

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матгьсік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плеццохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

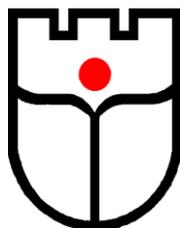
МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 1 / 2011



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»

№ 1 / 2011

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Адамчук Д.В., Костко В.С. Диффузионные процессы в тонкоплёночных структурах	5
Демидчик А.В. Влияние легирования на микротвёрдость быстрозатвердевших бинарных и тройных висмут-сурьмянистых сплавов	18
Овсюк Е.М. Задача Кеплера для нерелятивистской частицы со спином $1/2$ в пространстве Лобачевского, точные решения уравнения Паули	23
Плетюхов В.А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве $2+1$	30
Ревинский А.Ф., Тригук В.В., Багаль Е.А. Ab-initio расчет фононного спектра и термодинамических характеристик MgB_2	35
Серый А.И. К вопросу о комптоновском вращении плоскости поляризации рентгеновских фотонов в магнитном поле	41

МАТЭМАТЫКА

Волошина Т.В. Орбиты представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы	47
Длубаковская-Пузио Е., Карпук М., Мирская Е., Пузио К. Математическая модель риска исследования степени удовлетворенности качеством туристических услуг	52
Жигалло К.Н., Жигалло Т.В. Аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона–Чебышева на классе Липшица	63
Кальчук И.В., Грабова У.З., Степанюк Т.А. Аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса на классах $W_\beta^r H^\alpha$	78
Матысик О.В., Савчук В.Ф. О приближённом решении операторных уравнений I рода	93
Мадорский В.М. О регуляризованных нелокальных итерационных процессах типа Канторовича–Красносельского	102
Радыно Е.М., Сидорик А.Г. Характеристика гильбертовых пространств с помощью преобразования Фурье на локально компактных абелевых группах	108
Натынчик Е.А., Шило Т.И. Уравнение второго порядка с неподвижными критическими особыми точками	117
Юдов А.А., Пинчук О.В. О редуцированности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 1R_4	123
Звесткі аб аўтарах	129

INDEX

PHYSIS

Adamchuk D.V., Kostko V.S. Diffusion Processes in Thin Film Structures	5
Demidchik A.V. The Effect of Doping on the Microhardness of Rapidly Binary and Ternary Bismuth-Antimony Alloys.....	18
Ovsiyuk E.M. Quantum Kepler Problem for Nonrelativistic Spin 1/2 Particle in the Lobachevsky Space, Exact Solutions of the Pauli Equation	23
Pletyukhov V.A. Internal Symmetry of Dirac Equation in Space-Time 2+1	30
Ravinski A.F., Triguk V.V., Bahal E.A. Ab-Initio Calculation of Phonon Spectrum and Thermodynamic Properties of MgB ₂	35
Sery A.I. To the Problem of Compton Rotation of the Plane of Polarization of X-Photons in Magnetic Field	41

MATHEMATIS

Voloshyna T.V. Orbits of Wagner–Preston Representation of an Inverse Semigroup	47
Dlubakowska-Puzio Ewa K., Karpuk M., Mirskaya A., Puzio K. The Analysis of Degree of Tourist Satisfaction with the Level of Service Quality in Health and Hotel Institutions with the Use of Tourism Risk Model	52
Zhyhallo K.N., Zhyhallo T.V. Approximative Properties of Poisson–Chebyshev’s Biharmonic Integrals on the Class of Lipschitz	63
Kalchuk I.V., Grabova U.Z., Stepanyuk T.A. Approximative Properties of Integrals of Weierstrass on Classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$	78
Matysik O.V., Savchuk V.F. About Approximative Decision of the First–Kind Operator Equations.....	93
Madorski V.M. On Regularized Nonlocal Iterative Processes of Kantorovich–Krasnoselski Type	102
Radyna Ya.M., Sidoryk H.G. The Fourier Transform of Vector-valued Functions on Locally Compact Groups	108
Natynchik E.A., Shilo T.I. Second Order Equations with Singular Points Stationary Critical	117
Yudov A., Pinchuk O. About the Reduction of Homogenous Spaces with Fundamental Group G – Group of Motions of Space 1R_4	123
Information about the authors	129

Д.В. Адамчук, В.С. Костко

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТОНКОПЛЁНОЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Приводятся результаты экспериментального анализа структур полупроводник-металл-диэлектрик (ПМД) методами рентгеновской фотоэлектронной (РФС) и оже-спектроскопии (ЭОС), теоретического описания диффузионных процессов, происходящих в тонкопленочных структурах ПМД, изготовленных последовательным термическим вакуумным напылением на диэлектрик тонких пленок металла (Cd) и полупроводника (SnI₂).

Введение

Относительно недавно внимание физиков привлекли новые, ранее не исследованные объекты, которые получили название тонкие плёнки. Данные объекты представляют собой чрезвычайно тонкие плёнки, нанесённые на подложку, толщина которых измеряется сотнями ангстрем. В настоящее время тонкие пленки играют важную роль в современной технике. Присуждение Нобелевской премии за тонкие пленки графена является ярким подтверждением этому. Тонкопленочные структуры ПМД, обладая высокой светочувствительностью, могут найти практическое применение при образовании рельефного металлического изображения, формировании как позитивного, так и негативного изображения [1–2]. Оказалось, что у столь малых объектов по сравнению с массивными объектами меняются физические характеристики: температура плавления, степень переохлаждения, межплоскостное расстояние и т.п. Термодинамика объясняет столь необычные свойства увеличением роли поверхности с уменьшением объекта, ведь при уменьшении размера тела его объём уменьшается пропорционально r^3 , а площадь поверхности – r^2 . Соответственно отношение S/V ведёт себя как $1/r$. Благодаря этому силы поверхностного натяжения, которые в массивных образцах не играют существенной роли, в нанобъектах становятся весьма существенными. А поскольку силы поверхностного натяжения действуют в приповерхностном слое, их действие можно уподобить приложению внешнего давления, которое, как известно, может изменить как температуру плавления, так и межплоскостные расстояния.

Для получения тонких плёнок используется множество разнообразных методов. Выбор конкретного метода зависит от требований к получаемым объектам, но зачастую ограничивается оборудованием. Для получения высокочистых плёнок наиболее доступным является метод термического вакуумного напыления. Использование вакуума позволяет получать достаточно чистые пленки.

Разнообразные электронные и атомные процессы в структурах ПМД во многом определяются физико-химическими явлениями на границах раздела между полупроводником и металлом, металлом и диэлектриком, диэлектриком и полупроводником. В научной литературе имеется ряд монографий и обзоров, детально анализирующих электронные явления в таких структурах, но в основном на границе полупроводника с диэлектриком. Значительно меньше внимания уделяется процессам на границах металла с полупроводником. В то же время процессы на таких границах часто оказывают определяющее влияние на работу приборов, созданных на основе сложных структур.

Данная статья посвящена изучению и описанию диффузионных процессов, происходящих в тонкопленочных структурах ПМД и на их поверхности, исследованию зависимости протекания диффузии от внешних факторов.

Общие сведения о диффузии

ДИФФУЗИЯ (от лат. diffusio – распространение, растекание) – перенос частиц разной природы, обусловленный хаотическим тепловым движением молекул (атомов) в одно– или многокомпонентных газовых, либо конденсированных средах. Такой перенос

осуществляется при наличии градиента концентрации частиц или при его отсутствии; в последнем случае процесс называют самодиффузией.

Процесс диффузии в твердых телах (металлах) при комнатной температуре практически не проявляется, а при высоких температурах (~ 1000 К) происходит сравнительно быстро. При повышенных температурах атомы в твердом теле обладают большей свободой и могут переходить из одного узла решетки в другой, а также в междоузлия. Высокая температура существенно облегчает процесс перемещения атомов диффундирующего твердого вещества, как по междоузлиям, так и в результате перемещения вакансий.

В случае тонкопленочных структур наблюдаются резко выраженные диффузионные процессы даже при комнатных температурах (тепловая диффузия). Освещение структуры светом существенно усиливает диффузию – фотодиффузию.

Диффузионная теория стремится при известных, экспериментально обоснованных предположениях о диффузионном процессе по заданному начальному ходу концентрации рассчитать концентрацию диффундирующего вещества в любой точке образца в любой момент времени. Математическое описание диффузионных процессов, происходящих в одно- или многокомпонентных газовых либо конденсированных средах задаётся при помощи дифференциальных уравнений с частными производными (о которых изложено ниже).

Техника эксперимента

Оже-электронная спектроскопия

Для анализа самых верхних слоев кристалла большое распространение получила электронная оже-спектроскопия (ЭОС), в которой возбуждение электронов на внутренних оболочках атомов обычно осуществляется пучком быстрых электронов, рентгеновских фотонов или ионов. В ее основе лежит открытый в 1925 г. французским ученым Оже-эффект рождения вторичных электронов в результате электронных переходов между внутренними оболочками атомов. Как видно из рисунка 1, под воздействием внешней ионизации на внутренней оболочке (К – на рисунке 1) образуется вакансия. Она может быть заполнена электроном, находящимся на более высоком энергетическом уровне, например, на уровне L_1 . Выделившаяся при этом переходе энергия затрачивается либо на испускание кванта характеристического рентгеновского излучения $h\nu$ (рентгеновская флуоресценция) – переход 1 на рисунке 1, либо может быть передана другому внутреннему электрону – электрону на уровне L_2 (переход 2), что сопровождается эмиссией его в вакуум (оже-процесс). Рентгеновский спектр и энергетическое распределение эмитированных оже-электронов (оже-спектр) несут информацию о природе практически всех атомов периодической таблицы.

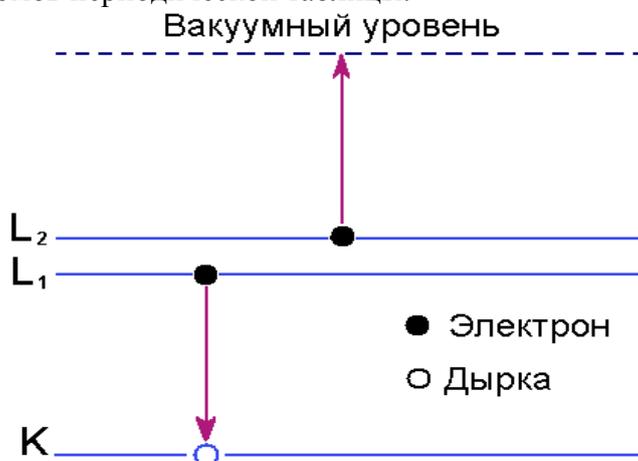


Рисунок 1 – Схема энергетических уровней, поясняющая принцип оже-эффекта

Оже-электронная спектроскопия используется главным образом для определения состава тонких пленок и слоистых структур в виде функции от глубины. Оже-сигнал формируется в приповерхностной области образца (30 \AA), а ионное распыление обеспечивает послойные срезы, необходимые для анализа образцов по глубине. В лабораторных методиках распределения по глубине изображаются в виде зависимости амплитуды оже-сигнала от времени распыления.

Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия

Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия – метод поверхностного анализа, использующийся для определения химического состава твердых поверхностей.

Физические принципы метода РФС основаны на явлении фотоэффекта. В спектрометре монохроматический пучок рентгеновских лучей с энергией фотонов $h\nu$ падает на исследуемое вещество, атомы которого поглощают фотоны. Связанный электрон переходит в свободное состояние и вылетает за пределы образца с энергией, которая в идеальном случае должна удовлетворять уравнению:

$$E_{\text{кин}} = h\nu - \varepsilon_{\text{св}}, \quad (2.1)$$

где $E_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия электронов, испускаемых из молекулы под действием фотона с энергией $h\nu$, $\varepsilon_{\text{св}}$ – энергия связи электрона. Однако на практике при работе с твердыми образцами необходимо еще учитывать работу выхода спектрометра $\phi_{\text{сп}}$, поэтому уравнение примет вид

$$\varepsilon_{\text{св}} = h\nu - E_{\text{кин}} + \phi_{\text{сп}}. \quad (2.2)$$

Электроны возбуждаются со всех уровней атома, на которых $\varepsilon_{\text{св}} < h\nu$. Зная величину $h\nu$ и $E_{\text{кин}}$, которую измеряют с помощью электронного спектрометра, можно определить энергию связи электрона на том или ином уровне атома. Для каждого элемента периодической системы Менделеева характерно свое строение атома, поэтому по спектрам фотоэлектронов можно провести соответствующую классификацию.

Глубина выхода выбитых электронов из образца определяется длиной свободного пробега электрона относительно неупругих столкновений и составляет 1–10 нм. Источником излучения в спектрометре является рентгеновская трубка, которая генерирует рентгеновское излучение, состоящее из тормозного и характеризующего излучений. Идеальный рентгеновский источник для РФС должен давать монохроматическое излучение с энергией, достаточной для ионизации внутренних электронов всех химических элементов периодической системы. В РФС обычно применяют K_{α} – рентгеновское излучение Al или Mg. Оно дает самые узкие линии.

С помощью РФС по спектру фотоэлектронов можно проводить качественный и количественный анализ состава поверхности. Спектр фотоэлектронов представляет собой зависимость числа фотоэлектронов, попадающих в детектор, от величины их кинетической энергии. По кинетической энергии, учитывая поправку на работу выхода спектрометра, находят энергию связи.

Экспериментальные результаты и их теоретическое обоснование

Анализ структуры SnI₂-Cd-стекло методом РФС [4–5] (электронный спектрометр ЭС-2401, Mg K α излучение) указал на наличие частиц Cd на верхней грани полупроводника (граница раздела воздух-полупроводник) даже без предварительной засветки образца. Это явление может быть вызвано двумя причинами: высокой подвижностью ионов Cd либо их фотодиффузией, т.к. не представлялось возможным полностью исключить попадание света на структуру ПМД в процессе ее изготовления.

Анализ рентгенограмм незасвеченной структуры SnI₂-Cd-стекло показал, что в результате темновой диффузии (или фотодиффузии, стимулированной рассеянным

светом на стадии вакуумная установка – рентгеновская установка после синтеза, перед аттестацией) ионов кадмия в слой полупроводника происходит образование дийодида кадмия (CdI_2). Дополнительное облучение структуры интегральным потоком от ртутной лампы ПРК-2 с расстояния 20 см в течение 10 минут усиливает обнаруженный эффект образования CdI_2 [5].

Анализ структур ПМД методами ЭОС [6]

Для получения информации о распределении химических элементов по глубине, и в частности о промежуточном слое светочувствительной структуры SnI_2 -Cd-стекло, использовался электронный сканирующий оже-спектрометр (Scanning Auger Multiprobe) РНІ-660 фирмы Perkin Elmer (США). В данной установке возбуждение атомов осуществляется первичным остророфокусированным электронным пучком с энергией электронов $0,1 \div 10$ кэВ. Диаметр пучка $0,1 \div 10$ мкм определяет локальность анализа в плоскости объекта исследования. Кроме того, использование электронов для возбуждения атомов позволяет дополнительно реализовать режим сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), что практически всегда выполняется в современных оже-спектрометрах. Изображение объекта во вторичных, отраженных или поглощенных электронах выводится на экран дисплея, что позволяет определять место анализа с разрешением СЭМ (10 нм). Локальность по глубине определяется глубиной выхода оже-электронов и составляет $0,3 \div 3,0$ нм в зависимости от энергии оже-электронов, которая изменяется в пределах 20–2500 эВ. Низкая энергия анализируемых электронов и высокая чувствительность к поверхностным загрязнениям накладывает дополнительные требования проведения измерений в сверхвысоком вакууме $\sim 10^{-10}$ мм рт. ст.

Для обнаружения таких элементов, как олово (Sn), йод (I), кадмий (Cd), кислород (O), углерод (C), в исследуемом слое регистрировались оже-переходы: KL_1L_2 (O, C), $\text{M}_1\text{N}_1\text{N}_2$ (Cd, Sn, I) и $\text{L}_1\text{M}_1\text{M}_2$ (Si, Ca).

Распределение химических элементов по глубине определяют в результате ионного распыления слоев исследуемого объекта с периодической регистрацией оже-электронов. Для распыления применялись ионы аргона с энергией 3,5 кэВ.

Предполагалось, что фотографическая чувствительность структур ПМД определяется тем, что в результате облучения светом области контакта полупроводника и металла происходит перенос (диффузия) частиц металла в слой полупроводника. В результате такого переноса должен образоваться промежуточный слой с достаточно высокой концентрацией частиц металла. Этот слой, как правило, характеризуется оптическими и электрическими свойствами, существенно отличающимися от свойств граничащих слоев.

Исследования области контакта слоев полупроводника и металла в структуре SnI_2 -Cd-стекло, проведенные методом ЭОС, показали, что, так же, как и в РФС-исследованиях, атомы кадмия обнаруживались даже на поверхности полупроводникового слоя (рисунок 2). На оже-спектре кроме линий олова и йода присутствуют линии кадмия. Присутствие ионов кадмия на поверхности структуры SnI_2 -Cd-стекло можно объяснить их тепловой диффузией.

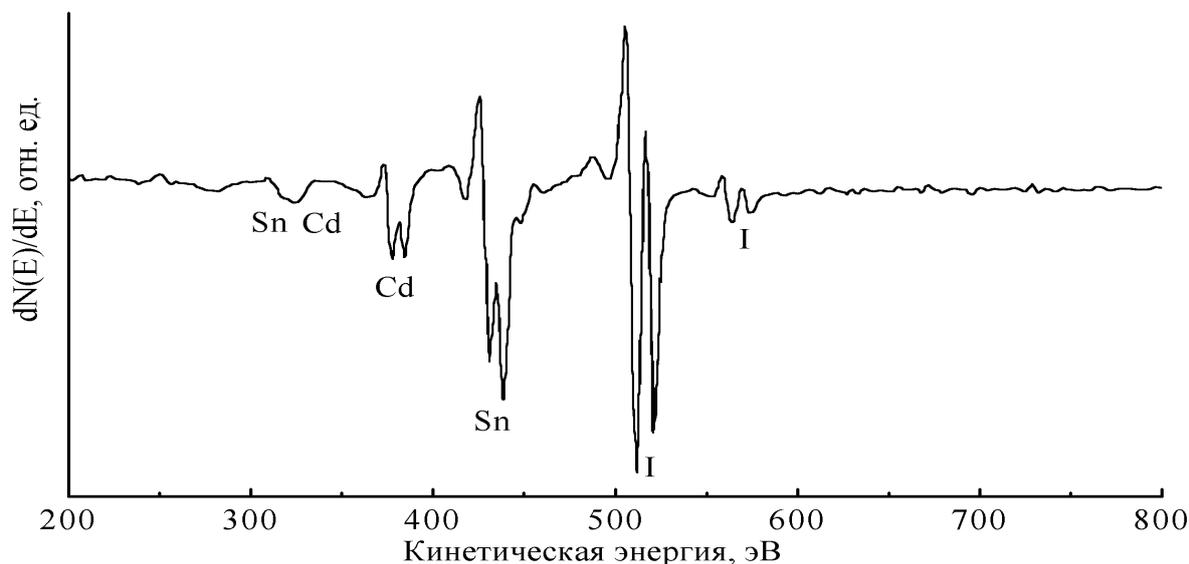


Рисунок 2 – Оже-спектр поверхности исходной структуры SnI₂-Cd-стекло

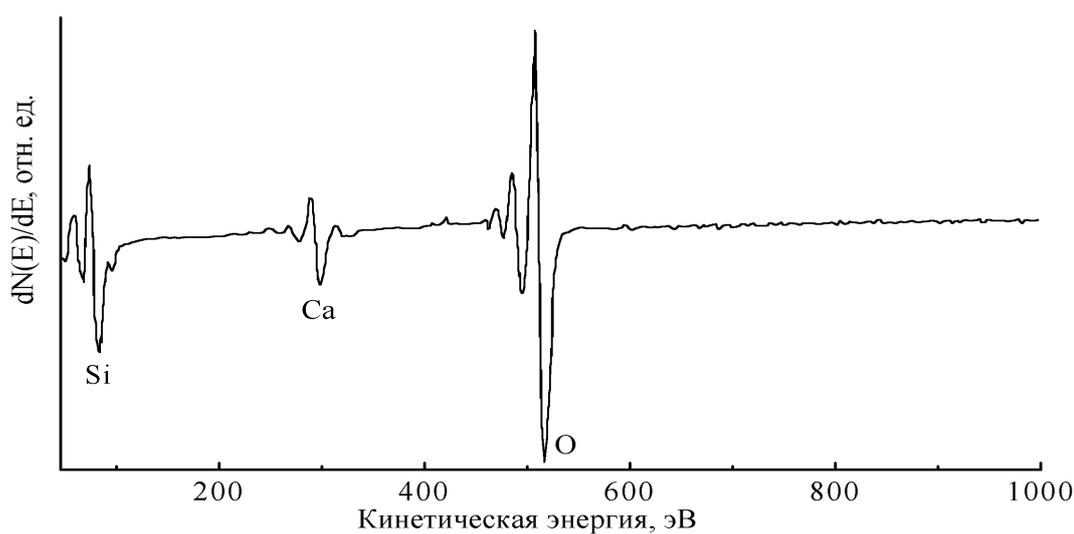


Рисунок 3 – Оже-спектр стеклянной подложки структуры после ионного травливания слоев полупроводника и металла

После полного травливания (ионного распыления) слоя полупроводника и металла оставалась чистая стеклянная подложка, оже-спектр которой (после травливания слоев) приведен на рисунке 3. Следы Ca, видимые на спектре помимо линий Si и O, обусловлены кальцием, добавленным в состав стекла подложки.

Проведенные оже-измерения, чередующиеся с распылением поверхности ионами аргона, показали, что даже в необлученных структурах SnI₂-Cd-стекло отсутствует четкая граница полупроводник-металл (рисунок 4). Было сделано предположение, что, возможно, это вызвано спецификой приготовления образцов (использовался метод последовательного термического вакуумного напыления слоев металла и полупроводника), когда частицы осаждаемого на подложку вещества имеют достаточно высокую температуру, а, следовательно, и высокую подвижность составных единиц, и существует возможность взаимной диффузии веществ в граничном слое. В этом случае размытие резкой границы полупроводник-металл может происходить и за счет темновой (без освещения), точнее, тепловой диффузии.

На рисунке 4 представлено распределение химических элементов по глубине в исходной структуре SnI₂-Cd-стекло. Отсутствие здесь линий кислорода даже для подложки (SiO₂) объясняется особенностями съемки. Линия кислорода на оже-спектре

совпадает с линией йода, поэтому отсутствует возможность определить содержание кислорода в том случае, если в образце присутствует йод. Атомная концентрация кремния в подложке несколько завышена именно по данной причине. Очевидна взаимодиффузия ионов кремния (подложка), ионов кадмия (металлический слой), ионов олова и йода (полупроводниковый слой) в области больших толщин.

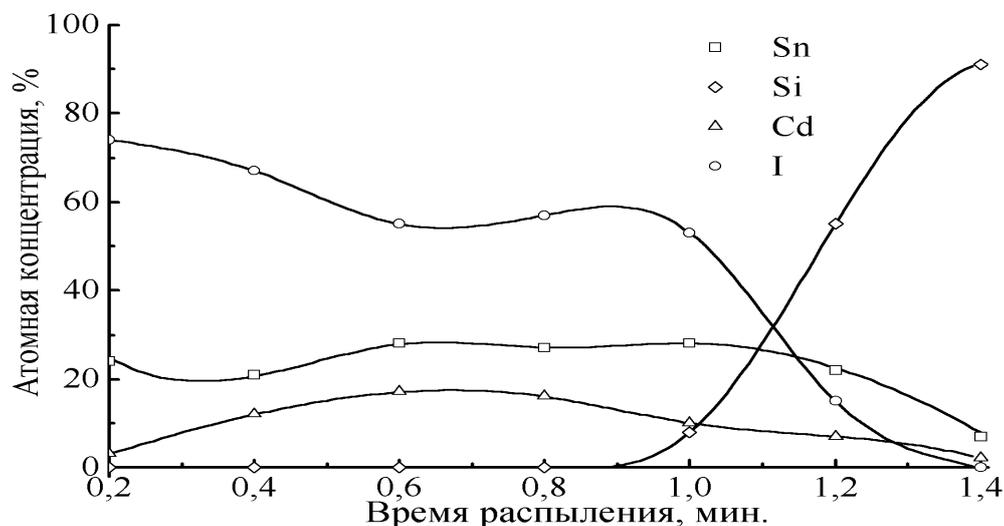


Рисунок 4 – Распределение элементов по глубине в исходной структуре SnI₂-Cd-стекло

Чтобы зарегистрировать результат фотостимулированных превращений в системе ПМД, было проведено облучение структуры интегральным потоком от ртутной лампы ПРК-2 с расстояния 20 см в течение 15 мин. Оже-спектр образовавшихся продуктов засветки имеет вид, представленный на рисунке 5. Видно, что двойная линия йода в этом случае заменена одинарной линией кислорода.

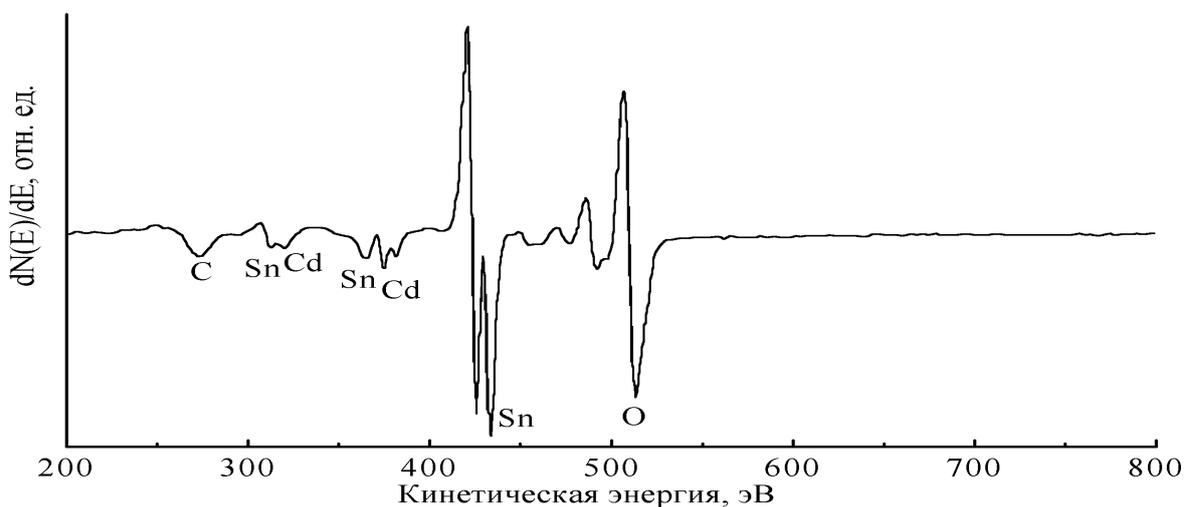


Рисунок 5 – Оже-спектр поверхности облученной структуры SnI₂-Cd-стекло

В результате стравливания приповерхностного слоя с поверхности структуры удаляется адсорбированный углерод (рисунок 6), появляющийся в спектре от слоя углеводородов, оседающих на образце в результате проникновения в объем спектрометра паров диффузионного масла, дегазации органических прокладок и т.д.

