



Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матгьсік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плецохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2012

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 21 ад 01.02.2012 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2012

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission
of the Republic of Belarus № 21 from February 01, 2012,
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research
in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Овсюк Е.М. Частица со спином $1/2$ в магнитном поле в 2-мерном пространстве Лобачевского	5
Плетюхов В.А., Стражев В.И., Андрусевич П.П. Симметричные свойства поля Дирака – Кэлера.....	13
Ревинский А.Ф., Макоед И.И. Фазовый переход Мота – Хаббарда в феррите висмута	18
Савенко В.С., Шаврей С.Д. Деформационная модификация алюминия под действием импульсного электрического тока	24
Серый А.И. О комптоновском вращении в магнитном поле с учетом ширины резонанса	30
Соболь В.Р., Гоман П.Н. К вопросу о параметрах радиационного нагрева по методологии регламентирующих документов	37

МАТЭМАТЫКА

Будько Д.А., Прокопня А.Н. Положения относительного равновесия и анализ их устойчивости в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел	42
Вувуникян Ю.М., Трифонова И.В. Компоненты высшего порядка композиции эволюционного оператора с составным оператором	52
Кальчук И.В., Задорожный А.О., Маковий Р.А. Точные константы для величин отклонений интегралов Пуассона от функций С класса Гёльдера	62
Кожух И.Г. Качественное исследование взаимодействия двух конкурирующих популяций	73
Козинский А.А., Басин В.И. Математическая модель валидации html-кода в соответствии с заданным набором правил модуля BrainTraining.Security.....	83
Мадорский В.М. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, локально сходящиеся с кубической скоростью	89
Матысик О.В., Савчук В.Ф. О решении методом последовательных приближений линейных уравнений с несамосопряженными операторами.....	96
Приймак И.П., Степанюк Т.А., Харкевич Ю.И. Аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса на классах H_{ω}	104
Савельева Н.В. О достаточных признаках максимальнойности для классов Фиттинга конечных частично разрешимых групп	111
Семенчук Н.П. Формулы типа Вороновской для обобщённых средних сопряжённого интеграла Фурье.....	118
Харкевич Ю.И., Жернова Т.Н., Швай К.В. Полные асимптотические разложения величин приближения сопряженных функций их интегралами Пуассона	125
Звесткі аб аўтарах	133

INDEX

PHYSICS

Ovsiyuk E.M. A Particle with Spin 1/2 in a Magnetic Field in Two-Dimensional Lobachevsky Space	5
Pletyukhov V.A., Strazhev V.I., Andrusevich P.P. Symmetry's Properties of the Dirac – Kähler Field	13
Revinski A.F., Makoed I.I. Phase Transition of Mott – Habbsrd in Ferrite Bismuth	18
Savenko V.S., Shavrey S.D. Aluminum Deformation Modification under Pulsed Electric Current.....	24
Sery A.I. On Compton Rotation in Magnetic Field with Regard to Resonance Width	30
Sobol V.R., Goman P.N. Parameters of Radiation Heating According to the Methodology of Regulatory Documents	37

MATHEMATICS

Budzko D.A., Prokopenya A.N. Relative Equilibrium Positions and Analysis of their Stability in Spatial Circular Restricted Four-Body Problem	42
Vuvunikjan Y.M., Trifonova I.V. Components of High Orders of Composition of the Evolution Operator and the Compound Operator	52
Kalchuk I.V., Zadorozhnyi A.O., Makovij R.O. Exact Constants for the Poisson Integral Deviations Values from the Functions Class of Hölder	62
Kozhukh I.G. A Qualitative Research of the Interaction of two Competing Populations	73
Kazinski A.A., Basin V.I. A Mathematical Model of the Validation of HTML-code in Accordance with a Given Set of Rules Module BrainTrainingSecurity	83
Madorski V.M. Nonlocal Nonregularised Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed	89
Matysik O.V., Savchuk V.F. About Decision Linear Equations with Non Self-Conjugate Operators of the Iteration Method.....	96
Pryjmas I.P., Stepaniuk T.A., Kharkevych Yu.I. Approximative Properties of Weierstrass Integrals on the Classes H_ω	104
Savelyeva N.V. On Sufficient Criteria for Maximality of Fitting Classes of Finite Partially Soluble Groups	111
Semenchuk N.P. Formulas of Voronovskaya's Type for Generalized Average of Conjugate Fourie's Integral	118
Kharkevich Yu.I., Zhernova T.N., Shvaj K.V. The Full Asymptotic Decompositions of Values of Approximation of Conjugate Functions by their Conjugate Poisson Integrals.....	125
Information about the authors	133

УДК 539.12

Е.М. Овсиюк

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В 2-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Построены точные решения уравнения Дирака в 2-мерном римановом пространстве отрицательной кривизны, гиперболической плоскости Лобачевского, в присутствии внешнего магнитного поля, являющегося аналогом однородного магнитного поля в пространстве Минковского. Для описания магнитного поля используются системы цилиндрических и квазидекартовых координат, последняя определяет полуплоскость Пуанкаре. В обеих системах координат уравнение Дирака решено точно, построены волновые функции. Найдена обобщенная формула для уровней энергии, описывающая квантование движения частицы в магнитном поле. При разделении переменных использована диагонализация оператора спиральности для дираковской частицы на плоскости Лобачевского.

Введение

Задача о движении частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1–4]. В работах [5–14] рассматривалась более общая задача о движении частицы в искривленном 2-мерном пространстве, гиперболической и сферической плоскостях.

Расширение к 3-мерным пространствам, гиперболическому и сферическому, было выполнено в [15; 16]: были получены точные решения уравнения для скалярной частицы во внешнем магнитном поле на фоне пространств Лобачевского H_3 и Римана S_3 . Соответствующая система в рамках классической механики была исследована в работах [17–19].

В работе [20] была исследована нерелятивистская частица со спином ноль в магнитном поле на гиперболической плоскости. В частности, было показано, что на гиперболической плоскости магнитное поле, определенное в работах [5; 6], совпадает с магнитным полем, определенным в работах [15; 16]; отличие состоит лишь в применяемых системах координат и дополнительном калибровочном преобразовании над 4-потенциалом. В настоящей работе анализ, выполненный в [20], обобщается на случай релятивистской частицы со спином 1/2.

1. Уравнение Дирака в H_2 , координаты (r, ϕ)

Обратимся к уравнению Дирака в 2-мерном пространстве H_2 . Исходим из обобщенного уравнения Дирака в произвольном искривленном пространстве-времени

$$\left\{ \gamma^c \left[i \left(e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc} \right) + e A_{(c)} \right] - M \right\} \Psi = 0, \quad (1.1)$$

где γ_{abc} – коэффициенты вращения Риччи; $A_{(c)} = e_{(c)}^\alpha A_\alpha$ – тетрадные компоненты внешнего электромагнитного поля.

В 3-мерном пространстве Лобачевского известна система обобщенных цилиндрических координат

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 z (dr^2 + \sinh^2 r d\phi^2) - dz^2.$$

В этих координатах уравнение Дирака (1.1) при ограничении на плоскость

($z = 0, dz = 0$) прымае выгляд (удобна ввесці падстаноўку $\Psi = \psi/\sqrt{\sinh r}$):

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \partial_r + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\cosh r - 1)}{\sinh r} - M \right] \psi = 0. \quad (1.2)$$

Рашэння будзем іскаць ў выглядзе:

$$\psi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix}, \quad \left(\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \partial_r - \gamma^2 \mu(r) - M \right) \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix} = 0,$$

дзе

$$\mu(r) = \frac{m - eB(\cosh r - 1)}{\sinh r}.$$

Выбирая матрицы Дирака в спиновом базисе, получим уравнения для функций $f_a(r)$:

$$\begin{aligned} (\partial_r + \mu) f_4 + i(\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, & (\partial_r - \mu) f_3 + i(\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\ (\partial_r + \mu) f_2 - i(\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, & (\partial_r - \mu) f_1 - i(\epsilon f_2 - M f_4) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Чтобы упростить систему (1.3), необходимо привести к диагональному виду один из дополнительных операторов. В качестве такого оператора можно предположить обобщенный оператор спиральности Σ :

$$\Sigma = \gamma^2 \gamma^3 \partial_r - i \gamma^3 \gamma^1 \frac{i\partial_\phi + eB(\cosh r - 1)}{\sinh r}. \quad (1.4)$$

Уравнение на собственные значения $\Sigma \psi = \sigma \psi$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\partial_r + \mu) f_4 - i\sigma f_3 &= 0, & (\partial_r - \mu) f_3 - i\sigma f_4 &= 0, \\ (\partial_r + \mu) f_2 - i\sigma f_1 &= 0, & (\partial_r - \mu) f_1 - i\sigma f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Рассматривая ее совместно с (1.3), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sigma f_3 + (\epsilon f_3 - M f_1) &= 0, & \sigma f_4 + (\epsilon f_4 - M f_2) &= 0, \\ \sigma f_1 - (\epsilon f_1 - M f_3) &= 0, & \sigma f_2 - (\epsilon f_2 - M f_4) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5a)$$

с решениями

$$\sigma = \mp \lambda, \quad \lambda = \sqrt{\epsilon^2 - M^2}, \quad f_3 = \frac{\epsilon \pm \lambda}{M} f_1, \quad f_4 = \frac{\epsilon \pm \lambda}{M} f_2. \quad (1.5b)$$

Учитывая линейные ограничения (1.5b), из (1.3) получаем две более простые системы:

$$\sigma = -\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_2 + i\lambda f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_1 + i\lambda f_2 = 0; \quad (1.6a)$$

$$\sigma = +\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) f_2 - i\lambda f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - \mu \right) f_1 - i\lambda f_2 = 0. \quad (1.6b)$$

Для определенности рассмотрим систему (1.6a) (переход к случаю (1.6b) осуществляется с помощью замены $\lambda \Rightarrow -\lambda$). Из радиальных уравнений (1.6a) следуют

уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2\right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d\mu}{dr} - \mu^2 + \lambda^2\right) f_2 = 0. \quad (1.7a)$$

Учитывая принятое обозначение для $\mu(r)$, получаем уравнения в явном виде (для краткости обозначаем eB как B):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m \cosh r + B(\cosh r - 1)}{\sinh^2 r} - \frac{[m - B(\cosh r - 1)]^2}{\sinh^2 r} + \lambda^2\right) f_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m \cosh r + B(\cosh r - 1)}{\sinh^2 r} - \frac{[m - B(\cosh r - 1)]^2}{\sinh^2 r} + \lambda^2\right) f_2 = 0. \quad (1.7b)$$

Два уравнения связаны формальной заменой $m \Rightarrow -m$, $B \Rightarrow -B$, $f_1 \Rightarrow f_2$. Делая замену переменной $y = (1 + \cosh r)/2$ и используя подстановку $f_1 = y^A (1 - y)^C \bar{f}_1(y)$, получаем уравнение для функции \bar{f}_1

$$y(1-y) \frac{d^2 \bar{f}_1}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y\right] \frac{d \bar{f}_1}{dy} + \left[\frac{A^2 - A/2 - m^2/4 - m/4 - mB - B^2 - B/2}{y} + \frac{C^2 - C/2 - m^2/4 + m/4}{1-y} - (A+C)^2 - \lambda^2 + B^2\right] \bar{f}_1 = 0.$$

При следующих ограничениях:

$$A = -\frac{2B+m}{2}, \quad \frac{2B+m+1}{2}, \quad C = \frac{m}{2}, \quad \frac{1-m}{2}$$

приходим к уравнению гипергеометрического типа

$$y(1-y) \frac{d^2 \bar{f}_1}{dy^2} + \left[2A + \frac{1}{2} - (2A + 2C + 1)y\right] \frac{d \bar{f}_1}{dy} - [(A+C)^2 + \lambda^2 - B^2] \bar{f}_1 = 0$$

с параметрами

$$f_1 = y^A (1-y)^C F(\alpha, \beta, \gamma; y), \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2},$$

$$\alpha = A + C + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad \beta = A + C - \sqrt{B^2 - \lambda^2}. \quad (1.8)$$

Для того чтобы иметь конечные решения при $r=0$ ($y \rightarrow 1$) (соответствующие геометрические точки принадлежат оси z : $u_0 = \cosh z$, $u_3 = \sinh z$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$) и на бесконечности $r \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow \infty$), следует выбирать положительные значения C и отрицательные значения A :

$$C > 0, \quad A < 0, \quad C + A < 0, \quad f_1 = y^A (1-y)^C F(\alpha, \beta, \gamma; y). \quad (1.9)$$

Запишем все четыре возможности для выбора параметров A , C (для определенности пусть $B > 0$):

$$1. \quad C = \frac{m}{2}, \quad A = -\frac{2B+m}{2}, \quad C + A = -B;$$

$$\begin{aligned}
2. \quad C &= \frac{1-m}{2}, \quad A = -\frac{2B+m}{2}, \quad C+A = -B-m+\frac{1}{2}; \\
3. \quad C &= \frac{m}{2}, \quad A = \frac{2B+m+1}{2}, \quad C+A = B+m+\frac{1}{2}; \\
4. \quad C &= \frac{1-m}{2}, \quad A = \frac{2B+m+1}{2}, \quad C+A = B+1.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Учитывая (1.9), заключаем, что только варианты 1 и 2 являются пригодными для описания связанных состояний (они совпадают при $m = +1/2$). Запишем соответствующие выражения для радиальных функций.

$$\begin{aligned}
1. \quad m > 0, \quad m = +1/2, +3/2, \dots, \\
C = m/2, \quad A = -B - m/2 < 0, \quad f_1 = y^{-B-m/2} (1-y)^{m/2} F(a, b, c; y), \\
a = -B + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad b = -B - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad c = -2B - m + \frac{1}{2};
\end{aligned} \tag{1.11a}$$

правило квантования имеет вид:

$$a = -n \Rightarrow +\sqrt{B^2 - \lambda^2} = B - n > 0; \tag{1.11b}$$

чтобы иметь конечные радиальные функции на бесконечности $r \rightarrow \infty$, должны быть наложены следующие ограничения:

$$A + C + n < 0 \Rightarrow n < B, \tag{1.11c}$$

которые обеспечивают положительный корень квадратный $+\sqrt{B^2 - \lambda^2}$ в (1.11b).

$$\begin{aligned}
2. \quad -B + 1/2 < m < 1, \quad (m = m_{\min}, \dots, -1/2, +1/2), \\
C = 1/2 - m/2, \quad A = -B - m/2 < 0, \\
f_1 = y^{-B-m/2} (1-y)^{1/2-m/2} F(a', b', c'; y), \\
a' = -B - m + 1/2 + \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \\
b' = -B - m + 1/2 - \sqrt{B^2 - \lambda^2}, \quad c' = -2B - m + \frac{1}{2};
\end{aligned} \tag{1.12a}$$

правило квантования имеет вид:

$$a' = -n \Rightarrow +\sqrt{B^2 - \lambda^2} = B + m - 1/2 - n > 0; \tag{1.12b}$$

при этом должно выполняться неравенство

$$A + C + n < 0 \Rightarrow B + m - 1/2 - n > 0, \tag{1.12c}$$

которое обеспечивает положительный квадратный корень $+\sqrt{B^2 - \lambda^2}$ в (1.12b). Обращаем внимание, что при $m = +1/2$ формула (1.12b) совпадает с (1.11b).

Таким образом, энергетический спектр для частицы со спином $1/2$ в магнитном поле на плоскости Лобачевского задается двумя формулами:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= B^2 - (B - n)^2, \quad m = +1/2, +3/2, \dots, \quad n < B; \\
\lambda^2 &= B^2 - (B + m - \frac{1}{2} - n)^2, \quad \underline{-B + 1/2 < m_{\min}, \dots, +1/2}, \quad n < B + m - 1/2.
\end{aligned}$$

Обе формулы описывают конечное число дискретных энергетических уровней при заданной величине магнитного поля B .

Сделаем замечание относительно квантового числа m . Использованное выше

соотношение $-i\partial_\phi\Psi = m\Psi$ представляет собой преобразованное от декартовых координат к цилиндрическим уравнение на собственные значения для третьей проекции полного углового момента дираковской частицы

$$\hat{J}_3\Psi_{Cart} = \left(-i\frac{\partial}{\partial\phi} + \Sigma_3\right)\Psi_{Cart} = m\Psi_{Cart};$$

т. е. для квантового числа m допускаются только полуцелые значения $m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$

2. Уравнение Дирака в H_2 , координаты (x, y)

Запишем уравнение Дирака в координатах (x, y) на плоскости H_2 в магнитном поле [20]

$$dS^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} - dz^2, \quad dz = 0, \quad A_x = +\frac{B}{y},$$

$$e_{(b)}^\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad e_{(b)\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2.1)$$

$$\left[\gamma^0 i\partial_t + \gamma^1(-iy\partial_x - eB) + i\gamma^2(-y\partial_y + 1/2) - M\right]\Psi = 0. \quad (2.2)$$

Переменные разделяются с использованием подстановки

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t} e^{ipx} \begin{vmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ f_3(y) \\ f_4(y) \end{vmatrix}, \quad \left[\gamma^0 \varepsilon + \gamma^1(py - eB) + i\gamma^2(-y\partial_y + 1/2) - M\right] \begin{vmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ f_3(y) \\ f_4(y) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем систему уравнений для f_a

$$\begin{aligned} \varepsilon f_3 - (py - eB)f_4 - (-y\partial_y + 1/2)f_4 - Mf_1 &= 0, \\ \varepsilon f_4 - (py - eB)f_3 + (-y\partial_y + 1/2)f_3 - Mf_2 &= 0, \\ \varepsilon f_1 + (py - eB)f_2 + (-y\partial_y + 1/2)f_2 - Mf_3 &= 0, \\ \varepsilon f_2 + (py - eB)f_1 - (-y\partial_y + 1/2)f_1 - Mf_4 &= 0. \end{aligned}$$

При наложении линейных ограничений $f_3 = Kf_1, f_4 = Kf_2$ (они, очевидно, связаны с диагонализацией обобщенного оператора спиральности) уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \left(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - py + eB\right)f_2 + \left(\varepsilon - \frac{M}{K}\right)f_1 &= 0, \\ \left(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - py + eB\right)f_2 + (-\varepsilon + MK)f_1 &= 0, \\ \left(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + py - eB\right)f_1 + \left(-\varepsilon + \frac{M}{K}\right)f_2 &= 0, \\ \left(y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + py - eB\right)f_1 + (\varepsilon - MK)f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полученная система уравнений будет совместна, если выполняется условие

$$\varepsilon - \frac{M}{K} = -\varepsilon + MK \quad \Rightarrow \quad K = K_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}}{M}. \quad (2.4)$$

Существует два независимых случая (введем обозначение $+\sqrt{\varepsilon^2 - M^2} = \lambda$):

$$MK = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - M^2},$$

$$\begin{aligned} (y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p y + eB) f_2 + \lambda f_1 &= 0, \\ (y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p y - eB) f_1 - \lambda f_2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$MK = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - M^2},$$

$$\begin{aligned} (y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} - p y + eB) f_2 - \lambda f_1 &= 0, \\ (y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} + p y - eB) f_1 + \lambda f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

Для определенности рассмотрим случай (2.5a); для f_1 получим уравнение второго порядка

$$y \frac{d^2 f_1}{dy^2} + \left(p - p^2 y + 2 p e B + \frac{1/4 - e^2 B^2 + \lambda^2}{y} \right) f_1 = 0. \quad (2.6)$$

Введем новую переменную $z = 2 p y$. Следует отметить существенную зависимость решений от знака p ; сначала рассмотрим случай положительного значения p (для краткости обозначим eB как B ; для определенности предполагаем $B > 0$). С использованием подстановки $f_1(z) = z^A e^{Cz} F_1(z)$ при A, C , выбранных согласно

$$A = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) > 0, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Из уравнения (2.6) находим

$$z \frac{d^2 F_1}{dz^2} + (2A - z) \frac{dF_1}{dz} - \left(A - B - \frac{1}{2} \right) F_1 = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение с параметрами

$$\alpha = A - B - \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2A. \quad (2.7)$$

Правило квантования имеет вид:

$$\alpha = -n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) - B - \frac{1}{2} = -n;$$

таким образом, получаем конечное число связанных состояний, описываемых соотношением

$$+\sqrt{B^2 - \lambda^2} = -n + B. \quad (2.8)$$

Рассмотрим случай отрицательных значений p . В переменной $z = -2 p y$, $z > 0$ и с использованием подстановки $f_1(z) = z^A e^{Cz} F_1(z)$ уравнение для $F_1(z)$ при A, C , выбранных согласно

$$A = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{B^2 - \lambda^2} \right) > 0, \quad C = -\frac{1}{2},$$

принимает вид:

$$z \frac{d^2 F_1}{dz^2} + (2A - z) \frac{dF_1}{dz} - (A + B + \frac{1}{2}) F_1 = 0$$

и является уравнением для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha = A + B + \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2A.$$

Правило квантования выглядит следующим образом:

$$\alpha = -n, \quad \pm \sqrt{B^2 - \lambda^2} = -n - B - 1. \quad (2.9)$$

Выбор верхнего знака недопустим. В случае выбора нижнего знака имеем

$$0 < \sqrt{B^2 - \lambda^2} = B + n + 1 < \frac{1}{2},$$

$$A > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{B^2 - \lambda^2} > \frac{1}{2},$$

что также невозможно. Таким образом, при $p < 0$ связанных состояний не существует.

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rabi, I.I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I.I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.
2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztshr. Phys. – 1930. – Vol. 69. – P. 629–637.
3. Plesset, M.S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M.S. Plesset // Phys.Rev. – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.
4. Landau, L.D. Quantum mechanics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1958. – 484 p.
5. Comtet, A. Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field / A. Comtet, P.J. Houston // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, no 1. P. – 185–191.
6. Comtet, A. On the Landau levels on the hyperbolic plane / A. Comtet // Annals of Physics. – 1987. – Vol. 173. – P. 185–209.
7. Groshe, C. Path integral on the Poincaré upper half plane with a magnetic field and for the Morse potential / C. Groshe // Ann. Phys. (N.Y.). – 1988. – Vol. 187. – P. 110–134.
8. Klauder, J.R. Landau Levels and Geometric Quantization / J.R. Klauder, E. Onofri // Int. J. Mod. Phys. – 1989. – Vol. A4. – P. 3939–3949.
9. Dunne, G.V. Hilbert Space for Charged Particles in Perpendicular Magnetic Fields / G.V. Dunne // Ann. Phys. (N.Y.). – 1992. – Vol. 215. – P. 233–263.
10. Alimohammadi, M. Quantum group symmetry of the quantum Hall effect on the non-flat surfaces / M. Alimohammadi, A. Shafei Deh Abad // J. Phys. – 1996. – Vol. A29. – P. 559.
11. Onofri, E. Landau Levels on a torus / E. Onofri // Int. J. Theoret. Phys. – 2001. – Vol. 40, № 2. – P. 537–549.
12. Gamboa, J. The Landau problem and noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa [et all.] // Mod. Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 16. – P. 2075–2078.
13. Plyushchay, M.S. Relativistic particle with torsion and charged particle in a constant electromagnetic field: Identity of evolution / M.S. Plyushchay // Mod. Phys. Lett. – 1995. – Vol. A10. – P. 1463–1469.
14. Correa, F. Aharonov-Bohm effect on AdS(2) and nonlinear supersymmetry of reflectionless Poschl-Teller system / F. Correa, V. Jakubsky, M.S. Plyushchay // Annals

Phys. – 2009. – Vol. 324. – P. 1078–1094.

15. Bogush, A.A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–416.

16. Богуш, А.А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле в сферическом пространстве S_3 / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Вестні НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 2. – С. 57–63.

17. Motion Caused by Magnetic Field in Lobachevsky Space / V.V. Kudriashov [et all.] // The sun, the stars, the Universe and General relativity : International Conference in honor of Ya.B. Zeldovich's 95th anniversary, Minsk, 20–23 April, 2009 / Ed. R. Ruffini, G. Vereschagin. – AIP Conference Proceedings, 2010. – Vol. 1205. – P. 108–111.

18. Кудряшов, В.В. Классическая частица в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского / В.В. Кудряшов [и др.] // Доклады НАН Беларусі. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 50–53.

19. Kudryashov, V.V. Classical particle in presence of magnetic field, hyperbolic Lobachevsky and spherical Riemann models / V.V. Kudryashov [et all.] // SIGMA. – 2010. – Vol. 6, 004. – 34 p.

20. Овсюк, Е.М. Нерелятивистская частица в магнитном поле в 2-мерном пространстве Лобачевского, цилиндрические координаты и полуплоскость Пуанкаре / Е.М. Овсюк // Доклады НАН Беларусі. – 2012.

E.M. Ovsyuk. A Particle with Spin 1/2 in a Magnetic Field in Two-Dimensional Lobachevsky Space

Exact solutions of the Dirac equation in two-dimensional Riemannian space of negative curvature, the hyperbolic Lobachevsky plane, in presence of an external magnetic field, which is an analogous of the uniform magnetic field in Minkowski space, are constructed. In describing the generalized magnetic field, cylindrical and quasi-Cartesian coordinates are used, the latter determines the Poincaré half-plane. In both coordinate systems, the Dirac equation is solved exactly, the wave functions are constructed. A generalized formula for the energy levels is produced, which describes the quantized motion of a particle in the magnetic field in the Lobachevsky plane. When separating the variables, diagonalization of an extended helicity operator for a Dirac particle is used.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2012

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛERA

Показано, что наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана комплексного поля Дирака – Кэлера является группа $SO(5,4)$. Данная группа значительно шире группы $SO(4,2)$, обычно сопоставляемой в литературе данному полю, и содержит последнюю в качестве подгруппы. Установленное расширение группы симметрии поля Дирака – Кэлера не нарушает его соответствия 16-компонентному дираковскому полю с лагранжианом $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$.

Введение

Уравнение Дирака – Кэлера (ДК) представляет собой максимально общее дифференциальное уравнение первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Его тензорная формулировка имеет, как известно, вид [1]:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\psi}_0 &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ψ_0 – скаляр, ψ_μ – вектор, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга,

$\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – аксиальный вектор, $\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$).

Система (1) может быть записана в универсальной матричной форме

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0. \quad (2)$$

При выборе волновой функции ψ в виде

$$\Psi = (\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}) \text{ – столбец,} \quad (3)$$

вводя собирательный индекс $A = 0, \tilde{0}, \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$, пробегающий значения от 1 до 16, матрицы β_μ можно выразить через элементы e^{AB} полной матричной алгебры [2] следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_\mu &= \beta_\mu^{(+)} + \beta_\mu^{(-)}, \\ \beta_\mu^{(+)} &= e^{\tilde{0}\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}\tilde{0}} + e^{\lambda[\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu]\lambda}, \\ \beta_\mu^{(-)} &= e^{0\mu} + e^{\mu 0} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (e^{\tilde{\lambda}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\lambda}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что матрицы β_μ (3) удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака.

Обычно сопоставляемая лагранжиану поля ДК внутренняя (диальная) симметрия описывается группой $SO(4,2)$ [3]. Генераторами этой группы могут служить матрицы $\beta'_\mu, \beta'_5, \beta'_\mu \beta'_5, \beta'_{[\mu} \beta'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\beta'_\mu \beta'_\nu - \beta'_\nu \beta'_\mu)$, где $\beta'_\mu = \beta_\mu^{(+)} - \beta_\mu^{(-)}$ – второй набор матриц размерности 16×16 , удовлетворяющих, как и β_μ , алгебре матриц Дирака и коммутирующих с матрицами β_μ .

С точки зрения стандартного подхода теории релятивистских волновых уравнений система ДК (1) описывает частицу с набором спинов 0,1 и двукратным вырождением состояний по пространственной четности. В то же время диальная симметрия позволяет сопоставить полю ДК набор из четырех дираковских полей с лагранжианом

$$L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4, \quad (5)$$

то есть описывать на его основе (причем как на классическом, так и на квантовом уровне) частицу со спином $1/2$ и дополнительными (помимо спина) внутренними степенями свободы (см., напр., [1] и цитированную здесь литературу).

В работе [4] был развит подход, основанный на использовании вещественной формы описания дираковских полей, суть которого будет изложена ниже. При этом было установлено наличие более широкой группы внутренней симметрии указанных полей, чем считалось ранее. Так, для системы четырех уравнений Дирака с лагранжианом (5) в работе [5] установлена группа симметрии $SO(5,4)$, которая существенно шире группы диальной симметрии $SO(4,2)$ и содержит последнюю в качестве подгруппы.

Возникает вопрос: сохраняется ли соответствие между комплексным полем ДК и 16-компонентным дираковским полем с лагранжианом (5) с учетом наличия у последнего более широкой группы симметрии, чем $SO(4,2)$. Для ответа на него необходимо, очевидно, исследовать внутреннюю симметрию уравнения ДК на основе развитого в [4] подхода, чему и посвящена настоящая работа.

Вещественная форма уравнения Дирака – Кэлера

Запишем уравнение (2) в вещественной форме. Для этого возьмем от (2) комплексное сопряжение. Складывая и вычитая исходное уравнение с комплексно сопряженным и вводя функции

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*), \quad (6)$$

получим эквивалентное уравнению (2) 32-компонентное уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$\Psi = (\psi^r, \psi^i) - \text{столбец}, \quad (8)$$

Γ_μ – квадратные матрицы размерности 32×32 , имеющие вид

$$\Gamma_1 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_1), \quad \Gamma_2 = I_8 \otimes \gamma_2, \quad (9)$$

$$\Gamma_3 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_3), \quad \Gamma_4 = -I_2 \otimes (\gamma_5 \otimes \gamma_4)$$

(γ_μ – матрицы Дирака).

Релятивистское волновое уравнение (РВУ) (7) – (9) является вещественной формой уравнения (2) и, следовательно, тензорной системы Дирака – Кэлера (1). Данная терминология объясняется тем, что если записать РВУ (7) – (9) в явном виде и перейти к трехмерным обозначениям, получится вещественная система уравнений.

В дальнейшем, помимо представления (8) волновой функции, придется использовать так называемый фермионный базис, в котором удовлетворяющие дираковской алгебре матрицы Γ_μ (9), по определению, принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_8 \otimes \gamma_\mu. \quad (10)$$

Переход из базиса (8) в фермионный базис осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}[I_8 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - (\gamma_5 \otimes I_2) \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \quad (11)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_8 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - (\gamma_5 \otimes I_2) \otimes (I_4 - i\gamma_2)].$$

Внутренняя симметрия лагранжиана уравнения Дирака – Кэлера

Под преобразованиями внутренней симметрии РВУ (7) понимаются линейные преобразования волновой функции

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \quad (12)$$

не затрачивающие пространственно-временных координат и коммутирующие с матрицами Γ_μ :

$$[\Gamma_\mu, Q]_- = 0. \quad (13)$$

При этом условие сохранения вещественного характера РВУ (7) (назовем его условием вещественности) означает, что преобразование Q должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) компонента, то и Ψ'_A должна оставаться вещественной (мнимой).

Применение условия (13) удобнее всего осуществлять в фермионном базисе. Наиболее общий вид матрицы Q , коммутирующей со всеми матрицами Γ_μ (10), таков:

$$Q = q \otimes I_4, \quad (14)$$

где q – произвольная комплексная матрица размерности 8×8 .

Преобразование Q (14) может быть параметризовано посредством 64-х базисных матричных операторов J_A :

$$J_0 = I_{32}, \quad J_i = I_4 \otimes \sigma_i \otimes I_4, \quad J_{\mu i} = \gamma_\mu \otimes \sigma_i \otimes I_4,$$

$$J_{\mu 4} = \gamma_\mu \otimes I_2 \otimes I_4, \quad J_{5i} = \gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4, \quad J_{54} = \gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4, \quad (15)$$

$$J_{[\mu\nu]i} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes \sigma_i \otimes I_4, \quad J_{[\mu\nu]4} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_2 \otimes I_4,$$

$$J_{\mu 5i} = i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4, \quad J_{\mu 54} = i\gamma_\mu\gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4.$$

Здесь σ_i – матрицы Паули.

В представлении (6), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой

функции разделены, для матричных операторов J_A с помощью обратного преобразования (11) получаем выражения:

$$\begin{aligned} J_0 &= I_{32}, J_i = I_4 \otimes \sigma_i \otimes I_4, J_{\mu i} = -i\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes \gamma_2, \\ J_{\mu 4} &= -i\gamma_\mu \gamma_5 \otimes I_2 \otimes \gamma_2, J_{5i} = \gamma_5 \otimes \sigma_i \otimes I_4, J_{54} = \gamma_5 \otimes I_2 \otimes I_4, \\ J_{[\mu\nu]i} &= i\gamma_\mu \gamma_\nu \otimes \sigma_i \otimes I_4, J_{[\mu\nu]4} = i\gamma_\mu \gamma_\nu \otimes I_2 \otimes I_4, \\ J_{\mu 5i} &= \gamma_\mu \otimes \sigma_i \otimes \gamma_2, J_{\mu 54} = \gamma_\mu \otimes I_2 \otimes \gamma_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя для волновой функции Ψ и операторов J_A представление (6), (16) и накладывая на уравнение (7) выше сформулированное условие вещественности, можно найти ограничения на соответствующие операторам J_A параметры ω_A , которые будут заключаться в вещественном либо чисто мнимом характере последних. В результате придем к 32-м вещественным и 32-м мнимым параметрам. При наложении условия унитарности на преобразование Q получим 63-параметрическую группу $SU(4,4)$, определяемую генераторами J_A (за исключением единичного $J_0 = I_{32}$) с 32-мя вещественными и 31-м мнимым параметрами.

Требование инвариантности лагранжиана уравнения (7)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta) \quad (17)$$

относительно бесконечно малых однопараметрических преобразований $1 + \delta\omega_A J_A$ данной группы приводит к условиям:

$$(\delta\omega_A J_A)^+ \eta = -\delta\omega_A \eta J_A. \quad (18)$$

В формулах (17), (18) η – матрица билинейной лоренц-инвариантной формы $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^+ \eta \Psi$, знак “+” означает эрмитовское сопряжение. В фермионном базисе матрица η , соответствующая 32-компонентной вещественной формулировке (7) уравнения ДК, принимает вид:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 \otimes \gamma_4. \quad (19)$$

Непосредственная проверка условий (18) с использованием выражений (15), (19) для матриц J_A и η показывает, что этим условиям удовлетворяют 36 генераторов

$$\begin{aligned} J_2, J_{12}, J_{21}, J_{23}, J_{24}, J_{31}, J_{33}, J_{34}, J_{41}, J_{43}, J_{44}, \\ J_{51}, J_{53}, J_{54}, J_{152}, J_{251}, J_{253}, J_{254}, J_{351}, J_{353}, J_{354}, \\ J_{451}, J_{453}, J_{454}, J_{[12]2}, J_{[23]1}, J_{[23]3}, J_{[23]4}, J_{[31]2}, \\ J_{[14]2}, J_{[24]1}, J_{[24]3}, J_{[24]4}, J_{[31]1}, J_{[34]3}, J_{[34]4}, \end{aligned} \quad (20)$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_{31}, \omega_{33}, \omega_{34}, \omega_{41}, \omega_{43}, \omega_{44}, \omega_{351}, \omega_{353}, \omega_{354}, \omega_{451}, \omega_{453}, \omega_{454}, \omega_{[23]1}, \omega_{[23]3}, \omega_{[23]4}, \omega_{[31]2}, \omega_{[14]2}, \omega_{[24]1}, \omega_{[24]3}, \omega_{[24]4}$), и 16 мнимых ($\omega_2, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{51}, \omega_{53}, \omega_{54}, \omega_{152}, \omega_{251}, \omega_{253}, \omega_{254}, \omega_{[12]2}, \omega_{[31]1}, \omega_{[34]3}, \omega_{[34]4}$) параметров. Генераторы (15) (или (16)) с данным набором параметров образуют 36-параметрическую унитарную группу, изоморфную группе $SO(5,4)$.

Заклучение

Полученная в настоящей работе 36-параметрическая группа внутренней симметрии $SO(5,4)$ лагранжевой формулировки уравнения Дирака – Кэлера значительно шире 15-параметрической группы $SO(4,2)$, обычно сопоставляемой в литературе данному уравнению. Она совпадает с установленной в работе [5] наиболее полной группой внутренней симметрии системы четырех уравнений Дирака с лагранжианом (5). Таким образом, обнаруженное в настоящей работе расширение группы внутренней симметрии комплексного поля Дирака – Кэлера не нарушает его соответствия 16-компонентному дираковскому полю с лагранжианом (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 196 с.
2. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск : Наука и техника, 1968. – 388 с.
3. Kähler, E. Der innere differentialkalkül / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma), – 1962. – V. 21. – № 3, 4. – P. 425 – 523.
4. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.
5. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия 16-компонентного дираковского поля и поля Дирака – Кэлера / В.А. Плетюхов, П.П. Андрусевич // Соврем. науч. проблемы и вопросы преподавания теоретической и математической физики, физики конденсированных сред и астрономии : сб. материалов IV респ. науч.-метод. конф., Брест, 20 – 21 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2012. – С. 76 – 79.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusevich. Symmetry's Properties of the Dirac – Kähler Field

It is shown that the most complete group of internal symmetry of the Lagrangian of a complex field Dirac - Kähler group is $SO(5,4)$. This group is significantly wider than the group $SO(4,2)$, usually mapped in the literature that field, and contains the latest in a subgroup. Set extension of the symmetry of the Dirac field - Kahler does not break his match 16-component Dirac- Kähler field with Lagrangian

$$L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4.$$

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.09.2012

УДК 537.312:538.245

А.Ф. Ревинский, И.И. Макоед**ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД МОТТА – ХАББАРДА
В ФЕРРИТЕ ВИСМУТА**

В работе представлены данные о механизме формирования диэлектрического состояния в энергетическом спектре мультиферроика BiFeO_3 . Результаты первопринципных расчетов зонной структуры феррита висмута в рамках LSDA- и LSDA+U-приближений указывают на наличие перехода «металл – диэлектрик», обусловленного обменно-корреляционным взаимодействием 3d-электронов ионов железа.

Введение

В последнее время большое внимание уделяют изучению материалов с сильными электронными корреляциями [1–3]. К числу таких веществ относят соединения, содержащие элементы с незаполненными 3d- и 4f-оболочками. Электроны данных оболочек, благодаря сильным корреляциям, в значительной мере определяют физическую природу ряда уникальных явлений (высокотемпературную сверхпроводимость, магнитоэлектрический эффект в мультиферроиках, межчастичные взаимодействия в системах с тяжелыми фермионами).

