

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матысік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плеццохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2012

У адпаведнасці з Загадам Старшыні Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь № 21 ад 01.02.2012 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2012

According to the order of Chairman of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus № 21 from February 01, 2012, the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Плетюхов В.А., Стражев В.И. О двух типах преобразований внутренней симметрии в кварковой модели.....	5
Ревинский А.Ф., Макоед И.И. Индуцированный магнитным полем фазовый переход в поликристаллическом BiFeO_3	13
Редьков В.М., Овсиюк Е.М. Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса–Мюллера в поляризационной оптике	18
Секержицкий В.С., Адамчук Д.В. Электронно-нейтронно-ядерное вещество в сверхсильном магнитном поле	24
Серый А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы.....	30
Тригук В.В., Гайда А.В. Динамика решетки и параметры Грюнаизена нитрида бора из первых принципов.....	38

МАТЭМАТЫКА

Андросенко Н.П., Кашпировский А.И. О применении метода сплайн-коллокации для приближения ограниченных решений дифференциальных уравнений на всей оси.....	43
Волошина Т.В. О точных представлениях инверсных полугрупп.....	50
Зайонц Ю., Харкевич Ю.И., Степанюк Т.А. Аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω	56
Кирияцкис Д. О линейном однородном дифференциальном уравнении и системе Чебышева.....	66
Козинский А.А., Рыжков А.А. Программная реализация объектной модели данных для системы управления предприятием общественного питания.....	78
Мадорский В.М. О некоторых новых подходах к построению полулокальных итерационных процессов	84
Матысик О.В., Савчук В.Ф. Правило останова в итерационных процедурах решения операторных уравнений.....	89
Самусенко П.Ф. Асимптотическое представление решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с вырождением.....	95
Трофимук А.А. О конечных группах с небольшими порядками небициклических силовских подгрупп факторов.....	107
Юдов А.А., Машлякевич И.Н. О редуковности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства Минковского с двухпараметрическими группами стационарности.....	116
Звесткі аб аўтарах	122

INDEX

PHYSICS

Pletyukhov V.A., Strazhev V.I. On Two Types of an Internal Symmetry Transformations in the Quark Model	5
Ravinski A.F., Makoed I.I. Magnetic-field Induced Phase Transition in BiFeO_3	13
Red'kov V.M., Ovsyuk E.M. Transitivity in the Theory of the Lorentz Group and the Stokes–Mueller Formalism in Optics	18
Sekerzhitsky V.S., Adamchuk D.V. Electron-Neutron-Nuclear Matter in Superstrong Magnetic Field	24
Sery A.I. On the Ferromagnetism of Degenerate Neutron-Proton System	30
Triguk V.V., Gaida A.V. Lattice Dynamics and Grüneisen Parameters of Boron Nitride from First Principles	38

MATHEMATICS

Androsenko M.P., Kashpirovsky O.I. On Application of Spline Collocation Method for Approximation of Bounded Solutions for Differential Equations	43
Voloshyna T.V. On Exact Representations of Inverse Semigroups	50
Zajac J., Kharkevych Yu.I., Stepaniuk T.A. Approximating Properties of Biharmonic Poisson's Integrals on the Classes H_ω	56
Kirjackis D. About Linear Homogeneous Differential Equation and Chebyshev System	66
Kazinski A., Ryjkov A. Program Realization of the Object Model of Data for the System of Management of the Enterprise of Public Catering	78
Madorski V.M. About some New Applications to Construction Halflocal Iterative Processes	84
Matysik O.V., Savchuk V.F. The a Rule Stop In Iteration Procedures For Solving Operator Equations	89
Samusenko P.F. Asymptotic Representation of the Solutions Singularly Perturbed System of Hyperbolic Partial Differential Equations with Degeneration	95
Trofimuk A.A. About Finite Groups with Small Orders of Nonbicyclic Sylow Subgroups of Factors	107
Yudov A., Mashliakevich I. About the Reduction Homogenous Spaces with Fundamental Group G – Group of Motions of Space 1R_4	116
Information about the authors	122

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев

О ДВУХ ТИПАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ В КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

Установлено, что наиболее полной группой внутренней симметрии классического лагранжиана 12-компонентного безмассового дираковского поля является группа $SU(3,3)$. На квантовом уровне «выживает» ее максимальная компактная подгруппа $SU(3) \otimes SU(3)$. Группа цветовой симметрии $SU(3)$ содержится в последней в качестве подгруппы.

Введение

Как известно, лагранжева формулировка массивного дираковского поля инвариантна относительно преобразований группы внутренней симметрии $SU(1,1)$, получившей в работе [1] название зарядовой симметрии. Для безмассового дираковского поля известна также симметрия, описываемая группой $SU(2)$ [2; 3] и получившая название группы Паули–Гюрши. Таким образом, при переходе к безмассовому полю полная группа симметрии уравнения Дирака представляет собой 6-параметрическую группу (изоморфную группе $SO(3,1)$), которая включает в себя вышеуказанные группы $SU(1,1)$ и $SU(2)$ в качестве подгрупп.

При использовании матричной формы записи уравнения Дирака для безмассовых микрообъектов

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

преобразования группы Паули–Гюрши имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi' &= a\psi + b\gamma_5 C \bar{\psi}, \\ \bar{\psi}' &= b^* \gamma_5 C \psi + a^* \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, $C = \gamma_2 \gamma_4$ – матрица зарядового сопряжения, a и b – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Как видно, преобразования (2) включают в себя, помимо биспинорной волновой функции ψ , также сопряженную функцию $\bar{\psi}$. Это фактически равносильно введению в рассмотрение 8-компонентной волновой функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

удовлетворяющей, как показано в работе [4], уравнению

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0, \quad (4)$$

матрицы которого Γ_μ 8x8 подчиняются алгебре матриц Дирака. В [4] показано также, что данная трактовка преобразований (2) соответствует описанию дираковского поля с помощью 8-компонентной вещественной волновой функции, которая связана с функцией (3) посредством унитарного преобразования.

В рамках такого описания в работе [5] установлено, что полная группа $SO(3,1)$ симметрии уравнения Дирака для безмассового поля состоит из двух принципиально разных типов преобразований, генераторы которых коммутируют (один тип) и анти-

коммутируют (второй тип) с матрицами Γ_μ . При этом группа зарядовой симметрии $SU(1,1)$ относится к преобразованиям первого типа. Таким образом, расширение группы зарядовой симметрии до группы $SO(3,1)$ обусловлено вовлечением в рассмотрение преобразований второго типа, имеющих иное происхождение и предполагающих иное физическое истолкование. В работе [2] преобразования (2) связываются с законом сохранения лептонного заряда.

Настоящая работа является продолжением цикла публикаций авторов [6; 7], посвященных исследованию с вышеизложенных позиций наиболее полной группы внутренней симметрии системы трех безмассовых уравнений Дирака. Последняя, как известно, лежит в основе калибровочной модели сильных взаимодействий и служит для описания безмассовых кварков.

Вещественная форма системы трех уравнений Дирака

Рассмотрим систему трех уравнений Дирака для безмассовых частиц ($m \neq 0$):

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1,1),\tag{6}$$

$$\gamma_i = \sigma_2 \otimes \sigma_i, \gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2 \quad (i = 1, 2, 3).\tag{7}$$

Беря от (5) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_4 , для сопряженных функций $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}(-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_1^* &= 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_2^* &= 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4) \psi_3^* &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Рассматривая системы (5) и (8) совместно, придем к 24-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме (4). При выборе волновой функции Ψ в (4) в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) - \text{столбец}\tag{9}$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\Gamma_1 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_4.\tag{10}$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned}\Psi &= (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_3^r, \psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i) - \text{столбец}, \\ \psi_{1,2,3}^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} + \psi_{1,2,3}^*), \quad \psi_{1,2,3}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2,3} - \psi_{1,2,3}^*).\end{aligned}\tag{11}$$

Указанный переход от представления (9) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции Ψ :

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12} \end{pmatrix}, \quad u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_{12} & -I_{12} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид:

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_6 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_4. \quad (13)$$

Лагранжиан уравнения (4), (11), (13)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (14)$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (5)

$$\begin{aligned} L &= -\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 = \\ &= -\psi_1^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 - \psi_3^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_3 \end{aligned} \quad (15)$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (14) в виде

$$\eta = I_6 \otimes \gamma_4, \quad (16)$$

который инвариантен относительно преобразования (12).

Уравнение (4) с волновой функцией (11), матрицами Γ_μ (13) и лагранжианом (14), (16) будем называть вещественной формой исходной системы (5) с лагранжианом (15), поскольку соответствующая матричному уравнению (4) система 24-х уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (5).

Как уже отмечалось во введении, данный подход аналогичен подходу Паули, который применялся в работе [2] при установлении группы внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака, и является в определенном смысле его модифицированным обобщением на случай дираковских полей различных размерностей.

Внутренняя симметрия лагранжиана

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ , по определению, имеют следующую блочную форму:

$$\Gamma_\mu = I_6 \otimes \gamma_\mu. \quad (17)$$

Переход от представления (11) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2} [I_6 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \quad (18)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2} [I_6 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes (I_4 - i\gamma_2)].$$

Матрица билинейной формы η принимает при этом вид:

$$\eta = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_4. \quad (19)$$

Инвариантность уравнения (4) с матрицами Γ_μ (17) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q \Psi(x_\mu) \quad (20)$$

обеспечивается матрицами двух типов:

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad (21)$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_5, \quad (22)$$

где $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ – комплексные матрицы 6×6 , на которые накладываются ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (4). При этом матрицы Q_1 , Q_2 удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям с матрицами Γ_μ (17):

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (23)$$

$$[Q_2, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (24)$$

Матрицы (21), (22) можно параметризовать посредством 72-х базисных операторов $J_{00} = I_{24}$, $J_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes I_4$,

$$J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \quad J_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \quad (25)$$

$$L_{00} = I_6 \otimes \gamma_5, \quad L_{i0} = (\sigma_i \otimes I_3) \otimes \gamma_5, \quad (26)$$

$$L_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \quad L_{iA} = (\sigma_i \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5,$$

где α_A ($A = 1 \div 8$) – генераторы группы $SU(3)$, которые выберем в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{11} - e^{33}, \quad \alpha_2 = e^{22} - e^{33}, \quad \alpha_3 = e^{23} + e^{32}, \quad \alpha_4 = e^{13} + e^{31}, \\ \alpha_5 &= e^{12} + e^{21}, \quad \alpha_6 = -i(e^{23} - e^{32}), \quad \alpha_7 = -i(e^{31} - e^{13}), \quad \alpha_8 = -i(e^{12} - e^{21}), \end{aligned} \quad (27)$$

e^{ij} – элементы полной матричной алгебры [8, с. 307].

Возвращаясь теперь обратно в базис (11), получим для операторов (25), (26) выражения:

$$\begin{aligned} J_{00} &= I_{24}, \quad J_{10} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes I_4, \quad J_{20} = -(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, \\ J_{30} &= (\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2, \quad J_{0A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \quad J_{1A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes I_4, \end{aligned} \quad (28)$$

$$J_{2A} = -(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2, \quad J_{3A} = (\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2;$$

$$L_{00} = (\sigma_1 \otimes I_3) \otimes \gamma_5, \quad L_{10} = I_6 \otimes \gamma_5, \quad L_{20} = -i(\sigma_2 \otimes I_3) \otimes \gamma_2 \gamma_5,$$

$$L_{30} = -i(\sigma_3 \otimes I_3) \otimes \gamma_2 \gamma_5, \quad L_{0A} = (\sigma_1 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \quad L_{1A} = (I_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_5, \quad (29)$$

$$L_{2A} = -i(\sigma_2 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2 \gamma_5, \quad L_{3A} = -i(\sigma_3 \otimes \alpha_A) \otimes \gamma_2 \gamma_5.$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (4), (11), (13) относительно преобразований, задаваемых базисными операторами (28), (29), накладывает на соответствующие параметры $\omega_N \leftrightarrow J^N$, $\theta_N \leftrightarrow L^N$ следующие ограничения:

$$\omega_{00}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{01}, \dots, \omega_{05}, \omega_{16}, \omega_{17}, \omega_{18}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35} \quad (30)$$

$$\theta_{10}, \theta_{06}, \theta_{07}, \theta_{08}, \theta_{11}, \dots, \theta_{15}, \theta_{26}, \theta_{27}, \theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38} \text{ – вещественные;}$$

$$\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}, \omega_{26}, \omega_{27}, \omega_{28}, \omega_{36}, \omega_{37}, \omega_{38}, \quad (31)$$

$$\theta_{00}, \theta_{20}, \theta_{30}, \theta_{01}, \dots, \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{18}, \theta_{21}, \dots, \theta_{25}, \theta_{31}, \dots, \theta_{35} \text{ – мнимые.}$$

Требование инвариантности лагранжиана (14) относительно преобразований внутренней симметрии (20) приводит к условию

$$\left(Q_1 + Q_2 \right)^+ \eta \Gamma_\mu \left(Q_1 + Q_2 \right) = \eta \Gamma_\mu, \quad (32)$$

откуда с учетом (23), (24) имеем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2)^+ \eta (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2) \Gamma_\mu &= \eta \Gamma_\mu, \\ (\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2)^+ \eta (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2) &= \eta, \\ \mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_2 &= \eta. \end{aligned} \quad (33)$$

Применяя к соотношению (33) операцию эрмитовского сопряжения и учитывая, что $\eta^+ = \eta$, получим:

$$\mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_2 = \eta. \quad (34)$$

Сравнивая (33) и (34), находим, что условие (33) распадается на два самостоятельных матричных условия:

$$\mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_2 = \eta, \quad (35)$$

$$\mathcal{Q}_1^+ \eta \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2^+ \eta \mathcal{Q}_1 = 0. \quad (36)$$

Условия (35), (36) накладывают 36 связей на параметры (30), (31) (мы их не выписываем ввиду громоздкости). В результате получаем 36-параметрическую группу (35-параметрическую при наложении условия унимодулярности), задаваемую 72 базисными операторами (28) и (29), на параметры которых (30), (31) накладывается 36 связей, вытекающих из матричных условий (35), (36).

Для того, чтобы выяснить структуру данной группы преобразований, запишем условия (35), (36) для бесконечно малых однопараметрических преобразований. Получим соотношения

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega \eta J, \quad (37)$$

$$(\theta L)^+ \eta = \theta \eta L, \quad (38)$$

в которых базисные операторы J, L (за исключением единичного J_{00}) выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (37), (38) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами:

$$\begin{aligned} J_{10}, J_{20}, J_{30}, J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, \dots, J_{15}, \\ J_{21}, \dots, J_{25}, J_{31}, \dots, J_{35}, L_{00}, L_{01}, \dots, L_{05}, \\ L_{16}, L_{17}, L_{18}, L_{26}, L_{27}, L_{28}, L_{36}, L_{37}, L_{38}. \end{aligned} \quad (39)$$

Генератор L_{00} , содержащийся в наборе (39), коммутирует со всеми остальными и представляет собой непрерывный аналог γ_5 -преобразования ($e^{\theta_{00} L_{00}}$) для системы из трех уравнений Дирака с $m = 0$. Остальные 35 генераторов образуют унитарную группу $SU(3,3)$ с 18 вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35}, \theta_{26}, \theta_{27}, \theta_{28}, \theta_{36}, \theta_{37}, \theta_{38}$) и 17 мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}, \theta_{01}, \dots, \theta_{05}, \theta_{16}, \theta_{17}, \theta_{18}$) параметрами. Генераторы типа J в (39) образуют в данной группе 21-параметрическую подгруппу с 12 вещественными ($\omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{21}, \dots, \omega_{25}, \omega_{31}, \dots, \omega_{35}$) и 9 мнимыми ($\omega_{10}, \omega_{06}, \omega_{07}, \omega_{08}, \omega_{11}, \dots, \omega_{15}$) параметрами, изоморфную группе $SO(4,3)$ и являющуюся наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжиана системы трех уравнений Дирака с $m \neq 0$ [6].

Максимальная компактная подгруппа $SU(3) \otimes SU(3)$, содержащаяся в установленной группе $SU(3,3)$, задается 16 генераторами

$$J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, \dots, J_{15}, L_{01}, \dots, L_{05}, L_{16}, L_{17}, L_{18}, \quad (40)$$

которым соответствуют мнимые параметры. Действительно, составив из этих генераторов линейные комбинации

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2}(J_{11} + L_{01}), M_2 = \frac{1}{2}(J_{12} + L_{02}), M_3 = \frac{1}{2}(J_{13} + L_{03}), M_4 = \frac{1}{2}(J_{14} + L_{04}), \\ M_5 &= \frac{1}{2}(J_{15} + L_{05}), M_6 = \frac{1}{2}(J_{06} + L_{16}), M_7 = \frac{1}{2}(J_{07} + L_{17}), M_8 = \frac{1}{2}(J_{08} + L_{18}), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(J_{11} - L_{01}), N_2 = \frac{1}{2}(J_{12} - L_{02}), N_3 = \frac{1}{2}(J_{13} - L_{03}), N_4 = \frac{1}{2}(J_{14} - L_{04}), \\ N_5 &= \frac{1}{2}(J_{15} - L_{05}), N_6 = \frac{1}{2}(J_{06} - L_{16}), N_7 = \frac{1}{2}(J_{07} - L_{17}), N_8 = \frac{1}{2}(J_{08} - L_{18}), \end{aligned}$$

нетрудно убедиться, что восьмерки генераторов M_A, N_A ($A = 1 \div 8$) удовлетворяют алгебре группы SU(3) и коммутируют между собой. В свою очередь, группа SU(3) цветовой симметрии задается генераторами

$$J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15} \quad (42)$$

и является, с одной стороны, подгруппой группы SU(3) \otimes SU(3), а с другой – максимальной компактной подгруппой вышеупомянутой группы SO(4,3).

Симметрии квантованного поля

Для того чтобы установить, какие из выше рассмотренных симметрий сохраняются на квантовом уровне, необходимо проверить инвариантность антикоммутирующих соотношений для операторных волновых функций относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (28), (29). Для трех уравнений Дирака условия квантования имеют вид:

$$\left[\psi_i^{(\alpha)}, \bar{\psi}_j^{(\beta)} \right]_+ = (\gamma_4)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (43)$$

где $\bar{\psi}_j = \psi_i^+ \gamma_4$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ – индексы, нумерующие компоненты дираковского биспинора. Для проверки вышеуказанной инвариантности соотношений (43) надо предварительно перевести генераторы (28), (29) в представление, в котором

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3) - \text{ñôì äáäö.} \quad (44)$$

Такой переход от представления (11) осуществляется посредством унитарного преобразования

$$S = \begin{pmatrix} I_{12} & I_{12} \\ I_3 \otimes \gamma_4 - I_3 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^+ = \begin{pmatrix} I_{12} & I_3 \otimes \gamma_4 \\ I_{12} - I_3 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

В результате для генераторов внутренней симметрии системы трех уравнений Дирака с $m = 0$ получаются выражения:

$$\begin{aligned} J_{00} &= I_{24}, \quad J_{10} = \sigma_3 \otimes I_{12}, \quad J_{20} = -i\sigma_2 \otimes I_3 \otimes \gamma_2 \gamma_4, \\ J_{30} &= -i\sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_2 \gamma_4, \quad J_{0A} = I_2 \otimes \alpha_A \otimes I_4, \\ J_{1A} &= \sigma_3 \otimes \alpha_A \otimes I_4, \quad J_{2A} = -i\sigma_2 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_2 \gamma_4, \quad J_{3A} = i\sigma_1 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_2 \gamma_4; \\ L_{00} &= I_6 \otimes \gamma_5, \quad L_{10} = \sigma_3 \otimes I_3 \otimes \gamma_5, \quad L_{20} = -i\sigma_2 \otimes I_3 \otimes \gamma_5 \gamma_2 \gamma_4, \end{aligned} \quad (46)$$

$$L_{30} = i\sigma_1 \otimes I_3 \otimes \gamma_5 \gamma_2 \gamma_4, \quad L_{0A} = I_2 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_5, \quad L_{1A} = \sigma_3 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_5, \quad (47)$$

$$L_{2A} = -i\sigma_2 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_5 \gamma_2 \gamma_4, \quad L_{3A} = i\sigma_1 \otimes \alpha_A \otimes \gamma_5 \gamma_2 \gamma_4.$$

Расчет показывает, что условия квантования (43) инвариантны относительно однопараметрических преобразований, задаваемых 36 генераторами

$$J_{10}, J_{06}, J_{07}, J_{08}, J_{11}, \dots, J_{15}, J_{26}, J_{27}, J_{28}, J_{36}, J_{37}, J_{38},$$

$$L_{00}, L_{20}, L_{30}, L_{01}, \dots, L_{05}, L_{16}, L_{17}, L_{18}, L_{21}, \dots, L_{25}, L_{31}, \dots, L_{35}, \quad (48)$$

которым соответствуют мнимые параметры (31). При этом генератор L_{00} коммутирует со всеми остальными в наборе (48). Последние, в свою очередь, образуют 35-параметрическую группу с алгеброй генераторов группы SU(6).

Таким образом, из преобразований внутренней симметрии системы трех уравнений Дирака с $m = 0$ при наложении условия унимодулярности на квантовом уровне «выживает» компактная группа SU(6), статус которой аналогичен статусу группы SU(2) преобразований Паули–Гюрши для одного безмассового уравнения Дирака.

Если на генераторы (48) наложить требование инвариантности лагранжиана (классического), то останутся преобразования, задаваемые генераторами (40) и соответствующие группе SU(3) ⊗ SU(3). При переходе к массивному полю от этой группы остается группа SU(3) цветовой симметрии с генераторами (42).

Заклучение

Итак, наиболее полной группой внутренней симметрии лагранжевой формулировки классической теории безмассовых дираковских фермионов с тремя внутренними степенями свободы является группа SU(3,3). На квантовом уровне остается максимальная компактная подгруппа SU(3) ⊗ SU(3) указанной группы. При отказе от требования инвариантности лагранжиана симметрия квантованного поля расширяется до группы SU(6), которая представляет собой аналог группы SU(2) преобразований Паули–Гюрши для одного уравнения Дирака с $m = 0$.

Группа SU(3) цветовой симметрии кварков является, с одной стороны, максимальной компактной подгруппой группы SO(4,3) симметрии классического лагранжиана системы трех уравнений Дирака с $m \neq 0$, а с другой – может рассматриваться как подгруппа группы SU(3) ⊗ SU(3) симметрии безмассового квантованного поля, «выживающая» при введении массового члена.

Как и в случае одного уравнения Дирака (введение), расширение группы цветовой симметрии до указанных групп обнаруживается при вещественном описании дираковских полей и обусловлено включением в математическую схему преобразований, антикоммутирующих с матрицами Γ_μ . Возможные физические следствия наличия расширенных групп симметрии в рассматриваемой модели являются предметом исследования авторов в настоящее время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pursey, D.L. Symmetries of the Dirac equation / D.L. Pursey, J.F. Plebanski // Phys. Rev. – 1984. – V. 29. – P. 1848–1850.
2. Pauli, W. On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cimento. – 1957. – V. 6. – P.204–214.
3. Gürsey, F. Connection of charge independence and baryon number conservation with the Pauli transformation / F. Gürsey // Nuovo Cimento. – 1957. – V. 8. – P. 411–415.

4. Андрусеви́ч, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусеви́ч, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 2. – С. 46–51.
5. Плетюхов, В.А. Внутренние симметрии безмассовых дираковских полей / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусеви́ч // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 13–17.
6. Pletyukhov, V.A. Internal symmetry of the three Dirac fields / V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev, P.P. Andrusevich // NDCS. – 2011. – Vol. 14, № 1. – P. 96–101.
7. Андрусеви́ч, П.П. Преобразования типа Паули–Гюрши в SU(3)-модели / П.П. Андрусеви́ч, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4. – С. 12–15.
8. Богуш, А.А. Введение в полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника. – 1987. – 359 с.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. On Two Types of an Internal Symmetry Transformations in the Quark Model

It is shown that the group $SU(3,3)$ is the complete group of an internal symmetry of the Lagrangian of the classical massless 12-component Dirac field. Its complete compact subgroup $SU(3) \otimes SU(3)$ is the group of the quantum field symmetry. The color symmetry group $SU(3)$ can be considered as a subgroup of the latter.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 06.03.2012

УДК 537.312: 538.245

А.Ф. Ревинский, И.И. Макоед

ИНДУЦИРОВАННЫЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ BiFeO_3

В работе представлены данные о природе сосуществования взаимосвязанных спин-поляризованных электрической и магнитной структур в BiFeO_3 . Мы изучили намагничивание (M) в поликристаллах BiFeO_3 в пульсирующих сильных магнитных полях до 25 Т. При низких температурах приложение магнитных полей вызывает резкие изменения M в интервале 16–17 Т, которые могут быть вызваны магнитным переходом от циклоидального до скошенного антиферромагнитного состояния.

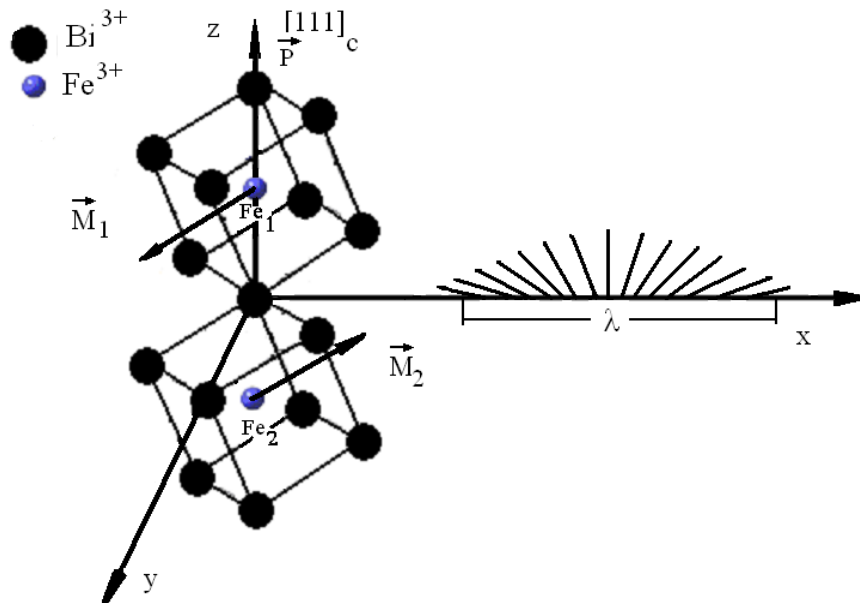
Введение

В последние годы широкое применение в области спиновой электроники находят мультиферроики – материалы, обладающие одновременно магнитным и электрическим упорядочением [1]. Наиболее известным мультиферроиком является феррит висмута, в котором экспериментально подтверждено сосуществование упорядоченных магнитной и электрической фаз. Такого рода взаимосвязь упорядоченных магнитной и электрической фаз в подобных материалах привлекает к себе внимание многочисленных исследователей [2; 3] в связи с перспективой использования мультиферроиков в современной спинтронике.

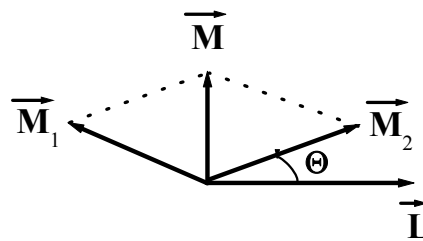
Симметрия кристаллической решетки феррита висмута допускает существование линейного магнитоэлектрического эффекта, спонтанной намагниченности и тороидного магнитного момента. Однако в объемных образцах их наблюдение оказывается невозможным из-за наличия пространственно-модулированной спиновой структуры циклоидного типа. Объемные образцы феррита висмута кристаллизуются в ромбоэдрически искаженной перовскитной структуре с параметрами элементарной ячейки $a=3.96 \text{ \AA}$, $\alpha=89.76^\circ$ и проявляют относительно невысокую намагниченность при комнатной температуре [3]. Их антиферромагнитная структура представлена спиновой спиралью с несоизмеримой периоду кристаллической решетки длиной волны $\lambda=62 \text{ нм}$, приводящей к подавлению спонтанной намагниченности [4].

Слабый ферромагнетизм в поликристаллическом BiFeO_3

На рисунке 1 представлены кристаллическая и магнитная структуры феррита висмута. Кристаллическая структура характеризуется ромбоэдрически искаженной перовскитной решеткой (пространственная группа $R3c$). Спонтанная поляризация обусловлена малым смещением ионов Fe^{3+} и Bi^{3+} из равновесных положений таким образом, что вектор поляризации \vec{P} направлен вдоль оси третьего порядка, т.е. вдоль направления $[111]_c$ псевдокубической структуры. При этом, как показано на рисунке 2, спонтанный магнитный момент \vec{M} обусловлен скосом спиновых магнитных моментов подрешетки железа. Наличие спиновой циклоиды $L(x)$ приводит к периодическому изменению величины угла скоса Θ . Он максимален при $\vec{L} \uparrow \uparrow \vec{P}$ и минимален при $\vec{L} \perp \vec{P}$. В связи с этим спонтанный магнитный момент, в среднем за период циклоиды $\lambda=62 \text{ нм}$, равен нулю. Только при подавлении спиновой циклоиды становится возможным наблюдение слабого ферромагнетизма.



Рисунік 1 – Магнітная структура сегнетоэлектрычнай $R3c$ фазы BiFeO_3 в псевдокубічнай рэшэтцы



Θ - угол схода магнітных подрэшэток

Рисунік 2 – Векторы намагніченности \vec{M}_1 , \vec{M}_2 и антиферромагнетизма \vec{L} слабо ферромагнетика

Разрушение циклоиды приводит к возникновению в феррите висмута слабо выраженных ферромагнитных свойств и может быть вызвано несколькими причинами. Наиболее известными являются: допирование, вызывающее частичное замещение ионов висмута редкоземельными элементами; допирование, вызывающее частичное замещение ионов железа ионами 3d элементов; помещение образцов в сильные магнитные поля; помещение образцов в области высокого давления; получение тонкопленочных и наноразмерных образцов, в которых существование циклоиды оказывается невозможным из-за размерного фактора. В этих случаях могут возникать нарушения коллинеарности спинов магнитных подрешеток ионов железа. Целью настоящей работы является исследование фазового перехода, индуцированного сильным магнитным полем в поликристаллическом BiFeO_3 .

В работе экспериментально были исследованы изменения магнитных свойств при помещении образца феррита висмута в сильное магнитное поле. Как видно на рисунке 3, приложение к образцу магнитного поля величиной от 16 до 17 Тл, в зависимости от температуры, приводит к аномальному поведению полевой зависимости

сти относительной величины удельной намагниченности, что свидетельствует о подавлении спиральной спиновой структуры в антиферромагнитном феррите висмута. Подобные результаты были получены авторами работы [5] на монокристаллических образцах феррита висмута.

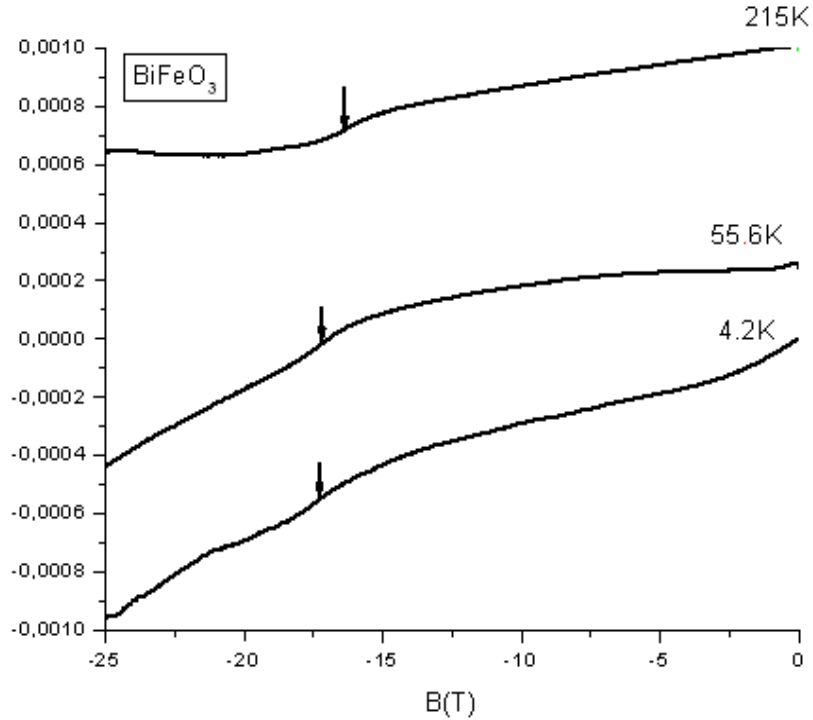


Рисунок 3 – Разрушение спиновой циклоиды в феррите висмута в сильном магнитном поле

Теория слабого ферромагнетизма была создана независимо Дзялошинским и Мория [6]. Согласно данной теории, слабый ферромагнетизм является следствием слабой неколлинеарности двух магнитных подрешеток антиферромагнетика, имеющих магнитные моменты \vec{M}_1 и \vec{M}_2 , как это показано на рисунке 2.

Для проведения оценочных расчетов величины напряженности магнитного поля, при котором подавляется магнитная спиновая циклоида, будем предполагать, что при некотором критическом значении напряженности магнитного поля H_c внутри объемного BiFeO_3 происходит фазовый переход из спин-модулированного в состояние в однородное антиферромагнитное состояние G-типа. При этом указанный фазовый переход является переходом II рода. Согласно теории Л. Ландау [6], свободная энергия при данном переходе изменяется непрерывно. Для спин-модулированного сосотояния $H < H_c$ свободную энергию f_L запишем в виде [4; 5]:

$$f_L = -\gamma P_z (\ell_x \nabla_x \ell_z - \ell_y \nabla_y \ell_z) + A \sum_{x,y,z} (\nabla \ell_i)^2 - K_u \ell_2^2 - \frac{1}{2} \chi_{\perp} H_{\perp}^2, \quad (1)$$

где P_z – компонента электрической поляризации вдоль оси симметрии третьего порядка,

ℓ_x – удельная компонента вектора антиферромагнетизма $\vec{\ell} = \frac{\vec{L}}{2M_o}$, $M_o = \left| \vec{M}_1 \right| = \left| \vec{M}_2 \right|$ –

модуль намагниченности подрешетки, γ – константа магнитоэлектрического взаимодействия, A – постоянная неоднородного обменного взаимодействия, K_u – константа

магнитной анизотропии, χ_{\perp} – магнитная восприимчивость в направлении, перпендикулярном вектору антиферромагнетизма.

Первое слагаемое в (1) представляет так называемый инвариант Лифшица, который применим для описания неоднородной антиферромагнитной структуры, в частности, спиновой циклоиды. Для случая однородной спиновой структуры применим так называемый инвариант Дзялошинского–Мория:

$$f_{DM} = D_z(m_x \ell_y - m_y \ell_x), \quad (3)$$

где D_z – константа указанного взаимодействия, \vec{m} – единичный вектор намагниченности

$$\vec{m} = \frac{\vec{M}}{2M_0}. \quad (4)$$

Усредняя (1) по направлениям x , y , z применительно к поликристаллическому веществу, можно получить формулу для оценки критического магнитного поля H_c :

$$H_c = \sqrt{\frac{4Aq^2}{\chi}}, \quad (5)$$

где $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число циклоиды, χ – усредненная магнитная восприимчивость.

Используем для расчета экспериментальное значение $\chi = 5 \cdot 10^{-5}$ [7], а также $A = 3 \cdot 10^{-7}$ эрг/см, $\lambda = 62$ нм [3, 8]. В таблице 1 представлены рассчитанные и экспериментальные значения в сравнении с известными литературными данными [5; 8].

