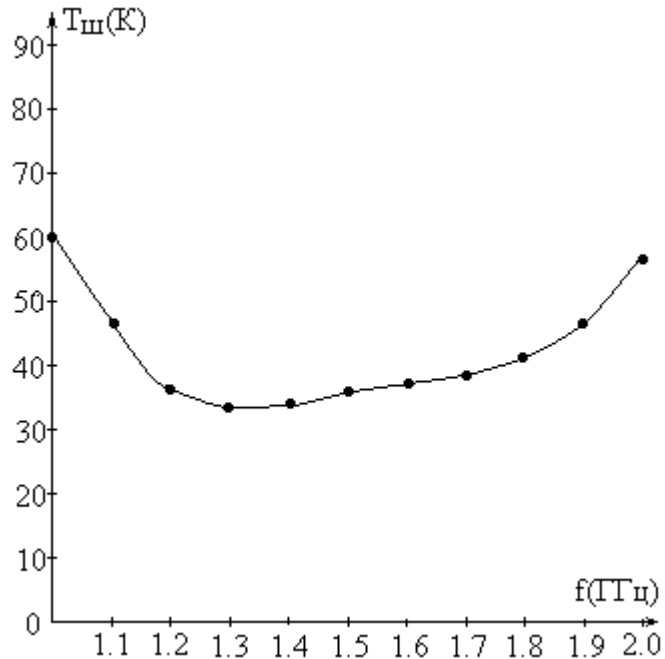


Рисунок 3

В заключение можно отметить следующее. По достижимым величинам шумовой температуры генерируемого сигнала параметрические ГШ и генераторы на ПТШ типа «colfet» [1] приблизительно эквивалентны при существенно большей сложности первых. Однако это не означает прикладную бесперспективность параметрических ГШ, поскольку ряд их параметров: широкополосность, устойчивость, практически полное отсутствие не теплового шума в генераторах на ПТШ недостижимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frater, R. Active «cold» source of noise / R. Frater, D. Williams // IEEE Trans. – 1981. – Vol. MTT-29, № 4. – P. 344.
2. Гупта, М.С. Тепловой шум в нелинейных резистивных приборах и его эквивалентное схемное представление / М.С. Гупта // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, № 8. – С. 5–25.
3. Стратонович, Р.Л. Флуктуационно-диссипационные модели нелинейного резистора и формулы Гупта / Р.Л. Стратонович // Радиофизика – 1988. – № 2. – С. 222–230.
4. Блэкуэл, Л. Параметрические усилители на полупроводниковых диодах / Л. Блэкуэл, К. Коцебу. – М. : Мир, 1964.

N.N. Vorsin. Generation of Cold Noise on the Basis of Parametrical Effect

Results of researches of parametrical noise Generators representing parametrical converters of frequency upwards, are described. The equivalent noise temperature of a signal, such ГШ can be made several times less than their physical temperature. It allows replacing with data ГШ in the limited frequency range cryogenic ГШ

УДК 539.21

Д.В. Адамчук, А.В. Демидчик, В.Г. Шепелевич

СТРУКТУРА И МИКРОТВЁРДОСТЬ БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВОВ ВИСМУТ-МЕДЬ С МАЛЫМ СОДЕРЖАНИЕМ МЕДИ

Методом рентгеновской дифрактометрии исследована структура тонких фольг сплавов Вi-Cu, полученных методом сверхбыстрой закалки из расплава (методом одностороннего охлаждения). В результате исследований определено, что легирование висмута медью приводит к изменению текстуры получаемого сплава. Установлено наличие преимущественной текстуры и её связь с концентрацией легирующего компонента. Проведён сравнительный анализ полученной текстуры с текстурой фольг висмута, легированного малыми дозами сурьмы, при идентичных условиях сверхбыстрого охлаждения. Проведено исследование микротвёрдости и её зависимости от концентрации легирующей примеси.

Введение

Одной из важнейших задач металловедения на современном этапе развития является создание новых и модернизация уже существующих технических устройств с целью повышения уровня их эксплуатационных свойств. Поиск решения этой задачи постоянно приводит к необходимости создания новых материалов с заданными физико-химическими свойствами. Традиционные металлургические технологии весьма ограничены в способах получения материалов с комплексом механических, физических и химических свойств, так как увеличение эксплуатационных свойств металлургических материалов только за счёт легирования явно исчерпало себя, данные технологии уже практически полностью изучены и нашли широкое применение в металлургии. Новыми способами создания материалов стали такие перспективные области исследования, как разработка проблем гранульной металлургии, скоростной кристаллизации, чистоты сплавов, аморфизации металлических сплавов. Каждый из подходов открывает новые возможности и ставит перед исследователями новые задачи, решение которых позволит создавать новые материалы с заданными свойствами.

Изначально требования к сплаву определяются требованиями к эксплуатационным характеристикам деталей, изготавливаемых из данного сплава. Однако на свойства сплава существенное влияние оказывает технология производства детали. В наибольшей мере это относится к изделиям, получаемым литьем. При кристаллизации происходят сложные физико-химические процессы, существенно влияющие как на качество отливки, так и на структурные характеристики, определяющие свойства в различных частях заготовки. При традиционном литье сплавы склонны к повышенной микропористости, кристаллизационным трещинам и другим дефектам, что затрудняет проектирование надежной и устойчивой литейной технологии. К свойствам сплавов, работающих в сложных или особо ответственных условиях, предъявляются специальные требования, в частности высокий уровень прочности и коррозионной устойчивости при низком удельном весе, что зачастую невозможно достичь при использовании классических литейных технологий. Все это приводит к тому, что традиционные методы не всегда позволяют обеспечить требуемое качество изделия. Такое положение делает применение в литых деталях высокопрочных сплавов крайне затруднительным и иногда ставит под сомнение как способ получения детали (литье), так и применение самого сплава, что на сегодняшний день наиболее ярко проявляется в технологиях пайки схем.

Разрабатываемые технологии кристаллизации при сверхвысоких скоростях (скорость охлаждения 10^5 К/с и выше) позволяют коренным образом изменить микрострук-

туру сплавов и характер процессов, протекающих в них при различных условиях. Структуры материалов, формирующиеся в такой сильно неравновесной охлажденной системе, существенно влияют на свойства получаемого материала. Для достижения высоких механических свойств необходимо добиваться измельчения структуры, что возможно получить путем высоких скоростей охлаждения. В силу этого данным методом сверхбыстрого охлаждения можно достичь технологических режимов, позволяющих получать бездефектные отливки в большом количестве при сравнительно небольших энергетических и временных затратах на их производство. Разработка подобной методики является актуальной, т.к. она позволит существенно сократить себестоимость продукции и улучшит эксплуатационные характеристики изделий.

Актуальность проведения исследований быстрозатвердевающих сплавов заключается и в том, что остаются нерешенными и малоизученными многие проблемы. К ним относится вопрос о соответствии ближнего порядка жидкой и аморфной фаз, степени наследственности при быстром затвердевании. До сих пор не вполне ясен вопрос о роли исходной структуры расплава. Практически отсутствуют данные о влиянии различного рода структурных перестроек в жидкой фазе на структуру и свойства аморфных сплавов, роли структурной микронеоднородности в формировании свойств получаемого материала. Данные вопросы требуют более детального изучения. Решение их даст возможность создания материалов с необходимым набором свойств.

Сплавы на основе висмута

В настоящее время обострилась проблема создания бессвинцовых технологий производства, т.к. загрязнение свинцом и его соединениями приобрело глобальные масштабы. Свинец в классификации вредных веществ по характеру воздействия на организм человека отнесен к 1-му классу, это сильнейший яд наряду с мышьяком, ртутью и т.п. До сих пор наиболее распространенным припоем являлся сплав Sn-Pb с содержанием Sn приблизительно 80–90%. Наиболее вероятным кандидатом на роль бессвинцового припоя являются исследуемые сплавы Bi-Cu. Висмут – металл малопластичный, поэтому его редко применяют для пайки металлов и сплавов. Однако сплавы, богатые висмутом, используют в качестве особо легкоплавких припоев. Использование легкоплавких припоев на основе Bi позволяет исключить из паянного шва свинец и существенно снизить тепловые напряжения в изделиях, чем и обуславливается практико-ориентированная ценность разрабатываемых методов получения сплавов на основе Bi. Система Bi-Cu представляет собой простую систему эвтектического типа. Температура эвтектики составляет 270,6°C, эвтектическая точка соответствует 0,46% ат., 0,14% (по массе) Cu [1]. В сплавах Bi-Cu обнаружено присутствие метастабильного соединения, которое образуется при температуре ниже 300°C [1]. Указанное соединение можно наблюдать металлографически, закаливая сплавы, содержащие 25–75% ат. Cu, после выдержки в течение 200 ч при различных температурах. Определить структуру соединения рентгенографически не представляется возможным [1].

Но существует ряд трудностей при внедрении данных сплавов в массовое производство: с одной стороны, существует проблема совместимости технологических процессов с участием этих металлов, а с другой – отмечается недостаток средств производства для нанесения этих покрытий в промышленных масштабах. Стоит отметить, что бессвинцовая технология пайки требует применения соответствующих радиоэлектронных компонентов, адаптированных для пайки припоями без свинца, т.к. по сравнению с обычными свинцовыми припоями припои без содержания свинца имеют пониженные характеристики по смачиваемости и текучести, требуют соблюдения дополнительных технологических мер при пайке, т.к. возникает необходимость в выдержке уз-

кой границы термопрофиля. Для решения возникших проблем изучается такой метод получения сплавов, как сверхбыстрая закалка из расплава. В настоящее время установлено, что при сверхвысоких скоростях охлаждения возможно получение целого ряда метастабильных структурных эффектов (помимо морфологических изменений структуры, всегда наблюдаемых при повышении скорости охлаждения), которые могут существенным образом улучшить производственно-эксплуатационные характеристики припоев.

Получение быстрозатвердевающих фольг сплавов Вi-Cu

Изучению подверглись тонкие фольги сплавов Вi-Cu. Приготовление сплавов Вi-Cu проводилось в кварцевых ампулах при температуре 640–680°C. После кристаллизации из получившегося слитка вырезалась средняя часть, которая использовалась для приготовления фольг.

Быстрозатвердевшие фольги образцов сплавов Вi-Cu толщиной порядка 30–80 мкм получены методом одностороннего охлаждения, схема которого приведена на рисунке 1. Электродвигатель (1) вызывает вращение медного цилиндра (2) с частотой около 25 об/с. Диаметр цилиндра составлял 20 см. Кристаллизация капли расплава происходила на внутренней поверхности вращающегося медного цилиндра. В результате кристаллизации получались фольги длиной до 10 см, шириной до 1 см и толщиной 20–60 мкм. Данные методы позволяют в непрерывном технологическом процессе без лишних временных и энергетических затрат получать фольги микронных толщин, что является актуальным при современной миниатюризации применяемых в электронике устройств [2].

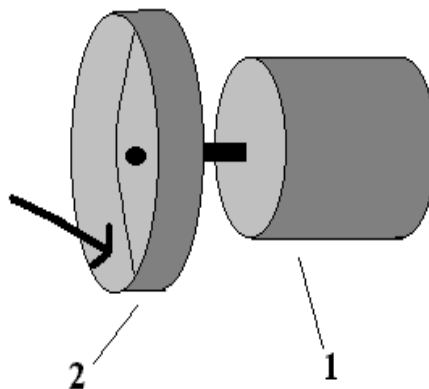


Рисунок 1 – Схемы установок для получения быстрозатвердевшей фольги односторонним охлаждением

Поверхность фольги (поверхность А), прилегающая к кристаллизатору, производящему интенсивный теплоотвод, имеет зеркальный вид. Противоположная поверхность (поверхность В) фольги имеет бугристую структуру.

Для оценки скорости охлаждения жидкой фазы применялась формула

$$v = \frac{\alpha\theta}{c\rho}, \quad (1)$$

где α – коэффициент теплоотдачи;

θ – избыточная температура расплава;

c – удельная теплоемкость;

t – толщина фольги;
 ρ – плотность сплава [3].

Величина α находится в пределах $(1...2) \cdot 10^5$ Вт/м²·К. Значения удельной теплоёмкости и плотности сплава взяты из [4]. Разность температур сплава и среды составляла 380–400°С. С учётом указанных величин скорость охлаждения составляла порядка 10⁶ К/с.

Техника эксперимента

Исследование текстуры

Кристаллографической текстурой называют преимущественную ориентировку определенных кристаллографических плоскостей и направлений в разных зернах поликристалла относительно внешних плоскостей и направлений. Текстура возникает в результате направленного внешнего воздействия, как в случае сверхбыстрой закалки при кристаллизации в условиях значительного градиента температур при скоростях охлаждения $\sim 10^6$ К/с. Исследование текстуры проводилось на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении при рабочем напряжении 30 кВ и токе через трубку 20 мА. При этом рентгеновское излучение отражали только те плоскости, которые были параллельны исследуемой поверхности образца (геометрия Брэгга – Брентано). Расчёт полюсных плотностей осуществлялся с помощью обратных полюсных фигур. Для исследования текстуры использовались дифракционные линии $10\bar{1}2$, $10\bar{1}4$, $11\bar{2}0$, $20\bar{2}0$, $20\bar{2}2$, $21\bar{3}0$, $12\bar{3}2$ и 0009, полюсная плотность которых рассчитывалась по методу Харриса [5]:

$$P_{hkil} = \frac{I_{hkil}}{I_{hkil}^o} \cdot \frac{n}{\sum_{s=1}^n \left(\frac{I_{hkil}}{I_{hkil}^o}\right)_s}, \quad (2)$$

где I_{hkil} и I_{hkil}^o — интегральные интенсивности дифракционных линий исследуемого и эталонного образцов;

n – число дифракционных линий.

Исследование микротвёрдости

Измерение микротвёрдости Нц быстрозатвердевших фольг проводилось с помощью микротвердомера ПМТ-3. На алмазный индентор действовала нагрузка 10 г. Время нагружения составляло 1 мин. При измерениях использовали фольги толщиной 25–50 мкм, т.к. было установлено, что при такой толщине вклад в измерения, внесенный подложкой, на которую наклеена фольга, находится в пределах погрешности. Толщина фольги определялась с помощью микроскопа ТПП-2. Фольги приклеивались клеем на стеклянные подложки, выдерживались некоторое время, необходимое для полимеризации клея, а затем производились измерения. Микротвёрдость фольг исследовалась с обеих сторон фольги.

Относительная погрешность измерения микротвёрдости составляла 0,04.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Структура фольг

Быстрозатвердевшие фольги являются двухфазными, что подтверждается рентгеноструктурными исследованиями. С помощью растрового электронного микроскопа проведены исследования поперечного сечения фольг исследуемых сплавов. Толщина фольг составляла 30–80 мкм. Исследование поверхностной структуры фольг и их поперечного сечения проводилось на растровом электронном микроскопе LEO 1455 VP. Результаты приведены на рисунках 2 – 5.

В поперечном разрезе обнаружена неустойчивая микрокристаллическая структура, имеются зёрна различной геометрии и размера. Образование однородного распределения с микрокристаллической структурой становится возможным благодаря тому, что кристаллизация расплава протекает без перераспределения компонентов в условиях сверхбыстрого охлаждения.

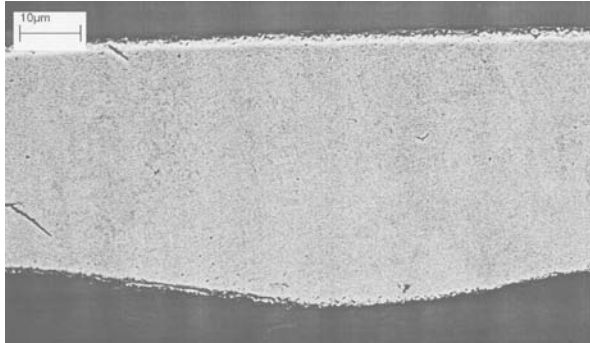


Рисунок 2 – Поперечное сечение фольг сплава Bi – 0.2 ат. % Cu



Рисунок 3 – Поперечное сечение фольг сплава Bi – 0.5 ат. % Cu

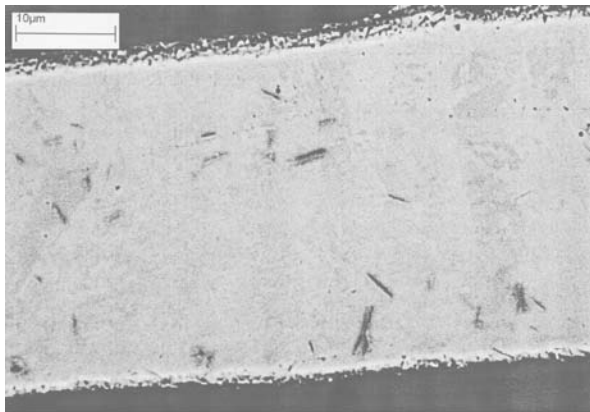


Рисунок 4 – Поперечное сечение фольг сплава Bi – 1 ат. % Cu



Рисунок 5 – Поперечное сечение фольг сплава Bi – 1 ат. % Cu

Текстура сплавов

Исследуемые фольги характеризуются чётко выраженной текстурой. Расчёты по приведённой методике (таблица 1 и таблица 2) полюсных плотностей дифракционных линий показали, что наибольшим значением полюсной плотности характеризуется дифракционная линия $20\bar{2}0$, что свидетельствует об образовании выраженной текстуры в изучаемом сплаве. На долю данной ориентировки приходится около 70% объема фольги поверхности В. Также была изучена текстура поверхности А быстрозатвердевших фольг изучаемых сплавов, прилегающая к кристаллизатору. Результаты расчётов по методике, приведённой выше, приведены в таблице 2.

Таблица 1 – Полусные плотности дифракционных линий быстрозатвердевших сплавов Вi-Cu (поверхность В)

Концентрация Cu (%) в сплаве	Дифракционные линии							
	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}4$	$11\bar{2}0$	$20\bar{2}0$	$20\bar{2}2$	$21\bar{3}0$	$12\bar{3}2$	0009
0,2	1,4	0,1	0,0	5,9	0,4	0,0	0,0	0,2
0,5	1,4	0,1	0,0	5,0	1,3	0,0	0,0	0,3
1	1,6	0,1	0,0	5,5	0,6	0,0	0,0	0,1
2	1,5	0,0	0,0	5,3	1,1	0,0	0,0	0,1

Из приведённых результатов следует, что с ростом концентрации Cu растёт значение полюсной плотности дифракционной линии $20\bar{2}0$, что свидетельствует об образовании выраженной текстуры в изучаемом сплаве.

При концентрациях Cu 0,2–1 % ат. формируется текстура, значения полюсной плотности дифракционных линий $10\bar{1}2$ и $20\bar{2}0$ которой приблизительно равны. Дифракционная линия $10\bar{1}2$, которая прослеживалась в чистом Вi и его сплавах, заметно ослабела с ростом концентрации Cu, что может объясняться модифицирующим действием меди на структуру исходного сплава. Двойная текстура поверхности А предположительно образуется благодаря ориентированному росту кристаллических зародышей (перпендикулярно и вдоль поверхности охлаждения). Скорость роста зародышей с преимущественной ориентировкой будет максимальна. По мере удаления от кристаллизатора скорость роста кристаллов перпендикулярно поверхности кристаллизатора уменьшается частично за счёт уменьшения скорости охлаждения, частично вследствие взаимодействия кристаллов. Это выражается в изменении направлений кристаллизации тонкой фольги сплава при ее сверхбыстром охлаждении.

Таблица 2 – Полусные плотности дифракционных линий быстрозатвердевших сплавов Вi-Cu (поверхность А)

Концентрация Cu (%) в сплаве	Дифракционные линии							
	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}4$	$11\bar{2}0$	$20\bar{2}0$	$20\bar{2}2$	$21\bar{3}0$	$12\bar{3}2$	0009
0,2	4,0	0,0	0,0	3,7	0,2	0,0	0,0	0,1
0,5	3,3	0,0	0,0	4,0	0,4	0,0	0,0	0,3
1	3,5	0,0	0,0	4,0	0,4	0,0	0,0	0,0
2	2,8	0,0	0,0	4,5	1,1	0,0	0,0	0,1
Чистый Вi	2,8	0,0	0,0	4,8	0,4	0,0	0,0	0,0

Наличие преимущественной ориентировки усиливает анизотропию свойств материала и может существенно изменить физико-химические характеристики изучаемого материала. Следует отметить, что текстура фольг висмута (приведена в таблице 3) [6], легированного малыми дозами сурьмы, при идентичных условиях сверхбыстрого охлаждения имеет сходную ориентировку.

Таблица 3 – Полюсные плотности дифракционных линий сплавов Bi-Sb

Концентрация Sb (%) в сплаве	Дифракционные линии										
	10 $\bar{1}2$	10 $\bar{1}4$	10 $\bar{1}5$	11 $\bar{2}0$	20 $\bar{2}0$	20 $\bar{2}2$	10 $\bar{1}7$	20 $\bar{2}5$	21 $\bar{3}0$	12 $\bar{3}2$	0009
8	4,3	0,1	0,3	0,0	5,3	0,8	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0
10	5,8	0,1	0,2	0,0	4,1	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
12	5,9	0,1	0,2	0,0	5,7	0,6	0,0	0,1	0,1	0,3	0,0

Микротвёрдость фольг

Зависимость микротвёрдости фольг сплавов Bi-Cu от концентрации Cu представлена на рисунке 6. Из приведённого рисунка видно, что с увеличением концентрации Cu в сплаве микротвёрдость шероховатой поверхности увеличивается. Это обусловлено возникновением упругих деформаций, связанных с различием атомных размеров Bi и Cu, усилением ковалентных сил связи между атомами кристаллической решётки. Зависимость микротвёрдости стороны А связана с процессами равновесной растворимости Cu.

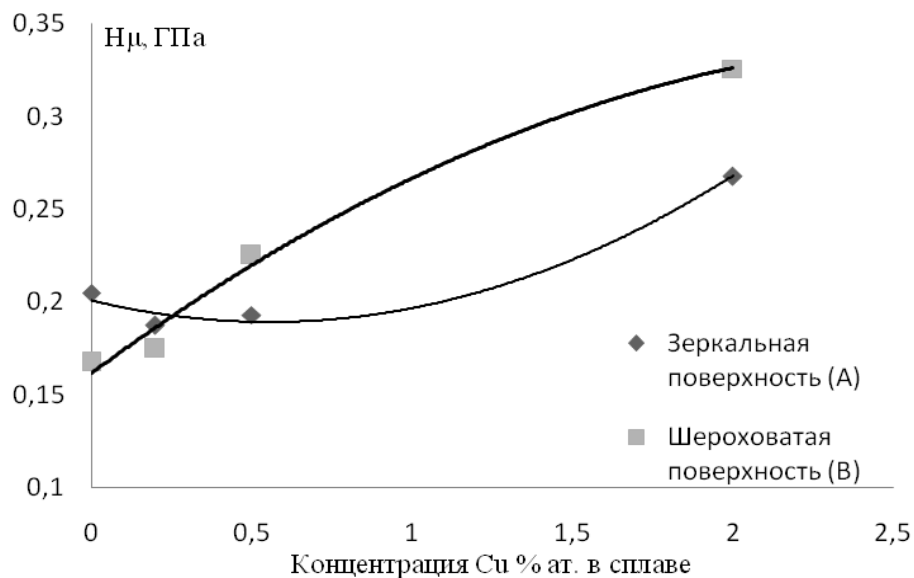


Рисунок 6 – Зависимость микротвёрдости фольг сплавов Bi-Cu от концентрации Cu

Основные результаты

Можно сделать вывод, что при сверхвысоких скоростях охлаждения происходит значительное переохлаждение жидкой фазы, которое обуславливает значительное увеличение скорости зарождения центров кристаллизации и тем самым приводит к формированию неравновесной микрокристаллической структуры. Обнаружено, что в быстрозатвердевших фольгах сплавов Bi-Cu формируется преимущественная ориентация зёрен (таблица 1) и изменяется микротвёрдость в зависимости от концентрации легирующей примеси Cu (рисунок 6). Таким образом, сверхбыстрая закалка из расплава позволяет получать образцы в виде тонких фольг с образованием микрокристаллической структуры, которая зависит как от условий сверхбыстрого охлаждения (в первую оче-

редь от скорости охлаждения расплава), так и от концентрационного состава легирующих компонентов. Следует отметить, что актуальной проблемой физики конденсированных сред и материаловедения является разработка локально-неравновесного подхода к процессам высокоскоростного затвердевания, который позволит описывать свойства подобных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диаграммы состояния двойных металлических систем Д44 : справочник. В 3 т. Т. 1 / под общ. ред. Н.П. Лякишева. – М. : Машиностроение, 1996. – 992 с.
2. Адамчук, Д.В. Методы сверхбыстрой закалки из расплава / Д.В. Адамчук, А.В. Демидчик // Математика и физика в научных и методических исследованиях : сб. материалов межфак. науч.-практ. конф. посвящ. 15-летию кафедры высшей математики, Брест, 12 октября 2012 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2013. – С. 3–4.
3. Мирошниченко, И.С. Закалка из жидкого состояния / И.С. Мирошниченко. – М. : Металлургия, 1982. – 352 с.
4. Бабичев, А.П. Физические величины / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
5. Вассерман, Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов./ Г. Вассерман, И. Гревен. – Москва : Металлургия, 1969. – 654 с.
6. Демидчик, А.В. Формирование преимущественной текстуры при сверхбыстрой закалке сплавов на основе висмута / А.В. Демидчик, Д.В. Адамчук // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : тез. докл. межвуз. науч.-практ. конф., посвящ. 370-летию со дня рождения И. Ньютона, Брест, 22 марта 2013 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2013. – С. 40.

D.V. Adamchuk, A.V. Demidchik, G. V. Shepelevich. Structure and Microhardness of Rapidly Solidified Foils Bismuth-Copper with a Low Content of Copper

We investigated by X-ray diffraction structure of thin foils of alloys Bi-Cu, obtained by rapid quenching from the melt by unilateral cooling. As a result, we have established the presence of primary textures, we have established dependence of texture from the concentration of the alloying component. We also conducted a comparative analysis of the resulting texture with the texture of the foils of bismuth doped with small doses of antimony under identical conditions of superfast cooling. We investigated the dependence of microhardness from dopant concentration.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.04.2013

УДК 535.51

Е. Овсюк, О. Веко, М. Неагу, В. Балан, В. Редьков**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И УРАВНЕНИЯ ТРАНЗИТИВНОСТИ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ**

Свойства группы Лоренца исследуются в контексте их применения в поляризационной оптике в рамках формализма Стокса – Мюллера. Используется факторизованное представление матриц Лоренца в виде произведения двух преобразований $L(q, q) = A(q_a)A^*(q_a)$; $a = 0, 1, 2, 3$. Множество матриц Лоренца – Мюллера $M = L$ в явном виде выделено как часть линейной вещественной группы $GL(4, R)$. Произвольный элемент из этого множества разложен по 16-мерному базису матриц Дирака. На этой основе развит метод нахождения параметров q_a матриц L . Показано, что факторизованное представление для матриц Лоренца позволяет в явном виде получить ряд простых уравнений транзитивности, часть из которых можно интерпретировать в рамках поляризационной оптики.

1. О нахождении параметров по явному виду матриц Лоренца

Многие свойства группы Лоренца [1–4] оказываются полезными в поляризационной оптике (см. [5–10] и приведенную там литературу). Ниже рассмотрим некоторые новые применения теории этой группы в оптике. Исходим из факторизованного представления произвольной матрицы Лоренца [1, 3]

$$[L_b^a(q, \bar{q}^*)] = A(q)A^*(q), \quad (1)$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ -q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ -q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, \quad A^*(q) = \begin{pmatrix} q_0^* & -q_1^* & -q_2^* & -q_3^* \\ -q_1^* & q_0^* & iq_3^* & -iq_2^* \\ -q_2^* & -iq_3^* & q_0^* & iq_1^* \\ -q_3^* & iq_2^* & -iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Можно построить матрицы, для которых комплексные векторы q и q^* будут собственными. В самом деле выполняются следующие тождества:

$$Lq = \bar{q}^*, \quad Lq^* = \bar{q}, \quad \bar{q}^* = (q_0^*, -\mathbf{q}^*), \quad \bar{q} = (q_0, -\mathbf{q}). \quad (3)$$

С использованием специального элемента δ соотношения (3) представимы в виде

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \delta Lq = q^*, \quad \delta Lq^* = q; \quad (4)$$

отсюда после элементарного преобразования получаем

$$\delta L \delta Lq = \delta Lq^* = q, \quad \delta L \delta Lq^* = \delta Lq = q^*,$$

т.е.

$$Q = (\delta L)^2, \quad Qq = q, \quad Qq^* = q^*. \quad (5)$$

С учетом свойства псевдоортогональности для матриц Лоренца: $\delta L \delta = (L')^{-1}$ матрица Q может быть представлена следующим образом:

$$Q = (L')^{-1} L. \quad (6)$$

В частности, для ортогональной подгруппы 3-вращений имеем (t – операция транспонирования матрицы)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \quad (L') = L^{-1}, \quad Q = L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

причем $OO^t = I_3$, $\det O = 1$. Явное выражение для произвольного евклидового вращения определяется 4-мерным параметром $q_0 = n_0$, $q_j = -in_j$ и имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} n_0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ in_2 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ in_3 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 & -in_1 & -in_2 & -in_3 \\ -in_1 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ -in_2 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ -in_3 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Такие (4×4) -матрицы L действуют на 4-вектор n_a согласно правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ -\mathbf{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ -\mathbf{in} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим произвольные псевдоевклидовые вращения – они задаются следующими 4-мерными параметрами: $q_0 = m_0$, $q_j = m_j$, $m_0^2 - \mathbf{m}^2 = +1$. С использованием обозначения $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ имеем:

$$m_0 = \cosh(\chi/2), \quad m_j = \sinh(\chi/2) e_j, \quad \mathbf{e}^2 = 1; \quad (10)$$

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi e_1 & -\sinh \chi e_2 & -\sinh \chi e_3 \\ -\sinh \chi e_1 & 1+(\cosh \chi - 1)e_1^2 & (\cosh \chi - 1)e_1 e_2 & (\cosh \chi - 1)e_1 e_3 \\ -\sinh \chi e_2 & (\cosh \chi - 1)e_1 e_2 & 1+(\cosh \chi - 1)e_2^2 & (\cosh \chi - 1)e_2 e_3 \\ -\sinh \chi e_3 & (\cosh \chi - 1)e_3 e_1 & (\cosh \chi - 1)e_2 e_3 & 1+(\cosh \chi - 1)e_3^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Прямым вычислением легко получаем

$$Q = (\delta L)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Это тождество можно доказать иначе. Поскольку чисто лоренцевское преобразование задается симметричной матрицей, то соотношение (6) можно записать так:

$$Q = (L^t)^{-1}L = L^{-1}L = I. \quad (13)$$

Ніжэ нам патрэбуецца прадставленне для произвольнаго преобразования из группы Лоренца в блочной форме:

$$L = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix};$$

(K)

$$\begin{aligned} L_{00} &= (q_0 q_0^* + q_1 q_1^*) + (q_2 q_2^* + q_3 q_3^*), & L_{01} &= -(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*) + i(q_2 q_3^* - q_3 q_2^*), \\ L_{10} &= -(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*) - i(q_2 q_3^* - q_3 q_2^*), & L_{11} &= (q_0 q_0^* + q_1 q_1^*) - (q_2 q_2^* + q_3 q_3^*); \end{aligned}$$

(M)

$$\begin{aligned} L_{22} &= (q_0 q_0^* - q_1 q_1^*) + (q_2 q_2^* - q_3 q_3^*), & L_{23} &= i(q_0 q_1^* - q_1 q_0^*) + (q_2 q_3^* + q_3 q_2^*), \\ L_{32} &= -i(q_0 q_1^* - q_1 q_0^*) + (q_2 q_3^* + q_3 q_2^*), & L_{33} &= (q_0 q_0^* - q_1 q_1^*) - (q_2 q_2^* - q_3 q_3^*); \end{aligned}$$

(N)

$$\begin{aligned} L_{02} &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) - i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*), & L_{03} &= -(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) + i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \\ L_{12} &= i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*), & L_{13} &= -i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*); \end{aligned}$$

(L)

$$\begin{aligned} L_{20} &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) + i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*), & L_{21} &= -i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*), \\ L_{30} &= -(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) - i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), & L_{31} &= i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*). \end{aligned}$$