К числу веществ с выраженными корреляциями магнитных и электрических свойств, можно отнести мультиферроик феррит висмута (BiFeO_3) [4,5]. Интерес к данному соединению вызван наличием в нем сосуществования упорядоченных антиферромагнитной и сегнетоэлектрической фаз, что является основанием для широких перспектив использования BiFeO_3 при создании принципиально новых элементов памяти.

В настоящее время еще до конца не решен вопрос о физической природе сосуществования упорядоченных фаз в BiFeO_3 . Вместе с тем есть основания полагать, что именно 3d⁶ электроны атома железа, благодаря сильному корреляционному взаимодействию, в значительной степени оказывают влияние на формирование уникальных физических особенностей BiFeO_3 . Одной из них является наличие фазового перехода «металл–диэлектрик», который в литературе получил название перехода Мотта – Хаббарда [6]. В связи с вышесказанным целью настоящей работы является выяснение роли сильнокоррелированных 3d⁶-электронов железа в формировании перехода «металл – диэлектрик» в феррите висмута.

Приближение локальной плотности (LSDA–approximation)

Современная теория зонной структура кристаллических веществ – теория функционала электронной плотности, которая основана на известной теореме Хоэнберга [7]: полная энергия электронной подсистемы кристалла в основном состоянии ($T = 0$) является функционалом распределения электронной плотности:

$$E^{LSDA}[\rho^\sigma] = E_{kin}[\rho^\sigma] + E_{ion}[\rho^\sigma] + E_H[\rho^\sigma] + E_{xc}[\rho^\sigma]. \quad (1)$$

Здесь $E_{kin}[\rho^\sigma]$ – кинетическая энергия электронов со спином σ , $E_{ion}[\rho^\sigma]$ – энергия взаимодействия ионов с электронами, $E_H[\rho^\sigma]$ – энергия кулоновского отталкивания электронов, $E_{xc}[\rho^\sigma]$ – энергия обменно-корреляционного взаимодействия.

Минимизируя полную энергию (1), Кон и Шем получили одноэлектронное

уравнение [8]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ion}(\vec{r}) + \int V_{el}(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' + \frac{\delta E_{xc}[\rho^\sigma]}{\delta \rho^\sigma(\vec{r})} \right] \psi_i(\vec{r}) = \epsilon_i \psi_i(\vec{r}). \quad (2)$$

Главной проблемой теории функционала плотности является тот факт, что выражение вариационной производной $\frac{\delta E_{xc}[\rho^\sigma]}{\delta \rho^\sigma(\vec{r})}$, которая определяет обменно-корреляционный потенциал в гамильтониане уравнения Кона – Шема (2), строго говоря, является неизвестным.

На данной стадии развития теории функционала плотности общепринятым считали приближение локальной плотности (LSDA – local spin density approximation). В рамках данного приближения обменно-корреляционный потенциал в (2) является функционалом плотности валентных электронов $\rho^\sigma(\vec{r})$ только в локальной точке пространства \vec{r} :

$$V_{xc}(\vec{r}) = \frac{\delta E_{xc}[\rho^\sigma(\vec{r})]}{\delta \rho^\sigma(\vec{r})}. \quad (3)$$

Использование выражения (3) для расчетов зонной структуры при помощи самосогласованного численного решения интегро-дифференциального уравнения (2) дало замечательные результаты для простых металлов и элементарных полупроводников [9]. Вместе с тем LSDA-приближение (3) оказалось беспомощным при вычислении электронных спектров переходных металлов, а также соединений, включающих атомы данных металлов. На рисунке 1 представлены результаты расчетов зонной структуры $BiFeO_3$ (пространственная группа $R3c$) с учетом спиновой поляризации G-типа. Как видно, $BiFeO_3$ согласно полученным данным является металлом. Экспериментальные данные [5] свидетельствуют об обратном: $BiFeO_3$ является полупроводником с шириной запрещенной зоны $E_g = 2,25 \text{ эВ}$. Данное противоречие является, по существу, следствием ограниченных возможностей LSDA-приближения, в рамках которого полностью пренебрегают корреляционными эффектами.

1. Приближение LSDA+U

Наиболее простой моделью, которая учитывает корреляционные эффекты, является модель Хаббарда (см. [1–3]), гамильтониан которой имеет вид

$$\hat{H} = -t \sum_{i,j,\sigma} C_{i\sigma}^+ C_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (4)$$

где величина t представляет собой кинетическую энергию электрона, а величина U – потенциальную энергию на узле i . Здесь $C_{i\sigma}^+$ – оператор рождения электрона со спином σ на узле i , $C_{i\sigma}$ – оператор уничтожения.

С учетом только т.н. локальных (на одном узле) кулоновских корреляций функционал (1) записывают в виде [10]:

$$E^{\text{LSDA}+U}[\rho^\sigma(\vec{r})] = E^{\text{LSDA}}[\rho^\sigma(\vec{r})] + \frac{1}{2} \sum_{m,m',\sigma} U (n_{im\sigma} - n^\circ)(n_{im'-\sigma} - n^\circ) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,m',\sigma \\ (m \neq m')}} (U - J)(n_{im\sigma} - n^\circ)(n_{im'\sigma} - n^\circ), \quad (5)$$

где $n_{im\sigma}$ – заселенность орбиталями $im\sigma$, n° – средняя заселенность данной орбитали, J – обменные интегралы [10].

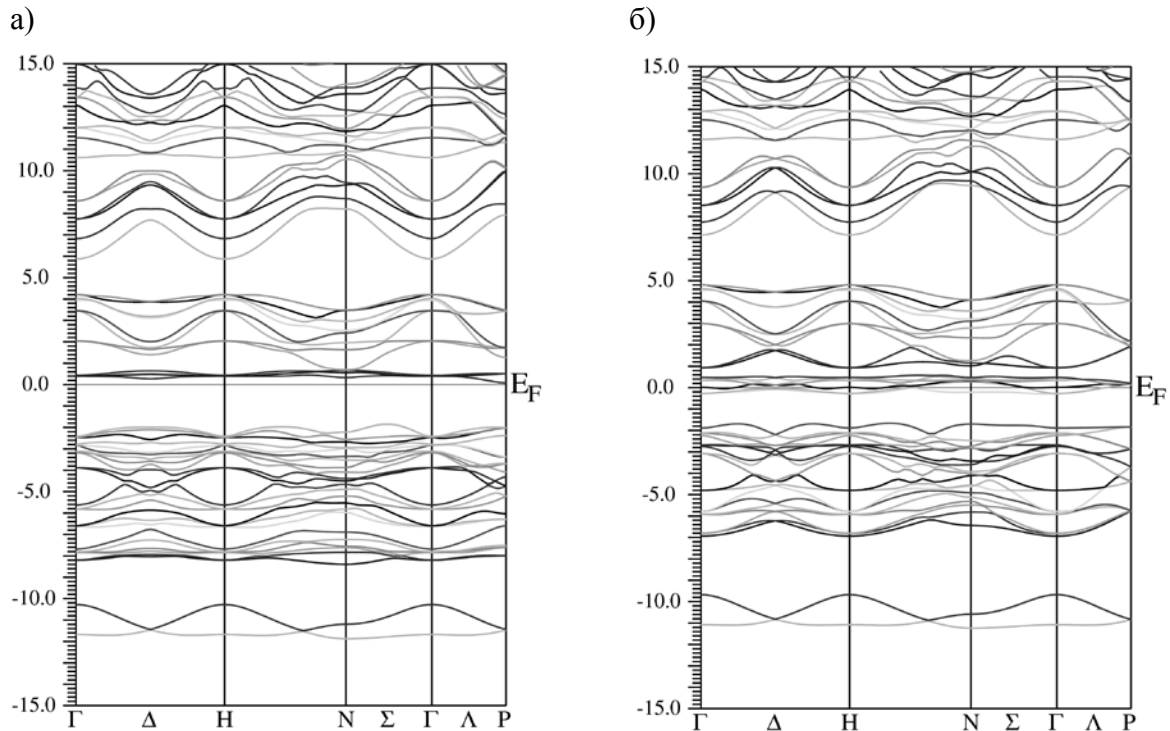


Рисунок 1 – Зонная структура феррита висмута для пространственной группы $R3c$ (а – для спина «вверх», б – для спина «вниз» LSDA)

В частности, для сильнокоррелированных $3d$ -электронов уточненный при помощи (5) обменно-корреляционный потенциал (3) записывают в виде [11]:

$$V_{ij}^\sigma = \frac{\delta E^{\text{LSDA}}}{\delta \rho_{ij}^\sigma} + (U - J) \left[\frac{1}{2} \delta_{ij} - \rho_{ij}^\sigma \right], \quad (6)$$

где ρ_{ij}^σ – матрица плотности $3d$ -электронов.

Следует отметить, что в выражении (6) вместо двух величин U и J достаточно использовать один т.н. эффективный параметр корреляционного взаимодействия $3d$ -электронов:

$$U_{\text{eff}} = U - J. \quad (7)$$

Учет корреляционного взаимодействия в BiFeO_3 позволяет получить значения величин ширины запрещенной зоны, представленной в таблице 1, с учетом корреляционного взаимодействия. Как видно, увеличение параметра корреляционного взаимо-

действия (7) способствует «появлению» диэлектрической щели в электронном спектре BiFeO_3 (рисунки 2, 3). Как следует из полученных результатов, возможной причиной возникновения диэлектрического состояния в феррите висмута является фазовый «переход металл–диэлектрик», т.е. переход Мотта–Хаббарда, обусловленный ростом величины корреляционного взаимодействия 3d-ионов железа.

Таблица 1 – Зависимость ширины запрещенной зоны BiFeO_3 (пр. гр. $R3c$) от параметра корреляционного взаимодействия 3d-электронов железа

U_{eff} (эВ)	Ширина запрещенной зоны (эВ)
0	–
2	0.2
4	0.9
6	1.7

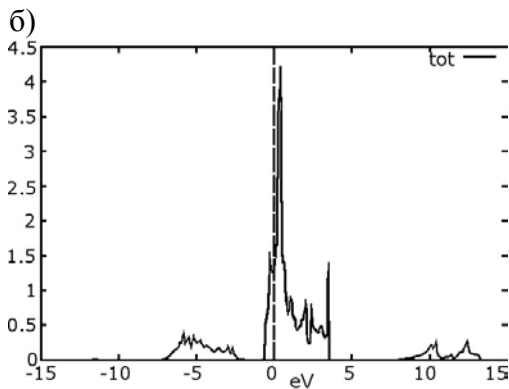
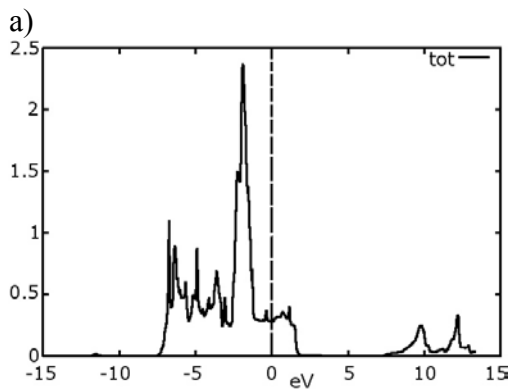


Рисунок 2
Плотность электронных состояний железа в мультиферроике BiFeO_3 (а – для спина \uparrow , б – для спина \downarrow), $U_{эфф} = 0$ (LSDA-приближение)

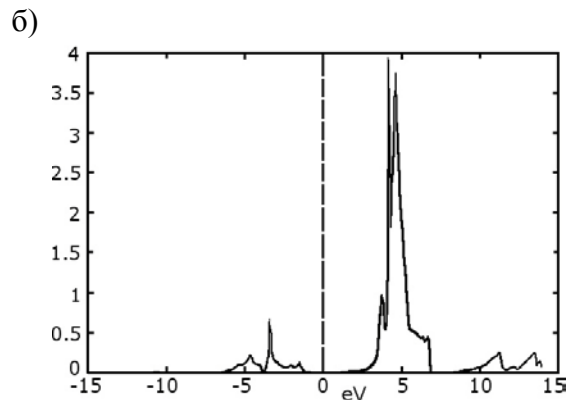
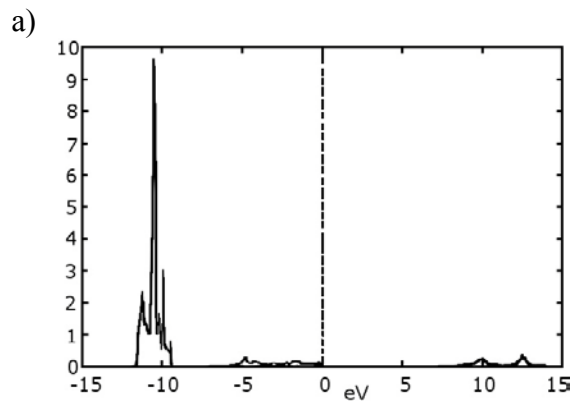


Рисунок 3
Плотность электронных состояний железа в мультиферроике BiFeO_3 (а – для спина \uparrow , б – для спина \downarrow), $U_{эфф} = 12$ эВ (LSDA+U-приближение)

В отсутствие корреляционного взаимодействия ($U_{eff} = 0$) уровень Ферми проходит через узкую 3d-полосу (рисунок 2б). Увеличение энергии корреляции данных электронов приводит к расщеплению спектра электронов железа на две зоны по разные стороны уровня Ферми, формируя тем самым диэлектрическое состояние.

Приближение динамического среднего поля (LSDA+DMFT – dynamical mean-field theory approximation)

Теория динамического среднего поля – это современный уровень теоретического изучения физики сильнокоррелированных систем [2; 3]. В рамках данного приближения полностью игнорируют пространственные корреляции указанных систем и учитывают только динамические.

В основе DMFT-приближения считают, что собственно-энергетическая часть $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ электрона не зависит от квазиимпульса \vec{k} , а зависит только от частоты. Функция Грина при этом имеет вид [2; 3]:

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega + \mu - \varepsilon_k - \Sigma(\omega)}, \quad (8)$$

где μ – химический потенциал, ε_k – полюсы функции Грина.

Расчеты в приближении DMFT [3] показали, что с увеличением параметра U (4) в электронном спектре формируется трехзонная структура. При дальнейшем увеличении U пик электронной плотности вблизи уровня Ферми схлопывается, и при $U/2D \approx 1.75$ в электронном спектре появляется диэлектрическая щель, т.е. происходит переход «металл–диэлектрик». Здесь $2D$ – ширина зоны сильнокоррелированных электронов. Согласно оценочным расчетам, выполненным для феррита висмута, получены следующие значения: $U = U_{eff} + I = 1.7 + 1.5 = 3.2$ (эВ), $2D \approx 2$ эВ и $U/2D = 1.6$.

Заклучение

Выполнены теоретические расчеты зонной структуры мультиферроика $BiFeO_3$ в LSDA- и LSDA+U-приближениях. Полученные данные подтверждают, что сильное корреляционное взаимодействие $3d$ - электронов ионов железа является основной причиной формирования диэлектрического состояния в данном соединении. Учет корреляционных эффектов с использованием модели Хаббарда позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изюмов, Ю.А. Материалы с сильными электронными корреляциями / Ю.А. Изюмов, Э.З. Курмаев // УФН. – 2008. – Т. 78. – № 1. – С. 25–60.
2. Кучинский, Э.З. Обобщенная теория динамического среднего поля в физике сильнокоррелированных систем / Э.З. Кучинский, И.А. Некрасов, М.В. Садовский // УФН. – 2012. – Т. 182. – № 4. – С. 345–378.
3. Jorges, A. Dynamical mean-field theory of strongly correlated fermion systems and the limit of infinite dimensions / A.Jorges [et all.] // Rev. Mod. Phys. – 1996. – vol. 68, № 1. – P. 14–121.
4. Веневцев, Ю.Н. Сегнетомагнетики / Ю.Н. Веневцев, В.В. Гатулин, В.Н. Любимов // М. : Наука, 1982. – 224 с.
5. Макоед, И.И. Получение и физические свойства мультиферроиков : монография / И.И. Макоед. – Брест : БрГУ, 2009. – 181 с.
6. Мотт, Н.Ф. Переходы металл – изолятор / Н.Ф. Мотт // М. : Наука, 1979. – 342 с.
7. Hohenberg, P. Inhomogeneous electron gas / P. Hohenberg, W. Kohn // Phys. Rev. – 1964. – Vol. 136, № 38. – P. B864–B872.

8. Kohn, W. Self-consistent equations including exchange and correlation effects / W. Kohn, L.G. Sham // Phys. Rev. – 1965. – Vol. 140, № 4. – P. A133–A138.
9. Теория неоднородного электронного газа / под ред. С. Лундквиста и Н. Марча. – М. : Мир, 1987. – 400 с.
10. Anisimov, V.I. Band theory and Mott insulators: Hubbard instead of Stoner I / V.I. Anisimov, J. Zaanen, O.R. Andersen // Phys. Rev. – 1991. – Vol. B-44, № 3. – P. 943–954.
11. Dydorev, S.L. Electron-energy-loss spectra and the structural stability of nickel oxide: An LSDA+U study / S.L. Dydorev // Phys. Rev. – 1998. – Vol. B-59, № 3. – P. 1505–1509.

A.F. Revinski, I.I. Makoed. Phase Transition of Mott-Habbsrd in Ferrite Bismuth

The information about dielectric condition in electronic energy spectrum of multiferroic Bi-FeO₃ is represented in this article. The results of ab-initio calculation of band structure of bismuth ferrite within the bounds of LSDA- and LSDA+U approach indicate the existence of metal-dielectric transition stipulated by the exchange-correlated interaction between 3d electrons of iron ions.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 12.09.2012

УДК 539.2

В.С. Савенко, С.Д. Шаврей

ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДИФИКАЦИЯ АЛЮМИНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В статье представлены результаты явления электропластичности деформационного алюминия. Показано изменение числа перегибов n , временного сопротивления G и удельного сопротивления ρ от истинного сужения L_i , а также параметры кристаллической решетки, размеры блоков и микроискажения в образцах алюминия, деформированного при различных значениях плотности и полярности действия тока. Показано, что наложение импульсного тока на зону деформации во время электропластического волочения приводит к изменению деформационных процессов и, как следствие, влияет на механические характеристики алюминиевой проволоки после деформации, что приводит к улучшению служебных характеристик изделия, сокращению энергетических затрат в технологическом процессе.

Обработка металлов давлением имеет широкое применение в промышленности и основана на использовании характерного для металлов свойства пластичности. Пластичность материала является одной из важнейших характеристик при изготовлении проволок из меди, алюминия, вольфрама. Высокие внутренние напряжения и локализация пластической деформации являются основными причинами обрыва проволоки при ее изготовлении или в процессе эксплуатации. Для улучшения служебных характеристик, соответствующих ГОСТу, получения энергетически равновесной внутренней структуры с минимальными внутренними напряжениями традиционно используют отжиг, который требует больших энергетических и временных затрат, усложнения технологического процесса. Для интенсификации технологических процессов и устранения неоднородности пластической деформации при обработке металлов давлением используют явление электропластичности, которое возникает при наложении на зону деформации импульса тока большой плотности ($\sim 10^3$ А/мм²) и малой продолжительности ($\sim 10^{-4}$ с). Действие тока в этом случае не вызывает существенного нагрева металла и поэтому принципиально отличается от джоулевого эффекта, лежащего в основе электроконтактного нагрева. Изменение пластических свойств металла в этом случае происходит без заметных изменений его прочности [1; 2]. Взаимодействие деформируемого металла с электрическим током большой плотности приводит к снижению сопротивления металла деформированию и меняет его служебные характеристики.

Достаточно полно изучены и широко внедрены процессы электропластической деформации при обработке металлов давлением для волочения медной и стальной проволоки [3], а также проволок из других технически важных металлов [4]. Изучение электромеханических характеристик алюминиевой проволоки в условиях электропластического волочения начаты недавно [5; 6].

Внешние энергетические воздействия в условиях деформации существенно стимулируют электродинамические процессы электронно-дислокационного взаимодействия, что приводит к срыву скоплений дислокаций со стопоров и других препятствий, увеличению их скорости и как следствие реализации электропластической деформации. При электропластическом волочении металлических проволок было установлено наличие влияния электрического тока на их механические и физические характеристики, причем для тока разной полярности это влияние различно. В случае многократного волочения происходит накопление электропластического действия тока после каждого перехода [3–6].

Представляет научный и практический интерес исследовать влияние многократ-

ного электропластического волочения алюминиевой проволоки на ее свойства после такой обработки. При этом важной целью является определение возможности улучшения физико-механических характеристик изделия и упрощения изготовления алюминиевой проволоки путем замены обычного волочения на электропластическое с исключением из технологического процесса операций отжига, на который требуется большие временные и энергетические затраты.

В работе представлены результаты исследования структуры и электромеханических характеристик алюминиевой катанки марки АКЛП-5 ПТ с максимальным сечением 196 мм^2 ($d=14 \text{ мм}$), которая подвергалась электропластическому волочению на волочильном станке СМВ-1-9М4. В процессе волочения осуществлялся подвод импульсного тока к алюминиевой проволоке для каждой волоки, установленной на волочильном стане, согласно технологического маршрута волочения (максимальное количество волок – 9). Импульсы тока подавались генератором мощностью $P=70 \text{ кВт}$. Электрическое сопротивление каждого контактного узла электропластического волочения (ЭПВ) при натянутой алюминиевой проволоке не превышало значения $R=0,005 \text{ Ом}$.

Применялись следующие режимы волочения: 1 – обычное волочение без подвода тока; 2 – электропластическое волочение с импульсным током до $j=1000 \text{ А/мм}^2$, который пропускать через зону деформации, при полярности плюс источника тока до зоны деформации; 3 – тоже с полярностью минус источника тока до зоны деформации.

Структурные исследования проводились на приборе «Пост микроконтроля МК-3 (на базе микроскопа МИ-1) с использованием программ Autoscan Object (программа выделения и анализа объектов на растровых изображениях) и Autoscan Areas (программа выделения и анализа площадей на растровых изображениях). Образцы проходили специальное химическое травление. Рентгеноструктурные исследования проводились дифрактометром ДРОН-УМ-1 на кобальтовом излучении (трубка БСВ-23).

Электрическое сопротивление метровых образцов проволок измерялось по мостовой компенсационной схеме на УПИП-60М, а удельное электросопротивление рассчитывалось по усредненному диаметру проволоки. Механические свойства – разрывное усилие и относительное удлинение измерялись на разрывной машине РМУ – 0,05 с точностью 1% (относительное удлинение определялось на базе 200 мм).

При волочении проволоки, одним из видов пластической деформации металлов, в очаге деформации – волоке – происходит генерирование дефектов в металл со скоростью деформации, связанной со скоростью волочения и степенью деформации проволоки в волоке. В зависимости от полярности тока электроны движутся в направлении деформации или в противоположенную сторону. В случае совпадения направления движения электронов с составляющей деформации (режим 3) электроны способствуют движению дефектов в том же направлении. В противоположенном случае (режим 2) электроны затормаживают движение дефектов, или действуют только термически.

Исследования по параметру длина зерна (рисунок 1) показали, что наибольшему деформационному влиянию подвержены образцы с направлением тока от плюса к минусу.

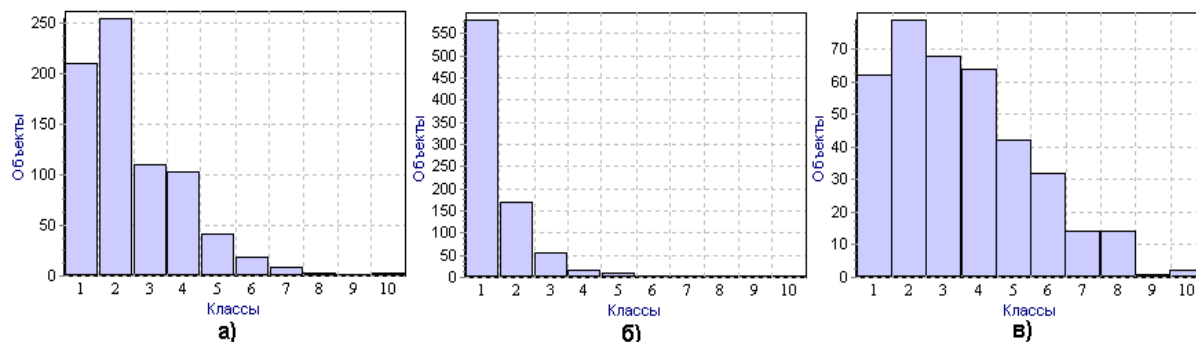


Рисунок 1 – Гистограммы распределения зерен по длине:
 а) без тока; б) с током от плюса к минусу; в) с током от минуса к плюсу

Расчеты по параметру минимальный радиус зерна (рисунок 2) показали что, наиболее мелкозернистую структуру имеют образцы с направлением тока от плюса к минусу.

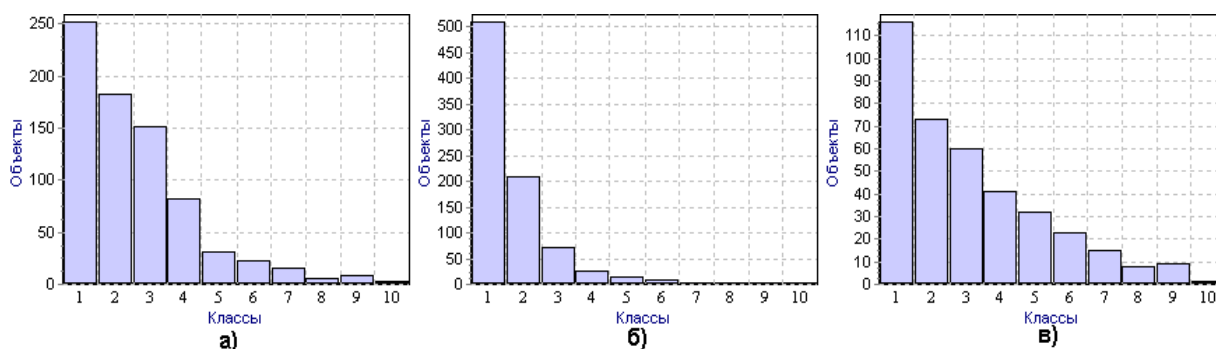


Рисунок 2 – Гистограммы распределения зерен по минимальному радиусу:
 а) без тока; б) с током от плюса к минусу; в) с током от минуса к плюсу

По мере нарастания деформации происходит дробление зерен с уменьшением фрагментации, также увеличивается разориентация зерен, формируются размытые текстурные максимумы, характерные для мелких зерен и блоков. Импульс электрического тока, проходящий через деформационное поле проволоки во время волочения, приводит к повышению пластичности исследуемых образцов, зерна в большей степени деформируются и приобретают неравноосную форму. Деформированные зерна располагаются своим минимальным сечением параллельно плоскости шлифа. При этом растет степень совершенства аксиальной текстуры алюминиевой проволоки.

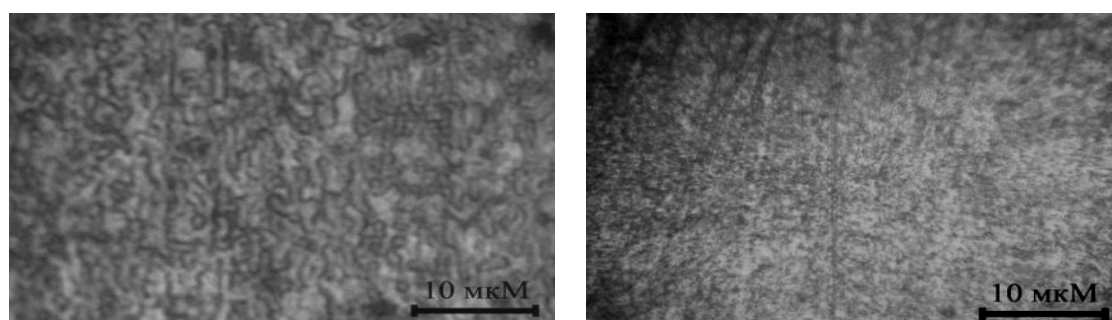
Таким образом, электропластическая деформация изменяет внутреннюю структуру деформируемых материалов. По результатам рентгеноструктурных исследований можно сделать вывод, что деформация в режиме электропластического волочения дает более равновесную структуру, чем обычное волочение. При деформации полярностью плюс источника тока до зоны деформации происходит более существенное измельчение структуры, и деформация осуществляется при больших микроискажениях.

Микроискажения в поперечных шлифах проволок, протянутых при направлении тока от плюса к минусу составляют $0,74 \cdot 10^{-4}$, при направлении тока от минуса к плюсу $1,34 \cdot 10^{-4}$, деформация проволок по режиму от плюса к минусу дает меньшее искажение в проволоке, чем при направлении тока от минуса к плюсу, что хорошо согласуется с теоретическими представлениями теории электропластичности.

Размеры областей когерентного рассеяния максимальны у образцов, деформированных при токе от минуса к плюсу, минимальны при деформации от плюса к минусу,

при отсутствии тока имеют промежуточные значения. Таким образом, можно сделать вывод, что деформация по режиму от минуса к плюсу дает более равновесную структуру, чем деформация без тока, деформация по режиму от плюса к минусу – наиболее искаженную структуру.

На микрофотографиях приведены изображения продольных шлифов образцов алюминиевой проволоки (рисунок 3), прошедшей обычное волочение (а) и электропластическое волочение с током полярностью плюс источника тока до зоны деформации (б). Из анализа фотографий видно, что под влиянием тока большой плотности происходит измельчение микроструктуры шлифа. Размеры зерен алюминиевой проволоки деформированной без тока на много больше, чем с током, что свидетельствует о достаточно высоком уровне остаточных напряжений. Показано, что измельчения зерен тем выше, чем больше плотность тока.



а) без тока; б) с импульсом тока 1000 А/мм^2 , длительностью 10^{-4} с .

Рисунок 3 – Микроструктура деформированной волочением алюминиевой проволоки

Важной механической характеристикой при волочении является истинное сужение $L_i = d_o/d_n$, где d_o – начальный диаметр проволоки, d_n – диаметр проволоки после n -перегиба. Зависимость числа перегибов n и временного сопротивления G от истинного сужения представлены на рисунке 4. Изучение зависимости числа перегибов n от истинного сужения показало, что наложение импульсного тока на зону деформации во время электропластического волочения деформационного алюминия приводит к увеличению числа перегибов. С ростом глубины проработки током материала, т.е. с уменьшением диаметра проволоки, эффект возрастает и наиболее выражен при полярности плюс источника тока до зоны деформации.

Этот вывод подтверждает и зависимость временного сопротивления G от истинного сужения L_i . Как видно из анализа графиков, при электропластической деформации на последнем этапе волочения L_i более чем в 2 раза меньше чем без тока.

Таким образом, наложение импульсного тока на зону деформации во время электропластического волочения приводит к изменению деформационных процессов и, как следствие, влияет на механические характеристики алюминиевой проволоки после деформации.

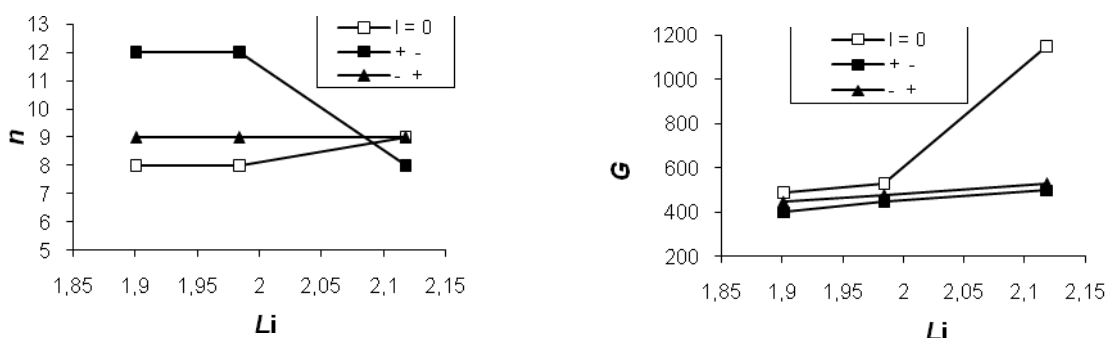


Рисунок 4 – Зависимость числа перегибов n и временного сопротивления G от истинного сужения L_i

Кроме этого, в сторону улучшения меняются и физические характеристики, например, уменьшается удельное сопротивление (рисунок 5). Эффект растет с увеличением суммарной степени деформации алюминиевой проволоки. Снижение удельного электрического сопротивления после многократного электропластического волочения имеет важное практическое значение, в производстве кабелей различной номенклатуры, так как это приводит к снижению рассеиваемой мощности сигнала, передаваемой по кабелю. Использование электротехнических кабелей меньшего сечения с улучшенными служебными характеристиками существенно снижает металлоемкость изделия.

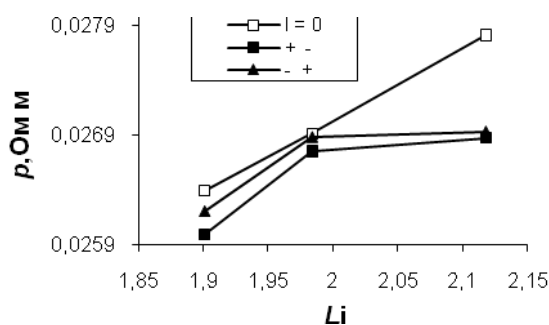


Рисунок 5 – Зависимость удельного сопротивления ρ от истинного сужения L_i

Изменение внутренней структуры материала после электропластической деформации влияет на физико-механические характеристики изделия. Увеличивается относительное удлинение, число перегибов, незначительно падает временное сопротивление. Электропластическое волочение приводит к уменьшению удельного сопротивления, что открывает определенные возможности в упрощении процесса изготовления алюминиевой проволоки с улучшенными служебными характеристиками путем замены обычного волочения электропластическим с исключением из технологического цикла операций энергозатратного отжига. Кроме этого, предложенная технология волочения по сравнению с обычной снижает усилия деформации. Этот эффект не только приводит к снижению энергетических затрат, но и повышает ресурс стана, в том числе износостойкость деформационных деталей волок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спицын, В.И. Электропластическая деформация металлов. // В.И. Спицын, О.А. Троицкий. – М. : Наука, 1985. – 160 с.
2. Баранов, Ю.В. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы // Ю.В. Баранов [и др.] – М. : МГИУ, 2001. – 844 с.
3. Савенко, В.С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий / В.С. Савенко. – Минск : БГУ, 2003. – 200 с.
4. Савенко, В.С. Преимущества электропластической прокатки (ЭПП) и электропластического волочения (ЭПВ) золота серебра меди и стали, а также вольфрама, молибдена и ниобия / В.С. Савенко [и др.] // Современные технологии в области производства и обработки цветных металлов : мат. междунар. науч.-практ. конф. – М. : ИМАШ РАН, 2006.
5. Savenko, V.S. Influence of electroplastic deformation on physicomachanical characteristics of deformation aluminum // First Russia-China Joint Symposium on the electroplasticity effect in metals Shenzhen, China, May 31 – June 4, 2007. – S. 218.
6. Савенко, В.С. Влияние электропластического волочения на физико-механические характеристики деформационного алюминия / В.С. Савенко, О.А. Троицкий // XVII Петербургские чтения по проблемам прочности, посвященные 90-летию со дня рождения проф. А.Н. Орлова : тез. докл. междунар. науч.-технич. конф. – ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН. – 2007. – С. 64. СПб.

V.S. Savenko, S.D. Shavrey. Aluminum Deformation Modification under Pulsed Electric Current

Processing of metals by pressure has wide application in industry and is based on use characteristic for metals property of plasticity. Plasticity of material is one of the major characteristics at manufacturing wires from copper, aluminum, tungsten.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.09.2012

УДК 524.3-735+535.3+537.6

А.И. Серый**О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ РЕЗОНАНСА**

В рамках квантовой электродинамики в древесном приближении получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости линейной поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов. Учтена конечная ширина резонанса на промежуточном виртуальном уровне Ландау, произведено усреднение по импульсам электронов в приближении нулевой температуры.

Введение

Исследования в данной работе проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова и актуальны прежде всего для астрофизики. К примеру, степень линейной поляризации теплового излучения нейтронных звезд достигает 20–50% [1, с. 1017], а для плоскости линейной поляризации фотона (как суперпозиции 2 циркулярных) при определенных условиях возможно вращение (не фарадеевское). Исследования начаты в [2, с. 43–48], где в рамках подхода, примененного в [3, с. 319–325], в древесном приближении получена зависимость угла комптоновского поворота плоскости поляризации фотона на единицу пройденного расстояния в полностью поляризованном по спине электронном газе ($p_{0e} = 1$) от частоты фотона ω , индукции магнитного поля B , концентрации электронов n_e и угла β между волновым вектором фотона \vec{k} и силовыми линиями магнитного поля. При нахождении $d\varphi/dx$ рассматриваются случаи параллельных ($\uparrow\uparrow$) и антипараллельных ($\uparrow\downarrow$) спинов фотона и электрона. Результаты для слабых магнитных полей (когда 1-й порядок является малой поправкой по отношению ко 2-му – таблица 1) подтверждены экспериментально, вопрос о проверке последнего случая (который нами исследуется и где все наоборот) остается открытым.