Таблица 1 – Теоретические и экспериментальные данные о величине критического поля H_c (Тл), подавляющего спиновую циклоиду в объемных образцах BiFeO_3

Теоретические расчеты		Экспериментальные данные	
Поликристалл	Монокристалл	Поликристалл	Монокристалл
16	20 [8]	16–17*	20 [8] 16–18* [5]

Примечание – Измерения (*) проводили в интервале температур 4,2–215 К

Как видно, полученные результаты хорошо согласуются с данными, наблюдаемыми на монокристаллических образцах феррита висмута, и подтверждают факт разрушения спиновой циклоиды в поликристаллических образцах феррита висмута, подверженных воздействию сильного (16–17 Тл) магнитного поля.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Кристаллические и молекулярные структуры» (№ гос. регистрации 20111730 от 30.04.2011). Авторы выражают благодарность профессору Левенского Католического Университета (KU Leuven, Бельгия) Марку Ван Хюлле за финансирование исследований в рамках программы академического обмена имени профессора Михаила Александровича Иванова для студентов, аспирантов и преподавателей БрГУ имени А.С. Пушкина. Благодарим также директора INPAC (Institute for Nanoscale Physics and Chemistry, K.U. Leuven, Belgium) профессора В.В. Мошалкова и ученого секретаря INPAC Йохана Ванакена за предоставленную возможность и помощь в проведении измерений в сильных магнитных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Holcomb, M.B. Probing the evolution of antiferromagnetism in multiferroics / M.B. Holcomb, L.W. Martin, A. Scholl // Phys. Rev. – 2010. – Vol. B81, – P. 134406-1 – 134406-6.
2. Ce-Wen, N. Multiferroic-magnetoelectric composites: historical perspective, status, and future directions / N. Ce-Wen, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 103. – P. 031101-1 – 031101-35.
3. Звездин, А.К. Неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие в мультиферроиках и вызванные им новые физические эффекты / А.К. Звездин, А.П. Пятаков // УФН. – 2009. – Т. 179, № 8.– С. 897–904.
4. Sosnowska, I. Spiral magnetic ordering in bismuth ferrite / I. Sosnowska, T.P. Neumaier, E. Steichele // J. Phys. C. : Solid State Phys. – 1982. – Vol. 15, – P.4835–4846.
5. Tokunaga, M. High-field study of multiferroic BiFeO₃/ M. Tokunaga, M. Azuma, Y. Shimakawa // Journal of Physics: Conference Series – 2010. – Vol. 200, – P. 012206-1 – 012206-4.
6. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 620 с.
7. Макоед, И.И. Получение и физические свойства мультиферроиков : монография / И.И. Макоед; Брестский гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2009. – 180 с.
8. Попов, Ю.Ф. Линейный магнитоэлектрический эффект и фазовые переходы в феррите висмута BiFeO₃ / Ю.Ф. Попов [и др.] // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1993. – Vol. 57. – P. 65–68.

A.F. Ravinski, I.I. Makoed. Magnetic-field Induced Phase Transition in BiFeO₃

In this paper we report the materials on the origin of the coexistence of interrelated electric and magnetic spin-polarized structures in BiFeO₃. We studied the magnetization (M) in polycrystals of BiFeO₃ in pulsed high magnetic fields up to 25 T. At low temperatures, the application of magnetic fields causes sharp changes in M at around 16-17 T, which can be ascribed to the magnetic transition from a cycloidal to a canted antiferromagnetic state.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.04.2012

УДК 539.12

В.М. Редьков, Е.М. Овсюк**ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ТЕОРИИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ФОРМАЛИЗМ СТОКСА–МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ**

Выполнен теоретико-групповой анализ произвольных поляризационных оптических элементов с матрицами Мюллера лоренцевского типа. Одно поляризационное измерение определяет параметры соответствующей матрицы Мюллера с точностью до трех независимых произвольных величин. Каждому поляризационному измерению ставится в соответствие определенное квадратичное уравнение связи на 4 неизвестных параметра. Аналитические выражения для этих 4 величин даются в наиболее простой форме, если использовать результаты 6 независимых поляризационных измерений; соответствующие формулы приведены в явном виде.

Введение

Известно, что 4 параметра Стокса описывают состояние поляризации света. Они были введены Стоксом в 1852 [1]. Метод Мюллера заключается в использовании матричного формализма для описания действия поляризационных элементов на поляризацию света, этот метод был предложен в 1943 [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться в рамках формализма Джонса, предложенного в 1941 [3–6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, и линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Отметим специально, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим и для описания частично поляризованного света.

Уже давно известно, что при описании (полностью или частично) поляризованного света существенную роль может играть группа преобразований $SO(3,1)$, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [7–12], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света [13–15].

В настоящей работе развита общая теоретико-групповая методика восстановления матрицы Мюллера произвольного оптического элемента по результатам нескольких независимых поляризационных экспериментов.

Проблема транзитивности в подходе Стокса–Мюллера

Математически проблема транзитивности описывается простым уравнением

$$L_b^a(k, k^*) S_a = +S'_b, \quad L - ? \quad (1)$$

Ввиду существования понятия малой группы Лоренца [10] для начального и конечного 4-векторов Стокса [16], S и S' уравнение транзитивности можно представить иначе:

$$L(L_{\text{little}} S) = L'_{\text{little}} S' \quad \Rightarrow \quad [(L'_{\text{little}})^{-1} L L_{\text{little}}] S = S'. \quad (2)$$

Это означает, что матрица транзитивности L принципиально не может быть найдена однозначным образом.

Для анализа этой ситуации применим факторизованное представление для лоренцевских матриц (используем обозначения из [12]) $L = AA^*$, уравнение (1) дает

$$A^* S = A^{-1} S', \quad \hat{A} S = (A^*)^{-1} S'. \quad (3)$$

Это означает, что задача транзитивности сводится к анализу двух линейных систем:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} k_0^* & -k_1^* & -k_2^* & -k_3^* \\ -k_1^* & k_0^* & ik_3^* & -ik_2^* \\ -k_2^* & -ik_3^* & k_0^* & ik_1^* \\ -k_3^* & ik_2^* & -ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & ik_3 & -ik_2 \\ k_2 & -ik_3 & k_0 & ik_1 \\ k_3 & ik_2 & -ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}, \\ & \begin{vmatrix} k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & k_0 & -ik_3 & ik_2 \\ -k_2 & ik_3 & k_0 & -ik_1 \\ -k_3 & -ik_2 & ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ k_1^* & k_0^* & -ik_3^* & ik_2^* \\ k_2^* & ik_3^* & k_0^* & -ik_1^* \\ k_3^* & -ik_2^* & ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ниже используем следующие обозначения для параметров лоренцевского преобразования:

$$k_0 = n_0 + im_0, \quad k_j = -in_j + m_j, \quad k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 1.$$

После простых вычислений приходим к системе уравнений относительно 8 переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') &= n_0 (S_0 - S'_0), \\ \mathbf{n} (\mathbf{S} - \mathbf{S}') &= -m_0 (S_0 + S'_0), \\ \mathbf{m} (S_0 + S'_0) + (\mathbf{S} + \mathbf{S}') \times \mathbf{n} &= n_0 (\mathbf{S} - \mathbf{S}'), \\ \mathbf{n} (S_0 - S'_0) - (\mathbf{S} - \mathbf{S}') \times \mathbf{m} &= -m_0 (\mathbf{S} + \mathbf{S}'). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку решения ищутся в классе матриц из ортохронной группы Лоренца, то необходимо накладывать известные ограничения на параметры [12]

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 - m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1, \quad n_0 m_0 + \mathbf{n} \mathbf{m} = 0. \quad (6)$$

«Нерелятивистские» 3-мерные матрицы Мюллера

Сначала рассмотрим более простой (нерелятивистский) случай, когда $S_0 = S'_0 = I = \text{inv}$ [16]; при этом решения уравнений ищутся среди элементов группы 3-мерных вращений, поэтому $m_0 = 0, m_j = 0$:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{S} + \mathbf{S}') = -n_0 (\mathbf{S} - \mathbf{S}'). \quad (7)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (возникает произвольный параметр $\Gamma \in [0, 2\pi]$):

$$\begin{aligned} n_0^2 + \mathbf{n}^2 &= 1, \quad n_0 = \frac{\cos \Gamma}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} (S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'), \\ \mathbf{n} &= \frac{\sin \Gamma}{\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') + \frac{\cos \Gamma}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} \mathbf{S} \times \mathbf{S}'. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что при $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ соотношения (8) описывают малую группу для группы вращений:

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1, \quad n_0 = \cos \Gamma, \quad \mathbf{n} = \sin \Gamma \frac{\mathbf{S}}{S}. \quad (9)$$

Когда $\Gamma = 0$, решение (8) выглядит особенно просто:

$$n_0 = \frac{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S}'}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}}. \quad (10)$$

Можно преобразовать решение (8) к векторной параметризации группы вращений [10]:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{n}}{n_0}, \quad \mathbf{c} = \tan \Gamma \frac{S}{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') + \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S}'}{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'}. \quad (11)$$

Отметим, что для векторов Стокса можно ввести следующие параметры (I – это интенсивность света, p – это степень поляризации света [16]):

$$S_0 = I, \quad \mathbf{S} = Ip \mathbf{N}, \quad I - \text{inv}, \quad \mathbf{N}^2 = 1. \quad (12)$$

Тогда (8) и (10) превращаются в

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1, \quad n_0 = \cos \Gamma \frac{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}}, \\ \mathbf{n} = \sin \Gamma \frac{\mathbf{N} + \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}} + \cos \Gamma \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}} \quad (13)$$

и

$$\mathbf{c} = \tan \Gamma \frac{\mathbf{N} + \mathbf{N}'}{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'} + \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'}. \quad (14)$$

О нахождении 3-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных экспериментов

Поскольку один поляризационный эксперимент не позволяет найти однозначно 3-мерную матрицу Мюллера оптического элемента, то необходимо выполнить два независимых измерения:

$$\mathbf{N}_1 \longrightarrow \mathbf{N}'_1, \quad \mathbf{N}_2 \longrightarrow \mathbf{N}'_2, \quad O - ?$$

В результате простого анализа можно получить 4 разных представления для одной и той же величины:

$$\tan \Gamma = + \frac{\mathbf{N}_1 (\mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}'_2)}{(\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_1)(\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}'_2)}, \quad \tan \Gamma = - \frac{\mathbf{N}'_1 (\mathbf{N}'_2 \times \mathbf{N}_2)}{(\mathbf{N}'_2 - \mathbf{N}'_1)(\mathbf{N}'_2 + \mathbf{N}_2)}, \\ \tan \Gamma = + \frac{\mathbf{N}_2 (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}'_1)}{(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}'_1)}, \quad \tan \Gamma = - \frac{\mathbf{N}'_2 (\mathbf{N}'_1 \times \mathbf{N}_1)}{(\mathbf{N}'_1 - \mathbf{N}'_2)(\mathbf{N}'_1 + \mathbf{N}_1)}. \quad (15)$$

Таким образом, имеем простое выражение для $\tan \Gamma$ вместе с четырьмя дополнительными соотношениями, описывающими множество возможных пар 3-векторов Стокса, связываемых одной и той же матрицей Мюллера.

О решении задачи транзитивности для релятивистских матриц Мюллера

Обратимся к анализу общего случая 4-мерных векторов Стокса, при этом будем использовать обозначения:

$$S_0 + S'_0 = A, \quad S_0 - S'_0 = B, \quad \mathbf{S} + \mathbf{S}' = \mathbf{A}, \quad \mathbf{S} - \mathbf{S}' = \mathbf{B}. \quad (16)$$

Полная система уравнений транзитивности принимает вид:

$$\mathbf{m} \mathbf{A} = n_0 \mathbf{B}, \quad \mathbf{n} \mathbf{B} = -m_0 \mathbf{A}; \\ \mathbf{m} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{n} = n_0 \mathbf{B}, \\ \mathbf{n} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{m} = -m_0 \mathbf{A}; \quad (17)$$

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 - m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1, \quad n_0 m_0 + \mathbf{n} \mathbf{m} = 0. \quad (18)$$

После необходимых математических операций можно привести эту систему уравнений к более простой:

$$\begin{aligned} n_0 &= A x - \mathbf{A}^2 y, & \mathbf{n} &= z \mathbf{A} - w A \mathbf{B} + y \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \\ m_0 &= -B z + \mathbf{B}^2 w, & \mathbf{m} &= x \mathbf{B} - y B \mathbf{A} + w \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены 4 числовых параметра. При этом остается только одно независимое дополнительное условие связи: $n_0^2 - m_0^2 = 1 + \mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2$. Это квадратичное условие связи принимает вид уравнения для 4 параметров:

$$\begin{aligned} &x^2 (A^2 - \mathbf{B}^2) + 2xy A(B^2 - \mathbf{A}^2) + y^2 [(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - B^2)\mathbf{A}^2 - A^2 B^2] = \\ &= z^2 (B^2 - \mathbf{A}^2) + 2zw B(A^2 - \mathbf{B}^2) + w^2 [(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - A^2)\mathbf{B}^2 - A^2 B^2] + 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя (19), можно выразить комплексный вектор-параметр k_a :

$$\begin{aligned} k_0 &= (xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2), \\ \mathbf{k} &= -(yB + iz)\mathbf{A} + (x + iwA)\mathbf{B} + (w - iy)\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) легко можно перейти к 3-мерному комплексному вектору Федорова [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}}{k_0} &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} + \gamma \mathbf{A} \times \mathbf{B}, & \alpha &= \frac{-(yB + iz)}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}, \\ \beta &= \frac{x + iwA}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}, & \gamma &= \frac{w - iy}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обращаем внимание на следующее: система уравнений (17) не меняет своего вида, если все групповые параметры умножить на любое вещественное число. Поэтому эти параметры в принципе могут быть определены из (17) только с точностью до общего множителя. Только обращаясь к уравнению (18), этот общий нормировочный множитель можно без ограничения общности полагать равным 1. В свою очередь, принципиальная неопределимость относительного множителя для четырех числовых параметров x, y, z, w означает, что в выражениях (22) для α, β, γ ничего существенного не теряется, если числитель и знаменатель разделить на любую (отличную от нуля) величину из четырех x, y, z, w ; тем самым произвол в выборе независимых параметров будет исключен. Однако вместо такого формального исключения произвола, с математической точки зрения, может быть намного удобнее использовать 4 величины, подчиненные дополнительно квадратичному условию (20). В частности, в следующем разделе будет использована именно эта возможность.

О нахождении 4-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных измерений

Как установлено выше, каждое поляризационное измерение

$$S_a \xrightarrow{L} S'_a$$

позволяет получить одно квадратичное уравнение (20) для четырех неизвестных параметров. Понятно, что для однозначного нахождения матрицы Мюллера необходимо выполнить несколько независимых поляризационных опытов. Начнем с возможности использовать 4 измерения $i = 1, 2, 3, 4$; проблема формулируется в виде 4 квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned} &x^2 (A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + 2xy A_i(B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + y^2 [(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - B_i^2)\mathbf{A}_i^2 - A_i^2 B_i^2] = \\ &= z^2 (B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + 2zw B_i(A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + w^2 [(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - A_i^2)\mathbf{B}_i^2 - A_i^2 B_i^2] + 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Ее можно представить короче в символическом виде:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 &= \alpha_1z^2 + 2\beta_1zw + \sigma_1w^2 + 1, \\ a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 &= \alpha_2z^2 + 2\beta_2zw + \sigma_2w^2 + 1, \\ a_3x^2 + 2b_3xy + c_3y^2 &= \alpha_3z^2 + 2\beta_3zw + \sigma_3w^2 + 1, \\ a_4x^2 + 2b_4xy + c_4y^2 &= \alpha_4z^2 + 2\beta_4zw + \sigma_4w^2 + 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Эта система решается, и логическая цепочка выглядит так:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Rightarrow \quad x = x(y, z, w), \\ (2) \quad &\Rightarrow \quad y = y(z, w), \quad x = x(y(z, w), z, w) = \bar{x}(z, w), \\ (3) \quad &\Rightarrow \quad z = z(w), \\ (4) \quad &\Rightarrow \quad w = w(\dots), \quad z = z(w(\dots)). \end{aligned}$$

Однако этот способ представляется довольно сложным. Можно предложить другую и более простую процедуру, основанную на использовании результатов 6 независимых измерений. При этом задача сводится к системе 6 линейных уравнений относительно 6 переменных $x^2, y^2, 2xy, z^2, w^2, 2zw$:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 - \alpha_1z^2 - 2\beta_1zw - \sigma_1w^2 &= +1, \\ a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 - \alpha_2z^2 - 2\beta_2zw - \sigma_2w^2 &= +1, \\ a_3x^2 + 2b_3xy + c_3y^2 - \alpha_3z^2 - 2\beta_3zw - \sigma_3w^2 &= +1, \\ a_4x^2 + 2b_4xy + c_4y^2 - \alpha_4z^2 - 2\beta_4zw - \sigma_4w^2 &= +1, \\ a_5x^2 + 2b_5xy + c_5y^2 - \alpha_5z^2 - 2\beta_5zw - \sigma_5w^2 &= +1, \\ a_6x^2 + 2b_6xy + c_6y^2 - \alpha_6z^2 - 2\beta_6zw - \sigma_6w^2 &= +1. \end{aligned}$$

Ее единственное решение определяется правилом Крамера:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\Delta_{x^2}}{\Delta}, \quad y^2 = \frac{\Delta_{y^2}}{\Delta}, \quad 2xy = \frac{\Delta_{2xy}}{\Delta}, \\ z^2 &= \frac{\Delta_{z^2}}{\Delta}, \quad w^2 = \frac{\Delta_{w^2}}{\Delta}, \quad 2zw = \frac{\Delta_{2zw}}{\Delta}, \\ x + y &= \sqrt{\frac{\Delta_{x^2} + \Delta_{y^2} + \Delta_{2xy}}{\Delta}}, \quad x - y = \sqrt{\frac{\Delta_{x^2} + \Delta_{y^2} - \Delta_{2xy}}{\Delta}}, \\ z + w &= \sqrt{\frac{\Delta_{z^2} + \Delta_{w^2} + \Delta_{2zw}}{\Delta}}, \quad z - w = \sqrt{\frac{\Delta_{z^2} + \Delta_{w^2} - \Delta_{2zw}}{\Delta}}. \end{aligned} \quad (25)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes, G.G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. Mueller, H. Memorandum on the polarization optics of the photo-elastic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. Jones, R.C. New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. Hurwitz, H. A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.

5. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // *J. Opt. Soc. Amer.* – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // *J. Opt. Soc. Amer.* – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. Гельфанд, И.М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
8. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
9. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
10. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
11. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
12. Bogush, A.A. On Unique Parametrization of the Linear Group $GL(4, C)$ and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // *NPCS.* – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.
13. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
14. Богуш, А.А. Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // *Вестці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2008. – № 2. – С. 96–102.
15. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // *Advances in Applied Clifford Algebras.* – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
16. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.

V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk. Transitivity in the Theory of the Lorentz Group and the Stokes–Mueller Formalism in Optics

Group-theoretical analysis of arbitrary polarization elements with Mueller matrices of the Lorentzian type is performed. Any single polarization measurement fixes parameters of the corresponding Mueller matrix up to 3 arbitrary variables. To any single polarization measurement corresponds a quadratic equation on 4 numerical parameters. A corresponding Mueller matrix can be found uniquely from results of four independent polarization measurements. Analytical expressions for these 4 parameters of any Mueller matrix can be given the most simple form when using the results of 6 arbitrary and independent measurements, the corresponding formulas are written down in explicit form.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 16.01.2012

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий, Д.В. Адамчук**ЭЛЕКТРОННО-НЕЙТРОННО-ЯДЕРНОЕ ВЕЩЕСТВО
В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Рассчитаны равновесные термодинамические и ядерные параметры холодного сверхплотного электронно-нейтронно-ядерного вещества при наличии сверхсильного магнитного поля. Исследовано влияние сверхсильного магнитного поля на параметры, соответствующие границам электронно-нейтронно-ядерной фазы такого вещества.

Согласно существующим представлениям, при плотностях, характерных для оболочек нейтронных звезд и недр белых карликов, должны быть условия для реализации электронно-ядерной (Ae), электронно-нейтронно-ядерной (Aen) или электронно-нуклонной (enp) фаз сверхплотного крайне вырожденного вещества [1]. В любой из перечисленных фаз одним из компонентов вещества является газ свободных электронов, который при плотностях $\rho > 10^6$ г/см³ является релятивистским; при этом температура его вырождения превышает 10^{10} К, что значительно больше предполагаемых температур в недрах указанных астрофизических объектов. В веществе, находящемся в Aen -фазе, имеются свободные нерелятивистские нейтроны. Известно, что сверхплотное вещество может находиться в абсолютно устойчивом состоянии термодинамического равновесия по отношению к бета-процессам и пикноядерным реакциям [1].

Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества.

Цель данной работы – исследование влияния сверхсильного магнитного поля на соответствующие границам Aen -фазы значения термодинамических и ядерных параметров холодного абсолютно равновесного электронно-нейтронно-ядерного вещества для различных известных из литературы его моделей. Следует заметить, что в [2] ставится под сомнение сама возможность существования Aen -фазы вещества из-за альтернативного нейтронизации процесса пионизации ядер. Проведенные нами исследования (например, [3]) дают, однако, основание полагать, что сверхсильные магнитные поля подавляют процесс пионизации более интенсивно, чем процесс нейтронизации, приводящий к образованию Aen -фазы, и поставленная в настоящей работе задача вполне корректна и актуальна.

При численных расчетах и оценках не будет учитываться зависимость величины магнитного момента нейтрона от индукции магнитного поля; не будет учитываться также малая величина аномального магнитного момента электрона.

Представим энергию электронно-нейтронно-ядерного вещества в виде суммы энергий ядер, электронов и свободных нейтронов:

$$E = E_A + E_e + E_n; \quad (1)$$

при этом мы пренебрегаем кинетической энергией ядер и считаем, что электроны образуют крайне вырожденный идеальный газ. Числа частиц компонентов вещества связаны соотношением:

$$N = N_n + AN_A = N_n + \frac{A}{Z} N_e, \quad (2)$$

где N, N_A, N_n, N_e – соответственно числа всех нуклонов, ядер, свободных нейтронов и электронов в объеме V рассматриваемой электронейтральной среды, A и Z – массовое и зарядовое числа ядра. Концентрация всех нуклонов связана с концентрациями компонентов среды и ядерными параметрами соотношением:

$$n = n_n \frac{n_0 - n}{n_0 - n_n} + n_e \frac{A}{Z}. \quad (3)$$

где $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ – концентрация нуклонов в ядре.

Энергию покоя ядра будем вычислять с помощью модифицированной следующим образом формулы Бете-Вайцзеккера:

$$Mc^2 = (A - Z)m_n c^2 + Zm_p c^2 + W, \quad (4)$$

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{3n_A^{1/3}}{2n_0^{1/3}}\right) + c_3 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + c_4 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^4 + c_5 B^2 Z A^{2/3}. \quad (5)$$

Здесь m_n и m_p – массы нейтрона и протона, W – энергия связи ядра, B – индукция магнитного поля; $c_0 = 15,75 \text{ МэВ}$, $c_1 = 17,8 \text{ МэВ}$, $c_2 = 0,71 \text{ МэВ}$, $c_3 = 23,7 \text{ МэВ}$ (значения взяты из [1]), $c_4 = 7,7 \text{ МэВ}$ [4], $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38} \text{ МэВ/Гс}^2$ [5]. Заметим, что в [6] при решении аналогичной задачи при $B=0$ с использованием модели невзаимодействующих свободных нейтронов берется $c_4 = c_3/27 \approx 0,878 \text{ МэВ}$. Поправка в третьем слагаемом (5) связана с учетом кулоновского взаимодействия протонов ядра с окружающими ядрами (т.н. «кулоновская энергия решетки» [7]).

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме V равны [4]:

$$E_n = w_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n = n_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (6)$$

где (в [8] имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы)

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (7)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left((\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} \right), \quad (8)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{Я} = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} n_n^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad (10)$$

n_n и P_n – концентрация и давление свободных нейтронов, $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$ – их химический потенциал, $\mu_{Я}$ – ядерный магнетон, $\sigma_n = 1,913$.

Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [9]:

$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (11)$$

где n_e, P_e, χ_e – концентрация, давление и химический потенциал электронов, m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора.

Абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия соответствует минимум энергии среды E относительно независимых параметров A, Z и N_A при фиксированных N и B :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, имеем систему уравнений, которая позволяет установить однозначное соответствие между массовым числом A и зарядовым числом Z наиболее устойчивого ядра при фиксированном значении индукции магнитного поля B :

$$Z = \sqrt{\frac{c_1 A}{2c_2 J} + \frac{c_5^2 B^4 A^2}{4c_2^2 J^2}} - \frac{c_5 B^2 A}{2c_2 J}, \quad J = 1 - \frac{3n_A^{1/3}}{4n_0^{1/3}}, \quad (13)$$

а также выразить химические потенциалы электронного и нейтронного газов:

$$\chi_e = \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = m_n c^2 - m_p c^2 + 4c_3 - \frac{2Z}{A} (4c_3 + c_2 A^{2/3} (2J-1)) + 8c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 - c_5 B^2 A^{2/3}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{\partial w_n}{\partial n_n}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \left(\frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} = \\ &= m_n c^2 + c_3 - c_0 - \frac{Z^2}{A^2} \left(4c_3 + c_2 A^{2/3} \frac{4J-1}{3} \right) + c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^3 \left(1 + \frac{6Z}{A} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные соотношения дают возможность, задавая значения B и $n = N/V$ (или значение массовой плотности $\rho \approx m_n n$ вместо концентрации нуклонов n), вычислять равновесные термодинамические и ядерные параметры электронно-нейтронно-ядерного и электронно-ядерного замагниченного вещества (в последнем случае применимы все приведенные выше формулы при условии $n_n = 0$). Порог развала ядер и образования сплошной ядерной материи (электронно-нуклонной *enp*-фазы) можно оценить из условия равенства нулю энергии связи ядра.

Численные оценки показывают, что в сверхсильном магнитном поле границы электронно-нейтронно-ядерной фазы абсолютно равновесного вещества смещаются в сторону более высоких плотностей, и заметно изменяются пороговые значения термодинамических и ядерных параметров вещества. Расчеты проведены для трех моделей электронно-нейтронно-ядерного вещества:

- 1) модели, учитывающей размеры ядер и ядерное взаимодействие свободных нейтронов между собой;
- 2) модели, учитывающей кулоновское взаимодействие протонов ядра с соседними ядрами (ядра в сверхплотном веществе полностью ионизированные);
- 3) модели, в которой электронный и нейтронный компоненты электронно-нейтронно-ядерного вещества рассматриваются как крайне вырожденные идеальные ферми-газы.

В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчетов для трех указанных моделей (строки сверху вниз соответствуют моделям 1, 2, 3) значений массового числа A наибо-

лее устойчивого ядра, зарядового числа Z , отношения Z / A , удельной энергии связи ядра b , химического потенциала электронов χ_e , концентраций n_e , n_n , n соответственно электронов, свободных нейтронов и всех нуклонов вещества, давлений P_e , P_n и P , плотностей энергии w_e , w_n и w , массовой плотности ρ для фиксированных значений индукции магнитного поля B . Из таблиц видно, что учет кулоновского взаимодействия мало изменяет значения параметров, рассчитанных в рамках модели идеальных ферми-газов для компонентов сверхплотного вещества. Учет же размеров ядер и ядерного взаимодействия свободных нейтронов заметнее влияет на численные значения равновесных параметров электронно-нейтронно-ядерного вещества.

Таблица 1 – Параметры абсолютно равновесного вещества у нижнего порога Aen -фазы

Параметры	$B=0$	$B=2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B=4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B=6 \cdot 10^{17}$ Гс
A	111,8	110,0	104,8	97,2
	123,0	108,0	94,0	81,0
	120,4	105,4	91,3	78,5
Z	37,4	36,9	35,5	33,4
	39,6	37,0	34,1	31,0
	38,9	36,1	33,1	30,0
Z/A	0,335	0,335	0,337	0,339
	0,322	0,343	0,363	0,382
	0,322	0,343	0,363	0,382
$ b $, МэВ	7,53	7,52	7,49	7,44
	7,40	7,84	8,14	8,32
	7,35	7,75	8,03	8,20
χ_e , МэВ	23,8	23,7	23,4	23,0
	24,4	20,7	17,2	13,7
	24,1	20,4	16,8	13,3
n_e , см^{-3}	$5,9 \cdot 10^{34}$	$1,8 \cdot 10^{35}$	$3,6 \cdot 10^{35}$	$5,4 \cdot 10^{35}$
	$6,4 \cdot 10^{34}$	$1,6 \cdot 10^{35}$	$2,7 \cdot 10^{35}$	$3,2 \cdot 10^{35}$
	$6,1 \cdot 10^{34}$	$1,6 \cdot 10^{35}$	$2,6 \cdot 10^{35}$	$3,1 \cdot 10^{35}$
P_e , МэВ/см ³	$3,5 \cdot 1036$	$2,2 \cdot 1036$	$4,1 \cdot 1036$	$5,7 \cdot 1036$
	$3,9 \cdot 1036$	$1,7 \cdot 1036$	$2,3 \cdot 1036$	$2,2 \cdot 1036$
	$3,7 \cdot 1036$	$1,6 \cdot 1036$	$2,2 \cdot 1036$	$2,1 \cdot 1036$
n , см^{-3}	$1,8 \cdot 10^{35}$	$5,5 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,5 \cdot 10^{36}$
	$2,0 \cdot 10^{35}$	$4,7 \cdot 10^{35}$	$7,4 \cdot 10^{36}$	$8,4 \cdot 10^{36}$
	$1,9 \cdot 10^{35}$	$4,6 \cdot 10^{35}$	$7,2 \cdot 10^{35}$	$8,1 \cdot 10^{35}$
w , МэВ/см ³	$1,7 \cdot 10^{38}$	$5,1 \cdot 10^{38}$	$1,0 \cdot 10^{39}$	$1,4 \cdot 10^{39}$
	$1,9 \cdot 10^{38}$	$4,4 \cdot 10^{38}$	$6,9 \cdot 10^{39}$	$7,9 \cdot 10^{39}$
	$1,8 \cdot 10^{38}$	$4,3 \cdot 10^{38}$	$6,7 \cdot 10^{38}$	$7,6 \cdot 10^{38}$
ρ , г/см ³	$2,9 \cdot 10^{11}$	$9,2 \cdot 10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{12}$	$2,6 \cdot 10^{12}$
	$3,4 \cdot 10^{11}$	$7,9 \cdot 10^{11}$	$1,2 \cdot 10^{12}$	$1,4 \cdot 10^{12}$
	$3,2 \cdot 10^{11}$	$7,7 \cdot 10^{11}$	$1,2 \cdot 10^{12}$	$1,4 \cdot 10^{12}$

Таблица 2 – Параметры абсолютно равновесного вещества у верхнего порога *Aep*-фазы

Параметры	$B=0$	$B=2 \cdot 10^{17}$ Гс	$B=4 \cdot 10^{17}$ Гс	$B=6 \cdot 10^{17}$ Гс
A	468,8	455,8	420,5	372,2
	694,0	663,0	605,0	524,0
	661,0	638,2	578,2	499,1
Z	76,7	74,7	69,4	62,1
	94,8	91,0	83,8	73,7
	91,0	88,2	80,8	70,8
Z/A	0,164	0,164	0,165	0,167
	0,137	0,137	0,139	0,140
	0,138	0,138	0,140	0,142
χ_e , МэВ	69,9	69,7	69,5	69,1
	58,7	58,5	58,5	58,5
	57,9	57,8	57,7	57,5
n_e , см ⁻³	$1,5 \cdot 10^{36}$	$5,4 \cdot 10^{35}$	$1,1 \cdot 10^{36}$	$1,6 \cdot 10^{36}$
	$8,8 \cdot 10^{35}$	$4,6 \cdot 10^{35}$	$9,1 \cdot 10^{35}$	$1,4 \cdot 10^{36}$
	$8,4 \cdot 10^{35}$	$4,5 \cdot 10^{35}$	$9,0 \cdot 10^{35}$	$1,3 \cdot 10^{36}$
w_e , МэВ/см ³	$7,8 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
	$3,9 \cdot 10^{37}$	$1,3 \cdot 10^{37}$	$2,7 \cdot 10^{37}$	$4,0 \cdot 10^{37}$
	$3,7 \cdot 10^{37}$	$1,3 \cdot 10^{37}$	$2,6 \cdot 10^{37}$	$3,9 \cdot 10^{37}$
P_e , МэВ/см ³	$2,6 \cdot 10^{37}$	$1,9 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$
	$1,3 \cdot 10^{37}$	$1,3 \cdot 10^{37}$	$2,7 \cdot 10^{37}$	$4,0 \cdot 10^{37}$
	$1,2 \cdot 10^{37}$	$1,3 \cdot 10^{37}$	$2,6 \cdot 10^{37}$	$3,9 \cdot 10^{37}$
n_n , см ⁻³	$2,9 \cdot 10^{37}$	$2,9 \cdot 10^{37}$	$3,0 \cdot 10^{37}$	$3,1 \cdot 10^{37}$
	$7,8 \cdot 10^{36}$	$7,9 \cdot 10^{36}$	$8,2 \cdot 10^{36}$	$8,7 \cdot 10^{36}$
	$7,8 \cdot 10^{36}$	$7,9 \cdot 10^{36}$	$8,2 \cdot 10^{36}$	$8,7 \cdot 10^{36}$
Pn , МэВ/см ³	$2,2 \cdot 1038$	$2,2 \cdot 1038$	$2,3 \cdot 1038$	$2,5 \cdot 1038$
	$2,4 \cdot 1037$	$2,6 \cdot 1037$	$3,0 \cdot 1037$	$3,6 \cdot 1037$
	$2,4 \cdot 1037$	$2,5 \cdot 1037$	$2,9 \cdot 1037$	$3,6 \cdot 1037$
n , см ⁻³	$3,6 \cdot 10^{37}$	$3,2 \cdot 10^{37}$	$3,5 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$
	$1,4 \cdot 10^{37}$	$1,1 \cdot 10^{37}$	$1,5 \cdot 10^{37}$	$1,8 \cdot 10^{37}$
	$1,4 \cdot 10^{37}$	$1,1 \cdot 10^{37}$	$1,5 \cdot 10^{37}$	$1,8 \cdot 10^{37}$
w , МэВ/см ³	$3,6 \cdot 10^{40}$	$3,1 \cdot 10^{40}$	$3,5 \cdot 10^{40}$	$3,9 \cdot 10^{40}$
	$1,4 \cdot 10^{40}$	$1,1 \cdot 10^{40}$	$1,4 \cdot 10^{40}$	$1,7 \cdot 10^{40}$
	$1,3 \cdot 10^{40}$	$1,1 \cdot 10^{40}$	$1,4 \cdot 10^{40}$	$1,7 \cdot 10^{40}$
P , МэВ/см ³	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,4 \cdot 10^{38}$	$2,7 \cdot 10^{38}$	$3,1 \cdot 10^{38}$
	$3,7 \cdot 10^{37}$	$3,9 \cdot 10^{37}$	$5,6 \cdot 10^{37}$	$7,6 \cdot 10^{37}$
	$3,6 \cdot 10^{37}$	$3,8 \cdot 10^{37}$	$5,5 \cdot 10^{37}$	$7,4 \cdot 10^{37}$
ρ , г/см ³	$6,0 \cdot 10^{13}$	$5,3 \cdot 10^{13}$	$5,9 \cdot 10^{13}$	$6,4 \cdot 10^{13}$
	$2,4 \cdot 10^{13}$	$1,9 \cdot 10^{13}$	$2,5 \cdot 10^{13}$	$3,1 \cdot 10^{13}$
	$2,3 \cdot 10^{13}$	$1,9 \cdot 10^{13}$	$2,4 \cdot 10^{13}$	$3,1 \cdot 10^{13}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
2. Саакян, Г.С. Физика нейтронных звезд / Г.С. Саакян. – Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1995. – 347 с.
3. Секержицкий, В.С. О влиянии магнитного поля на пионизацию ядер / В.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 2. – С. 39–44.
4. Саакян, Г.С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г.С. Саакян, Л.Ш. Григорян // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
5. Леинсон, Л.Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л.Б. Леинсон, В.Н. Ораевский // Ядерная физика. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
6. Вартанян, Ю.Л. Нейтронобогатые ядра в ферми-газе / Ю.Л. Вартанян, Н.К. Овакимова // Астрономический журнал – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
7. Володин, В.А. Влияние кристаллической решетки на ядерные свойства сверхплотного вещества / В.А. Володин, Д.А. Киржниц // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т. 13, № 8. – с. 450–452.
6. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
9. Шульман, Г.А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г.А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

V.S. Sekerzhitsky, D.V. Adamchuk. Electron-Neutron-Nuclear Matter in Superstrong Magnetic Field

We have calculated the equilibrium thermodynamic and nuclear parameters of cold superdense electron-neutron-nuclear matter during superstrong magnetic field. Influence of a superstrong magnetic field on parameters that correspond to bounds of electron-neutron-nuclear phase of such matter is investigated.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.02.2012

УДК 537.6+539.171.11

А.И. Серый**О ФЕРРОМАГНЕТИЗМЕ ВЫРОЖДЕННОЙ НЕЙТРОННО-ПРОТОННОЙ СИСТЕМЫ**

Для смеси нейтронного и протонного газов с контактным ядерным взаимодействием вычисляется магнитная восприимчивость и находится критерий ферромагнетизма в случае слабого внешнего магнитного поля. Квантование Ландау для протонов не учитывается. Вычислено, что минимальные концентрации нуклонов, необходимые для возникновения ферромагнетизма и поляризационных магнитных полей, имеют порядок 10^{34} см^{-3} . Учет обменного кулоновского взаимодействия между протонами немного понижает минимальную ферромагнитную концентрацию протонов и приводит к появлению дополнительной области ферромагнетизма, включающую порог нейтронизации. Такой ферромагнетизм мог бы быть возможен, соответственно, при взрывах Сверхновых II типа и в верхних слоях белых карликов.