Определенная структура может быть замечена для матриц L , если их разложить в сумму симметричной S и антисимметричной A частей:

$$\begin{aligned} S_{00} &= L_{00} = q_0 q_0^* + q_1 q_1^* + q_2 q_2^* + q_3 q_3^*, & S_{11} &= L_{11} = q_0 q_0^* + q_1 q_1^* - q_2 q_2^* - q_3 q_3^*, \\ S_{22} &= q_0 q_0^* + q_2 q_2^* - q_1 q_1^* - q_3 q_3^*, & S_{33} &= q_0 q_0^* + q_3 q_3^* - q_1 q_1^* - q_2 q_2^*, \\ S_{01} &= -(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*), & S_{02} &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*), & S_{03} &= -(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*), \\ S_{12} &= q_1 q_2^* + q_2 q_1^*, & S_{13} &= q_1 q_3^* + q_3 q_1^*, & S_{23} &= q_2 q_3^* + q_3 q_2^*, \\ A_{01} &= i(q_2 q_3^* - q_3 q_2^*), & A_{02} &= i(q_3 q_1^* - q_1 q_3^*), & A_{03} &= i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \\ A_{12} &= -i(q_3 q_0^* - q_0 q_3^*), & A_{13} &= +i(q_2 q_0^* - q_0 q_2^*), & A_{23} &= -i(q_1 q_0^* - q_0 q_1^*). \end{aligned}$$

Легко получаем

$$\begin{aligned} Q_0^2 &= q_0 q_0^* = \frac{1}{4} \text{Sp } L = \frac{S_{00} + S_{11} + S_{22} + S_{33}}{4}, \\ Q_1^2 &= q_1 q_1^* = \frac{S_{00} + S_{11}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sp } L = \frac{S_{00} + S_{11} - S_{22} - S_{33}}{4}, \\ Q_2^2 &= q_2 q_2^* = \frac{S_{00} + S_{22}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sp } L = \frac{S_{00} + S_{22} - S_{11} - S_{33}}{4}, \end{aligned}$$

$$Q_3^2 = q_3 q_3^* = \frac{S_{00} + S_{33}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sp } L = \frac{S_{00} + S_{33} - S_{11} - S_{22}}{4}, \quad (14)$$

далее, используя тождества

$$\begin{aligned} S_{01} + iA_{23} &= -2q_0 q_1^*, & S_{23} + iA_{01} &= 2q_2^* q_3, \\ S_{02} + iA_{31} &= -2q_0 q_2^*, & S_{31} + iA_{02} &= 2q_3^* q_1, \\ S_{03} + iA_{12} &= -2q_0 q_3^*, & S_{12} + iA_{03} &= 2q_1^* q_2 \end{aligned} \quad (15)$$

и вводя полярное разложение для комплексных величин (обозначаем $Q_k = \text{abs}(q_k)$, $\alpha_k = \text{arg}(q_k)$), имеем

$$\begin{aligned} S_{01} + iA_{23} &= -2Q_0 Q_1 e^{i(\alpha_0 - \alpha_1)}, & S_{23} + iA_{01} &= 2Q_2 Q_3 e^{i(-\alpha_2 + \alpha_3)}, \\ S_{02} + iA_{31} &= -2Q_0 Q_2 e^{i(\alpha_0 - \alpha_2)}, & S_{31} + iA_{02} &= 2Q_3 Q_1 e^{i(-\alpha_3 + \alpha_1)}, \\ S_{03} + iA_{12} &= -2Q_0 Q_3 e^{i(\alpha_0 - \alpha_3)}, & S_{12} + iA_{03} &= 2Q_1 Q_2 e^{i(-\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

В свою очередь, отсюда находим

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_1} &= -\frac{2Q_0 Q_1}{S_{01} + iA_{23}} e^{i\alpha_0} \Rightarrow q_1 = -\frac{2Q_1^2}{S_{01} + iA_{23}} q_0, \\ e^{i\alpha_2} &= -\frac{2Q_0 Q_2}{S_{02} + iA_{31}} e^{i\alpha_0} \Rightarrow q_2 = -\frac{2Q_2^2}{S_{02} + iA_{31}} q_0, \\ e^{i\alpha_3} &= -\frac{2Q_0 Q_3}{S_{03} + iA_{12}} e^{i\alpha_0} \Rightarrow q_3 = -\frac{2Q_3^2}{S_{03} + iA_{12}} q_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Воспользовавшись условием связи на параметры

$$q_0^2 \left[1 - \frac{4Q_1^4}{(S_{01} + iA_{23})^2} - \frac{4Q_2^4}{(S_{02} + iA_{31})^2} - \frac{4Q_3^4}{(S_{03} + iA_{12})^2} \right] = +1, \quad (18)$$

находим q_0 :

$$q_0 = \pm \left[1 - \frac{4Q_1^4}{(S_{01} + iA_{23})^2} - \frac{4Q_2^4}{(S_{02} + iA_{31})^2} - \frac{4Q_3^4}{(S_{03} + iA_{12})^2} \right]^{-1/2}, \quad (19)$$

после чего получаем выражения для q_j через q_0, S_{0j}, A_{ij} и Q_j ($j = 1, 3$):

$$q_1 = -\frac{2Q_1^2}{S_{01} + iA_{23}} q_0, \quad q_2 = -\frac{2Q_2^2}{S_{02} + iA_{31}} q_0, \quad q_3 = -\frac{2Q_3^2}{S_{03} + iA_{12}} q_0. \quad (20)$$

2. О выделении матриц Лоренца – Мюллера из линейной группы $GL(4, R)$

Матрицы Мюллера лоренцевского типа $M = L$ образуют вещественную подгруппу в линейной группе $GL(4, R)$

$$G = \begin{pmatrix} k_0 + \mathbf{k} \vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n} \vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l} \vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m} \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где $k_0 \equiv k_0 I_2$ и $\sigma_0 = I_2$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ и $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Каждой матрице G вида (21) соответствует естественный инвариант – ее определитель (его явный вид в такой параметризации был получен в [4]):

$$\det G = (kk)(mm) + (nn)(ll) - 2(kn)(ml) - 2(-k_0 \mathbf{n} + n_0 \mathbf{k} + i \mathbf{k} \times \mathbf{n})(-m_0 \mathbf{l} + l_0 \mathbf{m} + i \mathbf{m} \times \mathbf{l}), \quad (22)$$

где $(kk) = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ и т.д. В [7], [9], [10] была разработана классификация для вырожденных матриц с нулевым определителем (только часть таких матриц может быть матрицами Мюллера). Этот вырожденный класс матриц ниже рассматриваться не будет.

Рассматривая матрицы Мюллера – Лоренца как составленные из четырех блоков

$$L(q, q^*) = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix}, \quad (23)$$

можно найти коэффициенты k, m, n, l , соответствующие матрице $L(q, q^*)$. При этом удобно выполнить простую замену

$$k_2 \Rightarrow ik_2, \quad m_2 \Rightarrow im_2, \quad n_2 \Rightarrow in_2, \quad l_2 \Rightarrow il_2.$$

В результате находим явный вид 16 вещественных коэффициентов:

$$\begin{aligned} k_0 &= q_0 q_0^* + q_1 q_1^*, & k_1 &= -(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*), \\ k_2 &= i(q_2 q_3^* - q_3 q_2^*), & k_3 &= q_2 q_2^* + q_3 q_3^*, \\ m_0 &= q_0 q_0^* - q_1 q_1^*, & m_1 &= q_2 q_3^* + q_3 q_2^*, \\ m_2 &= i(q_0 q_1^* - q_1 q_0^*), & m_3 &= -q_2 q_2^* - q_3 q_3^*, \\ 2l_0 &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) + i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) + i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*), \\ 2l_3 &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) - i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) + i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*) - (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*), \\ 2l_1 &= -i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) - (q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*) - i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \\ 2l_2 &= -i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + (q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*) + i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \\ 2n_0 &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) - i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) - i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*), \\ 2n_3 &= -(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) + i(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) - i(q_1 q_3^* - q_3 q_1^*) - (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*), \\ 2n_1 &= -(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) + i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*) + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*), \\ 2n_2 &= -(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) - i(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + i(q_1 q_2^* - q_2 q_1^*) - (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*). \end{aligned} \quad (24)$$

3. О разложении матриц Лоренца в дираковском базисе

Разложим произвольную матрицу из группы Лоренца по 16-мерному базису матриц Дирака

$$L(q, q^*) = Z + \gamma^5 \tilde{Z} + \gamma^l Z_l + \gamma^l \gamma^5 \tilde{Z}_l + \sigma^{mn} Z_{mn}, \quad (25)$$

где 16 коэффициентов задаются формулами (символ Sp обозначает след матрицы):

$$Z = \frac{1}{4} \text{Sp } L(q, q^*), \quad \tilde{Z} = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^5 L(q, q^*), \quad (26)$$

$$Z_k = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_k L(q, q^*), \quad \tilde{Z}_k = \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma_k L(q, q^*), \quad Z_{kl} = -\frac{1}{2} \text{Sp } \sigma_{kl} L(q, q^*).$$

После простых вычислений приходим к формулам:

$$Z = q_0 q_0^*, \quad \tilde{Z} = q_1 q_1^*, \quad Z_{03} = q_3 q_3^*, \quad -iZ_{12} = q_2 q_2^*,$$

$$Z_0 = \frac{1}{2} [(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*) + (q_2 q_3^* + q_3 q_2^*)], \quad Z_2 = \frac{i}{2} [-(q_0 q_1^* + q_1 q_0^*) + (q_2 q_3^* + q_3 q_2^*)],$$

$$Z_0 = \frac{1}{2} [(q_0 q_1^* - q_1 q_0^*) - (q_2 q_3^* - q_3 q_2^*)], \quad Z_3 = \frac{i}{2} [-(q_0 q_1^* - q_1 q_0^*) - (q_2 q_3^* - q_3 q_2^*)],$$

$$Z_0 = \frac{1}{2} [-(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*)], \quad \tilde{Z}_0 = \frac{i}{2} [(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) + (q_1 q_3^* - q_3 q_1^*)],$$

$$Z_3 = -\frac{i}{2} [(q_0 q_2^* - q_2 q_0^*) - (q_1 q_3^* - q_3 q_1^*)], \quad \tilde{Z}_3 = -\frac{1}{2} [(q_0 q_2^* + q_2 q_0^*) + (q_1 q_3^* + q_3 q_1^*)],$$

$$Z_1 = -\frac{i}{2} (q_0 q_3^* - q_3 q_0^* + q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \quad \tilde{Z}_1 = -\frac{1}{2} [(q_0 q_3^* + q_3 q_0^*) - (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*)],$$

$$Z_2 = -\frac{i}{2} (-q_0 q_3^* - q_3 q_0^* - q_1 q_2^* - q_2 q_1^*), \quad \tilde{Z}_2 = -\frac{1}{2} [-(q_0 q_3^* - q_3 q_0^*) + (q_1 q_2^* - q_2 q_1^*)]. \quad (27)$$

На основе формул (27) можно развить еще один способ нахождения параметров q_a через найденные коэффициенты (25). Так, исходя из (27), замечаем

$$Z = q_0 q_0^*, \quad \tilde{Z} = q_1 q_1^*, \quad Z_{03} = q_3 q_3^*, \quad -iZ_{12} = q_2 q_2^*; \quad (28)$$

затем

$$Z_{01} + iZ_{23} = -q_2 q_3^* - q_2^* q_3, \quad Z_{01} - iZ_{23} = -q_0 q_1^* - q_0^* q_1,$$

$$Z_{02} + iZ_{31} = q_0 q_1^* - q_0^* q_1, \quad Z_{02} - iZ_{31} = -q_2 q_3^* + q_2^* q_3,$$

т.е.

$$(Z_{01} - iZ_{23}) + (Z_{02} + iZ_{31}) = -2 q_0^* q_1,$$

$$(Z_{01} - iZ_{23}) - (Z_{02} + iZ_{31}) = -2 q_0 q_1^*,$$

$$(Z_{01} + iZ_{23}) + (Z_{02} - iZ_{31}) = -2 q_2 q_3^*,$$

$$Z_{01} + iZ_{23} - (Z_{02} - iZ_{31}) = -2 q_2^* q_3; \quad (29)$$

затем

$$Z_0 - \tilde{Z}_3 = (q_1 q_3^* + q_1^* q_3), \quad Z_0 + \tilde{Z}_3 = -(q_0 q_2^* + q_0^* q_2),$$

$$\tilde{Z}_0 - Z_3 = i(q_0 q_2^* - q_0^* q_2), \quad \tilde{Z}_0 + Z_3 = i(q_1 q_3^* - q_1^* q_3),$$

т.е.

$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2 q_1^* q_3,$$

$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2 q_1 q_3^*,$$

$$(Z_0 + \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 - Z_3) = -2 q_0 q_2^*,$$

$$(Z_0 + \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 - Z_3) = -2 q_0^* q_2 ; \quad (30)$$

и затем

$$\begin{aligned} Z_1 + i\tilde{Z}_2 &= -i(q_1 q_2^* - q_1^* q_2), & Z_1 - i\tilde{Z}_2 &= -i(q_0 q_3^* - q_0^* q_3), \\ \tilde{Z}_1 + iZ_2 &= q_0 q_3^* - q_0^* q_3, & \tilde{Z}_1 - iZ_2 &= q_1 q_2^* + q_1^* q_2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} (Z_1 + i\tilde{Z}_2) + i(\tilde{Z}_1 - iZ_2) &= +2i q_1^* q_2, \\ (Z_1 + i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 - iZ_2) &= -2i q_1 q_2^*, \\ (Z_1 - i\tilde{Z}_2) + i(\tilde{Z}_1 + iZ_2) &= -2i q_0 q_3^*, \\ (Z_1 - i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 + iZ_2) &= +2i q_0^* q_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Полученные соотношения позволяют найти параметры лоренцевских матриц. Учтем равенства

$$\begin{aligned} Z &= q_0 q_0^* & q_0 &= \sqrt{Z} e^{i\alpha}, \\ q_1 &= -\frac{1}{2 q_0^*} [(Z_{01} - iZ_{23}) + (Z_{02} + iZ_{31})] = \frac{1}{q_0^*} M_1, \\ q_2 &= -\frac{1}{2 q_0^*} [(Z_0 + \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 - Z_3)] = \frac{1}{q_0^*} M_2, \\ q_3 &= -i \frac{1}{2 q_0^*} [(Z_1 - i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 + iZ_2)] = \frac{1}{q_0^*} M_3. \end{aligned} \quad (32)$$

С использованием квадратичного дополнительного условия $q_0^2 - \mathbf{q}^2 = 1$, получаем

$$e^{i\alpha} = \pm \sqrt{\frac{Z}{Z^2 - \mathbf{M}^2}}, \quad q_0 = \sqrt{Z} e^{i\alpha}, \quad q_j = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{Z}} M_j. \quad (33)$$

Разложение произвольной матрицы Лоренца по дираковскому базису может быть записано в спинорном представлении как

$$L = \begin{pmatrix} Z + \tilde{Z} + \Sigma^{mn} Z_{mn} & \bar{\sigma}^n (Z_n - \tilde{Z}_n) \\ \sigma^n (Z_n + \tilde{Z}_n) & Z - \tilde{Z} + \bar{\Sigma}^{mn} Z_{mn} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^a &= (I, +\sigma^j), & \sigma_a &= (I, -\sigma^j), & \gamma^a &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} +I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} &= \gamma^5, & \sigma^{ab} &= \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) = \begin{pmatrix} \Sigma^{ab} & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^{ab} \end{pmatrix}, \\ \Sigma^{01} &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^0 \sigma^1 - \bar{\sigma}^1 \sigma^0) = \frac{1}{2} \sigma^1, & \Sigma^{02} &= \frac{1}{2} \sigma^2, & \Sigma^{03} &= \frac{1}{2} \sigma^3, \\ \Sigma^{12} &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^1 \sigma^2 - \bar{\sigma}^2 \sigma^1) = -\frac{i}{2} \sigma^3, & \Sigma^{23} &= -\frac{i}{2} \sigma^1, & \Sigma^{31} &= -\frac{i}{2} \sigma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^{01} &= \frac{1}{4}(\sigma^0 \bar{\sigma}^1 - \sigma^1 \bar{\sigma}^0) = -\frac{1}{2}\sigma^1, & \bar{\Sigma}^{02} &= -\frac{1}{2}\sigma^2, & \bar{\Sigma}^{03} &= -\frac{1}{2}\sigma^3, \\ \bar{\Sigma}^{12} &= \frac{1}{4}(\sigma^1 \bar{\sigma}^2 - \sigma^2 \bar{\sigma}^1) = -\frac{i}{2}\sigma^3, & \bar{\Sigma}^{23} &= -\frac{i}{2}\sigma^1, & \bar{\Sigma}^{31} &= -\frac{i}{2}\sigma^2.\end{aligned}\quad (35)$$

Соотношение (34) можно представить в виде

$$L = \begin{pmatrix} Z + \tilde{Z} + \sigma^1 Z_1^- + \sigma^2 Z_2^- + \sigma^3 Z_3^- & Z_0 - \tilde{Z}_0 - \sigma^j (Z_j - \tilde{Z}_j) \\ Z_0 + \tilde{Z}_0 + \sigma^j (Z_j + \tilde{Z}_j) & Z - \tilde{Z} - \sigma^1 Z_1^+ - \sigma^2 Z_2^+ - \sigma^3 Z_3^+ \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned}Z_1^- &= +Z_{01} - iZ_{23}, & Z_2^- &= +Z_{02} - iZ_{31}, & Z_3^- &= +Z_{03} - iZ_{12}, \\ Z_1^+ &= Z_{01} + iZ_{23}, & Z_2^+ &= Z_{02} + iZ_{31}, & Z_3^+ &= Z_{03} + iZ_{12}.\end{aligned}\quad (37)$$

Матрица (36) может рассматриваться как составленная из четырех блоков

$$L = \begin{pmatrix} k_0 + k_j \sigma^j & n_0 + n_j \sigma^j \\ l_0 + l_j \sigma^j & m_0 + m_j \sigma^j \end{pmatrix}; \quad (38)$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned}k_0 &= Z + \tilde{Z}, & m_0 &= Z - \tilde{Z}, & k_j &= +Z_j^-, & m_j &= -Z_j^+, \\ n_0 &= Z_0 - \tilde{Z}_0, & l_0 &= Z_0 + \tilde{Z}_0, & n_j &= -Z_j + \tilde{Z}_j, & l_j &= Z_j + \tilde{Z}_j;\end{aligned}\quad (39)$$

можно легко убедиться, что они совпадают с (24).

4. О параметрах матриц Мюллера – Лоренца и уравнениях транзитивности

Будем исходить из факторизованной формы лоренцевских преобразований

$$\begin{aligned}AA^* &= L \quad \Rightarrow \quad A = L(A^*)^{-1}, \\ A^*A &= L \quad \Rightarrow \quad A^* = LA^{-1},\end{aligned}\quad (40)$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned}L[(A^*)^{-1} + A^{-1}] &= A + A^*, & L[(A^*)^{-1} - A^{-1}] &= A - A^*, \\ A &= \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ -q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ -q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, & A^* &= \begin{pmatrix} q_0^* & -q_1^* & -q_2^* & -q_3^* \\ -q_1^* & q_0^* & iq_3^* & -iq_2^* \\ -q_2^* & -iq_3^* & q_0^* & iq_1^* \\ -q_3^* & iq_2^* & -iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}, \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, & (A^*)^{-1} &= \begin{pmatrix} q_0^* & q_1^* & q_2^* & q_3^* \\ q_1^* & q_0^* & -iq_3^* & iq_2^* \\ q_2^* & iq_3^* & q_0^* & -iq_1^* \\ q_3^* & -iq_2^* & iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (41)$$

В случае евклидовых вращений $q_0 = n_0$, $q_j = -in_j$ соотношения (41) дают

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ 0 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ 0 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ 0 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ 0 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & 0 & 0 & 0 \\ in_2 & 0 & 0 & 0 \\ in_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & in_1 & in_2 & in_3 \\ in_1 & 0 & 0 & 0 \\ in_2 & 0 & 0 & 0 \\ in_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фактически здесь есть только следующие четыре уравнения транзитивности:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ -n_3 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0 \\ n_3 \\ -n_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_3 \\ n_0 \\ -n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3 \\ n_0 \\ n_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ n_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где

$$O = \begin{pmatrix} 1 - 2(n_2^2 + n_3^2) & -2n_0n_3 + 2n_1n_2 & +2n_0n_2 + 2n_1n_3 \\ +2n_0n_3 + 2n_1n_2 & 1 - 2(n_3^2 + n_1^2) & -2n_0n_1 + 2n_2n_3 \\ -2n_0n_2 + 2n_1n_3 & +2n_0n_1 + 2n_2n_3 & 1 - 2(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix}, \quad n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (43)$$

В контексте поляризационной оптики наиболее интересным является последнее уравнение из (42)

$$O \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Однако и остальные три соотношения могут быть полезными для поляризационной оптики: они дают простые уравнения транзитивности, определяющие действие оптического элемента с фиксированной матрицей Мюллера на три типа пучков света. Аналогично можно рассмотреть случай псевдоевклидовых вращений $q_0 = m_0$, $q_j = m_j$, при этом (41) дает

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ -m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Используя соотношения $m_0 = \cosh \chi$, $m_j = \sinh \chi e_j$, $\mathbf{e}^2 = 1$, $m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1$, получаем представление для этого типа матриц Лоренца

$$L = \begin{pmatrix} m_0^2 + \mathbf{m}^2 & -2m_0m_1 & -2m_0m_2 & -2m_0m_3 \\ -2m_0m_1 & 1+2m_1^2 & 2m_1m_2 & 2m_1m_3 \\ -2m_0m_2 & 2m_1m_2 & 1+2m_2^2 & 2m_2m_3 \\ -2m_0m_3 & 2m_3m_1 & 2m_2m_3 & 1+2m_3^2 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

С помощью последнего легко проверяется, что действительно выполняются равенства

$$L \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & m_0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_0 & 0 \\ -m_3 & 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix},$$

$$L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -im_3 & im_2 \\ 0 & im_3 & 0 & -im_1 \\ 0 & -im_2 & im_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Среди уравнений (47) имеем 7 нетривиальных соотношений транзитивности, причем только один вектор (первый) является времениподобным и поэтому пригодным для описания поляризованного света:

$$m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = 1, \quad L \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ -m_1 \\ -m_2 \\ -m_3 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Все остальные являются пространственноподобными и не допускают интерпретации в рамках поляризационной оптики. Например, $m_1^2 - m_0^2 = -(1 + m_2^2 + m_3^2) < 0$.

Теперь обратимся к анализу общего случая матриц Мюллера лоренцевского типа

$$L[(A^*)^{-1} + A^{-1}] = A + A^*, \quad L[(A^*)^{-1} - A^{-1}] = A - A^*. \quad (49)$$

Выражая параметры (q_0, q_1, q_2, q_3) через вещественные и мнимые части

$$q_0 = x_0 + iy_0, \quad q_j = x_j + iy_j, \quad q_0^* = x_0 - iy_0, \quad q_j^* = x_j - iy_j,$$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \quad x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0, \quad (50)$$

уравнения (49) можно привести к виду

$$L \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & -y_3 & y_2 \\ x_2 & y_3 & x_0 & -y_1 \\ x_3 & -y_2 & y_1 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -x_1 & x_0 & y_3 & -y_2 \\ -x_2 & -y_3 & x_0 & y_1 \\ -x_3 & y_2 & -y_1 & x_0 \end{pmatrix},$$

$$L \begin{pmatrix} -y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ -y_1 & -y_0 & -x_3 & x_2 \\ -y_2 & x_3 & -y_0 & -x_1 \\ -y_3 & -x_2 & x_1 & -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ -y_1 & y_0 & -x_3 & x_2 \\ -y_2 & x_3 & y_0 & -x_1 \\ -y_3 & -x_2 & x_1 & y_0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

В явном виде имеющиеся здесь уравнения транзитивности таковы:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad L\psi_0 = \psi'_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ -y_2 \end{pmatrix}, \quad L\psi_1 = \psi'_1 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 \\ -y_3 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_3 \\ x_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad L\Psi_2 = \Psi'_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ y_3 \\ x_0 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_2 \\ -y_1 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad L\Psi_3 = \Psi'_3 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -y_2 \\ y_1 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

$$L\Phi_0 = \Phi'_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_1 = \Phi'_1 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -x_3 \\ -y_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_2 = \Phi'_2 = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -x_3 \\ y_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} -y_3 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -y_0 \end{pmatrix}, \quad L\Phi_3 = \Phi'_3 = \begin{pmatrix} -y_3 \\ x_2 \\ -x_1 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Можно заметить, что четыре случая из перечисленных описывают преобразования над 4-векторами, которые меняют знак нулевой компоненты. Такие случаи не могут применяться в поляризационной оптике. Как стоксовы 4-векторы могут рассматриваться только четыре случая: $\Psi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$.

Таким образом, сам способ параметризации матриц из группы Лоренца, основанный на использовании факторизованного представления таких матриц в виде произведения двух взаимно коммутирующих преобразований, развитый много лет назад Ф.И. Федоровым [1], позволяет по-новому подойти к задаче нахождения параметров матриц Мюллера оптических элементов лоренцевского типа – через использование уравнений транзитивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
2. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.

3. Bogush, A.A. On unique parametrization of the linear group $GL(4, C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.
4. Red'kov, V.M. 4×4 matrices in Dirac parametrization: inversion problem and determinant / V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2008. – Mode of access : <http://arxiv.org/abs/0709.3574v2>.
5. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
6. Овсиюк, Е.М. Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса – Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Весн. Магілєў. дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1 (37). – С. 69–75.
7. Овсиюк, Е.М. Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.
8. Редьков, В.М. Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса – Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
9. Ovsyuk, E.M. Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // XLVIII All-Russia conference on problems in Particle Physics, Plasma Physics, Condensed Matter and Optoelectronics, Russia, Moscow, 15–18 May 2012 – Vestn. RUDN. – 2013. – 15 p.
10. Овсиюк, Е.М. Возможна ли финслерова геометрия поляризационной оптики / Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2012. – Т. 9, № 1 (17). – С. 1–56.

E. Ovsyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov. Some Properties of Parameters of Lorentz Matrices and Transitivity Equations in Polarization Optics

In the context of applying the Lorentz group theory to polarization optics in the frames of Stokes–Mueller formalism, some properties of the Lorentz group are investigated. Mueller matrices of the Lorentzian type $M = L$ are pointed out as a special sub-class in the total set of (4×4) -matrices of the linear group $GL(4, R)$. Any arbitrary Lorentz matrix is presented as a linear combination of 16 elements of the Dirac basis. On this ground, a method to construct parameters q_a by an explicitly given Lorentz matrix L is elaborated. It is shown that the factorized form of $L = M$ matrices provides us with a number of simple transitivity equations relating couples of initial and final 4-vectors, which are defined in terms of parameters q_a of the Lorentz group. Some of these transitivity relations can be interpreted within polarization optics.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 11.01.2013

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев**РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ
ДЛЯ КИРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2**

Получено релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином 3/2, не распадающееся в P -инвариантном смысле. Рассмотрены матричная и спинорная формулировки этого уравнения.

Введение

В стандартном подходе теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) обычно рассматривается набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для описания частицы со спином S . В то же время использование расширенного набора представлений, включая кратные, позволяет учитывать дополнительные внутренние (изоспиновые) степени свободы, соответствующие иным квантовым числам [1]. Одним из таких квантовых чисел может быть, например, киральность, которая различает двукратно вырожденные состояния частицы с данным значением спина, сопряженные относительно операции пространственной инверсии.

Понятие киральности получило широкое распространение в современной теоретической физике после того, как в основу теории электрослабых взаимодействий было положено представление о существовании только левостороннего нейтрино. Однако разработка унитарной перенормируемой теории киральных частиц и их взаимодействий всё еще находится на самой начальной стадии. Существенный шаг в этом направлении для частиц со спином 1 сделан профессором Софийского университета Чижовым (см. обзор [2] и приведенные в нем ссылки). В настоящей работе в подходе Гельфанда – Яглома [3] построено РВУ первого порядка для киральной частицы с ненулевой массой и спином 3/2.

Матричная формулировка РВУ первого порядка для киральной частицы со спином 3/2

Рассмотрим следующую схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$\begin{array}{ccc} 2\left(\frac{1}{2}, 1\right) & - & 2\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & - & \left(\frac{1}{2}, 0\right). \end{array} \quad (1)$$

Набор представлений, содержащихся в (1), отличается от набора, используемого при построении известного уравнения Фирца – Паули [4; 5], наличием кратных (повторяющихся) компонент $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Используя подход Гельфанда – Яглома [3], проанализируем схему (1) с точки зрения возможности построения матричного РВУ первого порядка

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \quad (2)$$

для частицы со спином 3/2 и внутренним квантовым числом – киральностью.