Таблица 1 – Комптоновское вращение в разных порядках теории возмущений

Порядок		1	2
для $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ берется		разность амплитуд $A_{\uparrow\uparrow}$ и $A_{\uparrow\downarrow}$	разность сечений
величина амплитуд		$\forall B$ в 1-м приближении больше, чем во 2-м	
$\frac{d\varphi}{dx}$	$B = 0$	$= 0 (A_{\uparrow\uparrow} \approx A_{\uparrow\downarrow})$ [4, с. 92]	$\neq 0 (A_{\uparrow\uparrow} \neq A_{\uparrow\downarrow})$ [4, с. 92]
	B в лабораториях	в 1-м порядке по-прежнему меньше, чем во 2-м	
	B в астрофизике	в 1-м порядке уже больше, чем во 2-м	

Исходные соотношения

Запишем полученные формулы с уточнениями согласно [3, с. 321, 322] (m_e – масса электрона, p_z – его импульс вдоль \vec{B} , ε_0 – энергия электрона в основном состоянии; e – элементарный электрический заряд, μ_B – магнетон Бора, $\alpha = e^2/(\hbar c)$):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(\pi\hbar c)^2 \alpha n_e \cos \beta}{\hbar \omega (\varepsilon_0 + \hbar \omega)} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{n-1} (\Xi_n(g) - \Xi_n(f)), \quad \varepsilon_0 = (m_e^2 c^4 + p_z^2 c^2)^{1/2}, \quad (1)$$

$$\phi = \frac{\hbar\omega^2 \sin^2 \beta}{cBe}, \quad \Xi_n(\lambda) = \frac{c\lambda_0\varepsilon_0 - \lambda_3 p_z c^2 - m_e^2 c^4}{c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_{n\lambda}^2 - i \cdot 0}, \quad \varepsilon_{n\lambda}^2 = m_e^2 c^4 + 2ne\hbar Bc + \lambda_3^2 c^2, \quad (2)$$

$$p_{0e} = 1 \Rightarrow 2^{2/3} m_e \mu_B B \geq \pi^{4/3} \hbar^2 n_e^{2/3}. \quad (3)$$

Формулы (1), (2) применимы, если верно (3) [5, с. 20]. Из (1), (2) нельзя определить, какая доля фотонов выполнит поставленную задачу, т.е. без поглощения, расщепления, рассеяния в стороны; $\varepsilon_{n\lambda}$ – энергия виртуального промежуточного электрона на n -м уровне Ландау. Для такого электрона в R -процессе (g) и S -процессе (f) [3, с. 320]:

$$cg_0 = \varepsilon_0 + \hbar\omega, \quad cg_3 = p_z c + \hbar\omega \cos \beta, \quad cf_0 = \varepsilon_0 - \hbar\omega, \quad cf_3 = p_z c - \hbar\omega \cos \beta. \quad (4)$$

Учет ширины резонансных уровней Ландау

При $\hbar\omega < \varepsilon_0$ полюса в $\Xi_n(f)$ нет [3, с. 322]. Рассмотрим фотоны с $\hbar\omega < m_e c^2$, чтобы это выполнялось для всех электронов (экспериментальная проверка при $B \approx 0$ проводилась также при $\hbar\omega < m_e c^2$ [4, с. 95]). При $\hbar\omega > \varepsilon_0$ резонанс в S -диаграмме есть, но ее смысл иной: внутренняя линия соответствует виртуальному позитрону. Для смещения полюсов с вещественной оси в $\Xi_n(g)$ учтем конечную ширину резонанса на n -м уровне Ландау и выделим вещественную часть путем замены [3, с. 323]

$$\varepsilon_{ng} \rightarrow \varepsilon_{ng} - i\Gamma_n / 2, \quad 3m_e c^2 \Gamma_n \approx 16(2n-1)\alpha(\mu_B B)^2, \quad (5)$$

$$Re(\Xi_n(g)) = (cg_0\varepsilon_0 - g_3 p_z c^2 - m_e^2 c^4) G (G^2 + \Gamma_n^2 \varepsilon_{ng}^2)^{-1}, \quad G = (c^2 g_0^2 - \varepsilon_{ng}^2 + \Gamma_n^2 / 4). \quad (6)$$

Расчеты показывают, что замена типа (5) для S -диаграммы не приводит к существенным отличиям при численных расчетах, по крайней мере, при $\hbar\omega < m_e c^2$.

Оценочные расчеты в случае нулевого импульса электрона

Для оценочных расчетов положим $p_z = 0$. При $\beta \neq 0$ остается ряд по зонам Ландау, сходящийся, по крайней мере, при $0 \leq \phi < 1$, что позволяет взять конечное число слагаемых при численных расчетах для заданной точности. При $\beta = 0$ в (1)

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{(\pi\hbar c)^2 \alpha n_e m_e c^2}{m_e c^2 + \hbar\omega} \left(\frac{\chi}{\chi^2 + \Gamma_1^2 (m_e^2 c^4 + 2Be\hbar c + \hbar^2 \omega^2)} - \frac{1}{2\hbar\omega m_e c^2 + 2Be\hbar c} \right),$$

$$\chi = 2\hbar\omega m_e c^2 - 2Be\hbar c + \Gamma_1^2 / 4. \quad (7)$$

Результаты представлены в таблице 3 и на рисунках 1 и 2, выводы – в таблице 2. В данном приближении $d\phi/dx \sim n_e$. Изменение знака $d\phi/dx$ при переходе через резонанс имеет аналогию с результатом для ядерной прецессии нейтронов [4, с. 54].

Таблица 2 – Что происходит при прочих равных условиях

С ростом	Резонансная частота $\omega_{рез}$	Максимальная величина вращения
β	уменьшается	вблизи резонанса по модулю уменьшается
B	увеличивается	

Таблица 3 – Величина угла поворота при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $p_z = 0$

$B, 10^{13} \text{ Гс}$		1-й пик		$d\varphi/dx = 0$	2-й пик	
		$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$d\varphi/dx, \text{ рад/см}$	$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$\hbar\omega, \text{ МэВ}$	$d\varphi/dx, \text{ рад/см}$
1	$\beta = 0$	0,11561	-715,9	0,11577	0,11592	713,6
	$\beta = 30^\circ$	0,11252	-609,8	0,11266	0,11281	607,5
4	$\beta = 0$	0,45916	-18,8	0,46308	0,46694	18,2
	$\beta = 30^\circ$	0,41683	-16,3	0,41995	0,42300	15,7

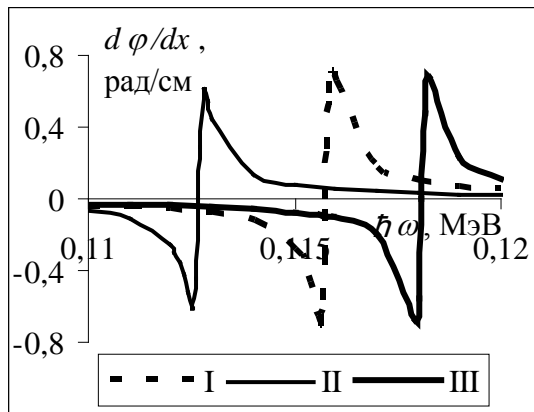


Рисунок 1 – Вращение при $n_e = 10^{19} \text{ см}^{-3}$.
 I. $\beta = 0, B = 10^{13} \text{ Гс}$. II. $\beta = 30^\circ, B = 10^{13} \text{ Гс}$.
 III. $\beta = 0, B = 1,02 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$.

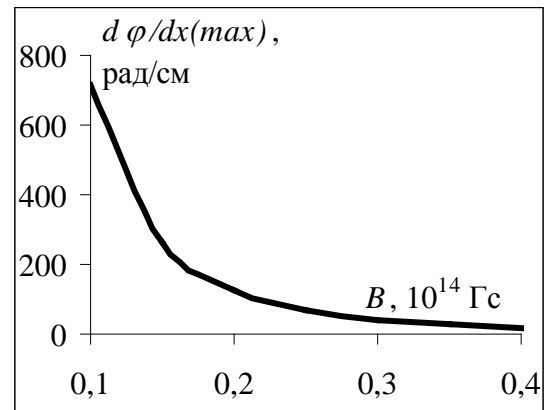


Рисунок 2 – Величина угла поворота
 вблизи резонанса в зависимости от B
 ($p_z = 0, n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}, \beta = 0$)

Согласно (1), (2), (5), резонансы при $n > 1$ ($\beta \neq 0$) более низкие и широкие.

К вопросу об экспериментальной проверке формул

Экспериментальная проверка для случая $B = 0$ осуществлялась на намагниченном до насыщения железе, где поляризация электронов была $p_{0e} \approx 0,0785$ [4, с. 95] (в реальности может быть $p_{0e} \sim 0,1$ [4, с. 90]). При этом для железа $\rho = 7,87 \text{ г/см}^3$, $Z = 26$, $A = 55,85$. Учитывая, что $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, найдем концентрацию электронов в железе:

$$n_e^{Fe} = \rho Z / (A m_0) = 2,19 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-3}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3), получим, что электроны полностью поляризованы при $B > 3,72 \cdot 10^9 \text{ Гс}$, что превосходит поля, разрушающие кристаллическую решетку [6, с. 449]:

$$B_{am} = m_e^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,35 \cdot 10^9 \text{ Гс}. \quad (9)$$

Т.е. экспериментально проверить (7) сложно из-за невозможности: а) получения $B \sim 10^9 \text{ Гс}$ на Земле; б) существования железа в кристаллическом виде при $B \sim 10^9 \text{ Гс}$.

Из таблиц 2, 3 и рисунков 1, 2 следует, что даже при $n_e \ll n_e^{Fe}$ и B , характерных для нейтронных звезд, $d\varphi/dx$ превосходит данные эксперимента в слабых $B \sim 10^4 \text{ Гс}$ ($\sim 10^{-3} \text{ рад/см}$ [4, с. 95; 7, с. 375, 376; 8, р. 606–608; 9, р. 1081–1084]).

При $B = 10^6 \text{ Гс}$ максимальная n_e , удовлетворяющая (3), равна $4,24 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$,

что на 6 порядков меньше (8). Это достижимо в лаборатории, но при этом, согласно (7), $d\varphi/dx \sim 10^{-12}$ рад/см. При $n_e = n_e^{Fe}$ $d\varphi/dx$ не возрастет на 6 порядков (т.е. до 10^{-6} рад/см), т.к. степень поляризации p_{0e} , входящая в формулу для $d\varphi/dx$ в виде множителя [4, с. 90], мала. Оценим p_{0e} в пренебрежении квантованием Ландау [5, с. 16]:

$$\frac{4m_e c^2 \mu_B B}{(3\pi^2)^{2/3} (\hbar c)^2 n_e^{2/3}} = (1 + p_{0e})^{2/3} - (1 - p_{0e})^{2/3} \approx \frac{4}{3} p_{0e} \Rightarrow p_{0e} \sim B. \quad (10)$$

При $n_e = n_e^{Fe}$, 10^7 Гц $< B < 10^8$ Гц (максимально возможные импульсные поля в лабораториях) $0,0024 < p_{0e} < 0,024$, т.е. даже меньше приведенных выше значений, т.к. в (3), (10) предполагается, что у электронов парамагнетизм Паули [10, с. 550] преобладает над диамагнетизмом Ландау [11, с. 571], а ферромагнетизм не учитывается. В любом случае, $|d\varphi/dx| \ll 10^{-3}$ рад/см, и польза от земных экспериментов может быть лишь при очень высокой точности, позволяющей учесть соответствующие поправки.

Усреднение амплитуд по импульсам при нулевой температуре

Откажемся от приближения $p_z = 0$ и усредним (1) (с учетом (2), (4) – (6)) по p_z . Случай $\cos \beta = 0$ ($\beta = \pi/2$) не рассматриваем, т.к. при $\vec{k} \perp \vec{B}$, то $\vec{k} \perp \vec{p}_{0e}$, и тогда, согласно [4, с. 90], $d\varphi/dx = 0$.

Пусть $T = 0$ К, $\hbar\omega < m_e c^2$, и тогда для всех электронов $\hbar\omega < \varepsilon_0$. Согласно [12, с. 556], исходя из формулы для плотности числа состояний электрона (в единице объема) с проекцией импульса от p_z до $p_z + dp_z$ на направление \vec{B} , запишем общую формулу усреднения произвольной функции от p_z , переходя к безразмерной переменной:

$$\frac{dN_e}{V} = \frac{eB dp_z}{(2\pi\hbar)^2 c} \Rightarrow \langle \Omega(w) \rangle = \frac{(m_e c^2)^2 \mu_B B}{2\pi^2 (\hbar c)^3 n_e} \int_{-w_1}^{+w_1} \Omega(w) dw, \quad (11)$$

$$w = \frac{p_z}{m_e c}, \quad w_1 = \frac{p_{zmax}}{m_e c} = \frac{\pi^2 (\hbar c)^3 n_e}{(m_e c^2)^2 \mu_B B}. \quad (12)$$

Переписывая (1), (2), (4) через (12) и подставляя в (11), получим:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha m_e c \mu_B B \cos \beta}{4\hbar^2 \omega} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{n-1} (R_n - S_n), \quad (13)$$

$$R_n = \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{\Omega_1(w) \Omega_2(w) dw}{\Omega_3(w) \left(\Omega_1^2(w) + \frac{\Gamma_n^2}{\hbar^2 \omega^2} \left(1 + 4n \frac{\mu_B B}{m_e c^2} + \left(w + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \cos \beta \right)^2 \right) \right)}, \quad (14)$$

$$S_n = \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{dw}{\Omega_3(w)} - Q_n \int_{-w_1}^{+w_1} \frac{dw}{\Omega_3(w) (Q_n - \Omega_2(w))}, \quad (15)$$

$$Q_n = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \sin^2 \beta - 4n \frac{\mu_B B}{\hbar\omega}, \quad \Omega_1(w) = Q_n + \Omega_2(w) + \frac{\Gamma_n^2}{4\hbar\alpha m_e c^2},$$

$$\Omega_2(w) = 2\left(\sqrt{1+w^2} - w \cos \beta\right), \Omega_3(w) = \sqrt{1+w^2} + \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}. \quad (16)$$

Усреднение начнем с амплитуды S -процесса, т.к. из (14), (15) видно, что это математически проще. Рационализируя подынтегральное выражение в (15) путем замен $w = sht$ и $th(t/2) = y$ (согласно [13, с. 218]), получим ($\theta(\eta)$ – функция Хевисайда):

$$S_n = 2\text{arsh}(w_1) - \frac{4\hbar\omega}{\sqrt{m_e^2 c^4 - \hbar^2 \omega^2}} \text{arctg}\left(\frac{y_1}{\lambda}\right) - Q_n I_n, \quad (17)$$

$$I_n = \frac{m_e^2 c^4}{2(m_e c^2 - \hbar\omega)^2 \cos \beta} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}\right) \ln \left| \frac{1 - y_1 \cos \beta}{1 + y_1 \cos \beta} \right| - \frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\cos^2 \beta}{\lambda^2 \cos^2 \beta + 1} \ln \left| \frac{1 - y_1 \cos \beta}{1 + y_1 \cos \beta} \right| - \frac{2 \cos \beta}{\lambda (\lambda^2 \cos^2 \beta + 1)} \text{arctg}\left(\frac{y_1}{\lambda}\right) \right), Q_n = -2; \quad (18a)$$

$$I_n = \frac{4\hbar\omega m_e c^2}{(m_e c^2 - \hbar\omega)^2 (Q_n + 2)} \left(\gamma_{1n} \left(\frac{4p_n y_1}{v_n} + \ln \left| \frac{p_n + 2y_1}{p_n - 2y_1} \right| \right) - \frac{8\gamma_{2n} y_1}{v_n} + \frac{2\gamma_{3n}}{\lambda} \text{arctg}\left(\frac{y_1}{\lambda}\right) \right) +$$

$$+ \frac{16y_1 m_e c^2}{(m_e c^2 - \hbar\omega)(Q_n + 2)v_n}, Q_n \neq -2, \mu_n = 0; \quad (18b)$$

$$I_n = \left(\frac{8\hbar\omega \gamma_{3n}}{m_e c^2 \lambda} \text{arctg}\left(\frac{y_1}{\lambda}\right) + \frac{2\hbar\omega \gamma_{1n}}{m_e c^2} \ln \left| \frac{y_1^2 + p_n y_1 + q_n}{y_1^2 - p_n y_1 + q_n} \right| \right) \frac{m_e^2 c^4}{(m_e c^2 - \hbar\omega)^2 (Q_n + 2)} +$$

$$+ \left(\left(\text{arctg}\left(\frac{p_n + 2y_1}{\sqrt{|\mu_n|}}\right) - \text{arctg}\left(\frac{p_n - 2y_1}{\sqrt{|\mu_n|}}\right) \right) \theta(\mu_n) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2y_1 - \sqrt{|\mu_n|})^2 - p_n^2}{(2y_1 + \sqrt{|\mu_n|})^2 - p_n^2} \right| \theta(-\mu_n) \right) \times$$

$$\times \frac{4(2\gamma_{2n} - p_n \gamma_{1n}) m_e c^2 \hbar\omega - 4m_e c^2 (m_e c^2 - \hbar\omega)}{\sqrt{|\mu_n|} (m_e c^2 - \hbar\omega)^2 (Q_n + 2)}, Q_n \neq -2, \mu_n \neq 0; \quad (18b)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_e c^2 + \hbar\omega}{m_e c^2 - \hbar\omega}}, y_1 = \frac{w_1 + \sqrt{1+w_1^2} - 1}{w_1 + \sqrt{1+w_1^2} + 1}, p_n = -\frac{4 \cos \beta}{Q_n + 2}, q_n = \frac{2 - Q_n}{2 + Q_n}, \mu_n = 4q_n - p_n^2,$$

$$\gamma_{1n} = \frac{p_n}{\gamma_{4n}}, \gamma_{2n} = \frac{p_n^2}{\gamma_{4n}}, \gamma_{3n}, \gamma_{3n} = \frac{q_n - \lambda^2}{\gamma_{4n}}, \gamma_{4n} = (q_n - \lambda^2)^2 + p_n^2 \lambda^2, v_n = 4y_1^2 - p_n^2. \quad (19)$$

Рационализируя подынтегральное выражение для R -амплитуды в (14) так же, как и в (15), получим выражение с полиномом 4-й степени по y в знаменателе. Общий алгоритм решения уравнений 4-й степени весьма громоздкий (т.е. конечное выражение будет гораздо сложнее (17)–(19)), поэтому проще взять интеграл численно.

Подстановка численных результатов в (13) показывает, что вычисленная в итоге величина вращения не сильно отличается от данных Таблицы 3. При $B \sim 10^{10}$ Гс резонанс для $n = 1$ попадает в мягкую рентгеновскую область (около 0.7 кэВ), а в жесткой рентгеновской области $|d\varphi/dx| \sim 0.1 - 1$ рад/см при $n_e \sim 10^{24}$ см⁻³, что значительно больше экспериментальных данных во 2-м порядке при тех же концентрациях [4, с. 95].

К вопросу об использовании результатов в астрофизике

Т.к. фарадеевский угол поворота $d\varphi/dx$ зависит от частоты ω (преимущественно

венно оптический диапазон), индукции магнитного поля B , концентрации электронов n_e (в т.ч. в межзвездной и межгалактической среде), температуры T , то, измеряя положение плоскости (эллипса) поляризации на разных ω и оценивая B (по зеемановскому расщеплению [11, с. 77], гироспинным или степени поляризации излучения [6, с. 453], исходящего от объекта) и T (пирометрическими методами по разным характеристикам спектра [10, с. 589]), можно оценить n_e [14, с. 191–194].

При малых B (когда соответствующие методы измерения непригодны) остается 1 параметр (T). Тогда n_e можно определить точнее по комптоновскому вращению при разных ω (не рассматривая вопрос о естественной оптической активности в космосе). При этом берем слагаемое 2-го порядка теории возмущений, которое при малых B заметно превосходит 1-й порядок и не зависит от B . Методы рентгеновской астрономии позволяют делать подобные измерения [6, с. 340]. При этом важно, что: 1. При больших пространственных размерах излучающей области разные участки могут не коррелировать между собой по фазе, что может привести к деполяризации; наличие же корреляции должно свидетельствовать об упорядоченном магнитном поле [14, с. 191–194]. 2. При фарадеевском вращении электроны связанные, а при комптоновском – свободные. Несмотря на то, что в рентгеновском диапазоне почти все электроны могут считаться свободными, различие в оценках n_e может позволить оценить степень ионизации.

Ионизация может происходить и во внешних магнитных полях, разрушающих кристаллическую решетку [6, с. 449] $B > B_{am} = m_e^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,35 \cdot 10^9$ Гс. При таких B не наблюдаются даже квадратичный эффект Зеемана и эффект Пашена – Бака: спектры химических элементов искажаются до неузнаваемости, преобладает сплошной фон (с линейной или круговой поляризацией), что подтверждает преобладание свободных электронов (например, у некоторых белых карликов [15; 16, с. 185]). Это должно привести к резкому уменьшению роли фарадеевского вращения. При $B \sim 10^{13}$ Гс должно быть магнитное двупреломление вакуума при энергиях, когда невозможно рождение e^+e^- -пар [6, с. 703] при $B \leq B_{uv} = \sqrt{mc^2 (mc/\hbar)^3 / \alpha} \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс [6, с. 449]; здесь помимо комптоновского вращения существенно расщепление фотонов [17, с. 637–643]. Поэтому учет комптоновского вращения в 1-м порядке более надежен при $B \sim 10^{10}$ Гс.

Заключение

В древесном приближении получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости линейной поляризации фотонов в полностью поляризованном по спину электронном газе. Учтена конечная ширина резонанса на n -м уровне Ландау. Произведено усреднение по импульсам электронов при нулевой температуре. Показано, отличное от нуля вращение возникает уже в 1-м порядке теории возмущений и превосходит вращение во 2-м порядке при астрофизических магнитных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pavlov, G.G. Polarization of Thermal X-rays from Isolated Neutron Stars / G.G. Pavlov, V.E. Zavlin // The Astrophys. J. – 2000 February. – Vol 529, № 1. – P. 1011–1018.
2. Серый, А.И. О комптоновском вращении при движении фотонов под произвольным углом к линиям индукции магнитного поля / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 43–48.
3. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 117, вып. 2. – С. 319–325.

4. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
5. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 198 с.
6. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров; редкол.: Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1994. – Т. 4: Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. – 704 с.
7. Лобашев, В.М. Экспериментальное наблюдение вращения плоскости линейной поляризации γ -квантов в намагниченных ферромагнетиках / В.М. Лобашев [и др.]. // Письма в ЖЭТФ. – 1971. – Т. 14. – С. 373–376.
8. Lobashev, V.M. Rotation of the plane of polarization of γ quanta and leftright asymmetry of scattering by thick magnetized scatterers / V.M. Lobashev [et al.] // Sov. Phys. JETP. – 1975. – Vol. 41, № 4. – P. 606–609.
9. Bock, P. Observation of the Faraday Effect with 230 keV and 330 keV Photons / P. Bock, P. Luksch // Lett. Nuovo cimento. – 1972. – Vol. 2, № 21. – P. 1081–1084.
10. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров; редкол.: Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1992. – Т. 3: Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема. – 672 с.
11. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров; редкол.: Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1990. – Т. II: Добротность – Магнитооптика. – 703 с.
12. Ландау Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. III: Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 808 с.
13. Воднев, В.Т. Основные математические формулы : справочник / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высш. шк., 1995. – 380 с.
14. Железняков, В.В. Электромагнитные волны в космической плазме / В.В. Железняков. – М. : Наука, 1977. – 432 с.
15. www.arm.ac.uk/lectures/landstreet/slides/Lecture-1-intro-to-stellar-magnetism.pdf; www.arm.ac.uk/lectures/landstreet/slides/Lecture-2-atoms-in-magnetic-fields.pdf.
16. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. редкол.: Д.М. Алексеев [и др.]. // М. : Сов. энцикл., 1988. – Т. I: Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.
17. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.

A.I. Sery. On Compton Rotation in Magnetic Field with Regard to Resonance Width

In the framework of quantum electrodynamics in tree approximation a formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of linear polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons. The finite width of resonance on intermediate virtual Landau level is taken into account, averaging on the momenta of electrons is performed in zero temperature approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.10.2012

УДК 536.331

В.Р. Соболев, П.Н. Гоман

К ВОПРОСУ О ПАРАМЕТРАХ РАДИАЦИОННОГО НАГРЕВА ПО МЕТОДОЛОГИИ РЕГЛАМЕНТИРУЮЩИХ ДОКУМЕНТОВ

В работе проведен сравнительный анализ регламентированных техническими нормативными правовыми актами методов расчета радиационных потоков энергии от протяженных источников. Предписываемые выражения по определению углового коэффициента облученности сопоставляются с результатами строгого расчета от плоского теплового фронта при взаимной перпендикулярности плоскостей источника и облучаемой поверхности. Выявлены противоречивые данные в оценке теплового воздействия на горючий материал при использовании традиционных подходов, которые завышают значения потока энергии. Кроме практической ограниченности существующих методик рассмотрены технические аспекты вычислений в смысле их упрощения. Представлены рекомендации для прецизионного выявления пространственного распределения интенсивности потока от протяженного фронта пламени.

Введение

Оценка уровня облученности веществ и материалов радиационными потоками энергии при высокоинтенсивном нагреве протяженными источниками, в том числе и при пожарах, регламентируется документами, в которых представлены методики определения плотности лучистого потока в фиксированной точке в зависимости от расположения тепловыделяющего фронта и ориентации облучаемой области относительно него [1–4]. Сравнивая полученное значение потока с известной критической величиной, можно сделать вывод о степени опасности воздействия тепловой радиации при заданных условиях. В отношении существующих нормативных документов имеется ряд вопросов по корректности определения уровня радиационных потоков, создаваемых пространственными источниками. Основопологающим элементом методики является так называемый угловой коэффициент, который зависит от геометрических параметров задачи, включая размеры излучателя, положение облучаемого участка, их взаимную ориентацию.

Так, в техническом нормативном акте [1] приведено выражение по определению интенсивности теплового излучения при пожаре, но не конкретизируется форма факела пламени; представленное выражение для углового коэффициента постулируется как универсальное для всех типов фронта, что может внести значительные погрешности. Кроме того отсутствует возможность сканирования уровня облучения при смещении точки наблюдения вдоль источника, что весьма важно в ряде практических случаев. В другом документе [2] формирование лучистого потока от теплового излучателя представлено более детально, приведены выражения для расчета угловых коэффициентов, когда принимающая и излучающая поверхности параллельны, перпендикулярны и расположены под углом. Приведенная форма излучателя в виде плоскости позиционируется, как наиболее оптимальная, однако следует отметить, что представленный метод оценки весьма сложен для вычисления. С одной стороны, требуется разделение излучателя на составляющие фрагменты-прямоугольники, что приводит к дополнительным временным затратам при оценке эффективного углового коэффициента. С другой стороны, представленные методики расчета содержат непосредственные погрешности. В результате, возникает потребность в уточнении и согласовании существующих методов расчета угловых коэффициентов и определении наиболее оптимального способа выявления пространственного распределения интенсивности потока от протяженного фронта пламени.

В сообщении рекомендуемые для практических оценок выражения из нормативных документов сопоставлены с результатами более строгого расчета коэффициента

облученности от плоского теплового фронта при взаимной перпендикулярности плоскостей источника и облучаемой поверхности.

Результаты сравнения и их анализ

Для сопоставления приближенных выражений для коэффициента облученности по [1; 2] с данными строгого расчета [5] использовано выражение для геометрического коэффициента вида (1), которое сформулировано для частного случая взаимно перпендикулярной ориентации фронта и облучаемой площадки. Ситуация адекватна условиям воздействия плоского фронта пламени на напочвенную возгораемую среду.

$$F = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x_2}{L} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{L} - \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{x_2}{\sqrt{L^2 + h^2}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\sqrt{L^2 + h^2}} \right) \right]. \quad (1)$$

Как показывают результаты сопоставления коэффициента F , выявленного по [1], с расчетом (1), величины F в [1] превышают истинные значения для всего диапазона высот теплового фронта h . Коэффициент F имеет тенденцию быстрого роста даже при высоте излучателя 5 м, в то время как кривые 2 и 3 выходят на насыщение (рисунок 1). Выражение для F из [1] избыточно завышено, что приводит к необоснованному увеличению параметров противопожарных барьеров и, как следствие, излишнему отчуждению из оборота территорий, если речь идет о лесных угодьях. Полученные по техническому кодексу [2] результаты близки к данным расчета (1), особенно при высоте излучателя более 4 м. Однако на меньших высотах также наблюдаются завышенные оценки углового коэффициента с достигаемой разбежкой в 2,5 раза на расстоянии 1 м от фронта. Отношение результатов расчетов по [1] и [2] для высоты огня 5 м составляет 2,6 раза, что подтверждает тезис о несогласованности действующих подходов в оценке безопасных расстояний.

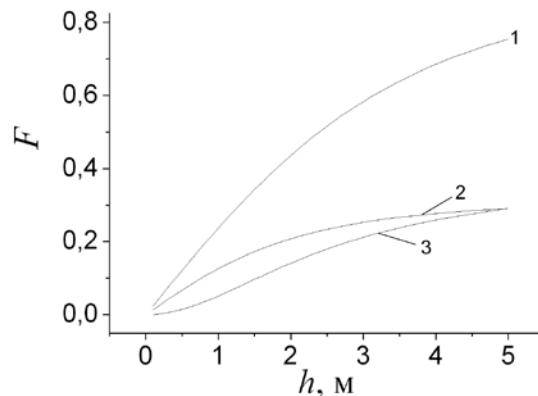


Рисунок 1 – Зависимость углового коэффициента облученности от высоты излучателя шириной 10 м в точке напротив середины основания фронта при удалении 2 м

1, 2, 3 – расчет по [1], [2], (1) соответственно

На рисунке 2 представлено влияние удаления точки наблюдения на уровень облученности. Как и ожидалось, с увеличением расстояния воздействие тепловой энергии постепенно снижается. Кривая 1, отражающая расчет по [1], как и ранее явно отличается от остальных в сторону увеличения F . Кривые 2 и 3 более близки во всем интервале расстояний с несколько выраженным отличием в середине диапазона при удаленности около 2–3 м. В частности, увеличение расстояния с 0,1 м до 5 м приводит к уменьше-

нию углового коэффициента в 8 раз по [2], в то время как по точным расчетам ослабление потока выражено сильнее, он уменьшается в 16 раз. Отношение коэффициента F для [2] и [1] к коэффициенту F из (1) в точке удаленной на 5 м от источника составляет 100 и 450 % соответственно. Расчеты по действующим стандартам между собой отличаются в 2,7 раза.

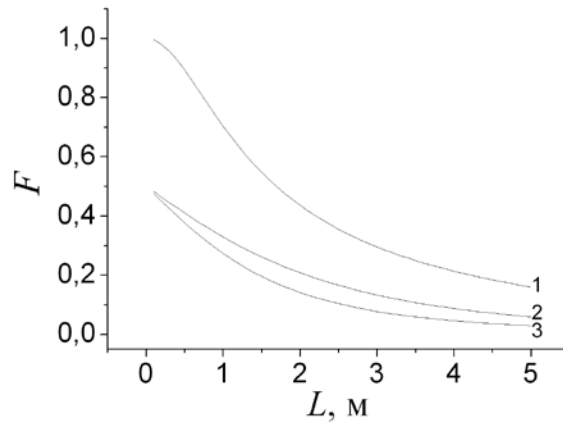


Рисунок 2 – Коэффициент F в функции расстояния до излучателя шириной 10 м напротив середины основания источника высотой 2 м
 1, 2, 3 – расчет по [1], [2], (1) соответственно

Как отмечалось ранее, приведенное в [1] выражение не позволяет оценить угловой коэффициент для точек, смещенных от середины основания излучателя. На рисунке 3 представлены значения коэффициента облученности в точке, лежащей напротив края теплового фронта шириной до 10 м. Как можно видеть, при незначительной ширине излучателя значения углового коэффициента близки. Однако с увеличением ширины сверх 2 м наблюдается тенденция к расхождению результатов расчета со значительным увеличением по [2] в то время, как точная кривая выходит на насыщение. В частности, для высоты фронта 2 м и удалении от источника равном 2 м отношение коэффициентов по существующему кодексу к точному расчету для края фронта шириной 10 м составляет 1,6 раза.

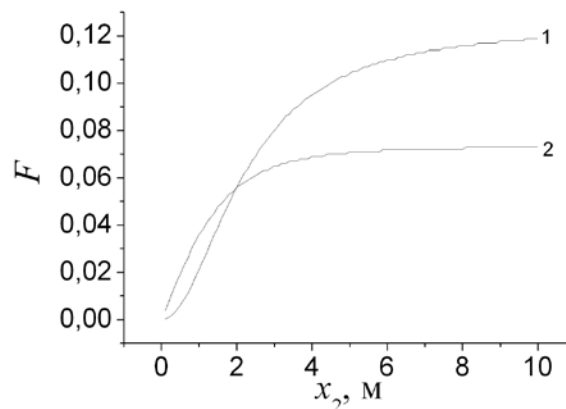


Рисунок 3 – Влияние ширины теплового фронта на коэффициент F на краю излучателя высотой 2 м при удаленности 2 м
 1, 2 – расчет по [2], (1) соответственно

Заклучение

Таким образом, действующие стандарты приводят в ряде случаев к противоречивым результатам. Более предпочтительным способом оценок является европейский подход [2], который при определенной сложности позволяет выявлять плотность потока по пространству. Однако приведенные в этом техническом кодексе рекомендации по расчету углового коэффициента облученности требуют корректировки в сторону уменьшения получаемых значений, а также облегчения самой процедуры вычислений, что будет благоприятствовать оперативности оценок. В этой связи видится целесообразным применение выражения (1) особенно для ситуаций, связанных с образованием тепловых фронтов высотой порядка 3 м, где различие данных по [2] и (1) ярче выражено, что отвечает наиболее распространенному режиму горения напочвенного материала леса, сельскохозяйственных угодий.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ, проект № Ф11М-005 «Аналитическая и численная аппроксимация пространственного распределения и воздействия потоков лучистой энергии для конечных по размерам протяженных тепловых источников, в том числе фронта пламени плоской и цилиндрической формы», а также в рамках ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы и технологии» (задание 1.14 «Разработка методов синтеза новых материалов», раздел «Выявление топологии лучистого потока и его воздействия на окружающую среду применительно к повышению эффективности тепловой зоны реактора при синтезе по методу твердых фаз») и ГПНИ «Научное обеспечение безопасности и защиты от чрезвычайных ситуаций. Снижение рисков чрезвычайных ситуаций», задание 2.1.04 «Разработать и создать макетный образец системы, методiku и программный комплекс для дистанционного обнаружения и мониторинга пожаров со стационарных пунктов и подвижных носителей».

Обозначения: F – угловой коэффициент облученности; h – высота излучающей поверхности, м; L – расстояние от теплового фронта до точки наблюдения, м; x_2, x_1 – координаты, ограничивающие ширину излучающей поверхности и задающие смещение точки наблюдения вдоль излучателя, м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Система стандартов пожарной безопасности. Пожарная безопасность технологических процессов. Методы оценки и анализа пожарной опасности. Общие требования: СТБ 11.05.03–2010. – Введ. 01.01.2011. – Минск : НИИ ПБиЧС МЧС Респ. Беларусь, 2010. – 76 с.
2. Еврокод 1. Воздействия на конструкции. Часть 1-2. Общие воздействия. Воздействия для определения огнестойкости. ТКП EN 1991-1-2–2009. – Введ. 10.12.2009. – Минск : РУП «Стройтехнорм», 2009. – 42 с.
3. Ограничение распространения пожара. Противопожарная защита населенных пунктов и территорий предприятий: ТКП 45–2.02–242–2011. – Введ. 26.08.2011. – Минск : ТКС 03 при РУП «Стройтехнорм», 2011. – 39 с.
4. Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность. Общие требования : ГОСТ 12.1.004–1991. – Введ. 01.07.1992. – М : МВД СССР, Минхимпром СССР, 1991. – 78 с.
5. Соболев, В.Р. О влиянии формы протяженного теплового источника на плотность лучистого потока энергии / В.Р. Соболев, П.Н. Гоман, В.И. Янчук //

Весті БДПУ. Сер. III. Фізика. Математика. Інфарматика. Біялогія. Географія. – 2010. – № 4. – С. 3–9.

V.R. Sobol, P.N. Goman. Parameters of Radiation Heating According to the Methodology of Regulatory Documents

A comparative analysis of the methods of calculation of radiation energy fluxes of extended sources on the basis of regulatory technical documents has been carried out. Prescribed expressions to determine the slope of the irradiance are compared with the results of a rigorous calculation of the heat of flat front with mutually perpendicular planes of source and irradiated surface. Conflicting data in the evaluation of heating effects on combustible material using traditional approaches have been revealed, which overestimate the values of energy flow. Besides practical limitation of existing techniques, technical aspects of computing in terms of their simplification are discussed. Recommendations are given for precise identification of the spatial distribution of flux intensity from an extended flame front.

Рукопис паступиў у рэдкалегію 10.07.2012

УДК 517.977

Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня

ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

В данной работе рассмотрена проблема устойчивости равновесных решений пространственной Ньютоновой круговой ограниченной задачи четырёх тел, сформулированной на основе известных треугольных решений Лагранжа задачи трёх тел. Использование возможностей системы компьютерной алгебры *Mathematica* позволило построить вещественное каноническое преобразование по Биркгофу, приводящее функцию Гамильтона к нормальной форме до четвёртого порядка включительно по возмущениям. Применяя теоремы Арнольда и Маркеева, доказали, что три положения равновесия устойчивы для большинства начальных условий, если массовые параметры системы принадлежат областям линейной устойчивости на плоскости параметров. Показано, что при выполнении резонансных соотношений $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ в системе наблюдается неустойчивость положений равновесия, в то время как остальные резонансы третьего и четвёртого порядков не влияют на устойчивость.

Введение

Задача многих тел, сформулированная ещё Ньютоном, по сегодняшний день остаётся одной из самых исследуемых проблем естествознания [1]. Проблема заключается в изучении движения конечного числа массивных материальных точек под действием сил взаимного притяжения, определяемого законом всемирного тяготения. Общее решение этой задачи до сих пор не найдено и, более того, доказано [1; 2], что уравнения движения задачи трёх и более тел не могут быть проинтегрированы в конечном виде. Одним из наиболее плодотворных подходов к решению проблемы многих тел является поиск точных частных решений уравнений движения, простейшими из которых являются положения равновесия, и исследование их устойчивости. Такой подход, идеи которого восходят к Пуанкаре и Ляпунову, хорошо себя зарекомендовал в случае ограниченной задачи трёх тел и успешно применяется в современных исследованиях [3–5], в том числе благодаря использованию современных систем компьютерной алгебры. Иногда решения типа «положения равновесия» называют «положениями относительного равновесия», чтобы подчеркнуть, что такие решения существуют во вращающейся системе координат, а не в абсолютной.

Ранее в [6] была исследована плоская круговая ограниченная задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Эта задача является простым и естественным обобщением плоской круговой ограниченной задачи трёх тел. Напомним, что в рамках рассматриваемой модели три материальные точки P_0, P_1, P_2 , обладающие массами m_0, m_1, m_2 , движутся равномерно по круговым кеплеровским орбитам вокруг центра масс системы, образуя равносторонний треугольник в любой момент времени. Такое движение трёх тел известно в литературе как треугольное решение Лагранжа задачи трёх тел. Представляет интерес исследование движения четвёртого тела P_3 , обладающего пренебрежимо малой массой, в гравитационном поле, генерируемом телами P_0, P_1, P_2 .