Введение

Исследования в данной статье проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова. Предмет исследований – возможность генерации магнитных полей в астрофизике через спиновую поляризацию нуклонов; объект исследований – нейтронно-протонная система (пр-система); метод исследования – критерий ферромагнетизма Стонера в модели контактного межнуклонного и обменного кулоновского протон-протонного взаимодействия (рр-взаимодействие). Объект исследования встречается при разных условиях, и к нему применяются разные подходы (таблица 1; нас будут интересовать случаи I, II).

Таблица 1 – Объект исследований при разных условиях

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
I	Под оболочками с водородом [1, с. 185]	Начало нейтронизации водорода [2, с. 271]	7	∞	Невелика	Газовый
II	От $R \approx 0$ до $R \geq 100$ км [3]	$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$	11	<1	Иные ядра	Газовый
III	В жидких ядрах [2, с. 281]	Диссоциация ядер при коллапсе	14	∞	Пионы	Жидкостный

Примечание: А – Астрофизический объект или событие (I – белый карлик, II – взрыв Сверхновой II типа, III – нейтронная звезда); Б – Область нахождения пр-смеси; В – Возможный путь образования; Г – Плотность, Ig ($\text{г}/\text{см}^3$); Д – Время жизни, с; Е – Примесь иных частиц; Ж – Ферми-подходы к изучению.

Возможность реакции протонов и антинейтрино подтверждается наличием соответствующих компонентов в Сверхновых II типа благодаря линии водорода в их спектрах и антинейтринным вспышкам перед их взрывами (в т.ч. в 1987 г.) [4, с. 433, 434].

Запишем потенциал и критерий Стонера (для магнитной восприимчивости χ) в случае односортового Ферми-газа с контактным взаимодействием (ν_0 – плотность числа состояний на уровне Ферми, g – константа взаимодействия) [5, с. 198; 6, с. 23]:

$$U(\vec{r} - \vec{r}') = g\delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad \chi = 2\tilde{\mu}^2\nu_0(1 - \nu_0g)^{-1}, \quad 1 - \nu_0g \leq 0. \quad (1)$$

Критерий Стонера «сидит на поверхности Ферми» [5, с. 87], и не найти значения поляризации нуклонов; их следует искать через минимум энергии пр-системы. В критерии типа (1) для вырожденного пр-газа константы g зависят от спина и изоспина нуклонов. Внешнее магнитное поле слабое ($\hbar\omega_B \equiv \mu_Y B \ll E_{Fi}$, $i = n, p$), т.е. можно применять методы из [5, с. 187, 198].

Задача: 1) выяснить, при каких условиях вследствие ферромагнетизма магнитное поле поляризованных нуклонов может быть гораздо больше внешнего; 2) учесть влияние обменного кулоновского пр-взаимодействия.

Замечания: 1) электронно-нейтронное взаимодействие (en-взаимодействие) не учтено из-за малости длины en-рассеяния [2, с. 268]; 2) контактное ядерное взаимодействие можно описать и через ядерное псевдомагнитное поле (ниже), которое на 2 порядка превосходит обычное магнитное [7, с. 54], поэтому последнее (как и квантование Ландау для протонов) не учитываем; 3) в функциях Грина спектры частиц линеаризованы вблизи поверхности Ферми [5, с. 8], что допустимо при малых степенях поляризации [8, с. 59]; 4) $T \approx 0$ К; 5) Возможные эффекты сверхтекучести не учитываем даже при низких температурах, т.к. доля сверхтекучей компоненты все равно невелика [9, с. 22].

Замечание о взаимодействиях и применимости теорий возмущений

Если m^* – приведённая масса 2 нуклонов, $s_{1,2}$ – проекции их спинов, a – длина рассеяния, то константа g даётся выражением [6, с. 22, 23]:

$$g = 2\pi\hbar^2 (m^*)^{-1} a, \quad a = (3a_t + a_s) / 4 + s_1 s_2 (a_t - a_s), \quad (2)$$

Для нейтрона и протона длины синглетного и триплетного s -рассеяния (в 10^{-13} см) [6, с. 20]: $a_s = -23,71$, $a_t = 5,42$. Можно показать, что $a_t = 0$ для тождественных нуклонов [10, с. 366], а их синглетные s -длины a_i (в 10^{-13} см): $a_p = a_n = -17,2$ [6, с. 30, 31]; равенство верно при компенсации протонной энергии Хартри электронным фоном. Переворот спинов при рассеянии в случае вырождения и занятости соответствующих конечных состояний подавляется. Тогда при $s_1 \cdot s_2 = \pm 1/4$ из (2) получим:

$$J_{ij} = \pi\hbar^2 (m_{ij}^*)^{-1}, \quad g_{np}^{\uparrow\uparrow} = 2J_{np} a_t > 0, \quad g_{np}^{\uparrow\downarrow} = J_{np} (a_t + a_s) < 0, \quad g_{ii} = J_{ii} a_i < 0. \quad (3)$$

Т.е. в данной модели для односортового газа критерий Стонера не выполняется.

Выразим степени спиновой поляризации через концентрации частиц ($n_i, i = e, n, p$) с определенной проекцией спина (в затравочном магнитном поле сонаправлены магнитные моменты, поэтому у нейтронов поляризация отрицательна):

$$p_{0i} = (n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow}) / n_i \Rightarrow n_{i(\uparrow,\downarrow)} = n_i (1 \pm p_{0i}) / 2. \quad (4)$$

Например, энергия взаимодействия нейтрона со спином «вверх» с протонами, с точки зрения контактного взаимодействия, согласно [5, с. 197], с учетом (3) и (4) равна

$$U_{np} = g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{p\uparrow} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{p\downarrow} = 2J_{np} \frac{3a_t + a_s}{4} n_p + 2J_{np} \frac{a_t - a_s}{4} n_p p_{0p} = V_{np} + W_{np}. \quad (5)$$

W_{np} можно представить как энергию нейтрона в ядерном псевдомагнитном поле $\vec{B}_{\text{эф}}$, создаваемом поляризованными протонами ($\vec{p}_{0p} = \vec{r}_{0p}$ – вектор поляризации их

спинов или собственных магнитных моментов, \vec{s}_n – вектор спина нейтрона; ценность такого представления в том, что оно экспериментально обосновано) [7, с. 54]:

$$W_{np} = -\frac{2\pi\hbar^2 n_p \beta_{np} \vec{s}_n \cdot \vec{p}_{0p}}{m_{np}^*} = -\vec{\mu}_n \frac{\pi\hbar^2 n_p |\beta_{np}| \vec{s}_n \cdot \vec{r}_{0p}}{m_{np}^* |\vec{\mu}_n|} \equiv -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B}_{\text{эф}}^{np}, \quad (6)$$

$$\beta_{np} = \frac{f_t - f_s}{2} = -\frac{a_t + |a_s|}{2}, f_{t,s} \xrightarrow{E \rightarrow 0} -a_{t,s}. \quad (7)$$

Отметим, что $\vec{r}_{0p} = \vec{p}_{0p}, \vec{r}_{0n} = -\vec{p}_{0n}$, т.к. у нейтрона спин и магнитный момент антипараллельны. Поскольку $\vec{r}_{0i} \uparrow\uparrow \vec{B}$ ($i = p, n$), из (6), (7) видно, что $\vec{B}_{\text{эф}}^{np} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Т.е. ядерное псевдомагнитное поле, действующее на нейтроны со стороны поляризованных протонов, сонаправлено с обычным магнитным полем, могущим вызвать поляризацию протонов. Аналогично доказывается, что $\vec{B}_{\text{эф}}^{nn} \uparrow\downarrow \vec{B}$, $\vec{B}_{\text{эф}}^{pn} \uparrow\uparrow \vec{B}$, $\vec{B}_{\text{эф}}^{pp} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Таким образом,

$$\text{sign}(\vec{B}_{\text{эф}}^{ij} \cdot \vec{B}) = -\text{sign}(T_{3i} T_{3j}). \quad (8)$$

Плотность энергии обменного взаимодействия [5, с. 202] можно продифференцировать по $n_{i\uparrow}$ и найти добавки к химическим потенциалам (с учетом (4)):

$$\Omega_{обм} = \Omega_p + \Omega_e, \Omega_i = -e^2 (6\pi^2)^{4/3} (n_{i\uparrow}^{4/3} + n_{i\downarrow}^{4/3}) / (8\pi^3), n_e = n_p, \\ E_{обм} = E_p^{обм} + E_e^{обм}, E_i^{обм} = -\frac{e^2}{\pi} (6\pi^2 n_{i\uparrow})^{1/3} = -\frac{e^2}{\pi} (3\pi^2 n_i (1 + p_{0i}))^{1/3}. \quad (9)$$

Все рассмотренные взаимодействия отвечают первому порядку теорий возмущений по фрелиховской константе и константам (3). Рассмотрим их в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнительная характеристика различных теорий возмущений

Взаимодействие	Кулоновское (дальнодейственное)	Ядерное (короткодейственное)
Параметр теории возмущений α	$\frac{e^2}{\hbar u_F}, u_F = \frac{q_{Fi}}{m}$ [5, с. 189]	$\frac{q_{Fi} a}{\hbar}$ [8, с. 36]
При $\alpha < 1$	$n_p > n_p^* = 1,42 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$	$n_i < n^{**} = 5,31 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}; i = n, p$
Учет поправок 1-го порядка (даже при $\alpha > 1$, когда теория возмущений неприменима)	Энергия Хартри – нет (компенсирована фоном электронов); энергия Фока (обменная) – да (принцип Паули все равно действует) [5, с. 189, 201, 202, 209]	Да – (5); существование ядерного псевдомагнитного поля подтверждено экспериментально [7, с. 55]

В обоих случаях ряд знакопеременный (согласно [5, с. 206; 8, с. 40] и (3)). Учтем известное соотношение для импульса Ферми [8, с. 61] и распишем условия для $\alpha < 1$:

$$q_{Fi} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n_i^{1/3}, \varepsilon_{0i} = q_{Fi}^2 (2m_i)^{-1}, \quad (10)$$

$$n_i^* = m_i^3 e^6 (3\hbar^6 \pi^2)^{-1} = \alpha_0^3 (3\pi^2 \lambda_{iC}^3)^{-1}, \lambda_{iC} = \hbar (m_i c)^{-1}, \alpha_0 \equiv e^2 (\hbar c)^{-1}, i = e, p, \quad (11)$$

$$n^{**} = 8(3\pi^2 a_n^3)^{-1}. \quad (12)$$

Численные данные в (3) дают минимальное значение в (12) именно при $a_n = a_p$.

Вывод критерия Стонера через полюсы магнитной восприимчивости

В основном состоянии ориентации спинов одинаковы, и, согласно [5, с. 8] и (10),

$$q_{Fi} = q_{Fi\uparrow} = q_{Fi\downarrow}, \frac{n_i}{2} = \frac{4\pi q_{Fi}^3}{3(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi^4 \hbar^6 c^6 v_{0i}^3}{3(m_p c^2)^3}, v_{0i} = v_{0i\uparrow} = v_{0i\downarrow} = \frac{m_i \sqrt{m_i \epsilon_{0i}}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}, \quad (13)$$

где $i = p, n; v_{0i}$ – плотности числа состояний на уровне Ферми. В слабом магнитном поле меняется баланс между концентрациями для разных проекций спина. При этом

$$\xi_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{n_i}{2} + \delta n_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{4\pi(q_{Fi} + \delta q_{i\uparrow,\downarrow})^3}{3(2\pi\hbar)^3}, \gamma_i = \mu_i / \mu_{Я}; i = n, p, \delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow},$$

$$E_{Fi} = \frac{(q_{Fi} + \delta q_{i\uparrow,\downarrow})^2}{2m_i} \mp 2|\gamma_i| \hbar \omega_B T_{3i} + g_{ii} \xi_{i\downarrow,\uparrow} + g_{ij}^{\uparrow\downarrow} \xi_{j\downarrow,\uparrow} + g_{ij}^{\uparrow\uparrow} \xi_{j\uparrow,\downarrow}, \quad (14)$$

где $\pm |\gamma_i| \hbar \omega_B = \pm |\gamma_i| \mu_{Я} B$ – зеемановская энергия. Выполняя разложения, получим:

$$(q_{Fi} + \delta q_{i\uparrow,\downarrow})^k \approx q_{Fi}^k + k q_{Fi}^{k-1} \delta q_{i\uparrow,\downarrow}, k = 2, 3; \delta n_{i\uparrow,\downarrow} = v_{0i} q_{Fi} \delta q_{i\uparrow,\downarrow} / m_i, \quad (15)$$

$$\delta n_{i\uparrow} = v_{0i} (2|\gamma_i| \hbar \omega_B T_{3i} + g_{ii} \delta n_{i\uparrow} + \tilde{g} \delta n_{j\uparrow}), \tilde{g} = g_{np}^{\uparrow\downarrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}. \quad (16)$$

Решая (16) при $B=0$ и $B \neq 0$, найдем $\delta n_{i\uparrow}$ и намагниченность (\vec{k} – орт оси z):

$$\delta n_{i\uparrow}^{B=0} = v_{0i} \tilde{g} \lambda_i^{-1} \delta n_{j\uparrow}, \delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0} = 2v_{0i} \hbar \omega_B T_{3i} (|\gamma_i| \lambda_j - v_{0j} |\gamma_j| \tilde{g}) \Omega^{-1}, \quad (17)$$

$$\vec{M} = 2\vec{k} \mu_{Я} \sum_{i=n,p} T_{3i} |\gamma_i| (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}) = 2\vec{k} \mu_{Я} \hbar \omega_B \Omega^{-1} \Gamma, \quad (18)$$

$$\Gamma = v_{0p} \gamma_p^2 \lambda_n + v_{0n} \gamma_n^2 \lambda_p - 2\tilde{g} \prod_{i=n,p} v_{0i} |\gamma_i|, \Omega = \lambda_p \lambda_n - v_{0p} v_{0n} \tilde{g}^2, \lambda_i = 1 - v_{0i} g_{ii}. \quad (19)$$

$\Gamma > 0$, т.к. $\tilde{g} < 0$ в силу (3), (16). Критерий Стонера для магнитной восприимчивости $\chi = |\vec{M}| / B$ запишем по аналогии с (1) в виде:

$$\Omega \leq 0 \Rightarrow v_{0n} v_{0p} \Xi - |g_{nn}| v_{0n} - |g_{pp}| v_{0p} - 1 \geq 0 \Rightarrow v_{0i} \geq \lambda_j / (v_{0j} \Xi - |g_{ii}|),$$

$$v_{0j} \Xi \geq |g_{ii}|; \Xi = \tilde{g}^2 - g_{pp} g_{nn}. \quad (20)$$

Последнее неравенство в (20) дает границы применимости для предпоследнего. Учет обменной энергии дает добавку в правую часть (14) при $i = p$, согласно (9):

$$\tilde{E}_{Fp} = E_{Fp} + E_{p\uparrow,\downarrow}^{обм}, E_{p\uparrow,\downarrow}^{обм} = -\frac{e^2}{\pi} (6\pi^2)^{1/3} \xi_{p\uparrow,\downarrow}^{1/3}. \quad (21)$$

С учетом (13), (15), (16) заключаем, что в дальнейших формулах нужна замена

$$g_{pp} \mapsto \tilde{g}_{pp} = g_{pp} + 2\pi e^2 (3\pi^2 n_p)^{-2/3} = g_{pp} + v_{0p}^{-2} \Delta, 2\Delta = \alpha_0 m_p^2 c^4 (\pi \hbar c)^{-3} \quad (22)$$

Тогда второе неравенство в (20) после несложных преобразований примет вид:

$$v_{0n} v_{0p}^2 \Xi + v_{0n} |g_{nn}| \Delta - |g_{nn}| v_{0n} v_{0p} - |g_{pp}| v_{0p}^2 - v_{0p} + \Delta > 0. \quad (23)$$

При низких температурах ($kT\varepsilon_{0i}^{-1} \ll 1$), согласно [11, с. 281] и с учетом (13), в самом простом приближении делаем в (20) и (23) следующую замену:

$$\nu_{0i} \mapsto \tilde{\nu}_{0i} = \frac{m_i \sqrt{m_i \tilde{\varepsilon}_{0i}}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}, \tilde{\varepsilon}_{0i} = \varepsilon_{0i} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \varepsilon_{0i}^{-2}\right). \quad (24)$$

Вывод критерия Стонера через флуктуации энергии

Получим формулы для смещения энергии системы (рассмотрим пример без учета обменных кулоновских поправок). В слабом магнитном поле смещение составляющей энергии, не зависящей от взаимодействия между фермионами, находится аналогично [5, с. 199] с учётом (17) и $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$:

$$\begin{aligned} \delta E_0 &= \delta E_{0n} + \delta E_{0p} = \sum_{i=n,p} \frac{(\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2}{2\nu_{0i}} = \sum_{i=n,p} \frac{(\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow})^2}{4\nu_{0i}} = \\ &= \hbar^2 \omega_B^2 \Omega^{-2} \sum_{i=n,p} \nu_{0i} (|\gamma_i| |\lambda_j - \nu_{0j}| |\gamma_j| \tilde{g})^2, T_{3j} = -T_{3i}. \end{aligned} \quad (25)$$

Изменение энергии взаимодействия выглядит аналогично [5, с. 199], однако в случае смеси 2 газов появляется «интерференционное» слагаемое δE_{int}^{np} :

$$\begin{aligned} \delta E_{int} &= \delta E_{int}^p + \delta E_{int}^n + \delta E_{int}^{np} = \sum_{i=n,p} g_{ii} \delta n_{i\uparrow} \delta n_{i\downarrow} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + \\ &+ g_{np}^{\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}) = -\frac{1}{4} \sum_{i=n,p} g_{ii} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow})^2 - \frac{1}{2} \tilde{g} \prod_{i=n,p} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (17), (25), (26) после некоторых преобразований получим общее изменение энергии без учёта зеемановской ($\tilde{\delta E} = \delta E_0 + \delta E_{int}$):

$$\tilde{\delta E} = -\frac{\Omega \Gamma}{4} \prod_{i=n,p} \frac{\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}}{\nu_{0i} (|\gamma_j| |\lambda_i - \nu_{0i}| |\gamma_i| \tilde{g})}, T_{3i} = -T_{3j}. \quad (27)$$

Можно убедиться, что при выполнении (20) лишь $(\delta n_{p\uparrow} - \delta n_{p\downarrow})(\delta n_{n\uparrow} - \delta n_{n\downarrow}) < 0$ (в силу того, что при $\vec{B} \neq \vec{0}$ сонаправлены магнитные моменты, а не спины), то $\tilde{\delta E} < 0$. Добавив к (25), (26) зеемановскую энергию, продифференцируем по $\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}$:

$$\delta E_B = -2\hbar\omega_B \sum_{i=n,p} |\gamma_i| T_{3i} (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow}), \delta E = \delta E_B + \tilde{\delta E}, \quad (28)$$

$$A \equiv \frac{\partial(\delta E)}{\partial(2\delta n_{i\uparrow})} = \frac{\lambda_i (\delta n_{i\uparrow} - \delta n_{i\downarrow})}{2\nu_{0i}} - \frac{1}{2} \tilde{g} (\delta n_{j\uparrow} - \delta n_{j\downarrow}) - 2|\gamma_i| \hbar\omega_B T_{3i}. \quad (29)$$

Приравнявая (29) к нулю, для $\delta n_{n\uparrow}, \delta n_{p\uparrow}$ получаем результаты, совпадающие с (16), (17). Не изменятся и формулы (18)–(20). Т.е. критерий Стонера, как и для однокомпонентного случая, выводится различными путями.

Интерпретация численных и графических результатов

Решения неравенств (20) и (23), с учетом связи между n_i и ν_{0i} в (13), представлены в виде зависимости $n_{0n}^{(St)}(n_p)$ и соответствуют областям выше кривых на рисун-

ках 1 (решение есть только у (23)) и 2. Учтено, что по физическому смыслу $n_i \geq 0$, поэтому на рисунке 1 при $n_p \leq 3.85 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$ идет прямая линия по оси абсцисс, а левая граница (не показана) – ось ординат. В таблице 3, кроме того, использован т.н. параметр нейтронного избытка:

$$\eta = (n_n - n_p) / (n_n + n_p). \quad (30)$$

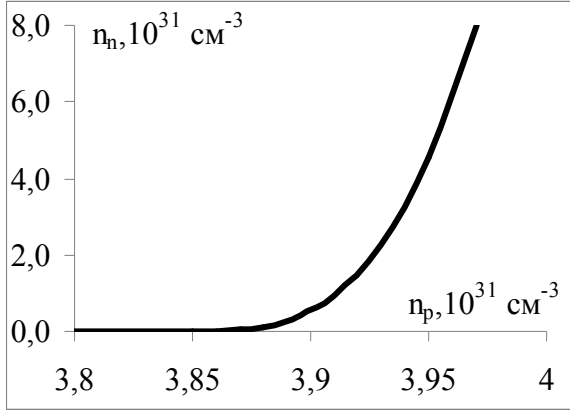


Рисунок 1 – Критерий Стонера при малых концентрациях протонов

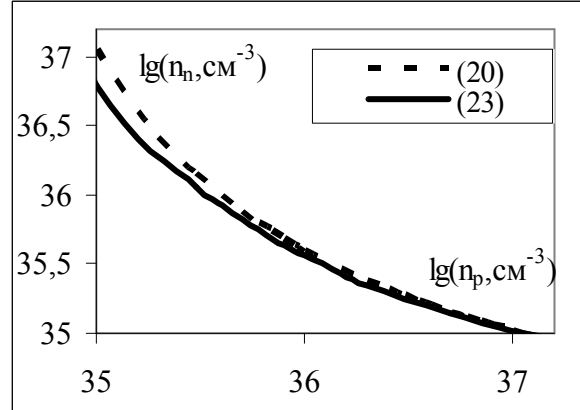


Рисунок 2 – Критерий Стонера при больших концентрациях протонов

С учетом (11), при $\rho \sim 10^{-4} \rho_0$, $\rho_0 \sim 10^{14} \text{ г/см}^3$, обсуждаемые приближения допустимы. Из [3] видно, что если пр-смесь доминирует сразу после начала взрыва в области до $R \approx 200 \text{ км}$, то это примерно в 20 раз больше радиуса будущей нейтронной звезды (где в жидком ядре $\rho \sim \rho_0$) [2, с. 281], и такое сжатие соответствует росту плотности в $20^3 = 0.8 \cdot 10^4$ раз. Нужные значения также могут быть достигнуты при расширении водорода, поглощающего антинейтрино (комментарии к таблице 1).

Таблица 3 – Стонеровские концентрации (в 10^{35} см^{-3}) при различных η

n_p	$n_n^{(St)}(23)$	η	n_p	$n_n^{(St)}(23)$	$\eta(23)$	$n_n^{(St)}(20)$	$\eta(20)$
$7,4 \cdot 10^{-5}$	$\rightarrow +0$	$\rightarrow -1$	0,2079	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow 1$	---	---
$3,85 \cdot 10^{-4}$	$\rightarrow +0$	$\rightarrow -1$	0,3156	4521,57	0,9999	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow 1$
$4 \cdot 10^{-4}$	$1,62 \cdot 10^{-3}$	0,6040	2	19,51	0,8141	26,375	0,859
$4,5 \cdot 10^{-4}$	0,237	0,9962	6	5,57	-0,0363	6,341	0,028
$5 \cdot 10^{-4}$	2,666	0,9996	10	3,63	-0,4675	3,967	-0,432
$6,91 \cdot 10^{-4}$	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow +\infty$	0,3156	$\rightarrow -1$	0,3156	$\rightarrow -1$

Покажем, что случай $n_p = 7,4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, $n_n \rightarrow +0$ близок к порогу нейтронизации. Запишем уравнение бета-равновесия без учета спиновой поляризации:

$$X_p + X_e = X_n, \quad X_p = m_p c^2 + \frac{(3\pi^2 \hbar^3 n_p)^{2/3}}{2m_p} + \frac{g_{pp}}{2} n_p + E_p^{обм},$$

$$X_n = m_n c^2 + \frac{g_{np}^{\uparrow\uparrow} + g_{np}^{\uparrow\downarrow}}{2} n_p, \quad X_e = (m_e^2 c^4 + (3\pi^2 \hbar^3 n_e)^{2/3} c^2)^{1/2} + E_e^{обм}. \quad (31)$$

С учетом (9) точное решение (31) $n_p = 7,412 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$. Влияние контактного ядерного и обменного кулоновского взаимодействия на порог нейтронизации мало.

Таблица 4 – Соответствие результатов астрофизическим условиям

Рисунок	Чему соответствует	I	II	$lg(T, K)$	$n_i, \text{см}^{-3}$	$kT\varepsilon_{0i}^{-1}$
1	Белым карликам	–	+	$\sim 3 \div 4$ [1, с. 185]	10^{31}	$\sim 10^{-3}$
2	Сверхновым II типа	+	–	$\sim 9 \div 10$ [2, с. 281]	10^{35}	$\sim 0.01 \div 0.1$

Примечание: Применимость теории возмущений для взаимодействий: I – Обменного кулоновского; II – Ядерного.

Замечания:

1. Значения концентраций n_i выбраны согласно таблице 3; k – постоянная Больцмана.

2. Для нуклонов учет лишь s -рассеяния допустим при $E < 10$ МэВ [6, с. 13], что согласуется с температурами в таблице 4.

3. Приближение $T=0$ К надежнее для белых карликов, хотя при подстановке $kT\varepsilon_{0i}^{-1}$ в (23) результаты сильно не изменятся в обоих случаях.

4. Приближение (7) правомерно при $E < 1$ кэВ (что согласуется с kT в белых карликах), а при $E = 1$ МэВ (что ближе к kT для Сверхновых) сечение рассеяния меньше в 4 раза [12, с. 13]. Т.е. для более точных расчетов нужен учет зависимости амплитуд рассеяния от энергии, хотя уменьшение амплитуды повышает, согласно (12), верхнюю границу применимости теории возмущений по величинам (3).

5. Для электронов, согласно (11), кулоновская теория возмущений применима при $n_e > n_e^* = 2,28 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. В металлах $n_e \sim 10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$ [2, с. 351, 600], но теория возмущений используется [5, с. 189, 209], хотя эффективная масса электрона может быть больше массы покоя [2, с. 115–118], что, согласно (11), ужесточает требования. Поэтому наши результаты также могут иметь смысл. Таким образом, как и в [13], показана важность учета энергии Фока. В силу знакопеременности ряда поправка 3-го порядка такая же по знаку, как и обменная, и превосходит корреляционную и т.д. При необходимости нужно применять непertурбативные методы.

6. Пренебрежение реакцией $n(p, \gamma)d$ правомерно, т.к. при указанных температурах соответствующее сечение по крайней мере на 2 порядка меньше сечения рассеяния [6, с. 15; 14, с. 403]. При более высоких концентрациях нейтронов эту реакцию нужно учитывать, поэтому вряд ли вся область на рисунке 1 имеет право на существование.

Заключение

Для смеси нейтронного и протонного газов с контактным ядерным взаимодействием вычислена магнитная восприимчивость и найден критерий Стонера без учета квантования Ландау для протонов. Вычислено, что без учета обменного кулоновского взаимодействия минимальные концентрации нуклонов, необходимые для возникновения ферромагнетизма, имеют порядок 10^{34} см^{-3} . Учет обменного кулоновского взаимодействия между протонами немного понижает минимальную ферромагнитную концентрацию протонов и приводит к появлению дополнительной области ферромагнетизма, включающую порог нейтронизации. Такой ферромагнетизм мог бы быть возможен, соответственно, при взрывах Сверхновых II типа и в верхних слоях белых карликов, для которых это может служить одним из объяснений генерации их магнитных полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров; редкол. Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988. – Т. 1: Ааронова–Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.
2. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров; редкол. Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1992. – Т. 3: Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема. – 672 с.
3. Bruenn, S.W. Recent 2D/3D Core-Collapse Supernovae Simulations Results Obtained with the CHIMERA Code / S.W. Bruenn [et al.] // physics.fau.edu.
4. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров; редкол. Д.М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1994. – Т. 4: Пойнтинга – Робертсона – Стриме-ры. – 704 с.
5. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов // М. : Физматлит, 2003. – 392 с.
6. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский // М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
7. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. IX: Статистическая физика, Ч. 2: Теория конденсированного состояния. – 496 с.
9. Ахиезер, А.И. К теории сверхтекучести ядерной материи на основе Ферми-жидкостного подхода / А.И. Ахиезер [и др.] // ЖЭТФ – 1997. – Т. 112, вып. 1(7). – С. 3–24.
10. Левич, В.Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В.Г. Левич. – М. Наука, 1971. – Т. 2: Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. – 936 с.
11. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
12. Крамер-Агеев, Е.А. Экспериментальные методы нейтронных исследований / Е.А. Крамер-Агеев [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 272 с.
13. Maruyama, T. Ferromagnetism of nuclear matter in the relativistic approach / T. Maruyama, T. Tatsumi // Nucl. Phys. A – 2001. – Vol. 693, Issues 3-4. – P. 710 – 730.
14. Маляров, В.В. Основы теории атомного ядра / В.В. Маляров. – М. : Физматлит, 1959. – 472 с.

A.I. Sery On the Ferromagnetism of Degenerate Neutron-Proton System

For mixture of neutron and proton gases with contact nuclear interaction magnetic susceptibility is calculated and ferromagnetism criterion is obtained for the case of weak external magnetic field. Landau quantizing for protons is neglected. Minimal nucleon concentrations necessary for ferromagnetism and polarizational magnetic fields initiation are estimated to have the order of 10^{34} cm^{-3} . The consideration of Coulomb exchange interaction between protons slightly decreases the minimal ferromagnetic proton concentration and leads to formation of extra region of ferromagnetism including the neutronization threshold. Such a ferromagnetism could be possible at type II Supernovae explosions and in the upper layers of white dwarfs, respectively.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.04.2012

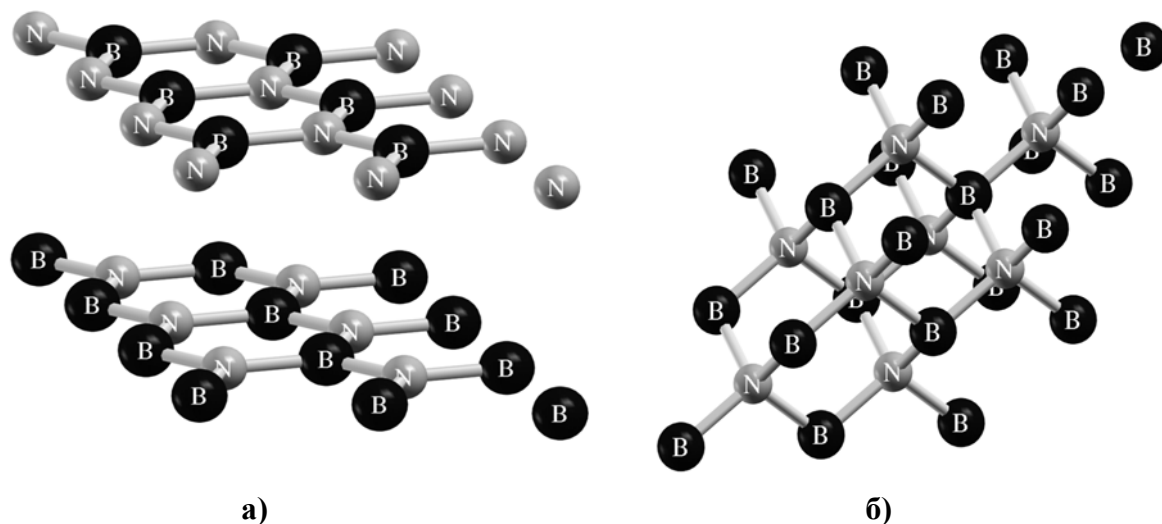
УДК 538.953

В.В. Тригук, А.В. Гайда**ДИНАМИКА РЕШЕТКИ И ПАРАМЕТРЫ
ГРЮНАЙЗЕНА НИТРИДА БОРА
ИЗ ПЕРВЫХ ПРИНЦИПОВ**

В работе проведен расчет динамики решетки на основе теории функционала плотности для кубической фазы нитрида бора (BN). Получены зависимости частот нормальных колебаний от объема ячейки (внешнего давления). Результаты расчетов позволили вычислить параметр Грюнайзена, характеризующий тепловое расширение твердых тел. Показано, что для кубической решетки данный параметр является положительным, что соответствует положительному коэффициенту теплового расширения.

Введение

Нитрид бора (BN) является широко используемым на практике соединением, существующим в различных аллотропных модификациях. Наиболее используемыми являются гексагональная фаза h-BN (пространственная группа $P6_3/mmc$), близкая по свойствам и структуре к графиту, и кубическая алмазоподобная фаза типа сфалерита c-BN (пространственная группа $F\bar{4}3m$) [1]. h-BN является наиболее часто используемой фазой; сфера применения – твердая высокотемпературная (до 900°C) смазка. В свою очередь, c-BN обладает очень высокой твердостью, практически не уступающей алмазу, при большей химической (в отличие от алмаза не взаимодействует со сталями) и температурной (до 1000°C) стойкости [1]. Кристаллические ячейки для данных фаз представлены на рисунке 1.

**Рисунок 1 – Кристаллические структуры нитрида бора****а) h-BN ($P6_3/mmc$); б) c-BN ($F\bar{4}3m$)**

Одним из наиболее интересных с точки зрения физики конденсированного состояния свойств нитрида бора является отрицательный коэффициент теплового расширения в гексагональной фазе, наблюдающийся в широком диапазоне температур [2–4]. Вопрос о причинах данного явления в нитриде бора и других подобных соединениях исследовался во многих работах [3–5]. В то же время для кубической фазы вопрос о на-

личии некоторого температурного интервала отрицательного коэффициента теплового расширения остается открытым [6].

Универсальным и весьма важным параметром, характеризующим тепловые свойства твердых тел, является параметр Грюнайзена [7]. Данная величина является мерой ангармоничности сил, действующих в кристалле, и определяет тепловое расширение, теплопроводность и другие свойства кристаллов. В том случае, если кристалл характеризуется отрицательным коэффициентом теплового расширения, параметры Грюнайзена для отдельных мод будут отрицательными. В связи со сказанным выше целью данной работы является расчет из первых принципов дисперсионных кривых частот нормальных колебаний и параметров Грюнайзена для кубической фазы нитрида бора для различных давлений.

Метод исследования

Расчеты динамики решетки в работе проводились из первых принципов в рамках теории функционала плотности с помощью программного пакета abinit [8], разработанного международной группой под руководством X. Gonze, профессора Лёвенского католического университета (Королевство Бельгия). Распределение электронной плотности исходного состояния вычислялось на основе метода сохраняющих норму псевдопотенциалов с разложением волновых функций по плоским волнам [9]. Расчет частот нормальных колебаний выполнялся с помощью вариационной теории линейного отклика [10].

Во всех расчетах количество плоских волн было ограничено максимальной кинетической энергией (параметр *ecut* в abinit) в 100 Ry. Интегрирование по зоне Бриллюэна выполнялось с помощью сетки 8×8×8 точек. Процесс минимизации полной энергии кристалла как функции параметров решетки (для c-BN единственным параметром является постоянная решетки a_0) проводился с помощью реализованного в abinit алгоритма, требующего достаточно малого количества итераций. Полученный результат ($a_0 = 3,5929 \text{ \AA}$) находится в хорошем согласии с экспериментом (3,615 Å)

При расчете дисперсионных кривых использовался типичный для abinit алгоритм:

- 1) расчет динамических матриц, частот колебаний для набора точек неприводимой зоны Бриллюэна;
- 2) восстановление частот колебаний для произвольной точки зоны Бриллюэна с помощью обратных преобразований Фурье;
- 3) построение дисперсионных кривых вдоль заранее заданных направлений.