Введем нумерацию неприводимых компонент, входящих в (1):

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{2}\right) \sim \tau_1 \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim \tau_2 \sim 2, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim \tau_3 \sim 3, \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim \tau_4 \sim 4, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right)' \sim \tau_5 \sim 5, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right)' \sim \tau_6 \sim 6 \end{aligned} \quad (3)$$

(штрихи здесь нужны для различения кратных представлений). Тогда матрица γ_4 уравнения (2) со схемой зацеплений (1) будет иметь структуру

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^{1/2} \otimes I_2 & \\ & C^{3/2} \otimes I_4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $C^{1/2}$ и $C^{3/2}$ – спиновые блоки, соответствующие спинам 1/2 и 3/2:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & c_{14}^{1/2} & 0 & c_{16}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & c_{23}^{1/2} & 0 & c_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{32}^{1/2} & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & c_{36}^{1/2} \\ c_{41}^{1/2} & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & c_{45}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{52}^{1/2} & 0 & c_{54}^{1/2} & 0 & c_{56}^{1/2} \\ c_{61}^{1/2} & 0 & c_{63}^{1/2} & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{23}^{3/2} & c_{25}^{3/2} & 0 \\ c_{32}^{3/2} & 0 & 0 & c_{36}^{3/2} \\ c_{52}^{3/2} & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} \\ 0 & c_{63}^{3/2} & c_{65}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Остальные матрицы $\gamma_i (i=1, 2, 3)$ выражаются через γ_4 и «бусты» J^{i4} представления (1) по формуле

$$\gamma_i = [J^{i4}, \gamma_4].$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований собственной группы Лоренца налагает следующие ограничения на элементы $c_{\tau\tau'}^s$ матрицы γ_4 [3]:

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s+l_+ + 2)(s-l_+ - 1)}, \quad \text{если } l'_+ = l_+ + 1, l'_- = l_-, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s+l_- + 2)(s-l_-)}, \quad \text{если } l'_+ = l_+, l'_- = l_- + 1, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \left(s + \frac{1}{2}\right), \quad \text{если } l'_+ = l_+, l'_- = l_-, \end{aligned} \quad (6)$$

где $l_+ = l_1 + l_2$, $l_- = |l_1 - l_2|$, $l'_+ = l'_1 + l'_2$, $l'_- = |l'_1 - l'_2|$, $c_{\tau\tau'}^s$ – произвольные комплексные числа для случая, когда представления τ , τ' зацепляются, и равные нулю во всех остальных случаях. Применительно к рассматриваемому РВУ условия (6) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{23}^{3/2} &= 2c_{23}^{1/2}, \quad c_{32}^{3/2} = 2c_{32}^{1/2}, \quad c_{36}^{3/2} = 2c_{36}^{1/2}, \quad c_{63}^{3/2} = 2c_{63}^{1/2}, \\ c_{25}^{3/2} &= 2c_{25}^{1/2}, \quad c_{52}^{3/2} = 2c_{52}^{1/2}, \quad c_{56}^{3/2} = 2c_{56}^{1/2}, \quad c_{65}^{3/2} = 2c_{65}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Инвариантность РВУ (2) относительно операции пространственного отражения накладывает на числа $c_{\tau\tau'}$ условия:

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau'\tau}^s, & \text{если } \dot{\tau} = \tau, \dot{\tau}' = \tau'; \\ c_{\tau\tau'}^s &= \pm c_{\tau'\tau}^s, & \text{если } \dot{\tau} = \tau, \dot{\tau}' \neq \tau' \\ & & \text{либо } \dot{\tau} \neq \tau, \dot{\tau}' = \tau'. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом знак «+» во втором условии (8) (для определенности считаем $\dot{\tau} = \tau$, $\dot{\tau}' \neq \tau'$) берется тогда, когда оператор пространственного отражения P действует в подпространствах R^τ , $R^{\tau'}$ по формулам

$$P\xi_{sm}^{\tau} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau}, \quad P\xi_{sm}^{\tau'} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau'}, \quad (9a)$$

а знак «-» выбирается, если

$$P\xi_{sm}^{\tau} = (-1)^{s+1} \xi_{sm}^{\tau}, \quad P\xi_{sm}^{\tau'} = (-1)^s \xi_{sm}^{\tau'}, \quad (9b)$$

где ξ_{sm}^{τ} – базисные векторы в пространстве представления τ , описывающие состояния с определенными значениями абсолютной величины и проекции спина. Определяя операцию P -инверсии для схемы зацеплений (1) так, что

$$\dot{\tau}_2 = \tau_5, \dot{\tau}_3 = \tau_6, \quad (10)$$

в соответствии с формулами (8), (9a), (9b) получим:

$$\begin{aligned} c_{14}^{1/2} &= c_{41}^{1/2}, c_{12}^{1/2} = c_{45}^{1/2}, c_{16}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \\ c_{21}^{1/2} &= c_{54}^{1/2}, c_{23}^{1/2} = c_{56}^{1/2}, c_{25}^{1/2} = c_{52}^{1/2}, \\ c_{34}^{1/2} &= c_{61}^{1/2}, c_{32}^{1/2} = c_{65}^{1/2}, c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2}, \\ c_{23}^{3/2} &= c_{56}^{3/2}, c_{25}^{3/2} = c_{52}^{3/2}, c_{32}^{3/2} = c_{65}^{3/2}, c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Возможность лагранжевой формулировки теории предполагает выполнение соотношения [3]

$$c_{\tau\tau'}^s, \eta_{\tau'\tau}^s = (c_{\tau'\tau}^s)^* \eta_{\tau\tau}^s, \quad (12)$$

где $\eta_{\tau\tau}^s$ – ненулевые элементы матрицы билинейной формы η , имеющей в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (4). Элементы $\eta_{\tau\tau}^s$, не уменьшая общности, можно выбрать равными ± 1 , но при этом

$$\eta_{\tau\tau}^s = \eta_{\tau\tau}^s = -\eta_{\tau\tau}^{s+1}. \quad (13)$$

Применение условий (12) к рассматриваемому случаю даёт:

$$c_{54}^{1/2} = f_1 (c_{12}^{1/2})^*, c_{65}^{1/2} = f_2 (c_{23}^{1/2})^*, c_{34}^{1/2} = f_1 f_2 (c_{16}^{1/2})^*, \quad (14)$$

где использованы обозначения

$$f_1 = \frac{\eta_{25}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}, f_2 = \frac{\eta_{36}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}}, f_1 f_2 = \frac{\eta_{36}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}. \quad (15)$$

Совместное применение условий (7), (11), (14) оставляет у спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ шесть независимых элементов, в качестве которых можно выбрать, например, $c_{12}^{1/2}$, $c_{14}^{1/2}$, $c_{16}^{1/2}$, $c_{23}^{1/2}$, $c_{25}^{1/2}$, $c_{36}^{1/2}$. Рассмотрим вариант РВУ, когда

$$c_{14}^{1/2} = c_{16}^{1/2} = c_{25}^{1/2} = c_{36}^{1/2} = 0. \quad (16)$$

Тогда вводя (с целью удобства) для оставшихся ненулевых элементов обозначения

$$c_{12}^{1/2} = a, \quad c_{23}^{1/2} = b, \quad (17)$$

придем к следующему виду спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 a^* & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 b^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 a^* & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 & 0 \\ 2f_2 b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ связаны соотношением

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{\lambda_k^{(s)}} \quad (19)$$

с ненулевыми корнями $\pm \lambda_k^{(s)}$ спиновых блоков C^s , которые (корни), следовательно, должны быть вещественными. Для обеспечения вещественности корней блока $C^{3/2}$ параметр f_2 должен быть положительным, то есть

$$f_2 = 1. \quad (20)$$

Тогда двукратно вырожденный корень ± 1 у этого блока получится, если положить

$$b = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

При выборе параметров f_2 , b согласно (20), (21) для блока $C^{3/2}$ будем иметь окончательно выражение

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Спиновый блок $C^{1/2}$ при этом принимает вид

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2f_1 a^* & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_1 a^* & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Условием обращения в нуль всех корней данного блока является равенство

$$f_1 |a|^2 + \frac{1}{4} = 0, \quad (24)$$

котарому можна удзвольторить, полагаая, напрымер:

$$f_1 = -1, \quad a = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

В итоге приходим к спиновому блоку $C^{1/2}$ вида

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Выбор (20), (25) параметров f_1, f_2 означает, с учетом обозначений (15), задание матрицы билинейной формы η способом:

$$-\eta_{14}^{1/2} = \eta_{25}^{1/2} = \eta_{36}^{1/2} = -\eta_{25}^{3/2} = -\eta_{36}^{3/2} = 1. \quad (27)$$

Таким образом, РВУ первого порядка (2) со схемой зацеплений (1), матрицей γ_4 со спиновыми блоками $C^{3/2}$ (22) и $C^{1/2}$ (26) при выборе матрицы билинейной формы η согласно (27) описывает частицу со спином $\frac{3}{2}$ и двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному (помимо спина) квантовому числу.

Минимальные полиномы блоков $C^{3/2}, C^{1/2}$ и матрицы γ_4 имеют соответственно вид

$$\left(C^{3/2}\right)^2 - 1 = 0, \quad \left(C^{1/2}\right)^3 = 0, \quad (28)$$

$$\gamma_4^3 (\gamma_4^2 - 1) = 0, \quad (29)$$

то есть, как и в случае уравнения Фирца – Паули, матрица γ_4 неприводима к диагональному виду. В то же время минимальный полином (29) отличается от минимального полинома

$$\gamma_4^2 (\gamma_4^2 - 1) = 0$$

матрицы γ_4 в уравнении Фирца – Паули.

Выясним физический смысл вышеуказанного двукратного вырождения состояний. Выбор (16) элементов блоков $C^{3/2}, C^{1/2}$ означает, что схема зацеплений (1) распадается в смысле собственной группы Лоренца на две схемы:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad (30)$$

и

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2}, 1\right)'. \quad (31)$$

При этом в соответствии с заданием операции пространственной инверсии согласно (10) фрагменты (30), (31) являются P -сопряженными друг другу.

В структуре спиновых блоков $C^{3/2}$ (22), $C^{1/2}$ (26) данное обстоятельство отражается тем, что каждый из этих блоков представляет собой прямую сумму двух одинаковых клеток, соответствующих схемам зацеплений (30) и (31). При этом в блоке $C^{3/2}$ каждая из клеток имеет собственные значения ± 1 . Следовательно, внутреннее квантовое число, различающее кратные корни этого блока, описывает P -сопряженные состояния, относящиеся к представлениям (30), (31). Такое квантовое число называется киральностью (см., напр., [2]).

Следует заметить, что описание безмассовых частиц, обладающих киральностью, основывается только на представлениях $(0,S)$ и $(S,0)$, причем понятия киральности и спиральности (проекция спина на направление импульса частицы), по существу, совпадают. Для частиц с ненулевой массой это, очевидно, уже не так.

Спинорная формулировка

Спинорную формулировку построенного выше уравнения можно получить, если осуществить переход из базиса Гельфанда – Яглома в спинорный базис, в котором волновая функция ψ имеет вид

$$\psi = (\psi_a, \psi_{(bc)}^{\dot{a}}, \psi_a^{(bc)}, \psi^{\dot{a}}, \varphi_a^{(bc)}, \varphi_{(bc)}^{\dot{a}}) - \text{столбец.} \quad (32)$$

Здесь $\psi_a, \psi^{\dot{a}}$ – спиноры первого ранга, отвечающие представлениям $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 0)$;

$\psi_{(bc)}^{\dot{a}}, \psi_a^{(bc)}, \varphi_{(bc)}^{\dot{a}}, \varphi_a^{(bc)}$ – симметричные по двум индексам спиноры третьего ранга, со-

ставляемые соответственно представлениям $(\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)', (1, \frac{1}{2})'$;

$\partial_{\dot{a}b} = \partial_{\mu} (\sigma_{\mu})_{\dot{a}b}$ (σ_i – матрицы Паули, σ_4 – единичная матрица). В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{6}} \partial_{\dot{c}}^b \psi_{(ab)}^{\dot{c}} + m \psi_a &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} (\partial_b^{\dot{a}} \psi_c + \partial_c^{\dot{a}} \psi_b) + \frac{1}{2} (\partial_{\dot{a}b} \psi_c^{(\dot{a}\dot{a})} + \partial_{\dot{a}c} \psi_b^{(\dot{a}\dot{a})}) + m \psi_{(bc)}^{\dot{a}} &= 0, \\ \frac{1}{2} (\partial^{db} \psi_{(da)}^{\dot{c}} + \partial^{d\dot{c}} \psi_{(da)}^b) + m \psi_a^{(bc)} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \partial_{\dot{b}}^c \varphi_c^{(\dot{a}b)} + m \psi^{\dot{a}} &= 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} (\partial_a^b \psi_c^{\dot{c}} + \partial_a^{\dot{c}} \psi_b^{\dot{c}}) + \frac{1}{2} (\partial^{db} \varphi_{(da)}^{\dot{c}} + \partial^{d\dot{c}} \varphi_{(da)}^b) + m \varphi_a^{(bc)} &= 0, \\ \frac{1}{2} (\partial_{\dot{a}b} \varphi_c^{(\dot{a}\dot{a})} + \partial_{\dot{a}c} \varphi_b^{(\dot{a}\dot{a})}) + m \varphi_{(bc)}^{\dot{a}} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

В эквивалентности этих двух формулировок можно убедиться, если записать систему (33) в матричной форме (2) с волновой функцией (32) и найти вид минимального полинома для полученной таким образом матрицы γ_4 (равно и остальных матриц

γ_i). Он оказывается совпадающим с минимальным полиномом (29), что и означает указанную эквивалентность.

Заклучение

Используемое нами понятие киральности находится в полном соответствии с исходными посылками введения такого понятия в теории дираковских частиц. Действительно, P -инвариантное уравнение для частицы со спином $3/2$ строится здесь на основе двух нераспадающихся схем зацеплений, связанных операцией пространственной инверсии. В свою очередь, каждая из них может служить в качестве исходной для получения P -неинвариантного РВУ, описывающего частицу со спином $3/2$. Как и в случае уравнения Дирака, могут быть введены проективные операторы, коммутирующие с генераторами группы Лоренца и выделяющие компоненты волновой функции, которые соответствуют вышеуказанным P -сопряженным схемам зацеплений. Возможно и задание оператора киральности, аналогичного по физическому смыслу такому же оператору в теории Дирака.

Важно отметить, что проведенное рассмотрение представляет не только теоретический интерес. Использование понятия киральности широко обсуждается в адронной физике, в которой оно появляется при пренебрежении массами легких u и d кварков. Уже существует ряд высокопрецизионных экспериментов при низких энергиях, результаты которых свидетельствуют в пользу существования новых взаимодействий, переносимых киральными частицами. Последние экспериментальные данные из Национальной ускорительной лаборатории имени Э. Ферми (США), полученные при высоких энергиях, также согласуются с представлениями о существовании киральных частиц [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями и внутренние степени свободы частиц : дисс. ... докт. физ.-мат. наук / В.А. Плетюхов. – Минск, 1992. – 280 л.
2. Чижов, М.В. Теория и феноменология киральных частиц со спином единица / М.В. Чижов // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42, вып. 1. – С. 169–350.
3. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
4. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kräftefreier teilchen mit beliebigem spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12, №1. – P. 3–37.
5. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. – 1939. – Vol. A173. – P. 211–232.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with Spin - 3/2

Nondissociating P- invariant relativistic wave equation for chiral particle with spin - 3/2 is obtained. Matrix and spinor formulations of this equation is considered.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 07.03.2013

УДК 620.3-022.532

А.В. Сабуть, С.С. Секержицкий, В.А. Лиопо

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АТОМНО-КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ

Для гранецентрированных кубических (ГЦК), объемноцентрированных кубических (ОЦК) структур и гексагональных плотнейших упаковок (ГПУ) разработана методика расчета радиусов координационных сфер и соответствующих им координационных чисел. Предложена формула расчета квадратов радиусов координационных сфер. Координационное число определяется путем расчета комбинаций uvw , соответствующих определенному R^2 .

Введение

Уже в первой половине прошлого века экспериментально было установлено, что размер объекта влияет на теплоемкость C_V . С уменьшением размера образца численное значение этого параметра также уменьшается [1]. Объяснение указанного экспериментального факта не было сформулировано, хотя, по мнению многих исследователей, это обусловлено различиями протекания физических процессов. В объектах малых размеров влиянием поверхности на свойства вещественной частицы пренебрегать нельзя [2]. Для каждого вещества существует размерная граница L_0 , которая разделяет два состояния. Если размер частицы $r > L_0$, то влияние размера на численные значения параметров их физических свойств (S) отсутствует. Объект находится в макроскопическом состоянии и $S = S_V$ соответствует табличным значениям [3]. При $r < L_0$ численное значение $S = S(r)$. В общем случае эта зависимость имеет вид:

$$S(r) = S_V \left| \exp \left[-\alpha \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right|, \quad (1)$$

где $x = \frac{r}{L_0}$, α – коэффициент, зависящий от изучаемого свойства. Значение L_0 рассчитывается по формуле:

$$L_0 = \frac{\sqrt{1,5} \cdot h}{\sqrt{km}} \Theta_D^{-\frac{1}{2}} = 230 \cdot \Theta_D^{-\frac{1}{2}} (\text{нм}), \quad (2)$$

где h, k – постоянные Планка и Больцмана соответственно, m – масса электрона, Θ_D – температура Дебая [4]. Из формул (1), (2) следует, что при $r < L_0$ $S(r)$ монотонно уменьшается и при $r \rightarrow 0$ $S(r) \rightarrow 0$. При $r > L_0$ $S(r) = S_V$. Кроме зависимости $S(r)$ наночастица должна обладать поверхностью. Однако при размерах r , близких к атомным, понятие поверхности, как и понятие физического свойства, теряет смысл. Следовательно, наряду с размерной границей между макро- и наносостояниями должна существовать размерная граница между нано- и атомно-кластерным состоянием (B). Формула ее расчета, как показано в работе [5], имеет вид:

$$B = 3,2\sigma, \quad (3)$$

где σ – амплитуда колебаний атомов внешней координационной сферы, то есть атомов внешнего слоя кластера. Форма и геометрические параметры таких атомных кластеров зависят от состава и структуры их объемных аналогов.

Моноэлементные атомные кластеры

Наноразмерные объекты создаются либо диспергированием крупных полубрикетов, либо путем выращивания их из расплава, раствора или газовой фазы. Так как размерная граница между нано- и макросостояниями в большинстве случаев не превышает 20 нм , то при описании их структур и особенностей строения поверхностных слоев можно говорить о расположении в них отдельных атомов.

Наиболее простой моделью для такого анализа могут служить нанобъекты металлов. Подавляющее большинство этих веществ в макрофазах кристаллизуется в одной из трех систем: гранецентрированной кубической (ГЦК), объемноцентрированной кубической (ОЦК) и гексагональной плотнейшей упаковке [6].

Координаты атомов в указанных системах известны, то есть при заданных атомных радиусах можно рассчитать размеры атомных кластеров. При этом, естественно, предполагается, что взаимоконфигурация атомов в кластере соответствует структуре объемного аналога. Но такой подход затрудняет расчет координационных чисел на различных координационных сферах.

Нами предлагается следующая методика. На первом этапе необходимо перейти от F - и I -ячейки (ГЦК и ОЦК соответственно) к ячейке P -типа, базис которой зависит от параметров исходных кубических ячеек. В ГПУ-системе исходная ячейка уже имеет P -тип. Кубические ячейки и P -ячейки для ГЦК- и ОЦК-решеток приведены на рисунке 1, на котором изображена и P -ячейка ГПУ-системы.

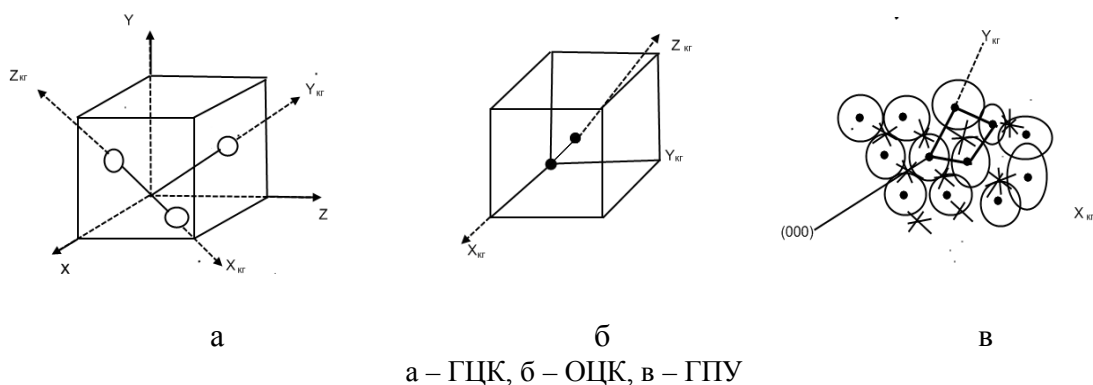


Рисунок 1 – Кристаллографические базисы ячеек P -типа

Координатные оси традиционных установок базиса обозначены (xyz) без индексов. Оси P -ячейки $(x_{cr}y_{cr}z_{cr})$ с индексом ($КГ$). Для расчета межатомных расстояний и, следовательно, радиусов координационных сфер необходимо от кристаллографических систем переходить к кристаллофизической ($КФ$). Эта система ортогональная, и расстояния измеряются в СИ.

Переход от кристаллографических координат $(x_j)_{КГ} (j = 1, 2, 3)$ к кристаллофизическим и обратно осуществляется по формуле:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{K\Phi} = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{K\Gamma}, \quad (4)$$

где a, b, c – параметры ячейки в $K\Gamma$ -системе [7]. Формулу (4) представим в виде:

$$\begin{aligned} x_j|_{K\Phi} &= |M| x_i|_{K\Gamma} \\ x_i|_{K\Gamma} &= |M|^{-1} x_j|_{K\Phi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $|M| = |a_j^i|$, $|M|^{-1}$ – прямой и обратный метрический тензоры соответственно. Тензоры $|M|$ и $|M|^{-1}$ рассматриваемых $K\Gamma$ -систем с P -ячейкой приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Прямые $|M|$ и обратные $|M|^{-1}$ метрические тензоры для рассматриваемых $K\Gamma$ -систем, d – диаметр атома.

Решетки	$ M $	$ M ^{-1}$
ГЦК	$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}d & \frac{\sqrt{2}}{2}d & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}d & \frac{\sqrt{2}}{2}d \\ \frac{\sqrt{2}}{2}d & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2d} & -\frac{\sqrt{2}}{2d} & \frac{\sqrt{2}}{2d} \\ \frac{\sqrt{2}}{2d} & \frac{\sqrt{2}}{2d} & -\frac{\sqrt{2}}{2d} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2d} & \frac{\sqrt{2}}{2d} & \frac{\sqrt{2}}{2d} \end{vmatrix}$
ОЦК	$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}d & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}d \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}d & \frac{\sqrt{3}}{3}d \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2d} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2d} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2d} & -\frac{\sqrt{3}}{2d} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$
ГПУ	$\begin{vmatrix} d & \frac{d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}d & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3}d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{\sqrt{3}}{3d} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4d} \end{vmatrix}$

В выбранных P -ячейках атомы ГЦК и ОЦК решеток имеют целочисленные координаты (uvw) . В ГПУ целочисленные координаты имеют атомы слоя A . Атомы слоя B имеют $KГ$ -координаты $\left(\frac{1}{3} + \lambda, \frac{1}{3} + \mu, \frac{1}{3} + \nu\right)$, где λ, μ, ν – целые числа.

От кристаллографических координат переход к кристаллофизическим (декартовым) осуществляется по формуле (5) с учетом записей метрических тензоров, приведенных в таблице 1. Эти кристаллофизические координаты для рассматриваемых решеток имеют вид:

$$\text{ГЦК} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} d(u+v), \frac{\sqrt{2}}{2} d(v+w), \frac{\sqrt{2}}{2} d(u+w) \right),$$

$$\text{ОЦК} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d(u+w), \frac{\sqrt{3}}{3} d(v+w), \frac{\sqrt{3}}{3} dw \right),$$

ГПУ

$$\text{для атомов слоя } A - \left(d\left(u + \frac{v}{2}\right), d \frac{\sqrt{3}}{2}, d \frac{\sqrt{6}}{3} \right),$$

$$\text{для атомов слоя } B - \left(d\left(\frac{1}{2} + \lambda + \frac{\mu}{2}\right), \frac{d\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3} + \mu\right), \frac{2\sqrt{6}}{3} d\left(\frac{1}{2} + \nu\right) \right).$$

В кристаллофизических координатах значение d – диаметр сферического атома.

Зная кристаллофизические координаты точек с целочисленными индексами в P -ячейках $KГ$ -системы, можно определить квадраты расстояний от этих точек до начала координат. Для ГЦК-решетки:

$$R_{uvw}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) = d^2(u^2 + v^2 + w^2 + uv + uw + vw) \quad (6)$$

Так как u, v, w – целые числа, то

$$R_n = d\sqrt{n}, \quad (7)$$

где n – номер координационной сферы. Число шаров, находящихся на n -й сфере, определяется условием:

$$u^2 + v^2 + w^2 + uv + uw + vw = n. \quad (8)$$

Для ОЦК-решетки:

$$R^2 = \frac{d^2}{3} \{4[u^2 + v^2 + w(u+v)] + 3w^2\}, \quad (9)$$

Так как u, v, w – целые числа, то условие (9) можно записать в виде

$$R^2 = \frac{d^2}{3} n, \quad (10)$$

где n – номер координационной сферы.

Для ГПУ-системы атомы слоев A характеризуются квадратом расстояния до начала координат:

$$R_{(A)}^2 = d^2 \left(u^2 + v^2 + uv + \frac{2}{3} w \right), \quad (11)$$

Атомы слоев B :

$$\begin{aligned} R_{(B)}^2 &= d^2 \left[\left(\frac{1}{2} + \lambda + \frac{\mu}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} + \mu \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} + \nu \right)^2 \right] = \\ &= d^2 \left(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \frac{8}{3} \nu^2 + \lambda\mu + \lambda + \mu + \frac{8}{3} \nu \right) \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (6), (9), (11), задав значения (uvw) , а в формуле (12) – λ, μ, ν , легко рассчитать значения R для упаковок шаров с диаметром d . Используя методы комбинаторики и рассматривая число сочетаний из u, v, w или λ, μ, ν , можно определить координационное число для соответствующей координационной сферы.

Точечная симметрия атомно-молекулярных кластеров

Модель плотнейшей шаровой упаковки для одноэлементных веществ с изодесмическими межатомными связями применима лишь к наночастицам, когда силы поверхностного натяжения соизмеримы с силами межатомного взаимодействия. При дальнейшем увеличении объема частицы она будет приобретать полиэдрический габитус с точечной симметрией макроскопического аналога. Однако и в наночастице число атомов достаточно велико. Действительно, наноразмерная граница L_0 для металлов лежит в интервале от 10,0 до 20,0 нм [4]. Диаметры атомов металлов лежат в интервале $2,5 \div 5,2 \text{ \AA}$ [3]. Для оценки порядка числа атомов в наночастице примем ее радиус $R \approx \frac{\overline{L_0}}{2} = 8 \text{ нм}$, а радиус атома металла $\overline{r} = 1,5 \text{ \AA}$. Следовательно, если в наночастице N атомов, а коэффициент упаковки равен k , то

$$N = \left(\frac{R}{r} \right)^3 k. \quad (13)$$

Коэффициент $k = 0,74$ для плотнейшей упаковки и $0,68$ для ОЦК-решеток. Так как величина k не влияет на порядок числа N , примем $k = 0,7$. Следовательно, число атомов в наночастице $N \sim 10^6$.

На примере ГЦК-упаковки устанавливается число координационных сфер в наночастице $n \approx 700$ [7]. Можно предположить, что в этом достаточно большом по атомным масштабам объекте точечная симметрия такая же, как и для макроскопического аналога.

Кубические кристаллы характеризуются голоэдрической точечной группой $(m\bar{3}m)$, матрицы-генераторы которой имеют вид:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \quad (14)$$

Голоэдрическая группа гексагональных кристаллов $\left(\frac{6}{mmm} \right)$ характеризуется матрицей-генератором, также состоящей из трех матриц:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \right). \quad (15)$$

Порядки групп равны: 48 у $m3m$ и 24 у $\frac{6}{mmm}$ [7, 8].

Матрицы-генераторы кубических и гексагональных кристаллических систем в формуле (14) соответствуют кристаллофизическому базису. Для построения всей точечной группы в этом базисе ($C_{K\Phi}$) необходимо использовать стандартные методы построения групп в матричном представлении. Выбрав соответствующую исходную точку в $K\Gamma$ -системе с ячейкой Браве P -типа (uvw), необходимо перейти к кристаллофизической системе [4, 5], а затем подействовать на точку (xyz) всеми элементами группы. В этом случае получим точки, находящиеся на одной координационной сфере. При этом необходимо учитывать, что одинаковое значение R может соответствовать различным наборам (uvw) в $K\Gamma$ -системе [9]. Например, первая координационная сфера в $K\Phi$ -системе соответствует точкам координатной формы $\left\{ \frac{d}{2}, \frac{d}{2}, 0 \right\}$, а в $K\Gamma$ -системе – двум координатным формам $\{1,0,0\}$, $\{1,1,\bar{1}\}$. Если в координатной правильной форме $K\Phi$ -системы $\{d,d,0\}$ построить все перестановки с изменениями знаков, то получим 12 различных точек с одинаковыми расстояниями до начала координат. Все эти точки находятся на первой координационной сфере, так как m равно единице [6, 7].

Заклучение

Рассмотрена методика расчета радиусов координационных сфер и соответствующих им координационных чисел. Эта методика разработана для ГЦК-, ОЦК- и ГПУ-решеток. В то же время показано, что она может быть использована для кристаллов сложных составов. Сферическая или эллиптическая форма частиц определяет наноразмерные объекты. В противном случае поверхность приобретает полиэдрический габитус. Сферическая или эллиптическая форма частиц соответствует их размерам (r), отвечающим условию $B < r < L_0$, где B, L_0 соответственно размерные границы между атомно-кластерным состоянием и наносостоянием, а также между нано- и макросостоянием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. лит., – 1962. – 696 с.
2. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела / Н. Ашкрофт, Н. Мерлин – М. : Мир, 1979. – Т. 2. – 422 с.
3. Бацанов, С.С. Экспериментальные основы структурной химии : справочник / С.С. Бацанов. – М. : Изд-во стандартов, 1986. – 239 с.
4. Лиопо, В.А. Размеры и габитус нанокристаллов / В.А. Лиопо // Актуальные проблемы физики твердого тела. Т. 2. – Минск. : Изд. НАН, 2005. – С. 275–277.
5. Лиопо, В.А. Размерная граница между наночастицей и атомно-кластерным состоянием вещества / В.А. Лиопо // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. – 2012. – № 1(126). – С. 100–104.
6. Бокий, Г.Б. Кристаллохимия / Г.Б. Бокий. – М. : Наука, 1974. – 388 с.
7. Лиопо, В.А. Матричная кристаллография / В.А. Лиопо. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 1998. – 78 с.
8. Вайнштейн, Б.К. Современная кристаллография / Б.К. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 383 с.
9. Нарай-Сабо, И. Неорганическая кристаллохимия / И. Нарай-Сабо. – Будапешт : Изд-во Акад. наук Венгрии, 1969. – 504 с.

A.V. Sabutz, S.S. Sekerzhitsky, V.A. Liopo. Calculation of Geometric Characteristics of Atomic Cluster Systems

For face-centered cubic (fcc), body-centered cubic (bcc) structure and hexagonal close packing (hcp) the method of calculation of the radii coordination sphere and the corresponding coordination numbers were developed. The formula calculating the squares of the radii of the coordination spheres was proposed. Coordination number is determined by calculating combinations uvw , corresponding to a certain R^2 .

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 17.01.2013

УДК 539.21

В.С. Савенко, А.И. Зеленкевич

ГЕНЕРИРОВАНИЕ И ПРОБЕГ ДВОЙНИКУЮЩИХ ДИСЛОКАЦИЙ В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧНОСТИ

В работе представлены результаты экспериментального исследования кинетики развития двойникования в кристаллах висмута при возбуждении электронной подсистемы металла импульсами тока. Приведен сравнительный анализ стартовых напряжений двойникоующих дислокаций в условиях электропластичности металла. Показано, что с ростом плотности тока в импульсе стимулируются процессы генерирования двойникоующих дислокаций и их трансляция вдоль готовой поверхности раздела, что открывает возможности дополнительной пластификации двойникоующего материала.

Пластическая деформация металлов в зависимости от условий деформации, кристаллического строения реализуется двумя основными способами – скольжением и двойникованием. Двойникование представляет процесс последовательного смещения друг относительно друга атомных плоскостей металла, параллельных плоскости двойникования, на одно и то же расстояние, которое составляет некоторую часть параметра кристаллической решетки металла. Пластическая деформация двойникованием осуществляется и в случае невозможности протекания скольжения, например, при ориентационном запрете, при больших скоростях нагружения и при низких температурах. Двойникование, как правило, начинается у концентраторов напряжений, развитие двойников осуществляется с большими скоростями. При взаимодействии со скользящими дислокациями возникает концентрация напряжений и деформаций на границе двойников, которые часто приводят к разрушению материала.

При деформировании двойникоующегося кристалла сосредоточенной нагрузкой на плоскости спайности у концентраторов напряжений появляется по определенным кристаллографическим направлениям система остаточных клиновидных двойников. Клиновидный двойник представляет собой совокупность плоскостей, в которых процесс перестройки решетки в двойниковое положение начат, но до конца не реализован (рисунок 1). Каждая такая плоскость завершается двойникоующей дислокацией. Число двойникоующих дислокаций на границах двойника составляет $10^4-10^5 \text{ см}^{-1}$ на единицу длины, дислокации распределены в плоскости двойникования непрерывно с некоторой плотностью ρ . Предполагается, что все двойникоующиеся дислокации краевые или винтовые.

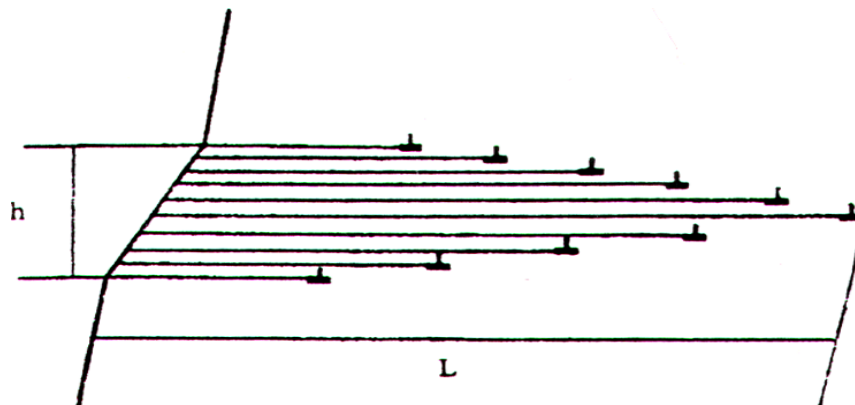


Рисунок 1 – Дислокационная модель клиновидного двойника

Для развития пластической деформации двойникованием необходимо неоднородное поле напряжений. Зарождение и развитие клиновидных двойников на плоскости спайности кристалла осуществляется деформированием в «точке», то есть сосредоточенной нагрузкой.

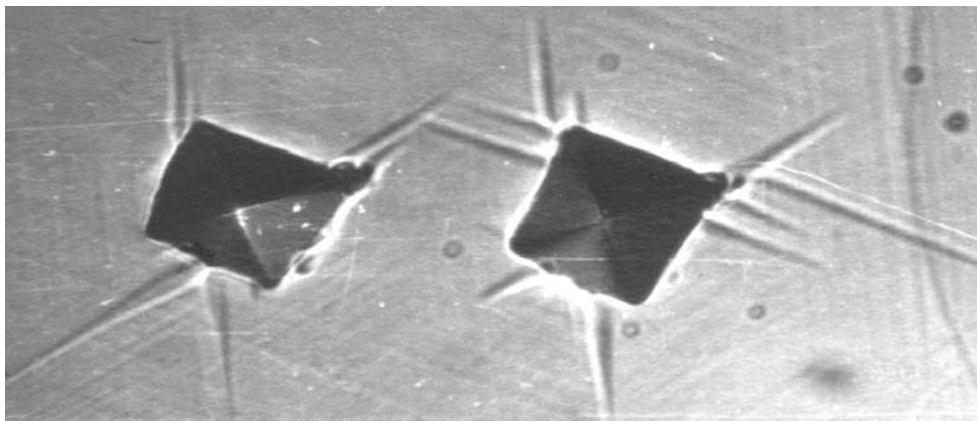
Для исследования кинетики развития двойникования в условиях электропластичности в кристаллах висмута была создана установка, которая позволяла деформировать кристалл двойникованием и одновременно возбуждать электронную структуру образца, пропуская импульс электрического тока большой плотности. С помощью цифрового микротвердомера MicroMet 5114 воспроизводились результаты измерения микротвердости по методу Виккерса. На плоскости спайности (111) монокристалла технического висмута (Bi 96%) вдавливалась алмазная четырехгранная пирамида с углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Продолжительность выдержки индентора под нагрузкой принимали равным 2–15 с, тестовые нагрузки P были 2–500 г. Микротвердость рассчитывалась по формуле:

$$HV = \frac{P}{M} = \frac{2P \sin \frac{\alpha}{2}}{d_1^2} = 1,854 \frac{P}{d_1^2},$$

где P – нагрузка на индентор, d – диагональ отпечатка.