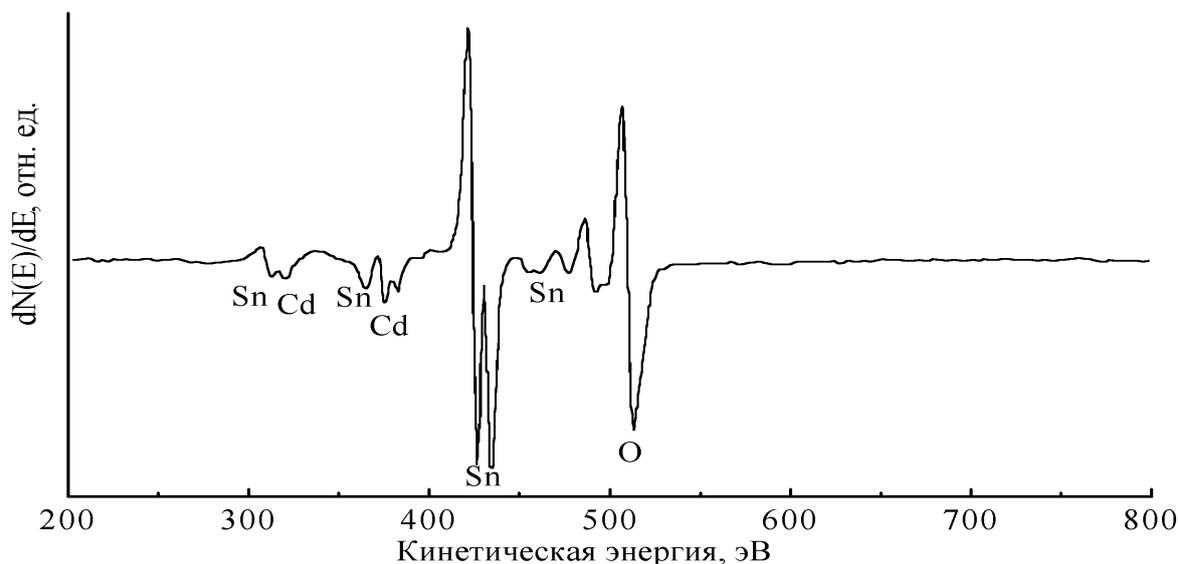


Рисунок 6 – Оже-спектр поверхности облученной структуры SnI₂-Cd-стекло после ионного стравливания приповерхностного слоя

В данном случае видно, что даже на поверхности системы нет йода. Это свидетельствует о полном фотоокислении системы.

Распределение химических элементов по глубине для системы SnI₂-Cd-стекло в результате облучения представлено на рисунке 7. Видно, что продуктами облучения структуры SnI₂-Cd-стекло являются олово, кадмий и кислород, концентрация которых до определенной толщины практически не меняется. При более глубоком (точнее, более длительном) стравливании в оже-спектре обнаруживаются линии кремния. Концентрация кремния с глубиной, естественно, растет. Характерно, что кривые, соответствующие кадмию и олову, при этом не спадают резко до нулевой концентрации. Это свидетельствует о взаимодиффузии частиц структуры полупроводник-металл и подложки (кремния), что подтверждает обнаруженный еще на ранней стадии исследований эффект: после химического стравливания (удаления) следов структур полупроводник-металл и их продуктов при внимательном рассмотрении можно было видеть матовый (диффузный) след на поверхности подложки.

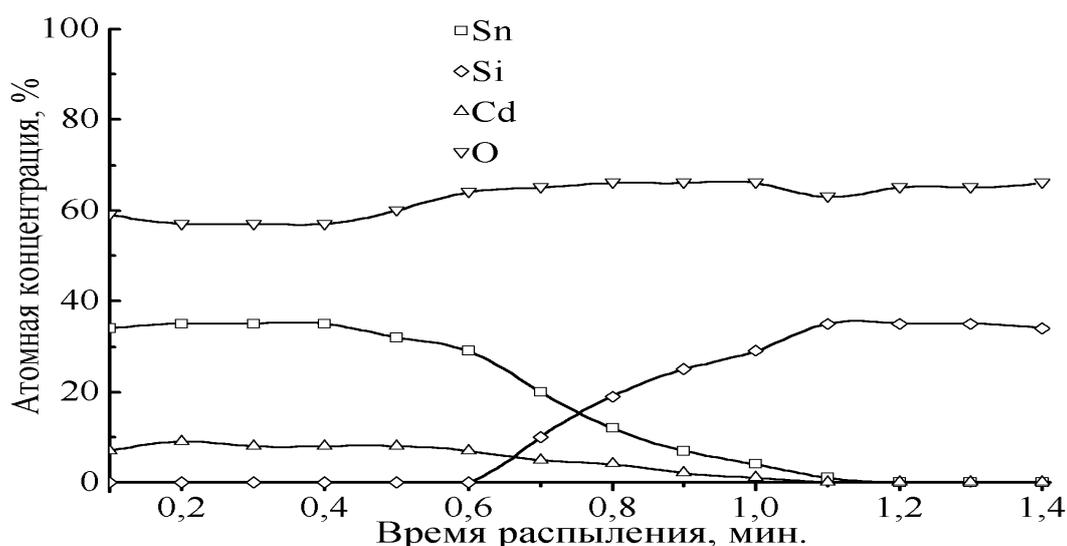


Рисунок 7 – Распределение элементов по глубине в структуре SnI₂-Cd-стекло после облучения

Математическое обоснование экспериментальных результатов

Для того чтобы найти какие-то общие закономерности в полученных результатах, необходимо построить модель, которая бы наиболее правильно отражала эти общие закономерности. При математической обработке данных будем использовать модель однородной поверхности [7–9]. В этой модели предполагается, что все физические свойства – расположение атомов, распределение их эффективных зарядов и другие свойства – однородны в плоскости поверхности. Будем рассматривать изменение этих физических параметров только по нормали, тогда задача из трёхмерной (в общем случае) упрощается до одномерной. В рамках данной модели рассматриваемую структуру ПМД можно представить следующим образом:

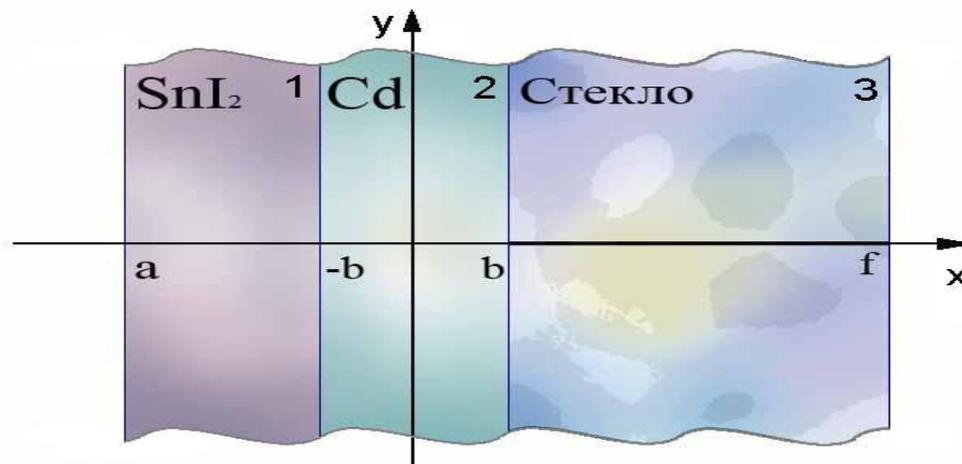


Рисунок 8 – Структура ПМД

Рассмотрим изменение концентрации атомов Cd в 1 и 3 областях. При этом предполагается, что диффундирующее вещество (Cd) доходит до границы, а возможность переноса вещества за пределы системы исключена.

Для нашей системы запишем второй закон Фика [8, 9]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

где c – концентрация диффундирующего вещества, D – коэффициент диффузии, который в общем случае зависит от концентрации и координаты x

$$D = \begin{cases} D_1, a < x < -b \\ D_2, -b < x < b \\ D_3, b < x < f \end{cases} \quad (3.2)$$

В нашем случае коэффициент диффузии полагаем не зависящим от концентрации и, следовательно, от координаты x .

Граничные условия

$$\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{x=f; x=a} = 0 \quad (3.3)$$

Но данное условие непосредственно вытекает из используемой модели, следовательно, не будем его использовать.

Начальные условия

$$c|_{t=0} = \begin{cases} 0, a < x < -b \\ 1, -b < x < b \\ 0, b < x < f \end{cases} \quad (3.4)$$

Данную задачу будем решать методом Фурье, который заключается в поиске решения дифференциального уравнения с частными производными в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Метод Фурье позволяет находить решения дифференциальных уравнений с частными производными только при условии возможности разделения переменных, тогда, при помощи введения дополнительного параметра, удаётся свести решение дифференциального уравнения с частными производными к решению системы линейных дифференциальных уравнений, решение каждого из которых можно представить в квадратурах. Для этого представим $c(x; t)$ в виде:

$$c(x; t) = X(x) \times T(t). \quad (3.5)$$

$$c'_t(x; t) = X(x) \times T'(t). \quad (3.6)$$

$$c''_x(x; t) = X''(x) \times T(t). \quad (3.7)$$

Подставляем (3.5) (3.6) (3.7) во второй закон Фика (3.1):

$$X(x) \times T'(t) = D \times X''(x) \times T(t). \quad (3.8)$$

Разделим (3.8) на

$$D \times X(x) \times T(t).$$

Получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{D \times T(t)}. \quad (3.9)$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда обе части уравнения равны одной и той же константе, обозначим её, например, $-\lambda^2$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda^2, \quad (3.10)$$

откуда

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda^2 DT(t) = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим первое уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Его решением является

$$X(x) = A(\lambda) e^{i\lambda x}. \quad (3.11)$$

Решением второго уравнения является функция

$$T(t) = e^{-\lambda^2 Dt}. \quad (3.12)$$

Тогда из (3.5) следует, что

$$c_{\lambda}(x;t) = A(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-\lambda^2 Dt}.$$

Получили частное решение уравнения Фика, общее решение – суперпозиция всех частных, на основании чего запишем

$$c(x;t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-\lambda^2 Dt} d\lambda. \quad (3.13)$$

(3.13) – общее решение уравнения Фика.

Используя начальные условия (3.4), получим:

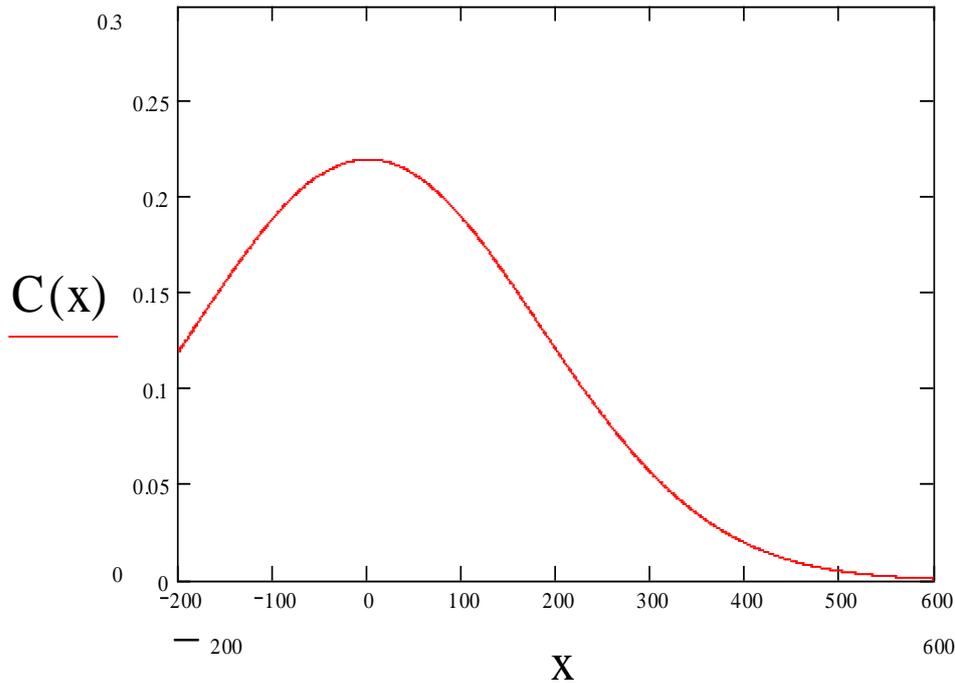


Рисунок 9 – Зависимость концентрации Cd от толщины в необлученной структуре (толщина Cd =100 отн. ед.)

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_a^f c(x;0)e^{-i\lambda x} d\lambda$$

(обращение преобразования Фурье).

Подставив его в общее решение, получим

$$c(x;t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_a^f c(\omega;0)e^{-i\lambda\omega} d\omega \right) e^{i\lambda x} e^{-\lambda^2 Dt} d\lambda. \quad (3.14)$$

(3.14) – распределение концентрации С в структуре ПМД.

При изменении в повторном интеграле порядка интегрирования и вычислении одного из повторных интегралов получим более удобную форму записи для искомого распределения концентрации

$$c(x;t) = \frac{1}{2\sqrt{Dt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4Dt}} c(\lambda;0) d\lambda. \quad (3.15)$$

Построим графики зависимостей концентрации Cd от толщины структуры.

Из приведенных теоретических графиков распределения концентрации Cd следует, что, так как эти (теоретические) распределения принимают вид экспериментальных, можно сделать вывод о корректности используемой модели однородной поверхности (идея которой изложена выше), а также что воздействие электромагнитного излучения приводит к изменению значения коэффициента диффузии.

Следует отметить, что сложность математического анализа, связанная с небольшой толщиной пленок, возрастает из-за некоторых особенностей тонких пленок, которые дополнительно затрудняют интерпретацию результатов. Эти особенности тонких пленок возникают из-за специфических методов их получения (как правило, пленки формируются из отдельных атомов, молекул или ионов в результате контролируемой конденсации этих частиц на подложке или непосредственно путем химической реакции). Среди этих особенностей – очень большое отношение поверхности к объему высокая плотность дефектов (в частности, дислокаций), большие двухосные механические напряжения в плоскости пленки, высокая, как правило, плотность неконтролируемых примесей, разупорядоченная и (или) метастабильная структура, а также, очень часто, наличие больших градиентов концентрации или электростатического потенциала. Из-за многих усложняющих обстоятельств точные аналитические решения существуют лишь для двух-трех идеальных случаев. Область применения таких решений очень ограничена, и они описывают лишь чисто размерный эффект. Тем не менее, они важны, по меньшей мере, для того, чтобы качественно понять влияние толщины пленки и граничных условий на ее поверхностях на кинетику диффузии. Кроме того, они позволяют представить, какие изменения идеальных граничных условий не приведут к заметному изменению точного решения. Поэтому простые аналитические решения можно использовать для анализа результатов даже в некоторых реальных системах.

Заключение

При исследовании структуры SnI₂-Cd-стекло методами РФС и ЭОС было обнаружено:

- атомы Cd обнаруживаются на свободной поверхности полупроводника в результате темновой (тепловой) диффузии;
- отсутствует четкая граница полупроводник-металл;
- обнаружено взаимное проникновение частиц металлического и полупроводникового слоев;

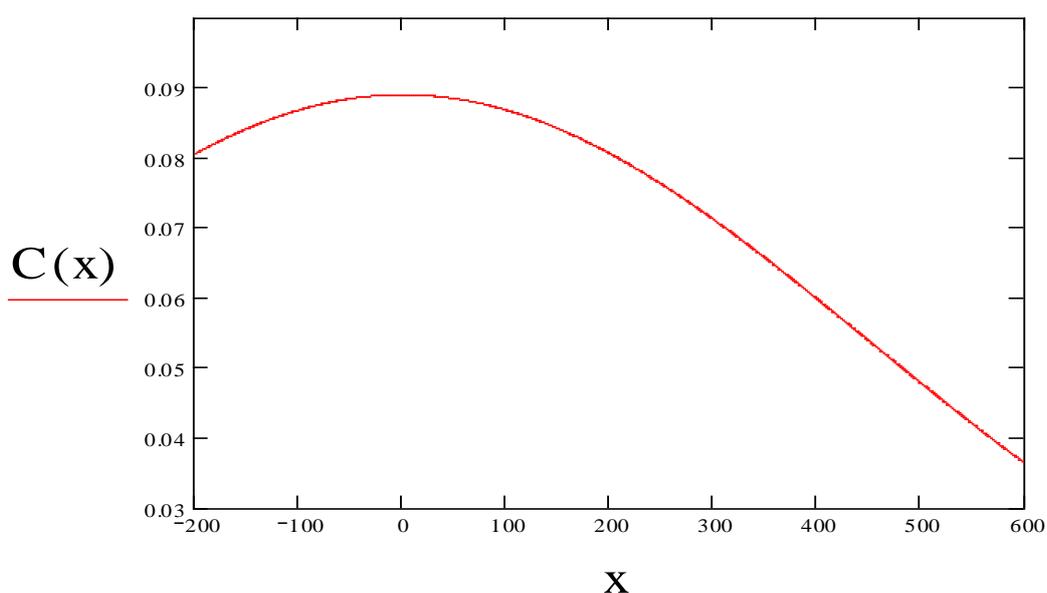


Рисунок 10 – Зависимость концентрации Cd от толщины в облученной структуре (толщина Cd =100 отн. ед.)

- в результате облучения структуры SnI₂-Cd-стекло происходит практически полное удаление йода из слоя с образованием оксидов металлов;
- обнаружено взаимное проникновение ионов продуктов засветки структуры ПМД и подложки;
- предложен математический аппарат диффузии частиц металла в структуре ПМД в предположении независимости коэффициента диффузии от направления и среды;
- экспериментальные результаты качественно коррелируют с теоретическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Способ нанесения рельефного изображения на диэлектрическую подложку : пат. 8800 Респ. Беларусь, G 03F 7/32, G 03C 5/58 / В.С. Костко, О.В. Костко ; заявл. 19.11.2003 ; опубл. 30.06.2005 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2006. – №6 (53). – С. 135.
2. Способ получения позитивного или негативного изображения на бессеребряных светочувствительных слоях : пат. 9295 Респ. Беларусь, G 03C 1/485, 5/00 / В.С. Костко ; заявл. 11.10.2004 ; опубл. 30.06.2007 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2007. – №6 (56). – С. 139.
3. Тонкие пленки. Взаимная диффузия и реакции / под ред. Дж. Поуга, К. Ту, Дж. Мейера. – М. : Мир, 1982.
4. Костко, В.С. Исследование светочувствительных слоев SnI₂ методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии / В.С. Костко [и др.] // Веснік Брэсцк. ун-та. – 1999. – № 2. – С. 41–48.
5. Костко, В.С. Светочувствительность тонкопленочной структуры SnI₂-Sn-стекло и фазовый состав структуры SnI₂-Cd-стекло / В.С. Костко [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.– 2001. – № 1. – С. 103–106.
6. Адамчук, Д.В. Диффузионные процессы в многослойных структурах / Д.В. Адамчук [и др.] // Веснік Брэсцк. ун-та.– 2009. – №2. – С. 52–59.
7. Киселев, В.Ф. Основы физики поверхности твердого тела / В.Ф. Киселев, С.Н. Козлов, А.В. Зотеев. – М. : Изд-во Московского ун-та, 1999. –284 с.
8. Каур, И. Диффузия по границам зерен и фаз / И. Каур, В. Густ. – М. : Машиностроение, 1991. – 448 с.
9. Чеботин, И.Н. Физическая химия твёрдого тела / И.Н. Чеботин. – М. : Химия, 1982. – 320 с.

D.V. Adamchuk, V.S. Kostko. Diffusion Processes in Thin Film Structures

The results of experimental analysis of semi-conductor-metal-dielectric (SMD) structure by the methods of X-ray photo electronic (X-rPS) and oge-spectroscopy, theoretical description of diffusion processes being on thin film structures SMD, made by sequential thermal vacuum evaporation on dielectric of thin films of metal (Cd) and semiconductor (SnI₂) are given.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.10.2010 г.

А.В. Демидчик

ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ НА МИКРОТВЁРДОСТЬ БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ БИНАРНЫХ И ТРОЙНЫХ ВИСМУТ-СУРЬМЯНИСТЫХ СПЛАВОВ

Проведено исследование микротвёрдости быстрозатвердевших сплавов висмут-сурьма с малым содержанием Sb (от 8 до 12 ат. %), а также влияние легирования различными элементами периодической системы Д.И. Менделеева на свойства указанных сплавов. Показано увеличение микротвёрдости для всех исследуемых сплавов.

Сплавы $Bi_{1-x}Sb_x$ ($x = 8...15$ ат. %) являются узкозонными низкотемпературными полупроводниковыми материалами, которые применяют при изготовлении различных термоэлектрических устройств [1–4]. Сверхбыстрая закалка из расплава позволяет получать материалы в виде фольг с однородным распределением компонентов в сплаве [5–7]. Помимо электрических свойств материалов, используемых в термоэлектрических устройствах, важно знать их механические свойства, так как материал в процессе эксплуатации может быть подвержен механическим воздействиям, которые способны изменить его структуру и свойства. В качестве наиболее простого метода оценки прочностных характеристик материала может выступать исследование микротвёрдости. Результаты по исследованию микротвёрдости могут представлять интерес для суждения о том, как сильные изменения электронной концентрации, степени вырождения электронного газа, наконец, химические связи атомов примесей с атомами основной решётки могут влиять на механические характеристики, так как в висмуте небольшие примеси вызывают очень сильное изменение указанных выше параметров.

В работе [8] исследована микротвёрдость быстрозатвердевших фольг висмута, легированного сурьмой, оловом и теллуром (до 8 ат. %), а также поликристаллов висмут–сурьма. Увеличение микротвёрдости, наблюдаемое в этой работе, связано с возникновением упругих деформаций из-за различия в атомных ковалентных радиусах. В [9] показано увеличение микротвёрдости сплавов на основе висмута, легированных свинцом и таллием. В [10] представлена зависимость микротвёрдости от концентрации сурьмы в сплаве висмут–сурьма. Приблизительно до 40 вес. % (55 ат. %) микротвёрдость увеличивается, а затем начинает уменьшаться. В результате исследования микротвёрдости тройных сплавов висмут–олово–теллур было высказано предположение о том, что микротвёрдость в сплавах с малым содержанием примеси определяется в основном не количеством атомов примеси, а изменением электронной концентрации, производимой этой примесью [11]. В [12] приводятся данные о микротвёрдости кристаллов систем $Bi-Sb-Te$ и $Bi-Sb-Sn$, а также нелегированных висмута и сурьмы. Для нелегированного висмута она составляет 130...140 МПа, сурьмы — 550...570 МПа, а для бинарных и тройных сплавов занимает промежуточное значение между указанными значениями. Сравнение микротвёрдости для ионных кристаллов, полупроводников и полуметаллов позволило выявить взаимосвязь между микротвёрдостью и типом химической связи в кристаллах: чем больше степень ковалентности связей, тем выше микротвёрдость.

Монокристаллические образцы сплавов висмут–сурьма имеют ограниченное применение ввиду плохих механических свойств, обусловленных слоистой структурой [13]. Представляет интерес исследовать влияние сверхбыстрой закалки на прочностные свойства и пластичность указанных сплавов.

Установлено, что с увеличением концентрации сурьмы в сплаве $Bi-Sb$ микротвёрдость увеличивается. Это обусловлено возникновением упругих деформаций, связанных с различием атомных размеров Bi и Sb , усилением ковалентных сил связи между атомами кристаллической решётки [1], а также уменьшением среднего размера зерна [14]. В пользу последнего говорит и тот факт, что микротвёрдость фольг,

полученных методом двухстороннего охлаждения (МДО), несколько выше микротвёрдости фольг того же химического состава, но полученных методом одностороннего охлаждения (МОО).

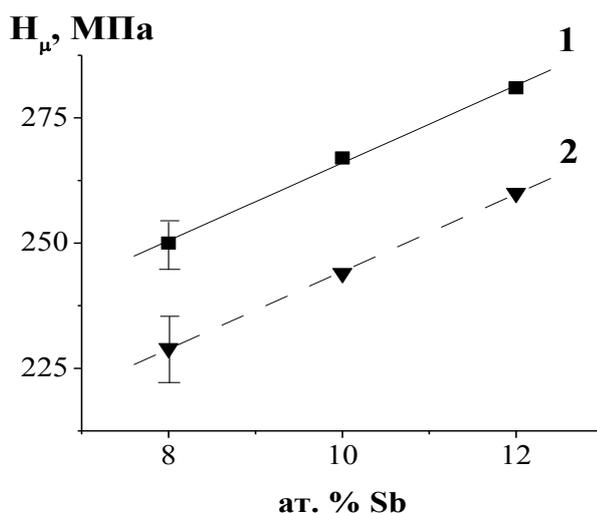


Рисунок 1 – Зависимость микротвёрдости от концентрации сурьмы в фольгах бинарного сплава, полученных МДО (1) и МОО (2)

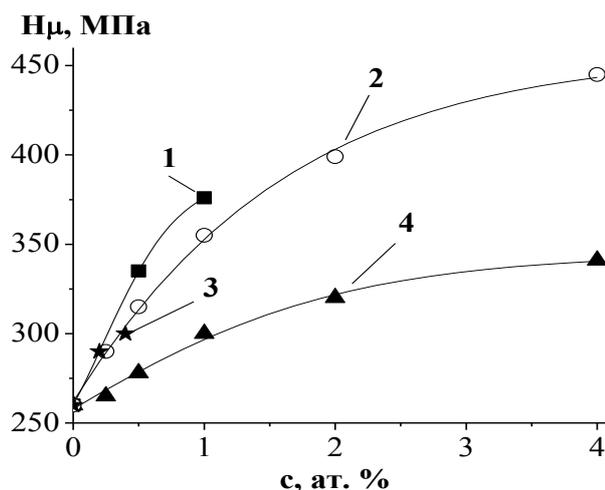


Рисунок 2 – Зависимость микротвёрдости от концентрации серы (1), теллура (2), галлия (3) и олова (4) в фольгах сплава Bi – 12 ат. % Sb, полученных МОО

Легирование третьим компонентом также приводит к увеличению микротвёрдости, особенно заметному при малых концентрациях третьего элемента (рисунок 2). Это связано с наличием упругих деформаций, возникающих из-за различия в атомных радиусах, а также с тем, что при легировании сплава висмут-сурьма происходит измельчение зёрновой структуры (рисунок 3). Уменьшение размеров зёрен при увеличении концентрации сурьмы в бинарном сплаве, а также при его легировании третьим компонентом связано с увеличением количества центров зарождения твёрдой фазы при кристаллизации и уменьшением скорости перемещения межфазных границ.

Следует отметить, что увеличение микротвёрдости при легировании разными элементами различно: в одних случаях микротвёрдость растёт более сильно с увеличением

концентрации третьего компонента (с серой и теллуrom), чем в других (олово). Как было установлено [15], элементы VI группы периодической системы проявляют в сплаве висмут–сурьма донорные свойства, а элементы III и IV – акцепторные. Легирование «донорным» элементом приводит к росту электронной концентрации и усилению металлической связи между атомами, в то время как легирование «акцепторным» элементом приводит к тому, что имеется одна или несколько «незавершённых» ковалентных связей между атомами, что ведёт к ослаблению ковалентного «мостика».