Результаты расчетов

Для определения постоянных Грюнайзена были вычислены частоты нормальных колебаний для трех случаев: 1) нулевого давления при объеме V_0 , 2) отрицательного давления при увеличении V_0 на 1% и 3) положительного давления при уменьшении V_0 на 1%. Численные данные (постоянная решетки a , объем и давление) приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета частот нормальных колебаний и постоянных Грюнайзена

Постоянная решетки a , Å	Объем ячейки V , Å ³	Давление P , ГПа
3,5808	11,479	4,05
3,5929	11,595	$5,2 \times 10^{-8}$
3,6048	11,711	-3,89

Результаты расчетов дисперсионных кривых для различных давлений представлены на рисунке 2. Нулевому давлению соответствуют сплошные жирные линии, отрицательному давлению $-3,89$ ГПа – тонкие сплошные линии, положительному давлению $4,05$ ГПа – пунктирные линии. Как видно из рисунка, результаты для нулевого давления хорошо согласуются с теоретическими результатами работы [11].

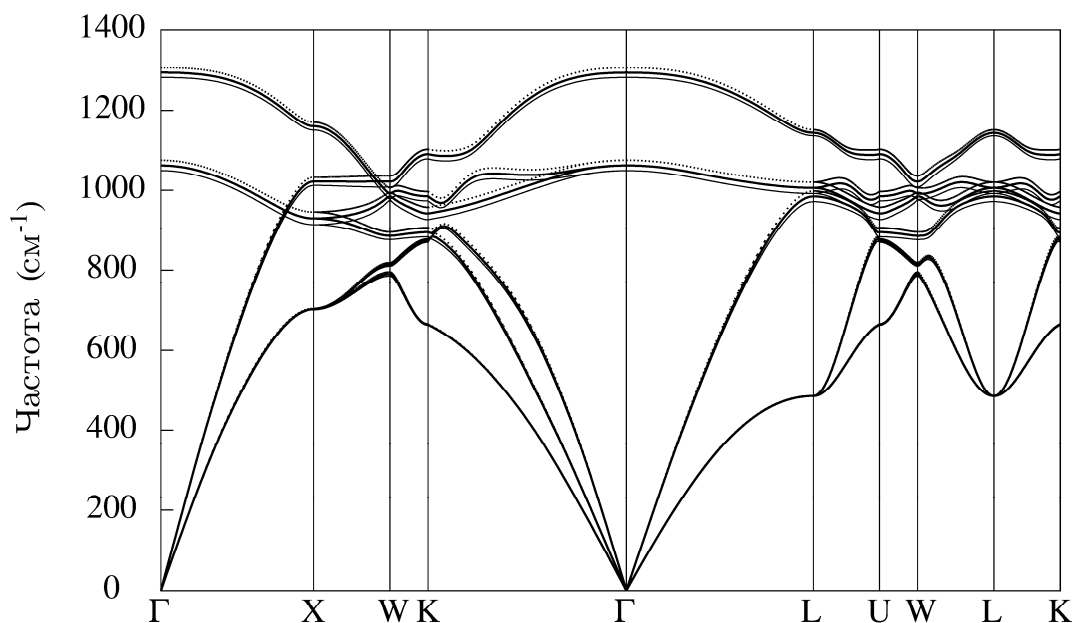
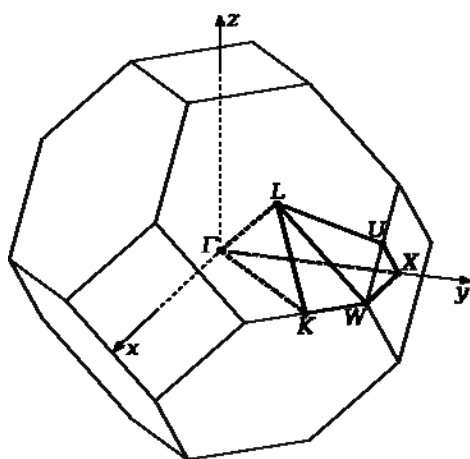


Рисунок 2 – Дисперсионные кривые частот нормальных колебаний c-BN для различных давлений

Из рисунка 2 видно, что частоты нормальных колебаний возрастают с уменьшением объема ячейки (увеличения внешнего давления). Первая зона Бриллюэна и координаты точек высокой симметрии показаны на рисунке 3.



Точка	Базисные координаты		
Γ	0	0	0
X	1/2	0	1/2
K	3/8	3/8	3/4
L	1/2	1/2	1/2
U	5/8	1/4	5/8
W	1/2	1/4	3/4

Рисунок 3 – Первая зона Бриллюэна для рассматриваемого случая

Параметр Грюнаизена в настоящей работе вычислялся для каждой моды колебаний и точки зоны Бриллюэна аналогично работе [12]:

$$\gamma_{s,\bar{q}} = -\frac{V}{\omega_{s,\bar{q}}} \frac{d\omega_{s,\bar{q}}}{dV}$$

Производные по объему определялись численно методом конечных приращений. Затем для каждой моды было проведено усреднение на сетке $8 \times 8 \times 8$ точек зоны Бриллюэна. Итоговое количество точек было сокращено благодаря симметрии обратной решетки до 29 в неприводимой части зоны Бриллюэна, с введением весовых коэффициентов. Аналогично были усреднены величины частот для каждой моды. В таблице 2 представлены результаты расчетов параметров Грюнайзена $\langle \gamma \rangle_s$, усредненных по зоне Бриллюэна, как зависимость от средней частоты $\langle \omega \rangle_s$ данной моды.

Таблица 2 – Расчетные параметры Грюнайзена в зависимости от средней частоты моды колебаний

Средняя частота $\langle \omega \rangle_s$, см ⁻¹	Параметр Грюнайзена $\langle \gamma \rangle_s$
556,0	0,4487
631,8	0,6550
820,7	1,0966
983,5	1,4523
1017,0	1,3364
1160,6	0,9214

Заключение

Таким образом, для всех мод колебаний параметр Грюнайзена оказывается положительным. Для существования области отрицательного теплового расширения в области низких температур требуется, чтобы хотя бы часть параметров была отрицательной. Если в с-BN явление отрицательного теплового расширения все же имеет место, то данный эффект не связан со вкладом колебаний решетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greim, J. Boron Carbide, Boron Nitride and Metal Borides / J. Greim, K.A. Schwetz // Ullmann's Encyclopedia of Industrial Chemistry. – Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2002. – Vol. 6. – P. 219–236.
2. Pease, R.S. An X-ray Study of Boron Nitride / R.S. Pease // Acta Cryst. – 1952. – Vol. 5. – P. 356–361.
3. Yates, B. The anisotropic thermal expansion of boron nitride / B. Yates, M.J. Overy, O. Pirgon // Phil. Mag. – 1975. – Vol. 32, № 4. – P. 847–857.
4. Kelly, B.T. The anisotropic thermal expansion of boron nitride / B.T. Kelly // Phil. Mag. – 1975. – Vol. 32, № 4. – P. 859–867.
5. The nature of negative linear expansion in layer crystals C, BN, GaS, GaSe and InSe / G.L. Belenkii [et al.] // Solid State Communications. – 1985.– Vol. 53, № 11. – P. 967–971.
6. Slack, G.A. Thermal expansion of some diamondlike crystals / G.A. Slack, S.F. Bartram // J. Appl. Phys. – Phys. Rev. B. – 1975. – Vol. 46, № 1. – P. 89–98.
7. Абдуллаев, Н.А. Особенности упругих свойств слоистых кристаллов / Н.А. Абдуллаев // ФТТ. – 2006. – Т. 48, вып. 4. – С. 623–629.

8. A brief introduction to the abinit software package / X. Gonze [et al.] // Zeit. Kristallogr. – 2005. – Vol. 220. – P. 558 – 562.
9. Gonze, X. First-principles responses of solids to atomic displacements and homogeneous electric fields: Implementation of a conjugate-gradient algorithm / X. Gonze // Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55, № 16. – P. 10337–10354.
10. Gonze, X. Dynamical matrices, Born effective charges, dielectric permittivity tensors, and interatomic force constants from density-functional perturbation theory / X. Gonze, C. Lee // Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55, № 16. – P. 10355–10368.
11. Karch, K. Ab initio lattice dynamics of BN and AlN: Covalent versus ionic forces / K. Karch, F. Bechstedt // Phys. Rev. B. – Vol. 56, № 12. – P. 7404–7415.
12. Zwanziger, J.W. Phonon dispersion and Grüneisen parameters of zinc dicyanide and cadmium dicyanide from first principles: Origin of negative thermal expansion / J.W. Zwanziger // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 76, № 5. – P. 052102-1 – 052102-4.

V.V. Triguk, A.V. Gaida. Lattice Dynamics and Grüneisen Parameters of Boron Nitride from First Principles

Density functional theory calculations of lattice dynamics of boron nitride cubic phase are conducted in the present paper. Volume (pressure) dependencies of phonon frequencies are acquired. Results allowed us to compute Grüneisen parameters, which describe thermal expansion of solids. It is shown that for the cubic lattice these parameters are positive, which corresponds to positive values of thermal expansion coefficient.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 12.04.2012

УДК 517.98

Н.П. Андросенко, А.И. Кашиповский

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

Для ограниченных на действительной оси решений линейного дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом доказана возможность приближения кубическим сплайном на основе метода сплайн-коллокации. Проведено исследование свойств решений разностной системы уравнений, определяющих параметры коллокационного сплайна. Показано, что порядок приближения ограниченного решения дифференциального уравнения в изучаемом случае совпадает с порядком приближения интерполяционным сплайном.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается операторно-дифференциальное уравнение

$$Ly = y' - Ay = f(t), \quad (1)$$

где $y = y(t)$ – неизвестная вектор-функция, принимающая значения в H , $t \in R^1 = (-\infty, +\infty)$, $f(t)$ – заданная H -значная вектор-функция, A -нормальный ($A^*A = AA^*$) не обязательно ограниченный оператор в H с разложением единицы $E(\lambda)$ с областью определения $D(A)$.

Для $m \in N$ на $D(A^m)$ области определения оператора A^m определим скалярное произведение

$$(g, h)_{H^m} = \left(A^m g, (A^*)^m h \right)_H + (g, h)_H = \int_{\sigma(A)} (|\lambda|^{2m} + 1) d(E_\lambda g, h)_H,$$

где $\sigma(A)$ – спектр оператора A . Относительно этого скалярного произведения множество $D(A^m)$ образует позитивное гильбертово пространство H_m ($H_m \subset H$).

Обозначим через $C(R^1, H)$ пространство всех ограниченных непрерывных по t H -значных функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \sup_{t \in R^1} \|f\|_H$ и через $C^m(R^1, H_m, H)$ – пространство всех ограниченных и непрерывных по t H_m -значных вектор-функций $f(t)$, имеющих ограниченную и непрерывную в H производную порядка m с нормой

$$\|f\|_{C^m(R^1, H_m, H)} = \sup_{t \in R^1} \left(\|f(t)\|_{H_m} + \|f^{(m)}(t)\|_H \right).$$

Предполагая, что в уравнении (1) вектор-функция $f(t)$ принадлежит $C(R^1, H)$, назовем вектор-функцию $y(t)$ из $C^1(R^1, H_1, H)$ ограниченным решением уравнения (1), если для всех $t \in R^1$ вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Обобщая известную теорему М.Г. Крейна [1, с.119] на случай неограниченного нормального оператора A , получаем, что необходимым и достаточным условием существования единственного ограниченного решения уравнения (1) является отделимость в $\overline{C^1}$ спектра $\sigma(A)$ оператора A от мнимой оси $iR^1 = (-i\infty, +i\infty)$, т.е.

$$d = \inf_{\substack{\lambda \in \sigma(A), \\ t \in R^1}} |\lambda - it| > 0. \quad (2)$$

Для неограниченного секториального оператора в банаховом пространстве такое обобщение получено М.Ф. Городним [2].

Из условия (2) следует, что спектр $\sigma(A)$ оператора A распадается на два спектральных множества $\sigma_+(A)$ и $\sigma_-(A)$, лежащих в правой и левой полуплоскостях.

Обозначим через V_+ и V_- – инвариантные подпространства оператора A , а через P_+ и P_- – соответствующие ортопроекторы. Ограниченное решение уравнения (1) допускает интегральное представление [1, с.120].

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)ds, \quad (3)$$

где $G(t) = \begin{cases} -e^{At}P_-, & t \geq 0, \\ e^{At}P_+, & t < 0 \end{cases}$ – главная функция Грина уравнения (1).

Представление (3) запишем в виде суммы двух несобственных интегралов [1]:

$$y(t) = y_-(t) + y_+(t), \quad (4)$$

где $y_+(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A(t-s)}P_+f(s)ds$, $y_-(t) = \int_t^{+\infty} e^{-A(t-s)}P_-f(s)ds$.

Из условия (2) следует, что полугруппы операторов $e^{-At}P_+$ и $e^{At}P_-$ ($t \geq 0$) являются сжимающимися с показателем d . Поэтому несобственные интегралы в (4) абсолютно сходятся. Непосредственной проверкой можно показать, что при $f \in C^m(R^1, H_m, H)$ решение $y(t) = (\Lambda^{-1}f)(t)$ принадлежит пространству $C^{m+1}(R^1, H_{m+1}, H)$

Если снять условие ограниченности решений уравнения (1), то теряется единственность решения. При этом методами, используемыми В.И. Горбачук и М.Л. Горбачуком [3], можно показать, что произвольное решение уравнения (1) допускает представление $y(t) = y_+(t) + y_-(t) + e^{-At}h$, где $h \in H_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ – целый вектор оператора A ,

т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} s^n \frac{\|A^n h\|}{n!} < \infty$ для произвольного $s > 0$.

Целью данной работы является исследование возможности приближения ограниченных решений уравнения (1) с помощью кубических сплайнов минимального дефекта [4]. Для построения таких приближений используется метод сплайн-коллокации. Ранее этот метод применялся в [4] для аппроксимации решений краевых задач на конечном интервале для уравнений 2-го порядка.

В рассматриваемом случае задача определения параметров сплайна сводится к решению бесконечной трёхдиагональной системы разностных уравнений, являющейся дискретным аналогом уравнения (1). Для ограниченных решений этой системы уравнений получено явное представление, являющееся дискретным аналогом (3). Получены оценки приближения ограниченных решений уравнения (1) кубическими

сплайнами и дано сравнение с оценками приближений этих решений, полученных в [2; 5; 6], где задача приближения ограниченных решений уравнения (1) также сведена к поиску ограниченных решений трёхдиагональной системы разностных уравнений.

Основные результаты

На прямой R^1 зададим равномерную сетку узлов $\Delta(h) = \{t_n : t_n = nh, n \in Z\}, h > 0$. Ищем сплайн-приближение ограниченного решения $y(t)$ уравнения (1) в виде разложения

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n B_n(t) \tag{5}$$

по базисным B -сплайнам $B_n(t)$, которые с помощью операций сжатия и сдвига выражаются через стандартный B -сплайн $B_n(t) = B((t - t_n)h^{-1})$, где

$$B(x) = \frac{1}{6}(2 - |x|)_+^3 - \frac{2}{3}(1 - |x|)_+^3, (\alpha - |x|)_+^3 = \begin{cases} (\alpha - |x|)^3, & \text{при } |x| < \alpha, \\ 0, & \text{при } |x| \geq \alpha \end{cases}.$$

Учитывая финитность сплайна $B_n(t)$ ($\text{supp } B_n(t) = [t_{n-2}, t_{n+2}]$), при каждом $t \in R^1$ ряд (7) содержит не более четырех слагаемых отличных от нуля, а в узлах t_n ненулевых слагаемых – три. Неизвестные коэффициенты a_k в разложении (5) являются векторами из H_1 . В соответствии с методом сплайн-коллокации [4] в узлах сетки $\Delta(h)$ сплайн должен удовлетворять уравнению (1):

$$\Lambda(S(t_n)) = S'(t_n) - AS(t_n) = f(t_n), \quad n \in Z. \tag{6}$$

Подставляя в (6) разложение (5), с учетом свойств B -сплайнов получим систему разностных уравнений относительно a_n :

$$\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2h} = A \left(\frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}a_{n-1} \right) + f(t_n), \quad n \in Z. \tag{7}$$

Умножая каждое уравнение системы (7) на $-6h$, получим эквивалентную систему разностных уравнений

$$(Ah - 3I)a_{n+1} + 4Aha_n + (Ah + 3I)a_{n-1} = -6hf(t_n), \quad n \in Z, \tag{8}$$

где I – единичный оператор в H . Системы (7) и (8) являются дискретными аналогами (1). При этом ограниченному решению $y(t)$ уравнения (1) отвечает ограниченное решение $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in H_1\}$ систем (7) и (8), определение которого дано в [2].

Пространство всех последовательностей $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in H_m\}$ обозначим через $s(Z, H_m)$, $m \in Z_+ = N \cup \{0\}$. Пространство всех ограниченных последовательностей $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in H_m\}$ обозначим через $l_\infty(Z, H_m)$ и введем в нем норму

$$\|\bar{a}\|_{l_\infty(Z, H_m)} = \sup_{n \in Z} \|a_n\|_{H_m}, \quad m \in Z_+.$$

Для последовательностей \bar{a} из $s(Z, H_m)$, $m \in Z_+ = N \cup \{0\}$ и $l_\infty(Z, H_m)$ определим представление в виде формального ряда Лорана [2]

$$\bar{a} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \omega^n, \tag{9}$$

где ω – комплексная переменная. Представление (9) будем называть ω –представлением последовательности \bar{a} . Учитывая, что умножение ряда на ω означает сдвиг нумерации координат вектора \bar{a} на одну позицию вправо, будем обозначать соответствующий оператор сдвига буквой Ω . Тогда для $j \in Z$ оператор Ω^j будет означать сдвиг нумерации координат на j позиций вправо при $j > 0$ и на $-j$ позиций влево при $j < 0$. Тожественный оператор в $s(Z, H_m)$ и $l_\infty(Z, H_m)$ обозначим буквой E ($E\bar{a} = \bar{a}$). Пользуясь ω –представлением (9), запишем систему (8) в виде операторно-разностного уравнения:

$$L\bar{a} = -6h\bar{f}, \quad (10)$$

где $\bar{f} = \{f(t_n) : n \in Z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n)\omega^n$, $L = L(A, \Omega, h) = (Ah - 3I)\Omega + 4AhE + (Ah + 3I)\Omega^{-1}$.

Последовательность \bar{a} из $l_\infty(Z, H_1)$, удовлетворяющую уравнению (10) при $\bar{f} \in l_\infty(Z, H)$, назовем ограниченным решением уравнения (10) и соответственно систем (7) и (8). Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченного решения уравнения (10), т.е. условия существования ограниченного обратного оператора L^{-1} .

Теорема 1. Для того, чтобы существовал ограниченный в $l_\infty(Z, H)$ оператор $L^{-1} = L^{-1}(A, \Omega, h)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(A)$ – спектр оператора A не пересекался с интервалом $J = [-i\sqrt{3}h^{-1}, +i\sqrt{3}h^{-1}]$, лежащим на мнимой оси.

Доказательство

Теорема 1 является следствием [2]. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что множество точек $\lambda \in C^1$, для которых характеристическое уравнение

$$L(\lambda, z, h) = (\lambda h - 3)z + 4\lambda h + (\lambda h + 3)z^{-1} = 0 \quad (11)$$

имеет относительно z корни с равным единице модулем, совпадает с интервалом J .

Для этого найдем выражение для λ из (11) $\lambda = \frac{3(z - z^{-1})}{h(4 + z + z^{-1})}$ и подставим вме-

сто z равную по модулю единице величину $e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\lambda = \frac{3(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{h(4 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} = \frac{3i \sin \varphi}{h(2 + \cos \varphi)}. \quad (12)$$

Учитывая, что при $\varphi \in [0, 2\pi]$ выражение $\sin \varphi (2 + \cos \varphi)^{-1}$ изменяется в промежутке $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, приходим к выводу, что принадлежащим единичной окружности $S = \{z \in C^1 : |z| = 1\}$ корням характеристического уравнения (11) отвечают значения $\lambda \in J$. При этом, если рассматривать J как объединение левого берега J_- и правого берега J_+ , то соотношение (12) устанавливает между J и S взаимно-однозначное соответствие. Теорема 1 доказана.

Умножением уравнения (11) на z , преобразуем это уравнение в квадратное

$$(\lambda h - 3)z^2 + 4\lambda h z + (\lambda h + 3) = 0. \quad (13)$$

Фиксируя значение параметра $h > 0$, определим функцию $w = w(\lambda h) = \sqrt{3\lambda^2 h^2 + 9}$ комплексного аргумента $\lambda \in C^1 \setminus J$ так, чтобы $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{w(\lambda h)}{\lambda} = \sqrt{3}h$.

Пользуясь этой функцией, запишем выражение для корней уравнения (13):

$$z_1 = z_1(\lambda h) = -\frac{\lambda h + 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}, \quad z_2 = z_2(\lambda h) = (z_1(-\lambda h))^{-1}.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что функции $z_1(\lambda h)$ и $z_2(\lambda h)$ осуществляют взаимно-однозначное отображение J на S . Тогда, вследствие принципа соответствия границ [7, с. 208], получим:

Теорема 2. Функция $z_1 = z_1(\lambda h)$ осуществляет конформное отображение $C^1 \setminus J$ во внутренность единичного круга $\{z: |z| < 1\}$ ($z_1(-3) = 0$, $z_1(\infty) = \sqrt{3} - 2$, $z_1(3) = 0,5$). Функция $z_2 = z_2(\lambda h)$ осуществляет конформное отображение $C^1 \setminus J$ во внешность единичного круга $\{z: |z| > 1\}$ ($z_2(-3) = 2$, $z_2(\infty) = -\sqrt{3} - 2$, $z_2(3) = \infty$).

Для того, чтобы получить явное представление ограниченного решения уравнения (10), найдем сперва ограниченное решение $\bar{G} = \sum_{n \in Z} G_n \omega^n$ системы типа (8)

при $H = C^1$, $A = \lambda \in C^1 \setminus J$ и дельта-подобной правой частью

$$(\lambda h - 3)G_{n+1} + 4\lambda h G_n + (\lambda h + 3)G_{n-1} = \delta_{n0}, \quad n \in Z. \quad (14)$$

Решение \bar{G} «сконструируем» из прогрессий z_1^n и z_2^n , $n \in Z$ по формуле:

$$G_n = \begin{cases} cz_1^n, & \text{если } n \geq 0, \\ cz_2^n, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 2 $\bar{G} = \{G_n, n \in Z\}$ – ограниченная последовательность. Поскольку z_1 и z_2 корни характеристического уравнения (11), то члены последовательности \bar{G} будут удовлетворять всем уравнениям системы (14), кроме уравнения с номером $n = 0$. Константу c определим так, чтобы удовлетворялось уравнение с номером $n = 0$, т.е.

$$c[(\lambda h - 3)z_1 + 4\lambda h + (\lambda h + 3)z_2^{-1}] = 1, \quad c = 0,5w(\lambda h)^{-1}.$$

Таким образом, для $\lambda \in C^1 \setminus J$ получим

$$G_n = 0,5w(\lambda h)^{-1} \begin{cases} \left(-\frac{\lambda h + 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}\right)^n, & \text{если } n \geq 0, \\ \left(-\frac{\lambda h - 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}\right)^{-n}, & \text{если } n < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для операторно-разностного уравнения (10) функция $G_n = G(n, \lambda h)$ играет такую же самую роль, как и функция Грина $G(t)$ для уравнения (1).

Следующая теорема дает представление оператора $L^{-1}(A, \Omega, h)$, аналогичное (3).

Теорема 3. Если нормальный в H оператор A удовлетворяет условию (2), то оператор $L^{-1} = L^{-1}(A, \Omega, h)$ осуществляет непрерывное отображение $l_\infty(Z, H)$ в себя. Его действие на $\bar{b} = \sum_{n \in Z} b_n \omega^n$ задается выражением

$$\bar{a} = \sum_{n \in Z} \left(\sum_{k \in Z} G_{n-k} b_k \right) \omega^n,$$

а его норма допускает оценку

$$\|L^{-1}\| \leq Ch^{-1}. \quad (16)$$

Доказательство

Существование оператора L^{-1} следует из теоремы 1. Представление (15) является следствием представления (14) ограниченного решения уравнения (13). Оценим норму оператора L^{-1} :

$$\|L^{-1}\| = \sup_{\substack{\bar{b} \in l_\infty(Z, H), \\ \|\bar{b}\|_{l_\infty(Z, H)} = 1}} \|L^{-1}(A, \Omega, h)\bar{b}\|_{l_\infty(Z, H)} = \sum_{n \in Z} \sup_{\substack{b_n \in H, \\ \|b_n\|_H = 1}} \|G(n, Ah)b_n\|_H = \sum_{n \in Z} \|G(n, Ah)\|_{L(H)}.$$

Отсюда, учитывая, что A – нормальный оператор, получим

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \sup_{|\operatorname{Re} \lambda| \geq d} |w(\lambda h)|^{-1} \sum_{n \in Z} q^{|n|} \leq \frac{1+q}{6(1-q)},$$

где $q = \sup_{|\operatorname{Re} \lambda| \geq d} (|z_1(\lambda h)|, |z_2^{-1}(\lambda h)|) = \sup_{\operatorname{Re} \lambda = d} |z_1(\lambda h)| = |z_1(dh)|$.

Отсюда для малых значений h следует

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{3dh + 3\sqrt{3(dh)^2 + 9}}{6(dh - 3 + \sqrt{3(dh)^2 + 9})} \leq (dh)^{-1} \left(1 + \frac{dh}{2} + \frac{d^2 h^2}{4} \right).$$

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема дает оценку приближения ограниченного решения уравнения (1) методом сплайн-коллокации.

Теорема 4. Если нормальный в H оператор A удовлетворяет условию (2) и вектор-функция $f(t)$ принадлежит $C^4(R^1, H_4, H)$, то ограниченное решение $\bar{a} = -6hL^{-1}\bar{f}$ определяет кубический сплайн $S(t)$, приближающий ограниченное решение $y(t) = (\Lambda^{-1}f)(t)$ с точностью $O(h^4)$.

Доказательство

Поскольку $f(t), y(t)$ принадлежат $C^4(R^1, H_4, H) \subset C^4(R^1, H, H)$, то сплайн $S(y, t)$, интерполирующий решение $y(t)$ в узлах сетки $\Delta(h)$, приближает $y(t)$ с точностью $O(h^4)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что $S_\delta(t) = S(y, t) - S(t) = O(h^4)$.

Согласно [4, с. 232] разность $\delta_n = y'(t_n) - S'(t_n)$ равномерно по $n \in Z$ оценивается величиной $O(h^4)$ и сплайн $S_\delta(t)$ с учетом (6)–(8) соответствует решению уравнения (10) с правой частью $-6h\bar{\delta}$. Тогда в соответствии с (16) норма $\bar{a}_\delta = -6hL^{-1}\bar{\delta}$ в $l_\infty(Z, H)$ оценивается величиной $O(h^4)$. Отсюда следует, что $\|S_\delta\|_{C(R^1, H)} = O(h^4)$. Теорема 4 доказана.

Выводы

Предлагаемая модификация метода сплайн-коллокации адаптирована на случай приближения кубическими сплайнами ограниченных решений уравнения (1). При этом задача поиска ограниченных решений уравнения сводится к задаче поиска ограниченных решений бесконечной системы разностных уравнений (10) с трехдиагональной матрицей. Учитывая, что эта матрица вообще говоря не имеет диагонального преобладания, для изучения разрешимости этой системы получено явное представление (16). При достаточной гладкости вектор-функции $f(t)$ относительно дифференцируемости по t и относительно оператора A ($f \in C^4(R^1, H_4, H)$) предлагаемый метод обеспечивает максимально возможную по порядку точность $O(h^4)$ приближения кубическими сплайнами. Для достижения такой точности приближения решений краевых задач для уравнений второго порядка в [4] построены пятидиагональные системы разностных уравнений.

Аппроксимация ограниченных решений уравнения (1), рассмотренная в [2; 5; 6], сведена к поиску ограниченных решений трехдиагональной системы разностных уравнений типа (10). При достаточной гладкости $f(t)$ получаемая точность приближения $O(h^2)$ отвечает точности приближения производной центральной разделенной разностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
2. Городний, М.Ф. Свойства решений разностных и дифференциальных уравнений и их стохастических аналогов в банаховом пространстве : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.Ф. Городний. – Киев, 2004. – 32 с.
3. Gorbachuk, M.L. Boundary-value problems for operator-differential equations / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk. – Dordrecht : Kluwer, 1991. – 364 p.
4. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
5. Чайковский, А.В. Функции от оператора сдвига и их применение к разностным уравнениям // Украинский математический журнал. – 2010. – № 10. – С. 1408–1419.
6. Романенко, В.Н. Приближение ограниченных решений разностных и дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах решениями соответствующих задач Коши : автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.Н. Романенко. – Киев, 2011. – 20 с.
7. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

M.P. Androsenko, O.I. Kashpirovskiy. On Application of Spline Collocation Method for Approximation of Bounded Solutions for Differential Equations

The possibility of approximation by cubic splines on base of spline collocation method for bounded on real axes solutions of linear differential equations with unbounded operator coefficients is proved. Properties of solutions of difference equation systems defining parameters of collocational spline are studied. It is shown that approximation order of bounded solution to differential equation coincides with the approximation order with interpolation splines.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.04.2012

УДК 512.535

Т.В. Волошина**О ТОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ
ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП**

В работе рассматриваются инверсные полугруппы, каждая убывающая цепочка идемпотентов которых обрывается. Для таких полугрупп доказано, что представление на множестве правых ω -классов по замкнутой инверсной подполугруппе H будет точным только в том случае, когда наименьший идемпотент H является примитивным для полугруппы S . Доказано также, что инверсные полугруппы с конечным числом идемпотентов и единственным примитивным обладают точным транзитивным представлением только в том случае, когда являются либо группами, либо группами с нулем.

Введение

Пусть S – инверсная полугруппа, а ω – обозначает естественный частичный порядок на ней: $a\omega b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Замыканием $H\omega$ множества $H \subseteq S$ называется множество $H\omega := \{h \in S : \exists \pi \in H \pi\omega h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют замкнутым.

Подстановочным представлением на множестве X инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм в инверсную симметрическую полугруппу $IS(X)$. Представление называется точным, если оно инъективно. Для каждой инверсной полугруппы Вагнер [1] и Престон [2] построили точное представление частичными подстановками множества ее элементов. Этот факт является аналогом теоремы Кэли.

Пусть $\varphi_i : S \rightarrow IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. Прямой суммой представлений φ_i называется представление $\varphi : S \rightarrow IS(X)$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два представления $\varphi : S \rightarrow IS(X)$ и $\psi : S \rightarrow IS(Y)$ называются эквивалентными, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y , что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $(\theta(x))^{\psi(s)} = \theta(x')$. Представление $\varphi : S \rightarrow IS(X)$ инверсной полугруппы S называют транзитивным, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X , что $h(x_1) = x_2$, и эффективным, если $\bigcup_{x \in \varphi(S)} \text{dom } x = X$.

Естественно, сначала ограничимся рассмотрением только транзитивных представлений, так как каждое эффективное представление является прямой суммой транзитивных [3]. В 1962 году Шайном [4] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H := \{(s, t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S . Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности, H – единственный π_H -класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [5]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$

и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми ω -классами по замкнутой инверсной подполугруппе H* . Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H : S \rightarrow IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы S на правых ω -классах по замкнутой инверсной подполугруппе H* . Область определения конгруэнции π_H будем обозначать $D_H := \{s \in S \mid ss^{-1} \in H\} = \{s \in S \mid \exists x \in X : s \in x\}$.

Постановка задачи

Описание всех точных представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Представление Вагнера–Престона в общем случае не транзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. В нашей работе рассматриваются необходимые условия, которые должна удовлетворять замкнутая инверсная подполугруппа, чтобы соответствующее представление было точным. Изучение точных транзитивных представлений инверсных полугрупп является важным этапом исследования таких полугрупп а также их представлений.

Вспомогательные результаты

Если полугруппа содержит 0 , то он является неподвижной точкой представления Вагнера–Престона для всех элементов полугруппы. Поэтому в этом случае можно перейти к индуцированному представлению полугруппы S частичными подстановками множества $S \setminus \{0\}$, которое остается точным. Пусть инверсная полугруппа точно действует на множестве N . Для $M \subseteq N$ обозначим $S_M = \{s \in S \mid M^s = M\}$. Для $a \in S$ через $dom a$ и $ran a$ обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Множество идемпотентов полугруппы S обозначим через $E(S)$.

Идемпотент $e \in S$ называют *примитивным*, если он ненулевой и такой, что для каждого ненулевого идемпотента f из $f\omega e$ следует $f = e$. Через E_{\min} будем обозначать *множество всех примитивных идемпотентов* инверсной полугруппы S . Если $|E_{\min}| = 1$, то единственный элемент из E_{\min} обозначим e_{\min} .

Лемма 1. Пусть S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, $f \in E(S)$ – ненулевой. Тогда существует такой $e \in E_{\min}(S)$, что $e\omega f$.

Доказательство. Если $f \in E_{\min}(S)$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $f \notin E_{\min}(S)$. Поскольку $f \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент f_1 , что $f_1 < f$. Если $f_1 \in E_{\min}(S)$, то лемма доказана. В противном случае для $f_1 \neq 0$ существует такой ненулевой идемпотент f_2 , что $f_2 < f_1 < f$. Так как каждая убывающая цепочка идемпотентов S обрывается, на некотором шаге получим такой ненулевой идемпотент f_i , что для каждого ненулевого идемпотента $\varepsilon \in E(S)$ из $\varepsilon \leq f_i$ следует $\varepsilon = f_i$. Отсюда $f_i \in E_{\min}(S)$. При этом $f_i < \dots < f_2 < f_1 < f$. Таким образом, $e := f_i\omega f$.

Следствие. Если S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, то $E_{\min}(S) \neq \emptyset$.

Лемма 2. Пусть S – инверсная полугруппа. Каждая убывающая цепочка идемпотентов из S вида $e_1 > e_2 > \dots > e_k > \dots$ обрывается тогда и только тогда, когда каждая замкнутая инверсная подполугруппа S содержит наименьший идемпотент.

Доказательство. Предположим, что существует H – такая замкнутая инверсная подполугруппа S , у которой отсутствует наименьший идемпотент. Тогда $0 \notin H$. Рассмотрим произвольный идемпотент $e_0 \in H$. Для него найдется такой идемпотент $f \neq e_0$, что либо $f < e_0$, либо f и e_0 – несравнимы. Обозначим $e_1 := e_0 f < e_0$. Поскольку $e_1 \in H$ и $0 \notin H$, $e_0 > e_1 \neq 0$. Для идемпотента e_1 найдется такой идемпотент $f_1 \neq e_1$, что либо $f_1 < e_1$, либо f_1 и e_1 – несравнимы. Обозначим $e_2 := e_1 f_1 < e_1$. Поскольку $e_2 \in H$ и $0 \notin H$, $e_0 > e_1 > e_2 \neq 0$. Повторяя процедуру бесконечное количество раз, можно построить бесконечную убывающую цепь идемпотентов в замкнутой инверсной подполугруппе H , а следовательно, и в самой полугруппе S .

С другой стороны, если инверсная полугруппа S содержит бесконечную убывающую цепочку идемпотентов $e_1 > e_2 > \dots > e_k > \dots$, то в ней содержится замкнутая инверсная подполугруппа $H := (\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\})\omega$ без наименьшего идемпотента.

Лемма 3. Пусть инверсная полугруппа S точно действует на множестве N и $M = \bigcap_{e \in E(S)} dome$. Тогда M – максимальное относительно включения подмножество N , для которого равенство $M^s = M$ выполняется для всех $s \in S$.

Доказательство. Из $M = \bigcap_{e \in E(S)} dome$ следует $M \subseteq dome$ для всех $e \in E(S)$. Поэтому для каждого $s \in S$ $dom s = dom(ss^{-1}) \supseteq M$.

Если $|E(S)| = 1$, то инверсная полугруппа S является группой, и утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $|E(S)| \neq 1$ и существуют такие $s \in S$ и $i \in M$, что $s(i) = j \notin M$. Тогда для $j \notin M = \bigcap_{e \in E(S)} dome$ найдется такой $f \in E(S)$, что $j \notin dom f$.

Для элемента $sf \in S$ выполняется $i^{sf} = (i^s)^f = j^f = \emptyset$. Тогда $i \notin dom(sf)$, и M не содержится в $dom(sf)$, что противоречит доказанному выше. Поэтому $M^s \subseteq M$ для всех $s \in S$. Из того, что $M^{s^{-1}} \subseteq M$ и $M = M^{ss^{-1}} = (M^s)^{s^{-1}} \subseteq M^{s^{-1}} \subseteq M$, получаем $M^s = M$ для всех $s \in S$. Максимальность множества M вытекает из того, что для $j \notin M = \bigcap_{e \in E(S)} dome$ существует такой $f \in E(S)$, что $j \notin dom f$.