Деформация кристалла сосредоточенной нагрузкой приводит к зарождению на плоскости спайности (111) системы клиновидных двойников. Плоскость спайности кристалла Bi (111) представляет собой ориентационный запрет для скольжения, и по ней идет развитие винтовых составляющих двойникующих дислокаций клиновидных двойников [1].

При пропускании через металлические монокристаллы висмута импульсов электрического тока с плотностью от 50–1000 А/мм² и длительностью 10⁻⁴ с наблюдается перераспределение деформации двойникованием в окрестностях концентраторов механических напряжений.



Отпечаток слева получен при нагрузке на индентор 10 г. Отпечаток справа – при той же нагрузке на индентор, но во время деформации через кристалл пропускался импульс тока плотностью 600 А/мм² (x 530).

Рисунок 2 – Микрофотография двойников на плоскости спайности монокристаллов висмута

Площадь двойниковой перестройки кристалла характеризуется максимальной длиной двойникового луча L_m , лимитируется уровнем внешних напряжений в вершине

двойника и силами торможения в кристаллической решетке перемещению двойникующих дислокаций. Последнее, естественно, зависит от локальных нарушений в структуре кристалла, условий деформации и его модификации. Считалось, что распространению максимального двойникового луча меньше всего препятствуют локальные нарушения кристаллической структуры вблизи отпечатка и L_m характеризует зону пластической деформации, охваченной двойникованием [2, 3].

Импульсы электрического тока, прошедшие через кристалл во время деформирования, не только увеличивают пробег двойникующих дислокаций, увеличивая зону двойникования, но и возбуждают новые источники двойникующих дислокаций.

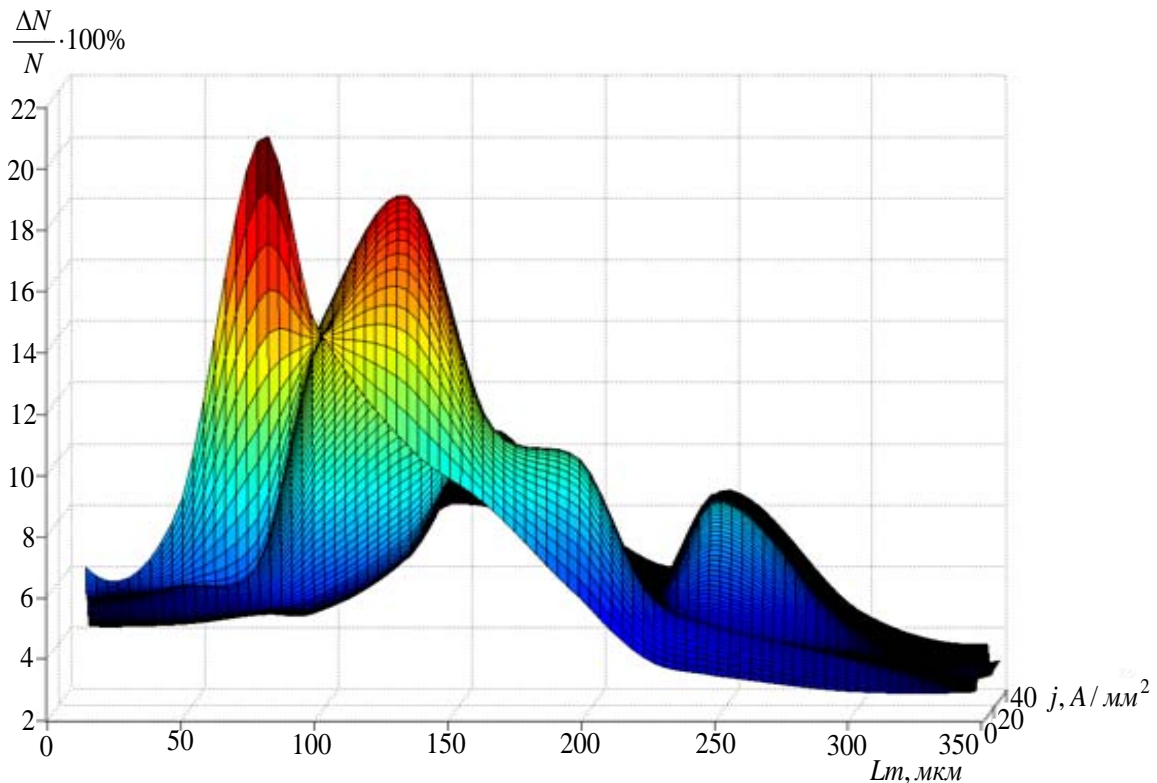


Рисунок 3 – Количество двойников, возникающих при двойниковании кристаллов висмута от плотности тока в импульсе

Начиная с порогового значения электропластичности ($i = 50 \text{ A/мм}^2$), увеличивается количество двойников, возникших у отпечатка индентора. Причем возбуждаются не только источники двойникующих дислокаций, возникшие от механических концентраторов напряжений ($\frac{\Delta n_{cm}}{n}$), но и генерируются новые «электродвойники» ($\frac{n_{en}}{n}$) в условиях уменьшения стартовых напряжений перемещения двойникующихся дислокаций при возбуждении электронной подсистемы металла. Установлена зависимость между средним объемом клиновидного двойника и количеством всех двойников в кристалле, причем средний объем двойника уменьшается с увеличением объемной доли двойников. То же наблюдается в распределении измеряемых параметров двойникования у отпечатка индентора. С увеличением плотности тока до 700 A/мм^2 скорость роста числа двойников и их объемной части уменьшается, хотя эффект не достигает насыщения.

Кинетику развития двойникования в условиях электропластичности можно описать суперпозицией нескольких элементарных процессов. Это возбуждение дислокаци-

онных источников двойникующих дислокаций, уменьшение стартовых напряжений для перемещения винтовых дислокаций, образование поверхности раздела, трансляция двойникующих дислокаций вдоль готовой поверхности раздела, образование остаточного клиновидного двойника. Следует отметить, что при плотностях тока до 300 A/mm^2 преобладает процесс возбуждения дислокационных источников, с ростом плотности тока в импульсе стимулируются процессы образования поверхности раздела и трансляции двойникующих дислокаций вдоль готовой поверхности раздела и завершения процесса двойникования.

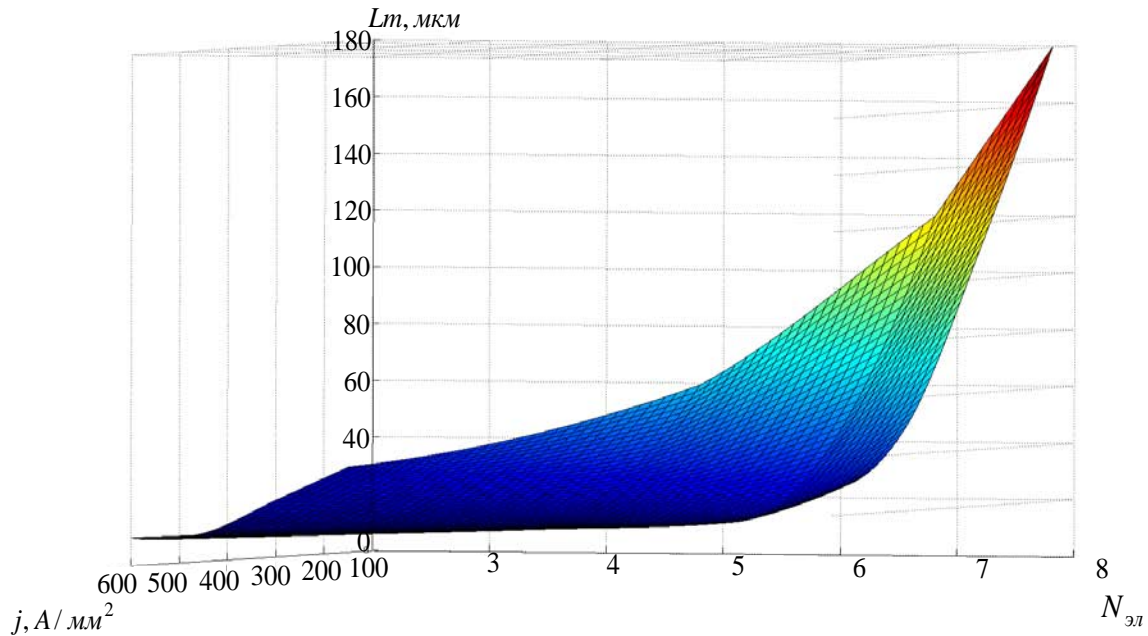


Рисунок 4 – Пробег и генерирование двойникующих дислокаций от плотности тока в кристаллах висмута

Изучение большого количества отпечатков показывает, что отношение величины нагрузки на индентор к квадрату максимальной длины двойникового луча у отпечатков – величина, близкая к постоянному значению. Значения P/L_m^2 с изменением нагрузки почти не изменяются для кристаллов одного состава (рисунок 4). P/L_m^2 имеет размерность напряжений и характеризует линейные размеры области кристалла, которая охватывается двойникованием, поэтому естественно считать, что эта величина пропорциональна напряжениям, необходима для продвижения в кристалле двойникующих дислокаций, тем самым величина P/L_m^2 может служить количественной характеристикой для пластической деформации двойникованием. Отношение P/L_m^2 пропорционально напряжениям, при которых прекращается движение двойникующих дислокаций, когда дислокации в вершине двойника достигают областей, где внешнее напряжение от сосредоточенной нагрузки уравнивается силами сопротивления кристаллической решетки, т.е. это аналог предела текучести для пластической деформации двойникованием. Порядок величины P/L_m^2 соответствует диапазону стартовых напряжений для двойникующих дислокаций в кристаллах [4, 5].

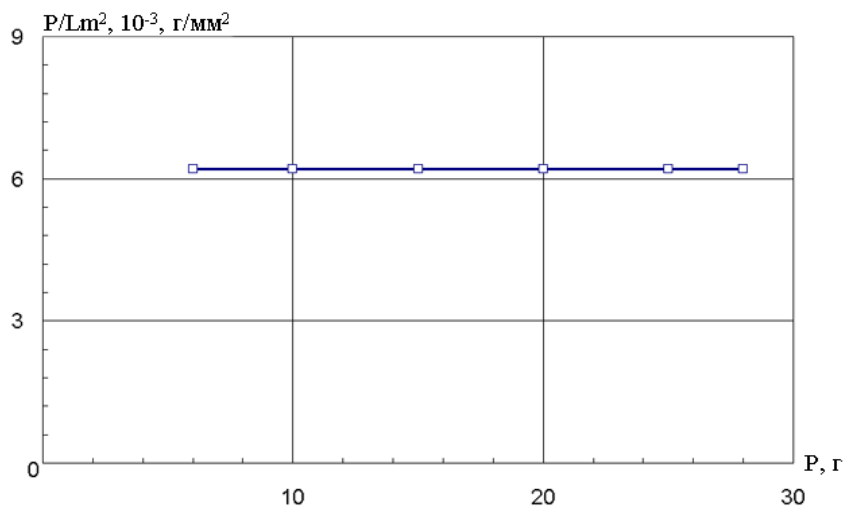


Рисунок 5 – Зависимость величины $P/L^2 \max$ от нагрузки на индентор в кристаллах технического висмута

На рисунке 6 показана зависимость величины P/L_m^2 от плотности тока в импульсе. Видно, что значения P/L_m^2 начинают падать при плотностях тока в импульсе 50–70 А/мм² (пороговые значения электропластического эффекта при двойниковании), затем величина P/L_m^2 значительно уменьшается, и при больших значениях плотности тока в импульсе происходит стабилизация величины P/L_m^2 .

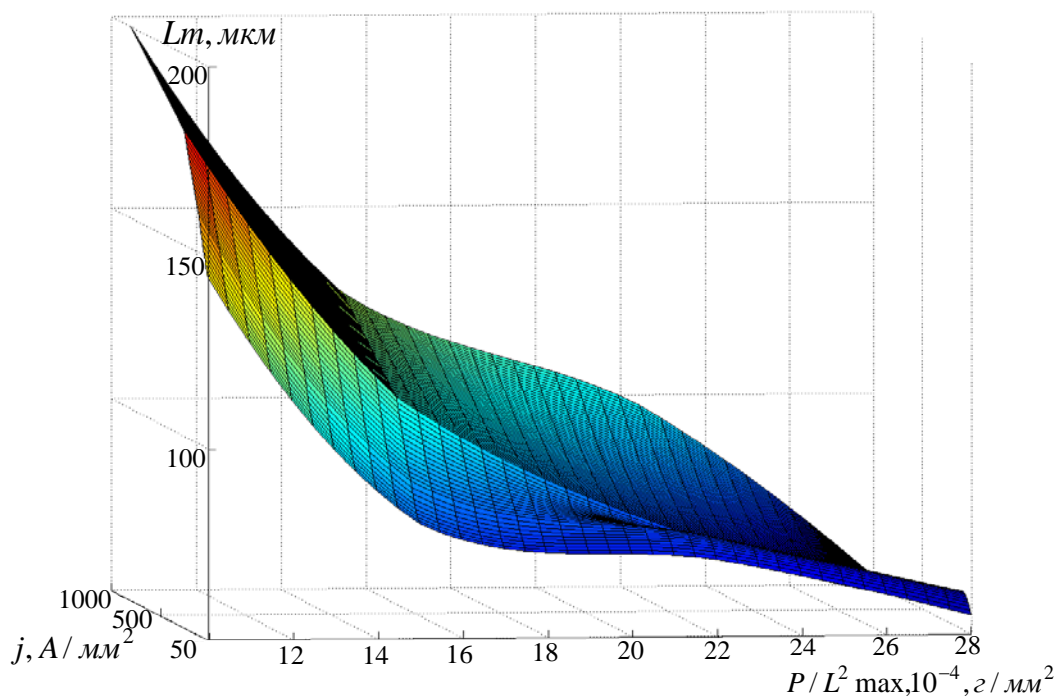


Рисунок 6 – Зависимость величины $P/L^2 \max$ от плотности тока в кристаллах висмута В1 99,99%

Если рассматривать влияние электрических импульсов тока на развитие двойникования с этой точки зрения, то значения P/L_m^2 при одновременном воздействии внешней нагрузки и импульса тока уменьшаются в несколько раз, т.е. пропускание импульса тока в момент нагружения кристалла сопровождается значительным уменьшением сопротивления кристаллической решетки двойникованию. Таким образом, одновременное действие нагрузки и электрических импульсов дает возможность дополнительной пластификации материала за счет двойникования. При этом импульсы электрического тока повышают долю двойникования в общей пластической деформации двойникующихся материалов, т.е. увеличивают резерв пластичности.

Установлены физические основы кинетики развития двойникования в условиях возбуждения электронной подсистемы металла. Показано, что с ростом плотности тока в импульсе стимулируются процессы образования поверхности раздела и трансляции двойникующих дислокаций вдоль готовой поверхности раздела, увеличивается пробег и генерирование двойникующих дислокаций, что открывает возможности дополнительной пластификации двойникующего материала, повышая долю двойникования в общей пластической деформации, увеличивая тем самым резерв пластичности двойникующихся материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савенко В.С. Анизотропия электромеханического эффекта при двойниковании кристаллов висмута / В.С. Савенко // Физические свойства газов и твердых тел. – Минск : МГПИ, 1979.
2. Remy, L. The kinetics of deformation twinning in face-centred cubic crystals and his relation with sires-strain diagram. – Acta met. – 1978. – Vol. 26, № 3 – С. 433–451.
3. Башмаков, В.И. Возбуждение двойникования в кристаллах висмута импульсами тока большой плотности / В.И. Башмаков, В.С. Савенко, М.С. Цедрик // Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С.109–114.
4. Савенко, В.С. Электронно-пластический эффект при двойниковании монокристаллов висмута / В.С. Савенко, В.И. Спицын, О.А. Троицкий // Докл. Акад. наук СССР. – 1985. – Т. 283, № 5. – С. 1181–1183.
5. Savenko, V.S. Plastification of Bismuth Crustal under Simultaneous Superposition of Electric and Magnetic Fields / V.S. Savenko // Zeitschrift fur METALLKUNDE – 1998. – № 7. – P. 498–500.

V.S. Savenko, A.I. Zelenkevich. Generating and Run the Dvoynikuyushchikh of Dislocations in the Conditions of Electroplasticity

In work results of a pilot study of kinetics of development of a dvoynikovaniye in bismuth crystals are presented at excitement of an electronic subsystem of metal by current impulses. The comparative analysis of starting tension of dvoynikuyushchy dislocations in the conditions of electroplasticity of metal is provided. It is shown that with growth of density of current processes of generating of dvoynikuyushchy dislocations, and their translation are stimulated in an impulse along a ready interface that opens possibilities of additional plasticization of a dvoynikuyushchy material.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 11.02.2013

УДК 524.3+537.6+539.171

А.И. Серый**К ВОПРОСУ О МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ БЕЛЫХ
КАРЛИКОВ И СВЕРХНОВЫХ II ТИПА**

Рассмотрено электронно-протонное вещество с учетом ядерной (в контактном приближении), обменной и корреляционной кулоновской энергии протонов. Рассмотрен вопрос об агрегатном состоянии водорода в оболочках белых карликов. Показано понижение энергии при спиновой поляризации протонов (с возникновением намагниченности) в определенном диапазоне температур и плотностей. Рассматривается возможность возникновения намагниченности при взрывах Сверхновых II типа, а также объяснения магнитных полей до 10^9 Гс в водородных белых карликах на основе протонного ферромагнетизма.

Введение. Постановка задачи

Работа является продолжением исследований, начатых в [1, с. 30–37]. Предмет исследований – величина магнитных полей, возникающих вследствие спиновой поляризации нуклонов; объект исследований – электронно-протонная (ер-) система в оболочках белых карликов и при взрывах Сверхновых II типа.

Проблема магнетизма белых карликов исследуется с конца 1970-х гг. [2, 3]. У некоторых белых карликов магнитные поля довольно велики [4, с. 185; 5, 6]. Основные версии происхождения таких полей [7–11; 12, с. 176, 192]: 1) у одиночных белых карликов оно возникает благодаря сохранению магнитного потока при сжатии ядра первоначальной звезды; 2) у белых карликов в тесных двойных системах оно может возникнуть благодаря аккреции, вращению, гидромагнитному динамо, общей оболочке и т.д. [7]. Интересны белые карлики классов DAP и DAN [4, с. 185], т.к. они доминируют среди белых карликов с $B \sim 10^7$ – 10^9 Гс [6; 8; 9, р. 11–13; 10].

Возможные замечания: 1) не всегда объяснения убедительные и единственно возможные; они, скорее, дополняют друг друга; 2) не уделяется заметного внимания вопросу о спиновой поляризации протонов, этот вопрос рассмотрен в данной работе; 3) вопрос важен и для Сверхновых II типа, т.к. там также есть водород [13, с. 433].

Будем рассматривать водород в приближениях как низких, так и высоких температур (т.к. свойства протонной и электронной подсистем могут сильно различаться), используя приближения из [1, с. 31]. Рассмотрим модель с характеристиками: 1) электронно-протонное вещество уже достаточно плотное для того, чтобы произошла металлизация; 2) соотношение между плотностью и температурой таково, что протонная компонента находится в расплавленном состоянии и невырожденна; 3) возможность ферромагнетизма рассматриваем только для протонов, но не для электронов.

К вопросу о магнитной восприимчивости электронов

Рассмотрим вопрос о пренебрежении магнитной восприимчивостью электронов. Для них сумма парамагнитной восприимчивости Паули и диамагнитной Ландау [14, с. 550; 15, с. 571] в вырожденном состоянии равна

$$\chi_e = \chi_{\Pi} + \chi_{\text{д}} = \frac{2}{3} \chi_{\Pi} = \frac{2\mu_B^2 n_e^{1/3} m_e c^2}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 c^2} = \frac{\alpha \hbar n_e^{1/3}}{2m_e c (3\pi^2)^{1/3}}, \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (1)$$

Даже при $n_e = 10^{33} \text{ см}^{-3}$ $4\pi\chi_e = 0,0185$, что мало по сравнению с единицей. При переходе к невырожденному состоянию ситуация качественно не должна измениться.

В [1, с. 33] было получено выражение для критерия Стонера с учетом обменной энергии для кулоновского взаимодействия протонов, которое в отсутствии нейтронов ($v_{0n} = 0$) перепишем в виде:

$$-|g_{pp}|v_{0p}^2 - v_{0p} + \Delta > 0, \quad g_{pp} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_p} a_p, \quad \Delta = \frac{e^2 m_p^2}{2\pi^3 \hbar^4}, \quad v_{0p} = \frac{3^{1/3} m_p n_p^{1/3}}{2\pi^{4/3} \hbar^2}. \quad (2)$$

Для электронов также имеет место критерий Стонера и обменное усиление χ_e [13, с. 692]; при этом константа, аналогичная g_{pp} , отсутствует в силу отсутствия ядерного взаимодействия. Тогда вместо (2) имеем

$$v_{0e} - \Delta_e < 0, \quad \Delta_e = \frac{e^2 m_e^2}{2\pi^3 \hbar^4}. \quad (3)$$

Численно это дает $n_e < 7,35 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$, что сравнимо с концентрациями свободных электронов в ферромагнетиках, но гораздо меньше концентраций, рассматриваемых в данной работе. Т.е. пренебрежение ферромагнетизмом электронов правомерно.

Об агрегатном состоянии водорода

Металлизация водорода наступает, когда радиус 1-й боровской орбиты становится порядка расстояний между ионами [16, с. 18]. В модели простой кубической решетки примем это расстояние в точности равным расстоянию между соседними ионами (e – элементарный заряд):

$$n_p > n_{met}, \rho > \rho_{met}, \rho_{met} \approx n_{met} m_p, \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = n_{met}^{-1/3} \Rightarrow n_{met} = \frac{m_e^3 e^6}{\hbar^6}, \quad (4)$$

где m_e, m_p – массы электрона и протона. Численно это дает $n_{met} = 6,755 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-3}$, $\rho_{met} \approx 11,3 \text{ г/см}^3$. Условие невырождения для протонов:

$$\varepsilon_F \ll kT, \varepsilon_F = p_F^2 / (2m_p), p_F = (3\pi^2 n_p)^{1/3} \hbar. \quad (5)$$

Водород удовлетворяет таким условиям, по-видимому, в Сверхновых II типа и в самых внешних слоях белых карликов. При аккреции возможно $T \sim 10^8 \text{ К}$ [10, р. 4]. Тогда будут плавиться и более глубокие слои белых карликов. Особо интересны случаи, когда аккрецирующее вещество состоит также преимущественно из водорода (т.е. идет с поверхности гиганта или звезды главной последовательности [15, с. 68, 69]).

Под оболочками белых карликов, в т.ч. вблизи порога нейтронизации, водород, скорее всего, близок к кристаллическому. Рассмотрим при $n_e = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ (вблизи порога нейтронизации [12, с. 54]) и $T = 7 \cdot 10^4 \text{ К}$ (на поверхности самых горячих белых карликов [4, с. 185]) значения средней потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух соседних ионов U_0 [12, с. 101], полной кулоновской энергии ячейки решетки Вигнера – Зейтца ε_c [16, с. 21], средней тепловой энергии kT , энергии нулевых колеба-

ний протонов в решетке ε_0 [12, с. 102], средней энергии колебаний протонов в решетке ε_T при температуре T [17]:

$$U_0 = e^2 \left(\frac{4\pi}{3} n_p \right)^{1/3}, \quad \varepsilon_C = 0.9U_0, \quad \varepsilon_0 = \hbar \sqrt{\frac{3\pi n_p e^2}{m_p}}, \quad \varepsilon_T = \varepsilon_0 \operatorname{cth} \left(\frac{\varepsilon_0}{3kT} \right). \quad (6)$$

Рассмотрим критерии устойчивости решетки:

1. Температурный критерий Линдемманна [12, с. 104]

$$\Gamma > \Gamma_{\min}, \quad 75 \leq \Gamma_{\min} \leq 174, \quad \Gamma \equiv U_0 / (kT). \quad (7)$$

С учетом сказанного выше получаем $\Gamma_{\min} = 481$, т.е. критерий выполняется.

2. По отношению к нулевым колебаниям [12, с. 45, 102]:

$$f \equiv \varepsilon_0 / \varepsilon_C \ll 1. \quad (8)$$

Численно $\varepsilon_0 / \varepsilon_C = 0,501$, т.е. критерий выполнен удовлетворительно. При замене ε_0 на ε_T при вышеуказанных значениях n_p и T результат заметно не изменится.

3. Даже магнитные поля $B \sim 10^7 - 10^9$ Гс не способны заметно повлиять на разрушение водородной решетки. Вместо U_0 , ε_0 имеем [18, с. 85]

$$U(B) = U_0(1+t), \quad \varepsilon(B) = \frac{1}{3} E_0 (1 + 2\sqrt{1+t}), \quad t = \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}, \quad \rho \approx m_p n_p. \quad (9)$$

При $B = 10^9$ Гс, $n_p = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ получим, что $z = 5.4 \cdot 10^{-12} \ll 1$.

4. Сравним энергию протонной подсистемы в твердой и жидкой фазе.

$$w_{TT} = -U_1 n_p + E_0 n_p, \quad w_{Ж} = \frac{3}{5} n_p \varepsilon_F + w_{\text{exch}} = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} n_p^{5/3} \hbar^2}{10m_p} - \frac{e^2 (3\pi^2)^{4/3} n_p^{4/3}}{4\pi^3}. \quad (10)$$

При $n_p = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ $w_{TT} \approx -0,035 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3} < w_{Ж} \approx -0,012 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$.

Поэтому дополнительно рассмотрим выражение для корреляционной энергии Ферми-жидкости [19, с. 205, 206].

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} w_{\text{corr}} = -\hbar c \frac{\kappa^4 p_F}{8\pi^3 m_p c} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{p_F^2}{\kappa^2 \hbar^2 P(s)} \right) P^2(s) ds, \quad P(s) = 1 - s \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{s} \right). \quad (11)$$

Пусть s_1 – корень уравнения (график зависимости s_1 от n_p см. на рисунке 1).

$$p_F^2 = \kappa^2 \hbar^2 P^2(s_1), \quad \kappa^2 = 4\pi\alpha \hbar c \nu, \quad \nu = \frac{m_p p_F}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (12)$$

Тогда для получения возможности интегрирования по α выполним разложение:

$$\int_0^{+\infty} \ln(F(s))P^2(s)ds = \int_0^{s_1} \ln(F(s))P^2(s)ds + \int_{s_1}^{+\infty} \ln(F(s))P^2(s)ds, F(s) = 1 + G(s),$$

$$G(s) = \frac{P_F^2}{\kappa^2 \hbar^2 P(s)}, \ln(F(s)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (G(s))^j, 0 < s < s_1,$$

$$\ln(F(s)) = \ln\left(\frac{P_F^2}{\kappa^2 \hbar^2}\right) - \ln(P(s)) + \ln(1 + G^{-1}(s)) = \ln\left(\frac{P_F^2}{\kappa^2 \hbar^2}\right) - \ln(P(s)) +$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} G^{-j}(s), s > s_1. \tag{13}$$

С учетом (11)–(13) найдем выражение для w_{corr} :

$$w_{corr} = -\frac{6m_p c^2 n_p}{\pi^3} \left(Z\alpha I_1 - \frac{1}{2} Z^2 s_1 \ln \alpha + \Sigma_1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\left(\ln\left(\frac{Z}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \right) J_0 - Y \right) + \Sigma_2 \right),$$

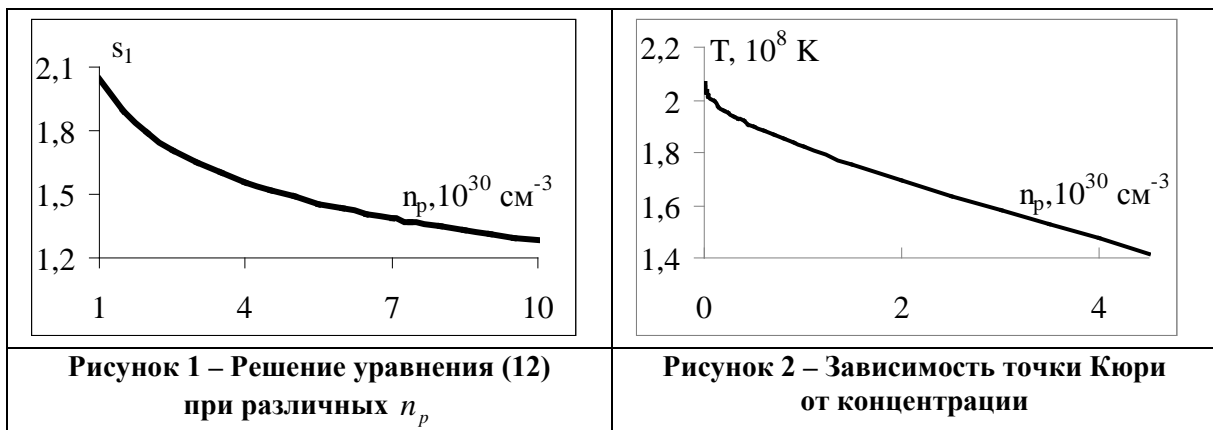
$$Z = \frac{\pi p_F}{4m_p c}, \Sigma_1 = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} Z^j \alpha^{2-j}}{j(2-j)} I_j, \Sigma_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} Z^{-j} \alpha^{2+j}}{j(2+j)} J_j,$$

$$I_j = \int_0^{s_1} P^{2-j}(s) ds, J_j = \int_{s_1}^{+\infty} P^{2+j}(s) ds, Y = \int_{s_1}^{+\infty} P^2(s) \ln(P(s)) ds. \tag{14}$$

С учетом (14) выражение для $w_{ж}$ в (10) примет вид

$$w_{ж} = \frac{3}{5} n_p \varepsilon_F + w_{exch} + w_{corr}. \tag{15}$$

При $n_p = 7,4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ $s_1 \approx 1,36419$, $Z \approx 0,000996$, $Y \approx -0,0277$, $I_1 \approx 0,562618$, $J_0 \approx 0,0105$. Подставляя численные данные в (15) (с учетом (14)), вновь получаем, что $w_{TT} < w_{ж}$, т.к. $w_{ж} \approx -0,022 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$, т.е. под оболочками водородных белых карликов вблизи порога нейтронизации водород кристаллический, и применять к нему расчеты в рамках модели вырожденного Ферми-газа правомерно лишь для электронов.



Поскольку считается, что электроны в любом случае представляют собой газ, изменение энергии для них не рассматривается.