Стоит отметить, что представленная ограниченная задача четырёх тел может иметь важные приложения в небесной механике при описании движения астероидов, а также при планировании траекторий искусственных спутников в космическом пространстве, поскольку даже в Солнечной системе реализуются конфигурации, близкие к рассматриваемой. Наиболее характерным примером служит конфигурация образованная Солнцем, Юпитером и любым из астероидов из троянской или греческой группы астероидов. Поскольку массы астероидов различны, можно выделить наиболее массивный астероид и считать, что именно он вместе с Солнцем и Юпитером образует треугольную конфигурацию. Пренебрегая массами остальных астероидов, можно считать, что они не влияют на движение трёх массивных тел и движутся в гравитационном поле, генерируемым этими телами. Тогда проблема состоит в том, чтобы исследовать движение одного из «безмассовых» астероидов, что полностью соответствует представленной математической формулировке задачи четырёх тел. Решение этой задачи способствует развитию теории движения астероидов в окрестности треугольных точек Лагранжа, что несомненно представляет научную и практическую значимость исследований по данной тематике.

Данная работа является обобщением работы [6] и посвящена анализу устойчивости положений равновесий в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел, когда тело P_3 движется в окрестности положения равновесия в трех измерениях. Рассматриваемая модель ограниченной задачи четырёх тел описывается гамильтоновой системой дифференциальных уравнений шестого порядка. Отметим, что анализ такой системы предполагает проведение громоздких символьных преобразований и расчётов, которые могут быть выполнены только с привлечением компьютера и использованием современного математического программного обеспечения. Здесь все вычисления, преобразования и визуализация результатов были выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica* [7].

Во вращающейся системе координат, в которой тела P_0, P_1, P_2 фиксированы на плоскости Oxy в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$ соответственно, функция Гамильтона системы может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \\
 & + \frac{1}{1 + \mu_1 + \mu_2} \left(\mu_1 x + \frac{\mu_2}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_2 y - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + z^2}} \right)
 \end{aligned} \quad (1)$$

где p_x, p_y, p_z – импульсы, канонически сопряжённые координатам x, y, z , и массовые параметры задаются формулами:

$$\mu_1 = m_1 / m_0, \quad \mu_2 = m_2 / m_0.$$

Зная функцию Гамильтона, несложно выписать уравнения движения тела P_3 и показать, что все положения равновесия лежат в плоскости Oxy ($z = 0$). При этом

соответствующие равновесные положения определяются двумя алгебраическими уравнениями, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (y - x\sqrt{3})\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1\right) - \mu_1(y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} - 1\right) = 0 \\ 2y\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 1\right) + \\ + \mu_2(y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1/2)^2 + (y - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1\right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждое уравнение системы (2) определяет кривую в плоскости Oxy . Поэтому каждому решению системы уравнений (2) соответствует точка пересечения двух кривых (рисунок 1). Отметим, что для любого заданного $\mu_1 > 0$, жирная штриховая линия на рисунке 1, определяемая первым уравнением системы (1), фиксирована и всегда проходит через точки P_0, P_1, P_2 и $(1/2, -\sqrt{3}/2)$.

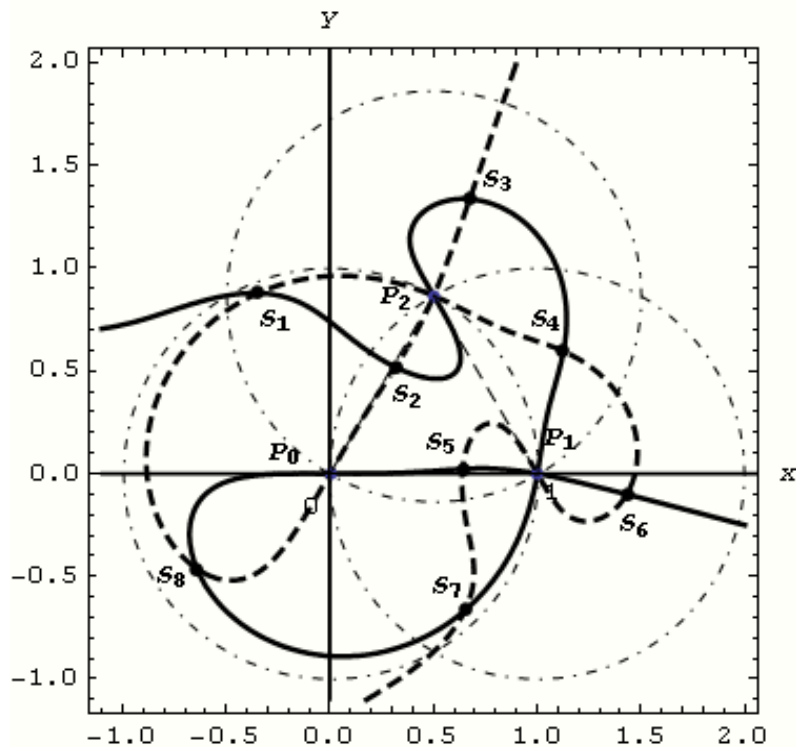


Рисунок 1 – Равновесные положения S_1, S_2, \dots, S_8 , определяемые системой (2) при $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.35$

В случае $\mu_2 = 0$ сплошная кривая, определяемая вторым уравнением системы (2), вырождается в прямую $y = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда, система (2) имеет три корня на оси Ox и два корня в точках P_2 и $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. Эти пять корней соответствуют точкам либрации L_1, L_2, L_3 и L_4, L_5 в задаче трёх тел [3; 8]. Увеличивая

значение μ_2 , легко заметить, что три равновесных точки, расположенные на оси Ox при $\mu_2 = 0$, а также точка $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, постепенно перемещаются в плоскости Oxy вдоль штриховой кривой (положения равновесия $S_5 - S_8$ на рисунке 1). Точка $x = 1/2, y = \sqrt{3}/2$ генерирует четыре новых равновесных положения (точки $S_1 - S_4$ на рисунке 1), каждое из которых по своей ветви штриховой кривой исходит из точки P_2 . Таким образом, графический анализ показывает, что при малых значениях μ_1, μ_2 имеется ровно восемь решений системы (2).

Проблема поиска равновесных решений рассматриваемой задачи подробно описана в работе [9], поэтому будем считать положения равновесия (x_0, y_0) тела P_3 найденными для любых значений параметров μ_1, μ_2 .

Анализ устойчивости положений равновесия в первом приближении

В окрестности равновесного решения (x_0, y_0) функция Гамильтона (1) может быть представлена в виде:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (3)$$

Первый член H_0 разложения функции Гамильтона по возмущениям является постоянной, которая не влияет на уравнения движения, и может быть отброшена. Член H_1 обнуляется в силу уравнений (2). Поэтому первый отличный от нуля член в разложении (3) является квадратичным и имеет вид:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - p_y x + p_x y + h_{20}x^2 + h_{11}xy + h_{02}y^2 + h_{2z}z^2, \quad (4)$$

где

$$h_{20} = \frac{-1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_1 \frac{2(x_0 - 1)^2 - y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{2(x_0 - 1/2)^2 - (y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right),$$

$$h_{11} = \frac{-3}{(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_1 \frac{(x_0 - 1)y_0}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0 - 1/2)(y_0 - \sqrt{3}/2)}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \right),$$

$$h_{02} = \frac{1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right)$$

$$+ \mu_1 \frac{(x_0 - 1)^2 - 2y_0^2}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0 - 1/2)^2 - 2(y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}} \Bigg)$$

$$h_{2z} = \frac{1}{2(1 + \mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_1}{((x_0 - 1)^2 + y_0^2)^{3/2}} + \frac{\mu_2}{((x_0 - 1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} \right).$$

Несложно показать, что линеаризованные уравнения движения, определённые квадратичным членом (4), образуют систему линейных дифференциальных уравнений шестого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристические показатели такой системы легко могут быть найдены и записаны в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sigma_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sigma_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm i \sigma_3, \quad (5)$$

где i – мнимая единица, а частоты $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ задаются выражениями

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{1 + h_{20} + h_{02} \pm \sqrt{4h_{20} + h_{20}^2 + h_{11}^2 + 4h_{02} - 2h_{20}h_{02} + h_{02}^2}},$$

$$\sigma_3 = \sqrt{2h_{2z}}. \quad (6)$$

Анализ частот (6) для всех восьми положений равновесия показал [6], что для точек S_2, S_3, S_5, S_6, S_8 имеется хотя бы одна частота с мнимой частью при любых значениях параметров μ_1, μ_2 . Это означает, что эти пять равновесных решений неустойчивы. Положения S_1, S_4, S_7 устойчивы в первом приближении, если параметры μ_1, μ_2 достаточно малы. Границы таких областей на плоскости $O\mu_1\mu_2$ построены и приведены в [6] вместе с некоторыми резонансными кривыми третьего и четвёртого порядков.

Нормализация функции Гамильтона

Наиболее распространённым методом изучения гамильтоновых систем нелинейных дифференциальных уравнений является метод нормальных форм Пуанкаре [5]. Следуя этому подходу, мы должны построить вещественное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан системы к нормальной форме по Биркгофу [10] и применить теоремы Арнольда и Мозера [11, 12]. На практике это означает последовательное приведение к нормальной форме членов $H_2, H_3, H_4 \dots$ в разложении (3).

Процедура нормализации квадратичной части H_2 описана в [3], а также в [13], где кроме подробного описания, приведены соответствующие алгоритмы и их реализация в системе *Mathematica*. Выполняя необходимые символьные вычисления, получаем H_2 в следующем виде:

$$H_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 (p_1^2 + q_1^2) - \sigma_2 (p_2^2 + q_2^2) + \sigma_3 (p_3^2 + q_3^2)). \quad (7)$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 и p_3, q_3 три пары новых канонически сопряжённых переменных.

По виду квадратичной формы (7) видно, что она не является знакоопределённой функцией, поэтому нельзя сделать вывод об устойчивости или неустойчивости положений равновесия по первому приближению в рамках теорем Ляпунова [14].

Форма третьего порядка H_3 после применения канонической замены переменных для H_2 принимает вид:

$$H_3 = \sum_{i+j+k+l+m+n=3} h_{ijklmn}^{(3)} q_1^i q_2^j q_3^k p_1^l p_2^m p_3^n, \quad (8)$$

где 31 коэффициент $h_{ijklmn}^{(3)}$ являются нулями, а остальные 25 коэффициентов довольно громоздки и поэтому здесь не выписаны.

Процедура построения нормализующего преобразования для членов H_3, H_4 во многом схожа с описанной на примере плоской ограниченной задачи четырёх тел в работе [6].

Снова необходимо построить такое каноническое преобразование, которое позволит обнулить член H_3 в разложении гамильтониана (3). Поскольку $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ представляют собой возмущения равновесных решений, то каноническое преобразование должно быть близким к тождественному. Поэтому производящую функцию $S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ будем искать в виде полинома степени не выше третьей:

$$S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = q_1 \tilde{p}_1 + q_2 \tilde{p}_2 + q_3 \tilde{p}_3 + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} s_{ijkl}^{(3)} q_1^i q_2^j q_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n. \quad (9)$$

Тогда связь между «старыми» $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ и «новыми» каноническими переменными $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_1}, & \tilde{q}_2 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_2}, \\ \tilde{q}_3 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial \tilde{p}_3}, & p_1 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_1}, \\ p_2 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_2}, & p_3 &= \frac{\partial S(q_1, q_2, q_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для преобразования H_3 требуется разрешить систему уравнений (10) относительно старых канонических переменных. Поскольку искомое каноническое преобразование является близким к тождественному, решение уравнений (10) можно искать в виде степенных рядов по новым переменным, то есть в виде:

$$\begin{aligned} q_1 &= \tilde{q}_1 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} a_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} a_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots, \\ q_2 &= \tilde{q}_2 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} b_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} b_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tilde{q}_3 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} c_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} c_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots, \quad (11) \\
p_1 &= \tilde{p}_1 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} d_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} d_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots, \\
p_2 &= \tilde{p}_2 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} e_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} e_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots, \\
p_3 &= \tilde{p}_3 + \sum_{i+j+k+l+m+n=2} f_{ijklmn}^{(2)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \sum_{i+j+k+l+m+n=3} f_{ijklmn}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n + \dots,
\end{aligned}$$

где коэффициенты $a_{ijklmn}^{(2)}, a_{ijklmn}^{(3)}, b_{ijklmn}^{(2)}, b_{ijklmn}^{(3)}, c_{ijklmn}^{(2)}, c_{ijklmn}^{(3)}, d_{ijklmn}^{(2)}, d_{ijklmn}^{(3)}, e_{ijklmn}^{(2)}, e_{ijklmn}^{(3)}, f_{ijklmn}^{(2)}, f_{ijklmn}^{(3)}$ подлежат определению. Для этого подставляем выражения (11) в (10), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в каждом уравнении (10) и получаем систему линейных уравнений, решение которой и даёт искомые коэффициенты $a_{ijklmn}^{(2)}, a_{ijklmn}^{(3)}, b_{ijklmn}^{(2)}, b_{ijklmn}^{(3)}, c_{ijklmn}^{(2)}, c_{ijklmn}^{(3)}, d_{ijklmn}^{(2)}, d_{ijklmn}^{(3)}, e_{ijklmn}^{(2)}, e_{ijklmn}^{(3)}, f_{ijklmn}^{(2)}, f_{ijklmn}^{(3)}$. Эти коэффициенты, как и система (10), зависят от пока неизвестных $s_{ijklmn}^{(3)}$. Замену переменных (11) с найденными коэффициентами $a_{ijklmn}^{(2)}, a_{ijklmn}^{(3)}, b_{ijklmn}^{(2)}, b_{ijklmn}^{(3)}, c_{ijklmn}^{(2)}, c_{ijklmn}^{(3)}, d_{ijklmn}^{(2)}, d_{ijklmn}^{(3)}, e_{ijklmn}^{(2)}, e_{ijklmn}^{(3)}, f_{ijklmn}^{(2)}, f_{ijklmn}^{(3)}$ обозначим как *SpatialChangePQ3*. Отметим, что для получения преобразованного выражения H_3 достаточно в разложении (11) ограничиться членами второго порядка по новым переменным, члены более высокого порядка следует учитывать при нормализации члена H_4 .

Применяя подстановку *SpatialChangePQ3* в (3) разложим гамильтониан в ряд Тейлора по степеням $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$. Легко проверить, что квадратичный член H_2 будет иметь вид (7), в то время как H_3 будет суммой 56 слагаемых вида

$$\tilde{H}_3 = \sum_{i+j+k+l+m+n=3} \tilde{h}_{ijkl}^{(3)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n,$$

где новые коэффициенты $\tilde{h}_{ijkl}^{(3)}$ выражаются через старые $h_{ijklmn}^{(3)}$ и неизвестные коэффициенты $s_{ijklmn}^{(3)}$ производящей функции (9). Анализ этих коэффициентов показывает, что члены H_3 преобразованием (11) обнуляются при условии

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 \neq 0, \quad (12)$$

что означает отсутствие резонанса третьего порядка. Следует отметить, что другие резонансы третьего порядка не влияют на приведение члена H_3 к нормальной форме, то есть к нулю.

Следующим шагом является нормализация членов гамильтониана четвёртого порядка H_4 при выполнении условия (12). Применим к члену H_4 последовательно замены переменных, приводящие члены H_2 и H_3 к нормальной форме. Далее аналогичным образом введём новую каноническую замену переменных и получим коэффициент \tilde{H}_4 в виде суммы 126 слагаемых:

$$\tilde{H}_4 = \sum_{i+j+k+l+m+n=4} \tilde{h}_{ijklmn}^{(4)} \tilde{q}_1^i \tilde{q}_2^j \tilde{q}_3^k \tilde{p}_1^l \tilde{p}_2^m \tilde{p}_3^n. \quad (13)$$

В этом случае не удастся приравнять все $\tilde{h}_{ijklmn}^{(4)}$ к нулю, и определённые члены в разложении (13) останутся. Но используя приём, описанный в [6], можно привести коэффициент \tilde{H}_4 в разложении (3) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & c_{200} (\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)^2 + c_{110} (\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + c_{101} (\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2) + \\ & + c_{020} (\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)^2 + c_{011} (\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)(\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2) + c_{002} (\tilde{p}_3^2 + \tilde{q}_3^2)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где выражения c_{200} , c_{020} , c_{002} , c_{110} , c_{011} , c_{101} определены формулами

$$\begin{aligned} c_{200} &= (3h_{000400}^{(4)} + h_{200200}^{(4)} + 3h_{400000}^{(4)}) / 2, \\ c_{011} &= h_{000022}^{(4)} + h_{002020}^{(4)} + h_{020002}^{(4)} + h_{022000}^{(4)}, \\ c_{002} &= (3h_{000004}^{(4)} + h_{002002}^{(4)} + 3h_{004000}^{(4)}) / 2, \\ c_{101} &= h_{000202}^{(4)} + h_{002200}^{(4)} + h_{200002}^{(4)} + h_{202000}^{(4)}, \\ c_{020} &= (3h_{000040}^{(4)} + h_{020020}^{(4)} + 3h_{040000}^{(4)}) / 2, \\ c_{110} &= h_{000220}^{(4)} + h_{020200}^{(4)} + h_{200020}^{(4)} + h_{220000}^{(4)}, \end{aligned}$$

а формулы $h_{ijklmn}^{(4)}$ суть коэффициенты члена H_4 после преобразования, построенного для H_3 . Стоит отметить, что в общем случае приведение члена \tilde{H}_4 к виду (14) возможно только при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно. Вычисления показывают, что в рассматриваемом случае имеет место три резонансных соотношения четвёртого порядка, а именно:

$$\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 - 3\sigma_2 = 0, \quad 2\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2 = 0.$$

При этом только в случае первого из указанных резонансов в выражении (14) остаются несколько дополнительных слагаемых, которые нельзя обнулить. Во втором и третьем случаях соответствующие слагаемые обнуляются, и эти два резонанса четвертого порядка не влияют на устойчивость положений равновесия.

Применяя ещё одно стандартное каноническое преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &\rightarrow \sqrt{2\tau_1} \sin(\varphi_1), \quad \tilde{p}_1 \rightarrow \sqrt{2\tau_1} \cos(\varphi_1), \\ \tilde{q}_2 &\rightarrow \sqrt{2\tau_2} \sin(\varphi_2), \quad \tilde{p}_2 \rightarrow \sqrt{2\tau_2} \cos(\varphi_2), \end{aligned}$$

окончательно перепишем функцию Гамильтона (3) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \sigma_1 \tau_1 - \sigma_2 \tau_2 + \sigma_3 \tau_3 + \\ & + c_{200} \tau_1^2 + c_{110} \tau_1 \tau_2 + c_{101} \tau_1 \tau_3 + c_{011} \tau_2 \tau_3 + c_{020} \tau_2^2 + c_{002} \tau_3^2, \end{aligned} \quad (15)$$

в котором отброшены члены порядка $O((\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^{5/2})$.

Основываясь на результатах В.И. Арнольда [15], докажем устойчивость для большинства начальных условий положений равновесия $q_i = 0, p_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$) при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно. Согласно теореме [15], если при $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} & \sigma_1 \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} & -\sigma_2 \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} & \sigma_3 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, - \quad (16)$$

то положение равновесия устойчиво для большинства начальных условий.

Дело в том, что раскрытие определителей (16) и подстановка входящих в них переменных не приведёт к упрощению определителей (16) в аналитическом виде, так как координаты положения равновесия могут быть вычислены только при фиксированных параметрах μ_1, μ_2 . Поэтому единственным способом проверить обращаются ли определители (16) в нуль является построение графиков и численное моделирование.

Заклучение

Выполнив необходимые вычисления и используя возможности графические возможности системы *Mathematica*, мы показали, что на плоскости $O\mu_1\mu_2$ определители D_3 и D_4 не обращаются в ноль одновременно для точек S_1, S_4, S_7 при любых значениях параметров μ_1, μ_2 из области их устойчивости в первом приближении. Тем самым доказана устойчивость для большинства начальных условий положений равновесия S_1, S_4, S_7 для всех значений μ_1, μ_2 , кроме, тех, которые удовлетворяют резонансам частот вида $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$. Перечисленные резонансные случаи подробно изучены в [6]. Остальные резонансные соотношения не влияют на устойчивость равновесных решений S_1, S_4, S_7 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалякин [и др.]; под общ. ред. Г.Н. Дубошина. – М. : Наука, 1976. – 864 с.
2. Пуанкаре, А. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре // Избр. тр. : в 3-х т. – М. : Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.; Т. 2. – С. 3–452.
3. Маркеев, А.П. Точки либрации небесной механике и космодинамике / А.П. Маркеев. – М. : Наука, 1978. – 312 с.

4. Gadomski, L. Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem / L. Gadomski, E.A. Grebenikov, A.N. Prokopenya // *Nonlinear oscillations*. – 2007. – Vol. 10, № 1. – P. 66–82.
5. Маркеев, А.П. Устойчивость гамильтоновых систем / А.П. Маркеев // *Нелинейная механика : сб. ст. / под ред. В.М. Матросова*. – М. : Физматлит, 2001. – С. 114–130.
6. Budzko, D.A. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // *Lecture Notes in Computer Science*. – Berlin, Heidelberg, 2011. – Vol. 6885 : *Computer Algebra in Scientific Computing 2011*. – P. 88–100.
7. Wolfram, S. *The Mathematica book* / S. Wolfram. – Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
8. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей – М. : Наука, 1982. – 656 с.
9. Будько, Д.А. Символьно-численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня // *Программирование*. – 2010. – № 2 (36). – С. 68–75.
10. Биркгоф, Дж.Д. *Динамические системы* / Дж.Д. Биркгоф. – Ижевск : Издат. дом «Удмуртский университет», 1999. – 408 с.
11. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // *Успехи математических наук*. – 1963. – Т. 18, № 6. – С. 91–192.
12. Мозер, Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости / Ю. Мозер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 448 с.
13. Будько, Д.А. Квадратичная нормализация гамильтониана в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, Ж.А. Вейль, А.Н. Прокопеня // *Вестник БрГТУ : Физика, математика, информатика*. – 2009. – Т. 59, № 5. – С. 82–85.
14. Ляпунов, А.М. *Общая задача об устойчивости движения* / А.М. Ляпунов; под ред. Г. Мюнтц. – Череповец : Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
15. Арнольд, В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы / В.И. Арнольд // *Доклады АН СССР*. – 1964. – Т. 156, № 1. – С. 9–12.

D.A. Budzko, A.N. Prokopenya. Relative Equilibrium Positions and Analysis of their Stability in Spatial Circular Restricted Four-Body Problem

In the present paper we consider the stability problem of equilibrium solutions of spatial Newtonian circular restricted four-body problem, formulated on the basis of famous triangular Lagrange's solutions. Using the computer algebra system Mathematica, we have constructed Bifkhoff's type canonical transformation, which reduce the Hamiltonian function to normal form up to the fourth order in perturbations. Applying Arnold's and Markeev's theorems, we have proved that three equilibrium positions are stable for the majority of initial conditions if mass parameters of the system belong to the domain of the solutions linear stability in the parameter space. It was shown that resonance conditions of the form $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ and $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ cause instability of equilibrium positions while other resonances of third and fourth orders do not influence on their stability.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 01.10.2012

УДК 517.988

Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова

КОМПОНЕНТЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КОМПОЗИЦИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА С СОСТАВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Эволюционный оператор второй кратности с обобщенными импульсными характеристиками находит широкое применение при решении задач нелинейных многомерных эволюционных систем с двумя входными и двумя выходными сигналами. В работе рассматривается аналитическое задание компонент высшего порядка композиции эволюционного оператора второй кратности с составным оператором слева и справа. Главной целью исследования является получение зависимости между ядрами оператора композиции и обобщенными ядрами композитруемых операторов. Доказаны теорема для четвертого компонента композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором и формула для задания любой компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором слева. Получены формулы, задающие компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором справа.

Введение

Будем рассматривать нелинейные эволюционные операторы второй кратности. Напомним [1], что нелинейный эволюционный оператор второй кратности имеет вид:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n_1+n_2>0} S_{n_1+n_2} (a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

где a_{n_1, n_2} – двухкомпонентная обобщенная вектор-функция с носителем на $[0; +\infty)^{n_1+n_2}$, x_1, x_2 – финитные слева бесконечно дифференцируемые функции на числовой оси, $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных порядка n_1+n_2 , $*$ – свертка, \otimes – операция тензорного произведения.

Отметим, что нелинейный эволюционный оператор второй кратности может быть записан в следующем виде:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}).$$

Оператор A_n , определяемый равенством

$$A_n x^n = S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}) \quad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right),$$

называется, ***n*-ым компонентом** оператора A .

Эволюционный оператор A второй кратности называется ***составным*** [1; 2], если он имеет вид:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix},$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – эволюционные операторы первой кратности:

$$A^{(1)} x_1 = \sum_{n \geq 1} S_n (a_n^{(1)} * x_1^{\otimes n}), \quad A^{(2)} x_2 = \sum_{n \geq 1} S_n (a_n^{(2)} * x_2^{\otimes n}).$$

Одной из важнейших задач теории эволюционных операторов является изучение их композиции. В данной статье мы рассмотрим оператор композиции $C = B \circ A$ двух

эволюционных операторов второй кратности в случаях, когда один из композируемых операторов является составным.

Композиция эволюционного оператора второй кратности с составным оператором

Рассмотрим сначала композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – произвольный эволюционный оператор второго порядка и A – составной оператор.

Первый компонент эволюционного оператора B определяется равенством

$$B_1 x = b_{1,0} * x_1 + b_{0,1} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * x_1 + \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} & b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а первый компонент составного оператора A – равенством

$$A_1 x = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый компонент оператора композиции C определяется равенством

$$C_1 x = B_1(A_1 x) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор сокращения переменных в дальнейших формулах будет опускаться, учитывая, что конечный результат является вектор-функция одной переменной t .

В процессе вычисления мы будем использовать лемму [3, с. 151, Лемма 2] о тензорном произведении свертки финитных слева обобщенных функций.

$$C_2 x^2 = B_1(A_2 x^2) + B_2(A_1 x)^2 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} + \\ + \left(\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_2) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right).$$

Опишем теперь третью компоненту и её слагаемые.

$$C_3 x^3 = B_1(A_3 x) + B_2(A_2 x, A_1 x) + B_2(A_1 x, A_2 x) + B_3(A_1 x)^3.$$

Первое слагаемое задается так:

$$B_1(A_3 x^3) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(1)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \\ b_{0,1}^{(2)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(2)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}
B_2(A_2x^2, A_1x) &= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + a_2^{(2)} \otimes a_1^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}. \\
B_2(A_1x, A_2x) &= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \otimes x_1 \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2)) + (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1)) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_{0,1}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Определим четвертое слагаемое третьего компонента:

$$\begin{aligned}
B_3(A_1x)^3 &= B_3(A_1x, A_1x, A_1x) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right]^{\otimes 3} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} *
\end{aligned}$$

$$* \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix}.$$

Определим следующую четвертую компоненту оператора композиции.

Теорема. Четвертая компонента композиции эволюционного оператора $C = B \circ A$ второй кратности с составным эволюционным оператором имеет вид:

$$C_4 x^4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8,$$

$$\text{где } u_1 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * (a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b_{1,0}^{(1)} * (a_4^{(2)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b_{0,1}^{(2)} * (a_4^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b_{1,0}^{(2)} * (a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} \otimes (a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ (a_3^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_5 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_6 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_7 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_8 = \begin{pmatrix} b_{0,0,0,4}^{(1)} & b_{0,0,1,3}^{(1)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,0,4}^{(2)} & b_{0,0,1,3}^{(2)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \\ \dots \\ (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольный x и обозначим $y_n = A_n x^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Рассмотрим оператор $C = B \circ A$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Cx = B(Ax) &= B_1(Ax) + B_2(Ax)^2 + B_3(Ax)^3 + \dots = B_1 y_1 + B_1 y_2 + B_1 y_3 + \dots + \\ &+ B_2(y_1, y_1) + B_2(y_1, y_2) + \dots + B_2(y_1, y_n) + B_2(y_2, y_1) + B_2(y_2, y_2) + \dots + B_2(y_2, y_n) + \\ &+ \dots + B_4(y_1, y_1, y_1, y_n) + B_4(y_1, y_1, y_2, y_1) + \dots + B_4(y_1, y_1, y_n, y_n) + \dots + B_4(y_4, y_1, y_1, y_1) + \\ &+ B_4(y_4, y_1, y_1, y_n) + \dots + B_4(y_4, y_n, y_n, y_n) + \dots + B_4(y_n, y_n, y_n, y_n) + \dots, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} C_4 x^4 &= B_1 y_4 + B_2(y_1, y_3) + B_2(y_2, y_2) + B_2(y_3, y_1) + \\ &+ B_3(y_2, y_1, y_1) + B_3(y_1, y_2, y_1) + B_3(y_1, y_1, y_2) + B_4(y_1, y_1, y_1, y_1), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} C_4 x^4 &= B_1(A_4 x^4) + B_2(A_1 x, A_3 x^3) + B_2(A_2 x^2)^2 + B_2(A_3 x^3, A_1 x) + \\ &+ B_3(A_2 x^2, A_1 x, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_2 x^2, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_1 x, A_2 x^2) + B_4(A_1 x)^4 = \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8. \end{aligned}$$

Найдем каждое слагаемое четвертой компоненты:

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1(A_4 x^4) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_4^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_4^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\otimes 4} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * (a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b_{1,0}^{(1)} * (a_4^{(2)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b_{0,1}^{(2)} * (a_4^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b_{1,0}^{(2)} * (a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}. \\ u_2 &= B_2(A_1 x, A_3 x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_3 = B_2(A_2x)^2 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = B_2(A_3x, A_1x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} \otimes (a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ (a_3^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_5 = B_3(A_2x, A_1x, A_1x) = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} *$$

$$\begin{pmatrix} (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) \\ \dots \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются $u_6 = B_3(A_1x, A_2x^2, A_1x)$ и $u_7 = B_3(A_1x, A_1x, A_2x^2)$:

$$u_6 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_7 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

Найдем последнее слагаемое u_8 компоненты:

$$u_8 = B_4(A_1x)^4 = \begin{pmatrix} b_{0,0,0,4}^{(1)} & b_{0,0,1,3}^{(1)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,0,4}^{(2)} & b_{0,0,1,3}^{(2)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \\ \dots \\ (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы вычислили все слагаемые четвертой компоненты C_4x^4 оператора композиции. Теорема доказана.

Композиция составного оператора с эволюционным оператором второй кратности

Рассмотрим теперь композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – составной оператор и A – произвольный эволюционный оператор второго порядка. Структурная схема такой композиции представлена на рисунке 1.

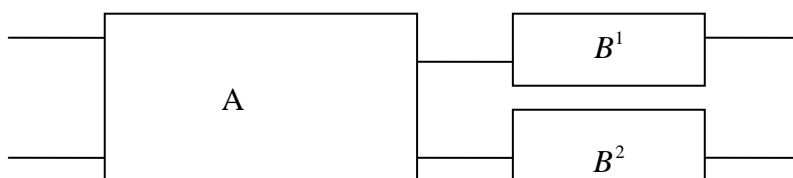


Рисунок 1 – Структурная схема композиции составного оператора с оператором второй кратности

Будем рассматривать элементы компонент в векторном виде:

$$z_1 = B^1(y_1) = \sum_{k=0}^n S_k(b_k^1 * y_1^{\otimes k});$$

$$z_2 = B^2(y_2) = \sum_{j=0}^n S_j(b_j^2 * y_2^{\otimes j});$$

$$B(y) = \begin{pmatrix} B^1(y_1) \\ B^2(y_2) \end{pmatrix};$$

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1x + C_2x + C_3x + \dots;$$

$$Ax = \sum_{n=n_1+n_2>0}^n S_{n_1+n_2}(a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})).$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_2=0 \\ j=0}} S_i \begin{pmatrix} a_i^{(1)} * x_1^{\otimes i} \\ a_i^{(2)} * x_1^{\otimes i} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_1=0 \\ i=0}} S_j \begin{pmatrix} a_j^{(1)} * x_2^{\otimes j} \\ a_j^{(2)} * x_2^{\otimes j} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_n \begin{pmatrix} a_{i,n-1}^{(1)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes(n-i)}) \\ a_{i,n-1}^{(2)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes(n-1)}) \end{pmatrix}.$$

Определим первые компоненты композиции.

Выделим первую и вторую однородные операторные компоненты оператора второй кратности:

$$A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,0}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{1,0}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1^{\otimes(2,0)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1^{\otimes(2,0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_2^{\otimes(0,2)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_2^{\otimes(0,2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} * x_1^{\otimes(1,1)} \\ a_{1,1}^{(2)} * x_2^{\otimes(1,1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{\otimes 2} \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

где $x^{(2,0)}(t_1, t_2) = x_1(t_1) \cdot x_1(t_2)$, $x^{(0,2)}(t_1, t_2) = x_2(t_1) \cdot x_2(t_2)$, $x^{(1,1)}(t_1, t_2) = x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)$,

$$S_2 \begin{pmatrix} f^{(1)}(t_1, t_2) \\ f^{(2)}(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)}(t, t) \\ f^{(2)}(t, t) \end{pmatrix}, S_2(u * v)(t) = \langle u(s_1, s_2), v(t - s_1, t - s_2) \rangle.$$

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1x + C_2x + C_3x + \dots$$

$$Cx = \begin{pmatrix} B_1^1(A_1(x)) + B_1^1(A_2(x)) + \dots + B_1^1(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + B_2^1(A_1(x)) + B_2^1(A_2(x)) + \dots + B_2^1(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + \\ B_1^2(A_1(x)) + B_1^2(A_2(x)) + B_1^2(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + B_2^2(A_1(x)) + B_2^2(A_2(x)) + \dots + B_2^2(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + \end{pmatrix}$$

Тогда найдем первую компоненту композиции

$$C_1x = B_1(A_1x); C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} * x_1 + b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} * x_1 + b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2.$$

Итак, первую компоненту можно записать в виде:

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) + b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) + b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2.$$

Тогда первая компонента оператора композиции описывается аналитически следующими зависимостями:

$$C_1^1 x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) (a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2 x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) (a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2.$$

Рассмотрим вторую компоненту:

$$C_2 x = B_2(A_1 x, A_1 x) + A_2(B_1 x, B_1 x);$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \\ a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать строки матриц как элементы компоненты. Тогда справедливы следующие формулы:

$$C_2^1 x = b_{0,2}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$

$$+ b_{0,1}^{(1)} * b_{0,1}^{(1)} * (a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2);$$

$$C_2^1 x = \int_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_2) ((a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_2) ((a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{0,2}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) x_1(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{1,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) x_2(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{2,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2) x_2(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_2^2 x = b_{2,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$

$$+ b_{1,0}^{(2)} * b_{1,0}^{(2)} * (a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2);$$

$$C_2^2 x = \int_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_2) ((a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_2) ((a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t_1 - s_1 - s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t_1 - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{0,2}^{(2)}(s_1) x_1(t_1 - s_1 - s_2) x_1(t_2 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{1,1}^{(2)}(s_1) x_1(t_1 - s_1 - s_2) x_2(t_1 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{2,0}^{(2)}(s_1) x_2(t_1 - s_1 - s_2) x_2(t_2 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2.
\end{aligned}$$

Выше изложенные рассуждения позволяют описать структуру компонент композиции составного оператора с эволюционным оператором второй кратности.

Заключение

В статье рассмотрена задача определения обобщенных импульсных характеристик композиции двух эволюционных операторов второй кратности, один из которых является составным оператором. Полученные результаты найдут применение в теории нелинейных эволюционных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вувуникян, Ю.М. Составные эволюционные операторы второго порядка кратности / Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова // Известия Смоленского гос. ун-та. – 2012. – № 2 (18). – С. 429–440.
2. Трифонова, И.В. Композиция оператора второй кратности с составным эволюционным оператором / И.В. Трифонова // Веснік Гродзен. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 3 (118). – С. 19–30
3. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками : монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно : ГрГУ, 2007. – 224 с.

Y.M. Vuvunikjan, I.V. Trifonova. Components of High Orders of Composition of the Evolution Operator and the Compound Operator

This article describes the nonlinear evolution operator of second multiplicity with two-component generalized vector functions with support on $[0; +\infty)^2$. The theorem for the fourth components of a composition the evolutionary operator with the compound operator is proved. The evolutionary operator of second multiplicity is used while studying the nonlinear multi-size evolution systems with two input and output signals. The received results will find application in the theory of nonlinear evolutionary systems.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.11.2012

УДК 517.5

И.В. Кальчук, А.О. Задорожный, Р.А. Маковий**ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ВЕЛИЧИН ОТКЛОНЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ОТ ФУНКЦИЙ С КЛАССА ГЁЛЬДЕРА**

При приближении функций класса Гельдера их интегралами Пуассона возникают асимптотические разложения, коэффициенты которых не представлены в явном виде. Этот вопрос решен с помощью дзета-функции Римана, что дает возможность находить точные значения констант Колмогорова – Никольского. Разработана прикладная программа, позволяющая вычислять константы заданного порядка малости.

Гармонический и бигармонический интеграл как метод суммирования рядов Фурье

Пусть $f(x)$ 2π -периодическая суммируема функция и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

ее ряд Фурье. Пусть также $\Lambda = \{\lambda_\rho(k)\}$ – множество функций натурального аргумента, зависящее от параметра $\rho \in E_\Lambda \subset R$, и при этом $\lambda_\rho(0) = 1$.

Каждой такой функции $f(x)$, исходя из ее разложения (1), поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2)$$

Если ряд (2) при каждом $\rho \in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, то обозначим ее через $U_\rho(f; x; \Lambda)$ и будем говорить, что множество $\Lambda = \{\lambda_\rho(k)\}$ задает метод построения операторов $U_\rho(f; x; \Lambda)$.

Подставляя в (2) значения коэффициентов a_k и b_k , находим

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) \cos kt \right) dt \neq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(\rho; t) dt, \quad (3)$$

где $K(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) \cos kt$ – ядро оператора $U_\rho(f; x; \Lambda)$.

Если в формуле (3) положить $\lambda_\rho(k) = \rho^k$, $0 \leq \rho < 1$, то получим

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_1(\rho; t) dt \neq P_\rho(f; x), \quad (4)$$

$$K_1(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1 - \rho^2}{2(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)},$$

а когда $\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k$, $0 \leq \rho < 1$, то

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_2(\rho; t) dt \neq B_\rho(f; x), \quad (5)$$

$$K_2(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^k \cos kt = \frac{(1 - \rho^2)^2 (1 - \rho \cos t)}{2(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)^2}.$$

Величины (4) и (5) принято называть гармоническим [1–4] и бигармоническим [5–8] интегралом Пуассона функции f соответственно.