Лемма 4. Пусть φ_H – точное представление инверсной полугруппы S с нулем 0 на множестве правых ω -классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H , а $D_H := \{s \in S \mid ss^{-1} \in H\}$ – область определения главной частичной правой конгруэнции π_H на S , соответствующей подполугруппе H . Если $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \emptyset$ для всех $s \in D_H$, то $x = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $t \in S$. Тогда для всех $s \in D_H$ $((Hs)\omega)^{\varphi_H(tx)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)\varphi_H(x)} = (((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)})^{\varphi_H(x)} = \emptyset$. Из того, что $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \emptyset$ для всех $s \in D_H$, и из точности представления φ_H следует равенство $tx = x$ для всех $t \in S$. Отсюда x является правым нулем в S . Поэтому $x = 0$.

Лемма 5. Пусть φ_H – представление инверсной полугруппы S на множестве правых ω -классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H и $e \in E(S)$. Тогда элемент $\varphi_H(e)$ действует на своей области определения тождественно.

Доказательство. Для произвольного правого ω -класса $(Hs)\omega$ по теореме 7.10

$$[5] \text{ элемент } s \in (Hs)\omega \text{ и } (Hs)\omega^{\varphi_H(e)} = \begin{cases} (Hse)\omega & , \text{ если } ses^{-1} \in H \\ \emptyset & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку, по лемме 7.11 [5], каждый правый ω -класс – замкнут, то из $se\omega s$ и $se \in (Hse)\omega$ следует $s \in (Hse)\omega$. Поэтому $(Hs)\omega = (Hse)\omega$.

Лемма 6. Если S – инверсная полугруппа с нулем и H – ее собственная замкнутая инверсная подполугруппа, то $\varphi_H(0)$ – пустая подстановка.

Доказательство. Если $0 \in H$, то из замкнутости H следует $H = S$, так как $0\omega s$, для всех $s \in S$. Поскольку H – собственная подполугруппа S , то $0 \notin H$. Для произвольного $s \in S$ $s0s^{-1} = 0 \notin H$. Следовательно, $(Hs)\omega^{\varphi_H(0)} = \emptyset$ для всех правых ω -классов.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, а φ_H – ее точное представление на множестве правых ω -классов по замкнутой инверсной подполугруппе H . Тогда наименьший идемпотент подполугруппы H является примитивным для полугруппы S .

Доказательство. По лемме 2, H содержит наименьший идемпотент e_H . Если $e_H = 0$, то из замкнутости H следует равенство $H = S$, а соответствующее представление φ_H – неточно. Поэтому $e_H \neq 0$. Обозначим $dom e_H = M$.

По лемме 1, для $e_H \neq 0$ найдется такой $e \in E_{\min}(S)$, что $e\omega e_H$. Очевидно, при этом $E_{\min}(S) \neq \emptyset$. Из точности представления φ_H и леммы 4 следует, что для $e \neq 0$ существует такой $s \in S$, что $ss^{-1} \in H$ и $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} \neq \emptyset$. Тогда, по лемме 5, $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega$, откуда $ses^{-1} \in H$.

Поскольку e_H – наименьший идемпотент в H , $M = dom e_H = \bigcap_{e \in E(H)} dom e$. По лемме 3, M – максимальное относительно включения множество, для которого $M^\tau = M$ для всех $\tau \in H$. Поэтому $M \subseteq dom ss^{-1} = dom s$ и $M \subseteq dom(ses^{-1}) = dom(se)$.

Рассмотрим $s^* = e_H s \in (Hs)\omega$. Для него $s^*(s^*)^{-1} = e_H(ss^{-1})e_H = e_H$ и $dom s^* = dom(s^*(s^*)^{-1}) = M$. По теореме 7.10 [5], $(Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Поэтому $((Hs^*)\omega)^{\varphi_H(e)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Следовательно, $s^*e(s^*)^{-1} \in H$. Поскольку $M \subseteq dom(s^*e(s^*)^{-1})$ и $dom(s^*(s^*)^{-1}) = dom s^* = M$, имеем $s^*(s^*)^{-1} \leq s^*e(s^*)^{-1}$. С другой стороны, $s^*e(s^*)^{-1} \leq s^*(s^*)^{-1}$. Поэтому $s^*e(s^*)^{-1} = s^*(s^*)^{-1}$ и $(s^*)^{-1}s^* = (s^*)^{-1}s^*(s^*)^{-1}s^* = (s^*)^{-1}(s^*e(s^*)^{-1})s^* = (s^*)^{-1}s^*e$. Отсюда вытекает $(s^*)^{-1}s^* \leq e$. Поскольку $e \in E_{\min}(S)$, имеем равенство $(s^*)^{-1}s^* = e$. Тогда из $e\omega e_H$ и $s^* = e_H s$ следует $(s^*)^{-1}s^* \leq s^*(s^*)^{-1} = e_H$ и выполняется $ran s^* \subseteq dom s^* = M$.

Для $\tau = (s^*)^{-1} \cdot (s^*)^{-1}$ тогда $dom \tau \subseteq dom(s^*)^{-1} = dom e$.

Из $\text{rans}^* \cap \text{dom} s^* = \text{rans}^* = \text{dome} \neq \emptyset$ получаем $\tau \neq 0$. Поскольку $e \in E_{\min}(S)$, $e = \tau\tau^{-1}$. Предположим, что $M \setminus \text{rans}^* \neq \emptyset$ и пусть $i \in M \setminus \text{rans}^*$. Тогда, с одной стороны, $s^*(i) \in \text{rans}^* = \text{dome} = \text{dom} \tau$, а с другой – $\tau(s^*(i)) = (s^*)^{-1}((s^*)^{-1}(s^*(i))) = (s^*)^{-1}(i) = \emptyset$. Следовательно, предположение ложно и $\text{dom} s^* = \text{rans}^*$, откуда $e_H = e \in E_{\min}$.

Теорема 2. Инверсная полугруппа S с конечным количеством идемпотентов и единственным примитивным идемпотентом имеет точное эффективное транзитивное представление, тогда и только тогда, когда S является группой или группой с нулем.

Доказательство. Точным эффективным транзитивным представлением группы или группы с нулем будет представление Кэли, эквивалентное представлению на множестве правых смежных классов по единичной подгруппе.

Пусть теперь S не является ни группой, ни группой с нулем. Предположим, что точное эффективное транзитивное представление этой полугруппы существует. Тогда оно эквивалентно представлению φ_H полугруппы на множестве правых ω -классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H , которое, очевидно, также точно. Тогда H – собственная подполугруппа, откуда получаем, что $0 \notin H$, иначе выполнялось бы равенство $H = S$. Из конечности $E(S)$ следует, что $e_H = \prod_{e \in E(H)} e \in H$ – наимень-

ший идемпотент подполугруппы H . По теореме 1, $e_H \in E_{\min}(S)$.

Рассмотрим произвольный правый ω -класс $(Hs)\omega$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и произвольный ненулевой идемпотент f полугруппы S . Так как при этом $ss^{-1} \in H$ и $0 \notin H$, то $s \neq 0$. Поскольку $|E_{\min}(S)| = 1$, то $E_{\min}(S) = \{e_H\}$ и, по лемме 1, $e_H \omega f$. Рассмотрим идемпотент sfs^{-1} и предположим, что $sfs^{-1} = 0$. Тогда $se_H s^{-1} \leq sfs^{-1} = 0$. Поэтому $se_H s^{-1} = 0$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $(s^{-1}s)e_H = s^{-1}(se_H s^{-1})s = 0$. Поскольку $s \neq 0$, идемпотент $s^{-1}s$ также ненулевой. Из $E_{\min}(S) = \{e_H\}$, по лемме 1, $s^{-1}s \geq e_H$. Тогда $e_H = (s^{-1}s)e_H = 0$, что противоречит примитивности e_H . Следовательно, $sfs^{-1} \neq 0$, и, по лемме 1, из равенства $E_{\min}(S) = \{e_H\}$ получаем $sfs^{-1} \geq e_H$. Из замкнутости H следует $sfs^{-1} \in H$. Поэтому $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} \neq \emptyset$ и, по лемме 5, $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} = (Hs)\omega$. Следовательно, все ненулевые идемпотенты полугруппы S действуют на множестве правых ω -классов по H тождественно. Поскольку S не является группой либо группой с нулем, то в ней найдется по крайней мере два разных ненулевых идемпотента e_1 и e_2 , для которых $\varphi_H(e_1) = \varphi_H(e_2)$, что противоречит предположению о точности представления φ_H .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер, В.В. Обобщенные группы / В.В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – № 84. – С.1119–1122.
2. Preston, G.B. Representations of inverse semigroups / G.B. Preston // J. London Math. Soc. – 1954. – № 29. – P.411–419.
3. Понизовский, И.С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И.С. Понизовский // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1964. – Т. 28. – С. 989–1002.
4. Шайн, Б.М. Представление обобщенных групп / Б.М. Шайн // Известия вузов. «Математика». – 1962. – Т. 28, № 3. – С. 164–176.

5. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972.

T.V.Voloshyna. On Exact Representations of Inverse Semigroups

In paper inverse semigroups, in which every decreasing idempotent chain is ending, are considered. For these semigroups is proved, that the representation on a set of the right ω -classes on the closed inverse subsemigroup H is exact only in case, when the least idempotent of H is a primitive for semigroup S . Are proved also, that inverse semigroups with a finite number of idempotents and with a single primitive idempotent have exact representation only in case, when they are group or group with zero.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.04.2012

УДК 517.5

Ю. Зайонц, Ю. И. Харкевич, Т. А. Степанюк**АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА
БИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА
НА КЛАССАХ H_ω**

В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов $H_\omega := \{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R} \}$, с помощью бигармонических интегралов Пуассона $B_\delta(f; x)$. Решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω в равномерной метрике.

1. Решение бигармонического уравнения для единичного круга

Пусть $U(\rho; f; x)$ – бигармоническая функция в круге радиуса r_0 с центром в начале координат, т.е. она является решением уравнения

$$\Delta(\Delta U(\rho; f; x)) = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах.

Рассмотрим уравнение (1) с заданными граничными условиями

$$U(\rho; f; x)|_{\rho=r_0} = f(x), \quad \frac{\partial U(\rho; f; x)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} = g(x), \quad (2)$$

и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $\rho = r_0$ граничным условиям (2). Можно показать [1, с. 400], что искомую функцию можно представить в виде суммы

$$U(\rho; f; x) = (\rho^2 - r_0^2)u_1(\rho; x) + u_2(\rho; x), \quad (3)$$

где $u_1(\rho; x)$ и $u_2(\rho; x)$ – гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2(\rho; x)|_{\rho=r_0} = f(x).$$

Отсюда видно, что функция $u_2(\rho; x)$ есть решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлена с помощью интеграла Пуассона:

$$u_2(\rho; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - \rho^2) f(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \quad (4)$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} = h(x).$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial \rho}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - \rho^2) g(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \quad (5)$$

Продифференцировав (4) по ρ и подставляя значение $\frac{\partial u_2}{\partial \rho}$ в формулу (5), найдем $u_1(\rho; x)$. Заменяя в формуле (3) $u_1(\rho; x)$ и $u_2(\rho; x)$ их выражениями, получим:

$$U(\rho; f; x) = \frac{1}{2\pi r_0} (\rho^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-g(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt + \int_0^{2\pi} \frac{f(t)(r_0 - \rho \cos(t-x))}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x))^2} dt \right]. \quad (6)$$

Если же рассмотреть случай единичного круга ($r_0 = 1$) и следующие краевые условия

$$U(\rho; f; x)|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial U(\rho; f; x)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (7)$$

то, как следует из равенства (6), решением краевой задачи (1) и (7) будет величина

$$B_\rho(f; x) := \frac{(1 - \rho^2)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - \rho \cos t}{(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)^2} dt, \quad 0 < \rho < 1,$$

которую принято называть бигармоническим интегралом Пуассона.

Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, бигармонический интеграл Пуассона запишем в виде

$$B_\delta(f; x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}} - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + 1\right)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) K_\delta(t) dt, \quad \delta > 0, \quad (8)$$

где $K_\delta(t) := \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}} - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + 1\right)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt$ – ядро би-

гармонического интеграла Пуассона.

2. Постановка задачи и некоторые исторические сведения, касающиеся данного вопроса исследования

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a; b]$ [2, с. 12] называют функцию $\omega(t) = \omega(f, t)$, определенную для $t \in [0; b - a]$ при помощи равенства:

$$\omega(t) = \omega(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \max_{a \leq x \leq b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x'-x''| \leq t, \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу H_ω , если ее модуль непрерывности $\omega(f, t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, t) \leq \omega(t),$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|).$$

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $|f^{(r)}(t)| \leq 1$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; B_\delta)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - B_\delta(f; x)\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, будем называть, следуя А.И. Степанцу [2, с. 8], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; B_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонического интеграла Пуассона B_δ на классе \mathfrak{N} в метрике пространства C .

Аппроксимативные свойства метода приближения бигармоническими интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными. В 1963 году С. Каниев в работе [3] установил для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ асимптотическое равенство при $\rho \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho). \quad (9)$$

В 1968 году Р. Рух [4] уточнила результаты С. Каниева, получив следующее асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho}\right), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (10)$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева [5] было получено полное асимптотическое разложение для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ по степеням $(1-\rho)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} & \left\{ (1-\rho) + (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (1-\rho)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\alpha_k (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k \right) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \right).$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова [6] были получены полные асимптотические разложения для величин $\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C$ и $\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C$, которые формулируются одновременно как в терминах $\frac{1}{\delta}$ так и в терминах $1-\rho$, а именно при $\delta \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 1-$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi} & \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(2k \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^{2k+2}} - \frac{1}{\pi^{2k}} \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} + \\ & + \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right) \left\{ \ln \delta + \ln \pi + \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^{2k+2}} \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\delta^\alpha} - \frac{\alpha}{\delta^{\alpha-1}} \frac{1-\rho^2}{\pi} \right\} + \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k} \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt - \frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}} \right] + \frac{1-\rho^2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2k \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k} \left[\frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right], \quad (13)$$

где $(t^\alpha)_{2\pi}$ – четное 2π -периодическое продолжение функции $f(t) = t^\alpha$, $0 \leq t \leq \pi$, на всю числовую ось.

Так же следует отметить ряд работ Ю.И. Харкевича, К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло и И.В. Кальчук [7–12], которые изучали аппроксимативные свойства бигармонического интеграла Пуассона на разных классах дифференцируемых функций.

Как следствие, из соотношений (9)–(13) вытекает справедливость асимптотических равенств:

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} \right), \quad \rho \rightarrow 1-, \quad (14)$$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{2}{\pi}(1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + O((1-\rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (15)$$

Аналогично из полного асимптотического разложения (13) вытекает асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2} \right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В тоже время аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω от их бигармонических интегралов Пуассона в равномерной метрике.

Основной целью этой работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} \|f(x) - B_\delta(f, x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2} dt, \quad \delta > 0. \quad (17)$$

Доказательство.

Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t) := f(t+x)$. Тогда $f_1(0) - B_\delta(f_1, 0) = f(x) - B_\delta(f, x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω , то делаем выводы, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} |f(0) - B_\delta(f, 0)|.$$

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) := f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω , причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$B_\delta(f_2; 0) = B_\delta(f; 0) - f(0),$$

т.е.

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{\substack{f \in H_\omega \\ f(0)=0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|.$$

Учитывая четность ядра $K_\delta(t)$, нам достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|, \quad (18)$$

где H – множество четных функций $f \in H_\omega$, таких что $f(0) = 0$. Какой бы ни была функция $f \in H$

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right| \leq \int_0^{\pi} \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (19)$$

С другой стороны, так как $K_\delta(t) \geq 0$, то для функции $f_0(t) \in H$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \leq \pi,$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(t) K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (20)$$

Итак, согласно (18)–(20), получаем (17).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (21)$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость следствия 1, запишем сначала бигармонический интеграл Пуассона в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро бигармонического интеграла Пуассона представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt = \frac{1}{2} \varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta(k),$$

где

$$\varphi_\delta(k) := \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [13, с.72], получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_\delta(2\pi k) \right\}, \quad (22)$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функций $\varphi_\delta(u)$, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta}(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_{\delta}(z) \cos z u dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z t \cos z u dz = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t) dz = V_1 + V_2. \\ V_1 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz \right). \end{aligned}$$

Дважды интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1}{\delta} \frac{1}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}}.$$

Аналогично, дважды проинтегрировав по частям, можно убедиться в справедливости равенства:

$$\int_0^{\infty} z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1}{u+t} \left(-\frac{1}{u+t} + \frac{2}{\delta} \frac{1}{u+t} \frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \frac{1}{u+t} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz \right).$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2}.$$

Итак, получаем, что

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2} \right).$$

Аналогично,

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u-t)^2\right)^2} \right).$$

Тогда

$$\Phi_{\delta}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{1}{\delta^2} - (u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u-t)^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2} \right) \right). \quad (23)$$

Подставив соотношение (23) в (22), имеем, что

$$K_{\delta}(t) = \frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + t^2\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k + t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k - t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k + t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k + t)^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k - t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k - t)^2\right)^2} \right) \right).$$

Итак,

$$B_{\delta}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k + t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k + t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k + t)^2\right)^2} \right) dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+t))_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + t^2\right)^2} \right) dt.$$

Учитывая последнее равенство, убеждаемся в справедливости следствия 1. Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1; B_{\delta})_C = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi} \int_0^{\pi} t \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t K_{\delta}(t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt = I_1 + I_2.$$

Найдем значения интеграла I_1 : $I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt.$

Так как $\int_0^{2\pi} \frac{t}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} dt = \frac{1}{2} \ln(4\pi^2 \delta^2 + 1),$ $\frac{2}{\delta^2} \int_0^{2\pi} \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} dt = -\frac{1}{4\pi^2 \delta^2 + 1} + 1,$

и учитывая, то что $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} = \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \right) \ln(4\pi^2 \delta^2 + 1) + \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(-\frac{1}{4\pi^2 \delta^2 + 1} + 1 \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta^2 \left(4\pi^2 + \frac{1}{\delta^2} \right) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Так как $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \geq \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}$ и $(t)_{2\pi} \leq 2\pi$, то

$$I_2 \leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} 2\pi \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{1}{t^2} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{2}{\delta^2} \frac{1}{t^4} \right) dt = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Отсюда получаем утверждение следствия 1.

Так как $\frac{1}{\delta} \sim (1 - \rho)$, когда $\delta \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 1-$, то можно сделать вывод, что следствия из результатов С. Каниева, Р. Рух, Л.П. Фалалеева (15) и (16) эквивалентные (21).

Следствие 2. Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1 - \alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (22)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C &= \frac{1}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right)^2 \int_0^\pi t^\alpha \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}} \right)^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha K_\delta(t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t^\alpha \left(\frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt = I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Найдем значения интегралов I_3 и I_4 .

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t^\alpha \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt.$$

Учитывая формулы (3.241.2) и (3.241.5) из [14], имеем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} dt = \delta^{1-\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt \right) = \delta^{1-\alpha} \left(\frac{\pi}{2 \sin \frac{(1+\alpha)\pi}{2}} - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt \right) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta^{1-\alpha}}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} dt &= \delta^{3-\alpha} \int_0^{2\pi\delta} \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt = \delta^{3-\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt \right) = \\ &= \delta^{3-\alpha} \left(\frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt \right) = \delta^{3-\alpha} \frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1), \end{aligned}$$

и учитывая то, что $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} = \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \right) \left(\delta^{1-\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1) \right) + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{2}{\delta^2} \left(\delta^{3-\alpha} \frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1) \right) \right) = \\ &= \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{1}{\delta^{1+\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty 2\pi \left(\frac{1}{\delta} \frac{1}{t^2} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \left(\frac{2}{\delta^2} \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) \right) dt = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

Следует отметить, что равенство (22) совпадает со следствием из результата Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
2. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Київ : Наукова думка, 1981. – 340 с.

3. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 995–998.
4. Pych, P. On biharmonic function in unit disk / P. Pych. // Ann. pol. math. – 1968. – Vol. 20, №3. – P. 203–213.
5. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (материалы всесоюзного симпозиума). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
6. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // Труды 5-го советско-чехословацкого совещания по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976). – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
7. Zhigallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhigallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2000. – Vol 52, № 7. – P. 1113–1117.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – Vol 54, № 9. – P. 1462–1470.
9. Kharkevich, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – Vol. 59, № 8. – P. 1224–1237.
10. Kharkevich, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – Vol. 60, № 5. – P. 769–798.
11. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – Vol. 61, № 7. – P. 399–413.
12. Zhyhallo, K.M. Approximation of functions from the classes $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2011. – Vol. 63, № 7. – P. 1083–1107.
13. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.–Л., 1948.
14. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

J. Zajac, Yu.I. Kharkevych, T.A. Stepaniuk. Approximating Properties of Biharmonic Poisson's Integrals on the Classes H_{ω}

In work we conducted research of questions of approximation functions from the classes $H_{\omega} := \{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} \}$, with a help of biharmonic Poisson's integrals $B_{\delta}(f; x)$. We solved the problem of Kolmogoroff-Nikolsky for biharmonic Poisson's integrals on the classes H_{ω} in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.04.2012

УДК 517.546

Д. Кирьяцкис

О ЛИНЕЙНОМ ОДНОРОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И СИСТЕМЕ ЧЕБЫШЕВА

В данной работе изучаются свойства однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка, фундаментальная система решений которого является системой Чебышева. В связи с этим рассматривается класс аналитических в круге функций, каждая из которых имеет n нулей в этом круге. Устанавливаются для функций этого класса оценки модулей производных. Используется аппарат разделенных разностей. Приводятся также некоторые свойства систем Чебышева и примеры дифференциальных уравнений чебышевского типа.

1. Система вещественных функций $u_1(t), \dots, u_n(t)$, определенных на отрезке $[a, b]$, называется системой Чебышева порядка n на $[a, b]$, если для любых действительных значений c_1, \dots, c_n (случай $c_1 = \dots = c_n = 0$ исключается) каждый обобщенный многочлен $P(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$ имеет на $[a, b]$ не более $n-1$ попарно различных корней.

Системы Чебышева встречаются во многих областях математического анализа, например, в теории аппроксимации, в теории интерполяции, в задачах, связанных с осцилляционными решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. С различными интересными свойствами систем Чебышева можно познакомиться в [1]. Что касается различных приложений, то заслуживает внимания [2].

Вместе с тем теория чебышевских систем, определяемых в различных классах функций комплексного переменного, развивается пока не очень быстрыми темпами. Здесь можно упомянуть о классических результатах А. Хаара, Л. Тоннелли, В. Виденского, Е. Ремеза о наилучших приближениях на заданных множествах в комплексной плоскости [3].

Дадим определение системы Чебышева для аналитических в области D функций. Система аналитических и линейно независимых в области D функций

$$y_1(z), \dots, y_n(z) \quad (1)$$

называется системой Чебышева (чебышевской системой) в области D , если для любых комплексных чисел c_0, c_1, \dots, c_n , не равных одновременно нулю, любая функция вида (обобщенный многочлен)

$$y(z) = c_0 y_0(z) + \dots + c_n y_n(z) \quad (2)$$

имеет в области D не более $n-1$ попарно различных корней. Очевидно, что система функций (1) есть система Чебышева в области D , если для любых комплексных чисел c_0, c_1, \dots, c_n , не равных одновременно нулю, уравнение

$$c_0 y_0(z) + \dots + c_n y_n(z) = 0$$

имеет в области D не более $n-1$ попарно различных корней.

Примером системы Чебышева в любой области комплексной плоскости является система, состоящая из функций $1, z, \dots, z^n$, где n – любое натуральное число. Другим примером системы Чебышева в области D , имеющая многочисленные применения в различных областях математики, является система функций $y_1(z) \equiv 1$, $y_2(z) \equiv f(z)$,

где $f(z)$ – однолиственная в области D функция. Приведем несколько элементарных свойств систем Чебышева, часть из которых мы используем в дальнейшем.

Свойство 1. Функции (1), образующие систему Чебышева в области D , не могут иметь общего корня в области D [1].

Свойство 2. Если $y(z) \in A(D)$ и $y(z) \neq 0$ в области D , причем функции (1) образуют систему Чебышева в области D , то функции $y(z)y_1(z), y(z)y_2(z), \dots, y(z)y_n(z)$ также образуют систему Чебышева в области D .

Свойство 3. Пусть функции (1) образуют систему Чебышева в области D_0 и функция $y(z) \in A(D)$ взаимно однозначно отображает область D на область D_0 . Тогда функции $y_1(y(z)), y_2(y(z)), \dots, y_n(y(z))$ также образуют систему Чебышева в области D .

Свойство 4 в некотором смысле дополняет определение системы Чебышева.

Свойство 4. Если система функций (1) есть система Чебышева в области D , то любой обобщенный многочлен вида (2) имеет не более $n-1$ корней в области D , считая кратность каждого корня. Кроме того, существует обобщенный многочлен вида (2), имеющий ровно $n-1$ корней в области D , считая кратность каждого корня [4]. С другими свойствами систем Чебышева можно познакомиться в [5], [6].

2. Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_1(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + g_{n-1}(z)y^{(1)}(z) + g_n(z)y(z) = 0, \quad (3)$$

где $g_1(z), \dots, g_n(z)$ – аналитические в области D функции. Функции, удовлетворяющие уравнению (3), ищем также среди аналитических в области D функций. Хорошо известно, что если $y_1(z), \dots, y_n(z)$ – линейно независимые в области D частные решения уравнения (3), то любая функция, представимая в виде линейной комбинации функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$, удовлетворяет уравнению (3). В этом случае говорят, что система функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$ образует фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения (3), а общее решение имеет следующий вид:

$$y(z) = c_1 y_1(z) + \dots + c_n y_n(z),$$

где c_1, \dots, c_n – произвольные комплексные числа. Функцию тождественно равную нулю в области D назовем нулевой функцией. Очевидно, нулевая функция всегда удовлетворяет уравнению (3).

Уравнение (3) назовем дифференциальным уравнением чебышевского типа в области D , если любая фундаментальная система решений этого уравнения является системой Чебышева в области D . Другими словами, любая ненулевая функция, удовлетворяющая уравнению (3) имеет в области D не более $n-1$ корней, считая кратность каждого корня.

3. Рассмотрим некоторые простейшие линейные однородные дифференциальные уравнения и выясним, являются ли они уравнениями чебышевского типа.

Пример 1. Уравнение $y^{(n)}(z) = 0$ является дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой области D .

В самом деле, все функции, удовлетворяющие этому уравнению, содержатся в формуле $y(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$, где c_0, \dots, c_{n-1} – произвольные постоянные. Очевидно, любая ненулевая функция указанного вида имеет в области D не более $n-1$ корней.

Пример 2. Уравнение $y'(z) + y(z) = 0$ является дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой области D . Действительно, общее решение этого уравнения имеет вид: $y(z) = c_1 e^{-z}$.

Очевидно, любая ненулевая функция указанного вида не имеет в области D корней.

Пример 3. Уравнение $y^{(n)}(z) + C_n^1 y^{(n-1)}(z) + \dots + C_n^{n-1} y^{(1)}(z) + y(z) = 0$,

где C_n^1, \dots, C_n^{n-1} – биномиальные коэффициенты, будет дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой ограниченной области D .

Докажем это утверждение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^n + C_n^1 \lambda^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} \lambda + 1 = 0$$

или $(\lambda + 1)^n = 0$. Отсюда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = -1$. Значит, общее решение имеет вид:

$$y(z) = e^{-z} (c_1 + c_2 z + \dots + c_n z^{n-1}).$$

Отсюда видно, что любая ненулевая функция имеет в области D не более $n - 1$ корней.

Пример 4. Пусть $n \geq 2$. Уравнение $y^{(n)} - 2^{n+1} 3\pi i y^{(n-1)} - 2^{2n+3} \pi^2 y^{(n-2)} = 0$ не является чебышевского типа в круге $|z| < 1$.

Докажем это утверждение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^n - 2^{n+1} 3\pi i \lambda^{n-1} - 2^{2n+3} \pi^2 \lambda^{n-2} = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = 2^{n+2} \pi i$, $\lambda_2 = 2^{n+1} \pi i$, а остальные равны нулю. Возьмем функцию $y(z) = e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z}$. Эта функция удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению. Если $z_k = 1/2^k$, то $|z_k| < 1$ и $y(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Это говорит о том, что данное дифференциальное уравнение не является дифференциальным уравнением чебышевского типа в круге $|z| < 1$.

Пример 5. Уравнение $y''(z) - y'(z) = 0$ будет чебышевского типа в круге $|z| < 1$ и не будет чебышевского типа в круге $|z| < 7$. В самом деле, любая функция, удовлетворяющая данному уравнению, представима формулой $y(z) = c_1 + c_2 e^z$. При любых значениях c_1, c_2 , кроме $c_1 = 0, c_2 = 0$ такая функция имеет не более одного корня в круге $|z| < 1$ и может иметь два корня в круге $|z| < 7$.

Примеры показывают, что линейно однородное дифференциальное уравнение n может быть как чебышевского типа, так и нечебышевского типа. Это зависит от поведения его коэффициентов a_1, \dots, a_n , а также от размеров и вида области D .

4. В теории интерполяции известно следующее утверждение.

Если дифференцируемая n раз функция $x(t)$ имеет n нулей a_1, \dots, a_n на отрезке

$[a, b]$, то справедливы неравенства $|x^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{(n-k)!} \mu (b-a)^{n-k}$, $a \leq t \leq b$, $k = 0, 1, \dots, n-1$,

где $\mu = \max_{a \leq t \leq b} |x^{(n)}(t)|$.

Доказательство этой теоремы довольно сложное и основано на следующем представлении функции $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= (a_n - t)(a_{n-1} - t) \dots (a_2 - t) \int_{a_0}^t \frac{1}{(a_2 - t_1)^2} dt_1 \int_{a_2}^{t_1} \frac{(a_2 - t_2)}{(a_3 - t_2)} dt_2 \dots \\
 &\dots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-2}} \frac{(a_{n-1} - t_{n-1})^{n-2}}{(a_2 - t_1)^2} dt_{n-1} \int_{a_n}^{t_{n-1}} (a_n - t_n)^{n-1} x^{(n)}(t_n) dt_n.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Приведенное утверждение используется обычно для оценки остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа и его производных, например, в работах [7; 8]. Представление (4) применялось также в комплексной плоскости для голоморфных в круге функций в работах [9; 10] при изучении свойств производной Шварца и систем Чебышева. Ниже мы сформулируем и докажем более общую интерполяционную теорему, в которой существенную роль играют разделенные разности различных порядков [11; 12].

Определим разделенную разность n -го порядка аналитической в области D функции $f(z)$ для попарно различных точек $z_0, z_1, \dots, z_n \in D$ рекуррентной формулой

$$[f(z); z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{[f(z); z_0, z_1, \dots, z_{n-1}] - [f(z); z_1, z_2, \dots, z_n]}{z_0 - z_n},$$

где положено

$$[f(z); z_0] = f(z_0), \quad [f(z); z_0, z_1] = \frac{[f(z); z_0] - [f(z); z_1]}{z_0 - z_1} = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}.$$

Для попарно различных z_0, z_1, \dots, z_n имеет место также формула:

$$[f(z); z_0, \dots, z_n] = \sum_{m=0}^n \frac{f(z_m)}{\eta'_n(z_m)}, \quad \text{где } \eta_n(z) = \prod_{p=0}^n (z - z_p). \tag{5}$$

Разделенную разность $n-1$ -го порядка аналитической в области D функции $F(z)$ можно определить с помощью контурного интеграла следующим образом:

$$[f(z); z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)(\xi - z_1) \dots (\xi - z_n)}, \tag{6}$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in D$. В формуле (6) среди точек z_0, z_1, \dots, z_n могут быть и совпадающие между собой точки. Если $z_0 = z_1 = \dots = z_n = \zeta$, то

$$\left[f(z); \underbrace{\zeta, \dots, \zeta}_{n+1} \right] = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

Пусть D – выпуклая область. Тогда разделенную разность n -го порядка аналитической в области G функции $f(z)$ можно представить в следующем виде:

$$[f(z); z_0, z_1, \dots, z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n, \tag{7}$$

где $z_0, z_1, \dots, z_n \in D$ и

$$\begin{aligned}
 \zeta &= z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in D, \\
 0 &\leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq t_1, \dots, \quad 0 \leq t_n \leq t_{n-1}.
 \end{aligned}$$

В частности, если $f^{(n)}(z) \equiv 1$, то

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_1 \dots dt_n = \frac{1}{n!}. \tag{8}$$

В формуле (6) среди точек z_0, z_1, \dots, z_n могут быть и совпадающие между собой точки.

Теорема 1. Пусть аналитическая в области D функция $f(z)$ имеет n нулей a_1, \dots, a_n , которые все расположены в некоторой ограниченной области $G \subset D$. Пусть также

$$M_n = \max_{z \in \bar{G}} |f^{(n)}(z)|, \text{ где } \bar{G} - \text{замыкание области } G.$$

Тогда для модуля k -ой производной функции

$$(z - z_1) \dots (z - z_m) [f(z); a_1, \dots, a_n, z]$$

справедливо неравенство:

$$\left| ((z - a_1) \dots (z - a_m) [f(z); a_1, \dots, a_n, z] \right)^{(k)} \leq (|z| + R)^{n-k} \frac{A_m^k M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G}, \quad (9)$$

где $2d$ – диаметр замкнутой области \bar{G} и

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}, \quad 0 \leq k \leq m \leq n \text{ и } m \neq 0.$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ имеет n нулей в замкнутой области \bar{G} , то ее можно представить в виде $f(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n) \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в области D функция. Пользуясь формулами (7) и (8), получим

$$[f(z); a_1, \dots, a_n, z] \leq \frac{M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G}. \quad (10)$$

Для удобства дальнейших рассуждений возьмем в плоскости uOv прямоугольную трапецию с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(n;0)$, $C(n;n)$, $D(1;1)$. Далее рассматриваем внутри трапеции $ABCD$ и на ее границе множество $\{(m; k)\}$ точек с целыми неотрицательными координатами. Для фиксированного n легко убедиться в существовании взаимно однозначного соответствия между множеством точек (m, k) и множеством неравенств (9). Нам надо доказать, что для каждой точки (m, k) трапеции $ABCD$ имеет место неравенство (9). Так как для любого $z \in \bar{G}$ справедливо неравенство

$$|(z - a_1) \dots (z - a_m)| \leq (|z| + R)^m, \text{ где } 1 \leq m \leq n,$$

то из (10) легко следует неравенство

$$|(z - a_1) \dots (z - a_m) [f(z); a_1, \dots, a_n, z]| < (|z| + d)^m \frac{A_m^0 M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (11)$$

Это значит, что для всех точек $(m; 0)$, $m = 1, \dots, n$, лежащих на стороне AB трапеции $ABCD$, имеет место неравенство (9).

Для точки $(n; n)$ неравенство (9) справедливо. Действительно,

$$(z - a_1) \dots (z - a_n) [f(z); a_1, \dots, a_n, z] \equiv f(z)$$

и поэтому

$$\left| ((z - a_1) \dots (z - a_n) [f(z); a_1, \dots, a_n, z] \right)^{(n)} = |f^{(n)}(z)| \leq \frac{A_n^n M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G}. \quad (12)$$

Для точек $(m; m)$, $m = 1, \dots, n-1$, неравенство (9) справедливо. В самом деле,

$$\left| ((z - a_1) \dots (z - a_m) \varphi(z))^{(m)} \right| = \left| ([f(z); a_{m+1}, \dots, a_n] \right)^{(m)} = m! \left[[f(z); a_{m+1}, \dots, a_n, \underbrace{z, \dots, z}_{m+1}] \right] \leq \frac{A_m^m M_n}{n!} \quad (13)$$

для любого $z \in \bar{G}$. Из (11), (12), (13) следует, что неравенство (9) справедливо для всех точек, лежащих на сторонах AB , AD , DC трапеции $ABCD$. Теперь мы докажем справедливость неравенства (9) для всех точек, лежащих внутри трапеции $ABCD$, а также

для всех точек, расположенных на стороне BC . Будем пользоваться индукцией. Для точек, лежащих на стороне AD , неравенство (9), как уже известно, справедливо. Пусть неравенство (9) имеет место для всех точек трапеции $AEFD$, где сторона EF состоит из точек $(m; k)$, $k = 0, 1, \dots, m-1, m$. Докажем тогда, что

$$\left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m+1}) [f(z); a_1, \dots, a_n, z] \right)^{(k)} \right| \leq (|z| + d)^{n-k} \frac{A_{m+1}^k M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G} \quad (14)$$

справедливо для всех точек $(m+1; k)$, $k = 0, 1, \dots, m, m+1$, расположенных на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D , содержащей трапецию $AEFD$.