Ферромагнетизм невырожденных протонов

Плотность энергии горячих невзаимодействующих протонов

$$w_p = \frac{3}{2} n_p kT = \frac{3}{2} (n_{p\uparrow} + n_{p\downarrow}) kT. \quad (16)$$

Стрелки означают направления спинов, k – постоянная Больцмана. Т.к. (16) не зависит от спиновой поляризации, уточним выражения для химического потенциала и связанных с ним величин. Запишем приближенное выражение

$$\left(\exp\{-\omega_j\} + 1\right)^{-1} \approx \exp\{\omega_j\} - \exp\{2\omega_j\}, \omega_j = \frac{\mu_j - \varepsilon}{kT}, \varepsilon = \frac{p^2}{2m}. \quad (17)$$

В отсутствие спиновой поляризации, согласно (17) и [20, с. 194],

$$n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp(-\omega_{\uparrow,\downarrow}) + 1} \approx \frac{(\pi m_p kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(2^{3/2} \exp\left\{\frac{\mu_{\uparrow,\downarrow}}{kT}\right\} - \exp\left\{\frac{2\mu_{\uparrow,\downarrow}}{kT}\right\} \right). \quad (18)$$

Из (18) уточним выражение для химического потенциала:

$$\mu_{\uparrow,\downarrow} = kT \ln\left(\sqrt{2}(1 - \sqrt{1 - x_{\uparrow,\downarrow}})\right) \approx \{x_{\uparrow,\downarrow} \ll 1\} \approx kT \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), x_{\uparrow,\downarrow} = \frac{(2\pi\hbar)^3 n_{p\uparrow,\downarrow}}{2(\pi m_p kT)^{3/2}}. \quad (19)$$

Найдем, согласно (17), уточненное выражение для плотности энергии:

$$w_p = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon p^2 dp}{\exp(-\omega_{\uparrow}) + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon p^2 dp}{\exp(-\omega_{\downarrow}) + 1} \right) \approx \frac{4\pi}{2m_p (2\pi\hbar)^3} (\Lambda_1 - \Lambda_2), \quad (20)$$

$$\Lambda_r = \frac{3}{8} \left(\exp\left\{\frac{r\mu_{\uparrow}}{kT}\right\} + \exp\left\{\frac{r\mu_{\downarrow}}{kT}\right\} \right) \left(\frac{2m_p kT}{r} \right)^{5/2} \sqrt{\pi}. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (21), получаем:

$$w_p = \frac{3\pi^{3/2} (m_p kT)^{5/2}}{2m_p (2\pi\hbar)^3} (4(y_{\uparrow} + y_{\downarrow}) - (y_{\uparrow}^2 + y_{\downarrow}^2)), y_{\uparrow,\downarrow} = 1 - \sqrt{1 - x_{\uparrow,\downarrow}}. \quad (22)$$

Рассмотрим разность выражений (22) при $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2}$ и $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2} + \delta n_{p\uparrow,\downarrow}$:

$$\delta w_p = \frac{3\pi^{3/2} \hbar^3}{4m_p^{3/2} \sqrt{kT}} \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) > 0. \quad (23)$$

Выражение для плотности обменной энергии [20, с. 290]:

$$w_{exch} = -\frac{e^2 m_p^2 (kT)^2}{8\pi^2 \hbar^4} \left(\exp\left\{\frac{2\mu_{\uparrow}}{kT}\right\} + \exp\left\{\frac{2\mu_{\downarrow}}{kT}\right\} \right). \quad (24)$$

Подставляя (19) в (24), рассмотрим получающееся выражение при $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2}$ и $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2} + \delta n_{p\uparrow,\downarrow}$, после чего, как и в (23), найдем δw_{exch} :

$$\delta w_{exch} = -\frac{\alpha \pi (\hbar c)^3}{m_p c^2 kT} \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) < 0, \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (25)$$

Для плотности корреляционной энергии используем формулу Веденова – Ларкина [21, с. 460, 461]

$$w_{corr} = -\frac{kT\chi^3}{8\pi}, \chi^2 = 4\pi e^2 \left(\frac{\partial n_{p\uparrow}}{\partial \mu_{\uparrow}} + \frac{\partial n_{p\downarrow}}{\partial \mu_{\downarrow}} \right). \quad (26)$$

Подставляя (19) (без приближений) в (26), рассмотрим получающееся выражение при $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2}$ и $n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2} + \delta n_{p\uparrow,\downarrow}$, после чего, как и в (23), (25), найдем δw_{corr} :

$$\delta w_{corr} = \frac{3\pi^2 \alpha^{3/2} (\hbar c)^{9/2} n_p^{1/2}}{2(m_p c^2)^{3/2} (kT)^2} \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) > 0. \quad (27)$$

Плотность ядерной энергии $w_N = g_{pp} n_{p\uparrow} n_{p\downarrow}$ [22, с. 22] (в силу наличия электронного фона $a_p = a_n = -17,2$ фм [22, с. 31]) дает выражение для флуктуаций ($r_{0p} = 2,79$ фм) [22, с. 20, 30]:

$$\delta w_N = g_{pp} \delta n_{p\uparrow} \delta n_{p\downarrow} = -\frac{g_{pp}}{2} \left((\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) > 0, g_{pp} = -\frac{2\pi \hbar^2}{m_p} f_{pp},$$

$$f_{pp} = \left(-\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} r_{0p} \left(\frac{p}{\hbar} \right)^2 \right)^{-1} > 0, p \approx \sqrt{3m_p kT}. \quad (28)$$

Запишем критерий Стонера через флуктуации энергии [19, с. 198, 199] с учетом (23), (25), (27), (28):

$$\frac{3\sqrt{\pi} \hbar c (kT)^{3/2}}{4(m_p c^2)^{1/2}} - \alpha \hbar c kT + \frac{3\pi \alpha^{3/2} (\hbar c)^{5/2} n_p^{1/2}}{2(m_p c^2)^{1/2}} + (kT)^2 \left(\frac{1}{|a_n|} + \frac{3r_{0p} m_p kT}{2\hbar^2} \right)^{-1} < 0. \quad (29)$$

При $n_p \rightarrow 0$ $T < T_K \approx 2,05 \cdot 10^8$ К (выше этого значения ферромагнетизм невозможен ни при каком n_p , удовлетворяющем (5)). При заданном $n_p \neq 0$ левая часть (29) имеет минимум при $T_1 \approx 9,52 \cdot 10^7$ К. При таком T она отрицательна, если $n_p < n_{pK} \approx 6,75 \cdot 10^{30}$ см⁻³ (выше такого n_p ферромагнетизм невозможен ни при каких T , при которых выполняется (5)). При таком n_p критерий невырождения выполняется, т.к. $kT_1 \approx 10 \varepsilon_F$. Численные результаты представлены на рисунке 2 (ферромагнетизм ниже кривой Кюри; влияние 2-го слагаемого в скобках (29) несущественно).

О значениях индукции магнитных полей

Таким образом, в белых карликах условия для ферромагнетизма более благоприятные, чем в Сверхновых II типа (в последнем случае возникновение намагниченности возможно в верхних слоях, более разреженных и успевших достаточно остыть). Магнитное поле $\vec{B} = B\vec{n}$ (\vec{n} – единичный вектор), создаваемое поляризованными протонами с собственными магнитными моментами $\mu_p = \mu_Y \sigma_p$ (μ_Y – ядерный магнетон, $\sigma_p = 2,7928$) в ферромагнитном случае найдем через связь между намагниченностью \vec{I} и напряженностью \vec{H} [23, с. 316, 327] (χ – магнитная восприимчивость протонов):

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = (\chi^{-1} + 4\pi)\vec{I} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 4\pi\vec{I} = 4\pi n_p p_{0p} \mu_Y \sigma_p \vec{n}. \quad (30)$$

Формулу (29) надо учитывать совместно с (4), (5). К примеру, при $T \approx 7 \cdot 10^4$ К [4, с. 185; 6, с. 4] $kT = 10 \varepsilon_F$ при $n_p \approx 1,67 \cdot 10^{26}$ см⁻³. Тогда для верхних расплавленных металлических слоев белых карликов при $p_{0p} \rightarrow 1$ $B \approx 2,97 \cdot 10^4$ Гс $\ll 10^9$ Гс. Если такое B может быть «затравочным» для протонов в решетке, то подстановка в (30) $n_p \approx 7,4 \cdot 10^{30}$ см⁻³ при $p_{0p} \rightarrow 1$ дает $B \approx 1,31 \cdot 10^9$ Гс. Такая оценка правомерна в силу (1) и того обстоятельства, что радиус локализации волновой функции отдельного протона не больше размеров кристаллической ячейки [19, с. 210], т.е. роль принципа Паули во взаимодействии соседних протонов резко снижается, исчезает Ферми-статистика:

$$r_0 = n_p^{-1/3} \left(\frac{P_F}{\alpha m_p c} \right)^{1/4} \approx \{ n_p \approx 7,4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3} \} \approx 0,646 n_p^{-1/3}. \quad (31)$$

В вопросе о взаимосвязи между магнитными полями и возрастами белых карликов важны следующие факторы. 1. Остывание может способствовать поляризации и, следовательно, росту магнитного поля. 2. Выгорание водорода [16, с. 86; 18, с. 76] и накопление примесей может препятствовать поляризации и, следовательно, приводить к ослаблению магнитного поля. 3. Остывание со временем должно способствовать кристаллизации, что снижает правомерность расчетов, выполненных Ферми-газовым методом.

При $n_p \approx 7,4 \cdot 10^{30}$ см⁻³, $\rho \approx m_p n_p = 1,23 \cdot 10^7$ г/см³ скорость вероятности пикноядерной реакции около 10^{-13} с⁻¹ [18, с. 77; 24; 25], т.е. $\sim 10^6$ лет. За это время количество водорода уменьшится в e раз, и можно оценить время выгорания в 10^7 лет. Если поля-

ризация со временем ослабляется, то интенсивные магнитные поля могут свидетельствовать о том, что возраст таких белых карликов намного меньше, чем 10^7 лет.

Для Сверхновых II типа при $n_p \approx 6,75 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ и $\rho_{0p} \leq 1$ получаем $B \sim 10^8 - 10^9$ Гс, и остается подтвердить этот результат данными наблюдений.

Заключение. Основные результаты

Рассматривалась модель невырожденного жидкого металлического водорода с учетом ядерной (в контактном приближении), обменной и корреляционной кулоновской энергии протонов. Рассмотрен вопрос об агрегатном состоянии водорода в оболочках и под оболочками белых карликов. Показано понижение энергии при спиновой поляризации протонов (с возникновением намагниченности) в определенном диапазоне температур и плотностей, установлен вид кривой Кюри. Рассмотрена возможность возникновения намагниченности при взрывах Сверхновых II типа, а также объяснения магнитных полей до 10^9 Гс в водородных белых карликах на основе протонного ферромагнетизма.

Часть идей, лежащих в основе данной работы, принадлежат В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А.И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
2. Angel, J.P.R. Magnetic White Dwarfs / J.P.R. Angel // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 1978. – Vol. 16. – P. 487.
3. Landstreet, J.D. The Magnetic Fields of Single White Dwarfs / J.D. Landstreet // White Dwarfs and Variable Degenerate Stars (IAU Colloq. No 53) ; eds. H.M. Van Horn, V. Weidemann. – New York : University of Rochester Press, 1979.
4. Физическая энциклопедия / редкол. : Д.М. Алексеев [и др.] ; гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Сов. Энцикл. 1988. – Т. I : Аронова – Бома эффект – Длинные линии. 704 с.
5. Valyavin, G.G. Magnetic fields of white dwarfs / G.G. Valyavin [et al.] // Astronomy Reports. – 2003. – Vol. 47, № 7. – P. 587–599.
6. Jordan, S. The fraction of DA white dwarfs with kilo-Gauss magnetic fields / S. Jordan [et al.] [Electronic resource]. – Mode of access : arxiv.org/abs/astro-ph/0610875v2. – P. 1–10.
7. Cumming, Andrew. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs / Andrew Cumming // ASP Conference Series. – P. 1–13.
8. Tout, Christopher A. The origin of the strongest magnetic fields in dwarfs / Christopher A. Tout // Pramana – J. Phys. – July 2011. – Vol. 77, № 1. – P. 199–212.
9. Liebert, James. The True Incidence of Magnetism Among Field White Dwarfs / James Liebert, P. Bergeron, J.B. Holberg [Electronic resource]. – Mode of access : arxiv.org/abs/astro-ph/0210319v2. – P. 1–16.
10. Nordhaus, Jason. Formation of high-field magnetic white dwarfs from common envelopes / Jason Nordhaus [et al.] [Electronic resource]. – Mode of access : // www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1015005108. – P. 1–6.
11. Norton, A.J. The spin periods and magnetic moments of white dwarfs in magnetic cataclysmic variables / A.J. Norton, G.A. Wynn and R.V. Somerscales // Astrophysical Journal. – 2004. – № 614 (1, Par). – P. 349–357.
12. Шапиро, С.Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. В 2 ч. Ч. 1. / С.Л. Шапиро, С.А. Тьюколски ; пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 256 с.

13. Физическая энциклопедия / редкол. : Д.М. Алексеев [и др.] ; гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Большая рос. энцикл., 1994. – Т. 4 : Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. – 704 с.
14. Физическая энциклопедия / редкол. : Д.М. Алексеев [и др.] ; гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Большая рос. энцикл., 1992. – Т. 3 : Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема. – 672 с.
15. Физическая энциклопедия / редкол. : Д.М. Алексеев [и др.] ; гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Сов. энцикл., 1990. – Т. 2 : Добротность – Магнитооптика. – 703 с.
16. Саакян, Г.С. Физика нейтронных звезд / Г.С. Саакян. – Дубна, 1995. – 348 с.
17. Киржниц, Д.А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д.А. Киржниц // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
18. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В.С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
19. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов // М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 392 с.
20. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов. В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика, ч. I. – 616 с.
21. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т. IX. Статистическая физика. В 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – 3-е изд.. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 496 с.
22. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский. – М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
23. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – 688 с.
24. Зельдович, Я.Б. О ядерных реакциях в сверхплотном холодном водороде / Я.Б. Зельдович // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33, № 4 (10). – С. 991–993.
25. Чубарян, Э.В. Некоторые свойства вещества при плотностях ниже ядерной / Э.В. Чубарян // ДАН Арм. ССР. – 1964. – Т. 38, № 1. – С. 17–21.

A.I. Sery. On the Problem of Magnetic Fields of white Dwarfs and Type II Supernovae

Electron-proton matter is considered with regard to nuclear (in contact approximation), exchange and correlation Coulomb energy of protons. The question of aggregate state of hydrogen in the envelopes of white dwarfs is considered. Energy reduction at spin polarization of protons (with magnetization initiation) in defined range of temperatures and densities is shown. The possibility of magnetization initiation at type II Supernovae explosion is considered, as well as the explanation of magnetic fields up to 10^9 Gs in hydrogen white dwarfs on the basis of ferromagnetism of protons.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 23.04.2013

УДК 517.925;519.6

А. Киндыбалюк, Н. Притула

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТЕПЕННЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АДВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ

Проведено априорное сравнение вычислительных схем на основе степенных базисных функций с противопотоковой схемой и со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла. Изучен вопрос устойчивости и сходимости вычислительной схемы с использованием степенных базисных функций метода конечных элементов.

Введение

В математическом моделировании процессов миграции примесей значительную роль играют краевые задачи для уравнения адвекции – диффузии. При некоторых условиях, а именно при доминировании процессов адвекции над процессами диффузии или при некоторых краевых условиях, такие задачи превращаются в сингулярно возмущенные [1–9]. Применение к таким задачам классических схем метода конечных разностей (МКР) или метода конечных элементов (МКЭ) непригодно, поскольку при больших значениях числа Пекле образуются неестественные осцилляции приближенного решения [1, 2, 8, 9]. Их можно избежать путем применения сетки с узлами, количество которых равняется числу Пекле. Однако это приводит к значительным вычислительным затратам.

Методы и подходы к решению таких задач берут свое начало в 50-х годах XX ст. Была предложена схема Ильина – Аллена – Саусвелла, с помощью которой в узлах сетки вычисляют точные решения. Были разработаны противопотоковые схемы, применялись аппроксимации Хэмкэра [1, 3], экспоненциальные базисные функции метода конечных элементов [4, 7, 8]. Также разработан подход, который базируется на симметризации исходной задачи путем выбора тестовых функций в методе Петрова – Галеркина [9].

Пусть $\mu > 0$ – коэффициент диффузии, $\beta > 0$ – коэффициент адвективного переноса, а $h > 0$ – шаг дискретизации. Отметим, что упомянутые схемы позволяют снизить осцилляции приближенного решения путем искусственного повышения коэффициента диффузии. В работе [9] показано, что противопотоковая схема для краевой задачи

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\mu u'' + \beta u' = \tilde{f} \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\left(\mu + \frac{\beta h}{2}\right) u'' + \beta u' = \tilde{f} \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

В работе [9] показано, что в случае постоянных коэффициентов схема Ильина – Аллена – Саусвелла может быть получена с применением разнообразных подходов: аппроксимации Хэмкэра (L -сплайны), экспоненциальных базисных функций метода конечных элементов, симметризации краевой задачи и применения к ней метода Петрова – Галеркина.

Схему Ильина – Аллена – Саусвелла, как показано в [9], можно получить применением классической схемы МКР для уравнения

$$-\mu \left(\frac{h\beta}{2\mu} \operatorname{cth} \left(\frac{h\beta}{2\mu} \right) \right) u'' + \beta u' = \tilde{f}. \quad (0.3)$$

Так как вышеперечисленные стабилизационные вычислительные схемы в случае постоянных коэффициентов в уравнении (0.1) приводят к схеме Ильина – Аллена – Саусвелла, то подход к решению задачи на основе степенных базисных функций, предложенный в [5], будем сравнивать со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу с уравнением адвекции – диффузии [5],

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -u'' + Peu' = f \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $Pe = \frac{\beta}{\mu} > 0$ – число Пекле, характеризующее отношение скорости процессов ад-

векции к скорости процессов диффузии, а функция $f = \frac{\tilde{f}}{\mu}$ характеризует интенсивность внутренних распределенных источников примесей. Для этой задачи в [5] была построена эффективная вычислительная схема МКЭ на основе степенных базисных функций и проведен анализ погрешностей относительно точного решения.

В силу (0.2) и (0.3) следует, что противопотоковая схема для задачи (1.1) аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\left(1 + \frac{Pe h}{2}\right) u'' + Peu' = f \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

а схема Ильина – Аллена – Саусвелла для задачи (1.1) аппроксимирует краевую задачу

$$\begin{cases} \text{найти функцию } u = u(x) \text{ такую, что:} \\ -\left(\frac{Pe h}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Pe h}{2}\right)\right) u'' + Peu' = f \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Изучим вопрос устойчивости и сходимости вычислительной схемы решения задачи (1.1) на основе степенных базисных функций, а также сравним значение повышенного коэффициента диффузии, обусловленное степенными базисными функциями со значениями повышенного коэффициента диффузии, обусловленными противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

2. Устойчивость и сходимость вычислительной схемы со степенными базисными функциями

Для доказательства сходимости вычислительной схемы для решения задачи (1.1) на основе степенных базисных функций исследуем порядок аппроксимации этой схемы и ее устойчивость.

Пусть $\rho(\alpha)$ – искусственно повышенный коэффициент диффузии и схема решения задачи (1.1) имеет вид:

$$-\rho(\alpha)\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) + \frac{Pe}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f_i. \quad (2.1)$$

Разложением в ряд Тейлора u_{i+1}, u_{i-1} убеждаемся, что схема (2.1) аппроксимирует дифференциальное уравнение вида

$$-\rho(\alpha)u'' + Peu' = f \quad \forall x \in \Omega := (0, 1) \quad (2.2)$$

с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$.

Теорема 1. О безусловной устойчивости схемы с искусственно повышенным коэффициентом диффузии для уравнения адвекции – диффузии.

Пусть $\rho(\alpha)$ – искусственно повышенный коэффициент диффузии и α – параметр стабилизации. Тогда для безусловной устойчивости схемы (2.1) необходимо, чтобы значение искусственно повышенного коэффициента диффузии удовлетворяло условию $\rho(\alpha) \geq \frac{Pe h}{2}$. При значении коэффициента диффузии $\rho(\alpha) = \frac{Pe h}{2}$ схема вносит минимальную избыточную диффузию.

Доказательство. Запишем схему (2.1) относительно узлового значения u_i :

$$\frac{2\rho(\alpha)}{h^2}u_i = \left(\frac{\rho(\alpha)}{h^2} + \frac{Pe}{2h}\right)u_{i-1} + \left(\frac{\rho(\alpha)}{h^2} - \frac{Pe}{2h}\right)u_{i+1} + f_i. \quad (2.3)$$

Если коэффициенты при узловых значениях u_{i-1}, u_{i+1} неотрицательные, то схема будет монотонной, а значит, корректной. Из того что $Pe > 0, h > 0$, коэффициент при узловом значении u_{i-1} есть всегда положительный. Для того чтобы коэффициент при узловом значении u_{i+1} был неотрицательный, необходимо, чтобы $\rho(\alpha) \geq \frac{Pe h}{2}$.

В случае $\rho(\alpha) = \frac{Pe h}{2}$ искусственно повышенный коэффициент диффузии принимает минимальное значение, обеспечивая при этом корректность схемы.

Покажем безусловную устойчивость схемы (2.1) с использованием М-критерия [2]. Систему уравнений (2.1) запишем в матричной форме $AU = F$. Матрица A есть М-матрицей, так как диагональные элементы строго положительные, а недиагональные элементы или отрицательные, или равны нулю. Пусть $Lu := -\rho(\alpha)u'' + Peu'$ – дифференциальный оператор задачи (1.1), а $L_h u_h$ – его дискретный аналог. Выберем функцию $e(x) = 1 + x > 0 \quad \forall x \in \Omega$, причем $Le(x) = Pe > 0$. Для функции $e(x)$ введем ее дискретный аналог, а именно вектор $e_h = \{1 + x_i\}_{i=0}^N > 0$. Выполнением арифметических операций убеждаемся в том, что $L_h e_h = Pe > 0, \forall x_i \in \Omega$. Тогда, согласно М-критерию, приближенное решение (2.1) можно оценить так:

$$\|U\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|F\|_\infty \leq \frac{\|e_h\|_\infty \|f\|_\infty}{\min_k (Ae_h)_k} = \frac{2\|f\|_\infty}{Pe},$$

откуда следует безусловная устойчивость схемы (2.1).

Теорема 2. О безусловной устойчивости схемы с использованием степенных базисных функций для уравнения адвекции – диффузии.

Схема (2.1), построенная с применением степенных базисных функций МКЭ, безусловно устойчивая, если значение параметра стабилизации

$$\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}.$$

При выборе параметра стабилизации

$$\alpha_h = \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$$

схема вносит минимальную избыточную диффузию, обеспечивая при этом корректность схемы.

Доказательство. С теоремы 1 следует, что схема (2.1) безусловно устойчивая, если значения искусственно повышенного коэффициента диффузии удовлетворяют условию $\rho(\alpha) \geq \frac{Peh}{2}$. В работе [5] показано, что коэффициент искусственно повышенной

диффузии зависит от параметра стабилизации $\rho(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$. С неравенства

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \geq \frac{Peh}{2}, \text{ при } \alpha \geq 1, \text{ получаем область допустимых значений параметра стаби-$$

зации $\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$. При $\alpha_h = \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$ схема минимально повышает коэффициент диффузии для обеспечения безусловной устойчивости схемы (2.1).

Отметим, что при шаге дискретизации $h = \frac{2}{Pe}$ схема (2.1) аппроксимирует исходное уравнение, то есть коэффициент диффузии равен единице.

Отметим, что при выборе значения параметра стабилизации

$$\alpha_h = \frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) + \sqrt{\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) \left(\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) - 1 \right)}$$

схема с применением степенных базисных функций (2.1) совпадает со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

Согласно теореме Лакса об эквивалентности [6], схема (2.1) является сходящейся со вторым порядком сходимости.

3. Априорное сравнение вычислительных схем

Проведем сравнение схемы с применением степенных базисных функций МКЭ с противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла для уравнения адвекции – диффузии (1.1). Критерием сравнения является значение искусственно повышенного коэффициента диффузии, так как чем больше отличается коэффициент искусственной диффузии от исходного значения, тем большей будет погрешность приближенного решения относительно точного решения задачи (1.1).

Теорема 3. Об априорном преимуществе схемы с применением степенных базисных функций над противопотоковой схемой и схемой Ильина – Аллена – Саусвелла для уравнения адвекции – диффузии.

Пусть $\rho_F = 1 + \frac{Pe h}{2}$ – коэффициент диффузии, полученный с применением противопотоковой схемы, $\rho_E = \frac{Pe h}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{Pe h}{2}\right)$ – коэффициент диффузии, полученный с применением схемы Ильина – Аллена – Саусвелла, $\rho_P = \frac{hPe}{2}$ – коэффициент диффузии, полученный с применением степенных базисных функций, тогда для любых $Pe > 0$, $h > 0$ справедливы следующие оценки:

$$\rho_P < \rho_F, \rho_P < \rho_E. \quad (3.1)$$

Доказательство. 1. Сравнение с противопотоковой схемой.

Коэффициент диффузии $\rho_F = 1 + \frac{Pe h}{2}$, полученный с применением противопотоковой схемы, учитывая $\rho_P = \frac{Pe h}{2}$, можно записать в виде $\rho_F = 1 + \rho_P$, откуда немедленно следует, что $\rho_P < 1 + \rho_P = \rho_F$.

2. Сравнение со схемой Ильина – Аллена – Саусвелла.

Коэффициент диффузии $\rho_E = \frac{Pe h}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{Pe h}{2}\right)$, полученный с применением схемы Ильина – Аллена – Саусвелла, учитывая $\rho_P = \frac{Pe h}{2}$, можно записать в виде $\rho_E = \rho_P \operatorname{cth}\left(\frac{Pe h}{2}\right)$.

Так как $\operatorname{cth}\left(\frac{Pe h}{2}\right) = \frac{e^{Pe h} + 1}{e^{Pe h} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{Pe h} - 1}$, то $\rho_E = \rho_P \left(1 + \frac{2}{e^{Pe h} - 1}\right)$. Поскольку $Pe, h > 0$ и $e^{Pe h} > 1$, то выражения $\frac{2}{e^{Pe h} - 1} > 0$ и $1 + \frac{2}{e^{Pe h} - 1} > 1$. Отсюда следует $\rho_P > \rho_E$. Это значит, что решение задачи (1.1), полученное схемой с применением степенных базисных функций, имеет априори меньшую погрешность относительно точного решения задачи (1.1), нежели погрешность приближенного решения, полученного схемой Ильина – Аллена – Саусвелла или противопотоковой схемой. Теорема доказана.

Теорема 4. Об относительном сравнении значений коэффициентов искусственной диффузии.

Искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой Ильина – Аллена – Саусвелла, на 31% выше, чем искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой с использованием степенных базисных функций. Искусственно повышенный коэффициент, полученный противопотоковой схемой, на 100% выше, чем искусственно повышенный коэффициент, полученный схемой с использованием степенных базисных функций.

Доказательство. Рассмотрим значение относительной погрешности коэффициента диффузии с противопотоковой схемой $\varepsilon = \frac{\rho_F - \rho_P}{\rho_P} \times 100\%$.

Приняв во внимание теорему 3, получим

$$\varepsilon(h) = \frac{\rho_F - \rho_P}{\rho_P} \times 100\% = \frac{1 + \frac{Pe h}{2} - \frac{Pe h}{2}}{\frac{Pe h}{2}} \times 100\% = \frac{2}{Pe h} \times 100\% .$$

Рассмотрим функцию относительной погрешности как функцию от количества конечных элементов. Пусть количество конечных элементов $N = \frac{1}{h}$, тогда функция относительной погрешности имеет вид $\varepsilon(N) = \frac{2N}{Pe} \times 100\%$. Для того чтобы определить свойства функции, изучим свойства ее первой производной. Производная функции относительной погрешности имеет вид $\varepsilon'(N) = \frac{2}{Pe}$. Так как первая производная положительная, то функция относительной погрешности возрастает. Применение степенных базисных функций имеет смысл при $N \leq \frac{Pe}{2}$. Функция относительной погрешности принимает максимальное значение в точке $N_0 = \frac{Pe}{2}$. Подставив это значение в функцию относительной погрешности, получим $\varepsilon_{\max} = \varepsilon(N_0) = \frac{2}{Pe} \frac{Pe}{2} \times 100\% = 100\%$.

Таким образом, противоточковая схема повышает коэффициент диффузии на 100% больше, чем повышает схема с применением степенных базисных функций. Это значит, что при одинаковых вычислительных затратах схема с применением степенных базисных функций точнее отобразит решение, нежели противоточковая схема.

Изучим вопрос об относительной погрешности, вносимой схемой Ильина – Аллена – Саусвелла. Приняв во внимание теорему 3, получим

$$\varepsilon(h) = \frac{\rho_E - \rho_P}{\rho_P} \times 100\% = \left(\frac{2}{e^{Pe h} - 1} \right) \times 100\% .$$

Рассмотрим функцию относительной погрешности как функцию от количества конечных элементов. Пусть $N = \frac{1}{h}$, тогда функция относительной погрешности имеет вид $\varepsilon(N) = \frac{2}{e^{Pe/N} - 1} \times 100\%$. Для того чтобы определить свойства функции, изучим свойства ее первой производной. Производная функции относительной погрешности имеет вид $\varepsilon'(N) = \frac{2e^{Pe/N} Pe}{(e^{Pe/N} - 1)^2 N^2}$. Так как первая производная положительная, то функция относительной погрешности возрастает. Применение степенных базисных функций имеет смысл при $N \leq \frac{Pe}{2}$. Функция относительной погрешности принимает максимальное значение в точке $N_0 = \frac{Pe}{2}$. Подставив это значение в функцию относительной погрешности, получим $\varepsilon_{\max} = \varepsilon(N_0) = \frac{2}{e^2 - 1} \times 100\% \approx 31\%$.

Таким образом, применение схемы Ильина – Аллена – Саусвелла повышает коэффициент диффузии на 31% больше, чем применение схемы с использованием степенных базисных функций. Это значит, что при одинаковых вычислительных затратах

схема с применением степенных базисных функций точнее отобразит решение, нежели схема Ильина – Аллена – Саусвелла.

4. Заключение

Схема с использованием степенных базисных функций оказалась более эффективной, чем схема Ильина – Аллена – Саусвелла и противоточковая схема для сингулярно возмущенной задачи для уравнения адвекции – диффузии. Полученные результаты являются новыми в теории метода конечных элементов, а также могут быть использованы для решения широкого ряда задач экологии, прогнозирования погоды и миграции примесей. Главным результатом работы является аналитическое и априорное сравнение вычислительных схем, что позволяет убедиться в эффективности степенных базисных функций для решения подобного рода задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Groen, P.P.N. Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / P.P.N. De Groen, P.W. Hemker // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P.W., J.J. II. Miller eds. – New York : Academic Press, 1979. – P. 217–249.
2. Ross, Hans Görg. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska // Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. – 598 p.
3. Hemker, P.W. A numerical study of stiff two-point boundary value problems / P.W. Hemker. – Amsterdam : Mathematical Center, 1977. – 178 p.
4. Блажиевская, О. В. Об эффективности метода экспоненциальной подгонки при решении задач тепломассопереноса в пористых средах / О.В. Блажиевская, Т.И. Мандзак // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2000. – № 1. – С. 26–31.
5. Киндыбалюк, А.А. Применение степенных базисных функций МКЭ к решению сингулярно возмущенной задачи адвекции – диффузии // А.А. Киндыбалюк, Н.Н. Прытула // Матем. вестн. НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140–157.
6. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Моротон. – М. : Мир, 1972. – 418 с.
7. Савула, Я.Г. Разномерная задача математической модели адвекции – диффузии в среде с тонким включением / Я.Г. Савула, Т.И. Мандзак // Компьютерная математика. – 2007. – № 2. – С. 59–70.
8. Синчук, Ю. Экспоненциальные аппроксимации МКЭ для сингулярно возмущенных задач конвекции – диффузии – реакции / Ю. Синчук, Г. Шинкаренко // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2007. – № 12. – С. 157–169.
9. Синчук, Ю. Аппроксимации метода конечных элементов с экспоненциальными весовыми функциями / Ю. Синчук, Г. Шинкаренко // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2007. – № 5. – С. 61–70.

A. Kindybaljuk, N. Prytula. Rationale for the Use of Power Basis Functions in Finite Element Method for Singularly Perturbed Boundary Value Problem Advection – Diffusion

A priori comparison of computational schemes based on power basis functions with the upwind scheme and the scheme by Il'in–Allen–Southwell has been conducted. Problem of stability and convergence of the computational scheme using the power basis functions of the finite elements has been discussed.

УДК 004.6

А.А. Козинский, В.А. Козлов

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ЗВУКОВЫХ ДАННЫХ

Анализ данных различной природы получил широкое распространение в разных областях практической деятельности. Вычислительная техника позволяет решать задачи анализа данных в криминалистике, криптографии, системе обучения, распознавания образов и других. В статье описана система для анализа звуковых данных. В основу математической модели положено разложение звуковой волны на частотные характеристики с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. Описанная математическая модель реализована в приложении, используемом для обучения иностранных студентов русскому языку.

На современном этапе развития информационных технологий проблема анализа и сравнения обрабатываемых данных является одной из самых важных в сфере обработки информации. Так, например, распределенная сеть дата-центров крупнейшей в мире компании Google общей мощностью 220 МВт уже в 2006 году проводила анализ порядка 70 ТБ-изображений для сервиса Google Earth и 800 ТБ-данных поисковой базы веб-документов с уровнем компрессии 11% [1, 2].