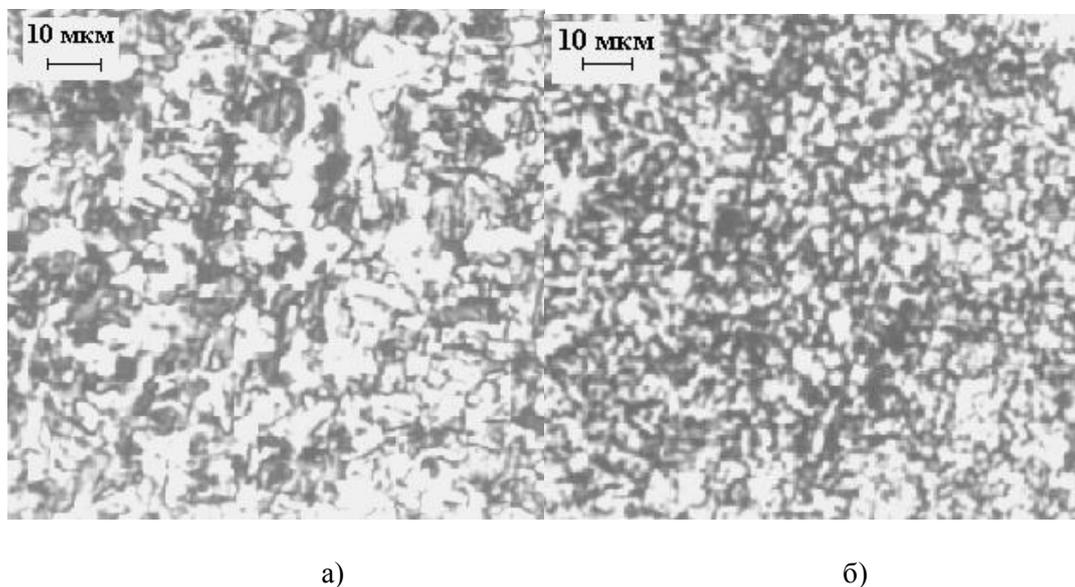


Рисунок 3 – Микроструктура фольг сплавов Bi – 12 ат. % Sb – 0,25 ат. % Sn (а) и Bi – 12 ат. % Sb – 4 ат. % Sn (б), полученных МОО

Равновесная растворимость исследуемых третьих компонентов в сплаве висмут–сурьма ограничена [16]. При сверхбыстрой закалке удаётся значительно повысить взаимную растворимость легирующих компонентов. Рентгеноструктурный анализ позволил построить зависимость изменения межплоскостного расстояния от концентрации третьего элемента. Из рисунка 4 видно, что с увеличением содержания олова, теллура и серы межплоскостное расстояние уменьшается, что свидетельствует об образовании твёрдого раствора замещения. Кроме того, данные твердые растворы являются пересыщенными, что становится возможным благодаря бездиффузионной кристаллизации, при которой расплав затвердевает без перераспределения компонентов и выделения второй фазы.

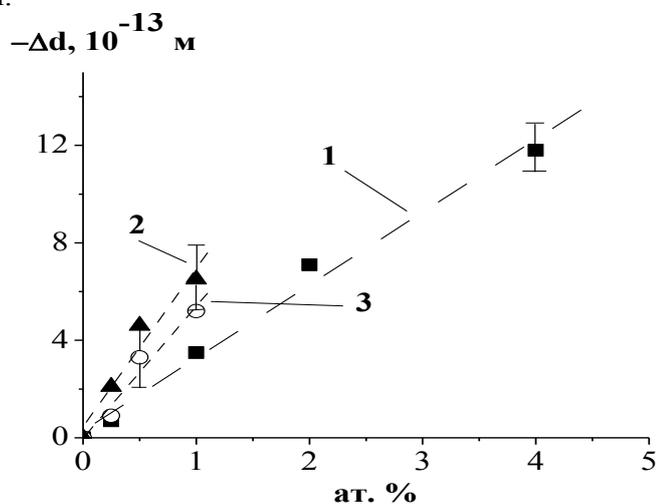


Рисунок 4 – Зависимость изменения межплоскостного

**расстояния от содержания олова (1), серы (2)
и теллура (3) в фольге сплава Bi – 12 ат. % Sb,
полученной ДМО**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гицу, Д.В. Явления переноса в висмуте и его сплавах / Д.В. Гицу [и др.]. – Кишинёв : Штиинца, 1983. – 237 с.
2. Осипов, Э.В. Твёрдотельная криогеника / Э.В. Осипов. – Киев : Наукова думка, 1977. – 234 с.
3. Иорданишвили, Е.К. Термоэлектрические источники питания / Е.К. Иорданишвили. – М. : Сов.Радио, 1968. – 183 с.
4. Прокошин, В.И. Исследование миниатюрных измерительных структур на основе плёнок полуметаллов / В.И. Прокошин, В.Г. Шепелевич, В.А. Ярмолович // Вестник БГУ, Сер. 1. – 1983. – №2. – С. 24–27.
5. Мирошниченко, И.С. Закалка из жидкого состояния / И.С. Мирошниченко. – М. : Металлургия, 1982. – 168 с.
6. Гусакова, С.В. Распределение компонентов в быстрозатвердевших фольгах сплава Bi – 12 ат. % Sb / С.В. Гусакова, А.В. Демидчик, В.Г. Шепелевич // XIII Российский симпозиум по растровой электронной микроскопии и аналитическим методам исследования твёрдых тел : Тез. докл. научн. конф., Черногловка, июнь 2003 г. / РАН. – Черногловка, 2003. – 127с.
7. Демидчик, А.В. Распределение легирующих компонентов в быстрозатвердевших фольгах тройных сплавов на основе Bi – 12 ат. % Sb / А.В. Демидчик // Полесский регион и наука XXI века: Тез. докл. II республ. научн.-практ. конф. аспирантов и мол. учёных / МГПУ. – Мозырь, УО «МГПУ», 2003. – С. 189–190.
8. Хашем, Ф.Ш. Структура и свойства фольг висмута и его сплавов, полученных быстрым охлаждением из расплава : дис. ... канд. физ.- мат. Наук : 01.04.07 / Ф.Ш. Хашем. – Бел. гос. ун-т. – Минск, 1989. – 160 с.
9. Гицу, Д.В. Изучение анизотропии микротвёрдости висмута, легированного таллием и свинцом / Д.В. Гицу, М.П. Дынту // Изв. АН Молдавской ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. – 1975. – № 3. – С. 82–85.
10. Глазов, В.М. Микротвёрдость металлов / В.М. Глазов, В.Н. Вигдорович. – М. : Metallurgizdat, 1962. – 224 с.
11. Мокиевский, Л.И. Электрические свойства сплавов висмута. II / Л.И. Мокиевский, Г.А. Иванов // Журнал технической физики. – 1957. – Т. 27, № 8. – С. 1695–1706.
12. Грабко, Д.З. Механизм деформации кристаллов при микроиндентировании : автореф. ... дис. д-ра физ.-мат. Наук : 01.04.10 / Д.З. Грабко / Институт прикладной физики АН Респ. Молдова. – Кишинёв, 1992. – 70 с.
13. Банага, М.П. Термоэлектрические свойства сплавов висмут-сурьма, полученные методом экструзии / М.П. Банага, Т.Э. Бендерская // Электронные свойства полуметаллов и полупроводников. – 1987. – С. 116–126.
14. Шепелевич, В.Г. Термическая стабильность зёрненной структуры быстрозатвердевших фольг сплавов висмут–сурьма / В.Г. Шепелевич, А.В. Демидчик // Физика и химия обработки материалов. – 2004. – № 1. – С. 73–77.
15. Демидчик, А.В. Электрические свойства быстрозатвердевшей фольги тройных сплавов на основе системы висмут-сурьма и её стабильность при отжиге / А.В. Демидчик, В.Г. Шепелевич // Вестник БГУ. Серия 1. – 2004. – № 2. – С. 19–23.
16. Горелик, С.С. Рекристаллизация металлов и сплавов / С.С. Горелик. – М. : Металлургия, 1978. – 568 с.

The study of microhardness of rapidly bismuth-antimony alloys with low content of Sb (8 to 12 at. %), as well as the effect of doping with various elements of D.I. Mendeleev's periodic system on the properties of these alloys is carried out. The increase in microhardness for all the alloys is shown.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 14.12.2010 г.

Е.М. Овсиюк

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ

Проведено разделение переменных в уравнении Паули в гиперболическом пространстве Лобачевского для частицы со спином 1/2 при наличии внешнего кулоновского поля. Точные решения полученных радиальных уравнений построены в функциях Гойна, найден точный спектр энергии частицы.

Введение

Квантовая механика начиналась с теории атома водорода. Модель атома водорода в квантовой механике основана на предположении о евклидовом характере геометрии трехмерного пространства. Естественно возникают вопросы: что в этом описании атома водорода определяется предположением о евклидовости геометрии пространства, и какие изменения влечет допущение о других пространственных геометриях, например, Лобачевского или Римана. Такие вопросы имеют принципиальное значение, даже если сейчас и нет возможностей для их экспериментальной проверки.

Впервые атом водорода в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны был рассмотрен Шредингером [1] при развитии им метода факторизации в квантовой механике. С помощью этого метода был найден дискретный спектр атома водорода в плоском пространстве. Идея состояла в том, чтобы изменить систему так, чтобы можно было методом факторизации исследовать весь спектр энергии, включая и область $E > 0$. Однако простое помещение атома внутрь ящика конечных размеров, чтобы получить дискретный спектр энергии, не представляло интереса. В связи с этим Шредингер предложил рассматривать атом водорода на фоне пространства постоянной положительной кривизны сферического пространства Римана. Из-за компактности пространства эта модель может моделировать эффект потенциального ящика [1], [2].

В сферических координатах пространства Римана S_3

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

шредингеровский гамильтониан в безразмерных единицах имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{\tan \chi}, \quad (1)$$

где ρ – радиус кривизны; M – масса электрона; $\hbar^2/M\rho^2$ – единица энергии; $e = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\hbar^2}{M\rho^2}$ – константа взаимодействия Кулона; знак $e/\tan \chi$ в (1) соответствует силе притяжения Кулона. Спектр энергии дискретный:

$$\varepsilon_n = -\frac{e^2}{2n^2} + \frac{1}{2} (n^2 - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Впервые атом водорода в пространстве отрицательной кривизны, пространстве Лобачевского H_3 , был рассмотрен Инфельдом и Шильдом [3]

$$dl^2 = d\chi^2 + \cosh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad H = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{\tanh \chi}.$$

В этом случае энергетический спектр содержит дискретную и непрерывную части. Число энергетических уровней конечно, они задаются выражением

$$-\frac{e^2}{2} \leq \varepsilon \leq \left(\frac{1}{2} - e\right), \quad \varepsilon_n = -\frac{e^2}{2n^2} - \frac{1}{2} (n^2 - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

В области $\varepsilon \geq (\frac{1}{2} - e)$ энергетический спектр непрерывен.

Таким образом, модели атома водорода в пространствах Евклида, Лобачевского и Римана существенно различаются, что является следствием различий трех геометрий: E_3 , H_3 , S_3 . К настоящему времени существует большое число работ, касающихся этих обобщенных моделей для атома водорода [4]–[18]. Однако до сих пор не было какого-либо существенного прогресса в исследовании квантовомеханической задачи Кеплера для частицы со спином $1/2$. Следует отметить лишь, что приближенные формулы для энергетического спектра в релятивистском дираковском случае были получены в [13], [16].

В настоящей работе квантовомеханическая задача Кулона для частицы со спином $1/2$ в пространстве Лобачевского решена точно в нерелятивистской теории Паули.

1. Разделение переменных в уравнении Дирака в криволинейных моделях

Рассмотрим процедуру разделения переменных в уравнении Дирака на фоне гиперболического пространства Лобачевского. Диагональная тетрада выбрана следующим образом:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dt^2 - d\beta^2 - \sinh^2 \beta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ e_{(0)}^\alpha &= (1, 0, 0, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 1, 0, 0), \\ e_{(1)}^\alpha &= (0, 0, \sinh^{-1} \beta, 0), \quad e_{(2)}^\alpha = (0, 0, 0, \sinh^{-1} \beta \sin^{-1} \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты вращения Риччи равны

$$\begin{aligned} \gamma_{ab0} = 0, \gamma_{ab3} = 0, \quad \gamma_{ab1} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\coth \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\coth \beta & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \gamma_{ab2} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot \theta \sinh^{-1} \beta & 0 \\ 0 & -\cot \theta \sinh^{-1} \beta & 0 & -\coth \beta \\ 0 & 0 & +\coth \beta & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Общековариантное уравнение Дирака [19]

$$\left[i\gamma^c (e_{(c)}^\alpha \partial_\alpha + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}) - m \right] \Psi = 0$$

принимает вид

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i(\gamma^3 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh \beta}) + \frac{1}{\sinh \beta} \Sigma_{\theta\phi} - m \right] \Psi = 0. \quad (3)$$

С учетом

$$\frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh \beta} = \frac{\gamma^3}{\tanh \beta}, \quad \Psi = \frac{1}{\sinh \beta} \Psi\phi$$

уравнение (3) упрощается

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sinh \beta} \Sigma_{\theta\phi} - m \right] \Psi\phi = 0. \quad (4)$$

Для диагонализации операторов $i\partial_t, \vec{J}^2, J_3$ волновая функция берется в виде [20]

$$\Psi\phi = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} f_1(\chi) D_{-1/2} \\ f_2(\chi) D_{+1/2} \\ f_3(\chi) D_{-1/2} \\ f_4(\chi) D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где функции Вигнера [21] обозначены как $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$. После разделения переменных получаем четыре радиальных уравнения (пусть $\nu = j+1/2$):

$$\begin{aligned} \varepsilon f_3 - i \frac{d}{d\beta} f_3 - i \frac{\nu}{\sinh \beta} f_4 - m f_1 &= 0, & \varepsilon f_4 + i \frac{d}{d\beta} f_4 + i \frac{\nu}{\sinh \beta} f_3 - m f_2 &= 0, \\ \varepsilon f_1 + i \frac{d}{d\beta} f_1 + i \frac{\nu}{\sinh \beta} f_2 - m f_3 &= 0, & \varepsilon f_2 - i \frac{d}{d\beta} f_2 - i \frac{\nu}{\sinh \beta} f_1 - m f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В базисе сферической тетрады оператор пространственного отражения имеет вид

$$\mathbf{P}_{sph.} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \mathbf{P}.$$

Из уравнения на собственные значения $\mathbf{P}_{sph.} \Psi_{jm} = \Pi \Psi_{jm}$ получаем

$$\Pi = \delta (-1)^{j+1}, \quad \delta = \pm 1, \quad f_4 = \delta f_1, \quad f_3 = \delta f_2. \quad (7)$$

При этом (6) упрощается:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) f + (\varepsilon + \delta m) g &= 0, \\ \left(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) g - (\varepsilon - \delta m) f &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь вместо f_1 и f_2 использованы новые переменные f и g :

$$f = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}, \quad g = \frac{f_1 - f_2}{i\sqrt{2}}.$$

2. Уравнение Паули для задачи Кеплера

Исходим из радиальных уравнений свободной частицы (энергия покоя отделяется формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon + m$, и используется приближение $\varepsilon + 2m \approx 2m$ [19])

$$\begin{aligned} \delta = +1, \quad \left(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) f + 2m g &= 0, \\ \left(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) g - \varepsilon f &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta = -1, \quad \left(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) f + \varepsilon g &= 0, \\ \left(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) g - 2m f &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В каждом случае получается свое радиальное уравнение Паули для большой компоненты:

$$\delta = +1, \quad f \gg g, \quad \frac{d^2 f}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu + \text{ch } \beta)}{\sinh^2 \beta} - 2\varepsilon m \right) f = 0; \quad (11)$$

$$\delta = -1, \quad g \gg f, \quad \frac{d^2 g}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu - \text{ch } \beta)}{\sinh^2 \beta} - 2\varepsilon m \right) g = 0. \quad (12)$$

Соответствующие волновые функции для состояний с различной четностью имеют вид

$$\Psi_{jm,\delta=+1} = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{\sinh \beta} \begin{vmatrix} f(\beta) D_{-1/2} \\ f(\beta) D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{jm,\delta=-1} = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{\sinh \beta} \begin{vmatrix} ig(\beta) D_{-1/2} \\ -ig(\beta) D_{+1/2} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Теперь рассмотрим задачу в кулоновском поле. Для этого достаточно в (9), (10) сделать формальную замену

$$\delta = +1, \quad \left(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) f + 2m g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) g - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tanh \beta} \right) f = 0; \quad (14)$$

$$\delta = -1, \quad \left(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) f + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tanh \beta} \right) g = 0,$$

$$\left(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh \beta} \right) g - 2m f = 0. \quad (15)$$

Для каждого значения четности получаем свое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu + \operatorname{ch} \beta)}{\sinh^2 \beta} - 2\varepsilon m - \frac{2m\alpha}{\tanh \beta} \right) f = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d^2 g}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu - \operatorname{ch} \beta)}{\sinh^2 \beta} - 2\varepsilon m - \frac{2m\alpha}{\tanh \beta} \right) g = 0. \quad (17)$$

Для определенности рассмотрим уравнение (16), случай (17) анализируется аналогично. Введем новую переменную $e^\beta = z$. Будем использовать безразмерные величины и следующие обозначения:

$$2\nu \Rightarrow \nu = 2j + 1, \quad 2E \Rightarrow E, \quad 2e \Rightarrow e, \quad (18)$$

тогда

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{1}{4} \frac{\nu(\nu - 2)}{(z+1)^2} + \frac{E - e}{z^2} + \frac{1}{4} \frac{\nu(\nu + 2) + 4e}{z - 1} - \frac{\nu}{z} - \frac{1}{4} \frac{\nu(\nu + 2)}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{4e + \nu(\nu - 2)}{z + 1} \right] f = 0. \quad (19)$$

Сделаем подстановку $f = z^A (z-1)^B (z+1)^C F(z)$, уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F}{dz^2} + \left[\frac{2A+1}{z} + \frac{2B}{z-1} + \frac{2C}{z+1} \right] \frac{dF}{dz} + \\ & + \left[\frac{A^2 + E - e}{z^2} + \frac{B^2 - B - 1/4\nu(\nu + 2)}{(z-1)^2} + \frac{C^2 - C - 1/4\nu(\nu - 2)}{(z+1)^2} + \right. \\ & + \frac{BC + B + 2AB + 1/4\nu(\nu + 2) + e}{z-1} + \frac{C + 2AC - B - 2AB - \nu}{z} \\ & \left. + \frac{-C - 2AC - BC - e - 1/4\nu(\nu - 2)}{z+1} \right] F = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

При A, B, C выбранных согласно

$$\begin{aligned} A^2 + E - e = 0 & \Rightarrow A = \pm \sqrt{e - E}; \\ B^2 - B - 1/4\nu(\nu + 2) = 0 & \Rightarrow B = -\frac{1}{2}\nu, 1 + \frac{1}{2}\nu; \\ C^2 - C - 1/4\nu(\nu - 2) = 0 & \Rightarrow C = \frac{1}{2}\nu, 1 - \frac{1}{2}\nu, \quad (21) \end{aligned}$$

уравнение (20) упрощается

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F}{dz^2} + \left[\frac{2A+1}{z} + \frac{2B}{z-1} + \frac{2C}{z+1} \right] \frac{dF}{dz} + \\ & + \left[\frac{BC + B + 2AB + 1/4\nu(\nu + 2) + e}{z-1} + \frac{C + 2AC - B - 2AB - \nu}{z} + \right. \\ & \left. + \frac{-C - 2AC - BC - e - 1/4\nu(\nu - 2)}{z+1} \right] F = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

что является общим уравнением Гойна $G(p, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$ с параметрами

$$\begin{aligned} p &= -1, & q &= C + 2AC - B - 2AB - v; \\ \gamma &= 2A + 1, & \delta &= 2B, \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2A + 2B + 2C; \\ \alpha\beta &= B + C + 2(AB + AC + BC) + \frac{1}{2}v^2 + 2e; \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \alpha &= A + B + C - \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - B - C - 1/2v^2 - 2e}, \\ \beta &= A + B + C + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - B - C - 1/2v^2 - 2e}. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть

$$A = -\sqrt{e - E}; \quad B = 1 + \frac{1}{2}v; \quad C = \frac{1}{2}v; \quad (25)$$

отрицательное значение A обеспечивает обращение в нуль функции на бесконечности $\chi \rightarrow +\infty$. Положительное значение B обеспечивает обращение в нуль функции в начале координат. Тогда

$$\alpha = 1 + v - \sqrt{e - E} - \sqrt{-e - E}, \quad \beta = 1 + v - \sqrt{e - E} + \sqrt{-e - E},$$

или с учетом (18)

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(j+1) - \sqrt{2e - 2E} - \sqrt{-2E - 2e}, \\ \beta &= 2(j+1) - \sqrt{2e - 2E} + \sqrt{-2E - 2e}. \end{aligned} \quad (26)$$

Наложим дополнительное ограничение

$$\alpha = -2n, \quad (27)$$

что приведет к правилу квантования

$$\sqrt{2e - 2E} + \sqrt{-2E - 2e} = 2(n + j + 1),$$

которое дает

$$-E + \sqrt{E^2 - e^2} = (n + j + 1)^2.$$

Таким образом, мы пришли к формуле для уравнений энергии

$$E = -\frac{e^2}{2(n + j + 1)^2} - \frac{(n + j + 1)^2}{2}; \quad (28)$$

с помощью (28) можно легко получить довольно простое представление для других параметров функций Гойна

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(j+1) - N - \frac{e}{N} - N + \frac{e}{N} = -2n, \\ \beta &= 2(j+1) - N - \frac{e}{N} + N - \frac{e}{N} = 2(j+1) - \frac{2e}{n + j + 1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schrödinger, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Soc. A. – 1940. – Vol. 46, № 1. – P. 9–16.
2. Stevenson, A.F. A note on the «Kepler problem» in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems / A.F. Stevenson // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 59, № 9. – P. 842–843.
3. Infeld, L. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature / L. Infeld, A. Schild // Phys. Rev. – 1945. – Vol. 67, № 3/4. – P. 121–122.
4. Bessis, N. Electronic wave functions in a space of constant curvature / N. Bessis, G. Bessis // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 11. – P. 1991–1997.

5. Higgs, P.W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P.W. Higgs // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 3. – P. 309–323.
6. Leemon, H.I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II / H.I. Leemon // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 14. – P. 489–501.
7. Курочкин, Ю.А. Аналог вектора Рунге–Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Доклады НАН Беларуси. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.
8. Богущ, А.А. О квантовомеханической задаче Кеплера в пространстве Лобачевского / А.А. Богущ, Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Доклады НАН Беларуси. – 1980. – Т. 24, № 1. – С. 19–22.
9. Bessis, N. Atomic fine-structure in a space of constant curvature / J N. Bessis, G. Bessis, R. Shamseddine // Phys. A. – 1982. – Vol. 15, № 10. – P. 3131–3144.
10. Богущ, А.А. Разделение переменных в уравнении Шредингера и нормированные волновые функции в задаче Кеплера в трехмерных пространствах постоянной кривизны / А.А. Богущ, В.С. Отчик, В.М. Редьков // Весці Академии наук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – С. 56–62.
11. Bessis, N. Space-curvature effects in atomic fine- and hyperfine-structure calculations / N. Bessis, G. Bessis, R. Shamseddine // Phys. Rev. A. – 1984. – Vol. 29, № 5. – P. 2375–2388.
12. Bessis, N. Atomic fine-structure calculations in a space of constant negative curvature / N. Bessis, G. Bessis, D. Roux // Phys. Rev. A. – 1984. – Vol. 30, № 2. – P. 1094–1097.
13. Shamseddine, R. On the resolution of the wave equations of electron in a space of constant curvature / R. Shamseddine // Can. J. Phys. 1997. – P. 805–811.
14. Bogush, A.A. Algebra of conserved operators for the Kepler-Coulomb problem in the spaces of constant curvature / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik // Yad. Fiz. – 1998. – Vol. 61, № 10. – P. 1889–1892.
15. Nersessian, A. Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudospheres / A. Nersessian, G. Pogosyan // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 63, № 2. – P. 020103(R).
16. Red'kov, V.M. On WKB-quantization in Lobachevski and Riemann 3-spaces / V.M. Red'kov // NPCS. – 2003. – Vol. 6, № 2. – P. 654–668.
17. Bogush, A.A. Coulomb scattering in the Lobachevsky space / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik // NPCS. – 2003. – Vol. 6. – P. 894–897.
18. Kurochkin, Yu. Regge trajectories of the Coulomb potential in the space of constant negative curvature / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy // J. Math. Phys. – 2006. – Vol. 47, № 2. – P. 022103.
19. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.
20. Редьков, В.М. Общековариантное уравнение Дирака: сферическая симметрия и D-функции Вигнера, спинорные монополярные гармоники / В.М. Редьков; АН БССР, Ин-т физики. – Минск, 1988. – 39 с. – Деп. в ВИНТИ 9.03.88, № 4577–В 88 // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1989. – № 4. – С. 117–118.
21. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград : Наука, 1975. – 439 с.

E.M. Ovsiyuk. Quantum Kepler Problem for Nonrelativistic Spin 1/2 Particle in the Lobachevsky Space, Exact Solutions of the Pauli Equation

Transition to a nonrelativistic Pauli equation in hyperbolic Lobachevsky space for a Dirac particle in presence of the Coulomb field is performed in the system of radial equations. Exact solutions are constructed in terms of Heun functions. The energy spectrum is obtained.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 08.12.2010 г.

В.А. Плетюхов**ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ
ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1**

Исследованы внутренние симметрии массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1. Показано, что симметрия уравнения с $m \neq 0$ описывается группой $SO(3,1)$, которая содержит в качестве подгруппы зарядовую симметрию, присущую обычному уравнению Дирака. В безмассовом случае имеет место 12-параметрическая группа симметрии, которая, в частности, содержит в качестве подгруппы преобразования Паули-Гюрши.

Введение

В последние годы в связи с получением графена появилось множество публикаций, посвященных теоретическому описанию двумерных кристаллических структур [1]. Существенное место среди этих публикаций занимает исследование симметричных свойств дираковских полей в пространстве размерности 2+1.

В работах [2, 3] был развит подход, основанный на использовании вещественной матричной формы описания дираковских и дирак-кэлеровских полей в обычном 4-мерном пространстве 3+1. При этом было установлено наличие более широкой группы внутренней симметрии указанных полей, чем считалось ранее.

В настоящей работе данный подход применяется для исследования внутренних симметрий массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве 2+1.

Вещественная форма уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1

Уравнение Дирака в трехмерном пространстве-времени можно получить из обычного уравнения Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \quad (\mu = 0,1,2,3), \quad (1)$$

исключив из него одно пространственное измерение, например, x_3 . В результате получим уравнение:

$$(\gamma_k \partial_k + m)\psi = 0 \quad (k = 0,1,2). \quad (2)$$

Будем использовать метрику, соответствующую выбору $x_0 = ict$. Матрицы Дирака возьмем в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где σ – матрицы Паули.

Применяя к (2) операцию комплексного сопряжения и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, приходим к 8-компонентной системе уравнений, эквивалентной исходному уравнению (2). Ее также можно записать в стандартной матричной форме

$$(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi = 0, \quad (4)$$

где $\Psi = (\psi, \psi^*)$ – столбец и матрицы Γ_k имеют размерность 8x8. Если теперь перейти в базис, в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{pmatrix}, \quad \psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*) \quad (5)$$

и матрицы Γ_k имеют вид

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2, \quad (6)$$

полученная система становится, как нетрудно проверить, вещественной. Уравнение (4) с волновой функцией (5) и матрицами (6) будем называть вещественной формой исходного

уравнения (2), (3) (подробный комментарий по поводу данной терминологии содержится в работе [2]). Указанную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии уравнения (2), (3).

Внутренняя симметрия массивного уравнения Дирака

Перейдем сначала в так называемый фермионный базис в котором диракоподобные матрицы Γ_k принимают вид

$$\Gamma_k = I_2 \otimes \gamma_k. \quad (7)$$

Данный переход осуществляется посредством унитарного преобразования [4]

$$A = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (8)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Преобразования внутренней симметрии уравнения (4), коммутирующие с матрицами Γ_k (7), задаются в этом базисе матрицами двух типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad (9)$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_4, \quad (10)$$

где

$$\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 \quad (11)$$

(множитель i в (11) обеспечивает эрмитовость γ_4), $q_{mn}^{(1)}$, $q_{mn}^{(2)}$ – произвольные комплексные матрицы 2×2 .