Приближение функций класса Гёльдера

Пусть C – пространство 2π -периодических функций, норма в котором задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Классом Гёльдера порядка 1 принято называть класс функций $f \in C$, для которых выполняется условие

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h|.$$

Обозначают этот класс H^1 .

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; U_\rho(\Lambda))_C = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_\rho(f; x; \Lambda)\|_C,$$

где $\mathfrak{M} \subseteq C$ – заданный класс функций, $U_\rho(f; x; \Lambda)$ – операторы вида (3), будем называть, следуя А.И. Степанцу [9], задачей Колмогорова – Никольского. В нашем случае будем рассматривать две величины:

$$\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C \text{ и } \mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C,$$

которые соответствуют величинам отклонений гармонического и бигармонического интегралов Пуассона от функций из класса H^1 .

Если в явном виде найдена функция $g(\rho) = g(\mathfrak{M}, \rho)$ такая, что при $\rho \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; U_\rho(\Lambda))_C = g(\rho) + o(g(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова – Никольского для оператора $U_\rho(f; x; \Lambda)$ на классе \mathfrak{M} в метрике пространства C .

Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ называется асимптотическим разложением или асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-$, если для произвольного натурального N

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^N g_n(\rho) + o(g_N(\rho)), \quad \rho \rightarrow 1-$$

и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|).$$

Кратко это будем записывать следующим образом:

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Вопрос об исследовании аппроксимативных свойств методов приближения интегралами Пуассона был и остается актуален для многих математиков.

Так, например, Э.Л. Штарк в работе [2] установил, что

$$\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-,$$

$$\beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В работах [6] и [7] (независимо друг от друга) был получен следующий результат:

$$\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1-\rho) + \frac{2}{\pi} (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + \frac{1+2\ln 2}{\pi} (1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=3}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right) - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-1}}.$$

Асимптотическое разложение величины $\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C$ по степеням $\frac{1}{\delta}$ ($\delta = -\frac{1}{\ln \rho}$) найдено В.А. Баскаковым [3]:

$$\mathcal{E}(H^1; P_\delta)_C \cong \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} \left[\ln \pi + \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k+1}},$$
(6)

где под символом $(t)_{2\pi}$ понимают четное 2π -периодическое продолжение функции $\varphi(t) = t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Асимптотическое разложение, которое формулируется как в терминах $\frac{1}{\delta}$, так и в терминах $(1-\rho)$, установлено Т.И. Амановым и Л.П. Фалалеевым в работе [8], а именно при $\delta \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 1-$)

$$\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[2k \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt - \frac{1}{\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right) \left\{ \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt + \ln \delta + \ln \pi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}.$$
(7)

С полученных разложений (6) и (7) неизвестными оставались коэффициенты, где фигурирует 2π -периодическое продолжение функции $\varphi(t) = t$.

В работе найдены значения выражений $\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt$, а именно:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} \frac{2i\pi - t}{t^{2(k+1)}} dt + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{t - 2i\pi}{t^{2(k+1)}} dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} + \frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} \right) \Big|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} + \frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} \right) \Big|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k+1)\pi^{2k}} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{2}{(2i)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left[\frac{2}{(2i)^{2k}} - \frac{1}{(2i-1)^{2k}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся дзета-функцией Римана [10]

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} \quad (9)$$

и равенством (9.535.1) [10]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} = \zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k). \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{2k+1} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1+1) \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{2i-1}{(2i+1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} + \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right] + 1 \right) = \frac{1}{2k+1} \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} \right) = \\ &= \frac{2}{2k+1} (\zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{2k}} = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2i-1)^{2k}} - 1 \right) = \frac{1}{2k} (\zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k) - 1). \quad (12)$$

Используя (9), (10) и подставляя (11), (12) в (8), находим

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt &= \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}} \left(\zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k) - \frac{1}{2^{2k}} \zeta(2k) \right) + \\ &+ \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left(2 \cdot \frac{1}{2^{2k}} \zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k} \zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k} \zeta(2k) + 1 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}} \zeta(2k) [1 - 2^{-2k+1}] + \frac{2}{2k\pi^{2k}} \zeta(2k) [2^{-2k+1} - 1] + \frac{1}{2k\pi^{2k}} = \\
&= \frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) [1 - 2^{-2k+1}] \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k\pi^{2k}} = \\
&= \frac{1}{2k\pi^{2k}} - \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k(2k+1)}. \tag{13}
\end{aligned}$$

В случае $k=0$ находим

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} \frac{2i\pi - t}{t^2} dt + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{t - 2i\pi}{t^2} dt = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{2i\pi}{t} - \ln t \right) \Big|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\ln t + \frac{2i\pi}{t} \right) \Big|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{2i\pi}{2i\pi} + \frac{2i\pi}{(2i-1)\pi} - \ln(2i\pi) + \ln[(2i-1)\pi] + \ln[(2i+1)\pi] - \ln(2i\pi) + \frac{2i\pi}{(2i+1)\pi} - \frac{2i\pi}{2i\pi} \right) = \\
&= -2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2i}{2i-1} + \frac{2i}{2i+1} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \frac{(2i-1)(2i+1)}{2i \cdot 2i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(2i)^2} \right) = 1 + \ln \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2i)^2} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что (0.262.2) [10]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2} \right) = \frac{2}{\pi},$$

имеем

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt = 1 + \ln \frac{2}{\pi}. \tag{14}$$

При помощи (13) и (14) с (6) и (7) следует соответственно

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(H^1; P_{\rho})_C &\cong \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} [1 + \ln 2] \right\} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k(2k+1)} \frac{1}{\delta^{2k+1}}, \tag{15} \\
\mathcal{E}(H^1; B_{\rho})_C &\cong \frac{1 - \rho^2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} + \\
&+ \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1 - \rho^2}{\pi} \right) \left\{ 1 + \ln 2 + \ln \delta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где $\zeta(2k)$ – дзета-функция Римана определена по формуле (9).

Чтобы иметь возможность находить значения коэффициентов разложения величин

$\mathcal{E}(H^1; P_{\rho})_C$ и $\mathcal{E}(H^1; B_{\rho})_C$ по степеням $\frac{1}{\delta}$ была разработана прикладная программа.


```

    return result;
}
public static double CalcBiHarm(double alpha, int infiniteSmall)
{
    double result = 0;
    switch (infiniteSmall)
    {
        case 1:
            if (alpha == 1)
                result = (4 / Math.PI);
            else
                result = (1 - 2 * alpha / Math.PI) / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2);
            break;
        case 2:
            if (alpha == 1)
                result = (-2 / Math.PI) * (1 + Math.Log(2 * Math.E /
Math.Pow(Math.PI, 2))) + 2 / Math.PI * Math.Log((Math.Pow(Math.PI, 2) / (2 * Math.E)));
            else
                result = 4 / Math.PI * common_calc(alpha, 0);
            break;
        default:
            if (infiniteSmall % 2 == 0)
            {
                if ((infiniteSmall / 2) % 2 == 0)
                {
                    // четные
                    if (alpha == 1)
                    {
                        double IDiv2 = infiniteSmall / 2 ;
                        // result = (1/Math.PI)*Math.Pow(4*Math.E/infiniteSmall, infini-
teSmall/2)*(1/Math.Sqrt(Math.PI*infiniteSmall)) + (1/Math.PI)*summa2p(infiniteSmall) +
(2/Math.PI)*addition2(infiniteSmall);
                        result = 2 * Math.Pow(-1, IDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E / IDiv2),
IDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * IDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI + (1 /
Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) +(1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
                    }
                    else
                    {
                        result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 /
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
                    }
                }
                else // нечетные
                {
                    if (alpha == 1)
                    {
                        double IDiv2 = infiniteSmall / 2;
                        // result = (1 / Math.PI) * Math.Pow(4 * Math.E / infiniteSmall,
infiniteSmall / 2) * (1 / Math.Sqrt(Math.PI * infiniteSmall)) + (1 / Math.PI) * sum-
ma2p(infiniteSmall);
                    }
                }
            }
    }
}

```

```

        result = 2 * Math.Pow(-1, lDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E /
lDiv2), lDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI
+ (1 / Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) + (1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
    }
    else
    {
        result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 /
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
    }
}
}
else
{
    double lDiv2plus1 = infiniteSmall / 2 + 1;
    double comm_expr = Math.Pow(-1, lDiv2plus1) * Math.Pow((2 *
Math.E / lDiv2plus1), lDiv2plus1) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2plus1));
    if (alpha == 1)
    {
        result = 1 / Math.PI * comm_expr;
    }
    else
    {
        result = 1 / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2) * Math.Pow(-1, infi-
teSmall / 2 + 1) * Math.Pow((2 * Math.E / infiniteSmall / 2 + 1), infiniteSmall / 2 + 1) * (1 /
Math.Sqrt(2 * Math.PI * infiniteSmall / 2 + 1));
    }
}
break;
}
return result;
}
private static double zeta(double i)
{
    return math_fnc.Math.riemann_zeta(i);
}
// Функция подсчета для гармонического метода при alpha >= 3
private static double common_calc(double alpha, int k)
{
    double i2Kplus1minusAlpha = 2 * k + 1 - alpha;
    double zeta2K = zeta(2 * k);
    double zeta2Kplus1minusAlpha = zeta(i2Kplus1minusAlpha);
    double expr1 = (2-Math.Pow(2,2-
2*k))*zeta2K/((2*k+1)*Math.Pow(Math.PI,2*k));
    double expr2 = (2-Math.Pow(2,alpha-
2*k))*zeta2Kplus1minusAlpha/((2*k+1-alpha)*Math.Pow(Math.PI,2*k+1-alpha));
    // double expr1 = 2 / (2 * k + 1);
    // double expr2 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);
    // double expr3 = -1 * Math.Pow(2, -2 * k) * zeta2K - 2 * zeta2K -
Math.Pow(2, 1 - 2 * k) * zeta(2 * k + 1);
    // double expr4 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);

```

```

// double expr5 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * i2Kplus1minusAlpha);
// double expr6 = Math.Pow(2, 2 - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha - 2 - 4 *
zeta2Kplus1minusAlpha - Math.Pow(2, 1 + alpha - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha;
return expr1 * expr2;
}
private static double common_calc1 (int k)
{
double zeta2K = zeta(2 * k);
double expr1 = ((2-Math.Pow(2,2-2*k))/(Math.Pow(Math.PI,2*k)))*zeta2K*(-
1)/(2*k*(2*k+1));
return expr1;
}
private static double summa_common(int n, int k)
{
double nDiv2minus2k = (n / 2 - 2 * k);
return Math.Pow(-1, (n / 2 - k + 1)) * Math.Pow((2 * Math.E / nDiv2minus2k),
nDiv2minus2k) * (1 / Math.Sqrt((n - 4 * k) * Math.PI));
}
private static double summa_common20(int n, int k, double alpha)
{
return (-1)*summa_common(n, k) * common_calc(alpha, k);
}
private static double summa_common2(int k)
{
return common_calc1(k);
}
private static double summa2np(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n / 4); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
return summ;
}
private static double summa2p(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n/4-3/2); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
return summ;
}
private static double summa2p_sec(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n/4 - 2); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
}

```

```

    }
    // summ += summa_common2(n / 4);
    return summ;
}
private static double addition2(int n)
{
    double zetanNa2 = zeta(n/2);
    return ((Math.Pow(-1, n / 4 + 1)) / (n / 2 + 1) * Math.Pow(Math.PI, n / 2)) *
(Math.Pow(2, -n / 2) * zetanNa2 + 2 * zetanNa2 - Math.Pow(2, 1 - n / 2) * zetanNa2 + 1) - (4
/ (n * Math.Pow(Math.PI, n / 2))) * (1 + 2 * zetanNa2);
}
private static double summa20p(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4 - 2); k++)
    {
        summ += summa_common20(n, k, alpha);
    }
    summ += common_calc(alpha, n / 4);
    return summ;
}
private static double summa21p(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4 - 1); k++)
    {
        summ += 2*k * summa_common20(n, k, alpha);
    }
    summ += common_calc(alpha, n / 4);
    return summ;
}
private static double summa20np(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
    {
        summ += summa_common20(n, k, alpha);
    }
    return summ;
}
private static double summa21np(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
    {
        summ += 2 * k * summa_common20(n, k, alpha);
    }
    return summ;
}
}
}

```

}

Таким образом, мы получили возможность при заданном порядке малости на основании (15) и (16) вычислять константы Колмогорова – Никольского для асимптотических разложений величин $\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C$ и $\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.
2. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от их сингулярного интеграла Абея – Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
3. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абея – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – 17, № 2. – С.169–180.
4. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.
5. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
6. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
7. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.
8. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абея – Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики ; Алма-Ата, 1976. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
9. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

I.V. Kalchuk, A.O. Zadorozhnyi, R.O. Makovij. Exact Constants for the Poisson Integral Deviations Values from the Functions Class of Hölder

When approximating the functions from class H^1 there appear the asymptotic expansions, whose coefficients are not expressed in explicit form. This problem has been solved by the instrumentality of Riemann zeta-function, which gives the possibility to find the exact values of Kolmogorov-Nikolskiy constants. The program that allows us to find the constants of given infinitesimal order has been developed.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 01.06.2012

УДК 517.925[41+42]

И.Г. Кожух

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

Проводится качественное исследование динамики развития популяции в предположении об отсутствии или существовании внутривидовой борьбы, а также взаимодействии с представителями другой конкурирующей популяции. Найдены решения соответствующих дифференциальных уравнений, а также условия, при которых осуществляется колебательный процесс, т.е. существуют периодические движения. Исследуется также система двух дифференциальных уравнений, описывающая процесс взаимодействия двух конкурирующих популяций типа «жертва-хищник» в пространстве шести параметров, определяющих состояние систем. Координаты состояний равновесия такой системы рационально выражены через ее параметры. Установлены характер и взаиморасположение состояний равновесия как в конечной части плоскости, так и на бесконечности. Доказано отсутствие предельных циклов.

Модель линейной функции для скорости прироста популяции

Основным объектом исследований в экологии является динамика (или эволюция) популяций. Рассмотрим некоторую популяцию, обитающую в более или менее благоприятных условиях. Число живых организмов в этой популяции с течением времени не остается постоянным и будет меняться в зависимости от интенсивности двух противоположных процессов: рождаемости и смертности. На рождаемость и смертность организмов влияют многие факторы: недостаток пищи, притеснение со стороны другого биологического вида, продолжительность жизни и т.п. Поэтому мы предположим, что данная популяция живет в условиях неограниченных ресурсов питания и неограниченного места и не подавляется никаким другим видом. Отметим сразу, что в природе, да и в лаборатории тоже, нельзя наблюдать популяцию, которая длительное время жила бы в условиях неограниченных ресурсов питания или места. В связи с этим, будем рассматривать не реальную популяцию, а ее модель.

Пусть $x(t)$ обозначает число живых организмов исследуемой популяции в момент времени t , а $x(t + \Delta t)$ – соответствующее число в момент $t + \Delta t$. Разность

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

дает нам прирост числа живых организмов за промежуток времени Δt . За это время взрослые особи произведут потомство, а часть особей могут погибнуть, следовательно, $\Delta x = R - S$, где R – число родившихся за единицу времени особей, а S – число погибших за это время.

С достаточным основанием можно утверждать, что средняя скорость изменения особей в популяции задается формулой

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = R - S. \quad (1)$$

Простейшим случаем является ситуация, когда R и S пропорциональны числу особей в популяции, т.е. $R = ax$, $S = bx$, $a > 0$, $b > 0$. В этом случае

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = ax - bx = (a - b)x.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x. \quad (2)$$

Разделив переменные и проинтегрировав это уравнение (2), получим:

$$\int \frac{dx}{x} = (a - b) \int dt \text{ или } x = Ce^{(a-b)t}, \quad (3)$$

где C – произвольная постоянная.

Пусть x_0 – значение $x(t)$ в тот момент времени t_0 , с которого мы начали наблюдения за популяцией, откуда $x_0 = Ce^{(a-b)t_0}$ или $C = \frac{x_0}{e^{(a-b)t_0}}$, а тогда

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)} \quad (4)$$

Простейший анализ полученного решения показывает, что если $a > b$, то при $t \rightarrow \infty$ число особей $x \rightarrow \infty$, т.е. неограниченно возрастает, а при $a < b$, $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и популяция становится вымирающей. График функции (4) для $a - b > 0$ и для $a - b < 0$ изображен на рисунке 1. Такое решение (4) уравнения (2) называется показательным законом роста.

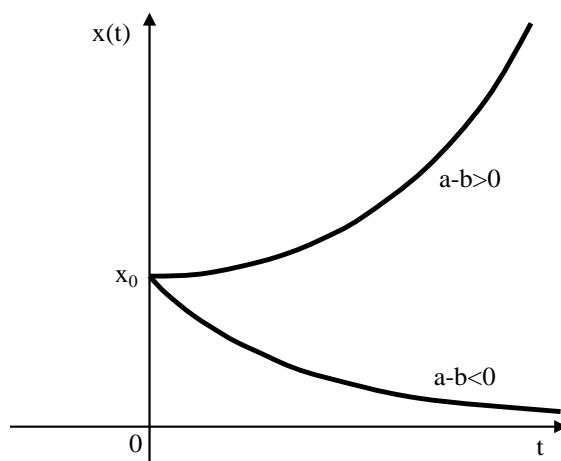


Рисунок 1 – График показательного закона роста

Вполне понятно, что ни одна природная популяция не растет по такой кривой. Действительно, с самого начала были сделаны такие предположения о популяции, которые в природе практически никогда не выполняются. Необходимо отметить, что след установленного нами закона явно заметен и в реальных (природных) популяциях. Пока популяция молода, пока достаточно места и пищи, пока нет борьбы с соседями, развитие популяции происходит в соответствии с показательным законом роста. Этот вывод имеет место для конечного, не очень большого, промежутка времени. Хорошо известны так называемые «экологические взрывы», когда тот или иной биологический вид за короткий срок достигает гигантской численности.

Закон показательного роста в отношении к популяции людей впервые сформулировал английский экономист Томас Мальтус, который сделал вывод, что увеличение численности населения Земли, возрастая по экспоненте, приведет к недостатку питания, а следовательно, к неизбежности войн и других видов истребления населения. Его ошибка состоит в том, что он в своих рассуждениях не учитывал других факторов, влияющих на рост народонаселения, кроме рождаемости и естественной смертности.

Следует также отметить, что в приведенных выше и последующих рассуждениях количество особей популяции есть число целое и, следовательно, может изменяться только

скачками, т.е. $x(t)$ как дискретная функция не является дифференцируемой, однако для больших ее значений ошибка, связанная с предположением о непрерывности данной функции и ее дифференцируемости, на наш взгляд, не имеет существенного значения и дает возможность применять методы дифференциального исчисления при моделировании.

Модель нелинейной функции для скорости прироста популяции

Рассмотрим снова одну изолированную популяцию и будем предполагать, что она обитает в некоторой ограниченной по размерам области пространства. Это может быть лабораторная пробирка, опытный участок или природный ареал. Необходимо отметить, что поначалу, пока особей в популяции не так много, ее развитие идет в соответствии с показательным законом роста в предположении, что запасов пищи достаточно. Однако такая модель не может служить подходящим описанием развития популяции для длительного промежутка времени, т.к. с ростом числа популяции возрастает «эффект самоотравления» или, иначе говоря, внутривидовая борьба. Причинами, снижающими рост популяции, являются конкурентная борьба за пищу, за место, распространение инфекций и т.д.

Более реальными случаями для описания эволюции популяции будут являться модели, которые предполагают, что скорость изменения числа особей является нелинейной функцией.

В таком случае скорость прибавления числа особей в популяции задается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (5)$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция.

Пусть, например, $f(x) = ax - bx^2$, где $a > 0, b > 0$. Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2. \quad (6)$$

В этом уравнении первый член справа соответствует естественному приросту, а второй – убыли из-за внутривидовой конкуренции. Коэффициент b называется коэффициентом внутривидовой конкуренции.

Уравнение (6) является уравнением Бернулли, а значит, его можно проинтегрировать. Интегрируя его одним из известных способов и решив задачу Коши $x = x_0$ при $t = t_0$, получим

$$x(t) = x_0 \frac{\frac{a}{b} e^{a(t-t_0)}}{\left(\frac{a}{b} - x_0\right) + x_0 e^{a(t-t_0)}}. \quad (7)$$

Нам понадобится и другая форма этого решения, которую можно получить, разделив числитель и знаменатель на $e^{a(t-t_0)}$:

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b} x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \quad (8)$$

В результате получили, что популяция в ограниченной среде развивается в соответствии с формулой (8). Из этой формулы видно, что при $t \rightarrow \infty$ число особей в популяции имеет своим пределом $\frac{a}{b}$:

$$\lim_{x(t)} \frac{\frac{a}{b}x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right)e^{-a(t-t_0)}} = \frac{a}{b}.$$

При этом следует рассмотреть два случая: $\frac{a}{b} > x_0$ и $\frac{a}{b} < x_0$; если $\frac{a}{b} - x_0 > 0$, то функция $x(t)$ возрастает, а при $\frac{a}{b} < x_0$ она убывает. Решение уравнения (8) изображено на рисунке 2.

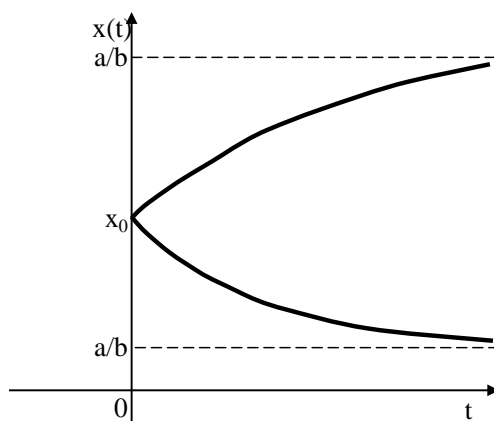


Рисунок 2 – График решения уравнения (8)

Динамика двух популяций без внутривидовой борьбы

Рассмотрим и исследуем взаимодействие двух популяций, условно называемых хищником и жертвой при всевозможных (достаточно общих) предположениях. Сначала рассмотрим модель взаимодействия хищников и жертв в предположении, что между особями одного вида нет конкуренции. Пусть x и y – число жертв и хищников соответственно.

Предположим, что в отсутствии хищников ($y = 0$) относительный прирост жертв происходит с постоянной скоростью $a > 0$. Наряду с этим жертвы несут потери, пропорциональные количеству хищников $y > 0$ с коэффициентом пропорциональности $-b$, где $b > 0$.

В свою очередь, рост популяции хищников зависит от количества жертв x , и при отсутствии пищи ($x = 0$) относительная скорость убывания популяции хищников равна c , где $c > 0$. При наличии пищи в количестве x , $x > 0$, скорость убывания хищников компенсируется пропорционально количеству жертв с коэффициентом пропорциональности d , $d > 0$.

Исходя из вышеизложенного, можно утверждать, что относительная скорость прироста жертв в присутствии хищников равна $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = a - by$; аналогично для хищников

относительная скорость их убывания $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -c + dx$ при наличии компенсации.

Объединяя оба равенства, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, соответствующую модели Вольтера–Лотка.

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = y(-c + dx) = Q(x, y) \quad \text{или}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad (9)$$

где $a, b, c, d > 0$.

Проведем качественное исследование решений системы (9), для чего введем в рассмотрение безразмерные переменные $u(\tau) = \frac{d}{c}x$, $v(\tau) = \frac{b}{a}y$, $\tau = ct$, $\alpha = \frac{a}{c}$, тогда система (9) примет вид:

$$\frac{du}{d\tau} = du(v - 1), \quad \frac{dv}{d\tau} = v(1 - u). \quad (10)$$

Разделив первое уравнение системы (10) на второе, получим: $\frac{du}{dv} = \frac{\alpha u(v - 1)}{v(1 - u)}$.

Разделив переменные, будем иметь: $\frac{1 - u}{u} du = \alpha \frac{v - 1}{v} dv$. Откуда

$$\ln u - u = \alpha v - \alpha \ln v + c.$$

Будем считать, что в некоторый момент времени $\tau = \tau_0$ число особей обоих видов известно, т.е. $u(\tau_0) = u_0$, $v(\tau_0) = v_0$. Тогда $c = \ln u_0 - u_0 - \alpha v_0 +$

$+\alpha \ln v_0 = \ln u_0 v_0^\alpha - u_0 - \alpha v_0$. В результате приходим к равенству

$$\alpha v + u - \ln uv^\alpha = H, \quad (11)$$

где $H = \alpha v_0 + u_0 - \ln u_0 v_0^\alpha = const$.

Вид кривых (11) для различных значений H представлен на рисунке 3.

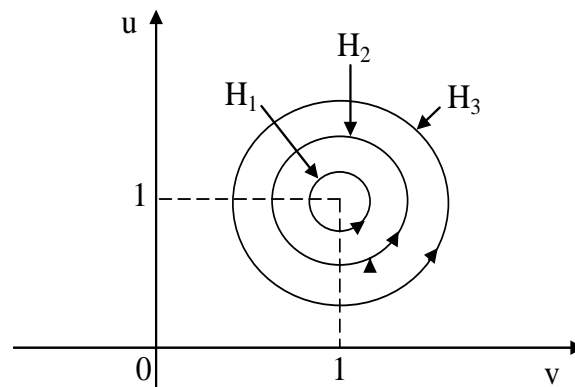


Рисунок 3 – Интегральные кривые уравнения (10)

Отсюда следует, что как переменная $u(\tau) = \frac{d}{c}x$, так и переменная $v(\tau) = \frac{b}{a}y$ «пробегают» замкнутую траекторию. Это означает, что решение (11) уравнения (10) являются функциями, периодическими по времени.

Проведем далее качественное исследование системы (9) без замены, с принадлежащими ей параметрами. Нетрудно показать, что эта система в конечной части плоскости имеет два состояния равновесия: $O(0;0)$ и $A\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$.

Исследуем их характер, для чего составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

а) $O(0;0)$. $P'_x = a - by$, $P'_y = -bx$, $Q'_x = dx$, $Q'_y = -c + dx$. В точке $(0;0)$ имеем: $P'_x = a$, $P'_y = 0$, $Q'_x = 0$, $Q'_y = -c$. Откуда $\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix} = -ac < 0$;

$\sigma = a - c$; $\sigma^2 - 4\Delta = a^2 - 2ac + c^2 + 4ac = (a + c)^2 > 0$. Значит состояние равновесия O является следом, т.к. корни характеристического уравнения $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$ действительны и различных знаков.

б) $A\left(\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right)$. Для этой точки $P'_x = 0$, $P'_y = -\frac{bc}{d}$, $Q'_x = c$, $Q'_y = 0$, $\Delta = \frac{bc^2}{d}$, $\sigma = 0$. Следовательно, корни характеристического уравнения – чисто мнимые числа $\lambda_{1,2} = ic\sqrt{\frac{b}{d}}$ и состояние равновесия A является центром. В подтверждение

предыдущему получим, что графиком зависимости x и y есть замкнутые кривые, содержащие внутри точку A и удовлетворяющие заданным начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$. Это значит, что с какой бы начальной численности популяций мы ни начали, с течением времени функции $x(t)$ и $y(t)$ будут так меняться, что точка $M(x(t), y(t))$ будет двигаться по замкнутой траектории до тех пор, пока снова не совпадет с начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$.

Таким образом, в рассматриваемой модели деятельность хищников не ведет к полному истреблению жертв, а затем и гибели самых хищников от голода.

Динамика двух популяций при наличии внутривидовой и межвидовой борьбы

Исследуем далее проблему динамики двух популяций при наличии внутривидовой борьбы внутри каждой популяции. Учитывая, что внутривидовая борьба ведет к уменьшению численности каждой популяции, система дифференциальных уравнений, моделирующая такой процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1xy - c_1x^2 = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -a_2y + b_2xy - c_2y^2 = Q(x, y), \quad (12)$$

где a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) – действительные положительные коэффициенты, c_1 и c_2 – коэффициенты внутривидовой борьбы.

Нетрудно показать, что в конечной части плоскости система (12) имеет четыре состояния равновесия:

а) $O(0;0)$;

б) $A\left(0; -\frac{a_2}{c_2}\right)$;

в) $B\left(\frac{a_1}{c_1}; 0\right)$;

г) $C\left(\frac{a_1c_2 + b_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}; \frac{a_1b_2 - c_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}\right)$.

Иследуем каждое из состояний равновесия в зависимости от значений параметров системы (12). Имеем:

$$P'_x = a_1 - b_1y - 2c_1x, \quad P'_y = -b_1x, \quad Q'_x = b_2y, \quad Q'_y = -a_2 + b_2x - 2c_2y.$$

а) Точка $O(0;0)$. $P'_x = a_1$, $P'_y = 0$, $Q'_x = 0$, $Q'_y = -a_2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -a_2 \end{vmatrix} = -a_1a_2 < 0; \quad \sigma = a_1 - a_2; \quad \sigma^2 - 4\Delta = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 4a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2.$$

Такое состояние равновесия является седлом для любых допустимых значений параметров исследуемой системы.

б) Точка $A\left(0; -\frac{a_2}{c_2}\right)$.

$$\Delta = a_1a_2 + \frac{a_2^2b_1}{c_2} = \frac{a_2}{c_1}(a_1c_2 + a_2b_1) > 0; \quad \sigma = -a_1 - a_2 + \frac{a_2b_1}{c_2};$$

$$\sigma^2 - 4\Delta = \left(a_1 - a_2 + \frac{a_2b_1}{c_2}\right)^2 > 0.$$

Точка A является узлом, устойчивым, если $\frac{a_2b_1}{c_2} < (a_1 + a_2)$, и неустойчивым при выполнении противоположного неравенства.

в) Точка $B\left(\frac{a_1}{c_1}; 0\right)$. Для нее $\sigma = -a_1 - a_2 + \frac{a_1b_2}{c_1}$; $\Delta = \frac{a_1}{c_1}(a_2c_1 - a_1b_2)$;

$$\sigma^2 - 4\Delta = \left(a_1 - a_2 + \frac{a_1b_2}{c_1}\right)^2.$$

Состояние равновесия B является узлом, если $a_2c_1 > a_1b_2$, устойчивым при $\frac{a_2b_1}{c_2} < (a_1 + a_2)$ неустойчивым в противном случае. Если же $a_2c_1 < a_1b_2$, то точка B – седло.

$$\begin{aligned} \text{г) Точка } C & \left(\frac{a_1 c_2 + b_1 a_2}{c_1 c_2 + b_1 b_2}, \frac{a_1 b_2 - c_1 a_2}{c_1 c_2 + b_1 b_2} \right). \text{ Имеем} \\ \sigma & = \frac{-c_1(b_1 a_2 + a_1 c_2) + c_2(a_2 c_1 - a_1 b_2)}{c_1 c_2 + b_1 b_2}; \\ \Delta & = \frac{1}{c_1 c_2 + b_1 b_2} (a_1 c_2 + a_2 b_1)(a_1 b_2 - a_2 c_1); \\ \sigma^2 - 4\Delta & = \left(\frac{c_1(a_1 c_2 + b_1 a_2) - c_2(a_1 b_2 - c_1 a_2)}{c_1 c_2 + b_1 b_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Выразив полученные значения σ, Δ и $\sigma^2 - 4\Delta$ через переменные x и y , получим: $\sigma = -(c_1 x + c_2 y)$; $\Delta = (c_1 c_2 + b_1 b_2)xy$; $\sigma^2 - 4\Delta = (c_1 x - c_2 y)^2$. Из этого следует, что точка C является узлом, если она расположена в первом квадранте, и седлом, если она находится в четвертом квадранте.

Исследуем характер и устойчивость бесконечно удаленных состояний равновесия. С помощью преобразования Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{u}{z}$ и умножения каждого уравнения полученной при этом системы на z (что равносильно преобразованию $dt = z d\tau$), сохранив прежнее обозначение времени t , приходим к системе:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} & = -(a_1 + a_2)uz + (c_1 + b_2)u + (b_1 - c_2)u^2 \equiv P(u, z), \\ \frac{dz}{dt} & = c_1 z + b_1 uz - a_1 z^2 \equiv Q(u, z). \end{aligned} \tag{13}$$

Состояниями равновесия на бесконечности являются точки $M(0;0)$ и $N\left(\frac{c_1 + b_2}{c_2 - b_1}; 0\right)$.

Исследовав их характер способом, аналогичным вышеизложенному, приходим к выводу, что точка $M(0;0)$ – узел неустойчивый при любых значениях параметров системы.

Точка $N\left(\frac{c_1 + b_2}{c_2 - b_1}; 0\right)$ является седлом, если $c_2 - b_1 > 0$, узлом, если

$c_2 - b_1 < 0$. Отметим также, что выражение $\sigma^2 - 4\Delta$ всегда положительно, т.к. бесконечно удаленное состояние не может быть фокусом.

Применив преобразование $x = \frac{v}{z}$, $y = \frac{1}{z}$, исследуем характер состояния равновесия на «концах» оси ОУ. В результате приходим к системе:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} & = (a_1 + a_2)vz + (c_2 - b_1)v - (c_1 + b_2)v^2, \\ \frac{dz}{dt} & = c_2 z - b_1 vz + a_2 z^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Единственным состоянием равновесия системы (14) является точка $O_1(0;0)$. Для нее $\sigma = 2c_2 - b_1$, $\Delta = c_2(c_2 - b_1)$, $\sigma^2 - 4\Delta = b_1^2 > 0$. Это состояние равновесия является узлом, если $c_2 - b_1 > 0$, устойчивым, если $2c_2 - b_1 < 0$, или седлом при $c_2 < b_1 < 0$.

Остается исследовать вопрос существования предельных циклов. Для этого воспользуемся критерием Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака функцию $B(x, y) = x^{k-1} y^{h-1}$, где $k = \frac{-c_2(b_2 + c_1)}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $h = \frac{c_1(b_1 + c_2)}{c_1c_2 + b_1b_2}$. Тогда

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = \frac{1}{c_1c_2 + b_1b_2} (a_2c_1(c_2 - b_1) - a_1c_2(b_2 + c_1)) x^{k-1} y^{h-1}.$$

Это выражение при $\sigma = a_2c_1(c_2 - b_1) - a_1c_2(b_2 + c_1) \neq 0$ может обратиться в нуль только вдоль интегральных прямых $x = 0$ и $y = 0$. Отсюда следует, что предельных циклов, а также замкнутых контуров, составленных из траекторий, быть не может. Допустим, что имеется замкнутый контур, в границу которого входят отрезки ОХ и ОУ. Такой контур целиком лежит в одной из четвертей плоскости ОХУ.

В этом случае выражение $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ хотя и обращается в нуль на осях ОХ и ОУ,

но в каждой четверти плоскости знак этого выражения не меняется. Значит,

$\iint \left(\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$, и, следовательно, замкнутых контуров существовать

не может. В случае $\sigma = 0$ система (12) имеет аналитический интеграл $x^k y^h (a_2c_1x - a_1c_2y - a_1a_2) = const$, при этом одно из состояний равновесия этой системы является центром, т.е. имеется целая область плоскости, целиком заполненная замкнутыми траекториями.

Построим качественные картины поведения траекторий системы (12) в круге Пуанкаре для наиболее типичных случаев расположения состояний равновесия (рисунки 4; 5).

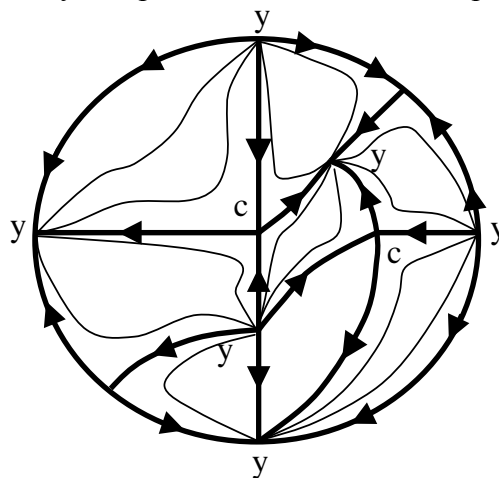


Рисунок 4 – Качественный портрет в целом системы (12) при $a_1b_2 - c_1a_2 > 0$

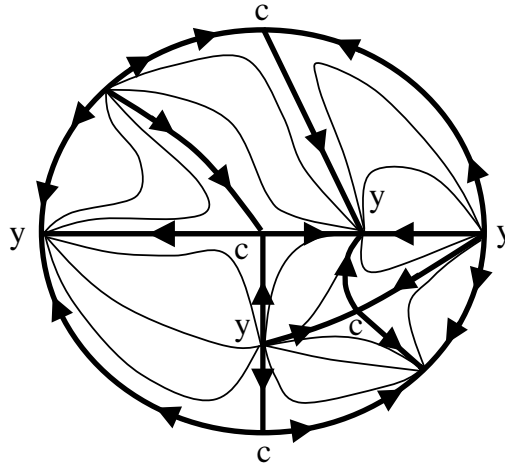


Рисунок 5 – Качественный портрет в целом системы (12) при $a_1b_2 - c_1a_2 < 0$

При этом рисунок 4 соответствует неравенству $a_1b_2 - c_1a_2 > 0$, а рисунок 5 – неравенству $a_1b_2 - c_1a_2 < 0$. В первом случае состояние равновесия C находится в первой четверти и является узлом, тогда точка B – седло; во втором случае характер состояния равновесия меняется: седло на узел и узел на седло, причем седло C расположено в четвертой четверти. Этот вывод подтверждается характером состояний равновесия в бесконечно удаленной части плоскости.

Таким образом, исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что при $x = \frac{a_1}{c_1}$ при $t \rightarrow \infty$ популяция y вымирает, а при $x = \frac{a_1c_2 + b_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $y = \frac{a_1b_2 - c_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $a_1b_2 - c_1a_2 > 0$, точка c показывает, что популяции x и y принимают значения, соответствующие координатам этой точке, при $t \rightarrow \infty$. Колебательные процессы или периодические движения отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андроноу, А.А. Теорїя колебанїй / А.А. Андроноу, А.А. Вїтт, С.Э. Хайкїн. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
2. Баутїн, Н.Н. Методы и прїемы качествєнного ıсследования дїнамїческих систем на плоскостї / Н.Н. Баутїн, Е.А. Леонтовїч. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
3. Кожух, И.Г. Качественное ıсследование в целом некоторых классов дїнамїческих систем на плоскостї : дїсс. ... канд. фїз.-мат. аук / И.Г. Кожух. – Мїнск, 1980. – 127 с.
4. Кожух, И.Г. Математїческий анализ : учеб. пособие / И.Г. Кожух. – Мїнск : ıзд-во Гревцова, 2011. – 443 с.
5. Пуанкаре, А. О крївых, определяемых дїфференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М. – Л. : ОГІЗ ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

I.G. Kozhukh. A Qualitative Research of the Interaction of two Competing Populations

A qualitative research of a differential equation and a system of two differential equations describing the interaction of two populations one of which exists at the expense of consumption of the other is held. The conditions of their coexistence during a long period of time are found.