Распознавание текстовой информации на растровых изображениях, идентификация пользователя в целях защиты от несанкционированного доступа к приватным системам на основе анализа спектральных характеристик голоса, анализ и определение уникальности цифровых отпечатков пальцев, радужной оболочки глаза или голоса физического лица – вот лишь небольшой список задач, требующих активного использования знаний из теории анализа, методов численного решения задач на электронно-вычислительных машинах и математической статистики.

В настоящей работе особое внимание уделяется математическим методам обработки звуковых данных и их реализации средствами программирования. В частности, рассмотрена задача сравнения двух наборов звуковых данных с целью поиска качественных и количественных параметров для определения степени их подобия.

Постановка задачи: реализовать программный проект для определения степени подобия двух отрезков звуковой дорожки, включающий математическую модель и ее программную реализацию; использовать результат проектирования для усовершенствования существующих технологий поиска и защиты информации, управления данными; дополнительно предусмотреть в программной реализации модели возможности сетевых технологий управления данными с целью применения результатов для систем дистанционного обучения. Таким образом, задача сравнения звуковых данных является прикладной задачей, которая может быть компонентом других систем.

В нашем случае основной системой, использующей анализ звуковых данных, был выбран тренажер для обучения русскому языку иностранных студентов. Большинство проанализированных нами программных систем подобного рода обладают возможностью предоставления учебной информации (содержания обучения) в текстовой или мультимедийной (звуковой) форме. Обучающийся имеет возможность прочесть интересующий его материал, прослушать лекционную запись. Современные веб-технологии предоставляют массу средств для создания и использования тренажеров с описанными возможностями: многочисленные CMS (например, ModX), программные фреймворки (jQuery, MooTools), системы тестирования (ИнфоТест). Однако возможно-

сти организации диалога между системой и студентом чаще всего ограничены только представлением материала.

Проверочные задачи, тесты, опросы и реализация проверки результатов их выполнения достаточно широко освещены в литературе. Основная идея традиционного сравнения – это реализация анализа текстовой информации, введенной пользователем. Такие решения реализованы в ряде систем, например Moodle.

В нашем случае сравнению подлежат звуковые данные. Для решения задачи используются эталонные, заведомо верные наборы аудиозаписей, которые необходимо сравнить с полученным набором данных (назовем его «входным»). При реализации математической модели и ее реализации возникают трудности, связанные с формой представления информации: использование значительных вычислительных мощностей для обработки большого объема данных, необходимость выполнять вычисления в режиме реального времени, нетривиальность используемого алгоритма сравнения данных и другие.

Опишем основные идеи, использованные для моделирования сравнения звуковых данных, которые могут быть представлены несколькими этапами.

Первый этап. При распознавании образца проводится первоначальное трансформирование вводимой информации для сокращения обрабатываемого объема и представления информации в виде, удобном для анализа.

Следующим (вторым) этапом является спектральное представление аудиоинформации образца. Спектральное представление достигается путем использования широкополосного анализа записи.

Хотя спектральное представление звука позволяет повысить эффективность его обработки, необходимо помнить, что исходный сигнал (до момента спектрального представления) весьма разнообразен. Разнообразие возникает по многим причинам, а именно:

- индивидуальные различия человеческих голосов;
- особенности различных уровней речи одного и того же лица в разные моменты времени;
- вариации в произношении говорящего лица фраз и их частей;
- особенности варьирования движений естественных артикуляторов говорящего (языка, губ, челюсти, нёба).

С учетом изложенных особенностей на втором этапе определяются конечные выходные параметры для варьирования голоса и производится нормализация. На основе нормализованной речи составляются шкалы параметров, определяется ситуационный уровень речи говорящего.

Определенные параметры речи используются в последующем (на третьем этапе) для создания шаблона. Шаблон включается в словарь, который характеризует произнесение звуков при передаче информации говорящим, являющимся источником входного сигнала.

На четвертом этапе после распознавания новые входные речевые образцы (также нормализованные и параметризованные) сравниваются с шаблонами, уже имеющимися в базе данных. При сравнении используется динамичное искажение и другие метрические измерения.

Подробнее остановимся на одном из этапов сравнения данных. Основным этапом сравнения звуковых записей является спектральное преобразование полученных сигналов. Ключевую роль в этом процессе играет преобразование Фурье.

Преобразование Фурье – операция, сопоставляющая одну совокупность функций вещественной переменной с другой функцией вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной

функции на элементарные составляющие – гармонические колебания с разными частотами. Поскольку любой звук раскладывается на синусоидальные волны, то вполне объяснимо использовать преобразование Фурье для построения частотного спектра звука. Спектр частот звуковой волны представляет собой график зависимости амплитуды от частоты.

Таким образом, применив для двух звуковых волн преобразование Фурье для получения спектров частот двух волн и предварительно отфильтровав их от лишних шумов (например, используя «окно Кайзера»), на выходе процесса получаем два набора основных гармоник звуковых данных. Непосредственное сравнение уровней звука записей по времени влечет за собой огромные погрешности, которые не позволяют достоверно сравнить две звуковые волны. По указанной причине для анализа полученных показателей нами использованы спектры частот.

Непосредственное использование преобразования Фурье в случае программного анализа невозможно, поскольку вычислительные машины имеют дело только с дискретными наборами данных. Поэтому в работе алгоритма сходства звуковых волн применяется дискретный вариант преобразования Фурье. В этом случае используются предварительно разбитые на несколько фрагментов звуковые записи одинаковой длины со значениями уровня звука соответствующих волн.

Формула дискретного преобразования Фурье имеет вид:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-ikn2\pi}{N}},$$

где $k = \overline{0..N-1}$, x_n – значения амплитуд начальной волны, а X_k – значения амплитуд спектра. Таким образом, зависимость «амплитуда – время» переходит в зависимость «амплитуда – частота» полученного спектра.

Алгоритм, реализующий код дискретного преобразования Фурье имеет сложность $O(N^2)$. Указанная сложность соответствует малоэффективной реализации и требует существенной доработки. Такая доработка реализована по аналогии с быстрым преобразованием Фурье. Мы под этим преобразованием понимаем один из быстрых алгоритмов, называемый алгоритмом прореживания по частоте/времени или алгоритмом по основанию 2 [3].

Данный алгоритм имеет более приемлемую сложность $O(N \log N)$. Впервые он был опубликован в 1965 году в статье Кули (Cooley) и Тьюки (Tukey) [4]. В основе алгоритма лежит идея, что если одно преобразование на N точек заменить вычислением двух преобразований на $N/2$ точек, то это приведет к уменьшению количества операций в два раза. Таким образом, если взять количество точек дискретизации равным 2^K , мы можем повторить подобную процедуру рекурсивно K раз, что во столько же раз увеличит производительность процесса вычисления. Когда достигается момент времени, при котором невозможно деление отрезка на две равные части, полученные значения объединяются в обратном порядке. Для объединения значений берется комплексно-сопряженный спектр, к нему выполняется быстрое преобразование Фурье, и результат повторно подвергается комплексному сопряжению. Таким образом,

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-ikn2\pi}{N}}, \text{ где } k = \overline{0..N-1}.$$

После реализации алгоритмов быстрого преобразования Фурье для входной звуковой волны и эталонной получаются два набора данных («массива») $X[0..N-1]$

и $Y[0..N-1]$, которые содержат значения спектральной мощности волн. В качестве меры сходства двух звуковых фрагментов используется следующая формула:

$$f_{xy} = \left| \frac{\sum_i (x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sqrt{\sum_i (x_i - M_x)^2} \sqrt{\sum_i (y_i - M_y)^2}} \right|,$$

где M_x и M_y – математические ожидания для соответствующих массивов. Полученное значение является коэффициентом корреляции и лежит в промежутке от -1 до 1 включительно. Именно этот коэффициент является конечным показателем сходства двух звуковых данных. Визуально представление сравниваемых звуковых волн показано на рисунке 1. В верхней части рисунка отображена эталонная волна, в нижней – входная, содержащая шумовые помехи. Графики зависимости амплитуды звуковой волны от времени позволяют визуализировать многие приложения, например Adobe Audition.

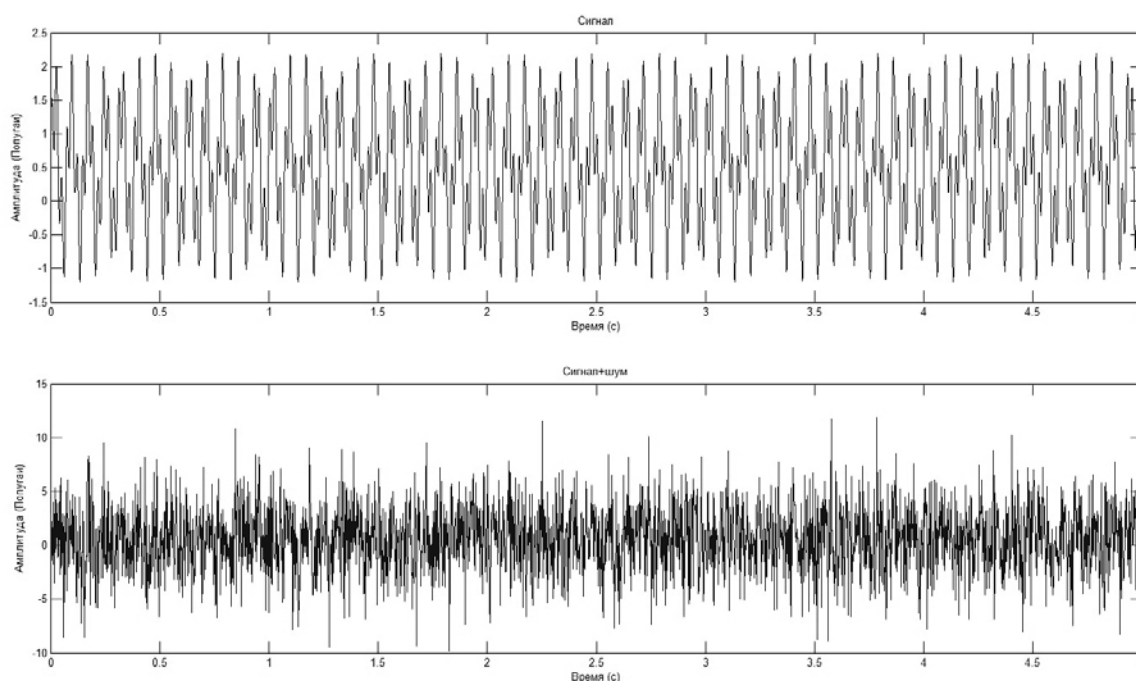


Рисунок 1 – Амплитуды эталонной и входной волны

Способ вычисления меры сходства двух фрагментов, представленных в виде спектра, является наиболее оптимальным. Для решения поставленной задачи анализа сходства звуковых волн нами использованы нейронные сети. Для корректировки шаблона на основе нейронных сетей применена самоорганизующаяся карта признаков Кохонена [5].

На рисунке 2 представлены спектры сравниваемых волн. Сравниваемые волны, эталонная и входная (см. рисунок 1), обрабатываются приложением, реализованным автором. Приложение предназначено для преобразования звуковой волны из представления «амплитуда – время» (рисунок 1) в представление «амплитуда – частота» (рисунок 2). Ниже приведен фрагмент его реализации. Основным методом реализуется использование быстрого преобразования Фурье, описанное выше. Результатом работы метода является массив преобразованных данных, содержащий значения спектральных частот волн. Приложение реализовано на языке C++.

Несмотря на различие двух графиков, легко заметить два ярко выраженных пика частот, по которым и определяется степень схожести двух записей (значения остальных частот являются шумом при записи).

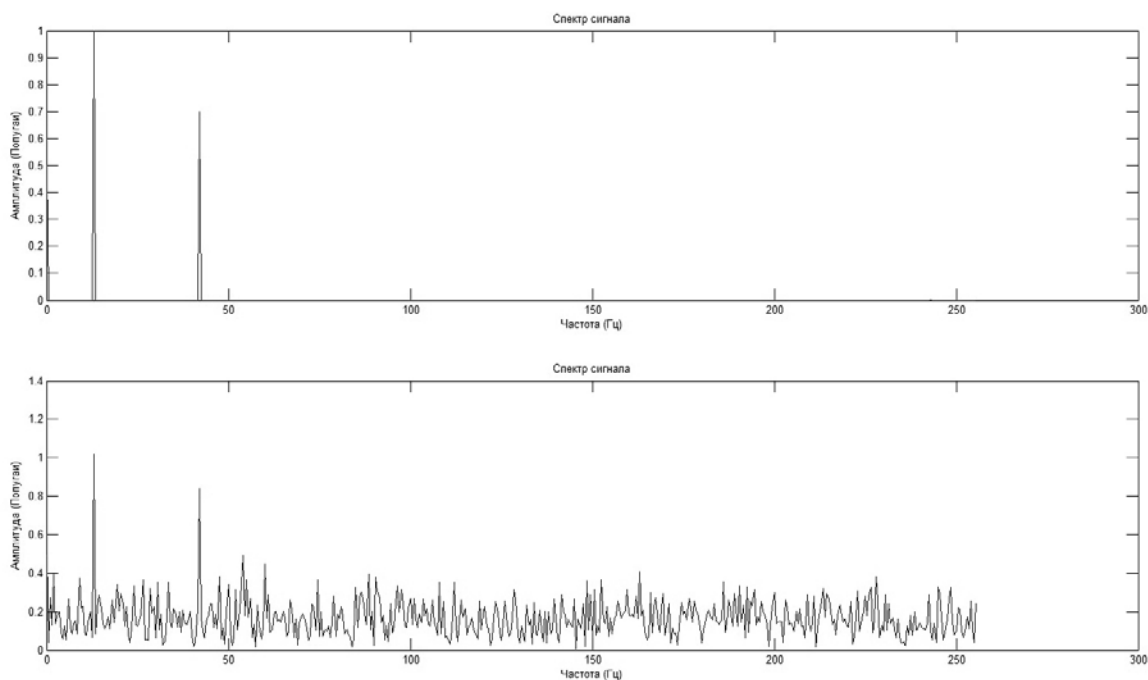


Рисунок 2 – Спектры эталонной и входной волны

Фрагмент программного кода реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье на языке программирования C++:

```
#define NUMBER_IS_2_POW_K(x)  (((!(x)&((x)-1)))&&((x)>1))
#define FT_DIRECT             -1    // Direct transform.
#define FT_INVERSE            1    // Inverse transform.

bool FFT(float *Rdat, float *Idat, int N, int LogN, int
Ft_Flag)
{
    // parameters error check:
    if((Rdat == NULL) || (Idat == NULL))           return
false;
    if((N > 16384) || (N < 1))                     return
false;
    if(!NUMBER_IS_2_POW_K(N))                      return
false;
    if((LogN < 2) || (LogN > 14))                  return
false;
    if((Ft_Flag != FT_DIRECT) && (Ft_Flag != FT_INVERSE)) return
false;

    register int  i, j, n, k, io, ie, in, nn;
    float         ru, iu, rtp, itp, rtq, itq, rw, iw, sr;
```

```

static const float Rcoef[14] =
{
-1.0000000000000000F, 0.0000000000000000F,
0.7071067811865475F,
0.9238795325112867F, 0.9807852804032304F,
0.9951847266721969F,
0.9987954562051724F, 0.9996988186962042F,
0.9999247018391445F,
0.9999811752826011F, 0.9999952938095761F,
0.9999988234517018F,
0.9999997058628822F, 0.9999999264657178F
};

static const float Icoef[14] =
{
0.0000000000000000F, -1.0000000000000000F, -
0.7071067811865474F,
-0.3826834323650897F, -0.1950903220161282F, -
0.0980171403295606F,
-0.0490676743274180F, -0.0245412285229122F, -
0.0122715382857199F,
-0.0061358846491544F, -0.0030679567629659F, -
0.0015339801862847F,
-0.0007669903187427F, -0.0003834951875714F
};

nn = N >> 1;
ie = N;
for(n=1; n<=LogN; n++)
{
rw = Rcoef[LogN - n];
iw = Icoef[LogN - n];
if(Ft_Flag == FT_INVERSE) iw = -iw;
in = ie >> 1;
ru = 1.0F;
iu = 0.0F;
for(j=0; j<in; j++)
{
for(i=j; i<N; i+=ie)
{
io = i + in;
rtp = Rdat[i] + Rdat[io];
itp = Idat[i] + Idat[io];
rtq = Rdat[i] - Rdat[io];
itq = Idat[i] - Idat[io];
Rdat[io] = rtq * ru - itq * iu;
Idat[io] = itq * ru + rtq * iu;
Rdat[i] = rtp;
Idat[i] = itp;
}
}
sr = ru;

```

```
    ru = ru * rw - iu * iw;
    iu = iu * rw + sr * iw;
}

ie >>= 1;
}

for(j=i=1; i<N; i++)
{
    if(i < j)
    {
        io      = i - 1;
        in      = j - 1;
        rtp     = Rdat[in];
        itp     = Idat[in];
        Rdat[in] = Rdat[io];
        Idat[in] = Idat[io];
        Rdat[io] = rtp;
        Idat[io] = itp;
    }

    k = nn;

    while(k < j)
    {
        j    = j - k;
        k >>= 1;
    }

    j = j + k;
}

if(Ft_Flag == FT_DIRECT) return true;

rw = 1.0F / N;

for(i=0; i<N; i++)
{
    Rdat[i] *= rw;
    Idat[i] *= rw;
}

return true;
}
```

Решение поставленной задачи имеет важный социальный аспект: в учебном процессе для иностранных студентов, изучающих русский (белорусский) язык, появляется мощное средство фонетического сравнения, позволяющее повысить эффективность изучения нового языка. Как следствие автоматизации – экономия времени, возможность внедрения новых форм обучения, например дистанционного.

Кроме обучения, полученный результат анализа звуковых данных может быть применен в биометрических системах безопасности. В таких системах основным способом персонификации пользователя является указание его сетевого имени и пароля. Опасности, связанные с использованием пароля, хорошо известны: пароли забывают, хранят в неподходящем месте, наконец, их могут просто украсть. Некоторые пользователи записывают пароль на бумаге и держат эти записи рядом со своими рабочими станциями. Как сообщают группы информационных технологий многих компаний, большая часть звонков в службу поддержки связана с забытыми или утратившими силу паролями [6]. Альтернативой текстовой форме ввода имени и пароля может служить звуковая авторизация. В данном случае в качестве пароля выступает фраза владельца системы, которая сравнивается с заранее записанной на момент регистрации фразой. Это позволит избежать ряда серьезных опасностей и неудобных для пользователя моментов. Подобный метод получения доступа к данным не избавляет от распространенных ошибок, а, возможно, даже создает новые. В этом случае эффективным решением может быть использование комбинированных методов защиты информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко, К. Распределительная сеть дата-центров мирового масштаба – сердце империи Google / К. Коваленко [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://habrahabr.ru/company/mediagrus/blog/167879/>. – Дата доступа : 13.04.2013.
2. Chitu, A. How much data does Google store / A. Chitu [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://googlesystem.blogspot.com/2006/09/how-much-data-does-google-store.html>. – Дата доступа : 02.09.2006.
3. Быстрое преобразование Фурье // Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Быстрое_преобразование_Фурье.
4. Программирование. Быстрое преобразование Фурье [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://psi-logic.shadanakar.org/fft/fft.htm>.
5. Самоорганизующаяся карта Кохонена // Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ru.wikipedia.org/wiki/Самоорганизующаяся_карта_Кохонена.
6. Один звонок каждые две секунды и 50 ПБ управляемых данных: такова статистика сервисов управления Fujitsu за 2012 год [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.storagenews.ru/news_take.asp?Code=734. – Дата доступа : 29.08.2012.
7. Joseph, P. Методы моделирования сигнала в распознавании речи / P. Joseph, P. Ruslan. – Кемерово, 2000. – 79 с.

A.A. Kozinskiy, V.A. Kozlov. Usage of Fast Fourier Transformation for Sound Data Analysis

Analysis of data of different nature is widespread in a variety of practice areas. Computer science allows us to solve the problem of data analysis in forensics, cryptography, the education system, pattern recognition and others. The article describes a system for analyzing the audio data. The basis of the mathematical model is based on the decomposition of the sound wave at the frequency characteristics with the use of fast Fourier transform algorithm. The mathematical model is implemented in the application used for the training of foreign students Russian language.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.04.2013

УДК 517.518.948

В.М. Мадорский

О ЧАСТИЧНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ С НЕГЛАДКИМ ОПЕРАТОРОМ

В работе рассматриваются нелокальные частично регуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x) = 0$ в пространстве R^n . Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся высокоточно к решению операторного уравнения с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$f(x) = 0; f \in (D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

В работе [2] был исследован нерегуляризованный полулокальный итерационный процесс с непрерывным оператором и доказана его локальная кубическая скорость сходимости. Однако рассмотренный в [2] итерационный процесс имеет тот недостаток, что в рассматриваемой области $\bar{S}(x_0, r)$ должен был быть равномерно ограничен оператор, обратный оператору первой разделенной разности оператора $f(x)$. В настоящей работе мы попытаемся избавиться от этого обременительного условия.

Относительно оператора f полагаем, что $f \in C_D$,

$$\text{и } \left\| \left[\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} \right\| \leq B, x_n, z_n \in D.$$

Для решения уравнения (1) используем следующий итерационный процесс:

$$\underline{\text{Шаг 1}} \quad \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right) \Delta y_n = -f(x_n); \quad (2)$$

$$y_n = x_n + \Delta y_n, z_n = x_n - \beta_n f(x_n), \beta_0 \in [1e - 3, 1e - 1].$$

$$\underline{\text{Шаг 2}} \quad \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right) \Delta x_n = -\beta_n (f(x_n) + \beta_n f(y_n)). \quad (3)$$

$$\underline{\text{Шаг 3}} \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (4)$$

Шаг 4 if $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon \ll 1$ GO TO ВЫХОД

$$\text{else } \beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|} \right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (5)$$

и GO TO шаг 1.

Начнем доказательство с проверки релаксационности процесса (2)–(5), для чего предварительно найдем некоторые оценки. Используя теорему о среднем для непрерывных операторов $\|f(x)\| \leq \|f(y) + f(y, z)(x - y)\| + k\|x - y\| \|x - z\|$, имеем

$$\begin{aligned} \|f(y_n)\| &\leq \|f(x_n) + f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| + k\|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\| = \\ &= \left\| f(x_n) + \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right) - \alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E (y_n - x_n) \right\| + \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ K\|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\| \leq \alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 \|\Delta y_n\| + K\|\Delta y_n\| \|\Delta y_n + \beta_n f(x_n)\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB \|f(x_n)\|^2 * \left\| \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} f(x_n) + \beta_n f(x_n) \right\| \leq \\ &\leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB^2 \|f(x_n)\|^2 * \left\| E - \beta_n \left(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) \right\| = \\ &= \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB^2 \|f(x_n)\|^2 C = \gamma_n \|f(x_n)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь введены оценки

$$\left\| E - \beta_n \left(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) \right\| \leq C,$$

$$\gamma_n = \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\| + KB^2 C < \alpha\beta_n \|f(x_n)\| + KB^2 C = \gamma.$$

С учетом оценки (6) и теоремы о среднем, имеем:

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\| = \\ &= \|f(x_n) + \left(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + F(x_n, z_n) - \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) (x_{n+1} - x_n)\| + \\ &+ K \|\Delta x_n\| \|x_{n+1} - x_n + \beta_n f(x_n)\| \leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 \|\Delta x_n\| + \\ &+ \|f(x_n) - \beta_n f(x_n) - \beta_n^2 f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\|^* \\ &* \left\| \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} \left(-\beta_n f(x_n) - \beta_n^2 f(y_n) \right) + \beta_n f(x_n) \right\| \leq \\ &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\|^* \\ &* B \left\| \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n) - \beta_n f(x_n) \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right] \right\| = \\ &= (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\| + K \|\Delta x_n\| \beta_n \|f(x_n)\|^* \\ &* B \left\| \left(E + \beta_n \gamma_n \|f(x_n)\| \right) - \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right] \right\| \leq \\ &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma_n \|f(x_n)\|^2 + K \|\Delta x_n\| B \left(\beta_n \gamma_n \|f(x_n)\| + C \right) \beta_n \|f(x_n)\| \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $\|\Delta x_n\| \leq B \left(\beta_n \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| \right)$, окончательно имеем (8)

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma \|f(x_n)\|^2 + \\ &+ KB^2 \left(\beta_n \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma \|f(x_n)\|^2 \beta_n \|f(x_n)\| \left(\beta_n \gamma \|f(x_n)\| \right) + C \right) = \\ &= (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 * \\ &* \left(\gamma + KB^2 \left(\beta_n \|f(x_n)\| + \gamma \beta_n \|f(x_n)\| \left(\gamma \beta_n \|f(x_n)\| \right) + C \right) \right) = \\ &= (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\| \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \beta_n \|f(x_n)\| D; \gamma + KB^2 \left(\beta_n \|f(x_n)\| + \gamma \beta_n \|f(x_n)\| \left(\gamma \beta_n \|f(x_n)\| \right) + C \right) \leq D.$$

Из (5) имеем, что

$$\beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\| = \beta_n \|f(x_n)\|; n = 0, 1. \tag{9}$$

Тогда из последнего соотношения следует, что $\varepsilon_i = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \beta_0 \|f(x_0)\|D$. Если $\varepsilon_0 < 1$, а этого всегда можно добиться за счет выбора β_0 , то все $\varepsilon_i < 1$ и $q_i < 1$.

Так как из (8) следует при $n = 0$, что $\|f(x_1)\| \leq q_0 \|f(x_0)\|$, $q_0 < 1$, а из (9) при $n = 0$ $\beta_i \|f(x_1)\| \leq \beta_0 \|f(x_0)\|$, то $\beta_i > \beta_0$, тогда

$$q_1 = 1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1) = 1 - \beta_i(1 - \varepsilon_0) < q_0.$$

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность итерационных параметров $\{q_i\}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Переходя к пределу в (8) при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_{n+1})\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (10)$$

Из (10) следует, что последовательность элементов x_i , порождаемых процессом (2)–(5), стремится к x^* – решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показываем, что существует такой номер n_0 , что для $i > n_0$ все β_i становятся равными единице.

Пусть β_i становятся равными единице, тогда операторы $\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n)$ вблизи решения становятся близкими к операторам первой разделенной разности $f(x_n, z_n)$ и, как показано в работе [2], процесс шаг 1 – шаг 4 переходит в процесс с кубической скоростью сходимости.

На основе вышеизложенного может быть сформулирована теорема.

Теорема.

Пусть в интересующей нас области D x^* – решение уравнения (1) с непрерывным оператором f существует. Тогда, если начальное приближение x_0 и начальная шаговая длина β_0 таковы, что $\varepsilon_0 = \beta_0 \|f(x_0)\|D < 1$, итерационный процесс (2)–(5) со сверхлинейной (локально с кубической скоростью) сходится к x^* .

Вполне аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показывается, что все элементы x_i, y_i, z_i , участвующие в итерационном процессе (2)–(5), не выходят за пределы сферы $\bar{S}(x_0, r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.

2. Мадорский, В.М. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, локально сходящиеся с кубической скоростью / В.М. Мадорский // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фїзіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 89–95.

V.M. Madorski. Nonlocal in Part Regulariside Iterative Processes Locally Converve with Cubic Speed

Unlocal superlinear in part reguliside iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 29.04.2013

УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения операторных уравнений с неограниченным линейным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства при точной и приближенной правых частях уравнения. Получены априорные оценки погрешности метода, они оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого неявного метода и явного метода простых итераций.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H для решения операторного уравнения I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с неограниченным линейным самосопряженным оператором предлагается использовать неявный итерационный метод

$$(A^{2k} + B)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE$, $b > 0$, E – тождественный оператор. Нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением, следовательно, задача (1) некорректна и имеет единственное решение x при точной правой части y . В случае приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ итерационный метод (2) запишется в виде

$$(A^{2k} + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

2. Сходимость при точной правой части.

Имеет место

Теорема 1. *Итерационный процесс (2) сходится при условии $b > 0$ к точному решению уравнения (1).*

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}]y$, $B = bE$. Рассмотрим $x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}]y = A^{-1}B^n(A^{2k} + B)^{-n}y$.

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda \quad (E_\lambda - \text{спектральная функция } A), \quad \text{получим } x - x_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda y = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x = \int_0^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x + \int_{-\infty}^0 \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x = I_1 + I_2.$$

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int_0^\varepsilon \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x.$$

Так как $\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \leq q < 1$ для $\lambda \geq \varepsilon$, то

$$\left\| \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_{\lambda} x \right\| \leq q^n \left\| \int_{\varepsilon}^{+\infty} dE_{\lambda} x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

а для первого интеграла

$$\left\| \int_0^{\varepsilon} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_{\lambda} x \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda} x \right\| = \|E_{\varepsilon} x\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

в силу свойств спектральной функции. Таким образом, $\|I_1\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Аналогично $\|I_2\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и сходимость метода (2) доказана. Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что решение уравнения (1) искокопредставимо, т.е.

$$x = A^{2s} z, s > 0. \quad (4)$$

Тогда

$$x - x_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{2s} b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_{\lambda} z.$$

Найдем максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{2s} b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n}.$$

Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$:

$$\frac{\lambda^{2s-1} b^n [2s(\lambda^{2k} + b) - 2nk\lambda^{2k}]}{(\lambda^{2k} + b)^{n+1}} = 0.$$

Здесь $\lambda \neq 0$, так как в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(\lambda^{2k} + b) - nk\lambda^{2k} = 0$.

Отсюда $\lambda^{2k} = \frac{sb}{nk-s}$ и $\lambda_{1/2}^* = \pm \left[\frac{sb}{nk-s} \right]^{1/(2k)}$ – стационарные точки функции $f(\lambda)$ при $nk > s$. В силу симметрии функции $f(\lambda)$ имеем $f(\lambda_1^*) = f(\lambda_2^*)$, поэтому достаточно рассмотреть $f(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_1^* = \left(\frac{bs}{nk-s} \right)^{\frac{1}{2k}}$. Поскольку $f''(\lambda_1^*) < 0$, то λ_1^* – точка максимума неотрицательной функции $f(\lambda)$. Найдем его.

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} f(\lambda) = f(\lambda_1^*) &= \left(\frac{bs}{nk-s} \right)^{s/k} \frac{b^n}{\left(\frac{bs}{nk-s} + b \right)^n} = \left(\frac{bs}{kn} \right)^{s/k} \left(\frac{kn-s}{kn} \right)^{-s/k} \left(\frac{kn-s}{kn} \right)^n = \\ &= \left(\frac{bs}{kn} \right)^{s/k} \left(1 + \frac{s}{kn-s} \right)^{-(n-s/k)} < \left(\frac{bs}{2kn} \right)^{s/k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|x - x_n\| \leq \left(\frac{bs}{2kn} \right)^{s/k} \|z\|, \quad kn > s. \quad (5)$$

4. Сходимость при приближенной правой части

Справедлива

Теорема 2. При условии $b > 0$ метод (3) сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $\sqrt[2k]{n\delta} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}](y - y_\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right] dE_\lambda(y - y_\delta).$$

Оценим сверху максимум модуля подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \right].$$

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \frac{\lambda^{2k-1}}{\lambda^{2k} + b}$, $g'_1(\lambda) = \frac{\lambda^{2k-2}[(2k-1)b - \lambda^{2k}b]}{(\lambda^{2k} + b)^2}$, отсюда $\lambda^{2k} = (2k-1)b$,

$\lambda_{1/2} = \pm \sqrt[2k]{(2k-1)b}$ – критические точки функции $g_1(\lambda)$.

В силу симметричности $|g_1(\lambda)|$ достаточно рассмотреть $|g_1(\lambda)|$ только в одной точке, например, $\lambda_1 = \sqrt[2k]{(2k-1)b}$, т.е.

$$|g_1(\lambda_1)| = |g_1(\lambda_2)| = \frac{[(2k-1)b]^{(2k-1)/(2k)}}{(2k-1)b + b} = \frac{[(2k-1)b]^{(2k-1)/(2k)}}{2kb} \leq \frac{1}{b^{1/(2k)}}.$$

Следовательно, $\max_{\lambda} |g_1(\lambda)| \leq \frac{1}{b^{1/(2k)}}$.

Покажем, что

$$\max_{\lambda} |g_n(\lambda)| \leq 2k \frac{n^{1/(2k)}}{b^{1/(2k)}}. \quad (6)$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е.