Возвращаясь с помощью обратного преобразования (8) в базис (5), для матриц Q_1 , Q_2 получим выражения:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2, \quad (12)$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \rho_2 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_4\gamma_2, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(1)} + q_{22}^{(1)}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(1)} - q_{22}^{(1)}), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(1)} + q_{21}^{(1)}), \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(1)} - q_{21}^{(1)}), \quad (14)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(2)} + q_{22}^{(2)}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{11}^{(2)} - q_{22}^{(2)}), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(2)} + q_{21}^{(2)}), \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(q_{12}^{(2)} - q_{21}^{(2)}).$$

Накладывая на преобразования

$$\Psi' = Q_1 \Psi, \quad \Psi' = Q_2 \Psi \quad (15)$$

условие сохранения структуры (5) волновой функции Ψ (условие вещественности 8-компонентного поля), найдем следующие ограничения на элементы матриц Q_1 (12), Q_2 (13):

$$\alpha_1, \lambda_1, \beta_2, \rho_2 - \text{вещественные}, \quad (16)$$

$$\beta_1, \rho_1, \alpha_2, \lambda_2 - \text{чисто мнимые}.$$

Преобразования (12), (13) при выполнении условий (16) могут быть параметризованы посредством эрмитовских матриц, имеющих в базисе (5) вид:

$$J^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \quad J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \quad (17)$$

$$I^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \quad I^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^4 = I_2 \otimes \gamma_4.$$

В фермионном базисе получим:

$$J^i = \sigma_i \otimes I_4, \quad I^i = \sigma_i \otimes \gamma_4, \quad I^4 = I_2 \otimes \gamma_4, \quad (18)$$

Сравнивая (17) с общими выражениями (12), (13) для матриц Q_1, Q_2 , находим для параметров $\omega_i, \Omega_i, \Omega_4$, соответствующих генераторам J^i, I^i, I^4 , значения ($\omega_1 \rightarrow J^i, \Omega_i \rightarrow I^i, \Omega_4 \rightarrow I^4$):

$$\begin{aligned} \omega_2 = i\rho_1, \quad \omega_3 = \lambda_1, \quad \Omega_2 = \rho_2, \quad \Omega_3 = -i\lambda_2, \quad \Omega_4 = -i\alpha_2 - \text{вещественные}, \\ \omega_1 = \beta_1, \quad \Omega_1 = -i\beta_2 - \text{мнимые}. \end{aligned} \quad (19)$$

Наложим теперь на генераторы (17) (или (18)) и параметры (19) условие

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega \eta J \quad (20)$$

(η – матрица билинейной формы), вытекающее из требования

$$Q^+ \eta Q = \eta \quad (21)$$

инвариантности лагранжиана теории

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi \quad (22)$$

относительно преобразований внутренней симметрии. При этом учтем, что матрица η в базисах (5) и фермионом имеет соответственно вид:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_0, \quad (23)$$

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0. \quad (24)$$

В результате получим, что условию (20) удовлетворяют шесть генераторов J^i и I^i . Эти генераторы удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [J^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} I^k, \\ [I^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k \end{aligned} \quad (25)$$

и, следовательно, образуют 6-параметрическую группу. Генераторы J^i образуют в ней подгруппу $SO(2,1)$ типа зарядовой симметрии, присущую массивному уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Симметрия безмассового поля

В безмассовом случае ($m = 0$) инвариантность уравнения

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0, \quad (26)$$

наряду с преобразованиями Q_1, Q_2 , коммутирующими с матрицами Γ_k , может быть обеспечена также преобразованиями, антикоммутирующими с Γ_k :

$$[Q, \Gamma_k]_+ = 0. \quad (27)$$

Условию (27) удовлетворяют матрицы следующих двух типов (в фермионом базисе):

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad (28)$$

$$Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5. \quad (29)$$

Здесь $q^{(3)} = q_{mn}^{(3)}$, $q^{(4)} = q_{mn}^{(4)}$ – произвольные комплексные матрицы 2x2; γ_3, γ_5 – матрицы Дирака

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (30)$$

В базисе (5) матрицы Q_3, Q_4 принимают вид

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \beta_3 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \otimes \gamma_3 + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \rho_3 \\ -\rho_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 \gamma_3, \quad (31)$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} \beta_4 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 + \begin{pmatrix} \lambda_4 & \rho_4 \\ -\rho_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 \gamma_5, \quad (32)$$

где числа $\alpha_3, \beta_3, \lambda_3, \rho_3, \alpha_4, \beta_4, \rho_4, \lambda_4$ выражаются через элементы матриц $q_{mn}^{(3)}, q_{mn}^{(4)}$ по формулам, аналогичным (14). Требование вещественности поля приводит к следующим ограничениям на эти числа:

$$\begin{aligned} \alpha_3, \lambda_3, \beta_4, \rho_4 &- \text{вещественные,} \\ \beta_3, \rho_3, \alpha_4, \lambda_4 &- \text{чисто мнимые.} \end{aligned} \quad (33)$$

Инвариантность лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (34)$$

безмассового поля относительно преобразований Q_3, Q_4 обеспечивается выполнением условий

$$Q_3^+ \eta \Gamma_k Q_3 = \eta \Gamma_k, \quad Q_4^+ \eta \Gamma_k Q_4 = \eta \Gamma_k, \quad (35)$$

принимаящих с учетом антикоммутации матриц Γ_k с Q_3, Q_4 вид:

$$Q_3^+ \eta Q_3 = -\eta, \quad Q_4^+ \eta Q_4 = -\eta. \quad (36)$$

Условия (36) приводят к дополнительным ограничениям на элементы матриц Q_3, Q_4 :

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 + \rho_3^2 - \beta_3^2 - \lambda_3^2 &= 1, \\ \beta_4^2 + \lambda_4^2 - \alpha_4^2 - \rho_4^2 &= 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Условия (33), (37) означают, что матрицы Q_3, Q_4 задают некоторое шестипараметрическое преобразование, которое можно параметризовать, например, посредством эрмитовских генераторов K^i, L^i ($i=1, 2, 3$), имеющих в фермионном базисе вид:

$$K^i = \sigma_i \otimes \gamma_3, \quad L^i = \sigma_i \otimes \gamma_5. \quad (38)$$

В базисе (5) для K^i, L^i получаются выражения:

$$\begin{aligned} K^1 &= I_2 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3 \gamma_2, \quad K^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3 \gamma_2, \\ L^1 &= I_2 \otimes \gamma_5, \quad L^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_5 \gamma_2, \quad L^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_5 \gamma_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Сравнивая (39) с общими выражениями (31), (32) для матриц Q_3, Q_4 в базисе (5), заключаем, что генераторам K^i, L^i соответствуют параметры ($\Theta_i \rightarrow K^i, \Lambda_i \rightarrow L^i$)

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \beta_3, \quad \Theta_2 = -i\rho_3, \quad \Theta_3 = -\lambda_3, \\ \Lambda_1 &= \beta_4, \quad \Lambda_2 = i\rho_4, \quad \Lambda_3 = \lambda_4, \end{aligned} \quad (40)$$

среди которых три вещественных ($\Lambda_1, \Theta_2, \Theta_3$) и три мнимых ($\Theta_1, \Lambda_2, \Lambda_3$) параметра.

Заключение

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжевой формулировки безмассового уравнения Дирака в пространстве 2+1 описывается 12-параметрическим преобразованием, алгебра генераторов которого, наряду с (25), характеризуется соотношениями:

$$\begin{aligned} [K^i, K^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [L^i, L^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [J^i, K^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} K^k, \\ [J^i, L^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} L^k \end{aligned} \quad (41)$$

и т.д. Помимо упоминавшейся выше группы $SO(2,1)$ зарядовой симметрии, здесь содержится в качестве подгруппы также группа $SO(3)$ Паули-Гюрши с генераторами J^1, L^2, L^3 , присущая безмассовому уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Полученные результаты могут представлять интерес с точки зрения теоретического описания симметричных свойств графена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bashir, A. Fermions in old space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. Calicia // arXiv: hep-ph / 0502089v1 9 Feb 2005.
2. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака–Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
3. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАНБ, сер. фіз.-мат. н. – 2010. – № 4. – С. 89–94.
4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та, сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2009. – № 2. – С. 46–51.

V.A. Pletyukhov. Internal Symmetry of Dirac Equation in Space-Time 2+1

Internal symmetries of massive and massless Dirac equation in space-time 2+1 dimensions are investigated. It is shown that the massive equation ($m \neq 0$) has the symmetry group $SO(3,1)$ and include the charge symmetry as subgroup. The massless Dirac equation has 12-parameters symmetry group which as subgroup contains the transformations of Pauli–Gursey type

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.02.2011 г.

А.Ф. Ревинский, В.В. Тригук, Е.А. Багаль

AB-INITIO РАСЧЕТ ФОНОННОГО СПЕКТРА И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК MgB₂

В работе проведен ab-initio расчет (из первых принципов) динамики кристаллической решетки высокотемпературного сверхпроводника MgB₂. Полученные результаты находятся в хорошем согласии как с экспериментальными, так и известными теоретическими данными. Результаты работы могут быть в дальнейшем использованы для теоретического анализа характера сверхпроводимости данного соединения, в частности, для определения констант электрон-фононного взаимодействия.

Введение

Всплеск интереса к исследованию свойств диборида магния MgB₂ обусловлен открытием в нем высокотемпературной сверхпроводимости ($T_c \approx 39\text{ K}$) [1], а также обнаружением В. Моцалковым и др. [2] весьма загадочного явления, названного сверхпроводимостью полупрозрачного типа (type 1.5 superconductivity). Вместе с тем, при наличии огромного количества как экспериментального, так и теоретического материала все же существует много вопросов, ответ на которые остается на сегодняшний день открытым. В частности, является не вполне физически понятным сам механизм сверхпроводимости в MgB₂, т.к. при такой критической температуре ($T_c \approx 39\text{ K}$) его вполне можно отнести к высокотемпературным сверхпроводникам, теории образования куперовских пар для которых пока не существует. Много неясностей связано также с аномальным изменением теплоемкости MgB₂ при низких температурах. Ранее [3] нами были проведены расчеты электронной и решеточной составляющих теплоемкости MgB₂ как для нормального, так и сверхпроводящего состояний. При этом было сделано предположение, что основной причиной аномалии температурного хода теплоемкости диборида магния является наличие в нем двух энергетических щелей в сверхпроводящем состоянии. Однако для более глубокого понимания сути вышеуказанных явлений является необходимым проведение т.н. ab-initio расчетов динамики кристаллической решетки и решеточной составляющей теплоемкости MgB₂. В связи с этим целью настоящей работы является расчет из первых принципов частот нормальных колебаний, кривой плотности фононных состояний (фононного спектра), а также температурной зависимости внутренней вибрационной энергии теплоемкости диборида магния.

Расчет фононного спектра

Диборида магния MgB₂ (рисунок 1) имеет гексагональную кристаллическую структуру (пространственная группа D_{6h}^1) [1]. Элементарная ячейка содержит одну формульную единицу – три атома. Координаты атомов в базисе примитивных трансляций равны соответственно: $Mg(0,0,0)$, $B1\left(\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{c}{2}\right)$, $B2\left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{c}{2}\right)$. Из данного факта следует, что полное число нормальных колебаний равно 9 (3 акустических и 6 оптических).

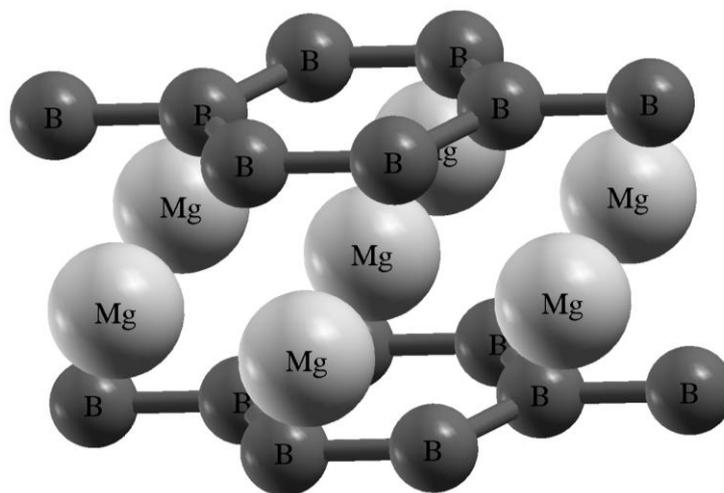


Рисунок 1 – Кристаллическая структура диборида магния

Во всех расчетах (как основного состояния, так и функций отклика кристалла) нами был использован программный пакет abinit [4, 5], свободно распространяемый по лицензии GPL. Использовался метод сохраняющих норму псевдопотенциалов [6] с разложением волновых функций валентных электронов по плоским волнам. Максимальная энергия плоских волн принималась равной 90 Ry. Интегрирование по зоне Бриллюэна выполнялось на сетке $16 \times 16 \times 16$.

Следует заметить, что при расчете функций отклика решетки (в том числе фоновых спектров) в рассматриваемом пакете применяется теория возмущений [5], что позволяет избежать крайне ресурсоемких вычислений с применением так называемых «супер-ячеек», составленных из большого количества примитивных ячеек.

Постоянные решетки вычислялись из условия минимума полной энергии кристалла в основном состоянии ($T = 0$). В связи с тем, что время вычисления данной величины для фиксированных a_0, b_0, c_0 оказывается весьма незначительным, вычислительную процедуру для наглядности можно провести на фиксированной двухмерной сетке значений ($a_0 = b_0, c_0$). Точкой обозначено равновесное значение $a_0 = b_0 = 3,059 \text{ \AA}$, $c_0 = 3,575 \text{ \AA}$.

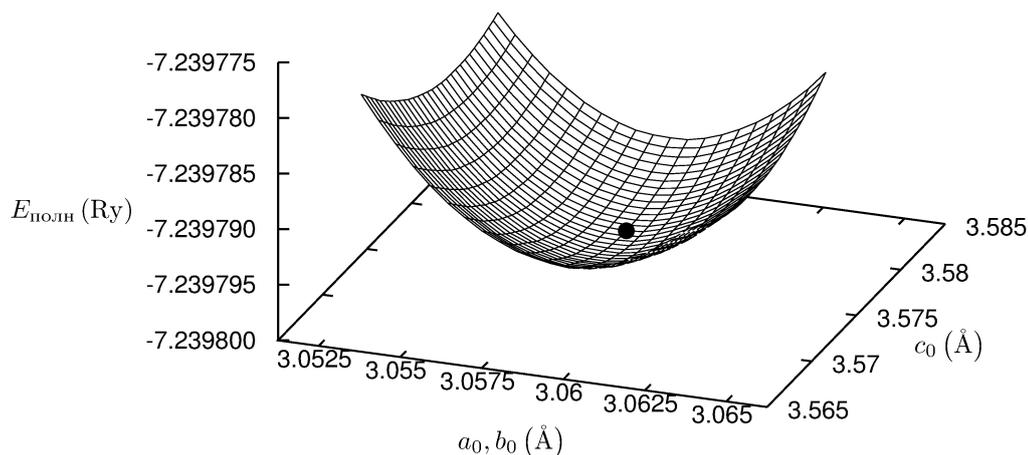


Рисунок 2 – Теоретическая зависимость полной энергии кристалла от постоянных решетки $a_0 = b_0, c_0$.

В таблице 1 представлены рассчитанные нами частоты нормальных колебаний в центре зоны Бриллюэна в сравнении с существующими в литературе экспериментальными [7] и теоретическими [7, 8] данными.

Таблица 1 – Частоты (см^{-1}) нормальных колебаний MgB_2 для точки Γ зоны Бриллюэна

Тип симметрии, кратность вырождения	Результаты настоящей работы	Экспериментальные данные [5]	Расчетные данные [5]	Расчетные данные [6]
E_{1u} (2)	312	322	327	349
A_{2u} (1)	403	394	405	426
E_{2g} (2)	773	536	571	575
B_{1g} (1)	572	696	702	708

Следует отметить, что, в частности, частота E_{2g} обусловлена колебаниями атомов в плоскостях атомов бора, где наблюдается существенное скопление электрического заряда между атомами [3]. По этой причине величина данной частоты существенно обусловлена дополнительно ангармоническими взаимодействиями.

Расчитанная кривая плотности фононных состояний $g(\omega)$ представлена на рисунке 3. Видно, что в низкочастотной области фононный спектр является сугубо дебаевским, а именно $g(\omega) \sim \omega^2$.

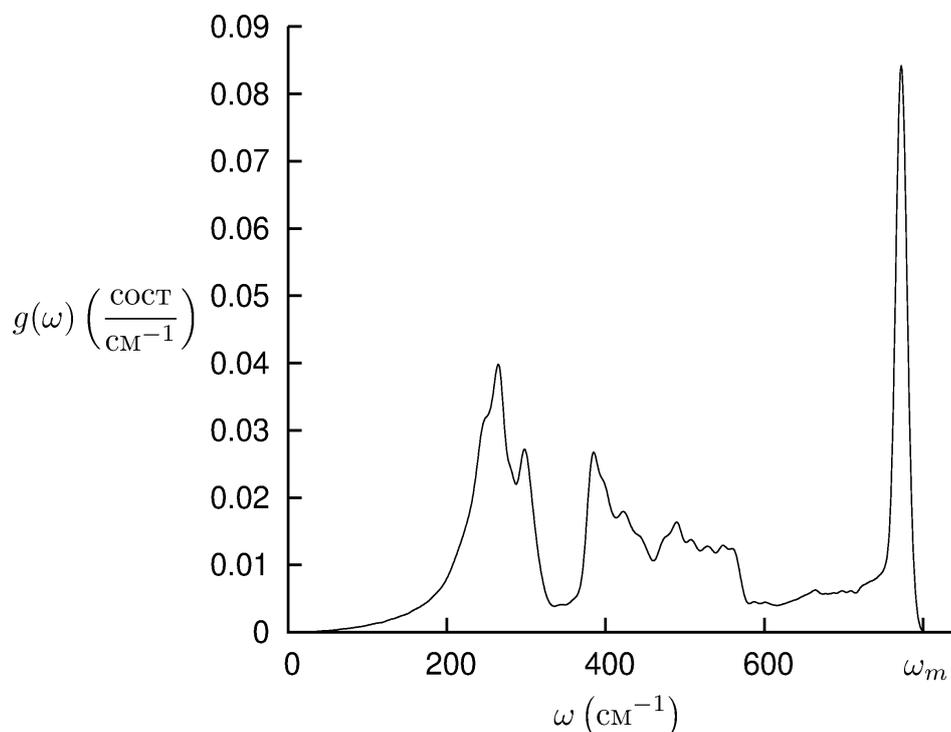


Рисунок 3 – Фононный спектр MgB_2

Термодинамические свойства

Имея в наличии фононный спектр $g(\omega)$, можно провести последовательный расчет широкого круга термодинамических функций, в частности, внутренней вибрационной энергии и теплоемкости. В расчете на один моль получим [6], что

$$U_m = \int_0^{\omega_m} g(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \hbar\omega d\omega, \quad (1)$$

$$C_{mV} = \int_0^{\omega_m} g(\omega) \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^2}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)} d\omega, \quad (2)$$

где ω_m – предельная частота в фононном спектре (рисунок 3).

На рисунке 4 представлен температурный ход внутренней энергии MgB_2 . Здесь U_m^0 – энергия нулевых колебаний. В приближении Дебая она равна [7]:

$$U_m^0 = \frac{27}{8} R\theta, \quad (3)$$

где θ – т.н. характеристическая температура Дебая. С учетом того, что формульная единица MgB_2 содержит три атома, из формулы (3) получим, что $\theta = 914$ К.

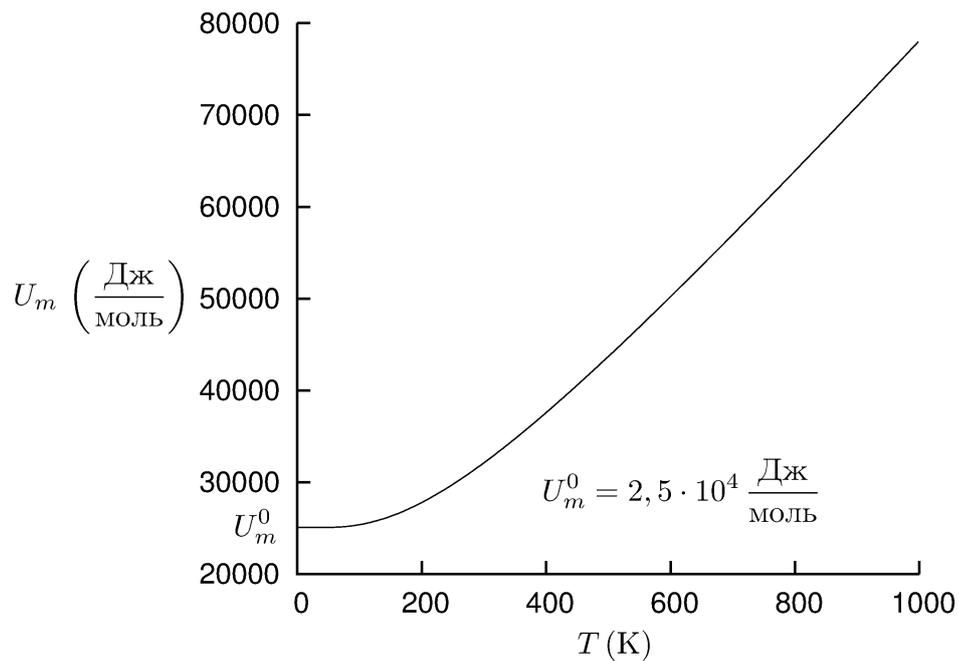


Рисунок 4 – Зависимость внутренней энергии MgB_2 от температуры

Рассчитанная согласно (2) температурная зависимость решеточной теплоемкости MgB_2 представлена на рисунке 5. Видно, что начиная с температуры Дебая θ , теплоемкость MgB_2 постепенно стремится согласно закону Дюлонга–Пти к величине $9R$.

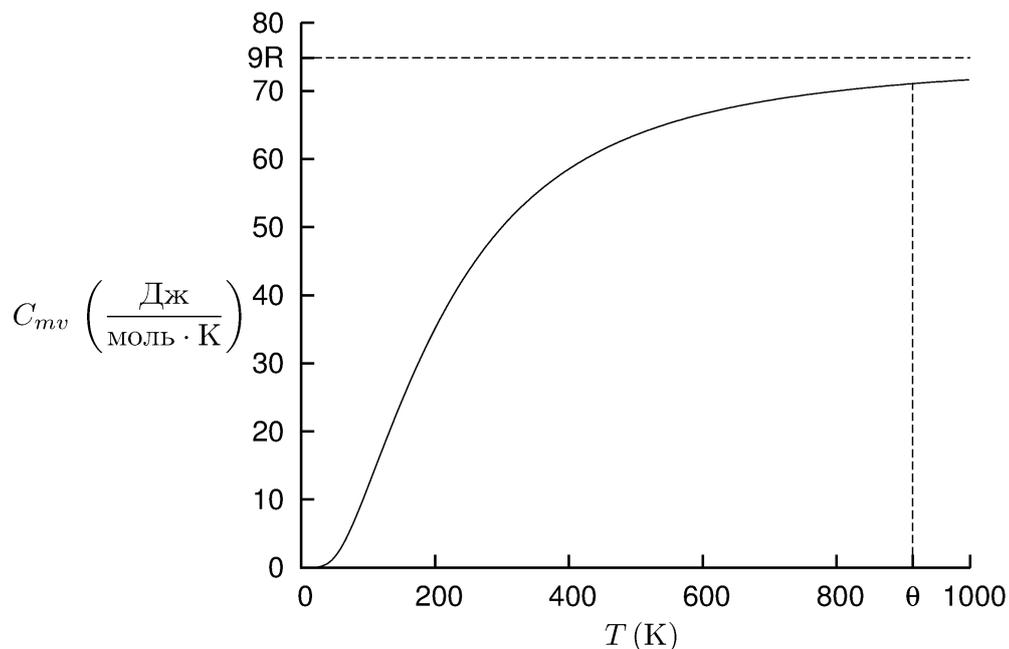


Рисунок 4 – Температурный ход решеточной теплоемкости MgB_2

Заключение

Таким образом, полученные нами результаты находятся в хорошем согласии и известными литературными данными (как экспериментальными, так и теоретическими). Вычисленные зависимости могут быть в дальнейшем использованы для теоретического анализа характера сверхпроводимости данного соединения, в частности, для определения констант электрон-фононного взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивановский, А.Л. Зонная структура и свойства сверхпроводящего MgB_2 и родственных соединений (обзор) / А.Л. Ивановский // ФТТ. – 2003. – Т.45, № 10. – С. 1742–1769.
2. Type-1.5 superconductivity / V. Moschalkov [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 102. – P. 117001-1–117001-4.
3. Викарук, Е.В. Химическая связь и особенности теплоемкости сверхпроводника MgB_2 / Е.В. Викарук, А.Ф. Ревинский // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. – 2006. – №3(27). – С. 37–43.
4. First-principles computation of material properties: the ABINIT software project / X. Gonze [et al.] // Computational Materials Science. – 2002. – Vol. 25. – P. 478–492.
5. Gonze, X. First-principles responses of solids to atomic displacements and homogeneous electric fields: Implementation of a conjugate-gradient algorithm / X. Gonze // Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55, № 16. – P. 10337–10354.
6. Ревинский, А.Ф. Квантовая теория динамики кристаллической решетки / А.Ф. Ревинский // Из-во БрГУ им. А.С. Пушкина. – Брест, 1998.
7. Bohnen, K.-P. Phonon dispersion and electron-phonon coupling in MgB_2 and AlB_2 / K.-P. Bohnen, R. Heid, B. Ronker // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86. – P. 5771–5774.
8. Electron-phonon interaction in the normal and superconducting states of MgB_2 / Y. Kong [et al.] // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64. – P. 020501-1 – 020501-4.
A.F. Ravinski, V.V. Triguk, E.A. Bahal. Ab-Initio Calculation of Phonon Spectrum and Thermodynamic Properties of MgB_2

First principle (ab-initio) calculations of crystal lattice dynamics of high-temperature superconductor MgB_2 is conducted in this paper. Our findings are in good agreement with experimental and

other theoretical data. The results of this work may be used for theoretical analysis of superconductivity of this compound, particularly for determination of electron-phonon coupling constants.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 11.02.2011 г.

А.И. Серый

К ВОПРОСУ О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ФОТОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В релятивистском подходе с использованием электронного пропагатора вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся параллельно магнитному полю жестких рентгеновских фотонов со спиральностями, положительными и отрицательными по отношению к спину электрона. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов.

Введение. Постановка задачи

В данной работе исследования проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова.

Эффект комптоновского вращения плоскости поляризации жестких рентгеновских (мягких гамма-) фотонов в отсутствие магнитного поля был теоретически предсказан В.Г. Барышевским и В.Л. Любошицем [1, с. 89] в 1965 г., а в начале 1970-х гг. обнаружен экспериментально. При наличии квантующего магнитного поля появляется возможность резонансного поглощения фотона при переходах электрона между уровнями Ландау. При $\hbar\omega \gg 2\mu_B B$ либо $\hbar\omega \ll 2\mu_B B$ (μ_B – магнетон Бора) таким поглощением можно пренебречь. Жесткий рентгеновский и мягкий гамма-диапазон (0,1–5 МэВ) удовлетворяет 2-му случаю при магнитных полях вблизи полюсов магнетаров ($\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс). При этом электроны практически полностью поляризованы.