Рукапіс паступїў у рэдкалегїю 29.09.2012

УДК 372.016:004

А.А. Козинский, В.И. Басин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВАЛИДАЦИИ HTML-КОДА В СООТВЕТСТВИИ С ЗАДАНЫМ НАБОРОМ ПРАВИЛ МОДУЛЯ BRAINTRAINING.SECURITY

Описаны особенности библиотеки BrainTraining.Security для валидации HTML и CSS кода на соответствие веб стандартам и выбранному типу документа. Применение библиотеки позволяет защитить приложение от несанкционированного доступа к учетным записям пользователей, которые открывают страницы с публикациями. Созданный модуль библиотеки предназначен для платформы .NET. Модуль позволяет выполнять валидацию в соответствии с набором заданных правил. Перечень правил содержится в xml-файле. Для унификации и обеспечения совместимости схемы описания правил выполнены по аналогии с имеющимися подобными библиотеками. Приведен краткий перечень реализованных правил библиотеки BrainTraining.Security их блок-схемы и код.

Постановка проблемы

При загрузке веб-приложений обрабатывается html-код, который в современных приложениях может передаваться от клиента к серверу. Результаты интерпретации кода отображаются на страницах приложений сервера, доступных для изменения со стороны клиента. Например, при создании публикации блога, комментария или вопроса форума их содержание передается как блок html-кода для сохранения в базе данных. Для задач такого рода необходимо выполнять валидацию html-кода. Под валидацией будем понимать проверку HTML и CSS кода на соответствие веб стандартам и выбранному типу документа. Html-приложение без проведения валидации становится уязвимым для XSS-атак (CrossSiteScripting – «межсайтовый скриптинг»). Например, злоумышленник пересылает на сервер html-код, содержащий скрипт, который отправляет содержимое cookie-файлов браузера на компьютер клиента. Если в cookie-файлах хранится информация об авторизованном пользователе (сессия, пароль в зашифрованном виде), то злоумышленник получает несанкционированный доступ к учетным записям других пользователей, открывших страницу с публикацией, комментарием или вопросом форума. Несанкционированный доступ возможен, например, при создании копий cookie браузером клиента-злоумышленника.

Постановка задачи

Создать модуль (библиотеку) для платформы .NET, которая позволит производить валидацию html-кода в соответствии с заданными правилами. Правила описывают разрешенные теги, атрибуты и стили, их возможные значения и шаблоны значений, разрешенных к использованию. Дополнительно необходимо обеспечить «чистку» кода – удаление запрещенных правилами фрагментов html. Результатом работы модуля валидации должно быть безопасное для использования в сети содержимое.

Обзор существующих решений

Существует ряд библиотек, которые решают поставленную задачу. К ним относятся следующие:

1. MicrosoftWebProtectionLibrary [1]. Библиотека написана для платформы .NET. Html-код после проверки с помощью функций указанного модуля не содержит опасных блоков. В числе недостатков указанного решения также укажем, например, недопусти-

мость использования стилей CSS в атрибутах style тегов проверяемого исходного кода; отсутствие возможности определять списки разрешённых в коде приложения тегов, атрибутов и стилей. В библиотеке MicrosoftWebProtectionLibrary пользователь не имеет возможности самостоятельно определять перечень разрешенных тегов.

2. OWASPAntiSamy[2]. Библиотека написана на Java. Она обладает широким функционалом. К ее особенностям отнесем низкую скорость работы и отсутствие возможности использования функций библиотеки в приложениях .NET. Существует «порт» библиотеки для языка C# – AntiSamy.NET (перенос основного функционала с одной платформы или языка на другой). Однако использование порта затруднено из-за существующих проблем. Так, версия «порта» для .NET не поддерживается производителем, так как считается устаревшей. Кроме того, OWASPAntiSamy использует библиотеку vjslib.dll. Для использования последней необходимо устанавливать дополнительные компоненты (MicrosoftVisual J# RedistributableLibrary). Практика работы с указанным решением показала, что в большом числе различных приложений пользователя генерируются исключения при использовании методов библиотеки vjslib.dll.

Обоснование представленного решения

Библиотека BrainTraining.Security, созданная В.И. Басиным, реализует поставленную задачу без необходимости установки сторонних компонент (кроме самого .NET версии 4). Предлагаемое решение просто в использовании, легковесно, содержит подробную документацию и обладает высокой производительностью. Библиотека успешно используется на протяжении одного года на сайте BrainTraining [3] в блогах и форуме для обеспечения безопасности отображаемого содержимого приложений.

Краткое описание предлагаемого решения

В библиотеке BrainTraining.Security валидация текста проводится в соответствии с набором заданных правил. Перечень правил содержит xml-файл, схема которого представлена на рисунке 1.

Для унификации и обеспечения совместимости с библиотекой OWASPAntiSamy схемы описания правил BrainTraining.Security выполнены по аналогии. Аналогия означает, что правила разработанные для одной из указанных библиотек могут быть без модификации использованы в другой. Приведем краткий перечень реализованных правил библиотеки BrainTraining.Security (рисунок 1):

- directives – настройка проверки общих параметров кода (максимальный размер проверяемого кода, указание на разрешение импорта стилей и другие общие правила);
- common-regex – набор регулярных выражений, которые используются для проверки;
- common-attributes – описание возможных атрибутов;
- global-attributes – набор атрибутов, которыми могут обладать элементы html-кода;
- tag-rules – правила обработки всех разрешённых тегов;
- css-rules – правила обработки стилей;
- allowed-empty-tags – список разрешённых тегов, для которых допускается отсутствие содержания.

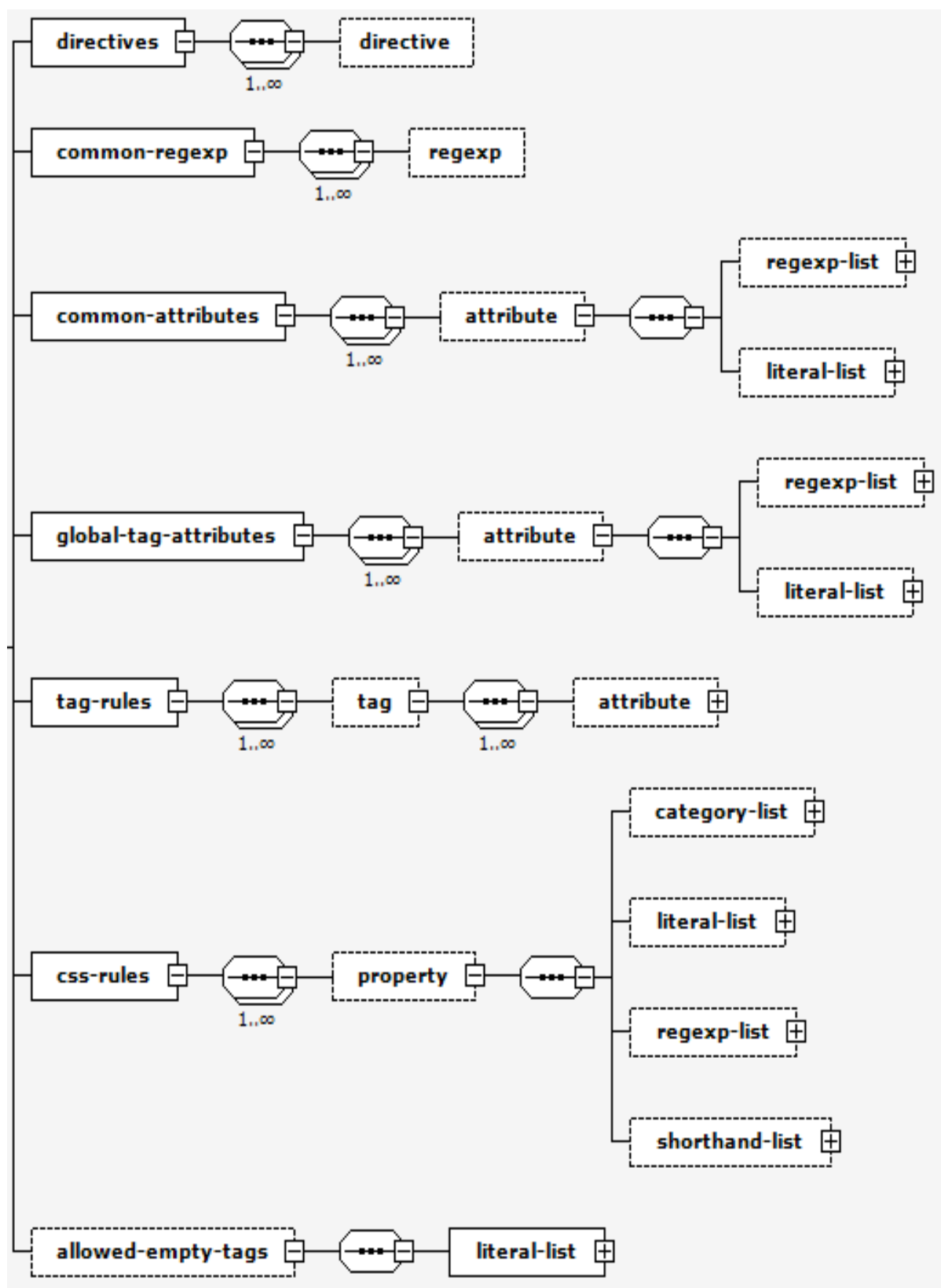


Рисунок 1 – Схема правил содержащихся в xml-файле

Фрагмент `regexp-list` (рисунок 1) задаёт множество регулярных выражений, которым должен удовлетворять атрибут или тег валидируемого кода. Список `literal-list` представляет перечень возможных значений атрибутов.

Библиотека BrainTraining.Security имеет следующие режимы проверки тегов, включаемые в описания правил валидации:

- Remove – удалять тег при встрече;
- Filter – удалить тег, оставив его содержимое;
- Validate – проверить на удовлетворение правилам, и удалить атрибуты и стили не прошедшие валидацию;
- Truncate – удалить все атрибуты и вложенные теги, оставив только содержимое текущего.

Приведём фрагмент кода чтения и анализа правил обработки атрибутов.

Ниже (Листинги 1 и 2) приведены методы, описанные в классе XmlHelper, которые проходят все элементы блоков xml с именем collectionName. Для каждого вложенного элемента (elementsName) запускается обработчик (XmlElementAnalyzer).

Листинг 1 – «Парсинг правил валидации файла конфигурации»

public delegate void XmlElementAnalyzer(XElement currentElement); //описание методов, которые могут быть обработчиками

```
public static void Aggregate(IEnumerable<XElement> itemCollections, string collectionName, string elementsName, XmlElementAnalyzer analyzer)
{
    foreach (XElement itemCollection in itemCollections)
    { //для всех указанных блоков
        IEnumerable<XElement> items = itemCollection.Elements(elementsName);
//получаем вложенные элементы
        foreach (XElement item in items)
        { //для каждого вложенного элемента
            analyzer.Invoke(item); //запускаем обработчик
        }
    }
}

public static void Aggregate(XElement element, string collectionName, string elementsName, XmlElementAnalyzer analyzer)
{
    IEnumerable<XElement> itemCollections = element.Elements(collectionName);
//просматриваемые блоки
    Aggregate(itemCollections, collectionName, elementsName, analyzer); //обработка
    каждого блока
}
```

Фрагмент блок-схемы проверки на корректность кода тега приведен на рисунке 2.

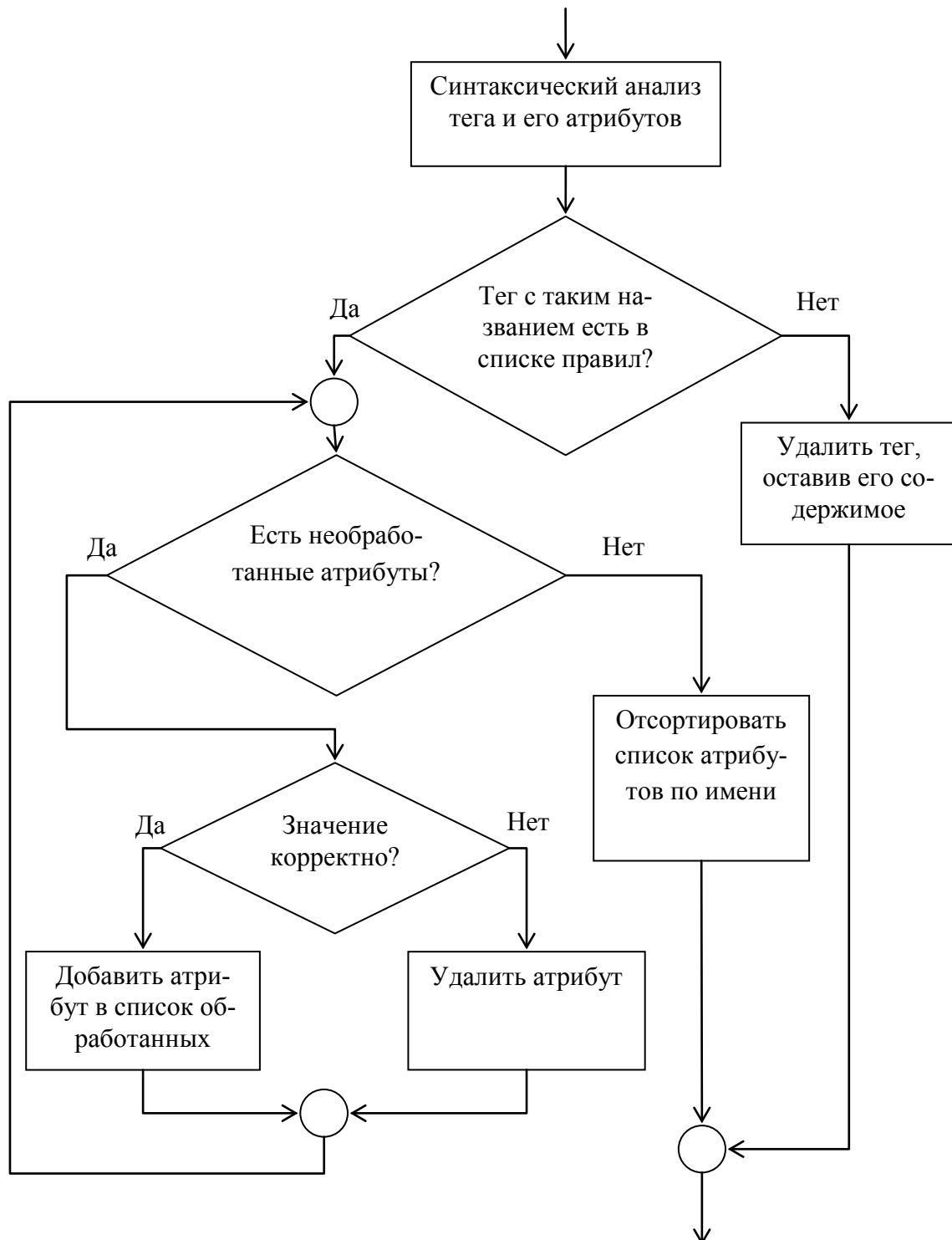


Рисунок 2 – Фрагмент блок-схемы обработки тега

Листинг 2 – «Обработка допустимых атрибутов правил валидации файла конфигурации»

```

private void ParseCommonAttributes(XDocument document)
{
    XmlHelper.Aggregate(document, "common-attributes", "attribute", ProcessAttribute);
    //пробегаем правила всевозможных атрибутов и вызываем для каждого обработчик
}
  
```

```
private void ProcessAttribute(XElement element) //обработчик элемента
{
    string nameAttr = element.Attribute("name").Value; //получаем имя
```

```
    Model.Attribute attribute = new Model.Attribute(nameAttr); //создаём класс, представляющий атрибут
```

```
    XmlHelper.Aggregate(element, "regex-list", "regex", ProcessRegexValue);
//обрабатываем правила проверки значений
```

```
    XmlHelper.Aggregate(element, "literal-list", "literal", ProcessLiteralValue);
//обрабатываем возможные значения
```

```
    _attributesList.AddItem(attribute); //добавляем в коллекцию считанных атрибутов
}
```

Описанная модель и ее реализация прошли апробацию в ходе работы ресурса для программистов. Результаты работы над указанным ресурсом были описаны ранее в [4–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный репозиторий библиотеки MicrosoftWebProtectionLibrary [Электронный ресурс] / Microsoft. – Режим доступа : <http://wpl.codeplex.com>, свободный. – Дата доступа : 24.09.2012.

2. Официальный репозиторий библиотеки OWASPAntiSamy [Электронный ресурс] / OWASP. – Режим доступа : <http://code.google.com/p/owaspantisamy/>, свободный. – Дата доступа : 24.09.201.

3. Басин, В.И. Сайт для программистов и дизайнеров пользовательского интерфейса BrainTraining [Электронный ресурс] / В.И. Басин. – Режим доступа : <http://brtrg.com>, свободный. – Дата доступа : 24.09.2012.

4. Басин, В.И. Brain Training – a new approach to testing your sports programming skills / В.И. Басин // Иностранные языки и современный мир : сб. материалов междунар. науч. конф. студентов, Брест, 14 апреля 2011 г. : в 2 ч. – Брест : БрГУ, 2011. – Ч. 1. – С. 13–15.

5. Басин, В.И. Сайт для организации олимпиад по спортивному программированию / В.И. Басин // Современные проблемы математики и вычислительной техники : материалы VII Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 26–28 ноября 2011 г. : в 2-х ч. – Брест : БрГТУ, 2011. – Ч. 2 – С. 4–6.

6. Басин, В.И. Соревнования по спортивному программированию в системе тестирования BrainTraining / В.И. Басин // XIV Респ. науч.-метод. конф. молодых учёных : сб. материалов : в 2 ч. – Брест : БрГУ, 2012. – Ч. 1. – С. 24–26.

A.A. Kazinski, V.I. Basin. A Mathematical Model of the Validation of HTML-code in Accordance with a Given Set of Rules Module BrainTrainingSecurity

This article contains the description of the possibilities of the BrainTraining.Security library for HTML and CSS code validation with given set of rules and document specifications. This library can provide protection for web applications against unauthorized access to the account of the user who is trying to view some page content with untrusted html code (e.g. publications in personal blog). This library is designed for applications under.NETplatform. The module allows you to perform validation in accordance with a set of predefined rules. The list of rules is described in xml configuration file. The scheme of this configuration file is similar existing libraries to provide a high level of compatibility. Also a short list of implemented validation rules of the library, block-diagrams and code snippets were described.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.10.2012

УДК 917.948

В.М. Мадорский**НЕЛОКАЛЬНЫЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЛОКАЛЬНО СХОДЯЩИЕСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ**

В работе рассматриваются нелокальные нерегуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x) = 0$ в пространстве R^n . Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения «плохого» начального приближения.

Для решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0; f \in C_D, f(D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

будем применять итерационный процесс, который можно записать в следующем компактном виде:

$$x_{n+1} = x_n - [f(x_n, y_n)]^{-1} \left(f(x_n) + f \left(x_n - [f'(x_n, y_n)]^{-1} f(x_n) \right) \right). \quad (2)$$

Здесь $f(x, y)$ – оператор первой разделенной разности оператора $f(x)$, и если оператор $f(x)$ таков, справедлив аналог теоремы о среднем для непрерывных операторов

$$\|f(x) - f(y) - f(x, y)(x - y)\| \leq K \|x - y\| \|x - z\| \text{ и имеют место оценки}$$

$$\|[f(x, y)]^{-1}\| \leq B; \|f(x, z) - f(z, y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \text{ то, вводя оператор}$$

$G(x) = S(x) - [f(x, y)]^{-1} f(S(x))$, $S(x)$ – оператор Стеффенсена [1], можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|G(x) - x^*\| &\leq \|[f(x, y)]^{-1}\| \|f(x, y)S(x) - f(S(x)) - f(x, y)x^*\| \leq \\ &\leq B \|f(S(x)) - f(x^*) - f(x^*, y^*)(S(x) - x^*) + \\ &+ (f(x^*, y^*) - f(x, y))(S(x) - x^*)\| \leq \\ &\leq B(K \|S(x) - x^*\| \|S(x) - y^*\| + \|f(x^*, y^*) - f(x, y)\| \|S(x) - x^*\|) \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\| \|S(x) - x^* + f(x^*)\| + \\ &+ \|f(x^*, y^*) - f(y^*, x) + f(y^*, x) - f(x, y)\| \|S(x) - x^*\| \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + (\alpha \|x - x^*\| + \alpha \|y - y^*\|) \|S(x) - x^*\| \leq \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + (\alpha \|x - x^*\| + \alpha \|x^* - f(x^*) - x + f(x)\|) \|S(x) - x^*\| = \\ &= BK \|S(x) - x^*\|^2 + \alpha \|S(x) - x^*\| \|x - x^*\| + \|x - x^*\| (1 + C) \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + \alpha \|S(x) - x^*\| \|x - x^*\| (2 + C) = O(\|x - x^*\|^3) \end{aligned}$$

Здесь x^* – решение уравнения (1), $\|f(x^*, x)\| \leq C$.

Из оценки (3) следует, по крайней мере, локальная кубическая скорость итерационного процесса (2).

Для решения уравнения (1) применяем итерационный процесс.

Этап 1. Решается линейная система.

$$f(x_n, z_n) \Delta y_n = -f(x_n), z_n = x_n - f(x_n), y_n = x_n + \Delta y_n. \quad (4)$$

Этап 2. Решается вторая линейная система.

$$\begin{aligned} f(x_n, z_n) \Delta x_n &= -(f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \\ \beta_0 &\in [10^{-4}; 10^{-1}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Этап 3. Вносится поправка.

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \quad (6)$$

Этап 4. Проводим проверку окончания процесса: если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, (ε – малая величина, параметр останова), то конец просчетов, иначе этап 5.

Этап 5. Делается перерасчет регулятора длины шага по следующим формулам: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min \left(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n} \right), k = 0, 1, \dots \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \end{aligned} \quad (7)$$

и переходим на этап 1.

Докажем сходимость этого процесса. Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \beta_n [f(x_n, z_n)]^{-1} (f(x_n) + \beta_n f(x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n))) = \\ &= x_n - \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, \dots; \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}]. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу того, что $f \in C_D$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)| &\leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (4) соотношение (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)\| &\leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (11)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Оценим $\|f(y_n)\|$ и $\|f(x_n)\|$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (12)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

откуда в силу (4), (12) справедлива оценка для $\|f(y_n)\|$

$$\|f(y_n)\| \leq KB^2 \|f(x_n)\|^2; \beta_n \|f(y_n)\| = h_n \|f(x_n)\|. \quad (13)$$

Здесь $h_n = \beta_n KB^2 \|f(x_n)\|$, далее из (5), (13) имеем

$$\|\Delta x_n\| \leq \beta_n B (\|f(x_n)\| + \beta_n \|f(y_n)\|) \leq \beta_n B (1 + h_n) \|f(x_n)\|. \quad (14)$$

Подстановка (13), (14) в (10) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах.

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n h_n \|f(x_n)\| + \beta_n h_n (1 + h_n)^2 =$$

$$= (1 - \beta_n (1 - h_n (2 + 2h_n + h_n^2))) \|f(x_n)\|. \quad (15)$$

Из (7) имеем, что при $\beta_k < 1$ справедлива цепочка равенств

$$\beta_0 \|f(x_0)\| = \beta_1 \|f(x_1)\| = \dots = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|. \quad (16)$$

Если положить $\delta_n = h_n (2 + 2h_n + h_n^2)$ и $q_n = 1 - \beta_n (1 - \delta_n)$, то неравенство (15) можно переписать в более компактном виде

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n (1 - \delta_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \quad (17)$$

Соотношение (17) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

Теорема 2.1. Пусть в области $D = S(x_0, r)$, $r = \frac{B \|f(x_0)\| (2 + h_0)}{1 - q_0}$ существует x^* – решение нелинейного уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$\delta_0 = h_0 (2 + 2h_0 + h_0^2) < 1. \quad (18)$$

Тогда итерационный процесс (4) – (7) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^* .

Доказательство. При $n = 0$ из (17), (16) имеем, что

$$\|f(x_1)\| \leq (1 - \beta_0 (1 - \delta_0)) \|f(x_0)\| = q_0 \|f(x_0)\|;$$

$$q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \delta_0) < 1, h_0 < 1.$$

Откуда следует, что $\|f(x_1)\| < \|f(x_0)\|$, $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ имеем, что

$$h_1 = \beta_1 KB^2 \|f(x_1)\| = h_0,$$

$$\alpha_1 = 1 - \beta_1 (1 - h_1) = 1 - \beta_1 (1 - h_0) < 1 - \beta_0 (1 - h_0) = \alpha_0,$$

$$\delta_1 = h_1 (2 + 2h_1 + h_1^2) = \delta_0 < 1,$$

$$\|f(x_2)\| \leq (1 - \beta_1 (1 - \delta_1)) \|f(x_1)\| = q_1 \|f(x_1)\|, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает к нулю, последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает к 1, и справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0)\|,$$

из которой следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремиться к нулю, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и при некотором $k > n_0$ итерационный процесс (4) – (7) входит в область притяжения процесса с $\beta_k = 1$.

Нетрудно проверить, что все $x_n, y_n \in D$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| \frac{1+h_0}{1-q_0}; \\ \|y_n - x_0\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| < \\ &< B \|f(x_n)\| + B \frac{\|f(x_0)\| (1+h_0)}{1-q_0} < \frac{B \|f(x_0)\|}{1-q_0} (2+h_0). \end{aligned}$$

Стандартным образом можно показать не только слабую сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* , но и сильную сходимость $\{x_n\}$ к x^* :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| (1+h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i. \quad (19)$$

Из (19) следует фундаментальность элементов $\{x_n\}$, в силу полноты пространства R^n существование предельного элемента x^* , который, как просто проверить, является решением исходной нелинейной системы. Так как $\exists k \in N$, при котором $\beta_k = 1$, а следовательно $\forall n > k \beta_n = 1$, то, как показано выше, процесс (4) – (7) с $\beta_n = 1$ обладает кубической скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Опишем следующий эффективный процесс, реализующий неполный прогноз.

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора y_n

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$\begin{aligned} f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) &= f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n (f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если $\|f(x_{n+1})\|$ и (или) $\|\Delta x_n\| < \varepsilon$ – конец подсчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n (\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|)}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\| (\|f(x_{n+1})\| + \|f(x_{n+2})\|)}{\beta_n (\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|) \|f(x_{n+2})\|}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (24)$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 (\|f(x_0)\| + \|f(x_1)\|)}{\|f(x_1)\|}, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

и переход на шаг 1.

Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [f(x_n, z_n)]^{-1} \left(f(x_n) + \beta_n f \left(x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n) \right) \right) =$$

$$= x_n - \beta_n \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}].$$

В силу того, что $f \in C_D$, справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (25)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

С учетом (20), соотношение (25) можно переписать в виде

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (26)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Из (26) имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (27)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Оценим $\|f(y_n)\|$ и $\|\Delta x_n\|$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| \leq K \|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\|, \quad (28)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

откуда в силу (19), (28) справедлива оценка для $\|f(y_n)\|$:

$$\|f(y_n)\| \leq KB^2 \|f(x_n)\|^2; \quad \beta_n \|f(y_n)\| = h_n \|f(x_n)\|. \quad (29)$$

Здесь $h_n = \beta_n KB^2 \|f(x_n)\|$. Далее, из (24), (29) имеем:

$$\|\Delta x_n\| \leq \beta_n B (\|f(x_n)\| + \beta_n \|f(y_n)\|) \leq \beta_n B (1 + h_n) \|f(x_n)\|. \quad (30)$$

Подстановка (29), (30) в соотношение (27) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n h_n \|f(x_n)\| + \beta_n h_n (1 + h_n)^2 =$$

$$= (1 - \beta_n (1 - h_n (2 + 2h_n + h_n^2))) \|f(x_n)\|. \quad (31)$$

Из (24) имеем, что при $\beta_k < 1$ справедлива цепочка равенств:

$$\beta_0 \|f(x_0)\| = \beta_1 \|f(x_1)\| = \dots = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|, \quad n+1 \leq k. \quad (32)$$

Если положить $\delta_n = h_n(2 + 2h_n + h_n^2)$ и $q_n = 1 - \beta_n(1 - \delta_n)$, неравенство (30) можно переписать в более компактном виде:

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n(1 - \delta_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \quad (33)$$

Соотношение (33) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

Теорема 2.2. Пусть в области $D = S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|(2+h_0)}{1-q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0(2 + 2h_0 + h_0^2) < 1 \quad (34)$$

Тогда итерационный процесс (20)–(24) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^* .

Доказательство. При $n = 0$ из (33), (34) следует, что

$$\begin{aligned} \|f(x_1)\| &\leq (1 - \beta_0(1 - \delta_0)) \|f(x_0)\| = q_0 \|f(x_0)\|; \\ q_0 &= 1 - \beta_0(1 - \delta_0) < 1, \quad h_0 < 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (23) и (35) следует, что $\|f(x_1)\| < \|f(x_0)\|$, $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ имеем, что $h_1 = \beta_1 K B^2 \|f(x_1)\| = h_0$,
 $\alpha_1 = 1 - \beta_1(1 - h_1) = 1 - \beta_1(1 - h_0) < 1 - \beta_0(1 - h_0) = \alpha_0$, $\delta_1 = h_1(2 + 2h_1 + h_0) = \delta_0 < 1$,
 $\|f(x_2)\| \leq (1 - \beta_1(1 - \delta_1)) \|f(x_1)\| = q_1 \|f(x_1)\|$, $q_1 < q_0$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает к нулю, последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает к 1 и справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0)\|, \quad (36)$$

из которой следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремится к нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ и при некотором $k > n_0$ итеративный процесс (20)–(24) входит

в область притяжения процесса с $\beta_k = 1$. Нетрудно проверить, что все $x_n, y_n \in D$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| \frac{(1+h_0)}{1-q_0}. \\ \|y_n - x_0\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| < B \|f(x_n)\| + \frac{B \|f(x_0)\|(1+h_0)}{1-q_0} < \frac{B \|f(x_0)\|}{1-q_0} (2+h_0). \\ \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|\Delta x_n\| < B \|f(x_0)\| (1+h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) следует фундаментальность последовательности элементов $\{x_n\}$, а в силу полноты пространства R^n существование предельного элемента x^* , который, как просто проверить, является решением уравнения (1). *Теорема доказана.*

Достаточно эффективным является следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (38)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора y_n

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta x_n = -\beta_n(f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор x_n для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если $\|f(x_{n+1})\|$ и (или) $\|\Delta x_n\| < \varepsilon$ – конец расчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (42)$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2\beta_n\|f(x_{n+1})\|, \quad W_0 = \gamma\|f(x_0)\|, \quad \gamma \ll 1 \quad (43)$$

и переход на шаг 1.

Теорема 2.3. Пусть в области $D = S(x, W_n \leq W_0)$ существует x^* – решение уравнения (2.1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0(2 + 2h_0 + h_0^2) < 1. \quad (44)$$

Тогда итерационный процесс (38)–(43) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^* .

Доказательство сходимости процесса (38)–(43) в идейном плане вполне аналогично тому, как это сделано в работе [1] при доказательстве теоремы 2.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский – Брест : БрГУ, 2005 – 186 с.

V.M. Madorski. Nonlocal Nonregularised Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed

Nonlocal superlinear nonregularized iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the “bad” initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.09.2012

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Для решения линейных операторных уравнений I рода с ограниченным положительным и несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается применение правила останова по соседним приближениям, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A – оператор положительный ограниченный несамосопряженный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A . Однако нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x . Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k} \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha (A^* A)^k \right)^2 x_n + 2\alpha (A^* A)^{k-1} A^* y \right], \quad x_0 \in H, k \in N. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, метод итераций (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k} \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha (A^* A)^k \right)^2 z_n + 2\alpha (A^* A)^{k-1} A^* y_\delta \right] + \left(E - \alpha (A^* A)^k \right)^2 \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k} \right)^{-1} u_n, \quad z_0 \in H, k \in N, \quad (3)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \leq \beta$. Обозначим

$C = \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k} \right)^{-1} \left(E - \alpha (A^* A)^k \right)^2$, $B = \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k} \right)^{-1} 2\alpha (A^* A)^{k-1} A^*$. Тогда итерационный метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \quad (4)$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A . Там показано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/k} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow \infty$. В предположении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

2. Правило останова по соседним приближениям

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова

по соседним приближениям [2; 3]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями

$$\left. \begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. Пусть приближение ω_n определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Тогда справедливо неравенство $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$.

Доказательство.

Из (6) имеем при $n = k$ $Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - By$. Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$\begin{aligned} u_k &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}By = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \left(E + \alpha^2(A^*A)^{2k}\right) \left(E - \alpha(A^*A)^k\right)^{-2} \left(E + \right. \\ &+ \left. \alpha^2(A^*A)^{2k}\right)^{-1} 2\alpha(A^*A)^{k-1} A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - 2\alpha \left(E - \alpha(A^*A)^k\right)^{-2} (A^*A)^{k-1} A^*y = \\ &= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - 2\alpha \left(E - \alpha(A^*A)^k\right)^{-2} (A^*A)^k x = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E - C)x = \\ &= C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x). \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta_k = \omega_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - \\ &- 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$, $k \geq 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $\omega_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$, отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) + \\
&+ 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \\
&+ \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,
\end{aligned}$$

где
$$\gamma_n = 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно показать, что $\gamma_n \geq 0$ при любых $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9),

получим
$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2,$$

откуда $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При $\forall \omega_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \leq \beta$, выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \quad (10)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \leq \|C\|\beta + \\
&+ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta,
\end{aligned}$$

так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\omega_0 - x\|^2 = 0$. Отсюда следует (10). Лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова t определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n , удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$, $\delta, \beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (11)$$

При $n=1$ из $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$ имеем $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$, из (11) получим то же самое, т. е. при $n=1$ формула (11) верна. Предположим, что (11) верна при

$n=p$, т.е. $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1})$, и докажем её справедливость при

$n=p+1$. Имеем

$$\begin{aligned} z_{p+1} &= C z_p + B y_\delta + C u_p = C \left(C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + B y_\delta + C u_p = \\ &= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\ &\quad + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1} u_0) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + C (B y_\delta + C u_{p-1} + \\ &\quad + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p) = \\ &= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (11) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) B y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\ &\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\ &= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y + A^{-1}(E - C^{n+1})y - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - \\
& - C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}C^n(E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y - y_\delta).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n B(y - y_\delta)\|. \quad (12)$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\begin{aligned}
\|C^n B(y - y_\delta)\| &= \|C^n \sigma\| = \left\| \int_0^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda \sigma \right\| + \\
& + \left\| \int_{\varepsilon_0}^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| + q^n \|\sigma\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

так как при $\alpha > 0, \lambda \in (0, M]$ имеем $\left| \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \right| \leq q < 1$. Поэтому (лемма 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$ и $u_n, \|u_n\| \leq \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\left. \begin{aligned}
& \|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\
& \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \leq \varepsilon - \|B\|\delta.
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (12) следует, что $m \leq m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2, \text{ поэтому справедливо записать}$$

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2. \text{ Отсюда получим}$$

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (13) при $n < m'$ имеем $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \leq m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \leq m' \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} B C^k y. \quad (14)$$

Предположим, что (14) верно, тогда $x - C^n x = B(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y$,
 $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1}y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax$,
 $(E - C^n)x = (E - C^n)x$. Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (14) доказана. Из (11) вычтем (14), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (15)$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$.

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (16)$$

В частности, (16) справедливо и при $n = m$. Если $m \rightarrow \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$, тогда, как показано ранее, $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ достаточно показать, что $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$. Из (15) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - C u_n - C^n B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C) u_{n-k-1}. \quad (17)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha^2 (A^* A)^{2k}\right)^{-1} \left(E - \alpha (A^* A)^k\right)^2$ принадлежит $[0, 1]$, то можно доказать, что

$$\|C^n (E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (18)$$

Поэтому из (17) получим при $n = m - 1$

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} B(y_\delta - y)\| + \|C u_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C) u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$ ([4]).

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б)

получим $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$. Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$,

то $\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда получим,

что $m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства

на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| (\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$.

При $m \rightarrow \infty$ множитель $2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| \rightarrow 0$, а

$$\frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$$

ограничена при $\delta, \beta \rightarrow 0$. Поэтому $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$, $\delta, \beta \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенства (16) при $m \rightarrow \infty$ $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} (\|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)) = 0$.

Итак, доказано, что $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. метод (3) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вісник Брєсцкага ўніверсітэта. Серыя 4: Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.
2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука. – 1971. – 1108 с.

***O.V. Matysik, V.F. Savchuk.* About Decision Linear Equations with Non Self-Conjugate Operators of the Iteration Method**

In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with affirmative limited and non self-conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. The convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2012

УДК 517.5

*И.П. Приймац, Т.А. Степанюк, Ю.И. Харкевич***АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ H_ω**

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса $W_\delta(f; x)$ на классах $H_\omega := \{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R} \}$. Решена задача Колмогорова–Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах H_ω в равномерной метрике.

1. Постановка задачи и некоторые исторические сведения

Рассмотрим краевую задачу в единичном круге для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1), которое удовлетворяет граничному условию

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (2)$$

где $f(x)$ суммируемая 2π -периодическая функция, далее будем обозначать $W_\rho(f; x) = u(\rho, x)$. Тогда решение граничной задачи (1)–(2) можно записать в виде

$$W_\rho(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (3)$$

Величину (3) принято называть интегралом Вейерштрасса функции f . Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Вейерштрасса запишем в виде

$$W_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0.$$

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a; b]$ (например, [1, с. 12]) называют функцию $\omega(t) = \omega(f, t)$, определенную для $t \in [0; b-a]$ при помощи равенства

$$\omega(t) = \omega(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \max_{a \leq x \leq b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x'-x''| \leq t, \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу H_ω , если ее модуль непрерывности $\omega(f, t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, t) \leq \omega(t),$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|).$$

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $|f^{(r)}(t)| \leq 1$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; W_\delta)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - W_\delta(f; x)\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, будем называть, следуя А.И. Степанцу [1, с. 8], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; W_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; W_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Вейерштрасса W_δ на классе \mathfrak{N} в метрике пространства C .