$g_m(\lambda) \leq 2k \left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)}$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} g_{m+1}(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^{m+1}}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \right] = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^m}{(\lambda^{2k} + b)^m} \right] + \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^{m+1}}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \right] - \\ &- \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^m}{(\lambda^{2k} + b)^m} \right] \leq 2k \left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)} + \frac{\lambda^{2k-1} b^m}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$2k \left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)} + \frac{\lambda^{2k-1} b^m}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \leq 2k \left(\frac{m+1}{b}\right)^{1/(2k)}, \quad (7)$$

что равносильно неравенству

$$\frac{\lambda^{2k-1} b^m}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \leq 2k \cdot b^{-1/(2k)} (\sqrt[2k]{m+1} - \sqrt[2k]{m}).$$

Отсюда

$$\frac{\lambda^{2k-1} b^{m+1}}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \cdot b^{\frac{2k-1}{2k}} \leq 2k (\sqrt[2k]{m+1} - \sqrt[2k]{m}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[2k]{m+1} = \sqrt[2k]{m \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt[2k]{m} \left\{ 1 + \frac{1}{2km} + \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \frac{1}{2!m^2} + \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \left(\frac{1}{2k} - 2\right) \frac{1}{3!m^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \left(\frac{1}{2k} - 2\right) \left(\frac{1}{2k} - 3\right) \frac{1}{4!m^4} + \dots + \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \dots \left[\frac{1}{2k} - (2p-2)\right] \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot m^{2p-1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \dots \left[\frac{1}{2k} - (2p-2)\right] \cdot \left[\frac{1}{2k} - (2p-1)\right] \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot 2p \cdot m^{2p}} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \dots \left[\frac{1}{2k} - (2p-2)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) m^{2p-1}} > \left| \frac{\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} - 1\right) \dots \left[\frac{1}{2k} - (2p-2)\right] \left[\frac{1}{2k} - (2p-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) 2p m^{2p}} \right|,$$

что равносильно $1 > \frac{\left|\frac{1}{2k} - (2p-1)\right|}{2pm}$ или $\frac{2p-1-\frac{1}{2k}}{2pm} < 1$, а это уже очевидно при $m \geq 1$.

Следовательно,

$$\sqrt[2k]{m+1} > \sqrt[2k]{m} \left(1 + \frac{1}{2km} - \frac{2k-1}{8m^2 k^2}\right).$$

Вернемся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. подраздел 3)

$$\frac{\lambda^{2k-1} b^{m+1}}{(\lambda^{2k} + b)^{m+1}} \leq \left[\frac{b(2k-1)}{4k(m+1)} \right]^{\frac{2k-1}{2k}},$$

то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$\left[\frac{b(2k-1)}{4k(m+1)} \right]^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot \frac{1}{b} \leq b^{-\frac{1}{2k}} 2km^{\frac{1}{2k}} \left[\frac{1}{2km} - \frac{2k-1}{8k^2 m^2} \right]. \quad (8)$$

Преобразуем последнее неравенство

$$\left(\frac{2k-1}{2k} \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \cdot 2^{-\frac{2k-1}{2k}} (m+1)^{-\frac{2k-1}{2k}} \leq m^{\frac{1}{2k}} \cdot 2k \cdot \frac{1}{2km} \left(1 - \frac{2k-1}{4km}\right).$$

Поскольку $\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^{\frac{2k-1}{2k}} < 1$, то докажем более сильное неравенство

$$1 \leq 2^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(1 - \frac{2k-1}{4km}\right), \quad m \geq 1.$$

При $k \geq 1, m \geq 1$ имеем

$$2^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(1 - \frac{2k-1}{4km}\right) \geq 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{4} > 1.$$

Значит, неравенство (8) выполняется, и тем более справедливо неравенство (7).

Таким образом, для $n \geq 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda) \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}$. Отсюда

$$\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta, \quad n \geq 1.$$

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбирать n зависящим от δ , чтобы $n^{\frac{1}{2k}} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

5. Оценка погрешности метода и её оптимизация.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{\frac{s}{k}} \|z\| + 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо (4), то при условии $b > 0$ для метода (3) справедлива оценка погрешности (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от неё равна нулю, в результате получим априорный момент останова:

$$n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} b^{\frac{2k}{2s+1}} \|z\|^{\frac{2k}{2s+1}} \delta^{-\frac{2k}{2s+1}}. \quad (10)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + 2s) \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-2k)}{k(1+2s)}} 2^{-\frac{s}{k(2s+1)}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \delta^{\frac{2s}{2s+1}}. \quad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 4. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид (11) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (10).

Замечание 1. Оценка погрешности (11) имеет порядок $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$, и, как следу-

ет из [2], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^{2s} z$, $s > 0$.

Замечание 2. Оптимальная оценка (11) не зависит от итерационного параметра b , но от b зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать b удовлетворяющим условию $b > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно выбрать

$$b_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} \|z\|^{\frac{2k}{2s+1}} \delta^{\frac{2k}{2s+1}}.$$

Сравнение метода (3) с широкоизвестным явным методом итераций [1–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (12)$$

показывает, что порядки их совпадают. Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод обладает следующим важным достоинством: в явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести к необходимости большого числа вычислений.

В неявном методе (3) на $b > 0$ нет ограничений сверху, в связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Неявный метод (3) в отличие от метода (12) позволяет решать уравнение (1) с неограниченным и притом необязательно положительным оператором.

6. Погрешность в счёте

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), а z_n – значение с учётом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (A^{2k} + B)^{-1}(Bz_n + A^{2k-1}y_\delta) + \frac{1}{b}\gamma_n, \quad z_0 = 0, \quad (13)$$

где γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = (A^{2k} + B)^{-1}B\varepsilon_n + \frac{1}{b}\gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (A^{2k} + B)^{-(n-1-i)} B^{n-1-i} \frac{1}{b} \gamma_i.$$

Так как $b > 0$ и $0 \in SpA$, то $\|(A^{2k} + B)^{-1}B\| \leq 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \leq \frac{n}{b}\gamma$, $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{\frac{s}{k}} \|z\| + 2k \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}} \delta + \frac{n}{b} \gamma, \quad n \geq 1.$$

Замечание 3. Для решения операторного уравнения (1) с несамосопряжённым или неположительным, но ограниченным оператором A можно перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближённом элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left((A^*A)^{2k} + B \right) x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + (A^*A)^{2k-1} A^* y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N.$$

Предложенный метод может быть применён для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике и медицине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Константинова, Я.В. Оценки погрешностей в методе итераций для уравнений I рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Денисов, А.М. Введение в теорию обр ажных задач / А.М. Денисов. – М. : МГУ, 1994. – 207 с.

O.V. Matysik. The Method of Iterations Implicit Type for Solutions of Linear Equations with an Unbounded Operator.

For the solution of operator equations with an unbounded linear and self-conjugate operator in the Hilbert space is proposed implicit iteration method. The convergence of the method in the original norm of the Hilbert space with accurate and approximate the right parts of the equation is proved. Obtained a priori estimates of the error of the method, they are optimized. Comparison of estimates of the error of the implicit method and an explicit method of simple iteration.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.02.2013

УДК 517.923

Е.А. Натынчик, Т.И. Шило

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПОЛИНОМАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия принадлежности специальной системы второго порядка, правые части которой являются полиномами третьей степени относительно искомым функций, к классу Р-типа, т.е. найдены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях данной системы. Эта проблема не нова, однако для данной системы еще далека от завершения. Наряду с методом малого параметра Пенлеве и методом основанным на редукции от системы второго порядка к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, в данной заметке применен метод сведения систем упрощенных уравнений к системе двух дифференциальных уравнений Брио и Буке. Предлагаемый метод позволяет сравнительно легко выписать условия отсутствия подвижных критических особых точек в решениях исходной системы в явном виде.

Найденные в данной работе условия принадлежности системы к классу Р-типа легко проверяются на практике.

Рассмотрим специальную систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = P(y, x, z), \quad \frac{dx}{dz} = Q(y, x, z), \quad (1)$$

где P и Q — полиномы третьей степени по y и x с коэффициентами, голоморфными относительно z в некоторой области D .

Будем искать необходимые и достаточные условия того, чтобы все подвижные особые точки решений системы вида (1) были однозначными.

Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = a_{30}y^3 + a_{21}y^2x + a_{20}y^2 + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{10}y + a_{01}x + a_{00}, \\ \frac{dx}{dz} = b_{30}x^3 + b_{21}y^2x + b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}, \end{cases} \quad (2)$$

где a_{ij} и b_{ij} ($i, j = \overline{0,3}$) — голоморфные функции относительно $z \in D$, причем $b_{12}(z) \neq 0$.

Для нахождения необходимых условий отсутствия подвижных критических особых точек применим метод малого параметра Пенлеве [1]. Неопределенность, с которой вводится параметр λ , позволяет придать этому методу особую гибкость. Вводя параметр λ в рассматриваемую систему различным образом, мы тем самым получим необходимые условия отсутствия у нее подвижных критических особых точек.

Введем в систему (2) параметр λ следующим образом:

$$y = Y, \quad x = \frac{X}{\lambda}, \quad z = z_0 + \lambda^2 Z, \quad (3)$$

где z_0 — произвольная точка области D , не обращающая $b_{12}(z)$ в нуль.

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dY}{dz} = \lambda a_{21}(z_0 + \lambda^2 Z)Y^2 X + \lambda^2 a_{30}(z_0 + \lambda^2 Z)Y^3 + a_{02}(z_0 + \lambda^2 Z)X^2 + \\ + \lambda a_{11}(z_0 + \lambda^2 Z)XY + \lambda^2 a_{10}(z_0 + \lambda^2 Z)Y + \lambda a_{01}(z_0 + \lambda^2 Z)X + \\ + \lambda^2 a_{00}(z_0 + \lambda^2 Z), \\ \frac{dX}{dz} = b_{03}(z_0 + \lambda^2 Z)X^3 + \lambda b_{12}(z_0 + \lambda^2 Z)YX^2 + \lambda^2 b_{21}(z_0 + \lambda^2 Z)Y^2 X + \\ + \lambda b_{02}(z_0 + \lambda^2 Z)X^2 + \lambda^2 b_{11}(z_0 + \lambda^2 Z)XY + \lambda^2 b_{01}X + \lambda^3 b_{10}(z_0 + \lambda^2 Z)Y + \\ + \lambda^3 b_{00}(z_0 + \lambda^2 Z). \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) положим $\lambda = 0$, тогда получим систему упрощенных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{dz} = a_{02}(z_0)X_0^2, \\ \frac{dX_0}{dz} = b_{03}(z_0)X_0^3, \end{cases} \quad (5)$$

откуда

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-2b_{03}(z_0)}(z - z_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad Y_0(z) = -\frac{a_{02}(z_0)}{a_{12}(z_0)}.$$

Очевидно, что точка z_0 для компоненты $X_0(z)$ решения системы (5), а, значит, и для решения системы (2) является подвижным критическим полюсом. Предшествующее рассуждение отпадает при $b_{03}(z) \equiv 0$.

Введя в систему (2) параметр λ по формулам

$$x = X, \quad y = \frac{Y}{\lambda}, \quad z = z_0 + \lambda^2 Z, \quad (3)$$

получим при $\lambda=0$ систему упрощенных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{dz} = a_{30}(z_0)Y_0^3, \\ \frac{dX_0}{dz} = b_{21}(z_0)Y_0^2 X_0. \end{cases} \quad (6)$$

Интегралы системы (6) имеют вид

$$Y_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-2a_{30}(z_0)}(z - z_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad X_0(z) = C_1(z - z_0)^{-\frac{b_{21}(z_0)}{a_{30}(z_0)}}.$$

Для отсутствия подвижных критических особых точек необходимо, чтобы $a_{30}(z) \equiv 0$.

В дальнейшем будем считать, что члены $a_{30}y^3$ и $b_{03}x^3$ в системе (2) отсутствуют. В этом случае делаем замену

$$y = \frac{Y}{\lambda}, \quad x = \frac{X}{\lambda}, \quad z = z_0 + \lambda^2 Z, \quad (7)$$

при $\lambda=0$ получим систему упрощенных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{dz} = a_{21}(z_0)Y_0^2 X_0, \\ \frac{dX_0}{dz} = b_{21}(z_0)Y_0^2 X_0 + b_{12}(z_0)X_0^2 Y_0. \end{cases} \quad (8)$$

Положив в автономной системе (8) $Y_0 = vX_0$, где v – некоторая функция z , получим

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dz} = X_0^3(b_{21}v^2 + b_{12}v), \\ \frac{dv}{dz} = X_0^2(a_{21}v^2 - v(b_{12}v + b_{21}v^2)) \end{cases} \quad (9)$$

Введем обозначения

$$P(v) = b_{21}v^2 + b_{12}v, \quad Q(v) = a_{21}v^2, \quad R(v) = Q(v) - vP(v) = a_{21}v^2 - b_{21}v^3 - b_{12}v^2.$$

Тогда система (9) переписется в виде

$$\begin{cases} X_0' = X_0^3 P(v), \\ v' = X_0^2 R(v). \end{cases} \quad (10)$$

Исключая переменную X_0 из системы (10), получим уравнение

$$v'' = A_0(v)v'^2, \quad (11)$$

$$\text{где } A_0(v) = \frac{2P(v) + R'_v}{R} = \frac{2a_{21}v - b_{21}v^2}{-b_{21}v^3 + (a_{21} - b_{12})v^2}.$$

В работе рассмотрен случай, когда $A_0(v) \equiv 0$, т.е. когда $a_{21} \equiv 0, b_{21} \equiv 0, b_{12} \neq 0$.

Итак, в дальнейшем будем исследовать систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = a_{20}y^2 + a_{02}x^2 + a_{11}xy + a_{10}y + a_{01}x + a_{00}, \\ \frac{dx}{dz} = b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}. \end{cases} \quad (12)$$

Делая в системе (12) замену вида (7), получим систему

$$\begin{cases} \frac{dY}{dz} = \lambda a_{20}(z_0 + \lambda^2 Z)Y^2 + \lambda a_{02}(z_0 + \lambda^2 Z)X^2 + \lambda a_{11}(z_0 + \lambda^2 Z)XY + \\ + \lambda^2 a_{10}(z_0 + \lambda^2 Z)Y + \lambda^2 a_{01}(z_0 + \lambda^2 Z)X + \lambda^3 a_{00}(z_0 + \lambda^2 Z), \\ \frac{dX}{dz} = b_{12}YX^2 + \lambda b_{02}X^2 + \lambda b_{11}XY + \lambda^2 b_{01}X + \lambda^2 b_{10}Y + \lambda^3 b_{00}. \end{cases} \quad (13)$$

При $\lambda=0$ имеем

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{dz} = 0, \\ \frac{dX_0}{dz} = b_{12}(z_0)Y_0X_0^2, \end{cases}$$

откуда

$$X_0(z) = -\frac{1}{cb_{12}(z_0)(z-z_0)}, Y_0(z) = c_1. \quad (14)$$

Разлагая интегралы системы (13) по степеням λ , получаем

$$X(z) = X_0(z) + \lambda X_1(z) + \lambda^2 X_2(z) + \dots + \lambda^n X_n(z) + \dots,$$

$$Y(z) = Y_0(z) + \lambda Y_1(z) + \lambda^2 Y_2(z) + \dots + \lambda^n Y_n(z) + \dots$$

Для нахождения $Y_1(z)$, $X_1(z)$ получим систему

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dz} = a_{20}(z_0)Y_0^2 + a_{11}(z_0)X_0Y_0 + a_{02}(z_0)X_0^2, \\ \frac{dX_1}{dz} = b_{12}(z_0)X_0^2Y_0 + 2b_{12}(z_0)X_0Y_0X_1 + b_{02}(z_0)X_0^2 + b_{11}(z_0)X_0Y_0. \end{cases}$$

Откуда, учитывая (14), получаем

$$Y_1(z) = a_{20}(z_0)c_1^2z - \frac{a_{11}(z_0)}{b_{12}(z_0)}Ln(z-z_0) + \frac{a_{02}(z_0)}{c_1^2b_{12}^2(z_0)(z-z_0)},$$

$$X_1(z) = \frac{a_{20}(z_0) - b_{11}(z_0)}{2b_{12}(z_0)} - \frac{a_{02}(z_0)Ln(z-z_0)}{c_1^4b_{12}^3(z_0)(z-z_0)^2} + \frac{b_{02}}{c_1^2b_{02}^2(z-z_0)} + \frac{c_2}{(z-z_0)^2}.$$

Следовательно, $Y_1(z)$ и $X_1(z)$, а потому $Y(z)$ и $X(z)$ имеют подвижную многозначную особенность в точке $z = z_0$.

Таким образом, для того чтобы $Y(z)$ и $X(z)$ не имели критических подвижных особых точек, необходимо, чтобы $a_{11}(z) = 0$, $a_{02}(z) \equiv 0$.

Для нахождения $Y_2(z)$ получим уравнение

$$\frac{dY_2}{dz} = 2a_{20}(z_0)Y_0Y_1 + a_{10}(z_0)Y_0 + a_{01}(z_0)X_0,$$

где $Y_0 = c_1$, $X_0 = -\frac{1}{c_1b_{12}(z_0)(z-z_0)}$.

Отсюда находим

$$Y_2(z) = 2a_{20}^2(z_0)c_1^3\frac{z^2}{2} + a_{10}c_1z - \frac{a_{01}(z_0)}{c_1b_{12}(z_0)}Ln(z-z_0) + c_3.$$

Для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений системы (2) необходимо, чтобы $a_{01}(z) \equiv 0$.

При перечисленных выше ограничениях система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = a_{20}y^2 + a_{10}y + a_{00}, \\ \frac{dx}{dz} = b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + b_{11}xy + b_{01}x + b_{10}y + b_{00}. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) при любом конечном y_0 и $b_{12}(z_0)y_0 + b_{02}(z_0) \neq 0$ имеет единственное решение $(x(z), y(z))$, обладающее свойством:

$$x(z) \rightarrow \infty, y(z) \rightarrow y_0 \text{ при } z \rightarrow z_0 \in D.$$

Для компоненты решения $x(z)$ точка $z = z_0$ является подвижным полюсом первого порядка.

Если $a_{20}(z) \equiv 0$, то первое уравнение системы (15) является линейным. Подставляя в этом случае вместо y голоморфное решение $y(z)$ во второе уравнение системы (15), мы получим уравнение Риккати, которое, как известно [1], является уравнением с неподвижными критическими особыми точками.

Из вышесказанного следует

Теорема 1. Система (2) при выполнении условий

$$a_{30}(z) \equiv 0, b_{03}(z) \equiv 0, a_{21}(z) \equiv 0, b_{21}(z) \equiv 0, a_{11}(z) \equiv 0, a_{01}(z) \equiv 0, a_{20}(z) \equiv 0, a_{02}(z) \equiv 0$$

представляет собой класс системы типа Пенлеве, т.е. является системой, решение которой не имеет подвижных критических особых точек.

Система (15) может иметь решение с подвижной многозначной особенностью в точке z_0 только в том случае, когда $y(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$. Эта возможность в действительности может как иметь место, так и не иметь, что видно из следующих примеров.

Пример 1. Пусть имеем систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = -y^2, \\ \frac{dx}{dz} = yx^2 + y. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$y(z) = \frac{1}{z - z_0}, x(z) = \operatorname{tg}(\ln(z - z_0) + c_1),$$

где c_1, z_0 — произвольные постоянные.

Откуда видно, что при $z \rightarrow z_0$ $y(z) \rightarrow \infty$, а компонента $x(z)$ остается неопределенной.

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = y^2, \\ \frac{dx}{dz} = yx^2. \end{cases}$$

В этом случае общее решение представляется в виде

$$y(z) = -\frac{1}{z - z_0}, \quad x(z) = \frac{1}{\ln(z - z_0)c_1},$$

откуда видим, что точка $z = z_0$ является подвижной многозначной особой точкой для компоненты $x(z)$.

Пример 3.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = -y^2, \\ \frac{dx}{dz} = yx^2 - xy. \end{cases}$$

Общее решение представимо в виде

$$y(z) = \frac{1}{z - z_0}, \quad x(z) = \frac{1}{1 - c_1(z - z_0)},$$

откуда замечаем, что $y(z)$ и $x(z)$ всегда стремятся к определенным значениям и точка z_0 не является многозначной особенностью для решений данной системы.

Пусть $a_{20}(z) \neq 0$. Исключив в этом случае переменную y из системы (15) с помощью подстановки

$$y(z) = -\frac{x' - b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$$

получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' = A_0(x, z)x'^2 + A_1(x, z)x' + A_2(x, z), \quad (16)$$

где $A_0(x, z) = \frac{2b_{12}x + a_{20} + b_{11}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$

$$A_1(x, z) = a_{10} + b_{01} + 2b_{02}x + \frac{(2b_{12}x + b_{11})(-b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00}) + b'_{12}x^2 + b'_{11}x + b'_{10} - 2a_{20}b_{02}x^2 - 2a_{20}b_{01}x - 2a_{20}b_{00}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$$

$$+ \frac{b'_{10} - 2a_{20}b_{02}x^2 - 2a_{20}b_{01}x - 2a_{20}b_{00}}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}},$$

$$A_2(x, z) = (b_{12}a_{00} + b'_{02} - a_{10}b_{02})x^2 + (b'_{01} + b_{11}a_{00} - a_{10}b_{01})x + b_{10}a_{00} - a_{10}b_{00} + \frac{a_{20}b_{02}^2x^4 + a_{20}b_{01}^2x^2 + a_{20}b_{00}^2 + 2a_{20}b_{00}b_{01} + (b'_{12}x^2 + b'_{11}x + b'_{10})(-b_{02}x^2 - b_{01}x - b_{00})}{b_{12}x^2 + b_{11}x + b_{10}}.$$

Как известно [1], для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (16) необходимо, чтобы коэффициент имел одну из девяти форм [4], а полюсы $A_1(x, z)$, $A_2(x, z)$ относительно x были простые и совпадали с полюсами $A_0(x, z)$.

Если $b_{12}(z) \neq 0$, $a_{20}(z) \neq 0$, то $A_0(x, z)$ может принимать лишь форму $A_0(x, z) = \frac{2}{x}$. Это возможно, если

$$b_{10}(z) \equiv 0, \quad b_{11}(z) \equiv a_{20}(z). \quad (17)$$

Решения системы (15) при условии, что $b_{10}(z) \equiv 0$, обладающие свойством

$$y(z) \rightarrow \infty, \quad x(z) \rightarrow x_0 \quad \text{при } z \rightarrow z_0, \quad (18)$$

будем искать в виде

$$y(z) = \frac{\alpha_0 + u(z)}{z - z_0}, \quad x(z) = x_0 + v(z), \quad (19)$$

где $\alpha_0 \cdot x_0 \neq 0$, а $u(z)$ и $v(z)$ — голоморфные функции z , обладающие следующими свойствами:

$$u(z) \rightarrow 0, \quad v(z) \rightarrow 0, \quad (z - z_0)u'(z) \rightarrow 0, \quad (z - z_0)v'(z) \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Для определения коэффициентов α_0 и x_0 получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 + a_{20}(z_0)\alpha_0^2 = 0, \\ b_{12}(z_0)\alpha_0 x_0^2 + a_{20}(z_0)\alpha_0 x_0 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha_0 = -\frac{1}{a_{20}(z_0)}, \quad x_0 = -\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)}.$$

Делая замену переменных

$$z - z_0 = \tau, \quad y = \tau^{-1}(\alpha_0 + u), \quad x = x_0 + v, \quad (20)$$

придем от системы (15) при выполнении условий (17) к системе уравнений Брио и Буке.

$$\begin{cases} \tau \frac{du}{d\tau} = -u + F_1(\tau, u, v), \\ \tau \frac{dv}{d\tau} = v + F_2(\tau, u, v), \end{cases} \quad (21)$$

где F_1 и F_2 суть полиномы относительно τ, u, v .

Характеристическое уравнение системы (21) имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Следовательно [3], система (21) или вовсе не имеет решений со свойством

$$u(\tau) \rightarrow 0, \quad v(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \quad (22)$$

или имеет однопараметрическое семейство. Все зависит от того, будет выполняться или нет некоторое условие (А), выражающееся через коэффициенты системы (21). В нашем случае условие (А) заключается в том, чтобы система

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = \frac{a_{10}a_{20}^2 + a_{20}'}{a_{20}^2}, \\ \beta_1 = \beta_1 - \frac{b_{12}'a_{20}}{b_{12}^2} + \frac{a_{20}'}{b_{12}} + b_{02} \frac{a_{20}^2}{b_{12}^2} - \frac{b_{01}a_{20}}{b_{12}} + b_{00} \end{cases}$$

имела решение, для чего необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{b_{12}'a_{20}}{b_{12}^2} - \frac{a_{20}'}{b_{12}} - b_{02} \frac{a_{20}^2}{b_{12}^2} + \frac{b_{01}a_{20}}{b_{12}} - b_{00} \equiv 0. \quad (A)$$

Если условие (А) не выполнено, то голоморфных решений со свойством (22) система (21) не имеет.

Но в этом случае она будет иметь [3] семейство неголоморфных решений вида

$$u(\tau) = -\frac{1}{a_{20}(z_0)}\tau^{-1} + \frac{a_{10}(z_0)a_{20}^2(z_0) + a'_{20}(z_0)}{2a_{20}(z_0)} + \alpha_2\tau + \dots$$

$$u(\tau) = -\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_{\sigma}(\tau \ln \tau)^{\sigma},$$

обладающих свойством (22) при $\tau \rightarrow 0$ по путям конечного раствора с вершиной в точке $\tau = 0$. Тогда, очевидно, система

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = a_{20}y^2 + a_{10}y + a_{00}, \\ \frac{dx}{dz} = b_{12}yx^2 + b_{02}x^2 + a_{20}xy + b_{01}x + b_{00} \end{cases} \quad (23)$$

будет иметь семейство неголоморфных решений вида

$$y(z) = -\frac{1}{a_{20}(z_0)(z - z_0)} + \frac{a_{10}(z_0)a_{20}^2(z_0) + a'_{20}(z_0)}{2a_{20}^2(z_0)} + \alpha_2(z - z_0) + \dots$$

$$x(z) = -\frac{a_{20}(z_0)}{b_{12}(z_0)} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_{\sigma}((z - z_0) \ln(z - z_0))^{\sigma},$$

где β_1 — произвольный параметр.

При выполнении условия (A) уравнение (16) сводится к виду

$$x'' = \frac{2}{x}x'^2 + \left(a_{10} - b_{01} + \frac{b'_{12}}{b_{12}} - \frac{a_{20}b_{02}}{b_{12}} - \frac{3b_{00}}{x} \right) x' +$$

$$+ \left(-\frac{a'_{20}b_{02}}{b_{12}} - \frac{b'_{12}b_{01}}{b_{12}} + \frac{2a_{20}b_{01}b_{02}}{b_{12}} - \frac{a_{20}^2b_{02}^2}{b_{12}^2} + \frac{a_{20}b_{02}b'_{12}}{b_{12}^2} + b'_{01} + a_{20}a_{00} - a_{10}b_{01} \right) x +$$

$$+ \left(b_{12}a_{00} + b'_{02} - a_{10}b_{02} + \frac{a_{20}b_{02}^2}{b_{12}} - \frac{b'_{12}b_{01}}{b_{12}} \right) x^2 + \frac{b_{00}^2}{x} + \frac{2a_{20}b_{02}b_{00}}{b_{12}} + \frac{a_{20}b_{01}^2}{b_{12}} -$$

$$- \frac{b'_{12}b_{00}}{b_{12}} - \frac{a'_{20}b_{01}}{b_{12}} - a_{11}b_{00} + \frac{a_{20}b_{02}a'_{20}}{b_{12}^2} + \frac{a_{20}b_{01}b'_{12}}{b_{12}^2} - \frac{2a_{20}^2b_{02}b_{01}}{b_{12}^2}.$$

Как известно [2], для того чтобы уравнение (24) не имело решений с подвижными критическими особыми точками, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при x^2 тождественно был равен нулю, а $b_{00} \equiv 1$, т.е. выполнялось равенство

$$b'_{02} + b_{12}a_{00} - a_{10}b_{02} + \frac{a_{20}b_{02}^2}{b_{12}} - \frac{b'_{12}b_{02}}{b_{12}} \equiv 0. \quad (25)$$

Итак, из вышесказанного следует

Теорема 2. Если для системы (2) выполнены следующие условия:

1. $a_{30}(z) \equiv 0$, $b_{03}(z) \equiv 0$, $b_{21}(z) \equiv 0$, $a_{21}(z) \equiv 0$;
2. $b_{10}(z) \equiv 0$, $a_{01}(z) \equiv 0$, $a_{11}(z) \equiv 0$, $a_{02}(z) \equiv 0$;

$$3. b_{11}(z) \equiv a_{20}(z), b_{00}(z) \equiv 1, b_{12}(z) \neq 0, a_{20}(z) \neq 0;$$

$$4. a'_{20} + b_{12} - a_{20}b_{01} - \frac{a_{20}b'_{12}}{b_{12}} + \frac{a_{20}^2b_{02}}{b_{12}} \equiv 0;$$

$$5. b'_{02} + b_{12}a_{00} - a_{10}b_{02} - \frac{a_{20}b_{12}^2}{b_{12}} + \frac{b'_{12}b_{02}}{b_{12}} \equiv 0,$$

то система не имеет решений с подвижными многозначными особенностями, т.е. представляет класс системы типа Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.
3. Мячин, В.Ф. Системы уравнений Брио и Буке / В.Ф. Мячин // Вестн. Ленинград. ун-та. – 1958. – № 7. – С. 88–102.
4. Натынчик, Е.А. Уравнение второго порядка с неподвижными критическими особыми точками / Е.А. Натынчик, Т.И. Шило // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. – 2011. – № 1. – С. 117–122.

E.A. Natynchik, T.I. Shilo. Second-order System, the Right-Which is a Polynomial of the Third Degree with Respect to the Unknown Functions

In this paper we find necessary and sufficient conditions for a special second-order system, the right sides of which are third-degree polynomial in the unknown functions, the class of P-type, ie Necessary and sufficient conditions for the absence of movable valued singularities in the solutions of the system. This problem is not new, but for the system, this task is far from complete. Along with the small parameter method Painlevé?, and a method based on the reduction of the second-order system to a nonlinear differential equation of second order, in this paper, the method of information system of simplified equations for a system of two differential equations of Briot and Bouquet. The proposed method makes it relatively easy to describe the condition of absence of movable critical singularities in the solutions of the original system explicitly. Found in this work conditions for membership of the class of P-type can easily be verified in practice.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.04.2013

УДК 519.6+517.983.54

В.Ф. Савчук

К ВОПРОСУ ОБ АПРИОРНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве предлагается неявный метод итераций решения операторных уравнений I рода с неотрицательным самосопряженным и несамосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности и априорный момент останова.

1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in L(H, F)$, т.е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F . Предполагается, что нуль не является его собственным значением, однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$Ax = y. \quad (1)$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha A^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближённо, т.е. вместо y известно приближение y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η , $\|A - A_\eta\| \leq \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$ и $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод итераций (2) примет вид

$$(E + \alpha A_\eta^k)x_{n+1} = x_n + \alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Случай приближенной правой части уравнения y_δ и точного оператора A для метода (3) изучен в работе [1]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи (1), доказана сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства. Докажем сходимость метода (3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим априорные оценки погрешности.

2. Случай самосопряжённых неотрицательных операторов

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (3) запишется в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta)y_\delta, \quad (3^1)$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^k)^n} \right] \geq 0$. В [1] при $\alpha > 0$ получены следующие условия для функции $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq k(n\alpha)^{1/k}, \quad (n > 0), \quad (4)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad 0 < s < \infty, \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha} \right)^{s/k} \quad (5)$$

(здесь s – степень истокорпредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad (n > 0), \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (6), (7). Тогда $\|G_{n\eta} v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ $\forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A)}$, где $N(A) = \{x \in H | Ax = 0\}$ и $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство.

В силу (6) $\|G_{n\eta}\| = \|E - A_\eta g_n(A_\eta)\| \leq \gamma_0$, $(n > 0, 0 < \eta \leq \eta_0)$. Для элементов вида $v = Aw$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (7) имеем

$$\|G_{n\eta} v\| = \|G_{n\eta} Aw\| \leq \|G_{n\eta}(A - A_\eta)w\| + \|G_{n\eta} A_\eta w\| \leq \left(\gamma_0 \eta + \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|w\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Лемма 1 доказана.

Условие сходимости для метода (3) дает

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (4), (6), (7). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ в приближении (3) так, чтобы $(\delta + \eta)n^{1/k}(\delta, \eta) \rightarrow 0$ при $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Тогда $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Из (3¹) имеем $x_n = g_n(A_\eta)y_\delta$. Тогда

$$\begin{aligned} x_n - x^* &= g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = \\ &= -G_{n\eta}x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta))x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Следовательно, $x_n - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$.

Так как по условию (4) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$, $\gamma = k\alpha^{1/k}$, то

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|.$$

Следовательно, $\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \gamma n^{1/k}(\delta + \eta\|x^*\|)$.