Рассмотрим фотон, движущийся в электронном газе параллельно магнитному полю при указанных выше условиях. Рассмотрим амплитуду комптоновского рассеяния для круговой поляризации, которая будет использована при вычислении угла комптоновского поворота плоскости поляризации фотона. Применяемый подход использовался для вычисления резонансного сечения эффекта Комптона в магнитном поле, причем интегрирование по углам не производилось [2, с. 323]. В зарубежных публикациях [3; 4] либо использовался нерелятивистский подход, либо матричный элемент в общем виде не вычислялся до конца, либо также рассматривался случай резонансного рассеяния; отмечалось, что в общем виде точное интегрирование до конца произвести не удастся. О проблеме комптоновского вращения никто из зарубежных исследователей не упоминал, поэтому случай круговой поляризации фотона ими специально не рассматривался.

Характеристики фотона, электрона и внешнего магнитного поля

Величины, соответствующие конечному состоянию, будем снабжать штрихом. Для магнитного поля с индукцией B (которое направлено по оси z) выберем калибровку векторного потенциала [2, с. 320]:

$$A_0 = A_x = A_z = 0, A_y = Bx. \quad (1)$$

Четырехмерный импульс конечного и начального фотона:

$$\hbar k'_\mu = \left(\frac{\hbar\omega'}{c}, k'_x, k'_y, k'_z \right), \hbar k_\mu = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, 0, 0, k_z \right) \Rightarrow k_z = \frac{\hbar\omega}{c}. \quad (2)$$

Введем обозначение $u = \cos\theta'$, где θ' – угол между направлением движения рассеянного фотона и вектором индукции магнитного поля. С учетом законов сохранения запишем (вид наших формул несколько отличается от [2, с. 321]):

$$\hbar\omega'(1-u^2) = \varepsilon_0 - p_z c + \hbar\omega(1-u) - \sqrt{(\varepsilon_0 - p_z c + \hbar\omega(1-u))^2 + 2(u^2 - 1)(\varepsilon_0 - p_z c)\hbar\omega},$$

$$\omega' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (|2k-3|)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2 \frac{\varepsilon_0 - p_z c}{\hbar} \omega)^k}{(\frac{\varepsilon_0 - p_z c}{\hbar} + \omega(1-u))^{2k-1}} \cdot (u^2 - 1)^{k-1}, \quad (3)$$

где p_z – импульс начального электрона по оси z , m – его масса, а

$$\varepsilon_n = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2 + 2neB\hbar}, \quad n \geq 0. \quad (4)$$

Волновые функции электронов выразим через биспиноры u_n и функции Эрмита H_n [2, с. 320]:

$$\Psi(\zeta) = A_n [i(2eB\hbar)^{1/2} U_n(\zeta) + (mc^2 + \mu\tilde{m}c^2) U_{n-1}(\zeta) \gamma_1] u_n,$$

$$U_n(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) H_n(\zeta), \quad n \geq 0,$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar c \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + mc^2)} \sqrt{eB\hbar}} \quad \text{при } \mu = -1, \quad A_n = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c} \frac{\varepsilon_n + \mu\tilde{m}c^2}{4c^4 p_z^2 \tilde{m} \varepsilon_n (\tilde{m}c^2 + \mu\tilde{m}c^2)}},$$

$$u_n = [0 \quad \mu\tilde{m}c^2 - \varepsilon_n \quad 0 \quad p_z c]^T, \quad \tilde{m}c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2} = \varepsilon_0. \quad (5)$$

T означает транспонирование. Матрицы Дирака γ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) берем в стандартном представлении. При построении электронного пропагатора будем использовать матрицы [2, с. 320] (i – мнимая единица):

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1), \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_2\gamma_1). \quad (6)$$

Как и в отсутствие магнитного поля, импульсы виртуального промежуточного электрона для R - и S -процесса выражаются, соответственно, по формулам [2, с. 320]:

$$\vec{g} = \vec{p} + \hbar\vec{k} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}' \Rightarrow cg_0 = \varepsilon_0 + \hbar\omega, cg_3 = p_z c + \hbar\omega,$$

$$\vec{f} = \vec{p}' - \hbar\vec{k} = \vec{p} - \hbar\vec{k}' \Rightarrow cf_0 = \varepsilon_0 - \hbar\omega' = \varepsilon'_0 - \hbar\omega, cf_3 = p_z c - \hbar\omega' = p'_z c - \hbar\omega. \quad (7)$$

Согласно [2, с. 320–321], нам также понадобятся переобозначения координат (p_y, p'_y – y -компоненты импульса начального и конечного электрона; $k = 1, 2$):

$$L(x_k, p) = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} (x_k + \frac{cp}{eB}), \quad \xi_k = L(x_k, p'_y), \quad \zeta_k = L(x_k, p_y),$$

$$\rho_k = L(x_k, g_y), \quad \eta_k = L(x_k, f_y). \quad (8)$$

В состав пропагатора входят конструкции вида [2, с. 321]:

$$\begin{aligned}
G_B(\lambda; x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c^2}{c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i \cdot 0} (U_n(x_1)U_n(x_2)(\gamma_0 \lambda_0 - \gamma_3 \lambda_z + mc)\beta_1 + \\
&+ (1 - \delta_{0n})U_{n-1}(x_1)U_{n-1}(x_2)(\gamma_0 \lambda_0 - \gamma_3 \lambda_z + mc)\beta_2 + \\
&+ (1 - \delta_{0n})i\sqrt{\frac{2neB\hbar}{c}} (U_{n-1}(x_1)U_n(x_2)\gamma_1\beta_1 - U_n(x_1)U_{n-1}(x_2)\beta_1\gamma_1). \quad (9)
\end{aligned}$$

Упрощение матричного элемента

В [2, с. 321] приводится матричный элемент процесса, причем интегрирование по координатам не доведено до конца:

$$F_{\mu\nu} = \frac{-i\alpha(2\pi\hbar)^4 c e_\mu e_\nu'^*}{\hbar V S \sqrt{\omega\omega'}} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}(\xi_1) Q_{\mu\nu} \Psi(\zeta_2). \quad (10)$$

Здесь $\alpha = e^2 / \hbar c$; $e_\mu, e_\nu', \omega, \omega'$ – компоненты вектора поляризации, а также частоты начального и конечного фотонов соответственно, V – нормировочный объём для фотона, S – нормировочная площадь для электрона в плоскости (xy) . δ -функция включает в себя y -, z - и t -компоненты. $Q_{\mu\nu}$, согласно (2), упрощается по сравнению с [2, с. 321]:

$$Q_{\mu\nu} = \exp(-ik'_x x_1) \gamma_\nu G_B(g; \rho_1, \rho_2) \gamma_\mu + \exp(-ik'_x x_2) \gamma_\mu G_B(f; \eta_1, \eta_2) \gamma_\nu. \quad (11)$$

Излучение поляризовано перпендикулярно направлению распространения [5, с. 47]. Поэтому выбираем правую или левую круговую поляризацию. Поскольку вектор поляризации фотона – пространственноподобный [5, с. 47], то, согласно [5, с. 43], запишем (T – транспонирование; в 3-мерной форме нулевая компонента опускается):

$$e_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \pm \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (12)$$

Суммируя (9)–(11) при $\mu, \nu = \bar{1}, \bar{2}$ в (11) (поскольку, согласно (12), при других μ, ν будет ноль), можно показать, что это даст ноль уже при свертке u_n (см. (5), $\forall n$) с комбинациями матриц Дирака в (9), в состав которых не входит β_2 (6). Для слагаемых с β_2 свертка не дает ноль, но при интегрировании, согласно (5), (8)–(11) будут множители (в (13) $j=1$ при $\lambda = \zeta$; $j=2$ при $\lambda = \xi$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda_1^2) H_{n-1}(\lambda_1) d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik'_x x_j) \exp(-(\xi_j^2 + \zeta_j^2)) H_{n-1}(\xi_j) d\xi_j, \quad (13)$$

Учитывая соотношения [6, с. 119–120] для левых множителей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) dx = \sqrt{\pi} \delta_{0n}, \quad (14)$$

получим ноль при всех $n \neq 1$ в (9). При произвольном направлении движения начального фотона в (13) отсутствуют множители вида (14), и сумма в (9) бесконечна. Таким образом, для промежуточного электрона не может быть $n = 0$, если до и после реакции также $n = 0$, т. к. свертка всех матриц и биспиноров дает ноль. Если начальный фотон движется строго

параллельно силовым линиям магнитного поля, то в (11) от каждого пропагатора в сумме остается 1 ненулевое слагаемое ($n = 1$). Таким образом, с помощью (11)–(14) производятся все вычисления в (10).

Вычисление угла поворота плоскости поляризации на единицу длины пути

Запишем общую и частную формулы для угла комптоновского поворота плоскости поляризации жесткого рентгеновского фотона на единицу длины пути [1, с. 91]:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} (\vec{p} \cdot \vec{n}) \operatorname{Re} f_2(\omega), \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} f_2(\omega), \quad (15)$$

где n_e – концентрация электронов, \vec{p} – вектор их поляризации, ω – частота фотона, \vec{n} – единичный вектор в направлении распространения фотонов. В частном случае фотоны движутся параллельно вектору спиновой поляризации полностью поляризованного электронного газа, а поглощение фотонов слабое, поэтому $\operatorname{Re} f_2(\omega) \approx f_2(\omega)$. Наша задача сводится к нахождению $f_2(\omega)$.

S -матрицу комптоновского рассеяния вперед запишем в виде [1, с. 90], где учитываются только пространственные компоненты ($\vec{\sigma}/2$ – оператор спина электрона):

$$S_{\mu\nu} = f_1(\omega)(\vec{e}_\mu^* \vec{e}_\nu) + if_2(\omega)\vec{\sigma}[\vec{e}_\mu^* \vec{e}_\nu]. \quad (16)$$

При полной поляризации электронов $\vec{\sigma} = (0, 0, 1)$, и тогда с учетом (12) (в 3-мерной форме) получаем связь между $f_2(\omega)$ и амплитудами для правой (+) и левой (–) круговой поляризации фотона:

$$f_2(\omega) = \frac{S_{\mu\nu}^{(-)} - S_{\mu\nu}^{(+)}}{2} \quad (17)$$

Остается установить связь между $S_{\mu\nu}$ в (16) и $F_{\mu\nu}$ в (10). В разных источниках одни и те же величины обозначаются по-разному, в чем можно убедиться, сопоставляя, например, формулы в [1, с. 15; 5, с. 314] и [1, с. 24; 5, с. 315], где присутствует одна и та же амплитуда, в роли которой в нашем случае может выступать $S_{\mu\nu}$. С учетом этого обстоятельства, используя формулы в [5, с. 281, 283, 314], запишем аналог выражения (10) в отсутствие магнитного поля:

$$F_{\mu\nu}^0 = 2\pi\varepsilon \frac{i(2\pi\hbar)^4 c\hbar S_{\mu\nu}}{V^2 \sqrt{\varepsilon_0 \hbar \omega \varepsilon'_0 \hbar \omega'}} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x). \quad (18)$$

При этом ε – полная энергия в системе центра масс; ε_0 см. в (4) и (5); ε'_0 – энергия конечного электрона:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hbar\omega, \quad \varepsilon_0 = (m^2 c^4 + p_z^2 c^2)^{1/2} = \tilde{m}c^2 = E(p_z), \quad \varepsilon'_0 = E(p'_z). \quad (19)$$

Поскольку из (18) можно выразить $S_{\mu\nu}$ через $F_{\mu\nu}^0$, то в присутствии магнитного поля выражение для $S_{\mu\nu}$ меняется, поскольку в левую часть (18) подставляется правая часть (10). Сделаем для x -компоненты δ -функции замену по аналогии с [5, с. 282]:

$$\delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x) \rightarrow \frac{L}{2\pi\hbar}. \quad (20)$$

После этого с учетом (17) при рассеянии на угол ноль получаем:

$$f_2(\omega) = \frac{-\pi\hbar c^2 \alpha}{(\varepsilon_0 + mc^2)(\varepsilon_0 + \hbar\omega)} \sqrt{\frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon_0}} (J(f) - J(g)),$$

$$J(\lambda) = \frac{\lambda_0((\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0)^2 + p_z^2 c^2) - 2\lambda_z p_z c(\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0) - mc((\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0) - p_z^2 c^2)}{c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_1^2 - i \cdot 0}. \quad (21)$$

При этом ε_1 выражается из (4) при $n = 1$. Компоненты $f(p'_z, \omega)$ и $g(p_z, \omega)$ см. в (7). Далее предполагается усреднение по импульсам p_z и p'_z , соответственно.

Заключение. Основные результаты

В релятивистском подходе в рамках квантовой электродинамики вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся параллельно магнитному полю жестких рентгеновских фотонов со спиральностями, положительными и отрицательными по отношению к спину электрона. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью поляризации электронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.
3. Daugherty, J.K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / J.K. Daugherty, A.K. Harding // The Astrophysical Journal. – 1986. – Vol. 309. – P. 362–371.
4. Bussard, R.W. One- and Two-Photon Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / R.W. Bussard, S.B. Alexander, P. Meszaros // Phys. Rev. D – 1986. – Vol 34, № 2. – P. 440–451.
5. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.
6. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак. – Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.

A.I. Sery. To the Problem of Compton Rotation of the Plane of Polarization of X-Photons in Magnetic Field

In relativistic approach using electronic propagator the difference of Compton forward scattering amplitudes in ultrastrong magnetic field is calculated for electron in the ground state and circularly polarized hard X-photons moving parallel to magnetic field with helicities positive and negative to electron spin. A formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons.

Рукапіс паступиў у рэдкалегію 19.01.2011 г.

Т.В. Волошина**ОРБИТЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАГНЕРА-ПРЕСТОНА
ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ**

В работе доказано, что орбиты представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы совпадают с ее \mathcal{R} -классами. Установлена эквивалентность ограничения представления Вагнера–Престона на орбиту, содержащую идемпотент e , подстановочному представлению полугруппы на множестве правых ω -классов по замкнутой инверсной подполугруппе $(e)\omega$.

Вступление

Полугруппа S называется *инверсной*, если для каждого ее элемента $a \in S$ существует такой единственный элемент $b \in S$, что выполняются равенства $aba = a$, $bab = b$. Для $a \in S$ такой элемент обозначают через a^{-1} и называют *инверсным* к a .

Элемент e полугруппы S называется *идемпотентом*, если $ee = e$. Множество *идемпотентов* полугруппы S обозначим через $E(S)$. Заметим, что для каждого элемента $a \in S$ инверсной полугруппы S элементы aa^{-1} , $a^{-1}a$ являются идемпотентами. Поэтому произвольная инверсная полугруппа содержит идемпотенты. В частности, инверсная полугруппа с единственным идемпотентом является группой.

Классическим примером инверсной полугруппы служит полугруппа всех частичных взаимно однозначных отображений некоторого множества X в себя, которую будем называть *инверсной симметрической полугруппой на множестве X* , и обозначать $IS(X)$. Элементы $IS(X)$ называют *частичными подстановками множества X* . Поскольку по теореме Вагнера–Престона [1] каждая инверсная полугруппа S изоморфна некоторой инверсной подполугруппе полугруппы $IS(S)$ всех взаимно однозначных частичных отображений множества ее элементов S , инверсная симметрическая полугруппа играет в теории инверсных полугрупп роль, аналогичную роли симметрической группы в теории групп.

Через ω будем обозначать *естественный частичный порядок на S* : $a\omega b : \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Для удобства иногда будем употреблять для ω обозначение \leq . Бинарное отношение ω является частичным порядком на инверсной полугруппе, стабильным относительно умножения и нахождения инверсного элемента [2]. *Замыканием $H\omega$ множества $H \subseteq S$* называется множество $H\omega = \{h \in S : \exists \pi \in H \pi\omega h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют *замкнутым*.

Подстановочным представлением инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм φ в полугруппу $IS(X)$. Для $a \in S$ через $dom a$ и $ran a$ обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Пусть $\varphi_i : S \rightarrow IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. *Прямой суммой представлений φ_i* называется представление $\varphi : S \rightarrow IS(X)$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два представления $\varphi : S \rightarrow IS(X)$ и $\psi : S \rightarrow IS(Y)$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y , что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $(\theta(x))^{\psi(s)} = \theta(x')$.

В общем случае гомоморфный образ $\varphi(S)$ инверсной полугруппы является инверсной полугруппой [1]. Для инверсной подполугруппы $\varphi(S)$ из $IS(X)$ отношение $\tau := \{(a, b) \in X \times X \mid \eta(a) = b \text{ для некоторого } \eta \in \varphi(S)\}$ является частичной эквивалентностью на множестве X [3]. Класс эквивалентности отношения τ , содержащий элемент $a \in X$, при этом будет иметь вид $\{x \in X \mid h(a) = x \text{ для некоторого } h \in \varphi(S)\}$. Это множество будем называть *орбитой элемента* $a \in X$ при представлении $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ инверсной полугруппы S частичными подстановками X .

Представление $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ инверсной полугруппы S называют *транзитивным*, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X , что $h(x_1) = x_2$, и *эффективным*, если $\bigcup_{x \in \varphi(S)} \text{dom } x = X$. Другими словами, для транзитивного представления $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ множество X является единственной орбитой, а для эффективного представления $\varphi: S \rightarrow IS(X)$ каждый элемент из X содержится в некоторой орбите.

Естественно сначала ограничиться рассмотрением только транзитивных представлений, так как каждое эффективное представление является прямой суммой транзитивных [4]. В 1962 году Шайном [3] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H := \{(s, t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S . Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности H – единственный π_H -класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [3]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$ и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми ω -классами по замкнутой инверсной подполугруппе H* . Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H: S \rightarrow IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы S на правых ω -классах по замкнутой инверсной подполугруппе H* .

Постановка задачи

Представление φ инверсной полугруппы S называется *точным*, если оно инъективно. Описание всех таких представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Для каждой инверсной полугруппы S Вагнер [2] и Престон [5] построили точное представление частичными подстановками множества S . Этот факт является аналогом теоремы Кэли. Построенное представление в общем случае нетранзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. Описание орбит представления Вагнера–Престона, его транзитивных составляющих важно для дальнейшего изучения точных представлений инверсных полугрупп.

Основные результаты

Левым (правым) идеалом полугруппы S называется такое непустое подмножество $I \subseteq S$, что $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$). Просто *идеалом* называется подмножество, которое

является одновременно и левым, и правым идеалом. Для непустого подмножества $A \subseteq S$ пересечение всех левых (правых) идеалов полугруппы S , содержащих A , является наименьшим левым (правым) идеалом, содержащим A . Будем называть его *левым (правым) идеалом полугруппы S , порожденный множеством A* . В частности, если $A = \{a\}$, то такой идеал называют *главным идеалом, порожденным элементом $a \in S$* . Очевидно, что в случае инверсной полугруппы S главный правый (левый) идеал имеет вид aS (Sa).

Элементы $a, b \in S$ полугруппы S называются *\mathcal{R} -эквивалентными (\mathcal{L} -эквивалентными)*, если они порождают один и тот же правый (левый) главный идеал, то есть $a \mathcal{R} b : \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$ ($a \mathcal{L} b : \Leftrightarrow S^1 a = S^1 b$). Класс эквивалентности отношения \mathcal{R} (\mathcal{L}), содержащий $a \in S$, будем обозначать R_a (L_a).

При доказательстве результатов используются следующие теорема и лемма.

Теорема 1. ([6]). Для каждого элемента $a \in S$ инверсной полугруппы S существует такой единственный идемпотент, что главный правый (левый) идеал полугруппы S , порожденный a , порождается этим идемпотентом, то есть каждый \mathcal{R} -класс (\mathcal{L} -класс) содержит единственный идемпотент.

Лемма. ([6]). В инверсной полугруппе произведение произвольных двух идемпотентов является идемпотентом; любые два идемпотента коммутируют.

Рассмотрим точное представление инверсной полугруппы S частичными подстановками множества S : $S \ni a \mapsto \rho_a : Saa^{-1} \rightarrow Sa^{-1}a$, $\rho_a(x) = xa$. Если S содержит нуль 0 , то он является неподвижной точкой этого представления для всех элементов S . Поэтому можно перейти к индуцированному точному представлению S частичными подстановками множества $S \setminus \{0\}$. Такое представление полугруппы S частичными подстановками множества S (либо $S \setminus \{0\}$, если S содержит нуль 0) называют *представлением Вагнера-Престона*. Заметим, что нулю при этом соответствует нигде не определенная частичная подстановка. *Орбитой элемента $a \in S$* при представлении Вагнера-Престона называют множество $O_a := \{s \in S \mid \exists x \in S : \rho_x(a) = s\}$.

Теорема 2. Орбиты представления Вагнера-Престона инверсной полугруппы совпадают с \mathcal{R} -классами, то есть для $a \in S \setminus \{0\}$ $O_a = R_a$ и $R_0 = \{0\}$.

Доказательство. Для произвольного $a \in S \setminus \{0\}$ рассмотрим частичную подстановку $\rho_{a^{-1}} \in IS(S)$. Поскольку $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a = \text{dom}(\rho_{a^{-1}})$ и $\rho_{a^{-1}}(a) = aa^{-1} \in E(S)$, то орбита элемента O_a содержит идемпотент aa^{-1} .

Произвольный элемент $b \in O_a$ можно представить в виде $b = ax$. Тогда $bb^{-1} = axx^{-1}a^{-1} \omega aa^{-1}$. Поскольку $aa^{-1} \in O_a = O_b$, то для некоторого $y \in S$ $aa^{-1} = by$. Отсюда $aa^{-1} = byy^{-1}b^{-1} \omega bb^{-1}$. Следовательно, $aa^{-1} = bb^{-1}$. Поэтому $aS = (aa^{-1})S = (bb^{-1})S = bS \Leftrightarrow a \mathcal{R} b$.

Пусть теперь $a \mathcal{R} b$. Тогда $(aa^{-1})S = aS = bS = (bb^{-1})S$. Поскольку для инверсной полугруппы каждый \mathcal{R} -класс содержит единственный идемпотент (по теореме 1), то $aa^{-1} = bb^{-1}$. Так как область определения частичной подстановки $\rho_{a^{-1}b}$ имеет вид

$S(a^{-1}b)(b^{-1}a) = S(a^{-1}(bb^{-1})a) = S(a^{-1}(aa^{-1})a) = Sa^{-1}a$ и $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a$, то $\rho_{a^{-1}b}(a) = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b$. Следовательно, $b \in O_a$.

Пусть $a \in \mathcal{R}_0$. Тогда $aS = 0S = 0$. Следовательно, $a = 0$ и $R_0 = \{0\}$. ■

Следствие 1. Количество орбит представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы S равно количеству ненулевых идемпотентов полугруппы.

Следствие 2. Представление Вагнера–Престона инверсной полугруппы S транзитивно тогда и только тогда, когда S является группой.

Теорема 3. Пусть O_e – орбита представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы S , содержащая идемпотент e . Тогда ограничение представления Вагнера–Престона на орбиту O_e эквивалентно представлению φ_e полугруппы S на множестве правых ω -классов по замкнутой инверсной подполугруппе $(e)\omega$.

Доказательство. Обозначим $H = (e)\omega$. Пусть $a \in O_e$. Поскольку в случае $0 \in S$ представление Вагнера–Престона рассматривается на множестве $S \setminus \{0\}$, то $a \neq 0$. Из $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a = \text{dom}(\rho_{a^{-1}})$ и $\rho_{a^{-1}}(a) = aa^{-1} \in E(S)$ следует, что орбита O_e содержит идемпотент aa^{-1} . Так как по теореме 2, $O_e = R_e$, а каждый \mathcal{R} -класс содержит единственный идемпотент, то $aa^{-1} = e$. Тогда $aa^{-1} \in (e)\omega = H \Leftrightarrow (Ha)\omega \neq \emptyset$. Следовательно, каждый элемент орбиты O_e содержится в некотором правом ω -классе по замкнутой инверсной подполугруппе H .

Рассмотрим теперь произвольный правый ω -класс $(Hs)\omega$. Тогда $a = es$ содержится в $(Hs)\omega$. Докажем, что $a \in O_e$. Для частичной подстановки $\rho_s \in IS(S)$ выполняется равенство $\text{dom}(\rho_s) = Sss^{-1}$. Из $(Hs)\omega \neq \emptyset$, следует $ss^{-1} \in H$, что равносильно $ss^{-1} \geq e$. Отсюда $e = ess^{-1} \in Sss^{-1} = \text{dom}(\rho_s)$. Так как $\rho_s(e) = es = a$, то $a \in O_e$.

Пусть $a, b \in O_e$ и $(Ha)\omega = (Hb)\omega$. Тогда $ab^{-1} \in H$ и $ab^{-1} \geq e$. Отсюда $e = e^{-1}e = e^{-1}(ab^{-1}) = eab^{-1}$. Из $a, b \in O_e$ по доказанному выше следует, что $aa^{-1} = bb^{-1} = e$. Потому $aa^{-1} = aa^{-1}ab^{-1} = ab^{-1}$ и, следовательно, $a\omega b$. С другой стороны, из $ba^{-1} = e^{-1} = e = bb^{-1}$ получаем $b\omega a$. Таким образом, $a = b$. Следовательно, между элементами орбиты O_e и правыми ω -классами существует взаимно однозначное соответствие $\theta: O_e \rightarrow X$, определяемое правилом: $a \mapsto (Ha)\omega \in X$, $a \in O_e$.

Пусть $s \in S$, а правый ω -класс $(Ht)\omega$ – такой, что частичная подстановка $\varphi_e(s)$ на нем определена, то есть $[(Ht)\omega]^{\varphi_e(s)} = (Hts)\omega$. Тогда $tss^{-1}t^{-1} \in H$, $tt^{-1} \in H$ и, следовательно, $tss^{-1}t^{-1} \geq e$ и $tt^{-1} \geq e$. Отсюда $e = etss^{-1}t^{-1}$ и $a := et = etss^{-1}t^{-1}t = ett^{-1}tss^{-1} = (et)ss^{-1} \in Sss^{-1} = \text{dom} \rho_s$. По доказанному выше, $a = et \in O_e$, $\rho_s(a) = as = ets \in O_e$. Поскольку $at^{-1} = ett^{-1} = e \in H$, $(as)(ts)^{-1} = etss^{-1}t^{-1} = e \in H$, то $\theta(a) = (Ha)\omega = (Ht)\omega$, $\theta(as) = (Has)\omega = (Hts)\omega$. Тогда $\theta(a)^{\varphi_e(s)} = [(Ha)\omega]^{\varphi_e(s)} = (Has)\omega = \theta(as) = \theta(\rho_s(a))$. Отсюда $\rho_s(\theta^{-1}((Ht)\omega)) = \theta^{-1}([(Ht)\omega]^{\varphi_e(s)})$. Следовательно, представление φ_e эквивалентно ограничению представления Вагнера–Престона на орбиту O_e . ■

Так как для идемпотентов e и f равенство $(e)\omega = (f)\omega$ возможно тогда и только тогда, когда $e = f$ [1], а прямая сумма семейства $\{\varphi_e \mid e \in E(S)\}$ представлений полугруппы S является точным [3], возникает естественный вопрос о существовании точного представления инверсной полугруппы с минимальным количеством орбит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : пер. с англ.: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972. – Т.1, 2. – 283 с., 422 с.
2. Вагнер, В.В. Обобщенные группы / В.В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – №84. – С.1119–1122.
3. Шайн, Б.М. Представление обобщенных групп / Б.М. Шайн // Изв. вузов. «Математика». – 1962. – Т.28, № 3. – С. 164–176.
4. Понизовский, И.С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И.С. Понизовский // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1964. – Т.28. – С. 989–1002.
5. Preston, G.B. Representations of inverse semigroups / G.B. Preston // J.London Math.Soc. – 1954. – №29. – P.411–419.
6. Либбер, А.Е. К теории обобщенных групп / А.Е. Либбер // ДАН СССР. – 1954. – № 97. – С. 25–28.