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Вейерштрасса на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

Аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса впервые исследовались в работе П.П. Коровкина [2] в 1959 году: а именно им была решена задача Колмогорова–Никольского для класса Z_1 и оператора Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(Z_1; W_\rho)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1-\rho} + O(1-\rho), \quad \rho \rightarrow 1-,$$

$$Z_\alpha = \{f(x) \in C : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq 2|h|^\alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad |h| \leq 2\pi.$$

Также им было доказано, что интегралы Вейерштрасса осуществляют наилучшее асимптотическое приближение на классе Z_2 среди операторов типа

$$L_\rho(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \rho \cos t + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k(\rho) \cos kt \right\} dt, \quad 0 < \rho < 1,$$

и отмечено, что, например, интеграл Пуассона аппроксимирует класс Z_2 приблизительно в три раза медленнее, чем оператор Вейерштрасса.

Далее Л.И. Баусовым [3] в 1961 году результат Коровкина был обобщен на классы Z_α , $0 < \alpha \leq 2$,

$$\mathcal{E}(Z_\alpha; W_\rho)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) (1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} + o\left((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad \rho \rightarrow 1-,$$

а в 1965 году в работе [4] на классы $W_{\beta, \infty}^r$.

В 1975 году В.А. Баскаков [5] получил асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}(W_\infty^1; W_\delta)_C$, $\mathcal{E}(H^\alpha; W_\delta)_C$ при $\delta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; W_\delta)_C = & \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 \delta} \left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{2^{i+1} (2k\pi)^{2i}} \frac{1}{\delta^i} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(2k-1)^2 \pi^2 \delta} \left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{2^{i+1} ((2k-1)\pi)^{2i}} \frac{1}{\delta^i} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + O(e^{-H\delta}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < H \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (5)$$

Из равенства (4) следует, что

$$\mathcal{E}(W^1; W_\delta)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O\left(\frac{e^{-H\delta}}{\sqrt{\delta}}\right), \quad 0 < H \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (6)$$

В 2001 году Л.П. Фалалеев [6] уточнил результат Л.И. Баусова (равенство (1.21)), то есть, нашел более точный за порядком остаточный член

$$\mathcal{E}(Z_\alpha; W_\rho)_c = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) (1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} + \Delta(\rho, \alpha), \quad \rho \rightarrow 1-,$$

$$\Delta(\rho, \alpha) = \begin{cases} O\left((1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{2}}\right), & 0 < \alpha < 1, \\ O\left((1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho}\right), & 1 \leq \alpha < 2. \end{cases}$$

В 2007 году в работах И.В. Кальчук и Ю.И. Харкевича [7; 8] была решена задача Колмогорова–Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах (ψ, β) -дифференцируемых функций.

В тоже время аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω от их интегралов Вейерштрасса в равномерной метрике.

Основная цель данной работы – изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_c = \sup_{f \in H_\omega} \|f(x) - W_\delta(f, x)\|_c, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

2. Приближение интегралов Вейерштрасса функциями из класса H_ω в равномерной метрике

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство

$$\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_c = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\omega(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt, \quad \delta > 0, \quad (7)$$

где $(\omega(t))_{2\pi}$ – четное 2π -периодическое продолжение функции $f(t) = \omega(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, на всю числовую ось.

Доказательство.

Чтобы показать справедливость теоремы, запишем сначала интеграл Вейерштрасса в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро интеграла Вейерштрасса представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt = \frac{1}{2} \varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta(k),$$

где $\varphi_\delta(k) := e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt$.

Применяя формулу суммирования Пуассона (например, [9, с. 72]), получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_\delta(2\pi k) \right\}, \quad (8)$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функции $\varphi_\delta(u)$, то есть

$$\Phi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_\delta(z) \cos zudz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}} \cos zt \cos zudz =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}} \cos z(u+t) dz + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}} \cos z(u-t) dz = I_1 + I_2.$$

Используя формулу из ([10, с. 494])

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad \operatorname{Re} \beta > 0,$$

найдем значения интегралов I_1 и I_2 :

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\delta(u+t)^2}{4}}, \quad (9)$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}} \cos z(u-t) dz = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\delta(u-t)^2}{4}}. \quad (10)$$

Итак, учитывая (8)–(10), имеем

$$\Phi_\delta(u) = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{\delta(u+t)^2}{4}} + e^{-\frac{\delta(u-t)^2}{4}} \right).$$

Отсюда

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} + \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^\infty \left(e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}} + e^{-\frac{\delta(2\pi k-t)^2}{4}} \right) \right\} = \frac{\sqrt{\pi\delta}}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}},$$

и соответственно

$$\begin{aligned} W_\delta(f; x) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi\delta}}{2} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \sum_{k=-\infty}^\infty e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi f(x+t) e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x+t) e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt. \end{aligned}$$

Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t) := f(t+x)$. Тогда $f_1(0) - W_\delta(f_1, 0) = f(x) - W_\delta(f, x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω , то делаем выводы, что $\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} |f(0) - W_\delta(f, 0)|$.

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) := f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω , причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$W_\delta(f_2; 0) = W_\delta(f; 0) - f(0),$$

то есть

$$\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_C = \sup_{\substack{f \in H_\omega \\ f(0)=0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) K_\delta(t) dt \right| = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}} \sup_{\substack{f \in H_\omega \\ f(0)=0}} \left| \int_{-\infty}^\infty (f(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \right|.$$

Учитывая четность ядра $K_\delta(t)$, нам достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; W_\delta)_C = \sup_{f \in H_1} \left| \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (f(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \right|, \quad (11)$$

где H_1 – множество четных функций $f \in H_\omega$, таких что $f(0) = 0$. Какой бы ни была функция $f \in H$,

$$\left| \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \right| \leq \left| \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \omega(t) e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \right|. \quad (12)$$

С другой стороны, так как $e^{-\frac{\delta t^2}{4}} > 0$, то для функции $f_0(t) \in H_1$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \leq \pi,$$

будем иметь

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (f(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\omega(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt. \quad (13)$$

Итак, согласно (11)–(13) получаем (7).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в равенстве (7) положить $\omega(t) = t$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(W^1; W_\delta)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O\left(\frac{e^{-H\delta}}{\sqrt{\delta}}\right), \quad 0 < H \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (14)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1; W_\delta)_C = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi t e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt, \quad (15)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi t e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\delta} \left(1 - e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O(1) \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}}. \quad (16)$$

Используя формулу (например, [11, с. 33])

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{\pi z}} \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2z^2)^k} \right],$$

найдем оценку второго интеграла из правой части (15)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt &\leq \frac{\pi\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \sqrt{\pi\delta} \frac{2}{\sqrt{\delta}} \int_{\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}}^\infty e^{-t^2} dt = \\ &= 2\sqrt{\pi} \frac{e^{-\frac{\pi^2\delta}{4}}}{\sqrt{\pi} \frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}} \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{\left(\frac{\pi^2\delta}{2}\right)^k} \right] < K \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Объединив (15)–(17), получаем (14).

Следует отметить, что равенство (14) совпадает со следствием (6) из результата В.А. Баскакова.

Следствие 2. Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta^\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + O(e^{-H\delta}), \quad 0 < H \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (18)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (t^\alpha)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty (t^\alpha)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt. \quad (19)$$

Учитывая формулу 860.17 из [12]

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-\frac{t^2}{4}} dt = 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \quad \alpha > -1,$$

получим, что

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt - \int_\pi^\infty t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \right) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta^\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt, \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty t^\alpha e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt < \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty t e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\delta} e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}} < \frac{K}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}}. \quad (21)$$

Принимая во внимание (17), получаем

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty (t^\alpha)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \leq \frac{\pi^\alpha \sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}} \int_\pi^\infty e^{-\frac{\delta t^2}{4}} dt \leq K e^{-\frac{\delta \pi^2}{4}}. \quad (22)$$

Из (19)–(22) следует (18).

Следует отметить, что равенство (18) совпадает из результатом В.А. Баскакова (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К : Наук. думка, 1981. – 340 с.
2. Коровкин, П.П. О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами / П.П. Коровкин // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 3. – С. 143–149.
3. Баусов, Л.И. О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье / Л.И. Баусов // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 201–210.
4. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Известия вузов. – 1996. – Т. 55, № 6. – С. 5–17.
5. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.
6. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона / Л.П. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №4. – С. 926–936.
7. Kharkevych, Yu.I. V. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Weierstrass integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. math. journal. – 2007. – Vol. 59, № 7. – P. 953–978.
8. Kal'chuk, I.V. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators / I.V. Kal'chuk // Ukr. math. journal. – 2007. – Vol. 59, № 9. – P. 1201–1220.
9. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.–Л., 1948.

10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

11. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : Физматиз, 1963. – 359 с.

12. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М., 1973.

I.P. Pryjmas, T.A. Stepaniuk, Yu.I. Kharkevych. Approximative Properties of Weierstrass Integrals on the Classes H_ω

The article focuses on the solution to one of the problems of the Approximation's Theory, the problem about researching approximative properties of Weierstrass integrals $W_\delta(f;x)$ on the classes $H_\omega := \{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} \}$. We solved the problem of Kolmogorov-Nikolsky for Weierstrass integrals on the classes H_ω in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 05.09.2012

УДК 512.542

Н.В. Савельева

О ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В настоящей работе в терминах индексов инъекторов установлены достаточные признаки локальной нормальности и максимальности (по включению, по сильному вложению) класса Фиттинга \mathfrak{X} в классе Фиттинга \mathfrak{Y} конечных частично разрешимых групп – групп, у которых факторгруппы по \mathfrak{X} -радикалу являются разрешимыми или $\pi(\mathfrak{X})$ -разрешимыми группами. В частности, доказано, что если для классов Фиттинга \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} таких, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, где \mathfrak{S} и $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ соответственно обозначают класс всех конечных разрешимых групп и класс всех конечных $\pi(\mathfrak{X})$ -разрешимых групп, найдется простое число p из множества всех простых чисел (в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$) или из множества $\pi(\mathfrak{X})$ (в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) такое, что в каждой группе $G \in \mathfrak{Y}$ ее \mathfrak{X} -инъектор имеет в ней индекс 1 или p , то класс Фиттинга \mathfrak{X} нормален и максимален по включению в классе \mathfrak{Y} . Если вместе с названными условиями дополнительно имеет место сильное вложение класса \mathfrak{X} в класс \mathfrak{Y} , то класс \mathfrak{X} является максимальным по сильному вложению в классе \mathfrak{Y} .

Введение

Исследование максимальных (по включению, по сильному вложению) классов Фиттинга было инициировано в середине 70-х годов прошлого столетия и было обусловлено прежде всего изящным результатом Косси [1] о том, что каждый максимальный по включению подкласс Фиттинга класса \mathfrak{S} всех конечных разрешимых групп является нормальным в \mathfrak{S} . Напомним, что понятие нормального класса Фиттинга было введено Блессенолем и Гашюцом в 1970 году [2] как класса Фиттинга \mathfrak{F} такого, что в каждой конечной разрешимой группе ее \mathfrak{F} -инъекторы являются в ней нормальными подгруппами.

В дальнейшем был получен ряд глубоких и содержательных результатов (например, [3–5] или IX.4 [6]) о свойствах максимальных классов Фиттинга и их взаимосвязи с другими известными семействами классов Фиттинга, в частности, с локальными и с нормальными классами Фиттинга. Особый интерес к этому направлению подчеркивают также вопросы 9.18 и 13.50 о существовании максимальных подклассов Фиттинга, сформулированные в Коуровской тетради [7] соответственно Лаушем и А.Н. Скибой. Указанные вопросы были впоследствии решены в работах Н.Т. Воробьева [8], Н.В. Савельевой и Н.Т. Воробьева [9].

Вместе с тем богатство приложений свойств максимальных классов Фиттинга ставило задачу отыскания признаков максимальности одного класса Фиттинга в другом. Как отмечено Дерком и Хоуксом [6, с. 735], проблема нахождения критерия максимальности в общем случае является одной из трудных в теории классов Фиттинга. До настоящего времени данная проблема остается открытой. В разрешимом случае она была решена в работах [3; 9]. При этом доказательство достаточного признака максимальности посредством инъекторов в работе [3] стало возможным благодаря основополагающей теореме Фишера – Гашюца – Хартли [10] о существовании и сопряженности инъекторов в любой конечной разрешимой группе. Расширение результата Брайса – Косси [3] о достаточном признаке максимальности класса Фиттинга \mathfrak{X} в классе Фиттинга \mathfrak{Y} на случай частично разрешимых групп было получено в работе [11] с использованием результата В.Г. Сементовского [12] о том, что в любой группе G такой, что факторгруппа G по ее \mathfrak{X} -радикалу разрешима, существуют \mathfrak{X} -инъекторы и любые два

из них сопряжены. В связи с этим, учитывая результат Го Вэньбина [13] о существовании и сопряженности инъекторов в группах из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{E}^{\pi(\mathfrak{X})}$, где $\mathfrak{E}^{\pi(\mathfrak{X})}$ обозначает класс всех конечных $\pi(\mathfrak{X})$ -разрешимых групп, актуален вопрос о дальнейшем развитии указанного выше достаточного признака максимальности Брайса–Косси [3], в том числе и для максимальных по сильному вложению классов Фиттинга. Реализации этой задачи и посвящена настоящая работа. Основной ее результат – установление посредством свойств инъекторов достаточных признаков максимальности (по включению, по сильному вложению) класса Фиттинга \mathfrak{X} в классе Фиттинга \mathfrak{Y} конечных групп таких, что их факторгруппы по \mathfrak{X} -радикалам разрешимы или являются $\rho(\mathfrak{X})$ -разрешимыми группами.

Все рассматриваемые группы считаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [6].

1. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые известные понятия и результаты теории классов групп, которые мы будем использовать.

Классом групп называется множество групп, содержащее наряду с каждой своей группой и все изоморфные ей группы. Класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если каждая нормальная подгруппа любой группы из \mathfrak{F} принадлежит \mathfrak{F} , и из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат \mathfrak{F} , всегда следует, что их произведение MN принадлежит \mathfrak{F} . Из определения класса Фиттинга вытекает понятие \mathfrak{F} -радикала. Если класс Фиттинга \mathfrak{F} не пуст, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют ее \mathfrak{F} -радикалом, если она является наибольшей из нормальных \mathfrak{F} -подгрупп группы G .

Известное свойство радикалов характеризует следующая лемма.

Лемма 1.1 (см. IX.1.1 (а) [6]). *Если \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G , то $N_{\mathfrak{X}} = N \cap G_{\mathfrak{X}}$.*

Понятие радикала в теории классов Фиттинга является ключевым. В частности, в терминах радикалов определяются нормальные классы Фиттинга и понятие произведения классов Фиттинга.

Непустой класс Фиттинга \mathfrak{F} называется нормальным в классе Фиттинга \mathfrak{X} (этот факт обозначается $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой \mathfrak{X} -группы G ее \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G .

Если \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга, то их произведение – это класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$. В частности, $\mathfrak{X}\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{E}^{\pi(\mathfrak{X})}$ – классы всех тех групп, факторгруппы по \mathfrak{X} -радикалу которых разрешимы и $\pi(\mathfrak{X})$ -разрешимы соответственно.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из \mathfrak{F} принадлежит \mathfrak{F} . Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливы следующие свойства произведений классов Фиттинга, которые мы приводим в качестве леммы.

Лемма 1.2. *Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если класс Фиттинга \mathfrak{Y} не пуст, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$;*
- 2) *если \mathfrak{Y} – класс Фиттинга, являющийся гомоморфом, и \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.*

Наряду с радикалами важным инструментом в доказательствах теорем и самостоятельными объектами для изучения в теории классов Фиттинга являются инъекторы. Напомним, что подгруппа M группы G называется \mathfrak{X} -максимальной подгруппой G , если для любой подгруппы $H \in \mathfrak{X}$ такой, что $M \subseteq H \subseteq G$, следует, что $H \in \{M, G\}$. Под-

группу V группы G называют \mathfrak{X} -инъектором G , если $V \cap N$ является \mathfrak{X} -максимальной подгруппой группы N для каждой субнормальной подгруппы N группы G . Согласно известной теореме Гашюца – Фишера – Хартли [10], для каждого класса Фиттинга \mathfrak{X} в любой разрешимой группе \mathfrak{X} -инъекторы существуют и сопряжены.

Пусть $\sigma = \pi(\mathfrak{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из класса Фиттинга \mathfrak{X} , $\sigma' = \pi'(\mathfrak{X}) = P \setminus \sigma$ и $\pi \in P$, где P обозначает множество всех простых чисел. Напомним, что если $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G , то множество $\pi(\mathfrak{X})$ определяется как объединение всех таких $\pi(G)$, что $G \in \mathfrak{X}$. Напомним также, что группа G называется π -разрешимой [14], если ее главные факторы являются либо элементарными абелевыми p -группами для $p \in \pi$, либо π' -группами. Обозначим через \mathfrak{S}^σ множество всех σ -разрешимых групп.

Существование и сопряженность инъекторов в группах, принадлежащих классам $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$, установлены соответственно В.Г. Сементовским [12] и Го Вэньбином [13]. Мы приводим эти результаты в качестве нижеследующих лемм.

Лемма 1.3 (В.Г. Сементовский [12]). *В любой группе G такой, что факторгруппа G по ее \mathfrak{X} -радикалу разрешима, существуют \mathfrak{X} -инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Лемма 1.4 (Го Вэньбинь, теорема 2.5.3 [13]). *Если \mathfrak{X} – класс Фиттинга произвольных групп, то любая группа из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ обладает единственным классом сопряженных \mathfrak{X} -инъекторов.*

2. Вспомогательный результат

С учетом лемм 1.3 и 1.4 о существовании \mathfrak{X} -инъекторов в группах из классов $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ имеет место следующий признак нормальности.

Теорема 2.1. *Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, и пусть $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$). Если найдется простое число $p \in P$ ($p \in \sigma$) такое, что в каждой группе $G \in \mathfrak{Y}$ ее \mathfrak{X} -инъектор имеет индекс 1 или p , то \mathfrak{X} нормален в \mathfrak{Y} .*

Доказательство. Так как по условию теоремы $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, то класс $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ не пуст. Предположим, что \mathfrak{X} не нормален в \mathfrak{Y} . Тогда в классе $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ найдется группа, в которой \mathfrak{X} -радикал не является \mathfrak{X} -максимальной подгруппой, т.е. \mathfrak{X} -инъектор не нормален в G . Выберем среди таких групп группу G минимального порядка.

В силу леммы 1.3 \mathfrak{X} -инъектор в группе $G \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ существует (\mathfrak{X} -инъектор в группе $G \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ существует в силу леммы 1.4). Пусть V – \mathfrak{X} -инъектор группы G .

Покажем вначале, что в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M = G_{\mathfrak{X}}$. Докажем это методом от противного. Предположим, что в группе G есть две максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 . Тогда по определению класса Фиттинга $M_1 \in \mathfrak{Y}$ и $M_2 \in \mathfrak{Y}$. Следовательно, ввиду того, что $|M_1| < |G|$ и $|M_2| < |G|$, выполняется условие индукции. Значит, по индукции $M_1 \in \mathfrak{X}$ и $M_2 \in \mathfrak{X}$. Но тогда по определению класса Фиттинга $M_1 M_2 \in \mathfrak{X}$. Так как M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы и их произведение – нормальная \mathfrak{X} -подгруппа, то, ввиду максимальной, $G = M_1 M_2 \in \mathfrak{X}$. Получаем противоречие. Следовательно, существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M_1 = M_2 = M \in \mathfrak{X}$. Но тогда по определению \mathfrak{X} -радикала $M = G_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что $G_{\mathfrak{X}} < V < G$, где V не нормален в G . По условию теоремы $|G:V|=p$ (если $|G:V|=1$, то $G=V \in \mathfrak{X}$ – противоречие с выбором группы G). Так как $G_{\mathfrak{X}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа в G , то $G/G_{\mathfrak{X}}$ – композиционный фактор группы G .

Если $G \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ разрешима и является простой группой. Следовательно, $G/G_{\mathfrak{X}}$ является циклической группой простого порядка. Имеем $G/G_{\mathfrak{X}} \cong Z_q$, т.е. $|G/G_{\mathfrak{X}}|=q$. Заметим, что

$$\frac{|G : G_{\mathfrak{X}}|}{|V : G_{\mathfrak{X}}|} = |G:V|=p. \quad (2.1)$$

Следовательно, $q=p$ и $V=G_{\mathfrak{X}}$ – противоречие с тем, что \mathfrak{X} -инъекторы группы G не нормальны в G .

Если $G \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$ является σ -разрешимой группой. Но из определения σ -разрешимой группы порядок ее композиционных факторов есть либо простое число из σ , либо σ' -число. Ввиду равенства (2.1) $G/G_{\mathfrak{X}}$ не может σ' -группой, иначе группа $V/G_{\mathfrak{X}}$ являлась бы одновременно и σ -группой, и σ' -группой, что невозможно. Значит, порядок факторгруппы $G/G_{\mathfrak{X}}$ есть простое число из множества σ . Снова, с учетом равенства (2.1) получаем, что $V=G_{\mathfrak{X}}$ – противоречие с тем, что \mathfrak{X} -инъекторы группы G не нормальны в группе G .

Следовательно, как в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, так и в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$, получаем, что класс Фиттинга \mathfrak{X} нормален в классе Фиттинга \mathfrak{Y} .

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ справедливость утверждения теоремы 2.1 была установлена ранее в работе [11].

3. Максимальные по включению классы Фиттинга частично разрешимых групп

Класс Фиттинга \mathfrak{X} называется максимальным по включению подклассом класса Фиттинга \mathfrak{Y} (этот факт обозначается $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$ и из того, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$, где \mathfrak{M} – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$.

Достаточный признак максимальности по включению для случая частично разрешимых групп дает следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$, и пусть $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$). Если найдется простое число $p \in \mathbf{P}$ ($p \in \sigma$) такое, что в каждой группе $G \in \mathfrak{Y}$ ее \mathfrak{X} -инъектор имеет индекс 1 или p , то \mathfrak{X} максимален в \mathfrak{Y} .

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$, то из ограничений, налагаемых условием теоремы на класс \mathfrak{Y} по леммам 1.3 и 1.4 следует, что \mathfrak{X} -инъекторы в любой группе $G \in \mathfrak{Y}$ существуют и сопряжены.

Пусть V – \mathfrak{X} -инъектор группы G . По теореме 2.1 заключаем, что $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$. Значит, \mathfrak{X} -инъектор любой группы совпадает с ее \mathfrak{X} -радикалом. Поэтому $V=G_{\mathfrak{X}}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$.

Предположим, что класс Фиттинга \mathfrak{X} не максимален в \mathfrak{Y} . Тогда найдется такой класс Фиттинга \mathfrak{M} , что $\mathfrak{X} < \mathfrak{M} < \mathfrak{Y}$.

Выберем группы G и H из классов $\mathfrak{M}\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}\mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой \mathfrak{Y} -группы ее индекс по \mathfrak{X} -радикалу в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ равен простому числу $p \in \mathbf{P}$ (или $p \in \sigma$ для случая $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\sigma}$), то $|G/G_{\mathfrak{X}}|=|H/H_{\mathfrak{X}}|=p$. Но $\mathfrak{X} < \mathfrak{M}$. Значит, $H_{\mathfrak{X}} \leq H_{\mathfrak{M}}$.

Из того, что $|H/H_x|=p$, следует, что H_x – максимальная нормальная подгруппа группы H . Следовательно, ввиду $H_x \leq H_M$, получаем, что либо $H_M=H$, либо $H_x=H_M$. Случай, когда $H_M=H$, невозможен ввиду того, что тогда $H \in \mathcal{M}$ и получаем противоречие с выбором H .

Следовательно, справедливо равенство

$$H_x = H_M. \tag{3.1}$$

Пусть $T=G \times H$. Если предположить, что $T \in \mathcal{M}$, то из того, что $H \triangleleft T$, следует, что $H \in \mathcal{M}$. Последнее невозможно ввиду выбора H . Значит, $T_M \triangleleft T$.

Так как $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$, то по лемме 1.1 получаем $(T_M)_x = T_M \cap T_x = T_x$.

Покажем, что $T_M = G \times H_M$. Так как $|H/H_x|=p$ и с учетом равенства (3.1) имеем $|H|=|H_M| \cdot p$. Так как $G \in \mathcal{M}$ и $H_M \in \mathcal{M}$, то $G \times H_M \in \mathcal{M}$. Кроме того, $G \times H_M \triangleleft T$ в силу $G \triangleleft T$ и $H_M \triangleleft T$. Заметим также, что $|T|=|G| \cdot |H|$ и $|G \times H_M|=|G| \cdot |H_M|$. Отсюда $|T:(G \times H_M)|=p$. Значит, $G \times H_M$ – максимальная подгруппа, которая является нормальной в T . Более того, $T \notin \mathcal{M}$, что влечет $T_M \neq T$, т.е. $T_M \triangleleft T$. Тогда \mathcal{M} -радикалом группы T может быть только T_M . Остается единственная возможность, что $T_M = G \times H_M$.

Если $T_M \in \mathcal{X}$, то ввиду $G \triangleleft T_M$ получаем $G \in \mathcal{X}$. Последнее противоречит выбору группы G .

Следовательно, $T_M \notin \mathcal{X}$ и

$$(T_M)_x = T_x \triangleleft T_M. \tag{3.2}$$

Теперь, ввиду $H \in \mathcal{Y}$, по условию имеем $|H/H_x|=p$. Значит, H_x – максимальная нормальная подгруппа группы H . Но в силу равенства (3.1) получаем $|H/H_M|=p$. Так как $T=G \times H$ и $T_M=G \times H_M$, то

$$|T/T_M| = \frac{|G \times H|}{|G \times H_M|} = \frac{|G| \cdot |H|}{|G| \cdot |H_M|} = \frac{|H|}{|H_M|} = |H/H_M| = p.$$

Это означает, что $T_M \triangleleft T$. Теперь, ввиду $T \in \mathcal{Y}$ и $T \notin \mathcal{X}$ (в противном случае, если $T \in \mathcal{X}$, то возможно $|T/T_x|=1$), из условия теоремы $|T/T_x|=p$. Следовательно, $T_x \triangleleft T$. Таким образом, T_x и T_M являются максимальными нормальными подгруппами в T , причем $T_x \leq T_M$. Следовательно, $T_x = T_M$ – противоречие с неравенством (3.2). Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{X} < \mathcal{Y}$.

Теорема доказана.

В случае $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^c$ справедливость утверждения теоремы 3.1 была установлена в работе [11].

Заметим, что аналог утверждения теоремы 3.1 для класса \mathcal{X}^c , расширяющий известный достаточный признак максимальности Брайса – Косси [3] на случай частично разрешимых групп, был доказан в работе [11] с опорой на результат В.Г. Сементовского [12] о существовании \mathcal{X} -инъекторов и их сопряженности в группах из класса \mathcal{X}^c . Однако теорема 2.5.3 Го Вэньбиня [13] не является прямым следствием результата В.Г. Сементовского [12], поэтому результаты Брайса – Косси [3] и Н.В. Савельевой [11] нельзя назвать следствиями доказанных в настоящей работе теорем 2.1 и 3.1.

4. Максимальные по сильному вложению классы Фиттинга частично разрешимых групп

Напомним, что класс Фиттинга \mathcal{X} называется:

1) сильно вложенным в класс Фиттинга \mathfrak{X} (это обозначают $\mathfrak{X} \ll \mathfrak{Y}$), если \mathfrak{Y} -инъектор любой группы G содержит \mathfrak{X} -инъектор этой группы;

2) максимальным по сильному вложению подклассом класса Фиттинга \mathfrak{Y} (этот факт обозначается $\mathfrak{X} \ll \cdot \mathfrak{Y}$), если $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{Y}$ и из того, что $\mathfrak{X} \ll \mathfrak{M} \ll \mathfrak{Y}$, где \mathfrak{M} – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$.

Достаточный признак максимальности по сильному вложению для случая частично разрешимых групп дает нижеследующая теорема. Отметим лишь, что ввиду лемм 1.3 и 1.4 \mathfrak{X} -инъекторы в $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ -группах и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$ -группах существуют.

Теорема 4.1. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{Y}$, и пусть $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$). Если найдется простое число $p \in \mathbf{P}$ ($p \in \sigma$) такое, что в каждой группе $G \in \mathfrak{Y}$ ее \mathfrak{X} -инъектор имеет индекс 1 или p , то класс \mathfrak{X} максимален по сильному вложению в классе \mathfrak{Y} .

Доказательство. Так как по условию теоремы $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, и тогда по теореме 2.1 получаем, что $\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{Y}$. Следовательно, \mathfrak{X} -инъектор V любой группы $G \in \mathfrak{Y}$ совпадает с ее \mathfrak{X} -радикалом. Поэтому $V = G_{\mathfrak{X}}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{X} \ll \cdot \mathfrak{Y}$.

Предположим, что класс Фиттинга \mathfrak{X} не максимален по сильному вложению в классе \mathfrak{Y} . Значит, найдется такой класс Фиттинга \mathfrak{M} , что $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{M} \ll \mathfrak{Y}$.

Выберем группы G и H из классов $\mathfrak{M}\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}\mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой \mathfrak{Y} -группы ее индекс по \mathfrak{X} -радикалу в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ равен простому числу $p \in \mathbf{P}$ (или $p \in \sigma$ для случая $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^\sigma$), то $|G/G_{\mathfrak{X}}| = |H/H_{\mathfrak{X}}| = p$. Но по условию $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{Y}$, что означает строгое включение класса \mathfrak{X} в класс \mathfrak{M} , т.е. $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{M}$. Далее, следуя доказательству теоремы 3.1, можно показать, что класс $\mathfrak{Y}\mathfrak{M}$ не пуст, а класс $\mathfrak{M}\mathfrak{X}$ пуст. Последнее противоречит допущенному предположению о существовании класса Фиттинга \mathfrak{M} такого, что $\mathfrak{X} \not\ll \mathfrak{M} \ll \mathfrak{Y}$. Следовательно, класс Фиттинга \mathfrak{X} максимален по сильному вложению в классе \mathfrak{Y} .

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – S. 289–295.
2. Blessohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1–8.
3. Bryce, R.A. Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169–175.

4. Bryce, R.A. Strong Containment of Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Group Theory (Proc. Miniconf., Australian Nat. Univ., Canberra, 1975). Lecture notes in Math. Springer, Berlin. – 1977. – 573. – P. 6–16.
5. Cusack, E. Strong containment of Fitting classes / E. Cusack // J. Algebra. – 1980. – 64. – P. 414–429.
6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики СО РАН. – 1999. – 135 с.
8. Воробьев, Н.Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Доклады АН БССР. – 1991. – Т. 35, № 6. – С. 485–487.
9. Савельева, Н.В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Сиб. мат. журнал. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411–1419.
10. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – №5. – S. 337–339.
11. Савельева, Н.В. Инъекторы и максимальные подклассы Фиттинга / Н.В. Савельева // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2008. – № 1 (47). – С. 126–130.
12. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
13. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Sc. Press Kluwer Acad. Public, 2000.
14. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

N.V. Savelyeva. On Sufficient Criteria for Maximality of Fitting Classes of Finite Partially Soluble Groups

In this paper, the sufficient conditions for the Fitting class \mathfrak{X} to be normal and maximal (by inclusion, by strong containment) in the Fitting class \mathfrak{Y} of finite partially soluble groups (in particular, of finite groups with the property that their quotients by the radicals are soluble or $\pi(\mathfrak{X})$ -soluble) are established in terms of the indices of \mathfrak{X} -injectors. It is proved that if \mathfrak{X} is a proper Fitting subclass of the Fitting class \mathfrak{Y} , and for \mathfrak{Y} it holds that $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ or $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, where \mathfrak{S} and $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ respectively denote the class of all finite soluble groups and the class of all finite $\pi(\mathfrak{X})$ -soluble groups, in the set of all prime numbers (when $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$) or in $\pi(\mathfrak{X})$ (when $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) there exists a prime number p such that in every group $G \in \mathfrak{Y}$ its \mathfrak{X} -injector has index 1 or p , then \mathfrak{X} is normal and maximal by inclusion in the class \mathfrak{Y} . If, together with the above terms and conditions, the Fitting class \mathfrak{X} is strongly contained in the class \mathfrak{Y} , then \mathfrak{X} is maximal by strong containment in \mathfrak{Y} .

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.10.2012

УДК 517

Н.П. Семенчук

ФОРМУЛЫ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СРЕДНИХ СОПРЯЖЁННОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

В работе найдена асимптотическая формула типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье дифференцируемых нечетное число раз функций в классе $L(-\infty, +\infty)$. Полученные результаты могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем, как линейных, так и нелинейных.

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определённого класса от её линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такую задачу решила советский математик Е.В. Вороновская в 1932 году, приближая дважды непрерывно-дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции их полиномами Бернштейна. Она показала, что

$$f(x) - B_n(f, x) = -\frac{1}{2} \frac{x(1-x)}{n} f''(x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

В дальнейшем результат Вороновской обобщался многими математиками (С.Н. Бернштейн, И.П. Натансон, П.П. Коровкин, А.В. Ефимов, А.К. Покало и др.). В исследованиях этих авторов операторы приближения в основном были построены на базе рядов Фурье.

В нашей работе найдены формулы типа Вороновской для обобщения средних сопряженного интеграла Фурье, дифференцируемых нечётное число раз функций.

Вначале рассмотрим приближение функций суммами Фейера. Доказана теорема.

Теорема 1. Если $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ и ограничена на числовой прямой, то

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\infty} \frac{f\left(x - \frac{t}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right), \quad (1)$$

где

$$F_\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \left(1 - \frac{u}{\sigma}\right) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \quad (2)$$

есть $(C, 1)$ – средние действительного интеграла Фурье (средние Фейера);

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right) = \sup_{|t| \leq \frac{1}{\sigma}} \max_{x \in R} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| - \quad (3)$$

модули гладкости второго порядка функции f ; $\lambda > 0$ – произвольная действительная постоянная.

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле (2) (используем теорему Фубини), получим

$$\begin{aligned}
 F_\sigma(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{\sigma(x-t)^2} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^x + \int_x^{+\infty} \right) = \\
 &= I_1 + I_2 = \left[\begin{array}{l} I_1 : \text{подстановка } t := x-t \\ I_2 : \text{подстановка } (-t) := x-t \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Используя известную формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = |m| \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

получим:

$$-f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} 2f(x) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt. \tag{6}$$

Тогда

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_x(t) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt, \tag{7}$$

где

$$\Phi_x(t) = f(x-t) - 2f(x) + f(x+t). \tag{8}$$

Представим (7) в следующем виде:

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \Phi_x(t) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} \cos \sigma t dt = I_1 + I_2 - I_3. \tag{9}$$

Оценим I_1 и I_3 .

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi \sigma} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} |\Phi_x(t)| \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{t^2} dt \leq C \omega_2 \left(\frac{1}{\sigma}; f \right),$$

то есть

$$I_1 = O \left(\omega_2 \left(\frac{1}{\sigma}; f \right) \right). \tag{10}$$

Для оценки I_3 воспользуемся тем, что функция $f(x)$ ограничена на числовой прямой. Тогда, по теореме С.Н. Бернштейна (например, [1, с. 243]), существует целая функция $g_\sigma(x) \in B_\sigma$ (B_σ – класс целых функций $g_\sigma(x)$ экспоненциального типа с показателем $\leq \sigma$, для которых $\sup_{x \in R} |g_\sigma(x)| < +\infty$), наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на R .

Такую функцию обозначим через $g_\sigma(f; x)$. Тогда

$$A_\sigma(f) := \sup_{x \in R} |f(x) - g_\sigma(f; x)| = \inf_{g_\sigma \in B_\sigma} \sup_{x \in R} |f(x) - g_\sigma(x)| \quad (11)$$

есть наилучшее приближение функции $f(x)$ на числовой прямой посредством функций из класса B_σ . Будем иметь оценку:

$$\begin{aligned} |\Phi_x(t) - g_\sigma(f; x_1 t)| &= |(f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)) - \\ &- (g_\sigma(f; x-t) - 2g_\sigma(f; x) + g_\sigma(f; x+t))| \leq CA_\sigma(f). \end{aligned} \quad (12)$$

$f(x)$ при $\sigma > 0$

Известно, (например, [1, с. 262]), что для ограниченной на R функции будет

$$A_\sigma(f) \leq C_2 \omega_2\left(f, \frac{1}{\sigma}\right). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\Phi_x(t) = g_\sigma(f; x_1 t) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (14)$$

С учётом (14) преобразуем I_3 :

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{g_\sigma(f; x_1 t)}{\sigma^2} \cos \sigma t dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right) = I_3^1 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (15)$$

В интеграле I_3^1 проведем интегрирование по частям два раза ($dv = \cos \sigma t dt$), получим:

$$I_3^1 = \frac{g'_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3 \sigma} - \frac{2g_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} - I_4, \quad (16)$$

где

$$I_4 = \frac{1}{\pi \sigma^3} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{g''_\sigma}{t^2} - \frac{4g'_\sigma}{t^3} + \frac{6g_\sigma}{t^4} \right) \cos \sigma t dt. \quad (17)$$

Дальше воспользуемся неравенством из [2]

$$\sup_{x \in R} |g''_\sigma(f; x)| \leq \frac{\sigma^2}{2^2} \omega_2\left(g_\sigma, \frac{\pi}{\sigma}\right) \leq C_2 \sigma^2 \omega_2\left(g_\sigma, \frac{1}{\sigma}\right). \quad (18)$$

Учитывая (11) и (13), получим:

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_\sigma\right) = \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_\sigma - f + f\right) \leq C'_2 \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right).$$

Значит,

$$|g''_\sigma(f; x)| \leq C \sigma^2 \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right). \quad (19)$$

Дальше воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях, получим:

$$\left| g'_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right) \right| \leq C \sigma \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right). \quad (20)$$

Тогда

$$\frac{g'_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3\sigma} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (21)$$

Аналогично, применяя дважды формулу Лагранжа и оценку (19), получим:

$$-\frac{2g_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (22)$$

Дальше оценим I_4 .

Применяя формулу Лагранжа, будем иметь:

$$g_\sigma(f; x, t) = t^2(\theta_2 - \theta_1) g''_\sigma(f, x + \theta t), \quad (23)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0, 1)$.