Как уже известно, для крайних точек $E_1(m+1; 0)$ и $F_1(m+1; m+1)$ стороны E_1F_1 неравенство (13) справедливо. Докажем справедливость неравенства (14) для остальных точек стороны E_1F_1 . Возьмем на стороне E_1F_1 произвольным образом внутреннюю точку $(m+1; k)$, где $1 \leq k \leq m$, и докажем справедливость неравенства (14) для этой точки.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m+1}) \varphi(z) \right)^{(k)} \right| = \left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m-k+1}) (z - a_{m-k+2}) \varphi(z) \right)^{(k)} \right| = \\ & = \sum_{p=0}^k C_k^p \left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m-k+1}) \right)^{(k-p)} \right| \cdot \left| \left((z - a_{m-k+2}) \dots (z - a_{m+1}) \varphi(z) \right)^{(p)} \right|, \quad \forall z \in \bar{G}. \end{aligned}$$

Здесь C_k^p – биномиальные коэффициенты. Нетрудно убедиться в том, что

$$\left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m-k+1}) \right)^{(k-p)} \right| \leq A_{m-k+1}^{k-p} (|z| + d)^{m-2k+1+p}, \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Далее обозначим для удобства $b_1 = a_{m-k+2}$, $b_2 = a_{m-k+3}, \dots, b_k = a_{m+1}$. Тогда получим

$$\left| \left((z - a_{m-k+2}) \dots (z - a_{m+1}) \varphi(z) \right)^{(p)} \right| = \left| \left((z - b_1) \dots (z - b_k) \varphi(z) \right)^{(p)} \right|, \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Так как точка $(k; p)$ принадлежит трапеции $AEFD$, то

$$\left| \left((z - b_1) \dots (z - b_k) \varphi(z) \right)^{(p)} \right| \leq (|z| + d)^{k-p} \frac{A_k^p M_n}{n!}, \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Таким образом, для любого z из области G имеем

$$\left| \left((z - a_1) \dots (z - a_{m+1}) \varphi(z) \right)^{(k)} \right| \leq (|z| + d)^{m+1-k} \frac{M_n}{n!} \sum_{p=0}^k C_k^p \cdot A_{m-k+1}^{k-p} \cdot A_k^p = (|z| + d)^{m-k+1} \frac{M_n}{n!} A_{m+1}^k. \quad (15)$$

Докажем комбинаторное равенство:

$$\sum_{p=0}^k C_k^p \cdot A_{m+1-k}^{k-p} \cdot A_k^p = A_{m+1}^k. \quad (16)$$

Действительно, так как $z^{m+1} = z^{m+1-k} z^k$, то

$$(z^{m+1})^{(k)} = \sum_{p=0}^k C_k^p (z^{m+1-k})^{(k-p)} (z^k)^{(p)}$$

или

$$A_{m+1}^k z^{m+1-k} = \sum_{p=0}^k C_k^p A_{m+1}^{k-p} z^{m+1-2k+p} A_k^p z^{k-p}. \quad (17)$$

Полагая в (17) $z = 1$, получим (16). Пользуясь (15) и (16), получим (14).

Мы доказали справедливость неравенства (9) для произвольно фиксированной точки $(m+1; k)$, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D . Но тогда мы доказали справедливость неравенства (9) для любой точки, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D . Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости неравенства (9) для любой точки трапеции $ABCD$.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ голоморфная в области D функция имеет n нулей a_1, \dots, a_n , которые все расположены в ограниченной области $G \subset D$. Пусть \bar{G} – замыкание области G и $2d$ – диаметр замыкания \bar{G} . Пусть также

$$M_n = \max_{z \in \bar{G}} |f^{(n)}(z)|.$$

Тогда для любого z из замыкания \bar{G} справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{(|z| + d)^{n-k}}{(n-k)!} M_n, \quad 0 \leq k \leq n.$$

В самом деле, пусть $m = n$. Тогда легко видеть, что

$$(z - a_1) \dots (z - a_n) [f(z); a_1, \dots, a_n, z] \equiv f(z).$$

Применяя (8) для случая $m = n$, получим:

$$|f^{(k)}(z)| \leq (|z| + d)^{n-k} \frac{A_n^k M_n}{n!} = (|z| + d)^{n-k} \frac{M_n}{(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Следующая теорема указывает на условия, которые являются достаточными для того, чтобы линейное дифференциальное уравнение было чебышевского типа. Эти условия касаются коэффициентов этого уравнения.

Теорема 2. Пусть $g_0(z), \dots, g_{n-1}(z)$ – аналитические в области D функции. Если для любого z из ограниченной области $G \subset D$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(|z| + d)^{n-k}}{(n-k)!} |g_k(z)| \leq 1, \quad (18)$$

где $2d$ – диаметр замыкания \bar{G} , то дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + g_1(z)y^{(1)}(z) + g_0(z)y(z) = 0 \quad (19)$$

является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G . Другими словами, при выполнении условия (18) фундаментальная система решений уравнения (19) является системой Чебышева в области G .

Доказательство. Предположим временно, что уравнение (19) не является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G . Тогда найдется аналитическая в области G функция $f(z)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (19), т.е.

$$f^{(n)}(z) + g_{n-1}(z)f^{(n-1)}(z) + \dots + g_1(z)f^{(1)}(z) + g_0(z)f(z) = 0, \quad \forall z \in G, \quad (20)$$

и имеет по крайней мере n корней a_1, \dots, a_n в области G . Из (20) легко следует неравенство

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(z)| |f^{(k)}(z)|, \quad \forall z \in G. \quad (21)$$

Ясно, что существует область $Q \subset G$ такая, что $a_1, \dots, a_n \in Q$ и $\bar{Q} \subset G$. Обозначим $M_n = \max_{z \in \bar{Q}} |f^{(n)}(z)|$. Применяя теорему 2 к правой части неравенства (21), получим

$$|f^{(n)}(z)| \leq M_n \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(z)| \frac{(|z| + d_1)^{n-k}}{(n-k)!}, \quad \forall z \in \bar{Q}, \quad (22)$$

где $2d_1$ – диаметр области Q . Далее, существует такая точка $\xi \in \bar{Q}$, что $|f^{(n)}(\xi)| = M_n$. Значит, из (22) следует неравенство

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(|\xi| + d_1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Так как $d_1 < d$, то

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(|\xi| + d)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Но точка ξ принадлежит области G . Мы получили противоречие с условием (18). Из этого противоречия вытекает, что уравнение (19) является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G .

Применим теорему 2 для дифференциальных уравнений второго порядка.

Следствие 2. Пусть $g_0(z)$, $g_1(z)$ – аналитические в круге $|z| < R_1$ функции. Если в круге $|z| \leq R < R_1$ выполняется неравенство

$$|g_0(z)| + 2|g_1(z)| \leq \frac{1}{R}, \quad (23)$$

то дифференциальное уравнение

$$y''(z) + g_1(z)y'(z) + g_0(z)y(z) = 0 \quad (24)$$

будет уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Замечание 1. Пусть $y_1(z)$, $y_2(z)$ – линейно независимые частные решения дифференциального уравнения (24) и коэффициенты $g_1(z)$, $g_0(z)$ удовлетворяют неравенству (23). Тогда следствие 2 утверждает, что любая ненулевая функция $y(z) = c_1 y_1(z) + c_2 y_2(z)$ имеет в круге $|z| < R$ не более одного корня. Но тогда функция $f(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)} + c_2$ будет однолистной функцией в круге $|z| < R$ с возможным простым полюсом в единственной точке.

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференциальных уравнений второго порядка. Опираясь на следствие 2, приходим к следующим утверждениям.

Дифференциальные уравнения Эйри и Вебера [13]

$$y''(z) - z \cdot y(z) = 0, \quad y''(z) - z^2 \cdot y(z) = 0$$

будут чебышевского типа в круге $|z| < 1$. Дифференциальное уравнение Матье [13]

$$y''(z) - \cos z \cdot y(z) = 0$$

будет чебышевского типа в круге $|z| < R$, где $R(e^R + e^{-R}) = 2$.

В процессе доказательства теоремы 2 мы установили также следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z) = 0, \quad (25)$$

где $g_k(z)$, $k=1, \dots, n$, – аналитические в области D функции. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (25) и имеет n корней a_1, \dots, a_n , расположенных в некоторой ограниченной области $G \subset D$, диаметр которой равен $2d$. Тогда в области G существует такая точка ξ , для которой

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(d + |\xi|)^{n-k}}{(n-k)!} \quad (26)$$

В самом деле, из условия теоремы 3 следует, что дифференциальное уравнение (25) не является дифференциальным уравнением чебышевского типа. Тогда, рассматривая доказательство теоремы 2, приходим к справедливости неравенства (26).

В следующей теореме рассматривается линейное однородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 4. Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + a_{n-1}y^{(n-1)}(z) + \dots + a_1y^{(1)}(z) + a_0y(z) = 0 \quad (27)$$

с комплексными коэффициентами a_0, \dots, a_{n-1} . Если

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!} |a_k| \leq 1, \quad (28)$$

то (27) будет дифференциальным уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Действительно, для любого z из круга $|z| < R$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(R+|z|)^{n-k}}{(n-k)!} |a_k| < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!} |a_k| \leq 1$$

и по теореме 3 приходим к справедливости нашего утверждения.

Следствие 3. Если

$$|a_k| \leq \frac{1}{e^{2R} - 1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (29)$$

то дифференциальное уравнение (27) является уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

В самом деле, опираясь на условие (29), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!} |a_k| \leq \frac{1}{e^{2R} - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{e^{2R} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2R)^k}{k!} < \frac{1}{e^{2R} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2R)^k}{k!} = 1$$

и по теореме 4 убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Замечание 2. В качестве области D возьмем единичный круг $|z| < 1$. Тогда следствие 3 говорит о том, что уравнение вида (27) будет уравнением чебышевского типа, если коэффициенты по модулю не превышают числа $1/7$.

Лемма 1. Для того чтобы уравнение $y^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z) = 0$

было чебышевского типа, необходимо и достаточно, чтобы определитель Хаара, образованный из фундаментальной системы аналитических в области D функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$, был отличен от нуля, т.е.

$$H(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} y_1(z_1) & \dots & y_n(z_1) \\ y_1(z_2) & \dots & y_n(z_2) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1(z_n) & \dots & y_n(z_n) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall z_1, \dots, z_n \in D.$$

В самом деле, составим систему

$$c_1 u_1(z_k) + \dots + c_n u_n(z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (30)$$

однородных линейных уравнений относительно c_1, \dots, c_n , где z_1, \dots, z_n – фиксированные точки из области D . Если функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$ образуют систему Чебышева в области D , то система (30) имеет только нулевое решение, т.е. $c_1 = \dots = c_n = 0$, и тогда опре-

делитель Хаара отличен от нуля. Если функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$ не образуют систему Чебышева в области D , то система (30) имеет ненулевое решение, т.е. $c_1 = \dots = c_n \neq 0$, и тогда определитель Хаара равен нулю.

Составим определитель из разделенных разностей аналитических в области D функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$ следующим образом:

$$\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} y_1(z_1) & \dots & y_{n-1}(z_1) & y_n(z_1) \\ [y_1(z); z_1, z_2] & \dots & [y_{n-1}(z); z_1, z_2] & [y_n(z); z_1, z_2] \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ [y_1(z); z_1, \dots, z_n] & \dots & [y_{n-1}(z); z_1, \dots, z_n] & [y_n(z); z_1, \dots, z_n] \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Назовем этот определитель разделено-разностным определителем. В случае совпадения всех точек z_1, \dots, z_n , т.е. $z_1 = \dots = z_n = \zeta$ он превращается в определитель

$$\tilde{V}(y_1, \dots, y_n; \zeta) = \frac{1}{1!2!\dots(n-1)!} \begin{vmatrix} y_1(\zeta) & \dots & y_{n-1}(\zeta) & y_n(\zeta) \\ y_1^{(1)}(\zeta) & \dots & y_{n-1}^{(1)}(\zeta) & y_n^{(1)}(\zeta) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\zeta) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(\zeta) & y_n^{(n-1)}(\zeta) \end{vmatrix},$$

который отличается от определителя Вронского $V(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)$ множителем $(1!2!\dots(n-1)!)^{-1}$. Таким образом, определитель $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n)$ можно рассматривать как естественное обобщение определителя Вронского. Запишем определитель Вандермонда

$$W(z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_1 & \dots & z_{n-1} & z_n \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ z_1^{n-1} & \dots & z_{n-1}^{n-1} & z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Известно [14], что

$$W(z_1, \dots, z_n) = ((z_n - z_1)(z_n - z_2) \dots (z_n - z_{n-1})) \dots ((z_3 - z_1)(z_3 - z_2))(z_2 - z_1). \quad (32)$$

Перепишем формулу (5) для попарно различных точек $z_1, \dots, z_n \in D$ следующим образом:

$$[f(z); z_1, \dots, z_n] = \sum_{m=1}^n \frac{f(z_m)}{\eta'_n(z_m)}, \text{ где } \eta_n(z) = \prod_{p=1}^n (z - z_p) \quad (33)$$

Опираясь на формулу (32), легко установить для определителя Вандермонда также формулу

$$W(z_1, \dots, z_n) = \eta'_1(z_1) \eta'_2(z_2) \dots \eta'_n(z_n) \quad (34)$$

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\mathfrak{R}(y_1(z), \dots, y_n(z); z_1, \dots, z_n) = \frac{H(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)}{W(z_1, \dots, z_n)}. \quad (35)$$

Действительно, пользуясь формулами (31), (32), получим

$$\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} y_1(z_1) & \dots & y_{n-1}(z_1) & y_n(z_1) \\ [y_1(z); z_1, z_2] & \dots & [y_{n-1}(z); z_1, z_2] & [y_n(z); z_1, z_2] \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ [y_1(z); z_1, \dots, z_n] & \dots & [y_{n-1}(z); z_1, \dots, z_n] & [y_n(z); z_1, \dots, z_n] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{y_1(z_1)}{\eta'_2(z_1)} + \frac{y_1(z_2)}{\eta'_2(z_2)} & \dots & \frac{y_{n-1}(z_1)}{\eta'_2(z_1)} + \frac{y_{n-1}(z_2)}{\eta'_2(z_2)} & \frac{y_n(z_1)}{\eta'_2(z_1)} + \frac{y_n(z_2)}{\eta'_2(z_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{y_1(z_1)}{\eta'_n(z_1)} + \dots + \frac{y_1(z_n)}{\eta'_n(z_n)} & \dots & \frac{y_{n-1}(z_1)}{\eta'_n(z_1)} + \dots + \frac{y_{n-1}(z_n)}{\eta'_n(z_n)} & \frac{y_n(z_1)}{\eta'_n(z_1)} + \frac{y_n(z_n)}{\eta'_n(z_n)} \end{vmatrix} = \frac{H(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)}{\eta'_1(z_1)\eta'_2(z_2)\dots\eta'_n(z_n)} = \frac{H(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)}{W(z_1, \dots, z_n)}.$$

Пользуясь леммами 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Для того чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z) = 0$$

было уравнением чебышевского типа в области D , необходимо и достаточно, чтобы определитель $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n)$ фундаментальной системы функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$ был отличен от нуля для любых попарно различных $z_1, \dots, z_n \in D$.

Назовем линейное однородное дифференциальное уравнение локально чебышевского типа в области D , если для любой точки z из области D найдется окрестность этой точки, в которой фундаментальная система функций образует систему Чебышева.

Теорема 6. Для того чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z) = 0 \quad (36)$$

было локально чебышевского типа в области D , необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $V(y_1, \dots, y_n; z) \neq 0, \forall z \in D$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $V(y_1, \dots, y_n; z) \neq 0, \forall z \in D$. Ясно, что

$$\lim_{z_1, \dots, z_n \rightarrow z} \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = \tilde{V}(y_1, \dots, y_n; z). \quad (37)$$

Возьмем в области D любую точку ξ . Согласно (35), существует такая окрестность $O(\xi)$ точки ξ , в которой $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) \neq 0, \forall z_0, \dots, z_n \in D$. Но тогда, по теореме 8, следует, что уравнение (34) является чебышевского типа в области $O(\xi)$. Так как точка ξ была выбрана произвольным образом, то достаточность установлена.

Необходимость. Пусть уравнение (36) является локально чебышевского типа в области D . Согласно свойству 3, функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$ не могут иметь общего корня в области D . Возьмем в области D любую точку ξ и ее окрестность $O(\xi)$. В этой окрестности функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$ образуют систему Чебышева. Значит, хотя бы одно из чисел $y_1(\xi), \dots, y_n(\xi)$ не равно нулю. Пусть это будет число $y_1(\xi)$. Окрестность $O(\xi)$ подберем такую, чтобы $y_1(z) \neq 0$ в $O(\xi)$. Предположим, что $V(y_1, \dots, y_n; \xi) = 0$. Система уравнений $c_1 y_1^{(k)}(\xi) + \dots + c_n y_n^{(k)}(\xi) = 0, k = 0, 1, \dots, (n-1)$ имеет ненулевое решение $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$. Тогда обобщенный многочлен $P(z) = \tilde{c}_1 y_1(z) + \dots + \tilde{c}_n y_n(z)$ имеет в точке ξ корень, кратность которого не менее n . Функция $f(z) = \frac{P(z)}{y_1(z)}$ также имеет корень ξ той же кратности. Отсюда следует, что внутри окрестности $O(\xi)$ существует такая окрестность $O_1(\xi)$, что функция $f(z)$ принимает достаточно малое по модулю значение s не менее

чем в n попарно различных точках z_1, \dots, z_n . Таким образом, многочлен $P(z; s) = (\tilde{c}_1 - s)y_1(z) + \tilde{c}_2 y_2(z) + \dots + \tilde{c}_n y_n(z)$ имеет в окрестности $O_1(\xi)$ не менее n корней. Но тогда система функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$ не является локально чебышевского типа в области D . Полученное противоречие доказывает необходимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука. – 1973. – 552 с.
2. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М. : Наука. – 1975. – 568 с.
3. Смирнов, В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. – М. : Наука. – 1964. – 439 с.
4. Кирьяцкис, Д. О некоторых свойствах аналитических функций, образующих систему Чебышева / Д. Кирьяцкис // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. – 2011. – № 2 (111). – С. 5–14.
5. Кирьяцкис, Д. Об одной чебышевской системе рациональных функций / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. – Смоленск, 2005. – С. 131–132.
6. Кирьяцкис, Д. О системе Чебышева в расширенной комплексной плоскости / Д. Кирьяцкис, Э. Кирьяцкий // IX Белорусская математическая конференция : тезисы докладов. – Гродно, 2004. – С. 34–35.
7. Бессмертных, Г.А. О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г.А. Бессмертных, А.Ю. Левин // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 144. – № 3. – С. 471–474.
8. Krein, M. *Studia Math.* / M. Krein, D. Milman, 9, 133 (1940).
9. Kim, W. On a theorem of Pokorny / W. Kim // *Prof. Amer. Math. Soc.* 1969. – Vol. 23, № 9. – P. 343–346.
10. Kim, W. The schwarzian derivative and multivalence / W. Kim // *Pacific J. Math.* – 1969. – Vol. 31. P. 707–724.
11. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд // М. : Наука. – 1967. – 376 с.
12. Ибрагимов, И.И. Методы интерполяции функции и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. – М. : Наука. – 1971. – 519 с.
13. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.Ф. Федорюк, М.И. Шабунин – М. : Наука. – 1982. – 488 с.
14. Гончаров, В.А. Теория интерполирования и приближения функций / В.А. Гончаров. – М. : Наука. – 1954. – 328 с.

D. Kirjackis. About Linear Homogeneous Differential Equation and Chebyshev System

In present paper we study the properties of a homogeneous linear differential equation of n -th order fundamental system of solutions of which is a system of Chebyshev. In this connection we consider a class of functions analytic in the circle, each of which has n zeros in this circle. For functions of this class the estimates for the moduli of derivatives are established. The apparatus of divided differences is used. We also give some properties of Chebyshev systems.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.02.2012

УДК 004.6

А.А. Козинский, А.А. Рыжков

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТНОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ ОБЩЕСТВЕННОГО ПИТАНИЯ

Статья посвящена описанию модуля для выполнения калькуляционного учёта. Указанный модуль входит в состав автоматизированной системы управления предприятием общественного питания. Основными этапами разработки являются: изучение предметной области; разработка объектной модели; реализация объектов, интерфейса, связей; тестирование и внедрение. Модель представлена объектами: Продукт, Сырье, Калькуляция, ПродуктыКарты, Наряд заказ, Накладная, Тип операции, Проводки. Перечисленные объекты являются узлами иерархической схемы. Дополнительно приведён программный код реализации класса «Заборный лист». Актуальность задачи объясняется значительным объёмом работ, эффективность которых зависит от степени их автоматизации на основе новых информационных технологий.

Введение

На протяжении длительного времени один из авторов разрабатывает и сопровождает программное обеспечение для предприятий общественного питания (ПОП). Интерес к задаче вызван прежде всего тем, что значительный объём работ в указанной отрасли выполняется простейшими вычислительными средствами без применения компьютера. Рассматриваемые предприятия чаще всего могут быть отнесены к субъектам мелкого и среднего бизнеса. Такая специфика возлагает на менеджеров ПОП большой объём работ, эффективность которых может быть повышена за счёт внедрения систем автоматизации на основе новых информационных технологий [5].

В статье описан один из компонентов системы управления ПОП, предназначенный для автоматизации калькуляционного учёта.

Описание объектной модели

Элементом калькуляционного учёта является ведение документооборота [3] для контроля движения материальных ценностей между подразделениями ПОП: склад-цех/кухня-столовая. Форма калькуляционной карты представлена на рисунке 1.

На первом этапе управления предприятием экономист составляет калькуляционную карточку, в которой фиксирует затраты сырья, входящего в готовый продукт (блюдо), учитывает возможные замены сырья (в соответствии с технологией приготовления, наличием на складе и др.). Результатом первого этапа является информация о готовом изделии (состав, стоимость, расход блюд и др.). Данный этап получил название «Калькуляционный учёт». Дополнительная функция калькуляционного учёта – получение наряда-заказа. Наряд-заказ содержит сведения о количестве сырья для изготовления указанного числа порций. Другими задачами калькуляционного учёта являются получение технологической карточки, меню различных форм и т.д. Для сопровождения калькуляционного учёта необходимо ведение ряда специфических справочников: групп затрат, сборников блюд, сырья и продуктов, возможных технологических замен и т.д.

Результат анализа информации для калькуляционного учёта представлен объектной моделью объектов, имеющих иерархическую структуру. Иерархическая структура является математической моделью [4] предметной области «Калькуляционный учёт».

Утверждаю: Директор		15/4/2012	
Предприятие Склад		Норма выхода 1/50	
Калькуляционная карточка № 565			
Наименование изделия Бутерброд "Аппетитный"			
Выпуск в соответствии со сборником			
Наименование рецептуры N6сббелбл			
Наименование сырья	Норма	Цена	Сумма
Сыр российский.	160	1289	206240
Яйцо	50	69	34500
Майонез	100	1504	150400
Чеснок	380	774	294120
Праснак Оршанский	200	141	28200
		Итого	713460
Цена блюда			7135
Цена блюда с наценкой (Наценка 50%)			10701,9
Продажная цена			10700
	Экономист по ценам	_____	
	Повар 6 разряда	_____	

Рисунок 1 – Форма калькуляционной карты

Модель включает описание таких объектов, как Сырьё, Продукт, Карточка и др. Например, объект Сырьё инкапсулирует компоненты для описания свойств сырья, получаемого по накладным. Сырьё имеет свой собственный номенклатурный номер товара (ННТ). При необходимости описания нового экземпляра объекта Сырьё формируется его связь с экземпляром Продукт (рисунок 2).

Приведём краткое описание объектов модели.

Продукт. Объект Продукт может включать несколько экземпляров объекта Сырьё, имеющих схожие характеристики. Степень схожести определяется технологией приготовления. Экземпляры объекта Продукт используются для создания экземпляров объекта Калькуляция товара.

Калькуляция. Содержит сведения о товаре, производимом организацией. Этот объект включает в себя характеристики: код, наименование, группа товаров, выход, норма (расход сырья на установленное нормой количество продукции), цена изделия.

ПродуктыКарты. Основная информация данного класса – количество расходуемого продукта на установленное нормой количество продукции, указанной в карточке.

Наряд заказ. Это задание на изготовление товара и расход сырья. На основе Наряда заказа формируется требование на склад в виде расходной и приходной накладных.

Накладная. Подтверждает движение материальных ценностей (приход/расход склад-цех/кухня-столовая.)

Тип операции. Содержит сведения о типовых операциях, например, приход, расход, приход «розница», «отпуск на сторону».

Проводки. Каждая операция подтверждается проводкой, в которой указываются дополнительные сведения о распределении денежных средств.

Совокупность данных для калькуляционной карты представлена объектной иерархической моделью (рисунок 2).

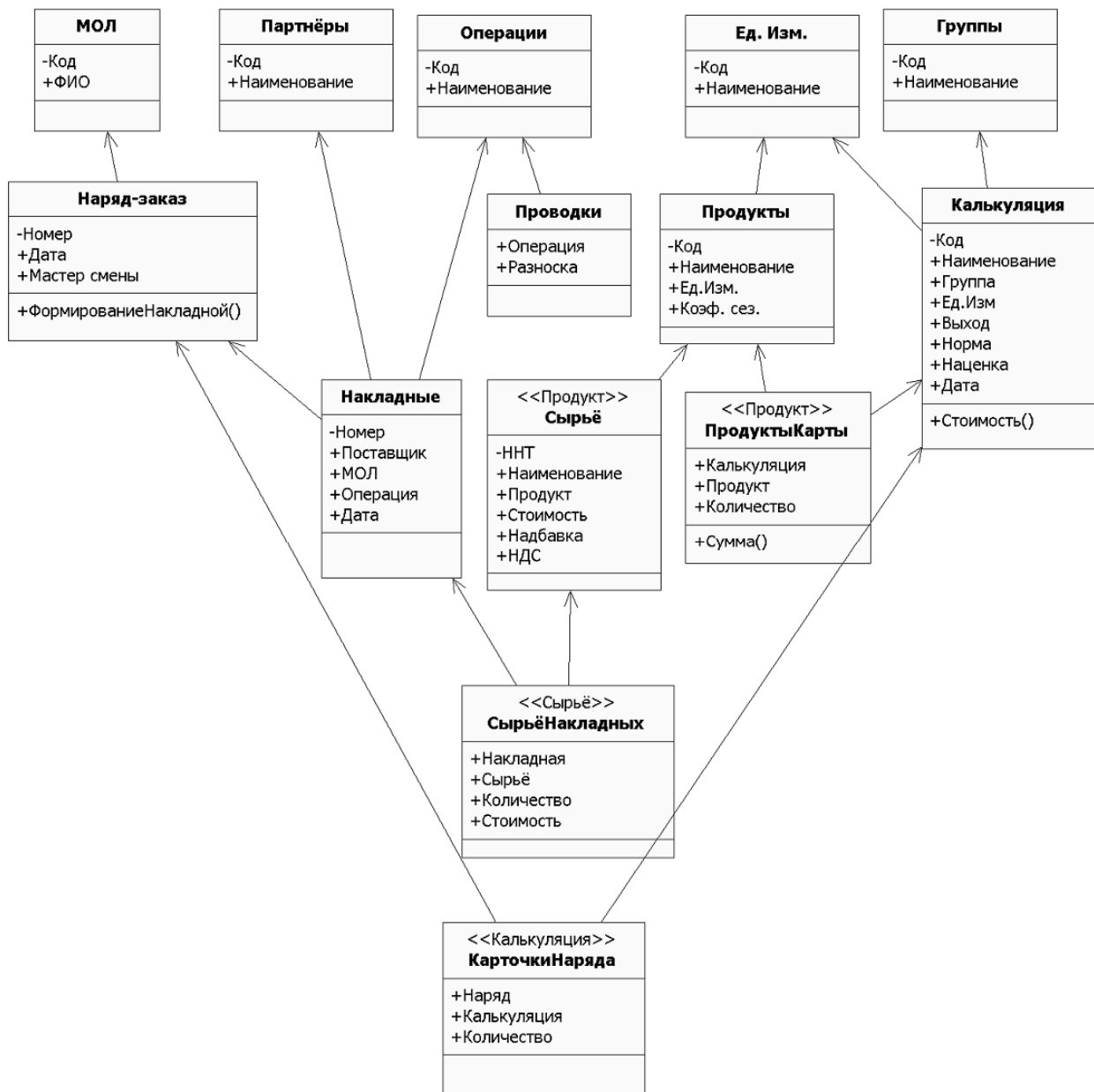


Рисунок 2 – Фрагмент объектной модели данных системы управления ПОП

Приведенная иерархическая модель положена в основу реализации классов, составляющих основу модуля калькуляционного учёта. На рисунке 2 представлены как внутренние классы модуля, так и внешние. К внешним классам относятся Сырьё, Накладные, СырьёНакладных, Партнёры, Операции, Проводки.

Реализация объектной модели

Объектная модель, представленная выше (на рисунке 2), описывает информационные компоненты и логические связи между ними. На основе информации, представленной в описанных классах, формируется программный код реализации модулей автоматизированной системы. Ниже приведены стандартная форма «Дневной заборный лист» (рисунок 3) и фрагмент программного кода, реализующего эту форму.

кафе "Встреча", г. Минск, ул. Семенова, 10 12 (организация, адрес)
кухня (структурное подразделение(отправитель))
Поставщик (структурное подразделение(получатель))

ДНЕВНОЙ ЗАБОРНЫЙ ЛИСТ от 15.04.12

Материально ответственное лицо ЭКСПЕДИЦИЯ КОНДИТЕРСКОГО ЦЕХА

Код	Наименование	Единица измерения	Отпущено продукции (изделий)							Возвращено продукции (изделий)	Всего продукции (изделий)
			Время отпуска, ч, мин								
			9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00		
1429	Бабка картофельная с грибами	ШТ.	1	3		1		1	1		6
443	Антрекот с яйцом	ШТ.	3			1					5
ИТОГО			4	3	0	2	0	1	1	0	11

Всего за день _____ одиннадцать _____ натура
(количество прописью)

на сумму _____ одна тысяча пятьсот _____
(прописью)

Отпустил _____

Принял _____

Проверил _____

Рисунок 3 – Форма печати заборного листа

Фрагмент программного кода [1; 2] формы «Заборный лист» (рисунок 3) реализующей совокупность объектов (рисунок 2), приведен ниже:

```

Class KLK.Zabor Extends %Persistent [ ClassType = persistent, ProcedureBlock ]
{
//Номер карточки
Property NomK As %Integer;
//Наименование храниться
Property Name As %String;
//Код единицы измерения
Property NomKEI As %Integer;
//Наименование единицы измерения получаем по коду
Property NameEI [ Calculated, SqlComputeCode = { s {NameEI} = ##Class(KLK.Zabor).GetIzm({NomKEI})}, SqlComputed ];
//Количество, заказанное в данное время
Property Time9 As %Integer;
Property Time10 As %Integer;
Property Time11 As %Integer;
Property Time12 As %Integer;
Property Time13 As %Integer;
Property Time14 As %Integer;
Property Time15 As %Integer;
//Возврат
Property Vozvr As %Integer;
//цена
Property Cost As %Float;
//Итоговое количество

```

```

Property Itog [ Calculated, SqlComputeCode = { s
{Itog}===Class(KLK.Zabor).GetItog({ID})}, SqlComputed ];
//Метод для получения сведений о количестве всех блюд, заказанных в 9 часов
ClassMethod GetSumTime9()
{
    s ret=0
    &sql(select sum(Time9) into :ret from KLK.Zabor)
    q +ret
}
//Метод для подсчёта итогов по блюду
ClassMethod GetItog(ID)
{
    s ret=0
    s zabor===Class(KLK.Zabor).%OpenId(ID)
    s ret = zabor.Time9 + zabor.Time10 + zabor.Time11 + zabor.Time12 + zabor.Time13
+ zabor.Time14 + zabor.Time15 - zabor.Vozvr
    q +ret
}
//Метод для подсчёта итогов по всему заборному листу
ClassMethod GetItogo()
{
    s ret = 0
    s zabor=$O(^KLK.ZaborD(""))
    while zabor=""
    {
        s kol = Class(KLK.Zabor).GetItog(zabor)
        s cost=0
        &sql(select cost into :cost from KLK.Zabor where id=:zabor)
        w kol," ",cost,!
        s ret = ret + (cost*kol)
        s zabor=$O(^KLK.ZaborD(zabor))
    }
    q +ret
}
//Метод для получения имени единицы измерения по её коду
ClassMethod GetIzm(NIzm)
{
    i NIzm=""
    { s Izm=$LG(^["KSU"]KSU.SEDID(NIzm),2)}
    else
    { s Izm="" }
    q Izm
}
}
}

```

На последующих этапах управления ПОП организуется «Складской учёт» и «Суммовой учёт», также включённых в состав автоматизированной системы управления.

«Складской учёт» предназначен для контроля прихода и расхода сырья и готовой продукции. Для подсчёта прибыли или убытков используется суммовой учёт.

Заклучение

Основными этапами проектирования автоматизированной системы управления предприятием общественного питания являются следующие: изучение предметной области; разработка объектной модели; реализация объектов, интерфейса, связей; тестирование и внедрение.

Выше нами представлено описание некоторых элементов автоматизированной системы на примере модуля для калькуляционного учёта. Модуль включает объекты: Продукт, Калькуляция, ПродуктыКарты, Наряд заказ и др. Описание объектов позволило реализовать программный код модуля. Автоматизированная система внедрена на предприятиях общественного питания городов Брест, Каменец, Пружаны, Столин и др. В настоящее время выполняется сопровождение автоматизированной системы управления предприятиями общественного питания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. InterSystems Caché – высокопроизводительная объектная система управления базами данных [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.intersystems.ru/cache/>. – Дата доступа: 20.12.2010.
2. Кирстен, В. СУБД Cache. Объектно-ориентированная разработка приложений : учеб. курс / В. Кирстен [и др.] – СПб. : Издат. дом «Питер», 2001. – 384 с.
3. Бухгалтерская система – Википедия / [http://ru.wikipedia.org/wiki/ Бухгалтерская_программа](http://ru.wikipedia.org/wiki/Бухгалтерская_программа).
4. Козинский, А.А. Модели данных и системы управления базами данных : учеб.-метод. пособие / Козинский А.А. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 51 с.
5. Павлюковец, Н.П. Информационные системы и технологии в экономике / Н.П. Павлюковец [Электронный ресурс] http://nc.ufeі.ukrsat.com/Kyrсі%202004/tezi/images_tezi/084_.htm.

A. Kazinski, A. Ryjkov. Program Realization of the Object Model of Data for the System of Management of the Enterprise of Public Catering

The article is devoted to the description of the module to perform the calculation method of accounting. The module is included in the automated control system of the enterprise of public catering. The main stages of the development are: the study of the subject area; development of the object model; the implementation of objects, interface, links, testing and implementation. The model presented objects: the Product, Raw materials, Calculation, Products of Calculation, Purchase order, Invoice, Type of operation, Wiring. The listed objects are nodes of a hierarchical scheme. Additionally shows the code implementation class «a Fence sheet». The urgency of the problem is explained by the significant volume of works, the efficiency of which depends on their degree of automation on the basis of new information technologies.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 27.04.2012

УДК 517-518.948

В.М. Мадорский

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассматриваются одношаговые итерационные процессы для приближенного решения нелинейного операторного уравнения в пространстве R^n . Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения с «плохого» начального приближения. Локальная скорость сходимости процессов – квадратичная.

В работах [1; 2] для решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

применяется следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается СЛАУ для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), \beta_0 \in [1e-3, 1e-1],$$

$f'(x_n)$ – производная Фреше оператора $f(x_n)$ на элементе x_n .

Шаг 2. Производится уточнение исходного вектора x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n.$$

Шаг 3. Проводится проверка на качество полученного уточнённого вектора x_{n+1} : если $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon, \varepsilon \ll 1, \varepsilon$ – параметр останова, то выходим из просчётов, иначе

Шаг 4. Проводится пересчёт шаговой длины β_{n+1} по тем или иным формулам [2] и переход на шаг 1. Пересчёт шаговой длины связывался с поведением норм невязок на соседних (или близких) шагах. В связи с тем, что информация о поведении итерационного процесса содержится не только в нормах невязок, но и в нормах поправок на соседних (или близлежащих) шагах, возникает вопрос о том, чтобы поведение шаговых длин β_{n+1} учитывало не только изменение норм невязок, но и поведение норм поправок в процессе уточнения приближенного решения.