T.V. Voloshyna. Orbits of Wagner-Preston Representation of an Inverse Semigroup

It is proved in the article that the orbits of Wagner-Preston representation of an inverse semigroup coincide with its \mathcal{R} -classes. The equivalence of a contraction of representation on an orbit containing an idempotent e , to permutational representation of a semigroup on a set of the right ω -classes on the closed inverse subsemigroup $(e)\omega$ is received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.03.2011 г.

Е. Длубаковская-Пузио, М. Карпук, Е. Мирская, К. Пузио

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РИСКА ИССЛЕДОВАНИЯ СТЕПЕНИ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ КАЧЕСТВОМ ТУРИСТИЧЕСКИХ УСЛУГ

На основе стандартного отклонения оценки качества отеля впервые вводится понятие риска выбора туристом отеля. Предполагается, что оценки качества услуг в различных отелях скоррелированы, поэтому выбор потребителя осуществляется из множества отелей путем максимизации математического ожидания оценки отеля и минимизации риска выбора отеля. Решение осуществляется методами квадратичного программирования в среде **Matcad**. Разработанная теория была использована для исследования выбора туристов в отелях региона колобожского на основании результатов анкетирования туристов в **2006–2009** гг. Предложена идея непрерывного мониторинга качества пребывания в отелях и санаториях с опубликованием данных в Интернете, что позволяет влиять на качество предоставляемых услуг. Предложенная модель может быть применена для исследования других экономических объектов, где необходима обратная связь – торговле, производстве товаров народного потребления и других.

Введение

В последние годы туризм стал в странах Европы одной из отраслей экономики, приносящей немалый доход государству и обеспечивающий работой большое количество трудоспособного населения [1]. Актуальным является также развитие этой отрасли экономики и в Беларуси, поскольку имеется большое количество объективных и субъективных факторов, способствующих развитию туристического бизнеса [2]. Показательным является опыт ближайших соседей в развитии туризма и санаторно-курортного лечения, в том числе опыт Республики Польша. Для многих польских регионов туризм выступает одной из важнейших отраслей хозяйства, способствует эффективному экономическому развитию. Однако туристический рынок является одним из наиболее чувствительных к кризисным явлениям секторов экономики [3]. Во время экономического кризиса появляется много негативных явлений, в том числе ограничение инвестиций в туристическую отрасль, замедление развития рынка туристических услуг, уменьшение числа туристов всех форм [4]. С другой стороны, кризис имеет положительные стороны, в первую очередь для туристов. Гостиницы борются за каждого клиента, значительно снижая цены. Кризис заставляет предприятия (в том числе гостиничные и туристические) быть ближе к клиенту. Например, во многих гостиницах предлагаются за ту же цену дополнительные услуги, вводится система бонусов. Однако низкая цена не может быть для клиентов единственным критерием выбора отеля или санатория, поскольку в ту же самую цену в разных гостиницах могут входить совершенно различные услуги (бассейн, питание, лечебная физкультура и т.д.) и их качество (чистота в номере, в коридорах, в местах питания, добросовестность и доброжелательность обслуживающего персонала, знакомство с иностранными языками и др.).

В работе предложен метод выбора туристами гостиницы, который основан на использовании исторических (полученных в предыдущие периоды времени) данных об оценке качества предоставляемых услуг. Метод использует идеи Марковитца оценивания инвестиционного портфеля на бирже [5–7].

Теория

Предположим, что клиент туристического объекта после своего пребывания в гостинице с номером i , ($i = 1, 2, \dots, m$) (для удобства математического описания

перенумеруем их) выставляет гостинице оценку $O_{i,t}$, которая зависит от ряда параметров, влияющих на условия пребывания (чистота в номере, питание, медицинские услуги и другие) и момента времени t :

$$O_{i,t} = f_i(\text{условия пребывания}, t) \quad (1)$$

Стабильность и уровень оценки $O_{i,t}$ в момент времени t можно интерпретировать как параметр эффективности деятельности определенного отеля. Предположим, в течение малого отрезка времени t в гостинице i получено $n_{i,t}$ оценок от проживающих в ней туристов. Средняя оценка $\bar{O}_{i,t}$ гостиницы i и стандартное отклонение $\sigma_{O_{i,t}}$ оценок $O_{i,t}$ [8]:

$$\bar{O}_{i,t} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{i,t}} O_{i,t}}{n_{i,t}} \quad (2)$$

$$\sigma_{O_{i,t}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_{i,t}} (O_{i,t} - \bar{O}_{i,t})^2}{n_{i,t} - 1}}. \quad (3)$$

Суммирование оценок осуществляется для всех туристов ($j = 1, \dots, n_{i,t}$), выразивших свое мнение по поводу пребывания в отеле i за время t .

Предположим, что осуществляются наблюдения для действующих на рынке m туристических объектов, представляющих подобные услуги, на некотором достаточно длительном отрезке времени T . Поскольку гостиницы локализованы в определенном регионе, можно допустить влияние одного туристического объекта на другой в виде введения подобных услуг для туристов, ценовой политики и других. Математически это означает, что выступает зависимость между средними оценками для некоторых гостиниц i и j , которую можно описать матрицей ковариаций:

$$K_{i,j} = \text{Cov}(\bar{O}_i, \bar{O}_j) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (O_{i,k} - \bar{O}_{i,k})(O_{j,k} - \bar{O}_{j,k}), \quad (4)$$

где $i, j = 1, \dots, m$.

Далее воспользуемся идеей Марковитца [5], которая была использована для определения оптимального инвестиционного портфеля акций.

Если турист имеет выбор из m гостиниц, то его выбор p -й гостиницы должен быть основан, с одной стороны, на максимально возможной положительной оценке O_p данной гостиницы, и, с другой стороны, на минимальном риске σ_p , что будет именно такая оценка. Аналогично модели Марковитца для инвестиционных портфелей, можно выбрать так называемый эффективный «портфель» гостиниц, который показывает вероятности выбора той или иной гостиницы, для набора из которых ожидается высокая оценка пребывания со стороны туриста.

Мерой риска для «портфеля» гостиниц, которые рассматриваются туристом как возможные места пребывания, можно принять стандартное отклонение σ_p оценок, выставленных гостиницам в течение определенного времени T . Малое значение стандартного отклонения σ_p свидетельствует о малых изменениях и стабильности оценки O_p в течение времени T .

Рассмотрим далее математическое описание изложенных выше предположений. Обозначим вероятность пребывания клиента в k -ой гостинице как $x_k, k = \overline{1, m}$ (m – число гостиниц из которых турист делает свой выбор), причем из условия нормировки

$$\sum_{k=1}^m x_k = 1, \quad x_k \geq 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Математическое ожидание оценки гостиницы в некоторый момент времени t

$$O_{p,t} = \sum_{k=1}^m x_k \bar{O}_{k,t}, \quad (6)$$

где $\bar{O}_{k,t}$ – средняя оценка пребывания в k -ой гостинице.

Дисперсия оценки гостиницы в момент времени t

$$\sigma_{p,t}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j K_{ij} = \sum_{j=1}^m x_j^2 \sigma_{\bar{O}_{j,t}}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j K_{ij}. \quad (7)$$

Стандартное отклонение оценки, которое принимаем как риск выбора гостиницы туристом

$$\sigma_{p,t} = \sqrt{\sigma_{p,t}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j K_{ij}}. \quad (8)$$

Для решения задачи оптимального выбора необходимо оптимизировать одновременно два критерия

$$\begin{cases} O_{p,t} = \sum_{k=1}^m x_k \bar{O}_{k,t} \rightarrow \max \\ \sigma_{p,t} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j K_{ij}} \rightarrow \min \end{cases} \quad (9)$$

при ограничениях (5).

Решение многокритериального оптимизационного задания (9) позволяет найти переменные $0 \leq x_k \leq 1, k = \overline{1, m}$, которые определяют вероятности выбора туристом соответствующего места отдыха из «портфеля» из m гостиниц. Максимальное значение $x_p \rightarrow \max$ из $x_k, k = \overline{1, m}$ соответствует оптимальному выбору туристом гостиницы.

Отметим, что предложенный метод оптимального выбора имеет несколько недостатков.

Во-первых, для осуществления выбора гостиницы используются данные исторические, т.е. оценки, произведенные в прошлом для той или иной гостиницы. Для их получения необходим постоянный мониторинг условий пребывания в гостиницах, например, путем анкетирования выезжающих клиентов гостиниц.

Во-вторых, имеется проблема выбора интервала (окна) наблюдений T , для которого вычисляется матрица ковариаций (4), математическое ожидание оценки «портфеля» гостиниц (6) и стандартного отклонения (риска выбора туристического) (8).

В-третьих, требуется выполнение нескольких основных гипотез поведения клиентов гостиниц, стремящихся получить максимальное удовлетворение от пребывания в гостинице, например, клиенты гостиниц склонны принимать решение, минимизирующее риск туристического выбора при данной оценке гостиницы, а при данном уровне риска

выбирают «портфель» гостиниц с максимальной оценкой, из которого выбирают гостиницу, имеющую максимальную вероятность присутствия в данном «портфеле».

Многокритериальную задачу (9) решим в два этапа. На первом этапе рассмотрим задачу квадратичного программирования [9], и определим максимальные и минимальные дисперсии для данной оценки $O_{p,t}$

$$\sigma_{p,t}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j K_{ij} \rightarrow optimum(\max, \min) \quad (10)$$

при ограничениях (5). Определение максимальной и минимальной дисперсии для различных уровней $O_{p,t}$ позволяет определить на основании (8) максимальные и минимальные значения риска туристического выбора и оценить допустимость такого выбора для туриста. На втором этапе, используя описанные выше предположения о возможном поведении туристов, можно оценить оптимальный выбор туриста из возможных «портфелей»-наборов гостиниц, анализируя кривую минимальных рисков.

Исследование было проведено с использованием библиотек для оптимизации, содержащихся в пакете программ Matlab.

Рисунок 1 представляет графическую иллюстрацию множества допустимых «портфелей». Рассчитываем на основании (9), (5) минимальные и максимальные оценки для гостиниц и риски пребывания. Из рисунка видно, что все возможные оценки заключаются в границах от 0,2 до 4,2 (по пятибалльной шкале). Это позволяет сделать очевидный вывод, что ни одна гостиница в выбранном историческом периоде времени T не получила средней максимальной оценки 5. Риск (стандартное отклонение) находится в пределах 0,18–1,35 (единицы измерения те же, что и для оценок пребывания). В области на рисунке, ограниченной линиями минимального и максимального риска, заключены все возможные (допустимые) «портфели» гостиниц, то есть выбранные с определенными вероятностями наборы гостиниц, для которых математическое ожидание оценки и стандартное отклонение будут в границах возможного.

Кривая минимального риска составляет левую границу риска для данного уровня оценки пребывания туриста. В точке c достигается минимальный риск (0,18), однако ему соответствует и невысокая ожидаемая оценка пребывания в гостинице (0,75). Точке d соответствует максимальный риск (1,35) и максимально возможная ожидаемая оценка пребывания (4,2). Туристы будут выбирать гостиницы, которые имеют при той же самой оценке меньший уровень риска. Например, в точках a и b оценки пребывания в гостинице находятся на одинаковом уровне (2,85). Однако для туристов выбор «портфеля» гостиниц в точке a будет предпочтительнее, так как риск выбора здесь составляет 0,78, тогда как для точки b он составляет 1,0. Следуя нашим предположениям относительно предпочтений туристов, из набора гостиниц в точке a следует выбрать гостиницу, имеющую максимальную вероятность.

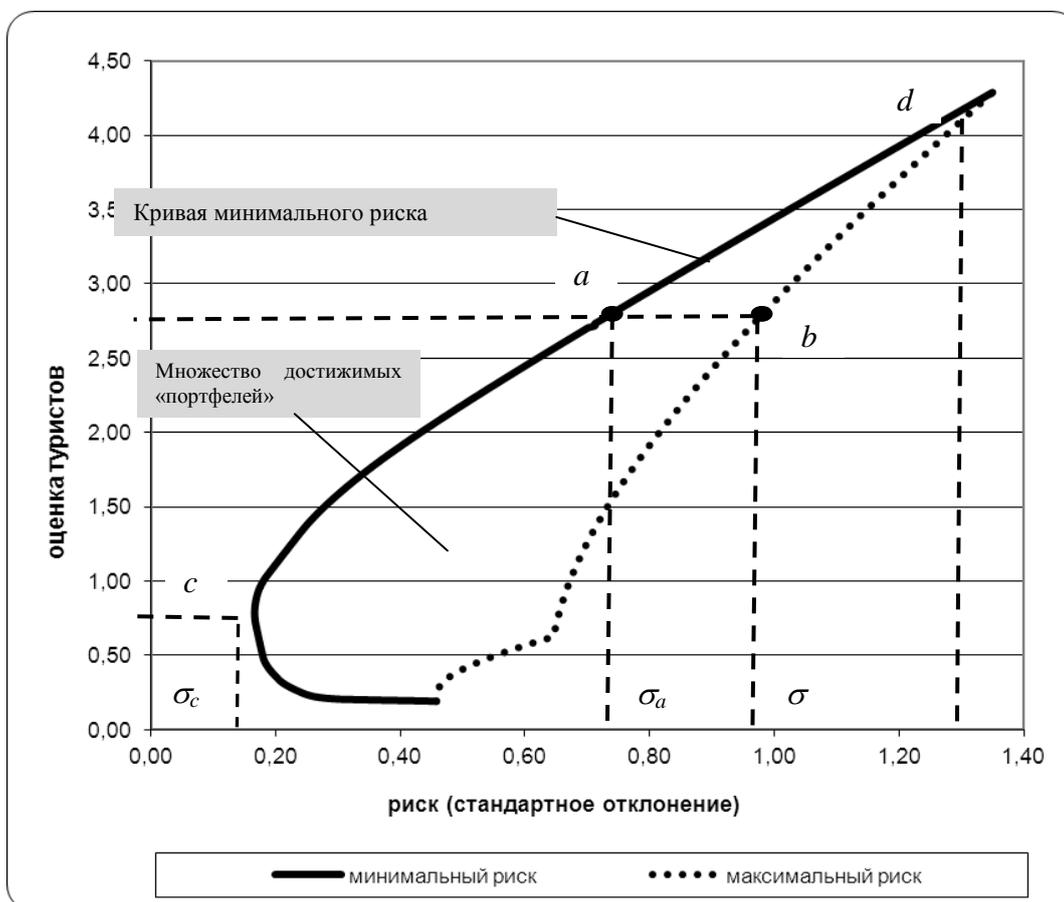


Рисунок 1 – Графическая иллюстрация множества достижимых «портфелей»

Резюмируя, можно утверждать, что представленная зависимость *риск – оценка гостиницы* позволяет туристам выбирать гостиницы согласно их предпочтениям и требованиям, предупреждая одновременно о возможном риске выбора.

Моделирование выбора клиентов гостиниц

Рынок Польши насыщен предложениями самых различных объектов с услугами туристическими, санаторно-туристическими, лечебными и другими услугами, поэтому для клиентов является очень актуальным выбор места отдыха, дающий им максимальное удовлетворение. Особо надо отметить районы города Колобжег (Kołobrzeg), которые более 150 лет известны своими курортами и санаториями. На город, насчитывающий примерно 40 тыс. жителей, в 2009 году имелось более 6 тыс. мест в гостиницах и санаториях, не говоря о неорганизованном отдыхе. Следует отметить, что отдых в Колобжеге в последние пять лет очень популярен среди иностранных туристов (Германия, Дания, Швеция, Франция), которых привлекает относительно низкая цена, качественное обслуживание, множество исторических памятников, и, главное, мягкий и лечебный климат Балтики, сочетающий морской и лесной воздух. В 2006–2009 гг. (оно продолжается и дальше) авторы предлагаемой работы исследовали качество предоставляемых услуг иностранным туристам в различных санаторно-туристических объектах Колобжега [4]. Туристам предлагалось ответить на анкету из 20 вопросов, определяющих качество пребывания в гостинице или санатории, количество приездов в Колобжег на отдых, качество медицинских услуг, среди которых необходимо выделить два, которые определяют оценки пребывания:

1. Как оцениваете гостиницу (санаторий), когда будете разговаривать со своими друзьями или родственниками? (Оценка от 0 – плохо, до 5 – отлично).
2. Отдыхаете ли в этой гостинице в первый раз (Да – 1, Нет – 0).

Первый вопрос позволяет оценить отношение туриста к гостинице, в которой он останавливался, в рекомендациях для близких ему людей. Второй вопрос показывает

в определенной мере отношение к месту пребывания самого туриста, поскольку его повторное посещение той же гостиницы может косвенно свидетельствовать о качестве оказанных туристических услуг.

В результате исследования были проанализированы 13 санаторно-туристических объектов и обработаны данные 1347 анкет. К сожалению, не удалось охватить все 13 объектов из-за недостаточности данных в течение всего периода исследования. Окончательно было оставлено для анализа 5 объектов, имеющих более 900 наблюдений в исследуемом периоде.

На основании данных анкетирования для каждого года выбраны общие периоды пребывания туристов во всех исследуемых пяти объектах. Так, для 2007 года выбрано 7 общих для всех гостиниц временных периодов, в которых для каждой гостиницы была вычислена средняя оценка на основании 6–10 анкет, заполненных туристами перед отъездом домой (примерно 1% от общего числа туристов, отдохнувших в тот момент времени в гостинице).

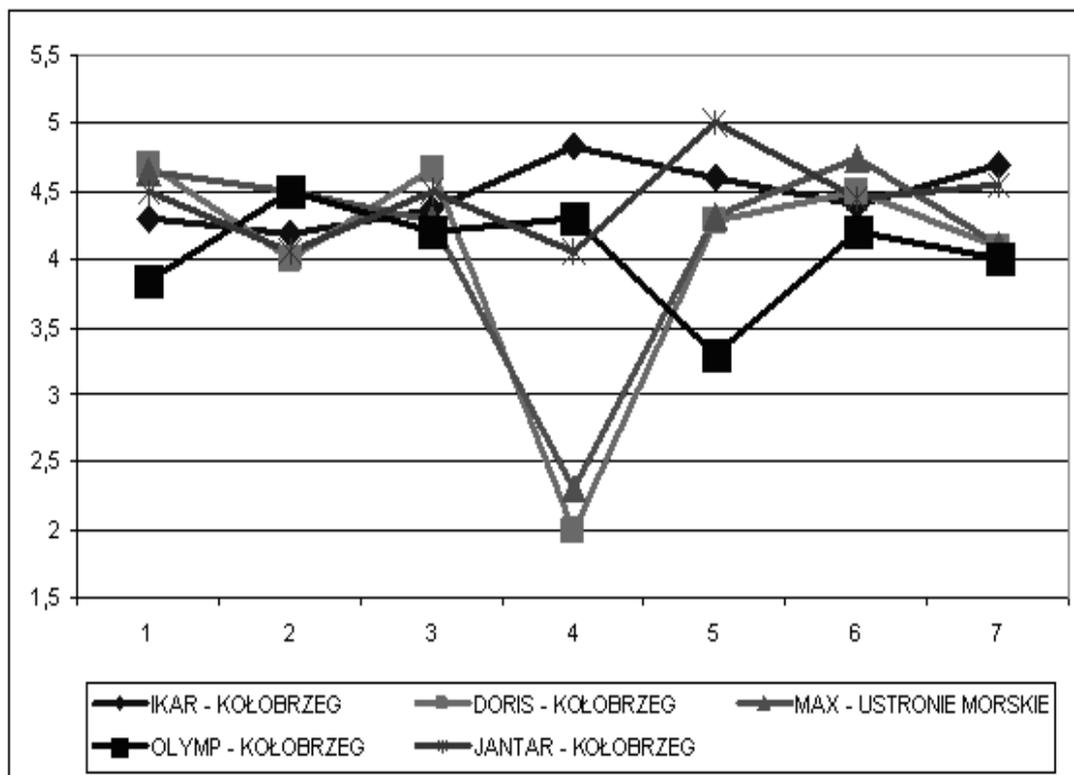


Рисунок 2а – Средние оценки ответов на Вопрос 1 в 2007 году

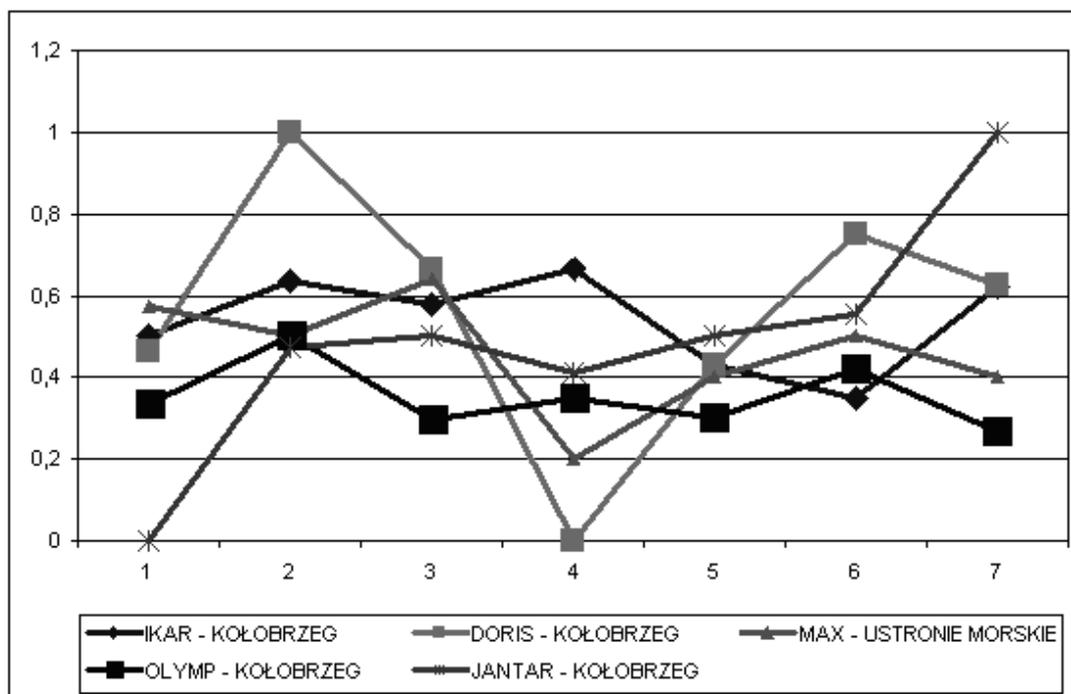


Рисунок 2b – Средние оценки ответов на Вопрос 2 в 2007 году

На рисунках 2a, 2b представлены средние оценки, выставленные объектам иностранными туристами в 2007 г.

Очевидно, что каждая средняя оценка содержит объективную часть, показывающую действительный уровень сервиса в гостинице, и субъективную, отражающую эмоции и психологическое состояние отдыхающих. Увеличение числа анкетированных позволит уменьшить субъективную часть в оценке и уменьшить ошибки, связанные с субъективным оцениванием гостиницы.

Нас также интересовала взаимосвязь между средними оценками на Вопрос 1 и Вопрос 2 из предлагаемых в анкете, поскольку позволяла объективнее оценить соответствующую гостиницу. В таблице 1 приведены коэффициенты корреляции между вопросами 1 и 2, из которой видно, что существует положительная взаимосвязь между вопросами, причем она колеблется от очень низкой (гостиница «Jantar») до весьма высокой (гостиница «Мах»). Использование нескольких вопросов для так называемой «обратной связи» относительно качества пребывания туристов в гостинице позволяет более объективно оценить как гостиницу, так и ответы респондентов.

Таблица 1 – Коэффициенты корреляции между вопросами 1 и 2 для выбранных гостиниц

Коэффициент корреляции\Гостиница	IKAR – KOŁOBRZEG	DORIS – KOŁOBRZEG	MAX – USTRONIE MORSKIE	OLYMP – KOŁOBRZEG	JANTAR – KOŁOBRZEG
$r_{1,2}$	0,233	0,676	0,821	0,598	0,118

На основании представленной выше модели (9) были определены для каждого года 2006–2008 матрицы ковариаций для приведенных гостиниц (в 2009 г. только две гостиницы обладали данными в одинаковых периодах времени), а затем рассчитаны зависимости *средняя оценка гостиницы – риск (стандартное отклонение)* $\bar{O}_i = \bar{O}_i(r)$. Матрицы ковариаций показывают достаточно сильную взаимосвязь между гостиницами, так как в условиях рыночных отношений неизбежна конкурентная борьба и взаимное влияние объектов хозяйствования на цены и качество гостиничных услуг.

Рисунки 3а и 3б представляют зависимости $\bar{O}_i = \bar{O}_i(r)$ соответственно для вопросов 1 и 2.

Исследования на основе вопроса 1 показывают, что в 2006–2007 гг. максимальная оценка при минимальном риске близком к нулю, составляет около 4,4, тогда как в 2008 г. она уменьшается при таком же уровне риска до 4,1. Дополнительно причина этого не исследовалась, однако это может быть связано, например, с внутренними проблемами гостиниц.

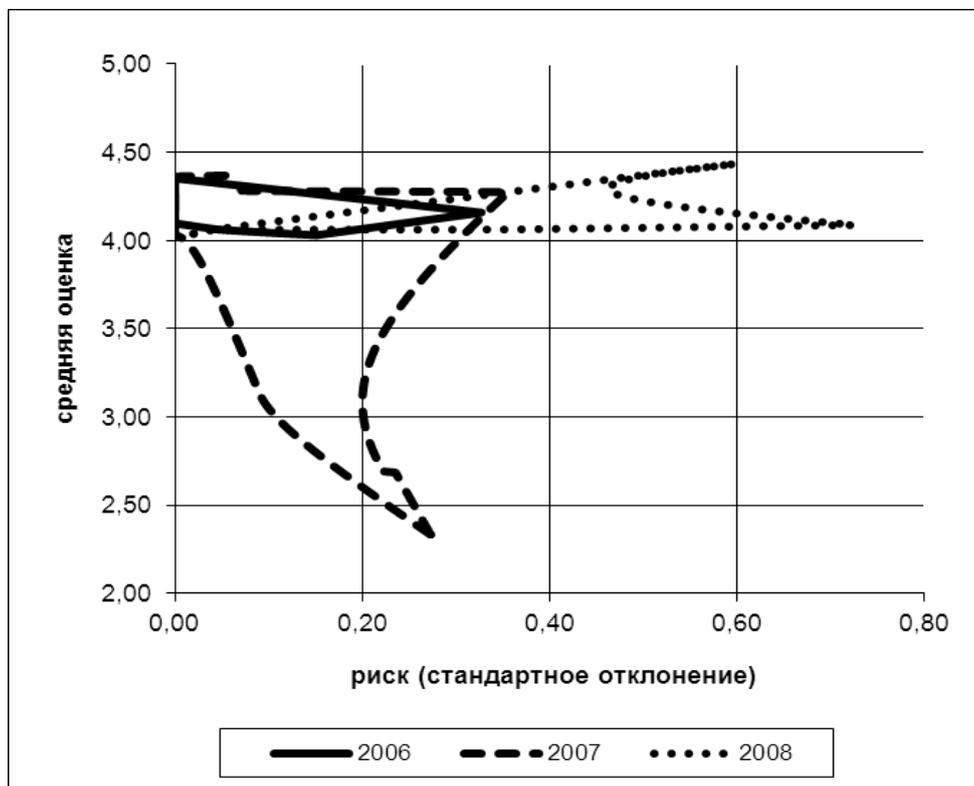


Рисунок 3а – Зависимость *оценка–риск* для Вопроса 1 в 2006–2008 гг.