Из леммы 1 следует, что $\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, а по условию теоремы 1 $n^{1/k}(\delta + \eta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ и выполнены условия (4), (5). Если точное решение истокорпредставимо, т.е. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, то справедлива оценка погрешности

$$\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} (\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty.$$

Доказательство.

Имеем, используя истокорпредставимость точного решения,

$$\|G_{m\eta}x^*\| = \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho,$$

так как по лемме 1.1 [2, с. 91] $\|A_\eta^s - A^s\| \leq c_s \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \text{const}$ ($c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1$).

Тогда

$$\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} (\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty. \quad (8)$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (8) по n , то получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left[\frac{s\gamma_s \rho}{\gamma(\delta + \|x^*\|\eta)} \right]^{k/(s+1)} = d_s \rho^{k/(s+1)} \left[\delta + \eta \|x^*\| \right]^{-k/(s+1)},$$

где $d_s = \left(\frac{s\gamma_s}{\gamma} \right)^{k/(s+1)}$. Отсюда $n_{\text{опт}} = \left(\frac{s}{k} \right)^{(s+k)/(s+1)} 2^{-s/(s+1)} \alpha^{-1} \rho^{k/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{-k/(s+1)}$.

Подставим $n_{\text{опт}}$ в оценку (8), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\|_{\text{опт}} &\leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s \rho \left[d_s \rho^{k/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{-k/(s+1)} \right]^{-s/k} + \\ &+ \gamma \left[d_s \rho^{k/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{-k/(s+1)} \right]^{1/k} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right) = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} \left(d_s^{-s/k} \gamma_s + \gamma d_s^{1/k} \right) \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)} = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} c'_s \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)}, \end{aligned}$$

где $c'_s = d_s^{-s/k} \gamma_s + \gamma d_s^{1/k} = (1+s) \left(\frac{s}{k} \right)^{s(1-k)/(k(s+1))} 2^{-s/(k(s+1))}$. Отсюда

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + (1+s) \left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} 2^{-s/(k(s+1))} \rho^{1/(s+1)} (\delta + \eta \|x^*\|)^{s/(s+1)}.$$

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но $n_{\text{опт}}$ зависит от α . Поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то за счет выбора α можно добиться того, чтобы оптимальная оценка погрешности достигалась уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно выбрать

$$\alpha_{\text{опт}} = \left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} 2^{-s/(s+1)} \rho^{k/(s+1)} (\delta + \eta \|x^*\|)^{-k/(s+1)}.$$

3. Случай несамосопряжённых операторов

В случае несамосопряжённой задачи итерационный метод (3) примет вид

$$\left[E + \alpha (A_\eta^* A_\eta)^k \right] x_{n+1} = x_n + \alpha (A_\eta^* A_\eta)^{k-1} A_\eta^* y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (9)$$

Его можно записать так:

$$x_n = g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* y_\delta. \quad (10)$$

Из леммы 1 следует

Лемма 2. Пусть $A, A_\eta \in L(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (6), (7). Тогда

$$\|K_{n\eta} v\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}, \quad (11)$$

$$\|\tilde{K}_{n\eta} z\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall z \in N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}, \quad (12)$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*)$.

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $A, A_\eta \in L(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ и выполнены условия (4), (6), (7). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ так, чтобы

$$(\delta + \eta)^2 n^{1/k} (\delta, \eta) \rightarrow 0 \text{ при } n(\delta, \eta) \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0. \quad (13)$$

Тогда $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Для погрешности приближения $x_{n(\delta, \eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -K_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*). \quad (14)$$

Здесь $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| = \left\| g_n(A_\eta^* A_\eta) (A_\eta^* A_\eta)^{1/2} \right\| \leq \gamma_* n^{1/(2k)}$, где

$$\gamma_* = \sup_{n>0} \left(n^{-1/(2k)} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)| \right) \leq k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} [1].$$

Поскольку

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|,$$

то $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|)$. Поэтому

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|K_{m\eta} x^*\| + \|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|K_{m\eta}(x^*)\| + k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|).$$

Из леммы 2 следует, что $\|K_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, а из условия (13) $n^{1/k} (\delta + \eta)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Отсюда $k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Теорема 3 доказана.

Справедлива

Теорема 4. Пусть $A, A_\eta \in L(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$. Если точное решение представимо в виде $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$ и выполнены условия (4), (5), то справедлива оценка погрешности

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho + k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty.$$

Доказательство.

В случае истокообразно представимого точного решения $x^* = |A|^s z = (A^* A)^{s/2} z$

из (5) получим $\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{s/2} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}$, где $\gamma_{s/2} = \left(\frac{s}{4k\alpha}\right)^{s/(2k)}$. Тогда

$$\|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| = \| |A_\eta|^s [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| = \| (A_\eta^* A_\eta)^{s/2} [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho.$$

Отсюда

$$\|K_{m\eta} x^*\| = \|K_{m\eta} |A|^s z\| = \|K_{m\eta} (|A_\eta|^s - |A|^s) z\| + \|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho,$$

так как из [2, с. 92] имеем $\| |A_\eta|^s - |A|^s \| \leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)}$, $c_s = \text{const}$, ($c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1$). Из (14)

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|K_{m\eta} x^*\| + \gamma_* n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\| \eta) = \|K_{m\eta} x^*\| + k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \\ &\leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho + k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (15) по n , получим значение априорного момента останова: $n_{\text{опт}} = s^{(s+2k)/(s+1)} 4^{-s/(s+1)} k^{-(k+s)/(s+1)} \alpha^{-1} \rho^{2k/(s+1)} (\delta + \|x^*\| \eta)^{-2k/(s+1)}$.

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (15), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (9)

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} &\leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \\ &+ 4^{s/(2k(s+1))} (s+1) k^{s(k-1)/(2k(s+1))} s^{s(1-2k)/(2k(s+1))} \rho^{1/(s+1)} (\delta + \|x^*\| \eta)^{s/(s+1)}, \quad 0 < s < \infty. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

V.F. Savchuk. To the Question About Apriori Choice of Parameter Regularization in the Implicit Iteration Method for Solution of the Operator Equations with Approximately Operator

The implicit iteration method for solution of the first-kind operator equations with a self-conjugated and non self-conjugated non negative bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of a method is proved in case of an apriori choice of number of iterations in usual norm of Hilbert space, supposing that not only the right part of the equation but the operator as well have errors. The estimations of an error and apriori moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.02.2013

УДК 512.542

А.А. Трофимук, И.Н. Фенчук

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМИ ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Исследуются конечные разрешимые группы с индексами несверхразрешимых максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27. В частности, установлено, что нильпотентная длина таких групп не превышает 4. В работе получена оценка производной длины конечных разрешимых групп с индексами максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27. Исследованы такие A_4 -свободные группы. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок. В доказательствах использовались фрагменты теории формаций и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В теории конечных групп особое внимание уделяется исследованию групп, у которых максимальные подгруппы обладают определенными свойствами. В 1954 году Б. Хупперт [2] доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп являются простыми числами. Ф. Холл [3] в 1958 году установил разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

Детальное исследование разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел, получено в работе [4]. В частности, установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4, 2-длина и 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп, равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работе [5]. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, нильпотентная длина таких групп не превышает 5, p -длина не превышает 2.

Если рассматривать группы с индексами максимальных подгрупп равными простым числам, квадратам простых чисел или 8, то такие группы могут быть неразрешимыми. Примером служит простая группа $PSL(2,7)$. Строение разрешимых групп с такими ограничениями на индексы максимальных подгрупп было изучено Е.Е. Грибовской [6] и А.А. Трофимуком [7].

В.С. Монахов и Д.А. Ходанович [8] развили эти результаты за счет рассмотрения индексов только несверхразрешимых максимальных подгрупп. В их работе установлено, что в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел, нильпотентная длина не превышает 4, а в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, нильпотентная длина не превышает 5. Установлено, что в разрешимой группе, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 8, нильпотентная длина не превышает 4.

В настоящей заметке получена оценка нильпотентной длины разрешимой группы, у которой индексы несверхразрешимых максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть G – разрешимая группа, максимальные подгруппы которой либо сверхразрешимы, либо имеют индексы равные простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4. В частности, если G является A_4 -свободной, то нильпотентная длина не превышает 3.

Напомним, что группа называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 .

В работе В.С. Монахова [9] показано, что в определениях функций $m_p(G)$ и $m(G)$ можно ограничиться только максимальными подгруппами, не содержащими подгруппу Фиттинга. Поэтому верхние оценки производной длины не изменятся, если подобные ограничения накладывать на максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. В частности, если G является A_4 -свободной, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Следствие 1. Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4, 2-длина и 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Пример 1. В системе компьютерной алгебры GAP построен пример группы, подтверждающий точность полученных оценок в следствии 1. Так группа $G = [E_{3^5}]GL(2,3)$ порядка 11664 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{2, 3, 4, 9, 27\}$, имеет производную длину равную 5, нильпотентную длину равную 4, 2- и 3-длину равную 2. Здесь E_{3^5} – элементарная абелева группа порядка 3^5 .

Из теоремы Гуральника следует, что если индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен, то группа G либо разрешима, либо $G/S(G)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G . Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4 , то любая A_4 -свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп примарны, является разрешимой.

Следствие 2. Пусть G – A_4 -свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 27. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример 2. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . A_4 -свободная группа $G = [E_{3^3}][Z_{13}]Z_3$ порядка 1053 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{3, 13, 27\}$, имеет производную длину равную 3, нильпотентную длину равную 3, 3-длину равную 2, 13-длину рав-

ную 1. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n . Следовательно, оценки производной длины, нильпотентной длины и p -длины, полученные в следствии 2, являются точными.

1. Вспомогательные результаты

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных, абелевых и сверхразрешимых групп обозначают через \mathfrak{N} , \mathfrak{A} и \mathfrak{U} соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [11, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 [12, лемма 10]. Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, $H \in \mathfrak{U}^4$, а если H A_4 -свободна, то H метабелева.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n .

Лемма 3 [12, лемма 7]. Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^{k-1}$.

Лемма 4 [12, лемма 12]. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Кроме того, если $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 5 [12, лемма 13]. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит \mathfrak{F} , но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 7 [13 теорема I.8; 10, теорема II.3.2]. Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p ;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 8. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\text{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

2. Доказательство теоремы 1

Применим индукцию по порядку группы G . Покажем, что $G \in \mathfrak{N}^4$. Пусть K – нормальная неединичная подгруппа группы G и M/K – произвольная максимальная подгруппа группы G/K . Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо сверхразрешима, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Поэтому в первом случае фактор-группа M/K является сверхразрешимой, а так как $|G:M| = |G/K:M/K|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы M/K в группе G/K есть простое число, квадрат простого числа или 27. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы G/K . Поэтому справедливо включение $G/K \in \mathfrak{N}^4$. Так как по лемме 1 формация \mathfrak{N}^4 является насыщенной, то согласно лемме 6 группа G является примитивной.

Таким образом, по лемме 7 подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой в группе G . Причем $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G . В соответствии с условием теоремы подгруппа M либо сверхразрешима, либо $|G:M| = p$, $|G:M| = q^2$, $|G:M| = 27$, где p, q – некоторые простые числа. Если подгруппа M сверхразрешима, то справедливо включение $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, и так как сверхразрешимая группа является метанильпотентной, то $G \in \mathfrak{N}^3 \subset \mathfrak{N}^4$.

Пусть подгруппа M не является сверхразрешимой. Предположим сначала, что индекс подгруппы M является простым числом, т.е. $|G:M| = p$. Тогда фактор-группа G/F является циклической группой, как группа автоморфизмов группы F простого порядка p . Ясно, что в этом случае группа G будет сверхразрешимой, т.е. справедливо включение $G \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}^4$.

Пусть теперь $|G:M| = q^2$. Тогда по лемме 7 фактор-группа G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, q)$. В этом случае по лемме 4 подгруппа $H \in \mathfrak{N}^3$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|G:M| = 27$. Фактор-группа G/F будет изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе H группы $GL(3, 3)$, причем $O_3(H) = 1$. Тогда по лемме 2 подгруппа H группы $GL(3, 3)$ исчерпывается следующими подгруппами: $Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, Z_{31}, SL(2, 3), GL(2, 3)$. Очевидно, что все группы из предложенного списка принадлежат произведению \mathfrak{N}^3 . Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$.

Пусть G является A_4 -свободной группой. Повторяя предложенное выше доказательство и используя лемму 1 и лемму 5, несложно показать, что $G \in \mathfrak{N}^3$.

3. Доказательство теоремы 2

Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M

либо содержит подгруппу Фиттинга $F(G)$, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Поэтому в первом случае, так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, фактор-группа $M/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G/\Phi(G))$ группы $G/\Phi(G)$, а так как $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого числа или 27. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 1 формация \mathfrak{F} насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [10] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по теореме I.4.5 [10] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut}(F_i)$. По лемме I.9.6 [10] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то $\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F$ и $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F$.

Пусть F_i – элементарная абелева p_i -подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i , то M_i не содержит F . Поэтому порядок $|F_i|$ равен p_i , либо p_i^2 , либо 27, где p_i – простое число. Поэтому возможны следующие варианты: $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, 3)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U} \cup \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, 3)$ и из леммы 2 следует, что

$$G/C_G(F_i) \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2, 3), GL(2, 3)\}.$$

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U}^3 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. По лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть G является A_4 -свободной группой. Повторим предложенное выше доказательство, за исключением случаев, когда $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$ и $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, 3)$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$, то по лемме 5 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathcal{U}^2$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,3)$, то из леммы 2 следует, что $G/C_G(F_i) \in \{Z_{13}, [Z_{13}]Z_3\}$. Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathcal{U}^2$. Так как \mathcal{U}^2 – формация, то $G/F \in \mathcal{U}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathcal{U}^2$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathcal{U}^3$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

4. Доказательство следствия 1

Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина не превышает 4. Покажем, что 2-длина и 3-длина группы G не превышают 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Так как p -длина метанильпотентной группы не превышает 1, то из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что p -длина не превышает 2 для любого простого p . Применим индукцию по порядку группы G . Покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [10] можно считать, что $O_p(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа и $|F| = |G:M|$. По теореме I.4.5 [10] для подгруппы F фактор-группа G/F изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut}(F)$. Из условия теоремы следует, что порядок $|F|$ равен p , либо p^2 , либо 27.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut}F$ группы F , порядок которой равен $p-1$. Отсюда силовская p -подгруппа группы G совпадает с подгруппой F и p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Если $|F| = p^2$, то $\text{Aut}F = GL(2, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 4 G/F – p' -группа, т.е. p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = 27$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(3,3)$, причем $O_3(G/F) = 1$. Из леммы 2 следует, что $G/F \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$ и G является $\{2, 3, 13\}$ -группой. Очевидно, что 13-длина не превышает 1. Теорема доказана.

5. Доказательство следствия 2

Из теоремы 1 и теоремы 2 для A_4 -свободной группы следует, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3, а нильпотентная длина таких групп также не превышает 3. Покажем, что 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

В силу ранее доказанного следствия 2-длина и 3-длина группы G не превышают 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p > 3$. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что 2-длина не превышает 1. По лемме VI.6.9 [10] можно считать, что $O_2(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка 2^α , обладающая дополнением M в группе G ,

т.е $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G : M|$ и M – максимальная подгруппа группы G , то $\alpha \leq 2$. Так как $C_G(F) = F$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, 2)$. Если $|F| = 2$, то группа G изоморфна F и 2-длина не превышает 1. Если $|F| = 4$, то по лемме 8 группа G изоморфна или A_4 , или S_4 , а значит, не A_4 -свободна. Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классы / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл. М. : ИЛ, 1962. – 468 с.
4. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украин. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Грибовская, Е.Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p , p^2 или 8 / Е.Е. Грибовская // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.
7. Трофимук, А.А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А.А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 25–31.
8. Монахов, В.С. О конечных группах с ограниченными индексами максимальных подгрупп / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Докл. АН Беларусі. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 20–24.
9. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. АН Беларусі. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978. – 272 с.
12. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
13. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics / Australian National University. – Canberra, 1979. – № 11. – 100 p.

A.A. Trofimuk, I.N. Fenchuk. On Finite Solvable Groups with a Small Indexes of Maximal Subgroups

We study finite solvable groups in which indexes of nonsupersolvable maximal subgroups are equal to prime numbers, squares of primes or 27. In particular found that the nilpotent length of such groups does not exceed 4. An estimate of the derived length of finite soluble groups in which indices of maximal subgroups that do not contain the Fitting subgroup are equal to prime numbers, squares of primes or 27. Such A_4 -free groups are investigated. We construct examples showing the accuracy of the estimates. The proofs include fragments of the theory of formations and calculations in the system of computer algebra GAP

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.04.2013

УДК 513.82

А.А. Юдов, Н.С. Ковалик

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, ИМЕЮЩИХ КАСАТЕЛЬНУЮ МНИМОЕВКЛИДОВА И ЕВКЛИДОВА ТИПА

В работе изучаются одномерные подмногообразия пространства Минковского. Рассматривается класс многообразий, касательная прямая которым во всех точках является прямой мнимоевклидова и евклидова типа. Для таких многообразий строится канонический репер и находятся дифференциальные инварианты, определяющие указанные многообразия с точностью до движений пространства Минковского.

Постановка задачи и метод исследования

Группу Ли G движений пространства 1R_4 будем задавать как совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию

$$A\varepsilon_{4,1}A^T = \varepsilon_{4,1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли \overline{G} будет задаваться как совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1} + \varepsilon_{4,1}B = 0$.

Точки пространства 1R_4 будем задавать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x. \quad (4)$$

Группа G действует в пространстве 1R_4 слева по правилу

$$x \rightarrow a \cdot x. \quad (5)$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4: G = H \otimes T_4. \quad (6)$$

Алгебра Ли \overline{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \overline{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4 :

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \quad (7)$$

Базис в алгебре Ли \overline{G} группы Ли G движений пространства 1R_4 берется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке, β -м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули. Причем векторы i_5, i_6, \dots, i_{10} образуют базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H , векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4 , а операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} задается в виде

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \overline{G}. \quad (9)$$

Классификация связанных подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского с точностью до сопряженности имеется [1]. Всего среди подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского получается 13 подгрупп Ли: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$. Алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}, \overline{G}_{13}$, этих групп Ли задаются соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . В данной работе классифицируются все одномерные подмногообразия пространства Минковского, касательное пространство к которым является пространством действительного, евклидова и мнимоевклидова типа.

Классификация кривых пространства Минковского

При классификации одномерных подмногообразий пространства Минковского используются результаты работ [2] и [3].

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства 1R_4 . Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства 1R_4 , причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным. Ниже классифицируются по эквивалентности относительно основной группы одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке евклидово касательное пространство, а также одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке мнимоевклидово касательное пространство.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ мнимоевклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f) = \{i_1\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства

$T_{\pi(e)}({}^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 (см. [34]) $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \{h \in H | Adh(K'_1) = K'_1\}, \quad (10)$$

а ее алгебра Ли H_1 условием:

$$H_1 = \{v \in H | adv(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (11)$$

Пусть

$$v = \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in H, \quad (12)$$

$$k = i_1 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \quad (13)$$

Тогда

$$adv(k) = [v, k] = \lambda i_2 + \mu i_3 + \nu i_4 + \psi, \quad (14)$$

где $\psi \in H$.

По условию $adv(k) \in K'_1$ получим: $\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0$. Таким образом, $H_1 = \{i_8, i_9, i_{10}\}$ и совпадает с $\overline{G_{11}}$, а группа H_1 совпадает с G_{11} . Условие (4) из [2] $\dim H = \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G -орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1 . Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G -орбиту элемента K_1 , изоморфную G/H_1 . Группа G_{11} образует следующую цепочку по включению:

$$G_{11} \supset G_1. \quad (15)$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_1 , имеет вид:

$$\omega^2 = 0, \omega^3 = 0, \omega^4 = 0. \quad (16)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 + \omega^4 \wedge \omega_4^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0, \\ \omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда в силу системы (16):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0, \omega^1 \wedge \omega_1^4 = 0. \quad (18)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda \omega^1, \omega_1^3 = \mu \omega^1, \omega_1^4 = \nu \omega^1. \quad (19)$$

Вместе с (16) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda \omega_1, \omega_1^3 = \mu \omega_1, \omega_1^4 = \nu \omega_1. \quad (20)$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(T_{\pi(e)}(l_m f_1))$ алгебры \overline{G} [2, § 1,2]. Пространство K'_2 , определяемое системой (20), состоит из векторов:

$$\{t i_1 + \lambda t i_5 + \mu t i_6 + \nu t i_7 + r i_8 + s i_9 + \sigma i_{10}\}, \quad (21)$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, ν – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 – орбиты пространств вида (21) при всевозможных λ, μ, ν . Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли \mathfrak{H}_2 . Алгебра Ли \mathfrak{H}_2 определяется условием: $H_2 = \{v \in \mathfrak{H}_1 \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}$.

Пусть $v = \alpha i_8 + \beta i_9 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, K'_1] \subset K'_1$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0, \lambda\alpha - \nu\gamma = 0, \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \quad (22)$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (21) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в G_{11} , – это только группа G_1 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (21). Если в качестве K'_2 взять подпространство $K'_2 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + ri_8 + si_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\mu = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (22)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (22). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 < 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в G -орбиту пространства K'_2 не продолжается. Предположим, что данное подмногообразие продолжается в орбиту, соответствующую группе H_2^1 .

Тогда $d\pi_{1e}^{-1} = (T_{\pi_1(e)}(l_m f_1)) = K'_2$. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_2 , имеет вид:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1. \quad (23)$$

Коэффициент λ называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в G -орбиту пространства K'_2 и $K_3 = T_{f_2(0)}(l_m f_2)$, $K'_3 = d\pi_{2e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2: G \rightarrow G/H_2$. Продолжив систему (23) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1, \omega_2^3 = \mu\omega^1, \omega_2^4 = \nu\omega^1, \quad (24)$$

которая будет определять подпространство K'_3 , которое, следовательно, состоит из векторов: $K'_3 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + \nu ti_9 + si_{10}\}$, λ, μ, ν – фиксированные, s – произвольные. Подействуем на пространство K'_3 преобразованием Adh , $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства K'_2, K_2, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(D_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f) . То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2) . Если выбрать h в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (25)$$

то $Adh(K'_3)$ примет вид:

$$Adh(K'_3) = \{ti_1 + \lambda ti_5 + (\mu t \cos \alpha - \nu t \sin \alpha)i_8 + (\mu t \sin \alpha + \nu t \cos \alpha)i_9 + si_{10}\}. \quad (26)$$

Всегда можно выбрать α таким, что $\mu \sin \alpha + \nu \cos \alpha = 0$. Выражение $\mu t \cos \alpha - \nu t \sin \alpha$ переобозначим через μ . Таким образом подмногообразие (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + si_{10}\}$, а соответствующая ему система Пфаффа – вид

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \lambda \omega^1, \quad \omega_2^3 = \mu \omega^1. \quad (27)$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $v = \alpha i_{10}$. Тогда $[v, K'_3] = -\alpha \lambda ti_7 + \mu t \alpha i_{10} - \alpha si_8$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразии (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (27)

и применив лемму Картана, получим с учетом (27) систему Пфаффа

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \lambda \omega^1, \quad \omega_2^3 = \mu \omega^1, \quad \omega_3^4 = \nu \omega^1, \quad (28)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + \nu ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Теперь предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ евклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f) = \{i_2\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_2, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}(l_m R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 (см. [2]) $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием

$H_1 = \{h \in H \mid Adh(K'_1) = K'_1\}$, а ее алгебра Ли H_1 условием $H_1 = \{v \in H \mid adv(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} v &= \lambda i_3 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in H, \\ k &= i_2 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда:

$$adv(k) = [v, k] = \lambda i_1 - \sigma i_3 - s i_4 + \psi, \quad (30)$$

где $\psi \in H$.

По условию $adv(k) \in K'_1$ получим: $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, $s = 0$. Таким образом, $H_1 = \{i_6, i_7, i_{10}\}$. Условие (4) из [2] $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G -орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1 . Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G -орбиту элемента K_1 , изоморфную G/H_1 . Группа H_1 образует следующую цепочку по включению:

$$H_1 \supset G_2. \quad (31)$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_1 , имеет вид:

$$\omega^1 = 0, \omega^3 = 0, \omega^4 = 0. \quad (32)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 + \omega^4 \wedge \omega_4^1 &= 0, \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0, \\ \omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда в силу системы (32):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \omega^1 \wedge \omega_2^3 = 0, \omega^1 \wedge \omega_2^4 = 0. \quad (34)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda \omega^2, \omega_2^3 = \mu \omega^2, \omega_2^4 = \nu \omega^2. \quad (35)$$

Вместе с (32) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda \omega_1, \omega_1^3 = \mu \omega_1, \omega_1^4 = \nu \omega_1. \quad (36)$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(l_m f_1))$ алгебры \overline{G} [2, § 1, § 2]. Пространство K'_2 , определяемое системой (36), состоит из векторов:

$$\{t i_2 + \lambda t i_5 + r i_6 + s i_7 + \mu t i_8 + \nu t i_9 + \sigma i_{10}\}, \quad (37)$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, ν – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 -орбиты пространств вида (37) при всевозможных λ, μ, ν . Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли H_2 . Алгебра Ли H_2 определяется условием:

$$H_2 = \{v \in H_1 \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (38)$$

Пусть $v = \alpha i_6 + \beta i_7 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, K'_1] \subset K'_1$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0, \quad \lambda\alpha - \nu\gamma = 0, \quad \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \quad (39)$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (37) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в H_1 , – это только группа G_2 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (37). Если в качестве K'_2 взять подпространство $K'_2 = \{ti_2 + ri_6 + si_7 + \nu ti_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\lambda = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (39)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (39). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 < 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в G -орбиту пространства K'_2 не продолжается. Здесь надо производить разбиение подмногообразий на классы.

Пусть подмногообразие (D_0, f) продолжается в подмногообразии (D_0, f_1) такое, что $d\pi_{1e}^{-1} = (T_{\pi_1(e)}(l_m f_1)) = K'_2$. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_2 , имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu\omega^2. \quad (40)$$

Коэффициент ν называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в G -орбиту пространства K'_2 и $K_3 = T_{f_2(0)}(l_m f_2)$, $K'_3 = d\pi_{2e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2: G \rightarrow G/H_2$. Продолжив систему (40) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu\omega^2, \quad \omega_1^4 = \varepsilon\omega^2, \quad \omega_3^4 = \delta\omega^2, \quad (41)$$

которая будет определять подпространство K'_3 , которое, следовательно, состоит из векторов:

$$K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon ti_7 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}, \quad (42)$$

где ε, ν, δ – фиксированные, r – произвольный параметр.

Подействуем на пространство K'_3 преобразованием Adh , $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства K'_2, K_2, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(D_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f) . То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2) . Если выбрать h в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\varphi & 0 & sh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh\varphi & 0 & ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

то $Adh(K'_3)$ примет вид:

$$Adh(K'_3) = \{ti_2 + ri_6 + (\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi)ti_7 + \nu ti_9 + (\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi)ti_{10}\}. \quad (44)$$

Здесь приходится рассматривать три случая.

1. Предположим, что $\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi = 0$. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = \frac{1+p}{1-p} = \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \quad (45)$$

где $th\varphi = -\frac{\delta}{\varepsilon} = p$.

Подмногообразии (D_0, f) можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$.

2. Предположим, что $\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi = 0$. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = -\frac{1+p}{1-p} = -\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \quad (46)$$

где $th\varphi = -\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{1}{p}$.

Подмногообразии (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$.

3. Если $\varepsilon = -\delta$, тогда подмногообразии (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon t(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Рассмотрим случай 1. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu\omega^2, \quad \omega_1^4 = \mu\omega^2. \quad (47)$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $\nu = \alpha i_6$. Тогда $[v, K'_3] = \mu t \alpha i_{10}$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (47) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu\omega^2, \quad \omega_1^4 = \mu\omega^2, \quad \omega_1^3 = \theta\omega^2, \quad (48)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \theta ti_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 2. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \omega_3^4 = \delta \omega^2. \quad (49)$$

Коэффициент δ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $\nu = \alpha i_6$. Тогда $[v, K'_3] = \delta \alpha i_7$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (49) и применив лемму Картана, получим с учетом (49) систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \omega_3^4 = \delta \omega^2, \omega_1^3 = \chi \omega^2, \quad (50)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \chi ti_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций ν, δ, χ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 3. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \varepsilon \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_1^4 + \frac{1}{2} \omega_3^4 = 0. \quad (51)$$

Коэффициент ε называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Продолжив систему (51) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \varepsilon \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_1^4 + \frac{1}{2} \omega_3^4 = 0, \omega_1^3 = \sigma \omega^2, \quad (52)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \varepsilon(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Продолжив систему (52) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\begin{aligned}\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \\ \omega_1^3 = \sigma\omega^2, \omega_1^4 = \delta\omega^2, \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2,\end{aligned}\quad (53)$$

которая будет определять подпространство K'_5 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \delta ti_7 + \nu ti_9 + (\delta - 2\varepsilon)ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом четырех функций $\nu, \varepsilon, \sigma, \delta$ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Вышеизложенные результаты исследования одномерных подмногообразий пространства 1R_4 можем сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Одномерные подмногообразия пространства 1R_4 , касательные прямые к которым мнимоевклидовы, имеют только тип $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ и следующую характеризующую систему:*

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1, \omega_2^3 = \mu\omega^1, \omega_3^4 = \nu\omega^1$$

Такие подмногообразия определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов.

Теорема 2. *Одномерные подмногообразия пространства 1R_4 , касательные прямые к которым евклидовы, могут быть только типа $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$, которые по виду характеризующей системы разбиваются на три класса:*

1. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^4 = \mu\omega^2, \omega_1^3 = \theta\omega^2$;
2. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_3^4 = \delta\omega^2, \omega_1^3 = \chi\omega^2$;
3. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^3 = \sigma\omega^2, \omega_1^4 = \delta\omega^2, \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2$.

Подмногообразия первого и второго класса определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов, а подмногообразия третьего класса – четырех функций одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
2. Юдов, А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства 2R_4 / А. А. Юдов. – Минск, 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1498-В89.
3. Гурская, Е. Свойства присоединенного представления группы Ли движений пространства Минковского / Е. Гурская, А. Юдов // Вучоныя запіскі Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2011. – Вып. 7, – ч. 2. – С. 15–19.

A.A.Yudov, N.S.Kowalik. Classification of One-Dimensional Submanifolds of Space 1R_4 Space Tangent Mnimoevklid and Evklid Type

In this paper we study one-dimensional submanifold of Minkowski space. We consider the class of manifolds, tangent line at all points is a straight mnimoevklid and evklid type. For such manifolds constructed canonical frame and differential invariants are defining these varieties up to motions of Minkowski space.

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Аўсіюк А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Адамчук Д.В. – магістрант кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Балан Уладзімір – прафесар Бухарэсцкага політэхнічнага ўніверсітэт (Румынія)

Века В.У. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Ворсін М.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры методыкі выкладання фізікі і агульнатэхнічных дысцыплін Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Дзямідчык А.У. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Зелянкевіч А.І. – магістрант кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна.

Кавалік Н.С. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Казлоў В.А. – студэнт фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Кіндыбалюк А.А. – аспірант факультэта прыкладной матэматыкі і інфарматыкі Львоўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Івана Франка

Ліёпа В.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Натынчык А.А. – выкладчык кафедры матэматычнага мадэлявання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Неагу Мірчэ – прафесар Трансільванскага ўніверсітэта (г. Брашаў, Румынія)

Плецохоў У.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Прытула М.М. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры дыскрэтнага аналізу і інтэлектуальных сістэм Львоўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Івана Франка

Рэдзькоў В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі імя Б.І. Сцяпанавы Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі

Сабуць А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Савенко У.С. – доктар тэхнічных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Саўчук В.Ф. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры прыкладной матэматыкі і тэхналогій праграмавання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Секяржыцкі С.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – асістэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Стражаў В.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Трафімук А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Фянчук І.М. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Шапялевіч В.Р. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры фізікі цвёрдага цэла Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Шыла Т.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Юдаў А.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
- бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
- рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнацю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падроздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаванне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Карэктары *Л.М. Калілец, Ж.М. Селюжыцкая*
Камп'ютэрнае макетаванне *Г.Ю. Пархац, С.М. Мініч*

Подписано в печать 27.05.2013. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Гарнітура Таймс. Ризографія. Усл. печ. л. 13,72. Уч.-изд. л. 10,77.
Тираж 100 экз. Заказ № 167.

Издатель и полиграфическое исполнение
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».
ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.