Пусть, как обычно при рассмотрении квазиньютоновских процессов, оператор f удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^2, \|f''(x)\| \leq K \forall x \in D, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B \forall x \in D. \quad (2)$$

Для решения уравнения (1) применяем итерационный процесс:

до начала цикла по начальному вектору x_0 и начальной шаговой длине β_0 находим Δx_0 , решая СЛАУ $f'(x_0)\Delta x_0 = -f(x_0)$, находим $x_1 = x_0 + \beta_0 \Delta x_0$ и входим в цикл.

Шаг 1. Проверяем выполнимость условия $\|f(x_1)\| \leq \varepsilon$. Если это условие выполняется, то конец просчётов, иначе

Шаг 2. Решаем СЛАУ $f'(x_1)\Delta x_1 = -f(x_1)$, из которой находим вектор Δx_1 .

Шаг 3. Осуществляем пересчёт шаговой длины по формуле:

$$\beta_1 = \min\left(1, \frac{\beta_0 \|\Delta x_0\| \|f(x_0)\|}{\|\Delta x_1\| \|f(x_1)\|}\right).$$

Шаг 4. Находим $x_2 = x_1 + \beta_1 \Delta x_1$, устанавливаем

$x_0 := x_1, x_1 := x_2, \|\Delta x_0\| := \|\Delta x_1\|, \beta_0 := \beta_1$ и переходим на шаг 1.

Доказательство сходимости итерационного процесса шаг 1 – шаг 4 опирается на теорему о среднем для дважды непрерывно дифференцируемых операторов и на способ определения шаговой длины β_{n+1} . Докажем, при каких условиях можно рассчитывать на релаксационность процесса шаг 1 – шаг 4.

Из теоремы о среднем и способе определения шаговой длины следует оценка:

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \\ &\leq \|f(x_n) - \beta_n f(x_n)\| + 0.5K\beta_n \sqrt{\beta_n} B \sqrt{B} \|f(x_n)\| \sqrt{\|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\|} = \\ &= (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + 0.5KB \sqrt{B} \beta_n \|f(x_n)\| \beta_n \sqrt{\|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\|} = \\ &= (1 - \beta_n (1 - 0.5KB \sqrt{B} \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\|)) \|f(x_n)\| = \\ &= (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_n = 0.5KB \sqrt{B} \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\|$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

Из способа определения шаговой длины следует справедливость соотношения $\beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\| \cdot \|\Delta x_{n+1}\| = \beta_n \|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\|$, пока

$$\beta_i \leq 1, i \geq n + 1. \quad (4)$$

Если $\varepsilon_0 = 0.5KB \sqrt{B} \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| \cdot \|\Delta x_0\| < 1$, то из (4) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1, q_i < 1$.

Из оценки (3) индуктивно имеем

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\|, q_i < 1. \quad (5)$$

Покажем, что все $\beta_i \rightarrow 0$, откуда будет следовать, что все $q_i \rightarrow 1$. Из (4), (5) имеем:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\beta_{i-1} \|f(x_{i-1})\| \cdot \|\Delta x_{i-1}\|}{\|f(x_i)\| \cdot \|\Delta x_i\|} \geq \frac{\beta_0 \|f(x_0)\| \cdot \|\Delta x_0\|}{B \|f(x_i)\|^2} \geq \\ &\geq \frac{\beta_0 \|\Delta x_0\|}{(\prod_{n=0}^{i-1} q_n) B \|f(x_0)\|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что $q_i < 1$ и $q_i \rightarrow 1$.

В связи с вышеизложенным имеем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_{n+1})\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$, генерируемая итерационным процессом шаг 1 – шаг 4, сходится к решению x^* уравнения (1), если это решение существует в D . Перейдя к пределу в (6) при $i \rightarrow \infty$, в силу (7) получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_i = +\infty$, откуда в силу определения шаговой длины (6) и (7) следует, что существует номер k , что для всех $i > k$ $\beta_i := 1$.

Таким образом, после того, как шаговая длина становится равной единице, итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с квадратичной скоростью сходится к x^* . Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть в интересующей нас области D существует x^* – решение уравнения (1). Если оператор f удовлетворяет условию (2) и $\varepsilon_0 < 1$. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Если в качестве шаговой длины использовать формулу

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\beta_n \|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|}\right), \quad (8)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|} \cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2,$$

то будет выполняться характеристическое равенство (4) и справедлива

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с шаговой длиной β_{n+1} , определяемой формулой (8) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1).

Если уточнение очередного приближенного вектора проводится по формуле

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n, \quad (9)$$

а пошаговая длина находится из соотношения

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n \|\Delta x_n\|^2 \|f(x_n)\|^2}{\|\Delta x_{n+1}\|^2 \|f(x_{n+1})\|^2}\right), \quad (10)$$

то справедлива

Теорема 3. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1). Если оператор f удовлетворяет условию (2) и $\varepsilon_0 = 0.5KB\sqrt{B}\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\|\|\Delta x_0\| < 1$, тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с учетом (9), (10) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Пусть в качестве шаговой длины используется формула:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\|^2 \|f(x_n)\|^2}{\beta_n \|\Delta x_{n+1}\|^2 \|f(x_{n+1})\|^2}\right), \quad (11)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\|}{\|\Delta x_{n+1}\| \|f(x_{n+1})\|} \cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2,$$

тогда справедлива

Теорема 4. Пусть выполняется условие теоремы 3. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с учётом (9) и шаговой длиной (11) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Рассмотренные выше итерационные процессы являлись нерегуляризованными, то есть аргіогі предполагалось, что линейная система, решаемая на каждом шаге вычислительного процесса, являлась корректной задачей. Для того, чтобы избавиться от этого обременительного условия, на шаге 2 рассматривается регуляризованная задача относительно поправки:

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 E + (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f'(x_n))\Delta x_n = \\ & = -(\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f(x_n), \alpha \ll 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Задачу (12) приведем к виду:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)^{-1}\Delta x_n - f(x_n). \quad (13)$$

Здесь $\overline{f'(x_n)}$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Используя теорему о среднем и подставляя в неё вместо $f'(x_n)\Delta x_n$ соотношение (13), имеем:

$$\begin{aligned} & \|f(x_{n+1})\| \leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \\ & \leq (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 B\|\Delta x_n\| + 0.5AC\|f(x_n)\|\beta_n\sqrt{AC} \cdot \\ & \cdot \sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|} \cdot \|\Delta x_n\| = (1 - \beta_n(1 - \beta_n)\|f(x_n)\|) \cdot \|\Delta x_n\| \alpha B - \\ & - 0.5KAC\sqrt{AC}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|} \cdot \|\Delta x_n\| \|f(x_n)\| = (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n))\|f(x_n)\| = \\ & = q_n\|f(x_n)\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использованы оценки

$$\left\| \left[\alpha\beta_n\|f(x_n)\|^2 E + (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)f'(x_n) \right]^{-1} \right\| \leq A, \quad (15)$$

$$\|(\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E)^{-1}\| \leq B, \quad (16)$$

$$\|\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n\|f(x_n)\|E\| \leq C. \quad (17)$$

$$\varepsilon_n = \alpha B \beta_n \|f(x_n)\| \cdot \|\Delta x_n\| + 0.5KAC\sqrt{AC}\sqrt{\beta_n\|f(x_n)\|} \cdot \|\Delta x_n\|.$$

$$q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Из оценки (14) индуктивно имеем $\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\|, q_i < 1$.

Если $\beta_0, \|f(x_0)\|$ и $\|\Delta x_0\|$ таковы, что $\varepsilon_0 < 1$, то из способа определения следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1, i \leq n+1$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в теореме 1, позволяют утверждать, что $\beta_i \rightarrow 0, q_i \rightarrow 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_{n+1})\| = 0$, а так же существует номер $k \in N$, что, начиная с номера $i \geq k$, все $\beta_i := 1$.

Таким образом справедлива

Теорема 5. Пусть в области D имеют место оценки (15)–(17) и $\varepsilon_0 < 1$. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 4 с поправкой Δx_n , определённой по формуле (12), со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Доказательство теоремы 5 вполне аналогичны доказательству теоремы 1 и опирается на теорему о среднем для операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного метода ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Вычислительная математика и вычислительная физика. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 846–856.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.

V.M. Madorski. About some New Applications to Construction Halflocal Iterative Processes

The paper is concerned with one step iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the space of R^n . The processes converge to exact solution of the operator equation from the “bad” initial approximation. The local speed of convergence of the processes is square.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.03.2012

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук**ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ИТЕРАЦИОННЫХ
ПРОЦЕДУРАХ РЕШЕНИЯ
ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако, предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, x_0 = 0, k \in N. \quad (2)$$

Предполагается существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1}y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т. е. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

В работе [1] для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближённой правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности. Эта априорная оценка оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова, аналогичным [2–4; 6].

2. Правило останова по невязке

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$.

Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n} \right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2k(n\alpha)^{1/k}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s \leq s_0, \quad s_0 = \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряжённого оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n}$ и $\left| \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^2}{1 + \alpha^2\lambda^{2k}} \right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$, то

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \text{ Из (6) имеем}$$

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0 \text{ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, } (E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \text{ Лемма 1 доказана.}$$

Имеет место

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{s/k} \|A^s(E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Доказательство.

Так как верно (8), то

$$n^{s/k} \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leq n^{s/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{s/k} \gamma_s n^{-s/k} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha e}\right)^{s/k}$.

Воспользуемся теоремой Банаха–Штейнгауза [5, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n = 1, 2, \dots$, ограничены не зависящей от n постоянной.

Возьмём в качестве плотного подмножества в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем:

$$\begin{aligned} n^{s/k} \|A^s(E - Ag_n(A))v\| &= n^{s/k} \|A^{s+1}(E - Ag_n(A))\omega\| \leq \\ &\leq n^{s/k} \left(\frac{s+1}{2k\alpha e}\right)^{(s+1)/k} n^{-(s+1)/k} \|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{-1/k} \|\omega\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \gamma_0 \|v_0\|$, $\gamma_0 = 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \rightharpoonup v$, ($p \in N' \subseteq N$), тогда $Av_p \rightharpoonup Av$, ($p \in N'$). Но по условию $\omega_p = Av_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку, нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0) = (v_p, v_0) - (v_p, Ag_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = \\ &= (v_p, v_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)v_0) \rightarrow (v, v_0) = 0, \text{ так как } \omega_p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty, v = 0 \text{ и по условию} \end{aligned}$$

(5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 2kn_p^{1/k} \alpha^{1/k} \leq 2k\bar{n}^{-1/k} \alpha^{1/k}$. Следовательно, $\|v_p\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности

υ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\upsilon_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

По индукции легко показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} \right] y_\delta$.

Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем:

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/k} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2kn^{1/k} \alpha^{1/k} \delta, \quad (13)$$

$$\|(E - Ag_n(A))\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/k}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$ или

$$(m-1)^{1/k} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (\text{так как из (12) } \sigma_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty). \quad \text{Если при этом}$$

$m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя (9), получим:

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2km^{1/k} \alpha^{1/k} \delta \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем

$$\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0. \quad \text{Отсюда по лемме 3 получаем, что } (E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2km^{1/k} (\delta_n) \alpha^{1/k} \delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)} \right\}^{1/k} \delta. \quad (17)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Так как } x = A^s z, \quad s > 0, \text{ то } \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \\ &= \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2(m-1)}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^{m-1}} dE_\lambda z \right\| \leq (s+1)^{(s+1)/k} [2k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)/k} \|z\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{(s+1)/k} [2k(m-1)\alpha e]^{-(s+1)/k} \|z\|$, откуда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|A^s(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (\text{см. (15)}). \end{aligned}$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2km^{1/k} \alpha^{1/k} \delta \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)} \right\}^{1/k} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$ и, как следует из [3], он оптimalен в классе задач с истокопредставимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка $s > 0$ истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оп-

тимальный порядок погрешности. Но даже, если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечива-ет, сходимостъ метода, т. е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брэсцкага ўн-та. Сер.4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.
2. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.
5. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
6. Вайникко, Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. The a Rule Stop in Iteration Procedures for Solving Operator Equations

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self-conjugate operator the implicate iteration method is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 07.03.2012

УДК 517.955.8

П.Ф. Самусенко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В работе построено асимптотическое решение первой краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с вырождением.

Введение

Исследованию возможности применения метода Фурье для решения краевых задач математической физики посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных математиков. При этом до середины XX ст. в основном рассматривались указанные задачи с постоянными коэффициентами, что существенным образом упрощало их решение. Первые наиболее общие результаты для систем с переменными коэффициентами были получены О.А. Ладыженской, а именно: были установлены достаточные условия существования и единственности классического и обобщенного решения основных краевых задач в линейном случае. При этом обосновано применение метода Фурье для их решения [1]. Аналогичные результаты о существовании и единственности решений соответствующих задач для сингулярно возмущенных уравнений получены О.А. Олейник.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для линейной сингулярно возмущенной гиперболической системы

$$\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x, t) u, \quad t \in [0; T], \quad x \in [0; L], \quad (1)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = u(L, t, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(x, t)$ – квадратные матрицы 2-го порядка, $u(x, t, \varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, причем матрица $B(t)$ вырождена на отрезке $[0; T]$. Такие системы уравнений ранее не рассматривались.

По постановке задача близка к исследованиям Ю.А. Митропольского и Г.П. Хоми регулярно возмущенных квазилинейных и нелинейных уравнений гиперболического типа [2]. С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиль при решении первой краевой задачи для гиперболических уравнений с медленно меняющимися коэффициентами использовали метод Фурье [3]. При этом вопрос о сходимости соответствующих рядов и возможности их почленного дифференцирования оставался открытым.

Классическое решение первой краевой задачи

Допустим, что выполняются условия:

1. $A(t)$, $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $C(x, t) \in C^\infty(\bar{D})$, $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$.
2. $\varphi(x) \in C^4[0; L]$, $\psi(x) \in C^4[0; L]$.

3. $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(L) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = \psi^{(2k)}(L) = 0$, $k = 0, 1$.
4. Пучок матриц $A(t) - \lambda B(t)$, регулярный для всех $t \in [0; T]$, имеет один конечный и один бесконечный элементарный делитель.
5. $\lambda_0(t) > 0$, где $\lambda_0(t)$ – собственное значение матрицы $A(t)$ относительно $B(t)$.

Покажем, что существует единственное решение задачи (1) – (3). Для этого, следуя [3], будем искать решение системы (1) в виде ряда

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(t, \varepsilon) v_s(x) \quad (4)$$

(ниже будет доказана сходимость ряда (4) и возможность его двукратного дифференцирования (в работе [3] этот вопрос не рассматривается)), где $z_s(t, \varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, а $v_s(x)$ – скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_s''(x) + \omega_s^2 v_s(x) = 0, \quad (5)$$

$\omega_s = \frac{s\pi}{L}$, с краевыми условиями $v_s(0) = v_s(L) = 0$. Тогда $v_s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \omega_s x$, $s \in N$.

Заметим, что при таком выборе постоянной, $\int_0^L v_k(x) v_s(x) dx = \delta_{ks}$,

где δ_{ks} – символ Кронекера.

Подставляя (4) в (1) с учетом (5), умножая полученное равенство на $v_s(x)$ и интегрируя обе части его по x в пределах от 0 до L , приходим к системе:

$$\varepsilon^2 B(t) z_s''(t) + \omega_s^2 A(t) z_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_{sk}(t) z_k, \quad s \in N, \quad (6)$$

где $C_{sk}(t) = \int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx$.

Из условий 1, 4 следует существование неособенных матриц $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0; T]$, та-

ких, что $P(t)B(t)Q(t) = H \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) \end{pmatrix}$ [4].

При этом $P(t)$, $Q(t) \in C^\infty[0; T]$.

Полагая $z(t, \varepsilon) = Q(t)r_s(t, \varepsilon)$ и умножая обе части системы (6) слева на $P(t)$, получим

$$\varepsilon^2 H r_s''(t) + \omega_s^2 \Omega(t) r_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t) r_k + \varepsilon^2 D_1(t) r_s + \varepsilon^2 F(t) r_s', \quad (7)$$

где $D_{0sk}(t) = P(t)C_{sk}(t)Q(t)$, $s, k \in N$, $D_1(t) = -P(t)B(t)Q''(t)$,

$$F(t) = -2P(t)B(t)Q'(t).$$

Заметим, что элементы первых строк матриц $D_1(t)$ и $F(t)$ тождественно равны нулю.

6. Пусть $\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial C(L, t)}{\partial x} = 0$, $t \in [0; T]$.

Для оценки элементов $D_{0sk}(t)$ рассмотрим подробнее структуру матрицы $C_{sk}(t)$. Пусть $\{C(x, t)\}_{ij}$ – соответствующий элемент матрицы $C(x, t)$. Тогда

$$\{C_{sk}(t)\}_{ij} = \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} v_k(x) v_s(x) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} \cos(\omega_k - \omega_s) x dx - \frac{1}{L} \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} \cos(\omega_k + \omega_s) x dx.$$

Зафиксируем $t, t \in [0; T]$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$|\{C_{sk}(t)\}_{ij}| \leq \frac{M}{(\omega_k - \omega_s)^4}, \quad i, j = 1, 2, \quad k \neq s, \quad k, s \in N,$$

причем постоянная M не зависит от k, s . В дальнейшем, если существенен только факт ограниченности, а не величина соответствующей постоянной, будем писать одну и ту же букву M .

Запишем систему (7) следующим образом:

$$\varepsilon^2 \tilde{H}r'' + \tilde{\Omega}(t)r = \varepsilon(\tilde{D}_0(t) + \varepsilon\tilde{D}_1(t))r + \varepsilon^2 \tilde{F}(t)r', \quad (8)$$

где $r(t, \varepsilon)$ – бесконечномерный вектор с компонентами $r_s(t, \varepsilon)$, $\tilde{H} = \text{diag}\{H, H, \dots\}$, $\tilde{\Omega}(t) = \text{diag}\{\omega_1^2 \Omega(t), \omega_2^2 \Omega(t), \dots\}$, $\tilde{D}_0(t)$ – бесконечная матрица, состоящая из блоков $D_{0sk}(t)$, $s, k \in N$, $\tilde{D}_1(t) = \text{diag}\{D_1(t), D_1(t), \dots\}$, $\tilde{F}(t) = \text{diag}\{F(t), F(t), \dots\}$.

Решение системы (8) будем искать в виде

$$r(t, \varepsilon) = \Pi_+(t, \varepsilon)\xi_+(t, \varepsilon), \quad (9)$$

где $\Pi_+(t, \varepsilon)$ – бесконечная матрица, а $\xi_+(t, \varepsilon)$ – бесконечномерная вектор-функция, являющаяся решением системы

$$\varepsilon \frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t, \varepsilon)\xi_+, \quad \xi_+(0, \varepsilon) = a, \quad (10)$$

a – бесконечномерный вектор, компоненты которого равны 1, $\Lambda_+(t, \varepsilon)$ – бесконечная диагональная матрица, при этом

$$\Pi_+(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \Pi_+^{(i)}(t), \quad \Lambda_+(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \Lambda_+^{(i)}(t). \quad (11)$$

Для определения матриц $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, подставим (9), учитывая (10), в систему (8). Тогда матрица при $\xi_+(t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}\Pi_+(t, \varepsilon)\Lambda_+^2(t, \varepsilon) + \tilde{\Omega}(t)\Pi_+(t, \varepsilon) - \varepsilon(\tilde{D}_0(t) + \varepsilon\tilde{D}_1(t))\Pi_+(t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \tilde{F}(t)\Pi_+(t, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \tilde{F}'(t)\Pi_+(t, \varepsilon)\Lambda_+(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{H}\Pi_+'(t, \varepsilon) + 2\varepsilon \tilde{H}\Pi_+'(t, \varepsilon)\Lambda_+(t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{H}\Pi_+(t, \varepsilon)\Lambda_+'(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Приравнивая в этой матрице коэффициенты при ε^i , $i = \overline{0, m}$, к нулевой матрице, получаем уравнения:

$$\tilde{H}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \tilde{\Omega}(t)\Pi_+^{(0)}(t) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{H}\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \tilde{\Omega}(t)\Pi_+^{(i)}(t) = \tilde{D}_0(t)\Pi_+^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t)\Pi_+^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t)(\Pi_+^{(i-2)}(t))' + \\ & + \tilde{F}'(t)\sum_{j=0}^{i-1} \Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H}(\Pi_+^{(i-2)}(t))'' - 2\tilde{H}\sum_{j=0}^{i-1} (\Pi_+^{(j)}(t))'\Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H}\sum_{j=0}^{i-1} \Pi_+^{(j)}(t)(\Lambda_+^{(i-j-1)}(t))' - \\ & - \tilde{H}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)) - \tilde{H}\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} \Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t), \quad (13) \end{aligned}$$

$i = \overline{1, m}$, $\Pi_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $k < 0$.

Докажем разрешимость матричных уравнений (12), (13). Пусть $p_{l+}^{(0)}(t)$, $l \in N$, – столбцы матрицы $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t) = \text{diag}\{0, \lambda_{1+}^{(0)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(0)}(t), \dots\}$. Тогда систему (12) можно записать следующим образом: $(\tilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \tilde{H})p_{2l+}^{(0)}(t) = 0$,

$$\tilde{\Omega}(t)p_{2l-1,+}^{(0)}(t) = 0, \quad l \in N.$$

Положим

$$\begin{aligned}\lambda_{l+}^{(0)}(t) &= i\omega_l \sqrt{\lambda_0(t)}, \quad l \in N, \quad i^2 = -1, \\ p_{2l-1,+}^{(0)}(t) &\equiv 0, \quad \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j-1} \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad j, l \in N, \\ \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j} &\equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad j \neq l, \quad j, l \in N,\end{aligned}$$

$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}$, $l \in N$, определим ниже.

По построению матрицы $\Pi_+^{(0)}(t)$ и $\Lambda_+^{(0)}(t)$ диагональные. А потому соответствующие произведения бесконечных матриц в (12) существуют и являются диагональными матрицами.

Из системы (13) получаем:

$$\begin{aligned}(\tilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \tilde{H}) p_{2l+}^{(i)}(t) &= b_{2l+}^{(i)}(t), \\ \tilde{\Omega}(t) p_{2l-1,+}^{(i)}(t) &= b_{2l-1,+}^{(i)}(t),\end{aligned}$$

$l \in N$, где

$$\begin{aligned}b_{2l+}^{(i)}(t) &= \tilde{D}_0(t) p_{2l+}^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t) p_{2l+}^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t) (p_{2l+}^{(i-2)}(t))' + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \tilde{F}(t) p_{2l+}^{(j)}(t) - \\ &\quad - \tilde{H} (p_{l+}^{(i-2)}(t))'' - 2\tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} (p_{2l+}^{(j)}(t))' \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} p_{2l+}^{(j)}(t) (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' - \\ &\quad - \tilde{H} p_{2l+}^{(0)}(t) (2\lambda_{l+}^{(0)}(t) \lambda_{l+}^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t)) - \tilde{H} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} p_{2l+}^{(k)}(t) \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t),\end{aligned}$$

$$b_{2l-1,+}^{(i)}(t) = \tilde{D}_0(t) p_{2l-1,+}^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t) p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t) (p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))' - \tilde{H} (p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))'',$$

$l \in N$, $i = \overline{1, m}$, где $p_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{1, m}$, – столбцы матрицы $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t) = \text{diag}\{0, \lambda_{1+}^{(i)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(i)}(t), \dots\}$.

Тогда

$$\begin{aligned}p_{2l-1,+}^{(i)}(t) &\equiv 0, \quad t \in [0; T], \\ \{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1} &= \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}}{\omega_j^2},\end{aligned}$$

$i = \overline{1, m}$, $j, l \in N$,

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j} = \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}}{\lambda_0(t)(\omega_j^2 - \omega_l^2)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j \neq l, \quad j, l \in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2l} \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad i = \overline{1, m}, \quad l \in N,$$

$$\begin{aligned}\lambda_{l+}^{(i)}(t) &= \frac{1}{2\lambda_{l+}^{(0)}(t) \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}} \left(\sum_{h=1}^{\infty} (\{\tilde{D}_0(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-1)}(t)\}_h + \right. \\ &\quad + \{\tilde{D}_1(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}_h + \{\tilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}'_h + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \{\tilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_h) - \\ &\quad - \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}_{2l}'' - 2 \sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}'_{2l} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_{2l} (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' - \\ &\quad \left. - \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2l} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t) \right),\end{aligned}$$

$i = \overline{1, m}$, $l \in N$.

Формулы для определения $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{1, m}$ получены при условии, что соответствующие бесконечные матрицы в системе (13) существуют. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Допустим, что $p_{l+}^{(0)}(t) \equiv const$, $t \in [0; T]$, $l \in N$. Будем считать, что пара натуральных чисел (j, l) принадлежит множеству A ($(j, l) \in A$), если $j = 2q - 1, 2q$; $l = 2r - 1, 2r$; $q \neq r$, $q, r \in N$.

По построению

$$|\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(0)}\}_k| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j - \omega_l)^4}, & (k, 2l) \in A, \\ M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, & (k, 2l) \notin A, k = 2j - 1, 2j; j, l \in N, \end{cases} \quad (14)$$

причем постоянная M не зависит от j, l .

Тогда $p_{l+}^{(1)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, для всех $t \in [0; T]$ существуют и

$$|\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j-1}| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, & (2j - 1, 2l) \in A, \\ \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2}, & (2j - 1, 2l) \notin A, j, l \in N; \end{cases}$$

$$|\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j}| \leq \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, \quad (2j, 2l) \in A, j, l \in N;$$

$$|\lambda_{l+}^{(1)}(t)| \leq M, \quad l \in N,$$

постоянная M не зависит от j, l .

Используя метод математической индукции, доказываем существование $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{2, m}$. При этом

$$|\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, & (2j - 1, 2l) \in A, \\ \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 \omega_l}, & (2j - 1, 2l) \notin A, j, l \in N; \end{cases} \quad (15)$$

$$|\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}| \leq \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, \quad (2j, 2l) \in A, j, l \in N; \quad (16)$$

$$|\lambda_{l+}^{(i)}(t)| \leq M, \quad l \in N, \quad (17)$$

$i = \overline{2, m}$; постоянная M не зависит от j, l .

Действительно, допустим, что оценки (15) – (17) верны при $i = \overline{2, k}$, $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} &= \sum_{h=1}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1, h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h = \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1, h) \in A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1, h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1, h) \notin A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1, h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h = \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1, h) \in A \\ h=2p-1, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1, h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1, h) \in A \\ h=2p, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1, h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j} = \\
 & = \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N \\ (2p-1,2l) \in A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N \\ (2p-1,2l) \notin A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \\
 & + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & |\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}| \leq K_1 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}| \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j, p \neq l}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_j - \omega_p)^4 \omega_p^2 (\omega_p - \omega_l)^4} + \right. \\
 & + \frac{1}{\omega_l^2 (\omega_j - \omega_l)^4} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j, p \neq l}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_j - \omega_p)^4 |\omega_p^2 - \omega_l^2| (\omega_p - \omega_l)^4} + \frac{1}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4} + \\
 & \left. + \frac{1}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4} \right) \leq \frac{K_2 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j - \omega_l)^4}
 \end{aligned}$$

для всех $(2j-1, 2l) \in A, j, l \in N$ (постоянные K_1, K_2 не зависят от $j, l \in N$). Если же $(2j-1, 2l) \notin A, j, l \in N$, то аналогично получаем

$$|\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}| \leq \frac{M_2 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_l}.$$

Откуда и следует (15) при $i = k + 1$. Аналогично показываем правильность оценок (16), (17).

Таким образом, по принципу математической индукции, для всех $i = \overline{2, m}, j, l \in N$ имеют место оценки (15)–(17).

Пусть $w_+(t, \varepsilon) = \Pi_+(t, \varepsilon)\xi_+(t, \varepsilon)$. Положив $\lambda_l^{(0)}(t) = -i\omega_l\sqrt{\lambda_0(t)}, l \in N, i^2 = -1$, аналогично определяем $\Pi_-(t, \varepsilon), \Lambda_-(t, \varepsilon), \xi_-(t, \varepsilon)$ и $w_-(t, \varepsilon)$.

Построим вектор-функцию

$$u^{(m)}(x, t, \varepsilon) = Q(t) \sum_{s=1}^{\infty} (w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)) v_s(x), \tag{18}$$

где

$$w_{s+}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \{w_+(t, \varepsilon)\}_{2s-1} \\ \{w_+(t, \varepsilon)\}_{2s} \end{pmatrix}, s \in N,$$

$$\{w_+(t, \varepsilon)\}_j = \sum_{l=1}^{\infty} \{\Pi_+(t, \varepsilon)\}_{jl} \{\xi_+(t, \varepsilon)\}_l, j = 2s-1, 2s, s \in N.$$

Такую же структуру имеет $w_{s-}(t, \varepsilon)$.

Величины $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}, l \in N$, находим из системы

$$\begin{aligned}
 & \{w_+(0, \varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2l} = \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{2j} \{a_j\}_j, \\
 & (\{w_+(t, \varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(t, \varepsilon)\}_{2l})'_{t=0} = \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{2j} \{b_j\}_j - \\
 & - \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{2j} (\{w_+(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j}),
 \end{aligned} \tag{19}$$

$l \in N$, где $\{a_i\}_j$ и $\{b_i\}_j$ – компоненты векторов $a_i = \int_0^L \varphi(x)v_i(x)dx$ и $b_i = \int_0^L \psi(x)v_i(x)dx$ соответственно, $l \in N$.

По формулам Крамера получаем

$$\begin{aligned} \{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l} &= f_1(\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}), \\ \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l} &= f_2(\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}), \end{aligned} \tag{20}$$

$l \in N$.

По построению

$$\begin{aligned} \|f_i(\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l})\| &\leq \frac{M_1}{\omega_l^4} + \varepsilon M_2 \left(|\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}| + |\{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}| + \frac{1}{\omega_l^4} + \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{\infty} \left(\frac{|\{p_{2h+}\}^{(0)}_{2h}| + |\{p_{2h-}\}^{(0)}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{\omega_h}{\omega_l} \left(\frac{|\{p_{2h+}\}^{(0)}_{2h}| + |\{p_{2h-}\}^{(0)}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{|\{p_{2h+}\}^{(0)}_{2h}| + |\{p_{2h-}\}^{(0)}_{2h}|}{\omega_l^2 (\omega_l - \omega_h)^4} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, постоянные M_1, M_2 не зависят от l .

На множествах

$$S_{l4} = \left\{ (\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}|, |\{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}|\} \leq \frac{M}{\omega_l^4} \right\}, l \in N,$$

$M < M_1$, функции $f_1(\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l})$ и $f_2(\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l})$ удовлетворяют условиям теоремы Банаха [5]. А потому для определения $\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}$ и $\{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}$ воспользуемся методом последовательных приближений. При этом

$$\|p_{2l+}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^4}, \|p_{2l-}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^4}, l \in N$$

(постоянная M не зависит от l).

Допустим, что имеют место следующие условия:

7. Компоненты $\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}, \{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}, l \in N$, решения системы (20) отличны от нуля.
- 8.

$$\begin{aligned} \{w_+(0, \varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2l-1} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_i\}_j, \\ (\{w_+(t, \varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(t, \varepsilon)\}_{2l-1})'_{t=0} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_i\}_j - \\ - \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{1j} (\{w_+(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j}), \end{aligned}$$

$l \in N$.

Замечание. Условие 8 выполняется если, например,

$$\begin{aligned} \frac{d^k \{\tilde{D}_0^{(0)}(0)\}_{2l-1, 2j}}{dt^k} &= 0, k = 0, 1; j, l \in N, \\ \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_i\}_j &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_i\}_j = 0, l \in N, \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{12} = 0. \end{aligned}$$

При таком выборе $\{p_{2l+}\}^{(0)}_{2l}$ и $\{p_{2l-}\}^{(0)}_{2l}$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике \bar{D} . При этом возможно почленное дифференцирование ряда (18)

до двух раз включительно; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно для всех $(x, t) \in \bar{D}$.

По построению $u^{(m)}(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u^{(m)}(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi(x)$.

Вектор-функция $w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (7) с точностью $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$,

$s \in N$. Заметим, что постоянная k_0 в $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$ не зависит от ε, s .

Пусть

$$r_s(t, \varepsilon) = w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon) + y_s(t, \varepsilon). \quad (21)$$

Тогда

$$\varepsilon^2 H y_s'' + \omega_s^2 \Omega(t) y_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t) y_k + \varepsilon^2 D_1(t) y_s + \varepsilon^2 F(t) y_s' + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right), \quad s \in N. \quad (22)$$

Положим

$$y_s(0, \varepsilon) = 0, \quad y_s'(0, \varepsilon) = 0, \quad s \in N. \quad (23)$$

Запишем систему (22) в координатной форме:

$$y_{s1}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(t)\}_{1j} y_{kj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right) \right), \quad (24)$$

$$\varepsilon^2 y_{s2}'' + \omega_s^2 \lambda_0(t) y_{s2} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(t)\}_{2j} y_{kj} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^2 \left(\{D_1(t)\}_{2j} y_{sj} + \{F(t)\}_{2j} y_{sj}' \right) + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right). \quad (25)$$

$s \in N$. Учитывая (23), получаем

$$y_{s2}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s} \int_0^t Y_s(t, \tau, \varepsilon) \left(\eta(\tau) y_{s2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(\tau)\}_{2j} y_{kj} + \sum_{j=1}^2 (\{D_1(\tau)\}_{2j} - \{F'(\tau)\}_{2j}) y_{sj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m-1}}{\omega_s^3}\right) \right) - (Y_s(t, \tau, \varepsilon))'_{\tau} \sum_{j=1}^2 \{F(\tau)\}_{2j} y_{sj} \right) d\tau, \quad (26)$$

$s \in N$, где

$$Y_s(t, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \sin \frac{\omega_s \psi(t, \tau)}{\varepsilon}, \quad \psi(t, \tau) = \int_{\tau}^t \sqrt{\lambda_0(\tau)} d\tau,$$

$$\eta(t) = \frac{\lambda_0''(t)}{4\lambda_0(t)} - \frac{5}{16} \left(\frac{\lambda_0'(t)}{\lambda_0(t)} \right)^2 - \text{дифференциальный инвариант [6].}$$

Допустим выполнение таких условий:

$$9. \frac{d^k \{\tilde{D}_0(0)\}_{2l-1, j}}{dt^k} = 0, \quad k = 0, 1; \quad j, l \in N.$$

$$10. \frac{Lk_1 T}{\pi^4 \sqrt{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \left(1 + 16 \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \right) \leq \frac{d}{4}, \quad d < 1, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad \text{где}$$

$$\|D_{0ss}(t, \varepsilon)\| \leq k_1, \quad \|D_{0sk}(t)\| \leq \frac{k_1}{(\omega_s - \omega_k)^4}, \quad s \neq k, s, k \in N.$$

$$11. T \sqrt[4]{\frac{\lambda_0(\tau)}{\lambda_0(t)}} |\{F(\tau)\}_{2j}| \leq \frac{d}{4}, j = 1, 2, 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Тогда для достаточно больших k_2 ,

$$k_2 > \frac{k_0 L T}{\pi(1-d) \min_{0 \leq \tau \leq t \leq T} \sqrt[4]{\lambda_0(\tau)\lambda_0(t)}},$$

оператор, определяемый с помощью (24), (26), отображает выпуклое компактное множество D_{s4} ,

$$D_{s4} = \left\{ y_s(t, \varepsilon) \in C[0; T] : \|y_s(t, \varepsilon)\| \leq \frac{k_2 \varepsilon^m}{\omega_s^4} \right\}, s \in N, \varepsilon \in [0; \varepsilon_1],$$

в себя и есть непрерывным на нем. А потому он имеет неподвижные точки на множестве D_{s4} [5]. Таким образом, система (24), (26) совместна. При этом имеют место равенства (23).

Используя метод доказательства от противного, показываем единственность найденного решения системы (24), (26) [7]. Из полученных оценок для функций $y_{si}(t, \varepsilon)$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} y_s(t, \varepsilon) v_s(x) \tag{27}$$

в прямоугольнике \bar{D} . При этом возможно почленное дифференцирование ряда (27) по t и x до двух раз включительно; полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в \bar{D} .

По построению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 B(t) \sum_{k=1}^{\infty} z_k''(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx + A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 z_k(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx \equiv \\ \equiv \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t, \varepsilon), s \in N, \end{aligned}$$

или

$$\int_0^L (\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon)) v_s(x) dx \equiv 0, s \in N,$$

где вектор-функция $u(x, t, \varepsilon)$ определяется по формуле (4).

$$\text{Положим } q(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon).$$

Рассмотрим ряд $\sum_{s=1}^{\infty} q_s(t, \varepsilon) v_s(x)$, где $q_s(t, \varepsilon) = \int_0^L q(x, t, \varepsilon) v_s(x) dx, s \in N$.