Для Вопроса 2 получены несколько иные результаты, чем в исследовании с Вопросом 1. Возрастает год от года число туристов, бывших ранее в представленных гостиницах (увеличивается максимальная оценка), однако риск тоже увеличивается, т.е. больше выступает отличающихся оценок. По-видимому, этот факт следует оценить положительно, так как он показывает, что в группах туристов, останавливающихся в гостиницах, присутствует все больше людей, бывших ранее здесь, и соответственно, положительно оценивающих свое пребывание.

На основании оценок в Вопросах 1 и 2 можно также оценить положительно факт роста доверия к анкетированию, когда туристы объективнее оценивают свое пребывание. Для владельцев гостиниц это может выступать дополнительным фактором улучшения качества обслуживания.

Представленные на рисунках 3а, б зависимости *оценка–риск* позволяют также сделать выбор оптимальной для клиента гостиницы. Оптимальность зависит от критерия выбора. Ниже в Таблице 2 приведены результаты вычисления вероятностей для «портфелей» из пяти гостиниц, выбранные исходя из критерия минимальности риска.

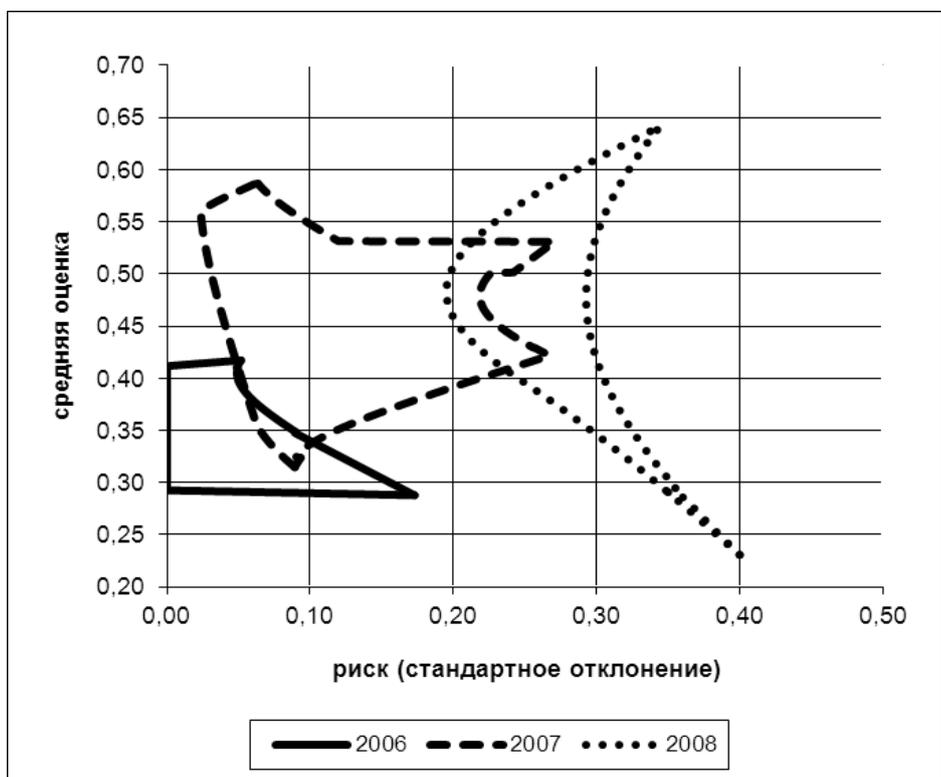


Рисунок 3в – Зависимость *оценка–риск* для Вопроса 2 в 2006–2008 гг.

Таблица 2 – Вероятность выбора гостиницы на основе зависимости *оценка – риск*

Вопрос 1			Вероятность				
Год	Оценка	Риск	IKAR – KOŁOBRZEG	DORIS – KOŁOBRZEG	MAX – USTRONIE MORSKIE	OLYMP – KOŁOBRZEG	JANTAR – KOŁOBRZEG
2006	4,353	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
2007	4,363	0,000	0,858	0,090	0,052	0,000	0,000
2008	4,041	0,021	0,006	0,993	0,001	0,000	0,000
Вопрос 2			Вероятность				
Год	Оценка	Риск	IKAR – KOŁOBRZEG	DORIS – KOŁOBRZEG	MAX – USTRONIE MORSKIE	OLYMP – KOŁOBRZEG	JANTAR – KOŁOBRZEG
2006	0,411	0,000	0,000	0,996	0,004	0,000	0,000
2007	0,559	0,024	0,729	0,000	0,271	0,000	0,000
2008	0,489	0,196	0,440	0,000	0,560	0,000	0,000

Например, для Вопроса 1 на кривой минимального риска зависимости *оценка–риск* для 2008 года выбираем оптимальную точку (4,041; 0,021) с оценкой 4,041 и риском 0,021. В таблице 2 для «портфеля» из 5 гостиниц наибольшую вероятность 0,993 имеет гостиница «Doris», из чего следует, что она имеет наибольшие шансы выбора потенциальным клиентом в 2009 году.

Представленные результаты позволяют утверждать, что имеет смысл непрерывное исследование и мониторинг условий пребывания туристов в гостиницах и анализ зависимостей *оценка–риск*. Объективный мониторинг (предпочтительней ежемесячный и даже недельный) позволяет потенциальным клиентам гостиниц получать информацию «on line» о туристических объектах. Заметим, что условием объективности исследования является увеличение числа анкетированных после пребывания в гостинице. Другим положительным фактом следует признать своеобразную обратную связь для менеджеров гостиниц, так как она позволяет непредвзято оценить результаты деятельности гостиниц

по обслуживанию клиентов. От того, как представляется гостиница в зависимости *оценка–риск* может зависеть решение туриста, который является потенциальным клиентом данной гостиницы, и, соответственно, это влияет на ее экономические показатели. В современных условиях можно сравнительно легко создать интернет-сайт, данные с которого будут доступны для любого пользователя, в том числе в каждом туристическом бюро, который будет аналогичен биржевым или погодным сайтам. Сайт может оперативно представлять информацию о состоянии гостиничных услуг в определенном регионе или даже целой стране, а также собирать информацию о результатах анкетирования.

Выводы

Проведенные исследования на основе модели *«оценка гостиницы – риск выбора туристического объекта»* позволяют сделать следующие выводы:

- результатом исследования модели является область допустимых оценок и стандартных отклонений этих оценок, которые можно интерпретировать как риск выбора туристом определенного туристического объекта. Точка в области допустимых решений информирует клиента о состоянии туристических услуг при выбранных условиях *«оценка гостиницы – риск выбора туристического объекта»*, что позволяет ему на основе собственных критериев выбрать пакет гостиниц. Определяются вероятности присутствия той или иной гостиницы в «портфеле». Для гостиниц с максимальными вероятностями при выбранных условиях пребывания *«оценка–риск»* клиентом выбираются гостиницы с максимальной вероятностью;

- для успешного осуществления выбора гостиницы важным является независимый непрерывный мониторинг условий пребывания клиентов в гостиницах, что существенно для оценки деятельности туристических объектов не только со стороны финансовых результатов, но и со стороны максимального удовлетворения потребностей клиентов, что в конечном итоге также отразится на экономических показателях гостиниц. Для мониторинга предложено использовать возможности Интернета;

- предложенная модель может использоваться для мониторинга состояния не только для туризма, но и в других отраслях экономики, где «обратная связь» производителей аналогичных товаров и услуг и потребителей (в виде оценок цены–качества) может эффективно влиять на улучшение качества и снижение цен товаров и услуг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. <http://msport.gov.pl/unia-europejska-turystyka>
2. http://www.belta.by/ru/all_news/economics/Belarus-stala-bolshe-zarabatyvat-na-turizme_i_512866.html
3. Woźniak, R. Pozycja konkurencyjna Kołobrzegu w świetle najnowszych badań empirycznych / R. Woźniak // Marketing w rozwoju turystyki. – Koszalin : Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2009. – P. 102–118.
4. Dłubakowska–Puzio, E.K., Karpuk, M.M., Puzio, K. Przyszłość uzdrowiska Kołobrzeg w obliczu ogólnoswiatowych zjawisk kryzysowych / E.K. Dłubakowska–Puzio, M.M. Karpuk, K. Puzio // Polityka gospodarcza, społeczna i ekologiczna w dobie kryzysu światowego. – Szczecin–Kijów : Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, 2009. – P. 181–194.
5. Markowitz, Harry M. Portfolio Selection / Harry M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7 (1). – P. 77–91.
6. Jurek, W. Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie. – Poznań : Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2004. – P. 163–185.
7. Бреддик, У. Менеджмент в организации / У. Бреддик. – Москва : Инфра, 1997.
8. Бочаров, В.В. Финансовое моделирование : учебное пособие / В.В. Бочаров. – СПб : 2000.
9. Хедли, Дж. Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ. / Дж. Хедли. – Москва : Мир, 1967.

Ewa K. Dlubakowska – Puzio, M. Karpuk, A. Mirskaya, K. Puzio. Mathematical Model of the Risk of Investigation of the Level of Satisfaction by the Quality of the Tourist Product

A model of examining the tourist risk is presented in the article. It is assumed that opinions of hotels are correlated; therefore the choice of the consumer depends on the collection of hotels with the maximum expected value of the consumer's opinion and the minimal risk. Some hotel is taken out from the optimal set with the highest probability. The model is solved by the method of square programming with using the program Matcad. The theoretical model is used for the study of choice of consumers in hotels from the region of Kołobrzeg in 2006–2009. The model allows the customer to choose effectively the hotel with high averages and minimal risk. The idea of constant monitoring of tourist data and presenting the information to the consumer is also suggested in the article. The introduced model could be applied for the examination of different economic phenomena, based on historical data.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.12.2010 г.

К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА–ЧЕБЫШЕВА НА КЛАССЕ ЛИПШИЦА

В работе исследуются аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона–Чебышева на классах Липшица порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, т.е., функций, удовлетворяющих условию $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha \forall x_1, x_2 \in [-1, 1]$. Эти свойства определяются поведением верхних граней $E(H^\alpha; B_\rho; x) = \sup_{f \in H^\alpha} |f(x) - B_\rho(f; T; x)|$ при всех $0 < \alpha \leq 1$ в каждой точке конечного отрезка вещественной оси. Исследованию аппроксимативных свойств различных матричных методов – сумм Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Абеля-Пуассона и т.д., а также наилучших приближений функций, заданных на отрезке, посвящены работы С.М. Никольского, А.Ф. Тимана, В.К. Дзядька, В.П. Моторного, Н.П. Корнейчука, Р.М. Тригуба, Ю.И. Русецкого и других математиков. Нами получены асимптотические при $\rho \rightarrow 1-$, $0 < \alpha \leq 1$, равенства для величины $E(H^\alpha; B_\rho; x)$, а также ее точное значение при всех $0 < \rho < 1$ в случае $\alpha=1$.

Обозначим через H^α [1, с. 969] класс Липшица порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, функций f , заданных на отрезке $[-1, 1]$, которые удовлетворяют условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha \forall x_1, x_2 \in [-1, 1] \quad (1)$$

Пусть, далее, $\hat{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $\hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x$, $k \in N$, – ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1, 1]$ система полиномов П.Л. Чебышева первого рода. Для каждой

непрерывной функции f обозначим через $c_k = c_k(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ последовательность

коэффициентов Фурье функции f за системой $T_k(x)$ [2]. Бесконечный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k \quad (2)$$

называют рядом Фурье–Чебышева функции f .

Известно, что функция f , которая удовлетворяет условию (1), является функцией с конечным изменением и непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, а ряд Фурье–Чебышева (2) такой функции сходится к f равномерно на этом отрезке.

Для каждой непрерывной на $[-1, 1]$ функции f рассмотрим величину

$$B_\rho(f; T; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k c_k T_k(x), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (3)$$

которую будем называть бигармоническим интегралом Пуассона–Чебышева. Сразу обратим внимание на то, что функция $B_\rho(f; T; x)$ может быть представлена в виде:

$$B_\rho(f; T; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt,$$

где $y = \arccos x$, а $B(\rho, u)$ – бигармоническое ядро Пуассона,

$$B(\rho, u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k \cos ku = \frac{(1 - \rho^2)^2 (1 - \rho \cos u)}{2(1 - 2\rho \cos u + \rho^2)^2}. \quad (4)$$

В работе изучается поведение величины

$$E(H^\alpha; B_\rho; x) = \sup_{f \in H^\alpha} |f(x) - B_\rho(f; T; x)| \quad (5)$$

в каждой точке x отрезка $[-1, 1]$ в таких случаях:

- 1) когда $\rho \rightarrow 1-, 0 < \alpha \leq 1$;
- 2) для всех $0 < \rho < 1, \alpha = 1$.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho) = \varphi(\rho; x)$ такая, что при $\rho \rightarrow 1-$ $E(H^\alpha; B_\rho; x) = \varphi(\rho; x) + o(\varphi(\rho; x)), x \in [-1, 1]$, то, следуя А.И. Степанцу [3, стр. 198], скажем, что решена задача Колмогорова - Никольского (К.-Н.) для интеграла $B_\rho(f; T; x)$ на классе $H^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Отметим, что поведение верхних граней приближений на классах Липшица периодических функций гармоническими и бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике исследовались в работах [4–8]. Что касается непериодических функций, то возникновение и исследование задачи о асимптотическом поведении верхней грани приближения функций с класса $H^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, которые заданы на конечном промежутке, алгебраическими многочленами обусловлено работой С.М. Никольского [9]. В этой работе исследован вопрос о приближении функций с класса H^1 суммами Фурье-Чебышева $S_n(f; T; x)$. Позже А.Ф. Тиман [1] получил решение задачи К.-Н. для сумм Фурье-Чебышева на классах H^α при всех $0 < \alpha \leq 1$, а также установил асимптотическое при $n \rightarrow \infty$ равенство для величины $E(H^\alpha; \sigma_n; x), 0 < \alpha \leq 1, \sigma_n$ – суммы Фейера-Чебышева, равномерно относительно x на отрезке $[-1, 1]$.

Для гармонического интеграла Пуассона-Чебышева

$$P_\rho = P_\rho(f; T; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k c_k \hat{T}_k(x), \quad 0 \leq \rho < 1,$$

задача К.-Н. на классе Липшица решена Ю.И. Русецким [10]. Для величины

$$E(H^\alpha; P_\rho; x) = \sup_{f \in H^\alpha} |f(x) - P_\rho(f; T; x)|$$

при $\rho \rightarrow 1-$ он получил такие асимптотические равенства:

$$E(H^\alpha; P_\rho; x) = \frac{\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + o\left(\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha\right) + O(\theta_{\rho,\alpha}(x)),$$

при $0 < \alpha < 1$ и

$$E(H^\alpha; P_\rho; x) = \frac{2(1-\rho)}{\pi} \ln \frac{1}{1-\rho} \sqrt{1-x^2} + O\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right) + O(\theta_{\rho,\alpha}(x)),$$

когда $\alpha = 1$, где

$$\theta_{\rho,\alpha}(x) = \begin{cases} (1-\rho)^{2\alpha} |x|^\alpha, & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ (1-\rho)\sqrt{|x|} \ln \frac{1}{1-\rho}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ (1-\rho) |x|^\alpha, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

Цель данной работы заключается в следующем: для каждой точки x отрезка $[-1, 1]$, во-первых, найти решение задачи К.-Н. на классе $H^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, для бигармонического интеграла Пуассона-Чебышева вида (3), а во-вторых, получить точное при всех $0 < \rho < 1$ равенство для величины (5) в случае $\alpha = 1$.

Результаты исследований изложены в следующих теоремах.

Теорема 1. Для произвольного $\alpha \in (0,1]$ в каждой точке $x \in [-1,1]$ при $\rho \rightarrow 1-$ имеют место равенства

$$E(H^\alpha; B_\rho; x) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^\alpha + O(\mathcal{G}(\rho, \alpha)) \right) + O(\theta_{\rho, \alpha}(x)), \quad (7)$$

когда $0 < \alpha < 1$, где величина $\theta_{\rho, \alpha}(x)$ определена с помощью (6),

$$\mathcal{G}(\rho, \alpha) = \begin{cases} (1-\rho)^{3\alpha}, & 0 < \alpha < \frac{1}{3}, \\ (1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho}, & \alpha = \frac{1}{3}, \\ 1-\rho, & \alpha > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{и } E(H^1; B_\rho; x) = \sqrt{1-x^2} \left(\frac{2(1-\rho)}{\pi} + \frac{2(1-\rho)^2}{\pi} \ln \frac{1}{1-\rho} \right) + O\left((1-\rho)^2 (\sqrt{1-x^2} + |x|) \right). \quad (9)$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами положительного ядра (4) и неравенством (1), тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - B_\rho(f, T, x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(\cos t) - f(\cos y)) (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos t) - f(\cos y)| (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку функция

$$f_0(u) = \begin{cases} (x-u)^\alpha, & -1 \leq u \leq x, \\ (u-x)^\alpha, & x \leq u \leq 1 \end{cases}$$

принадлежит к H^α , $0 < \alpha \leq 1$, и, как следует из (5),

$$E(H^\alpha; B_\rho; x) \geq |f_0(x) - B_\rho(f_0, T, x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt, \quad (11)$$

то из (10) и (11) получаем, что

$$E(H^\alpha; B_\rho; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha (B(\rho, t+y) + B(\rho, t-y)) dt. \quad (12)$$

Обозначим

$$I(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha B(\rho, t+y) dt. \quad (13)$$

Далее воспользуемся тем, что подынтегральная функция в (13) является периодической, следовательно,

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{2^{\alpha-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t-y}{2} \sin \frac{t+y}{2} \right|^\alpha B(\rho, t+y) dt = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \sin \frac{t-2y}{2} \right|^\alpha B(\rho, t) dt = \\ &= \frac{2^\alpha}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t \sin(t-y)|^\alpha B(\rho, 2t) dt = \frac{2^\alpha}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 t \cos y - \sin t \cos t \sin y|^\alpha B(\rho, 2t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Вследствие того, что при $\alpha \in (0,1]$

$$\left| |u \pm v|^\alpha - |u|^\alpha \right| \leq |v|^\alpha, \quad (15)$$

из равенства (14) находим

$$I(y) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^\alpha B(\rho, 2t) dt + O(1) \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} |\cos y|^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho, 2t) dt. \quad (16)$$

Последующие рассуждения сначала проведем для случая $0 < \alpha < 1$. Воспользовавшись неравенством (15), первое слагаемое из правой части соотношения (16) запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^\alpha B(\rho, 2t) dt &= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha \left| 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right|^\alpha B(\rho, 2t) dt = \\ &= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t B(\rho, 2t) dt + (\sin y)^\alpha O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2} \right)^\alpha B(\rho, 2t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Для первого интеграла с правой части соотношения (17), принимая к вниманию (4), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha B(\rho, 2t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^k \cos 2kt \right) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos 2kt \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^k \cos 2ktdt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha B(\rho, 2t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t) dt + \frac{1 - \rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos 2ktdt, \quad (18)$$

где $P(\rho, 2t)$ – гармоническое ядро Пуассона

$$P(\rho, 2t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos 2kt = \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos 2t + \rho^2)}.$$

Интегрируя частями во втором слагаемом из правой части (18), находим

$$\begin{aligned} \frac{1 - \rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos 2ktdt &= -\frac{\alpha}{4} \rho (1 - \rho^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t \cos t \frac{\sin 2t}{1 - 2\rho \cos 2t + \rho^2} dt = \\ &= -\alpha \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^2 t P(\rho, 2t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Объединив (19) и (18), заключаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t B(\rho, 2t) dt = (1 - \alpha \rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t) dt + \alpha \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sin^2 t P(\rho, 2t) dt. \quad (20)$$

Дальше переходим к поиску оценки первого интеграла из правой части (20). Прежде всего отметим, что для произвольной непрерывной при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ функции $f(t)$ выполняется равенство

$$\frac{f(\sin t)}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 t} - \frac{f(t)}{(1 - \rho)^2 + 4\rho t^2} = O(1), \quad (21)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Отсюда, к примеру, (см. также [10, с. 138]) следует, что

$$\frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 t} - \frac{t^\alpha}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} = O(1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (1-\alpha\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t) dt &= (1-\alpha\rho) \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 t} dt = \\ &= \frac{1-\alpha\rho}{2} \frac{1+\rho}{(1-\rho)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha}{1 + \left(\frac{2\sqrt{\rho}t}{1-\rho}\right)^2} dt + O(1-\rho^2) = (1-\alpha\rho) \frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt + O(1-\rho) = \\ &= (1-\alpha\rho) \frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt + O(1-\rho). \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая то, что

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}, \quad \alpha \in (0,1), \quad (23)$$

[11, с. 306] из (22) при $\rho \rightarrow 1-$ и $0 < \alpha < 1$ следует

$$(1-\alpha\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t) dt = (1-\alpha\rho) \frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}} \frac{\pi}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1-\rho). \quad (24)$$

Введем обозначение

$$\xi(\rho) = (1-\rho)^\alpha \left((1-\alpha\rho)(1+\rho) - 2(1-\alpha)(\sqrt{\rho})^{\alpha+1} \right)$$

Поскольку $\xi(\rho) = (1-\rho)^\alpha \left(-\alpha\rho - \alpha\rho^2 + 2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1} \right) + (1-\rho)^\alpha \left(1+\rho - 2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1} \right)$, и при $\rho \rightarrow 1-$

$$(1-\rho)^\alpha \left(-\alpha\rho - \alpha\rho^2 + 2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1} \right) = o(1-\rho),$$

$$(1-\rho)^\alpha \left(1+\rho - 2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1} \right) = o(1-\rho),$$

то $\xi(\rho) = o(1-\rho)$, $\rho \rightarrow 1-$. Исходя из (24) и того, что

$$(1-\alpha\rho) \frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}} \frac{\pi}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} = (1-\alpha) \frac{\pi(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2} \cos \frac{\alpha\pi}{2}} + \frac{\pi}{2^{\alpha+3} \cos \frac{\alpha\pi}{2} (\sqrt{\rho})^{\alpha+1}} \xi(\rho),$$

при $\rho \rightarrow 1-$ получаем оценку первого слагаемого с правой части равенства (20)

$$(1-\alpha\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t P(\rho, 2t) dt = (1-\alpha) \frac{\pi(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2} \cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1-\rho). \quad (25)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{\sin^\alpha t \sin^2 t}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 t} - \frac{t^\alpha t^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} = O(1),$$

которое получаем из (21), оценим второй интеграл из правой части (20)

$$\alpha\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sin^2 t P(\rho, 2t) dt = \alpha\rho(1-\rho^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha t^2 dt}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} + O(1-\rho^2). \quad (26)$$

Дальше вычислим оценку первого слагаемого с (26). Итак,

$$\begin{aligned} \alpha\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha t^2 dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2} &= \frac{\alpha\rho(1-\rho^2)}{4\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha dt}{\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^2+1} = \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}\frac{t^{-\alpha} dt}{t^2(1+t^2)} < \\ &< \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}t^{-\alpha-2} dt = \frac{\alpha}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя оценку (27) в (26), получаем

$$\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t \sin^2 t P(\rho, 2t) dt = O(1-\rho), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (28)$$

Объединение соотношений (20), (25) и (28) дает возможность записать оценку первого слагаемого с правой части (17)

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha B(\rho, 2t) dt = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha + O(1-\rho)\right). \quad (29)$$

Второй интеграл из правой части (17) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho, 2t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho, 2t) dt + \\ &+ \frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2ktdt. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, применяя интегрирование частями, видим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2ktdt &= -\frac{(1-\rho^2)}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha\right)_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin 2ktdt = \\ &= -\frac{\alpha\rho}{4}(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\cos t \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t + \rho^2} dt = \\ &= -\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\cos^2 t + 2\cos^2 \frac{t}{2}\cos t\right)P(\rho, 2t) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Объединив (31) и (30), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho, 2t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho, 2t) dt - \\ &- \alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\cos^2 t + 2\cos^2 \frac{t}{2}\cos t\right)P(\rho, 2t) dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho, 2t) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Опять воспользуемся оценкой (21), имеем,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho, 2t) dt = \frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{t^3}{4}\right)^\alpha}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} dt + O(1-\rho^2) = \\
&= \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt + O(1-\rho^2) := I(\alpha, \rho) + O(1-\rho^2). \quad (33)
\end{aligned}$$

Оценим величину $I(\alpha, \rho)$ в каждом отдельном случае: $\alpha < \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha > \frac{1}{3}$. Пусть $\alpha < \frac{1}{3}$. Тогда с учетом (23), находим

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \rho) &= \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt < \\
&< \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt = \frac{(1+\rho)(1-\rho)^{3\alpha}}{2^{2\alpha+2}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}} \frac{\pi}{\cos \frac{3\alpha}{2}\pi}. \quad (34)
\end{aligned}$$

При $\alpha = \frac{1}{3}$ имеем

$$I\left(\frac{1}{3}, \rho\right) = 2^{\frac{1}{3}} \frac{1-\rho^2}{16\rho} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{16\rho} (1-\rho^2) \ln \frac{\sqrt{(1-\rho)^2 + \pi^2 \rho}}{1-\rho}. \quad (35)$$

При $\alpha > \frac{1}{3}$ заключаем, что

$$I(\alpha, \rho) < \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} t^{3\alpha-2} dt = \frac{\pi^{3\alpha-1}}{2^{5\alpha+2}(3\alpha-1)} \frac{1-\rho^2}{\rho}. \quad (36)$$

Следовательно, согласно (32–36),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho, 2t) dt = \mathcal{G}(\rho, \alpha), \quad (37)$$

где величина $\mathcal{G}(\rho, \alpha)$ определена с помощью (8).

Из соотношений (17), (29) и (37) следует, что для первого слагаемого с правой части (16) при $0 < \alpha < 1$ имеет место равенство

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^\alpha B(\rho, 2t) dt = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^\alpha + \mathcal{G}(\rho, \alpha) \right). \quad (38)$$

Оценим второй интеграл с правой части соотношения (16). Аналогично, как и при получении (32), убеждаемся, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho, 2t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho, 2t) dt - 2\alpha\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t \cos^2 t P(\rho, 2t) dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho, 2t) dt. \quad (39)$$

Для интеграла (39) имеет место (на основании соотношения (18) из работы [10, с. 141]) следующая оценка:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho, 2t) dt = \begin{cases} O((1-\rho)^{2\alpha}), & \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left((1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho}\right), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ O(1-\rho), & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (40)$$

Объединив соотношения (16), (38) и (40), получаем оценку интеграла $I(y)$ при $0 < \alpha < 1$

$$I(y) = (\sqrt{1-x^2})^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^\alpha + \mathcal{G}(\rho, \alpha) \right) + O(\theta_{\rho, \alpha}(x)), \quad (41)$$

где величина $\theta_{\rho, \alpha}(x)$, $x \in [-1, 1]$, определена с помощью формулы (6).