Также

$$g'_\sigma = 2tg''_\sigma(f; x + \theta t) \quad (24)$$

и

$$g''_\sigma = g''_\sigma(f; x + t) + g''_\sigma(f; x - t). \quad (25)$$

Из (23) – (25) и (19) имеем:

$$\left| \frac{g''_\sigma}{t^2} - \frac{4g'_\sigma}{t^3} + \frac{6g_\sigma}{t^4} \right| \leq \frac{C\sigma^2\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)}{t^2}. \quad (26)$$

Тогда

$$I_4 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (27)$$

Из (15), (16), (21), (22) и (27) следует, что

$$I_3 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (28)$$

С учетом (28) и (10) будем иметь:

$$F_\sigma(x) - f(x) = I_1 + I_2 - I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (29)$$

Возьмем $\forall \lambda \in R_+$. Из оценки

$$\max_x |\Phi_x(t)| \leq \sup_{|t| \leq \max\left\{\frac{\lambda}{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}\right\}} \max |\Phi_x(t)| = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right) \quad (30)$$

получим:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt \right| \leq \frac{1}{\pi\sigma} \int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{|\Phi_x(t)|}{t^2} dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (31)$$

Из (29) и (31) окончательно получим справедливость заключения теоремы 1.

Следствие 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, чтобы $f(x) \in \text{lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то из (1) и (3) видно, что:

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\infty} \frac{f\left(x - \frac{t}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad (32)$$

причем, если $0 < \alpha < 1$, то и интеграл в (32) также имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$, то есть

$$F_\sigma(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right). \quad (33)$$

Обобщим указанные выше результаты для обобщённых средних сопряженного интеграла Фурье.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}D$ (ρ – фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций вместе со своими существующими на R $(2\rho+1)$ – первыми производными, причем для любых $t \in R$ справедливо неравенство

$$|f^{(2\rho+1)}(t)| \leq D < \infty. \quad (34)$$

Очевидно, что все производные до порядка 2ρ включительно вместе с самой функцией $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha = 1$ (при доказательстве воспользоваться формулой Лагранжа на любом отрезке $[a, b] \subset R$).

Построим обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье с помощью формулы:

$$\bar{U}_\sigma(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\sigma K(\sigma, u) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(x-t) dt, \quad (35)$$

где

$$K(\sigma, u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) \left(\frac{u}{\sigma}\right)^m \quad (36)$$

есть абсолютно сходящийся функциональный ряд (сумма) по степеням $\frac{u}{\sigma}$, $u \in [0, \sigma]$, $\sigma > 0$.

Коэффициенты ряда (суммы) (36) такие, что ряд

$$A'_\sigma := a_0(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} m |a_m(\sigma)| \quad (37)$$

сходится.

Доказана теорема.

Теорема 2. Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$, то

$$\begin{aligned} \bar{U}_\sigma(f; x) = & \sum_{v=0}^{\rho} (-1)^v \overline{f^{(2v)}}(x) \frac{a_{2v}(\sigma)}{\sigma^{2v}} + \sum_{v=1}^{\rho+1} (-1)^{v+1} f^{(2v-1)}(x) \frac{a_{2v-1}(\sigma)}{\sigma^{2v-1}} + \\ & + \frac{(-1)^\rho}{\sigma^{2\rho+1}} j_{\sigma, \rho}(x) \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) + \frac{1}{\sigma^{2\rho+1}} \left(O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(2\rho+1)}\right)\right) + B_{\sigma, \rho} \right) A'_\sigma, \end{aligned}$$

где

$$B_{\sigma, \rho} = O(1); j_{\sigma, \rho}(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_x^{(2\rho+1)}(t) \frac{\sin \sigma t}{t} dt;$$

$$\Phi_x^{(2\rho+1)}(t) := f^{(2\rho+1)}(x-t) - 2f^{(2\rho+1)}(x) + f^{(2\rho+1)}(x+t);$$

$$\overline{f^{(2\nu)}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{2\nu} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(u(x-t) + \frac{2\nu+1}{2}\pi\right) dt;$$

$$f^{(2\nu-1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{2\nu-1} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(u(x-t) + \frac{(2\nu-1)\pi}{2}\right) dt.$$

Замечание 1. Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$ и $f^{(2\rho+1)} \in Lip_M \alpha$ ($Lip_M \alpha$ – класс Липшица), где $\alpha \in (0, 1)$, то $B_{\sigma, \rho} = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$ и $O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(2\rho+1)}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$.

Замечание 2. Для методов суммирования, у которых $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) = 0$, например: типичных средних (средних Зигмунда), у которых $K(\sigma, u) = 1 - \left(\frac{u}{\sigma}\right)^s$, слагаемое с множителем $j_{\sigma, \rho}(x)$ будет в формуле (38) отсутствовать.

И в этом случае, например, при выполнении условий замечания 1 (если $s > 2\rho + 1$) формула (38) примет вид

$$\overline{U}_{\sigma}(f; x) = \overline{f}(x) + O\left(\frac{1}{\sigma^{2\rho+1+\alpha}}\right). \quad (39)$$

Доказательство теоремы 2.

Проводим преобразование правой части равенства (35), используя интегрирование по частям, теорему Фубини при изменении порядка интегрирования, известные, а также доказываемые в работе тождества и оценки. В результате указанных преобразований получим выражения, содержащие в качестве компонентов множители (слагаемые), для которых применяют оценки вида (1) (теорема 1).

Введенный формулой (36) класс методов суммирования интегралов является регулярным и включает в себя многие известные классические методы суммирования (средние Фейера, метод типичных средних – средних Зигмунда, средние Рисса, метод Бернштейна – Рогозинского и др.).

Полученные в работе результаты исследований могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И.И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени / И.И. Ибрагимов. – Баку, 1962.
2. Никольский, С.М. Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна / С.М. Никольский // Докл. АН СССР, 60. – 1948. – № 9. – С. 1507–1510.

N.P. Semenchuk. Formulas of Voronovskaya's Type for Generalized Average of Conjugate Fourier's Integral

We established asymptotic formulas of Voronovskaya's type for generalized average of conjugate Fourier's integral of odd times differentiated functions in the class $L(-\infty, +\infty)$. The results can be used at development approximate methods of the decision differential and integral equations, as well as their systems, as linear so nonlinear.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 08.10.2012

УДК 517.5

Ю.И. Харкевич, Т.Н. Жернова, К.В. Швай

**ПОЛНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ВЕЛИЧИН ПРИБЛИЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ИХ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА**

Рассматривается вопрос об асимптотическом поведении точных верхних граней уклонения сопряженных периодических функций от их сопряженных интегралов Пуассона. Получено разложение верхней грани в асимптотический ряд, что дает возможность выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольного порядка.

Пусть C – пространство 2π – периодических непрерывных функций с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $|f^{(r)}(t)| \leq 1$, а через \bar{W}^r – множество функций сопряженных к функциям из класса W^r , то есть

$$\bar{W}^r = \left\{ \bar{f} : \bar{f}(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \neq \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t), f \in W^r \right\}.$$

Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу Lip_1 , если для $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо неравенство

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|.$$

Рассмотрим краевую задачу (в единичном кругу) для уравнения

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах. То есть уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq \rho < 1, -\pi \leq x \leq \pi). \tag{2}$$

Решение уравнения (2), что удовлетворяет граничное условие

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

где $f(x)$ – суммируемая 2π -периодическая функция, можем записать в виде

$$P_\rho(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right\} dt \neq \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Величину $P_\rho(f; x)$ принято называть интегралом Пуассона функции f .

Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Пуассона запишем в виде

$$P_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt \right\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt.$$

$$\text{Величину } \bar{P}_\rho(f; x) = P_\rho(\bar{f}; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \frac{\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} dt$$

называют сопряженным интегралом Пуассона функции f .

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; P_\rho)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - P_\rho(f; x)\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, $P_\rho(f; x)$ – интегралы Пуассона, будем называть, следуя А.И. Степанцу [1], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho) = \varphi(P_\rho; \rho)$, такая, что при $\rho \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; P_\rho)_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Пуассона P_ρ на классе \mathfrak{N} в метрике пространства C .

Определение. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ называется полным асимптотическим разложением или асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-$, если для произвольного натурального N при $\rho \rightarrow 1-$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^N g_n(\rho) + o(g_N(\rho))$$

и для $\forall n \in N$

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|).$$

Кратко будем записывать этот факт следующим образом

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона, а также сопряженными интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

И.П. Натансон [2] решил задачу Колмогорова–Никольского на классах W^1 для интеграла Пуассона:

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho)|\ln(1-\rho)| + O(1-\rho), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

В работе [3] А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C$:

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + \varepsilon_\rho,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{1-\rho} \left\{ \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t} + 1 \right\} dt, \quad 0 < \rho < 1.$$

$$\mathcal{E}(W^r; P_\rho)_C = \sum_{i=1}^{r/2} \frac{1}{(2i-1)!} \tilde{K}_{r-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-2)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{r-2i} \ln^{2i} \frac{1}{\rho} - \alpha_\rho^r,$$

$$\alpha_\rho^r = \frac{4}{\pi} \int_{\rho}^1 \int_{t_2}^1 \dots \int_{t_r}^1 \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_r} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_r,$$

если r – четное, $0 < \rho < 1$.

$$\mathcal{E}(W^r; P_\rho)_C = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!} \tilde{K}_{r-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{r-2i} \ln^{2i} \frac{1}{\rho} - \beta_\rho^r,$$

$$\beta_p^r = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^1 \int_{t_1}^1 \dots \int_{t_{r-1}}^1 \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2 \dots t_r} dt_1 dt_2 \dots dt_r,$$

если r – нечетное, $0 < \rho < 1$, где K_n и \tilde{K}_n – константы Н.И. Архиезера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара

$$K_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N,$$

и для оценки поведения этих величин отметил, что при $\rho \rightarrow 1-$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi} (1 + \ln 2)(1 - \rho) + o(1 - \rho),$$

$$\alpha_p^r = O((1 - \rho)^r), \quad \beta_p^r = O\left((1 - \rho)^r \ln \frac{1}{1 - \rho}\right).$$

В работе [4] Л.В. Малей было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса W^1 от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k (1 - \rho)^k \ln \frac{1}{1 - \rho} + \beta_k (1 - \rho)^k \right\},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i \cdot 2^i} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

позже оно было передоказано в работе Е.Л. Штарка [5].

В работе В.А. Баскакова [6] были получены полные асимптотические разложения величин $\mathcal{E}(W^r; P_\delta)_C$, по степеням $\frac{1}{\delta}$, $\delta \rightarrow \infty$ в случае когда $r = 1, 2, 3$.

Впервые оценки $\mathcal{E}(\bar{W}^1; P_\rho)_C$ были получены в работе Б. Надя [7], где, в частности, были установлены следующие равенства

$$\mathcal{E}(\bar{W}^1; P_\rho)_C = \frac{4}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

$$\mathcal{E}(\bar{W}^1; P_\rho)_C = (1 - \rho) + O((1 - \rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Позже в работе В.А. Баскакова [8] были найдены общие выражения, которые позволяют получать асимптотические разложения величин $\mathcal{E}(\bar{W}^r; P_\delta)_C$, по степеням $\frac{1}{\delta}$, $\delta \rightarrow \infty$, а именно

$$\mathcal{E}(\bar{W}^r; P_\delta)_C = \frac{2}{\pi \delta^2} \left| \int_0^\infty \frac{[q_r(t)]_{2\pi}}{t \left(\frac{1}{\delta^2} + t^2 \right)} dt \right|, \quad r = 2k + 1,$$

$$\mathcal{E}(\bar{W}^r; P_\delta)_C = \frac{2}{\pi \delta^2} \left| \int_0^\infty \frac{[\theta_r(t)]_{2\pi}}{t \left(\frac{1}{\delta^2} + t^2 \right)} dt \right|, \quad r = 2k,$$

где $[q_{2k+1}(t)]_{2\pi}$ и $[\theta_{2k}(t)]_{2\pi}$ – нечетные 2π -периодические продолжения многочленов $q_{2k+1}(t)$ и $\theta_{2k}(t)$ вида

$$q_{2k+1}(t) = \int_0^t dt_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_{2k-1}} dt_{2k} \int_0^{t_{2k}} h_0(t_{2k+1}) dt_{2k+1},$$

где $h_0(t)$ определяется по формуле

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \end{cases}$$

$$\theta_{2k}(t) = \int_0^t dt_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2k-2}} dt_{2k-1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_{2k-1}} dt_{2k}.$$

Главной целью данной работы есть нахождения полного асимптотического разложения для величины

$$\mathcal{E}(Lip_1 1; \bar{P}_\rho)_C = \sup_{f \in Lip_1 1} \left\| \bar{f}(\cdot) - \bar{P}_\rho(f; \cdot) \right\|_C,$$

которое позволяет выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольно высокого порядка малости.

Имеет место теорема.

Теорема. Если $f \in Lip_1 1$, то при $\rho \rightarrow 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\mathcal{E}(Lip_1 1; \bar{P}_\rho)_C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k \cdot 2^{k-1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\rho)^{2m+s}}{2^{2m+s}} \cdot \frac{\Gamma(2m+s)}{\Gamma(2m)} \cdot \alpha_m, \quad (3)$$

где

$$\alpha_m = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{m+k+1}}{2m-2k+1} + 1. \quad (4)$$

Доказательство.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \bar{P}_\rho(f; x) - \bar{f}(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \frac{\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{2\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \left(1 - \frac{2\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \frac{1-2\rho \cos t + \rho^2 - 2\rho \sin t \cdot \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt. \end{aligned}$$

Используя формулы двойных синуса и косинуса и главное тригонометрическое тождество, получим равенство

$$\bar{P}_\rho(f; x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_x(t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt.$$

Вследствие 2π -периодичности функции $f(x)$ имеем:

$$\bar{P}_\rho(f; x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_x(t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \psi_{x+\pi}(\pi-t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt.$$

Поскольку $f \in Lip_1 1$, то, применяя свойство модуля разности, получим

$$\begin{aligned} |\overline{P}_\rho(f; x) - \overline{f}(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi-t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $g(x)$ нечетную 2π -периодическую функцию, определенную на сегменте $[0; \pi]$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Легко видеть, что правая часть (5) равна $\overline{P}_\rho(g, 0) - g(0)$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Lip_1 1; \overline{P}_\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того, чтобы вычислить интегралы I_1, I_2, I_3 , найдем сначала неопределенный интеграл

$$\int \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt.$$

Интегрируя по частям, полагая

$$u = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad dv = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt$$

и используя формулу ([9, с. 163]), имеем

$$\int \frac{1-a^2}{1-2a \cos t + a^2} dt = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \quad (0 < a < 1, \quad |x| < \pi).$$

Получим

$$\int \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - 2 \int \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) d \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right).$$

Используем опять интегрирование по частям и формулу ([9, с. 224]).

$$\int \frac{1}{t^2} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} dt = -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + t^2}{t^2},$$

Имеем

$$\int \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = -\frac{1+\rho}{1-\rho} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}. \quad (7)$$

Из (7) вытекает, что

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = \ln \left(1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \right).$$

Для нахождения интегралов I_1 и I_3 применим метод интегрирования по частям

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = \left. \begin{array}{l} u = t, \quad dv = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt, \\ v = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}},$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$$

Подставив полученные результаты для I_1, I_2, I_3 в (6), будем иметь

$$\mathcal{E}(\operatorname{Lip}_1; \bar{P}_\rho)_C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt = U_1 - U_2. \quad (8)$$

Используя формулы ([9, с. 543])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a \cdot \operatorname{tg} t) dt = \frac{\pi}{2} \ln a, \quad a > 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 t) dt = \pi \ln(a+b), \quad a > 0, b > 0,$$

ВИДИМ, ЧТО

$$U_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right) dt = 2 \ln \frac{2}{1+\rho}.$$

Разложим функцию $\phi(\rho) = 2 \ln \frac{2}{1+\rho}$ в ряд Тейлора по степеням $1-\rho$:

$$U_1 = \phi(\rho) = (1-\rho) + \frac{(1-\rho)^2}{2^2} + \frac{(1-\rho)^3}{2^2 \cdot 3} + \frac{(1-\rho)^4}{2^3 \cdot 4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k \cdot 2^{k-1}}. \quad (9)$$

Сделав замену переменной в интеграле U_2 , получим:

$$U_2 = -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \frac{tg^2 \frac{t}{2} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2 \frac{t}{2}} dt = -\frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left(1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 tg^2 t \right) dt.$$

Подынтегральную логарифмическую функцию разложим в ряд:

$$U_2 = -\frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \cdot \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m} \cdot tg^{2m} t dt = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \cdot \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 tg^{2m} t dt. \quad (10)$$

Для нахождения интеграла в правой части равенства (10) используем формулу ([9, с. 158]):

$$\int tg^{2n} t dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{tg^{2n-2k+1} t}{2n-2k+1} + (-1)^n \cdot t.$$

Имеем, что

$$U_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m} \cdot \alpha_m,$$

где α_m определяется равенством (4).

Разложив функцию $\phi(\rho) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{2m}$ по степеням $1-\rho$ в ряд Тейлора, получим:

$$U_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\rho)^{2m+s}}{2^{2m+s}} \cdot \frac{\Gamma(2m+s)}{\Gamma(2m)} \cdot \alpha_m. \quad (11)$$

После подстановки (9) и (11) в (8) имеем (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
2. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72. – С. 11–14.
3. Тиман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74. – С. 17–20.
4. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. – 1961, № 3. – С. 25–32.
5. Штарк, Е.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона / Е.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – Т. 13, №1 – С. 21–28.
6. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.

7. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson / B. Sz.-Nagy. – Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1950. – V. 1. – P. 183–188.

8. Баскаков, В.А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абея – Пуассона / В.А. Баскаков // Применение функционального анализа в теории приближений, вып. 5. – Калинин : 1975. – С. 14–20.

9. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Гранштейн, И.М. Рьжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Yu.I. Kharkevich, T.N. Zhernova, K.V. Shvaj. The Full Asymptotic Decompositions of Values of Approximation of Conjugate Functions by their Conjugate Poisson Integrals

We investigate the question of asymptotic behavior of exact upper borders of defluxion the conjugate periodic functions from their conjugate Poisson integrals. We obtained the decomposition of upper border in asymptotic series that gives the possibility to write down the constants of Kolmogorov-Nikolsky of arbitrary order.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 05.09.2012

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Аўсіюк А.М. – кандытат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Андрусевіч П.П. – выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Басін У.І. – студэнт матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Будзько Д.А. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры інфарматыкі і камп'ютарных сістэм Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Вувунікян Ю.М. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры тэорыі функцый, функцыянальнага аналізу і прыкладной матэматыкі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Гоман П.М. – старшы выкладчык Камандна-інжынернага інстытута МНС Рэспублікі Беларусь

Жарнова Т.М. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Задарожны А.А. – студэнт матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Кальчук І.У. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Кожух І.Р. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, прафесар, прафесар кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Мадорскі В.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Макавій Р.А. – аспірант 2-га года навучання кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Макаед І.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Плецохоў У.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Пракапеня А.М. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, прафесар Варшаўскага ўніверсітэта прыродазнаўчых навук

Прымас І.П. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Равінскі А.Ф. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна, прафесар тэхнічнага ўніверсітэта ў Беластоку (Польшча)

Савельева Н.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры інфарматыкі і камп'ютарных сістэм Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Савянко У.С. – доктар тэхнічных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Саўчук В.Ф. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Семянчук М.П. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Серы А.І. – асістэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Собаль В.Р. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай і тэарэтычнай фізікі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя М. Танка

Стражаў В.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Сцепанюк Т.А. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Трыфанава І.У. – старшы выкладчык кафедры алгебры, геаметрыі і методыкі выкладання матэматыкі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Харкевіч Ю.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Шаўрэй С.Д. – асістэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Швай К.В. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Выделенные красным части текста, необходимо перевести. Остальное – проверить.

Е.М. Овсиюк

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В 2-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Построены точные решения уравнения Дирака в 2-мерном римановом пространстве отрицательной кривизны, гиперболической плоскости Лобачевского, в присутствии внешнего магнитного поля, являющегося аналогом однородного магнитного поля в пространстве Минковского. Для описания магнитного поля используются системы цилиндрических и квазидекартовых координат, последняя определяет полуплоскость Пуанкаре. В обеих системах координат уравнение Дирака решено точно, построены волновые функции. Найдена обобщенная формула для уровней энергии, описывающая квантование движения частицы в магнитном поле. При разделении переменных использована диагонализация оператора спиральности для дираковской частицы на плоскости Лобачевского.

Е.М. Ovsyuk. A Particle with Spin 1/2 in a Magnetic Field in Two-Dimensional Lobachevsky Space

Exact solutions of the Dirac equation in two-dimensional Riemannian space of negative curvature, the hyperbolic Lobachevsky plane, in presence of an external magnetic field, which is an analogous of the uniform magnetic field in Minkowski space, are constructed. In describing the generalized magnetic field, cylindrical and quasi-Cartesian coordinates are used, the latter determines the Poincaré half-plane. In both coordinate systems, the Dirac equation is solved exactly, the wave functions are constructed. A generalized formula for the energy levels is produced, which describes the quantized motion of a particle in the magnetic field in the Lobachevsky plane. When separating the variables, diagonalization of an extended helicity operator for a Dirac particle is used.

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛЕРА

Показано, что наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана комплексного поля Дирака – Кэлера является группа $SO(5,4)$. Данная группа значительно шире группы $SO(4,2)$, обычно сопоставляемой в литературе данному полю, и содержит последнюю в качестве подгруппы. Установленное расширение группы симметрии поля Дирака – Кэлера не нарушает его соответствия 16-компонентному дираковскому полю с лагранжианом $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusevich. Symmetry's Properties of the Dirac-Kähler Field

It is shown that the most complete group of internal symmetry of the Lagrangian of a complex field Dirac - Kähler group is $SO(5,4)$. This group is significantly wider than the group $SO(4,2)$, usually mapped in the literature that field, and contains the latest in a subgroup. Set extension of the symmetry of the Dirac field - Kahler does not break his match 16-component Dirac- Kähler field with Lagrangian $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$.

А.Ф. Ревинский, И.И. Макоед

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД МОТТА-ХАББАРДА В ФЕРРИТЕ ВИСМУТА

В работе представлены данные о механизме формирования диэлектрического состояния в энергетическом спектре мультиферроика BiFeO_3 . Результаты первопринципных расчетов зонной структуры феррита висмута в рамках LSDA- и LSDA+U-приближений указывают на наличие

перехода «металл-диэлектрик» обусловленного обменно-корреляционным взаимодействием 3d электронов ионов железа.

A.F.Revinski, I.I.Makoed Phase Transition of Mott-Habbsrd in Ferrite Bismuth

The information about dielectric condition in electronic energy spectrum of multiferroic BiFeO₃ is represented in this article. The results of ab-initio calculation of band structure of bismuth ferrite within the bounds of LSDA- and LSDA+U approach indicate the existence of metal-dielectric transition stipulated by the exchange-correlated interaction between 3d electrons of iron ions.

V.C. Савенко, С.Д. Шаврей

ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДИФИКАЦИЯ АЛЮМИНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В статье представлены результаты явления электропластичности деформационного алюминия. Показано изменения числа перегибов n , временного сопротивления G и удельного сопротивления ρ от истинного сужения L_i , а также параметры кристаллической решетки, размеры блоков и микроискажения в образцах алюминия, деформированного при различных значениях плотности и полярности действия тока. Показано, что наложение импульсного тока на зону деформации во время электропластического волочения приводит к изменению деформационных процессов и, как следствие, влияет на механические характеристики алюминиевой проволоки после деформации, что приводит к улучшению служебных характеристик изделия, сокращению энергетических затрат в технологическом процессе.

V.S. Savenko, S.D. Shavrey. Aluminum Deformation Modification under Pulsed Electric Current

Processing of metals by pressure has wide application in industry and is based on use characteristic for metals property of plasticity. Plasticity of material is one of the major characteristics at manufacturing wires from copper, aluminum, tungsten.

А.И. Серый

О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ РЕЗОНАНСА

В рамках квантовой электродинамики в древесном приближении получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости линейной поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов. Учтена конечная ширина резонанса на промежуточном виртуальном уровне Ландау, произведено усреднение по импульсам электронов в приближении нулевой температуры.

A.I. Sery. On Compton Rotation in Magnetic Field with Regard to Resonance Width.

In the framework of quantum electrodynamics in tree approximation a formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of linear polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons. The finite width of resonance on intermediate virtual Landau level is taken into account, averaging on the momenta of electrons is performed in zero temperature approximation.

В.Р. Соболев, П.Н. Гоман

РАДИАЦИОННОГО НАГРЕВА ПО МЕТОДОЛОГИИ РЕГЛАМЕНТИРУЮЩИХ ДОКУМЕНТОВ

В работе проведен сравнительный анализ регламентированных техническими нормативными правовыми актами методов расчета радиационных потоков энергии от протяженных источников. Предписываемые выражения по определению углового коэффициента облученности сопоставляются с результатами строгого расчета от плоского теплового фронта при взаимной перпендикулярности плоскостей источника и облучаемой поверхности. Выявлены противоречивые данные в оценке теплового воздействия на горючий материал при использовании традиционных

подходов, которые превышают значения потока энергии. Кроме практической ограниченности существующих методик рассмотрены технические аспекты вычислений в смысле их упрощения. Представлены рекомендации для прецизионного выявления пространственного распределения интенсивности потока от протяженного фронта пламени.

V.R.Sobol, P.N.Goman Parameters of Radiation Heating According to the Methodology of Regulatory Documents

A comparative analysis of the methods of calculation of radiation energy fluxes of extended sources on the basis of regulatory technical documents has been carried out. Prescribed expressions to determine the slope of the irradiance are compared with the results of a rigorous calculation of the heat of flat front with mutually perpendicular planes of source and irradiated surface. Conflicting data in the evaluation of heating effects on combustible material using traditional approaches have been revealed, which overestimate the values of energy flow. Besides practical limitation of existing techniques, technical aspects of computing in terms of their simplification are discussed. Recommendations are given for precise identification of the spatial distribution of flux intensity from an extended flame front.

Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня

ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

В данной работе рассмотрена проблема устойчивости равновесных решений пространственной Ньютоновой круговой ограниченной задачи четырёх тел, сформулированной на основе известных треугольных решений Лагранжа задачи трёх тел. Использование возможностей системы компьютерной алгебры *Mathematica* позволило построить вещественное каноническое преобразование по Биркгофу, приводящее функцию Гамильтона к нормальной форме до четвёртого порядка включительно по возмущениям. Применяя теоремы Арнольда и Маркеева, доказали, что три положения равновесия устойчивы для большинства начальных условий, если массовые параметры системы принадлежат областям линейной устойчивости на плоскости параметров. Показано, что при выполнении резонансных соотношений $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ в системе наблюдается неустойчивость положений равновесия, в то время как остальные резонансы третьего и четвёртого порядков не влияют на устойчивость.

D.A. Budzko, A.N. Prokopenya. Relative Equilibrium Positions and Analysis of their Stability in Spatial Circular Restricted Four-Body Problem

In the present paper we consider the stability problem of equilibrium solutions of spatial Newtonian circular restricted four-body problem, formulated on the basis of famous triangular Lagrange's solutions. Using the computer algebra system Mathematica, we have constructed Birkhoff's type canonical transformation, which reduce the Hamiltonian function to normal form up to the fourth order in perturbations. Applying Arnold's and Markeev's theorems, we have proved that three equilibrium positions are stable for the majority of initial conditions if mass parameters of the system belong to the domain of the solutions linear stability in the parameter space. It was shown that resonance conditions of the form $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$ and $\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$ cause instability of equilibrium positions while other resonances of third and fourth orders do not influence on their stability.

Ю.М. Вуеуникян, И.В. Трифонова

КОМПОНЕНТЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КОМПОЗИЦИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА С СОСТАВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Эволюционный оператор второй кратности с обобщенными импульсными характеристиками находит широкое применение при решении задач нелинейных многомерных эволюционных систем с двумя входными и двумя выходными сигналами. В работе рассматривается аналитическое задание компонент высшего порядка композиции эволюционного оператора второй кратности с составным оператором слева и справа. Главной целью исследования является получение зависимости между ядрами оператора композиции и обобщенными ядрами композируемых операторов. Доказаны теорема для четвертого компонента композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором и формула для задания любой компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором

слева. Получены формулы, задающие компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором справа.

Y.M. Vuvunikjan, I.V. Trifonova. Components of High Orders of Composition of The Evolution Operator and The Compound Operator

This article describes the nonlinear evolution operator of second multiplicity with two-component generalized vector functions with support on $[0; +\infty)^2$. The theorem for the fourth components of a composition the evolutionary operator with the compound operator is proved. The evolutionary operator of second multiplicity is used while studying the nonlinear multi-size evolution systems with two input and output signals. The received results will find application in the theory of nonlinear evolutionary systems.

И.В. Кальчук, А.О. Задорожный, Р.А. Маковий

**ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ВЕЛИЧИН ОТКЛОНЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ
ПУАССОНА
ОТ ФУНКЦИЙ С КЛАССА ГЁЛЬДЕРА**

При приближении функций класса Гёльдера их интегралами Пуассона возникают асимптотические разложения, коэффициенты которых не представлены в явном виде. Этот вопрос решен с помощью дзета-функции Римана, что дает возможность находить точные значения констант Колмогорова-Никольского. Разработана прикладная программа, позволяющая вычислять константы заданного порядка малости.

I.V. Kalchuk, A.O. Zadorozhnyi, R.O. Makovij. Exact Constants for the Poisson Integral Deviations Values from the Functions Class of Hölder

When approximating the functions from class H^1 there appear the asymptotic expansions, whose coefficients are not expressed in explicit form. This problem has been solved by the instrumentality of Riemann zeta-function, which gives the possibility to find the exact values of Kolmogorov-Nikolskiy constants. The program that allows us to find the constants of given infinitesimal order has been developed.

И.Г. Кожух

**КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ
ПОПУЛЯЦИЙ**

Проводится качественное исследование динамики развития популяции в предположении об отсутствии или существовании внутривидовой борьбы, а также взаимодействия с представителями другой конкурирующей популяции. Найдены решения соответствующих дифференциальных уравнений, а также условия, при которых осуществляется колебательный процесс, т.е. существуют периодические движения.

Исследуется также система двух дифференциальных уравнений, описывающая процесс взаимодействия двух конкурирующих популяций типа «жертва-хищник» в пространстве шести параметров, определяющих состояние систем. Координаты состояний равновесия такой системы рационально выражены через ее параметры. Установлены характер и взаиморасположение состояний равновесия как в конечной части плоскости, так и на бесконечности. Доказано отсутствие предельных циклов.

I.G. Kozhukh. A Qualitative Research of the Interaction of two Competing Populations

A qualitative research of a differential equation and a system of two differential equations describing the interaction of two populations one of which exists at the expense of consumption of the other is held. The conditions of their coexistence during a long period of time are found.

А.А. Козинский, В.И. Басин

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВАЛИДАЦИИ
HTML-КОДА В СООТВЕТСТВИИ С ЗАДАННЫМ
НАБОРОМ ПРАВИЛ МОДУЛЯ
BRAINTRAINING.SECURITY**

Описаны особенности библиотеки BrainTraining.Security для валидации HTML и CSS кода на соответствие веб стандартам и выбранному типу документа. Применение библиотеки позволяет защитить приложение от несанкционированного доступа к учетным записям пользователей, которые открывают страницы с публикациями. Созданный модуль библиотеки предназначен для платформы .NET. Модуль позволяет выполнять валидацию в соответствии с набором заданных правил. Перечень правил содержится в xml-файле. Для унификации и обеспечения совместимости схемы описания правил выполнены по аналогии с имеющимися подобными библиотеками. Приведен краткий перечень реализованных правил библиотеки BrainTraining.Security их блок-схемы и код.

A.A. Kazinski, V.I. Basin. A Mathematical Model of the Validation of HTML-code in Accordance with a Given Set of Rules Module BrainTrainingSecurity

This article contains the description of the possibilities of the BrainTraining.Security library for HTML and CSS code validation with given set of rules and document specifications. This library can provide protection for web applications against unauthorized access to the account of the user who is trying to view some page content with untrusted html code (e.g. publications in personal blog). This library is designed for applications under .NET platform. The module allows you to perform validation in accordance with a set of predefined rules. The list of rules is described in xml configuration file. The scheme of this configuration file is similar existing libraries to provide a high level of compatibility. Also a short list of implemented validation rules of the library, block-diagrams and code snippets were described.

В.М. Мадорский

НЕЛОКАЛЬНЫЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЛОКАЛЬНО СХОДЯЩИЕСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе рассматриваются нелокальные нерегуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x) = 0$ в пространстве R^n . Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения «плохого» начального приближения.

V.M. Madorski. Nonlocal Nonregularised Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed

Nonlocal superlinear nonregularized iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the “bad” initial approximation.

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Для решения линейных операторных уравнений I рода с ограниченным положительным и несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается применение правила останова по соседним приближениям, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истинной представимости точного решения. В работе доказана сходимости итерационного метода, получена оценка для момента останова.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. About Decision Linear Equations with Non Self-Conjugate Operators of the Iteration Method

In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with affirmative limited and non self-conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method

quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. The convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

И.П. Приймак, Т.А. Степанюк, Ю.И. Харкевич

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ H_ω

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса $W_\delta(f;x)$ на классах $H_\omega := \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$. Решена задача Колмогорова-Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах H_ω в равномерной метрике.

I.P. Pryjmas, T.A. Stepaniuk, Yu.I. Kharkevych. Approximative Properties of Weierstrass Integrals on the Classes H_ω

The article focuses on the solution to one of the problems of the Approximation's Theory, the problem about researching approximative properties of Weierstrass integrals $W_\delta(f;x)$ on the classes $H_\omega := \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$. We solved the problem of Kolmogorov-Nikolsky for Weierstrass integrals on the classes H_ω in the uniform metric.

Н.В. Савельева

О ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В настоящей работе в терминах индексов инъекторов установлены достаточные признаки локальной нормальности и максимальности (по включению, по сильному вложению) класса Фиттинга \mathfrak{X} в классе Фиттинга \mathfrak{Y} конечных частично разрешимых групп – групп, у которых факторгруппы по \mathfrak{X} -радикалу являются разрешимыми или (\mathfrak{X}) -разрешимыми группами. В частности, доказано, что если для классов Фиттинга \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, где \mathfrak{S} и $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ соответственно обозначают класс всех конечных разрешимых групп и класс всех конечных $\pi(\mathfrak{X})$ -разрешимых групп, найдется простое число p из множества всех простых чисел (в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$) или из множества $\pi(\mathfrak{X})$ (в случае $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) такое, что в каждой группе $G \in \mathfrak{Y}$ ее \mathfrak{X} -инъектор имеет в ней индекс 1 или p , то класс Фиттинга \mathfrak{X} нормален и максимален по включению в классе \mathfrak{Y} . Если вместе с названными условиями дополнительно имеет место сильное вложение класса \mathfrak{X} в класс \mathfrak{Y} , то класс \mathfrak{X} является максимальным по сильному вложению в классе \mathfrak{Y} .

N.V.Savelieva On Sufficient Maximality Evidence for Fitting Classes of Finite Partially Soluble Groups

In this paper, the sufficient conditions for the Fitting class \mathfrak{X} to be normal and maximal (by inclusion, by strong containment) in the Fitting class \mathfrak{Y} of finite partially soluble groups (in particular, of finite groups with the property that their quotients by the radicals are soluble or $\pi(\mathfrak{X})$ -soluble) are established in terms of the indices of \mathfrak{X} -injectors. It is proved that if \mathfrak{X} is a proper Fitting subclass of the Fitting class \mathfrak{Y} , and for \mathfrak{Y} it holds that $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ or $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$, where \mathfrak{S} and $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$ respectively denote the class of all finite soluble groups and the class of all finite $\pi(\mathfrak{X})$ -soluble groups, in the set of all prime numbers (when $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$) or in $\pi(\mathfrak{X})$ (when $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{X})}$) there exists a prime number p such that in every group $G \in \mathfrak{Y}$ its \mathfrak{X} -injector has index 1 or p , then \mathfrak{X} is normal and maximal by inclusion in the class \mathfrak{Y} . If, together with the above terms and conditions, the Fitting class \mathfrak{X} is strongly contained in the class \mathfrak{Y} , then \mathfrak{X} is maximal by strong containment in \mathfrak{Y} .

Н.П. Семенчук

ФОРМУЛЫ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СРЕДНИХ СОПРЯЖЁННОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

В работе найдена асимптотическая формула типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье дифференцируемых нечетное число раз функций в классе $L(-\infty, +\infty)$. Полученные результаты могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем, как линейных, так и нелинейных.

N.P. Semenchuk. Formulas of Voronovskaya's Type for Generalized Average of Conjugate Fourier's Integral

We established asymptotic formulas of Voronovskaya's type for generalized average of conjugate Fourier's integral of odd times differentiated functions in the class $L(-\infty, +\infty)$. The results can be used at development approximate methods of the decision differential and integral equations, as well as their systems, as linear so nonlinear.

Ю.И. Харкевич, Т.Н. Жернова, К.В. Швай

**ПОЛНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ВЕЛИЧИН ПРИБЛИЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ИХ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА**

Рассматривается вопрос об асимптотическом поведении точных верхних границ уклонения сопряженных периодических функций от их сопряженных интегралов Пуассона. Получено разложение верхней грани в асимптотический ряд, что дает возможность выписывать константы Колмогорова-Никольского произвольного порядка.

Yu.I. Kharkevich, T.N. Zhernova, K.V. Shvaj. The Full Asymptotic Decompositions of Values of Approximation of Conjugate Functions by their Conjugate Poisson Integrals

We investigate the question of asymptotic behavior of exact upper borders of defluxion the conjugate periodic functions from their conjugate Poisson integrals. We obtained the decomposition of upper border in asymptotic series that gives the possibility to write down the constants of Kolmogorov-Nikolsky of arbitrary order.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
- бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
- рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнацю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падроздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаванне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Карэктары *Л.М. Калілец, Ж.М. Селюжыцкая*
Камп'ютэрнае макетаванне *Г.Ю. Пархац, С.М. Мініч*

Подписано в печать 14.11.2012. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 15,81, . Уч.-изд. л.12,48.

Тираж 100 экз. Заказ № 434.

Издатель и полиграфическое исполнение
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».

ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.