По построению $q_s(t, \varepsilon) \equiv 0, t \in [0; T], s \in N$.

Так как вектор-функция $q(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по переменной $x, x \in [0; L], (t, \varepsilon$ считаем параметрами) и $q(0, t, \varepsilon) = q(L, t, \varepsilon) = 0, t \in [0; T]$, то, продолжая нечетным способом компоненты $q(x, t, \varepsilon)$ на отрезок $[-L; 0]$, приходим к выводу, что $q(x, t, \varepsilon) \equiv 0, (x, t) \in \bar{D}$ [8].

Таким образом, вектор-функция (4) в прямоугольнике \bar{D} – решение первой краевой задачи (1) – (3), причем

$$\|u(x, t, \varepsilon) - u^{(m)}(x, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^m). \tag{28}$$

Теорема 1. Пусть $A(t), B(t) \in C^{m+3}[0; T]$, $C(x, t) \in C^{m+3}(\bar{D})$ и имеют место условия 2–11. Тогда существует число ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача (1)–(3) в прямоугольнике \bar{D} имеет единственное решение (4) для которого правильна оценка (28).

Обобщенное решение первой краевой задачи

В части 2 мы построили классическое решение задачи (1)–(3). При этом условия 1–3, 6 позволяли дважды почленно дифференцировать соответствующие ряды.

Допустим теперь, что имеют место следующие условия:

12. $\varphi(x) \in C^2[0; L]$, $\psi(x) \in C^2[0; L]$;

13. $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Тогда аналогично показываем, что на множествах

$$S_{l2} = \left\{ (\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}|\} \leq \frac{M}{\omega_l^2} \right\}, l \in N,$$

система (20) имеет единственное решение $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$.

При этом $\|p_{2l+}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^2}$, $\|p_{2l-}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^2}$, $l \in N$

(постоянная M не зависит от l).

В данном случае вектор-функция $w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (7)

с точностью $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s}\right)$, $s \in N$.

14. Пусть $\frac{Lk_1 T}{\pi^4 \sqrt{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \left(1 + 4\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right) \leq \frac{d}{4}$, $d < 1$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Тогда для решения $y_{si} = y_{si}(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, системы (24), (26) имеет место оценка

$y_{si}(t, \varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon^m}{\omega_s^2}\right)$, $s \in N$.

По построению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 B(t) \sum_{k=1}^m z_k''(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx + A(t) \sum_{k=1}^m \omega_k^2 z_k(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx \equiv \\ \equiv \varepsilon \sum_{k=1}^m \left(\int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t, \varepsilon), s = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

т.е. $\int_0^L (\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon)) v_s(x) dx \equiv 0$, $s = \overline{1, m}$,

$$u_m(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m z_k(t, \varepsilon) v_k(x).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_{ms}(t, \varepsilon) v_s(x), \tag{29}$$

где

$$q_{ms}(t, \varepsilon) = \int_0^L q_m(x, t, \varepsilon) v_s(x) dx, s \in N,$$

$$q_m(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon).$$

По построению $q_{ms}(t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{1, m}$. Оценим остальные коэффициенты $q_{ms}(t, \varepsilon)$, $s \geq m+1$. Для этого заметим, что

$$q_{m+1}(x, t, \varepsilon) = q_m(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t, \varepsilon) v_{m+1}(x) - A(t) z_{m+1}(t, \varepsilon) v''_{m+1}(x)$$

Так как $q_{m+1,s}(t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{1, m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t, \varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t, \varepsilon) + \omega_{m+1}^2 A(t) z_{m+1}(t, \varepsilon)).$$

Таким образом, $\|q_{m,m+1}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_{m+1}^2}$ с постоянной M , не зависящей от m , и, вообще,

$$\text{учитывая, что } q_{m+i}(x, t, \varepsilon) = q_m(x, t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^i (\varepsilon^2 B(t) z''_{m+j}(t, \varepsilon) v_{m+j}(x) - A(t) z_{m+j}(t, \varepsilon) v''_{m+j}(x)),$$

откуда $q_{m,m+i}(x, t, \varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+i}(t, \varepsilon) + \omega_{m+i}^2 A(t) z_{m+i}(t, \varepsilon))$, $i \in N$,

получаем $\|q_{ms}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_s^2}$, $s \geq m+1$, где постоянная M не зависит от m, s .

Таким образом, ряд (29) в прямоугольнике \overline{D} сходится абсолютно и равномерно к функции $q_m(x, t, \varepsilon)$ [9].

Поскольку $u_m(x, t, \varepsilon)$ есть решение задачи

$$\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} = A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t, \varepsilon) v_s(x),$$

$$u_m(0, t, \varepsilon) = u_m(L, t, \varepsilon) = 0,$$

$$u_m(x, 0, \varepsilon) = \varphi_m(x), \quad \frac{\partial u_m(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi_m(x), \quad \text{где } \varphi_m(x) = \sum_{s=1}^m a_s v_s(x), \quad \psi_m(x) = \sum_{s=1}^m b_s v_s(x), \text{ то вектор-}$$

функция (4) в прямоугольнике \overline{D} будет обобщенным решением задачи (1)–(3) [10].

Теорема 2. Пусть $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $C(x, t) \in C^{m+2}(\overline{D})$ и имеют место условия 4, 5, 7–9, 11–14. Тогда существует число ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача (1)–(3) в прямоугольнике \overline{D} имеет единственное обобщенное решение (4), для которого правильна оценка (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О.А. Ладыженская. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 279 с.
2. Митропольский, Ю.А. Асимптотические методы исследований квази-волновых уравнений гиперболического типа / Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома, М.И. Громьяк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. Фещенко, С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. – Киев : Наук. думка, 1968. – 248 с.
4. Шкиль, Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – Киев : Высшая школа, 1991. – 207 с.

5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
6. Павлюк, И.А. Асимптотические свойства решений неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка / И.А. Павлюк. – Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1970. – 208 с.
7. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 468 с.
8. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 656 с.
9. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
10. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М. : Наука, 1966. – 444 с.

P.F. Samusenko. Asymptotic Representation of the Solutions Singularly Perturbed System of Hyperbolic Partial Differential Equations with Degeneration

The asymptotic solution first boundary value problem for the linear singularly perturbed system of hyperbolic partial differential equations with degeneration is constructed in paper.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.01.2012

УДК 512.542

А.А. Трофимук

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМИ ПОРЯДКАМИ НЕБИЦИКЛИЧЕСКИХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ФАКТОРОВ

В работе исследована разрешимая группа G , которая обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Также оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5. Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G .

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B . Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в [1, теорема 1]. В частности, доказано, что производная длина таких разрешимых групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

В [2] исследовались разрешимые группы G , обладающие нормальными рядами, факторы которых имеют бициклические силовские подгруппы. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что фактор-группа G/N сверхразрешима; $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2, 3, 7\}'$ -холлову подгруппу. Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G .

В [3] установлено, что производная длина разрешимой группы G , силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$ не превышает 6; $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$, в частности, если силовская 3-подгруппа бициклическая, то $l_3(G) \leq 1$; $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых имеют ограничения на силовские подгруппы. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4.
2. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.
3. $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Кроме того, если G A_4 -свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p \neq 3$.

Разрешимые группы из [2] и группы, исследуемые в теореме 1, имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p -длины, а для производной длины верхние границы различны. Однако оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$ либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5.

Теорема 2. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 5.
2. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}'$ -холлову подгруппу.

Пример 1. Пусть E_{13^3} – элементарная абелева группа порядка 13^3 , а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP [4] обнаружена группа $G = [E_{13^3}][[K]SL(2,3)]$ порядка 1 423 656. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3 . Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в теореме 1 являются точными. Кроме того, с помощью компьютерной системы GAP можно построить группу $G_1 = [E_{7^3}][[K]SL(2,3)]$ порядка 222 264, обладающую теми же свойствами, что и группа G . Примеры групп G и G_1 объясняют отсутствие среди чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$ теоремы 2 простых чисел 7 и 13.

Пример 2. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 , S – экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}][[S]Q_8]$ порядка $74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, которая является A_4 -свободной группой. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 7^3 и 3^3 . Ее подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$ и производная длина равна 5. Таким образом, оценка производной длины в случае A_4 -свободной группы является точной.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6]. В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций, [6; 7]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -корадикал группы

G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathcal{F}$. Произведение $\mathcal{F}\mathcal{H} = \{G \in \mathcal{G} \mid G^H \in \mathcal{F}\}$ формаций \mathcal{F} и \mathcal{H} состоит из всех групп G , для которых \mathcal{H} -корадикал принадлежит формации \mathcal{F} . Как обычно, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}\mathcal{F}$. Формация \mathcal{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ следует, что $G \in \mathcal{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через \mathcal{N} и \mathcal{A} соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([8], лемма 9). Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метациклическая.

Лемма 2. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(4,2)$, то $H \in \{[S_3 \times S_3]Z_2, S_3 \times S_3, [E_{3^2}]Z_4, [Z_{15}]Z_4, [Z_5]Z_4, Z_3 \times S_3, Z_3 \times D_{10}, D_{10}, Z_5, Z_{15}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 3. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(5,2)$, то $H \in \{[Z_{31}]Z_5, Z_{31}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 4 ([8], лемма 10). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4 -свободна, то H метабелева.

Лемма 5 ([8], лемма 11). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3, Z_6, S_3, [Z_3]Z_4, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, Z_4 \times S_3, Z_{24}, [Z_3]Z_8, Z_{31}, SL(2,3), [SL(2,3)]Z_2, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{24}]Z_2, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2, [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4 -свободна, то производная длина H не превышает 3.

Лемма 6. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3, p)$ и $p \in \{11, 17\}$, то производная длина H не превышает 3.

Доказательство. Утверждение легко вывести с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 7 ([8], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathcal{A}^k$, когда $G \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{k-1}$.

Лемма 8 ([8], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^5$.

Кроме того, если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Пример 3. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что в группе $GL(2,5)$ существует неприводимая подгруппа H , изоморфная группе $[SL(2,3)]Z_4$ порядка 96, здесь Z_4 – циклическая группа порядка 4. Кроме того, производная длина

подгруппы H равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 1 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Пример 4. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что как в группе $GL(3,7)$, так и в группе $GL(3,13)$ существует неприводимая подгруппа H , изоморфная группе $[S]SL(2,3)$ порядка 648, здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Кроме того, производная длина подгруппы H равна 5, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 2 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Лемма 9 ([8], лемма 13). 1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. 2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in A^4$.

Пример 5. В $GL(2,5)$ существует неприводимая метабелева подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Поэтому в п. 1 леммы 9 оценка производной длины для $p=5$ является точной.

Пример 6. В $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа, изоморфная A_4 -свободной группе $[S]Q_8$, производной длины 4 и порядка 216. Здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Поэтому в п. 2 леммы 9 оценка производной длины является точной.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 10. Пусть F – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит F , но $G/N \in F$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 11 ([9], теорема I.8; [5], теорема II.3.2). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi(G) = 1$;
- 2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p ;
- 3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;
- 4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;
- 5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n,p)$.

Лемма 12. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G свободны от четвертых степеней. В частности, если силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32, то индекс каждой максимальной подгруппы группы G есть простое число, квадрат простого числа либо 8, 16, 27, 125, 1331, 4913.

Доказательство. Пусть ряд (1) является нормальным рядом группы G , факторы которого удовлетворяют условию леммы. Уплотним этот ряд до главного следующим образом. Пусть $\bar{N} = N/G_i \subseteq G_{i+1}/G_i = \overline{G_{i+1}}$ является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\bar{G} = G/G_i$. Так как \bar{G} разрешима, то \bar{N} – элементарная

абелева p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$ и содержится в силовой p -подгруппе \bar{P} группы $\overline{G_{i+1}}$. Пусть \bar{P} бициклическая. Если $p > 2$, то \bar{P} метациклическая, поэтому $|\bar{N}| = p$ или p^2 . Если $p = 2$, то $|\bar{N}| = 2, 4$ или 8 по лемме 1 [1]. Пусть \bar{P} – небициклическая подгруппа. Тогда $|\bar{N}| \leq p^3$. Заменяя в (1) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге получим главный ряд

$$1 = N_0 < N_1 < \dots < N_i < N_{i+1} < \dots < N_m = G$$

с факторами порядка p , q^2 или r^3 , где $p, q, r \in \pi(G)$.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Зафиксируем число i такое, что $N_i \subseteq M$, но $N_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G , то $N_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |N_{i+1} : N_{i+1} \cap M|$. Поскольку $N_i \subseteq N_{i+1} \cap M$,

то $|N_{i+1} : N_{i+1} \cap M| = \frac{|N_{i+1} : N_i|}{|N_{i+1} \cap M : N_i|}$ и $|G : M|$ есть простое число, квадрат простого

числа или куб простого числа.

Частный случай леммы непосредственным образом вытекает из вышеизложенного доказательства. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

1. Для этого покажем, что $G \in \mathbf{N}^4$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Так как условие теоремы наследуется всеми фактор-группами, то $G/\Phi(G) \in \mathbf{N}^4$ и $G \in \mathbf{N}^4$, так как формация \mathbf{N}^4 насыщена. Поэтому $\Phi(G) = 1$ и по индукции $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G . Так как $|F| = |G : M|$, то из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2 , либо p^3 , где p – простое число.

Пусть $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p , и $G/F \in \mathbf{A}$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По п. 1 леммы 8 фактор-группа $G/F \in \mathbf{N}^3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе H группы $GL(3, p)$. По п. 2 леммы 8 группа $G/F \in \mathbf{N}^3$. Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathbf{N}^3$. Поскольку F нильпотентна, то $G \in \mathbf{N}^4$.

2. По лемме 12 индексы максимальных подгрупп в группе G являются простыми числами, квадратами простых чисел либо кубами простых чисел. Такие группы исследовались в работе [10], где установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

3. Так как p -длина метанильпотентной группы не превышает 1, то из включения $G \in \mathbf{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p . Применим индукцию по порядку группы G . Покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [5] можно считать, что $O_p(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга

$F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа и $|F| = |G : M|$. Из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2 , либо p^3 , где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $Aut F$ группы F , порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2, 3\}$, то $Aut F = GL(n, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 8 G/F – p' -группа, т.е. $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

Пусть G является A_4 -свободной группой. Повторяя доказательство утв. 1 теоремы и используя лемму 9, несложно показать, что $G \in \text{NA}^4$. Теперь из леммы 7 следует, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Покажем, что для A_4 -свободной группы $l_2(G) \leq 1$. По лемме VI.6.9 [5] и лемме 12 можно считать, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой порядка 2^α , где $\alpha \leq 3$.

Если $|F| = 2$, то $l_2(G) \leq 1$.

Если $|F| = 4$, то $Aut(F) \cong GL(2, 2) \cong S_3$. Тогда $G/F \cong Z_3$ или $G/F \cong S_3$. Если $G/F \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F \cong S_3$, то $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4 -свободна. Противоречие.

Пусть теперь $|F| = 8$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3, 2)$. Из леммы 1 следует, что во всех случаях, кроме $G/F \cong S_3$, 2-длина не превышает 1. По теореме 4.32 [6] в группе G существует подгруппа $H = [F]Z_3$, у которой в качестве подгруппы выступает знакопеременная группа A_4 . Противоречие. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

1. Вначале докажем, что $G \in \text{NA}^4$. По индукции $G/\Phi(G) \in \text{NA}^4$. Так как NA^4 – насыщенная формация, то, по лемме 10, G – примитивная группа: $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G , $F = C_G(F)$, F – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $G = [F]M$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из группы $Aut F \cong GL(n, p)$ (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен либо p , либо p^2 , либо 2^3 , либо 2^4 , либо 2^5 , либо 3^3 , либо 5^3 , либо 11^3 , либо 17^3 .

Если $|F| = p$, то $Aut F = Z_{p-1}$ и G/F – циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathbf{A}$ и $G \in \text{NA} \subseteq \text{NA}^4$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По лемме 8, $G/F \in \mathbf{A}^4$, поэтому $G \in \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 2)$. Так как $O_2(G/F) = 1$, то из леммы 1 следует, что $G/F \in \mathbf{A}^2$ и $G \in \text{NA}^2 \subseteq \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^4$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(4, 2)$. Из леммы 2 следует, что $G/F \in \mathbf{A}^3$ и $G \in \text{NA}^3 \subseteq \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=2^5$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(5,2)$. Из леммы 3 следует, что $G/F \in A^2$ и $G \in NA^2 \subseteq NA^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=3^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,3)$. Так как $O_3(G/F)=1$, то из леммы 4 следует, что $G \in NA^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=5^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,5)$. Так как $O_5(G/F)=1$, то из леммы 5 следует, что $G \in NA^4$.

Осталось рассмотреть случаи, когда $|F|=11^3$ или $|F|=17^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(3,11)$ или $GL(3,17)$ соответственно. Из леммы 6 следует, что в каждом из случаев $G \in NA^3 \subseteq NA^4$.

Итак, $G \in NA^4$. Из леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Предположим, что $p > 19$ и $p \notin \{31, 307\}$. Используя индукцию по порядку группы, покажем, что G_p нормальна в G . Поскольку формация всех p -замкнутых подгрупп является насыщенной формацией, то по лемме 10 G – примитивная группа: $\Phi(G)=1$, $F=F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G порядка q^n для некоторого $q \in \pi(G)$ и натурального n , $F=C_G(F)$, а G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен $q, q^2, 8, 16, 32, 27, 125, 1331$ и 4913 . При $p=q$ из п. 3 теоремы 1 получаем, что G_p нормальна в G . Поэтому считаем, что $p > q$.

Пусть $|F|=q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G , этот случай исключается.

Пусть теперь $|F|=q^2$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2-q)(q^2-1)$. Поэтому, учитывая, что $p > q$, получим, что p делит $q+1$, что возможно только при $p=3$, а $q=2$. Противоречие.

Если $|F|=8$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)$, порядок которой равен $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2, 3, 7\}$, что исключается условием.

Если $|F|=16$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(4,2)$, порядок которой равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, что исключается условием.

Если $|F|=32$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(5,2)$, порядок которой равен $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2, 3, 5, 7, 31\}$, что исключается условием.

Если $|F|=27$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,3)$, порядок которой равен $2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$. Теперь $p \in \{2, 3, 13\}$, что исключается условием.

Если $|F|=125$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,5)$, порядок которой равен $2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2,3,5,31\}$, что исключается условием.

Если $|F|=1331$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,11)$, порядок которой равен $2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 19$. Теперь $p \in \{2,3,5,7,11,19\}$, что исключается условием.

Если $|F|=4913$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,17)$, порядок которой равен $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 17^3 \cdot 307$. Теперь $p \in \{2,3,17,307\}$, что исключается условием.

Итак, силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ при условии, что $p > 19$ и $p \notin \{31,307\}$.

Теперь положим $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ и покажем, что π -холлова подгруппа G_π нормальна в группе G . Так как по индукции $O_\pi(G)=1$ и класс всех π -замкнутых групп является насыщенной формацией, то G – примитивная группа по лемме 10. По лемме 11 можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F=F(G)$, которая будет элементарной абелевой p -подгруппой порядка, делящего 2^3 , 3^3 , 5^3 , 7^2 , 13^2 или 31^2 . Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$ для $p=2$ и $n \leq 5$, или $p \in \{3,5,11,17\}$ и $n \leq 3$, или $p \in \{7,13,19,31,307\}$ и $n \leq 2$. Так как $\pi(GL(n,p)) \subseteq \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ для этих значений n и p , то G/F – π' -группа.

Итак, G_π нормальна для $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$. Если p – наибольшее из π , то G_p нормальна в G по доказанному. По индукции G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5\}$. Если G A_4 -свободна, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Доказательство. Используя лемму 9 в доказательстве утв. 1 теоремы 2, получим, что $G/F \in A^3$. По лемме 7, производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
2. Monakhov, V.S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
3. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы, силовские p -подгруппы которых либо бициклические, либо имеют p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
4. The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>.

5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
6. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа, 2006.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978. – 272 с.
8. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
9. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on pure mathematics. Canberra, Australian National University. – 1979. – № 11. – 100 p.
10. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

A.A. Trofimuk. About Finite Groups with Small Orders of Nonbicyclic Sylow Subgroups of Factors

The structure of solvable group with bicyclic Sylow subgroups or Sylow subgroups of order p^3 for all $p \in \pi(G)$ in factors of a normal series is studied. The following statements hold: the nilpotent length of G is at most 4, the derived length $G/\Phi(G)$ is at most 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ and $l_p(G) \leq 1$ for all prime $p > 3$. As it appeared that if orders of nonbicyclic Sylow subgroups in factors to limit to cubes of small prime numbers $p \in \{2,3,5,11,17\}$, either 16, or 32, it is possible to keep the top estimation of derivate length $G/\Phi(G)$ is equal to 5. Here $l_p(G)$ is the p -length of G .

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 28.03.2012

УДК 513.82

А.А. Юдов, И.Н. Машилякевич

О РЕДУКТИВНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ G -ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

В работе рассматривается пространство 1R_4 – четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры 2 (пространство Минковского). Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли G – группой Ли движений пространства 1R_4 . Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности двухпараметрическую подгруппу Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Среди однородных пространств такого вида находятся все редуکتивные пространства. В алгебрах Ли этих редуکتивных пространств находятся все редуکتивные дополнения.

Введение

В работе изучается геометрия однородных пространств. Исследование таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и другие, а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте [1] и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси [2; 3]. Ю. Лумисте показал применимость редуکتивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуکتивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуکتивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуکتивных однородных пространствах. В данной работе исследуется специальный класс однородных пространств, фундаментальной группой для которых является группа Ли G движений четырехмерного псевдоевклидова пространства сигнатуры 2 – пространства 1R_4 . Рассматриваются такие однородные пространства, группа стационарности у которых двухпараметрическая. Среди таких пространств находятся все редуکتивные однородные пространства, в алгебрах Ли фундаментальных групп Ли которых находятся все соответствующие редуکتивные дополнения.

Постановка задачи и метод исследования

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства 1R_4 : $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли \bar{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \bar{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли группы Ли: $\bar{G} = \bar{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли G движений пространства 1R_4 . Все связные подгруппы Ли группы Ли G , с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4].

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуکتивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуکتивные однородные пространства вида G/G_i , где G_i – связная двух-

параметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \bar{G} и \bar{G}_i , затем находятся все двумерные подпространства алгебры Ли \bar{H} , инвариантные относительно $ad\bar{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \bar{G}_i . Эти пространства будут редуцированными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуцировано, отсюда будет следовать редуцированность однородного пространства G/G_i . При этом можно показать, что всякое редуцированное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение. Однородное пространство H/G_i называется редуцированным, если алгебра Ли \bar{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\bar{H} = m + \bar{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\bar{G}_i$, где $ad\bar{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \bar{G}_i .

Для нахождения редуцированных дополнений используем следующий способ. Пусть a_1, a_2 – базис алгебры Ли \bar{G}_i группы Ли G_i , принадлежащей группе Ли H . Рассмотрим четырехмерное векторное подпространство m алгебры Ли \bar{H} , образованное векторами b_1, b_2, b_3, b_4 , т.е. $m = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнения условия инвариантности относительно $ada_i, i=1, 2$, т.е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j] = \alpha_{j1}b_1 + \alpha_{j2}b_2 + \alpha_{j3}b_3 + \alpha_{j4}b_4, \quad j=1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m , или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ алгебры Ли \bar{H} [5], получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть например $b_j = \beta_{j5}i_5 + \dots + \beta_{j10}i_{10}$. Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ с более простыми коэффициентами β_{jk} . Для этого придется рассмотреть 15 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены четырехмерные пространства m_1, \dots, m_k , инвариантные относительно $ad\bar{G}_i$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_l и будут искомыми редуцированными дополнениями.

Нахождение редуцированных пространств H/G_i

Все двухпараметрические подгруппы Ли группы Ли H известны [4]. Запишем алгебры Ли для этих подгрупп с помощью базисов: $\bar{G}_5 = \{i_6, i_9\}$, $\bar{G}_6 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$, $\bar{G}_7 = \{i_5 - i_8, i_6\}$.

Рассмотрим оператор i_6 . Будем искать четырехмерные инвариантные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad(i_6)$. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_6 + \sigma i_9, i_7 + s i_6 + t i_9, i_8 + p i_6 + q i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-p = 0, -q = 0, s = 0, t = 0, \nu = 0, \sigma = 0, -\lambda = 0, \mu = 0$. Из первого, второго и седьмого уравнений следует, что $p = 0, q = 0, \lambda = 0$ соответственно. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.

2. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_8 + \sigma i_9, i_7 + s i_8 + t i_9, i_6 + p i_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $-\lambda^2 = -1, -\lambda\mu = 0, -\lambda\nu + s = 0, -\nu\mu + t = 0, -\lambda s + \nu = 0, -\mu s + \sigma = 0$. Из первого уравнения следует, что $\lambda = \pm 1$, тогда рассмотрим первый случай, когда $\lambda = 1$. Получим: $\mu = 0, \nu = s, t = 0, \sigma = 0$. Рассмотрим второй случай, когда $\lambda = -1$, получим $\mu = 0, \nu = -s, t = 0, \sigma = 0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_6 + p i_9\}$.

3. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6, i_{10} + \nu i_8 + \sigma i_6, i_7 + s i_8 + t i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu = 0, -\lambda^2 = -1, -\nu\mu + t = 0, -\mu s + \sigma = 0, -\lambda\nu + s = 0, -\lambda s + \nu = 0$. Из второго уравнения следует, что $\lambda = \pm 1$, тогда из первого следует, что $\mu = 0$, а из третьего, четвертого ($t = 0, \sigma = 0$) и из пятого и шестого уравнений видно, что $\nu = \pm s$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_9\}$.

4. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_9, i_8 + s i_9, i_6 + t i_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $\nu\lambda = 0, \sigma\lambda - s = 0, \nu^2 = 1, \sigma\nu = 0, -\lambda = 0, -\mu = 0$. Из третьего уравнения следует, что $\nu = \pm 1$. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$, тогда получим из первого и четвертого $\lambda = 0, \sigma = 0$ соответственно и из второго $s = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$. Получим $\lambda = 0, \sigma = 0, s = 0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6 + t i_9\}$.

5. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_6, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_6, i_8 + s i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $\sigma\lambda - s = 0, \nu\lambda = 0, \sigma\nu = 0, \nu^2 = 1, -\mu = 0, \lambda = 0$. Из четвертого уравнения следует, что $\nu = \pm 1$, а из пятого $\mu = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$, получим $\sigma = 0$, а тогда и $s = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$, получим $\sigma = 0, s = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10} + i_7, i_8, i_9\}$.

6. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu + \nu\lambda = 0, -\mu^2 + \sigma\lambda = -1, -\lambda\sigma + \nu^2 = 1, -\mu\sigma + \sigma\nu = 0$. Сложив второе и третье уравнения, получим, что $\mu = \pm\nu$. Рассмотрим первый случай, когда $\mu = \nu$. Тогда $\mu = \pm\sqrt{1 + \lambda\sigma}, \nu = \pm\sqrt{1 + \lambda\sigma}$ при условии, что $1 + \lambda\sigma \geq 0$. Рассмотрим второй случай, когда $\mu = -\nu$. Получим систему вида: $-2\lambda\mu = 0, -\mu^2 + \sigma\lambda = -1, -\lambda\sigma + \mu^2 = 1, -\mu\sigma = 0$. Рассмотрим случай 2а) $\mu \neq 0$. Тогда

да из второго уравнения системы получим $\mu = \pm 1$, из третьего $\nu = \mp 1$, а из четвертого $\sigma = 0$. Рассмотрим случай 2б) $\mu = 0$. Получаем $\sigma = -\frac{1}{\lambda}$. В итоге получим инвариантные пространства в виде:

$$\left\{ i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9 \right\}, \\ \left\{ i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9 \right\}, \left\{ i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9 \right\}.$$

7. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9 \right\}$. Система инвариантности противоречива.

8. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9 \right\}$. Система инвариантности противоречива.

9. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9 \right\}$ Система инвариантности имеет вид: $-\mu^2 + \nu \lambda = -1$, $-\lambda \mu = 0$, $-\nu \mu = 0$, $-\lambda \nu = 1$. Рассмотрим случай, когда $\mu = 0$, тогда из последнего уравнения получим $\nu = -\frac{1}{\lambda}$. В случае, когда

$\lambda = 0$, $\nu = 0$ приходим к противоречию. Получим инвариантные пространства в виде: $\left\{ i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9 \right\}$.

10. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9 \right\}$. Система инвариантности примет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\left\{ i_5, i_8, i_6, i_9 \right\}$.

11. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_{10} + \lambda i_9, i_7 + \mu i_9, i_8 + \nu i_9, i_6 + \sigma i_9 \right\}$. Система инвариантности противоречива.

12. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_{10} + \lambda i_6, i_7 + \mu i_6, i_8 + \nu i_6, i_9 \right\}$ Система инвариантности противоречива.

13. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_{10} + \lambda i_8, i_7 + \mu i_8, i_6, i_9 \right\}$ Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\left\{ i_{10}, i_7, i_6, i_9 \right\}$.

14. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_{10} + \lambda i_7, i_8, i_6, i_9 \right\}$. Система инвариантности противоречива.

15. Инвариантные пространства ищем в виде: $\left\{ i_7, i_8, i_6, i_9 \right\}$. Система инвариантности противоречива.

Таким образом, получена

Теорема 1. *Относительно adi_6 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :*

1. $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$,
2. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_6 + \rho i_9\}$,
3. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_9\}$,
4. $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6 + \tau i_9\}$,
5. $\{i_5, i_{10} + i_7, i_8, i_9\}$,
6. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$,

$$\{i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9\}, \left\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$7. \left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\}, 8. \{i_5, i_8, i_6, i_9\}, 9. \{i_{10}, i_7, i_6, i_9\}.$$

Рассматривая аналогично операторы adi_9 , $ad(i_5 - i_8)$, $ad(i_7 + i_{10})$ приходим к следующим теоремам.

Теорема 2. Относительно adi_9 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :

$$1. \{i_5, i_{10}, i_7, i_8\},$$

$$2. \left\{i_5 + \mu i_8, i_{10} - \frac{1}{\mu} i_7, i_6, i_9\right\}, \left\{i_5 \pm \sqrt{-1 - \nu \mu} i_7 + \mu i_8, i_{10} + \nu i_7 \mp \sqrt{-1 - \nu \mu} i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$3. \{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + \lambda i_8, i_6, i_9\}, 4. \{i_{10}, i_8, i_6, i_9\}.$$

Теорема 3. Относительно $ad(i_5 - i_8)$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :

$$1. \{i_6, i_9, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\}, \{i_6, i_9 + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},$$

$$\{i_6 + \lambda i_{10} \pm \sqrt{\lambda \sigma} i_8, i_9 \pm \sqrt{\lambda \sigma} i_{10} + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},$$

$$2. \left\{i_6 + \lambda i_9, i_7 + \frac{1}{\lambda} i_8, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_5 - i_8\right\},$$

$$3. \{i_6, i_7 + i_{10}, i_5, i_8\}, 4. \{i_9, i_7, i_{10}, i_5 - i_8\}.$$

Теорема 4. Относительно $ad(i_7 + i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :

$$1. \{i_6 + \lambda i_8 \pm \sqrt{-\lambda \sigma} i_{10}, i_9 \mp \sqrt{-\lambda \sigma} i_8 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_6, i_9 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\},$$

$$\{i_6, i_9, i_5 - i_8, i_7 - i_{10}\},$$

$$2. \left\{i_6 + \lambda i_9, i_5 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_8 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_7 + i_{10}\right\},$$

$$3. \{i_6, i_5 - i_8, i_7, i_{10}\}, 4. \{i_9, i_5, i_8, i_7 + i_{10}\}.$$

Вернемся к вопросу о редуцируемости однородных пространств. Рассмотрим подалгебру $G_5 = \{i_6, i_9\}$. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что для adi_6 и adi_9 одновременно инвариантным является только одно четырехмерное пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$, которое также является дополнительным к алгебре G_5 . Следовательно, получена теорема:

Теорема 5. Однородное пространство H/G_5 являются редуцируемым. Единственным редуцируемым дополнением для подалгебры Ли \overline{G}_5 в алгебре Ли \overline{H} является подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.

Из теорем 3 и 4 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и $ad(i_7 + i_{10})$ нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли \overline{H} . Поэтому алгебра Ли \overline{G}_6 не имеет в алгебре Ли \overline{H} редуцируемых дополнений. Таким образом, получим теорему:

Теорема 6. Однородное пространство H/G_6 не является редуцированным.

Рассмотрим подалгебру $G_7 = \{i_5 - i_8, i_6\}$. Из теорем 1 и 3 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и adi_6 нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли \bar{H} . Поэтому алгебра Ли \bar{G}_7 , не имеет в алгебре Ли \bar{H} редуцированных дополнений. Следовательно, получили теорему:

Теорема 7. Однородное пространство H/G_7 не является редуцированным.

Итоги исследований заключим в следующей теореме:

Теорема 8. Однородное пространство H/G_5 является редуцированным. Редуцированным дополнением в алгебре Ли \bar{H} для подалгебры Ли \bar{G}_5 является только подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$. Однородные пространства $H/G_6, H/G_7$ не являются редуцированными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // Науч. труды I респ. конф. математиков Белоруссии. – Минск, 1965. – С. 247–258.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.1. – 343 с.
3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.2. – 413 с.
4. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца–Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 16–21.
5. Корчук, О.В. Исследование и классификация редуцированных однородных пространств с группой вращений пространства 1R_4 с четырехмерными группами стационарности / О.В. Корчук, А.А. Юдов // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23 апреля 2009 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест, 2009. – С. 182–183.

A. Yudov, I. Mashliakevich. About the Reduction Homogenous Spaces with Fundamental Group G -Group of Motions of Space 1R_4

In work space 1R_4 – 4-dimensional pseudoeuclidous space of the signature two is considered. Homogenous spaces with fundamental group Lee G – group Lee of motions space 1R_4 are being dealt with. A class of such spaces, having are as group of stability a 2-parametrical subgroup Lee of group Lee H of rotations of space 1R_4 is investigated. Homogeneous spaces of such kind being all reductive homogeneous spaces. Whether there are all reductive decomposition of algebras Lee of the received reductive spaces.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.04.2012

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

- Аўсіюк А.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна
- Адамчук Д.В.** – студэнт фізічнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Андросенка М.П.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры вышэйшай матэматыкі Дзяржаўнага эканоміка-тэхналагічнага ўніверсітэта (г. Кіеў, Украіна)
- Валюшына Т.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры геаметрыі і алгебры Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)
- Гайда А.У.** – магістрант кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Зайонц Ю.** – доктар навук Каталіцкага ўніверсітэта ў Любліне, прафесар, рэктар Дзяржаўнай вышэйшай прафесійнай школы ў г. Хелм (Польшча), дацэнт ўніверсітэта ў Йоенсуу (Фінляндыя)
- Казінскі А.А.** – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Кашпіроўскі А.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматыкі Нацыянальнага ўніверсітэта «Кіева-Магілянская Акадэмія» (г. Кіеў, Украіна)
- Кір’яцкіс Д.** – магістр, аспірант кафедры тэорыі функцый і функцыянальнага аналізу і прыкладной матэматыкі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы
- Мадорскі В.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Макаед І.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Матысік А.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Машлякевіч І.М.** – студэнтка матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Плецохоў У.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Равінскі А.Ф.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна, прафесар тэхнічнага ўніверсітэта ў Беластоку (Польшча)
- Рыжкоў А.А.** – студэнт матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Рэдзькоў В.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі імя Б.І. Сцяпанавы Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі
- Самусенка П.Ф.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычных асноў інфарматыкі Нацыянальнага педагагічнага ўніверсітэта імя М.П. Драгаманава (г. Кіеў, Украіна)
- Саўчук В.Ф.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Секяржыцкі У.С.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Серы А.І.** – асістэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Стражаў В.І.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
- Сцепанюк Т.А.** – асістэнт кафедры высшай матэматыкі і інфарматыкі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)
- Трафімук А.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Трыгук В.У.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Харкевіч Ю.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)
- Юдаў А.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
- бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
- рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнацю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падроздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаванне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Карэктары *К.А. Зуева, Л.М. Калілец, Ж.М. Селюжыцкая*
Камп'ютэрнае макетаванне *А.Я. Кулай, С.М. Мініч*

Подписано в печать 15.05.2012. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Гарнітура Таймс. Ризографія. Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 8,97.
Тираж 100 экз. Заказ № 163.

Издатель и полиграфическое исполнение
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».
ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.