Проведя аналогичные шаги, как и при получении (14), нетрудно убедиться, что интеграл

$$I(-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^\alpha B(\rho, t-y) dt \quad (42)$$

можно представить так:

$$I(-y) = \frac{2^\alpha}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 t \cos y + \sin t \cos t \sin y|^\alpha B(\rho, 2t) dt.$$

Отсюда, на основании соотношения (15), убеждаемся в том, что для интеграла $I(-y)$ имеет место равенство (16). Поэтому, оценка (41) верна и для интеграла $I(-y)$:

$$I(-y) = (\sqrt{1-x^2})^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^\alpha + \mathcal{G}(\rho, \alpha) \right) + O(\theta_{\rho, \alpha}(x)). \quad (43)$$

Таким образом, из формул (12), (13), (41–43) при $\rho \rightarrow 1-$ следует равенство (7).

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 1$. Для первого интеграла с правой части соотношения (16), используя равенство

$$\frac{1-\rho \cos 2t}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} = \frac{1}{2(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)} + \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2}, \quad (44)$$

находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t B(\rho, 2t) dt &= \frac{(1-\rho^2)^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \frac{1-\rho \cos 2t}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} dt = \\ &= \frac{(1-\rho^2)^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \left(\frac{1}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} + \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Поскольку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t dt}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} = \frac{1}{8\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} = \frac{1}{4\rho} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

а

$$(1-\rho^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t dt}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} = \frac{1}{2(1-\rho)(1+\rho)},$$

то, подставляя полученные значения двух интегралов в (45), получаем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t B(\rho, 2t) dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{16\rho} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{1-\rho^2}{8} = \frac{1-\rho}{4\pi} + \frac{(1-\rho)^2}{4\pi} \ln \frac{1}{1-\rho} + O((1-\rho)^2). \quad (46)$$

Опять воспользовавшись (44), второй интеграл с правой части (16) в случае $\alpha = 1$ оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho, 2t) dt &= \frac{(1-\rho^2)^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t (1-\rho \cos 2t)}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} dt = \\ &= \frac{(1-\rho^2)^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Установим значение первого интеграла с правой части формулы (47). Как следует из (21)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-\rho^2) + 4\rho \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{(1-\rho^2) + 4\rho t^2} + O(1),$$

тогда при $\rho \rightarrow 1-$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{1 + \left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} t\right)^2} + O(1) = \frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} + O(1) = O(1).$$

Поскольку

$$\frac{\sin^2 t}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} = -\frac{1}{4\rho} \left(\frac{(1-\rho)^2}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} - \frac{1}{1-2\rho \cos 2t + \rho^2} \right),$$

то, применяя формулы 2.562.1 и 2.563.1 из [11, с. 166], приходим к тому, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2\rho \cos 2t + \rho^2)^2} = \frac{\pi}{4(1+\rho)^3(1-\rho)}.$$

Подставляя полученные значения интегралов в (47), для второго интеграла с правой части (16) в случае $\alpha = 1$ находим оценку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho, 2t) dt = O((1-\rho)^2). \quad (48)$$

Из соотношений (16), (46) и (48) заключаем, что для интеграла $I(y)$ вида (13) при $\alpha = 1$ справедлива оценка

$$I(y) = \left(\frac{1-\rho}{\pi} + \frac{(1-\rho)^2}{\pi} \ln \frac{1}{1-\rho} \right) \sqrt{1-x^2} + O(1-\rho)^2 \left(\sqrt{1-x^2} + |x| \right) \quad (49)$$

Поскольку для интеграла $I(-y)$ вида (42) при $\alpha = 1$ имеет место такая же оценка, как и для интеграла $I(y)$, то из (12), (13) и (49) получаем равенство (9). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в каждой точке $x \in (-1, 1)$ при $\rho \rightarrow 1-$ равенства (7) (когда $0 < \alpha < 1$) и (9) (при $\alpha = 1$) являются асимптотическими.

Следствие 1. Для каждого $0 < \alpha < 1$ в любой точке $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ при $\rho \rightarrow 1-$ имеет место асимптотическое равенство

$$E(H^\alpha; B_\rho; x) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)^\alpha \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^\alpha + O(\theta_{\rho, \alpha}(x)).$$

Теорема 2. Для каждого $x \in [-1, 1]$ и $0 < \rho < 1$ имеет место равенство

$$E(H^1; B_\rho; x) = \frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi\rho} \sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1-\rho} + \frac{1-\rho}{2\pi} \left(2(\pi - 2 \arccos x)x + (1+\rho)^2 \sqrt{1-x^2} \right) + \frac{(1-\rho)^2}{2\pi\rho} \left((1-\rho)^2 - 2\rho^2 \right) x \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho - 2\rho x^2} + \frac{(1-\rho)^2}{2\pi} (1+\rho) \left((1+\rho)^2 - 4\rho x^2 \right) \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}. \quad (50)$$

Доказательство. В условиях теоремы 2 справедлива формула (12), из которой при $\alpha = 1$, используя (4), получаем

$$E(H^1; B_\rho; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y| \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \cos ky + (1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \cos ky \right) dt, \quad y = \arccos x.$$

Положим

$$B_\rho^1(t; y) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \cos ky,$$

$$B_\rho^2(t; y) := (1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \cos ky.$$

Тогда

$$E(H^1; B_\rho; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^y (\cos t - \cos y) (B_\rho^1(t; y) + B_\rho^2(t; y)) dt + \frac{1}{\pi} \int_y^\pi (\cos y - \cos t) (B_\rho^1(t; y) + B_\rho^2(t; y)) dt. \quad (51)$$

Рассмотрим первое слагаемое из (51), используя следующие обозначения:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^y (\cos t - \cos y) (B_\rho^1(t; y) + B_\rho^2(t; y)) dt = I_1 - I_2, \quad (52)$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^y \cos t B_\rho^1(t; y) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^y \cos t B_\rho^2(t; y) dt := \frac{1}{\pi} (I_1^1 + I_1^2), \quad (53)$$

$$I_2 = \frac{\cos y}{\pi} \int_0^y (B_\rho^1(t; y) + B_\rho^2(t; y)) dt := \frac{\cos y}{\pi} (I_2^1 + I_2^2). \quad (54)$$

В работе Ю.И. Русецкого [10] показано, что

$$I_1^1 = \sin y + \rho \cos y \left(y + \frac{1}{2} \sin 2y \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right). \quad (55)$$

Далее находим

$$I_1^2 = (1-\rho^2) \int_0^y \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos ky \cos t \cos kt dt = \frac{1-\rho^2}{2} \left(\frac{\rho \cos y \sin 2y}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) \right), \quad (56)$$

$$I_2^1 = y + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos ky \sin ky, \quad (57)$$

$$I_2^2 = (1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos ky \sin ky. \quad (58)$$

Из соотношений (53), (55) и (56) следует

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \left(\sin y + \rho \cos y \left(y + \frac{\sin 2y}{2} \right) + \frac{1-\rho^2}{4} \rho \cos y \sin 2y + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) + \frac{1-\rho^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) \right). \quad (59)$$

А из (54), (57) и (58) имеем, что

$$I_2 = \frac{\cos y}{\pi} \left(y + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kys \sin ky + (1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kys \sin ky \right). \quad (60)$$

Второе слагаемое из (51) представим следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_y^{\pi} (\cos y - \cos t) (B_{\rho}^1(t; y) + B_{\rho}^2(t; y)) dt = I_3 - I_4, \quad (61)$$

$$I_3 = \frac{\cos y}{\pi} \left(\int_y^{\pi} B_{\rho}^1(t; y) dt + \int_y^{\pi} B_{\rho}^2(t; y) dt \right) := \frac{\cos y}{\pi} (I_3^1 + I_3^2), \quad (62)$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \left(\int_y^{\pi} \cos t B_{\rho}^1(t; y) dt + \int_y^{\pi} \cos t B_{\rho}^2(t; y) dt \right) := \frac{1}{\pi} (I_4^1 + I_4^2). \quad (63)$$

Далее находим, что

$$I_3^1 = \pi - y - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kys \sin ky, \quad (64)$$

$$I_3^2 = -(1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kys \sin ky. \quad (65)$$

Для интеграла I_4^1 воспользуемся оценкой из работы [10]

$$I_4^1 = -\sin y + \rho \cos y \left(\pi - y - \frac{1}{2} \sin 2y \right) - \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right). \quad (66)$$

И, наконец, для интеграла I_4^2 получаем

$$I_4^2 = (1-\rho^2) \int_y^{\pi} \cos t \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \cos ky dt = \frac{1-\rho^2}{2} \int_y^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (\cos(k-1)t + \cos(k+1)t) \cos ky dt = -\frac{1-\rho^2}{2} \left(\frac{\rho}{2} \cos y \sin 2y + \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) \right). \quad (67)$$

Сопоставив соотношения (61–67), приходим к следующему:

$$\begin{aligned} & \int_y^{\pi} (\cos y - \cos t) (B_{\rho}^1(t; y) + B_{\rho}^2(t; y)) dt = \cos y (\pi - y - \\ & - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kys \sin ky - (1-\rho^2) \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kys \sin ky) + \sin y - \\ & - \rho \cos y \left(\pi - y - \frac{1}{2} \sin 2y \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) + \\ & + \frac{1-\rho^2}{2} \left(\frac{\rho}{2} \cos y \sin 2y + \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) \right). \quad (68) \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (51), (59), (60) и (68), получим

$$\begin{aligned} \pi E(H^1; B_{\rho}; x) &= 2 \sin y + \rho \cos y \sin 2y + \cos y (\pi - 2y) (1-\rho) + \\ & + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) - 4 \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kys \sin ky + \\ & + \frac{1-\rho^2}{2} \rho \cos y \sin 2y - 2(1-\rho^2) \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kys \sin ky + \end{aligned}$$

$$+ (1-\rho^2) \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right). \quad (69)$$

Заметим, что для величины $E(H^1; P_\rho; x)$, $P_\rho(\cdot)$ – гармонический интеграл Пуассона-Чебышева было получено (см. [10]) следующее представление:

$$\begin{aligned} \pi E(H^1; P_\rho; x) &= 2 \sin y + \rho \cos y \sin 2y + \cos y (\pi - 2y)(1-\rho) + \\ &+ 2 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right) - 4 \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos ky \sin ky. \end{aligned} \quad (70)$$

Правую часть с (70) $\forall x \in [-1, 1]$ можно записать еще в таком виде:

$$\begin{aligned} \pi E(H^1; P_\rho; x) &= \frac{1-\rho^2}{\rho} \sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1-\rho} + \\ &+ (1-\rho)(\pi - 2 \arccos x)x + \frac{(1-\rho)^2}{\rho} x \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho - 2\rho x^2}, \quad 0 < \rho < 1. \end{aligned} \quad (71)$$

Положим

$$\begin{aligned} \Upsilon &:= \frac{1-\rho^2}{2} \rho \cos y \sin 2y - 2(1-\rho^2) \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos ky \sin ky + \\ &+ (1-\rho^2) \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1} + \frac{\sin(k-1)y}{k-1} \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Тогда

$$\Upsilon = (1-\rho^2) \sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \Delta^2 \left(\frac{\sin ky}{k} \right) - \frac{1-\rho^2}{2} \rho \cos y \sin 2y + (1-\rho^2)(1-\cos y) \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sin 2ky, \quad (73)$$

где $\Delta^2 \left(\frac{\sin ky}{k} \right) = \frac{\sin(k-1)y}{k-1} - 2 \frac{\sin ky}{k} + \frac{\sin(k+1)y}{k+1}$. Далее воспользуемся тождеством

$$\sum_{k=2}^n u_k \Delta^2(v_k) = \sum_{k=2}^n v_k \Delta^2(u_k) + u_2 v_1 - u_1 v_2 + u_n v_{n+1} - u_{n+1} v_n.$$

Поскольку $n \rho^n \cos ny \frac{\sin(n+1)y}{n+1} - (n+1) \rho^{n+1} \cos(n+1)y \frac{\sin ny}{n} = o(1)$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \rho^k \cos ky \Delta^2 \left(\frac{\sin ky}{k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin ky}{k} \Delta^2(k \rho^k \cos ky) + 2\rho^2 \cos 2y \sin y - \rho \cos y \frac{\sin 2y}{2}. \quad (74)$$

Как несложно убедиться,

$$\begin{aligned} \Delta^2(k \rho^k \cos ky) &= k \rho^k \Delta^2(\cos ky) + k \rho^k \left(\frac{(1-\rho)^2}{\rho} \cos ky \cos y + \right. \\ &\left. + \frac{1-\rho^2}{\rho} \sin ky \sin y \right) - \rho^k \left(\frac{1-\rho^2}{\rho} \cos ky \cos y + \frac{1+\rho^2}{\rho} \sin ky \sin y \right). \end{aligned}$$

Принимая ко вниманию последнее равенство, а также (74), перепишем по-новому соотношение (73):

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (1-\rho^2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin ky}{k} \left(k \rho^k \Delta^2(\cos ky) + k \rho^k \left(\frac{(1-\rho)^2}{\rho} \cos ky \cos y + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1-\rho^2}{\rho} \sin ky \sin y \right) - \rho^k \left(\frac{1-\rho^2}{\rho} \cos ky \cos y + \frac{1+\rho^2}{\rho} \sin ky \sin y \right) \right) + \\ &+ (1-\rho^2) \left(2\rho^2 \cos 2y \sin y - \rho \cos y \sin 2y + (1-\cos y) \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sin 2ky \right). \end{aligned}$$

Отсюда, обращая внимание на то, что $\Delta^2(\cos ky) = 2 \cos ky (\cos y - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \Upsilon = & \frac{1+\rho}{\rho}(1-\rho)^3 \cos y \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sin ky \cos ky + \frac{(1+\rho)^2}{\rho}(1-\rho)^2 \sin y \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \sin^2 ky - \\ & - \frac{(1+\rho)^2}{\rho}(1-\rho)^2 \cos y \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \sin ky \cos ky - \frac{1+\rho^2}{\rho}(1-\rho^2) \sin y \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \sin^2 ky + \\ & + 2\rho^2(1-\rho^2) \cos 2y \sin y - \rho(1-\rho^2) \cos y \sin 2y. \end{aligned}$$

Или, проведя некоторые элементарные преобразования,

$$\begin{aligned} \Upsilon = & \frac{1+\rho}{2\rho}(1-\rho)^3 \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin 2ky + \frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2 \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\cos 2ky) - \\ & - \frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2 \cos y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \sin 2ky - \frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2) \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} (1-\cos 2ky). \quad (75) \end{aligned}$$

Далее воспользуемся формулами из [12]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sin 2ky = \frac{\rho \sin 2y}{1-2\rho \cos 2y + \rho^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cos 2ky = \frac{-\rho \cos 2y + 1}{1-2\rho \cos 2y + \rho^2}$$

[9, с. 736], формула 5.4.9.(3)),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \sin 2ky = \frac{\rho \sin 2y}{1-\rho \cos 2y}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos 2ky = -\frac{1}{2} \ln(1-2\rho \cos 2y + \rho^2)$$

(см. [9, с. 738], формулы 5.4.9.(12) и 5.4.9.(13)), а также равенствами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} = \ln \frac{1}{1-\rho}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Тогда с (75) для величины Υ , которая задана с помощью (72), получаем

$$\begin{aligned} \Upsilon = & \frac{1+\rho}{2}(1-\rho)^3 \cos y \frac{\sin 2y}{1-2\rho \cos 2y + \rho^2} + \frac{(1+\rho)^2}{2}(1-\rho)^2 \sin y \left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{\cos 2y - \rho}{1-2\rho \cos 2y + \rho^2} \right) - \\ & - \frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2 \cos y \frac{\rho \sin 2y}{1-\rho \cos 2y} - \frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2) \sin y \left(\ln \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{2} \ln(1-2\rho \cos 2y + \rho^2) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $y = \arccos x$, то последнее соотношение запишется так:

$$\begin{aligned} \Upsilon = & (1+\rho)(1-\rho)^3 \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2} + \frac{(1+\rho)^2}{2}(1-\rho)^2 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1+\rho-2x^2}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2} \right) - \\ & - \frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2 x \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2} - \frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2) \sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1-\rho}. \quad (76) \end{aligned}$$

Из равенства (69), обращая внимание на (70–72) и (76), получаем (50). Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае $x = 0$ из (50) следует равенство

$$E(H^1; B_\rho; 0) = (1-\rho) \frac{(1+\rho)^2}{2\pi} + (1-\rho)^2 \frac{1+\rho}{2\pi} \left(\frac{1+\rho}{\rho} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + 1 \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тиман, А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1951. – 77, № 6 – С. 969–972.
2. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
3. Степанец, А.И. Методы теории приближения: В 2-х ч. / А.И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.1. – 427 с.
4. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950 – 72. – С. 11–14.

5. Тиман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950 – 74. – С. 17–20.
6. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона / Л.П. Фалалеев // Сибирский матем. журнал. – 2001. – 42, № 4. – С. 926–936.
7. Pych, P. On biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203–213.
8. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
9. Никольский, С.М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер.мат.– 1946. – 27, №4. – С. 295–318.
10. Русецкий, Ю.И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля-Пуассона / Ю.И. Русецкий // Сибирский матем. журнал. – 1968. – 9, № 1. – С. 136–144.
11. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматиз. – 1963. – 1100 с.
12. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука. – 1981. – 798 с.

K.N. Zhyhallo, T.V. Zhyhallo. Approximative Properties of Poisson-Chebyshev's Biharmonic Integrals on the Class of Lipschitz

Approximative properties of Poisson-Chebyshev's biharmonic integrals on the Lipschitz's class order α , $0 < \alpha \leq 1$, of the functions, which are set on a segment $[-1, 1]$, and for any $x \in [-1, 1]$ which satisfy the condition $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha$ are investigated in the article. These properties are determined by the behaviour of upper border $E(H^\alpha; B_\rho; x) = \sup_{f \in H^\alpha} |f(x) - B_\rho(f, T, x)|$ at all $0 < \alpha \leq 1$ in every point of the finite segment of real axis. The works of S.M. Nikolskiy, A.F. Timan, V.K. Dzyadyk, V.P. Motorny, M.P. Korneychuk, R.M. Trigub, Yu.I. Ruseckiy and other mathematicians are devoted to the research of approximative properties of different matrix methods, such as Fourier's partial sums, Fejer's, Valle-Poussin's methods, methods of approximation by Abel-Poisson's integrals and others and also the best approximations of functions, which are given in a segment. We have got asymptotic at $\rho \rightarrow 1-$, $0 < \alpha \leq 1$, equalities for the value $E(H^\alpha; B_\rho; x)$ and its exact meaning for all $0 < \rho < 1$, in the case $\alpha = 1$.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.11.2010 г.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ $W_\beta^r H^\alpha$

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса на классах $W_\beta^r H^\alpha$. Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений функций классов $W_\beta^r H^\alpha$ от интегралов Вейерштрасса.

1. Постановка задачи и некоторые дополнительные утверждения

Пусть C – пространство 2π -периодических функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ – пространство 2π -периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t |f(t)|$; L – пространство 2π -периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Пусть $r > 0$ и β – фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right]$$

есть рядом Фурье некоторой суммируемой функции φ , то такую функцию называют (r, β) -производной функции f в смысле Вейля-Надя и обозначают $f_\beta^r(\cdot)$. Множество функций, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через W_β^r .

Если $f \in W_\beta^r$ и при этом $f_\beta^r \in H^\alpha$, то есть f_β^r удовлетворяет условию Липшица порядка α :

$$|f_\beta^r(x+h) - f_\beta^r(x)| \leq |h|^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то говорят, что f принадлежит классу $W_\beta^r H^\alpha$. При $\alpha = 0$ полагают, что $W_\beta^r H^0 = W_\beta^r$.

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \leq 1$.

Пусть $f \in L$. Величину

$$W(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

принято называть интегралом Вейерштрасса функции f . Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Вейерштрасса запишем в виде [1].

$$W_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0.$$

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f(x) - W_\delta(f; x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = g(W_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [2], будем говорить, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла Вейерштрасса W_δ на классе $W_\beta^r H^\alpha$ в равномерной метрике.

Для интеграла Вейерштрасса введем функцию

$$\tau(u) = \tau_\delta(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2}) \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2}) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем некоторые дополнительные определения и утверждения, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы.

Определение 1 [2]. Пусть функция $\tau(u)$ задана на $[0, \infty)$, абсолютно непрерывна, $\tau(\infty) = 0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Говорят, что функция $\tau(u) \in E_\alpha$, если производную $\tau'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, чтобы существовали интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|.$$

Далее договоримся через $K, K_i, i=1, 2, \dots$ – обозначать постоянные, вообще говоря, не одни и те же в разных соотношениях.

Теорема 1 [2]. Пусть $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), $\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(0) = 0$ и

$$\xi(A, B) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} |A|, & |B| \leq |A|, \\ |A| \arcsin \left| \frac{A}{B} \right|, & |B| > |A|. \end{cases}$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \tau)$ вида

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos \left(ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\tau(u)}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du, \right.$$

при этом справедливы оценки:

$$\begin{aligned} & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \xi \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(u), |\tau(a+u) - \tau(a-u)| \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right| \leq KH(\alpha, \tau); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \right| \leq K \left(\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq K \left(\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right| \right); \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$H(\alpha, \tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|. \quad (4)$$

Утверждение 1 [3]. Если $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), то

$$|\tau(u)| \leq KH(\alpha, \tau), \quad \int_0^{\infty} |\tau'(u)| du \leq KH(\alpha, \tau),$$

где величина $H(\alpha, \tau)$ определяется равенством (4), K – некоторая постоянная.

Теорема 2' [2]. Пусть $\tau(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), $u \rightarrow \infty$ и интеграл $A(\alpha, \tau)$ сходится. Если при $r = \beta = 0$ $\tau(u) = \lambda(u)$. Тогда при $\delta \rightarrow \infty$

$$E(W_\beta^r H^\alpha; U_\delta)_c = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} a(\alpha, \tau)\right),$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где

$$a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt.$$

2. Приближение функций с классов $W_\beta^r H^\alpha$ их интегралами Вейерштрасса

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Для функции $\tau(u)$, определенной при помощи соотношения (1), при $r + \alpha \leq 2$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_c = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1+r}{2}}} + \frac{1}{\delta^2}\right), \quad (5)$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где величина $A(\alpha, \tau)$ определена при помощи соотношения (2) и для нее справедлива оценка

$$A(\alpha, \tau) = \begin{cases} O(1), & r + \alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r + \alpha = 2. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство.

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \tau)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|, \quad (7)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du \right|, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (8)$$

Для оценки первого интеграла с (7) разобьем промежуток $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на две части:

$$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right] \text{ и } \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right].$$

Так как при $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $\tau''(u) = 2e^{-u^2} \delta^{\frac{r}{2}} (1-2u^2) \geq 0$ и учитывая неравенство

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad u \in \mathbb{R},$$

получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} d\tau'(u) \leq 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (u^{1-\alpha} - 2u^{3-\alpha}) du = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (9)$$

Пусть теперь $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Положим

$$\tau_1(u) = (1 - e^{-u^2} - u^2)u^{-r}, \quad \tau_2(u) = u^{2-r},$$

тогда

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_1(u)| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_2(u)|. \quad (10)$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части неравенства (10). Так как

$$\tau_1''(u) = r(1+r)(1 - e^{-u^2} - u^2)u^{-r-2} - 4ru^{-r}(e^{-u^2} - 1) + 2(e^{-u^2} - 2u^2e^{-u^2} - 1)u^{-r},$$

и учитывая неравенства

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2}, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad 2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 3u^2, \quad (11)$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_1(u)| &\leq r(1+r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{-1-r-\alpha} (-1 + e^{-u^2} + u^2) du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} (1 - e^{-u^2}) du + \\ &+ 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} (-e^{-u^2} + 2u^2e^{-u^2} + 1) du \leq \frac{r(1+r)}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du + 6 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du = \\ &= O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right) = O(1). \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем оценку второго интеграла в правой части неравенства (10). Так как

$$\tau_2''(u) = (2-r)(1-r)u^{-r} > 0, \text{ то}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'_2(u)| \leq (2-r)(1-r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} du = \begin{cases} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right), & r+\alpha < 2 \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (13)$$

Учитывая (8), (9), (11) и (12), имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (14)$$

Оценим второй интеграл с (7). Учитывая, что согласно (1) при $u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = (2-4r)e^{-u^2}u^{-r} - 4e^{-u^2}u^{2-r} + r(1+r)(1 - e^{-u^2})u^{-2-r}, \quad (15)$$

а также неравенства

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad (16)$$

получим, что

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| = O(1). \quad (17)$$

Используя соотношение (15) и неравенства

$$1 - e^{-u^2} \leq 1, \quad u^2 e^{-u^2} \leq K_1, \quad u^4 e^{-u^2} \leq K_2,$$

оценим третий интеграл с (7)

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u |d\tau'(u)| = O(1). \quad (18)$$

Для оценки первого интеграла с (8) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right], [1, \infty).$$

Пусть $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. Учитывая (1) и второе неравенство из (11), будем иметь, что

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{(1-e^{-u^2})\delta^{\frac{r}{2}}}{u^{1+\alpha}} du \leq \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r+\alpha}{2}}}\right) = O(1). \quad (19)$$

Согласно (1), в случае, когда $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, получим

$$\left| \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du - \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1-e^{-u^2}-u^2|}{u^{1+\alpha}} u^{-r} du \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^4}{2u^{1+\alpha}} u^{-r} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{2-r+\alpha}{2}}}\right) = O(1).$$

Отсюда,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}} du + O(1) = \begin{cases} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r+\alpha}{2}}}\right), & r+\alpha < 2 \\ -\frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (20)$$

Пусть, наконец, $u \in [1, \infty)$. Так как имеет место первое неравенство с (11), то

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du - \int_1^{\infty} \frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq \int_1^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^{1+\alpha}} u^{-r} du \leq \int_1^{\infty} u^{-1-r-\alpha} du = O(1).$$

Отсюда,

$$\int_1^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}} du + O(1) = O(1). \quad (21)$$

Соединив формулы (18)–(20), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ -\frac{1}{2} \ln \delta + O(1), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (22)$$

Для того, чтоб оценить второй интеграл с (8), отметим, что при $\bar{\lambda}(u) = e^{-u^2}$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + \left(\left| \tau(0) \right| + \left| \tau(1) \right| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)| \right). \quad (23)$$

И, так как

$$\int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1), \quad (24)$$

то, учитывая соотношения (12), (15)–(16), (21)–(22), получаем

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \begin{cases} O(1), & r+\alpha < 2, \\ O(\ln \delta), & r+\alpha = 2. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, в силу теоремы 1', преобразование Фурье функции $\tau(u)$, заданной в виде (1), суммируемое на всей числовой оси. С неравенств (3) и с учетом формул (22), (25), (14), (17), (18) получим соотношение (6).

Так как для функции $\tau(u)$, заданной при помощи соотношения (1), выполняются все условия теоремы 2', а именно, согласно выше доказанного, функция $\tau(u) = \tau_\delta(u) \in E_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) и интеграл $A(\alpha, \tau)$ сходится. Поэтому, согласно теоремы 2', будет иметь место равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \tau) + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} a(\alpha, \tau)\right), \quad (26)$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1,$$

где

$$a(\alpha, \tau) = \int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \quad (27)$$

Оценим интеграл $a(\alpha, \tau)$ виду (27). Для этого представим преобразование Фурье $\hat{\tau}(t)$ в виде

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \right) \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (28)$$

Проинтегрируем дважды по частям интегралы в правой части равенства (28)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{t} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \delta^{\frac{r}{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{1}{\delta}} \delta^{\frac{r}{2}} \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{t^2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \quad (29)$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{-1}{t} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \delta^{\frac{r}{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$- \left(\frac{2}{\delta^{\frac{1-r}{2}}} e^{-\frac{1}{\delta}} - r \delta^{\frac{1+r}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \right) \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (30)$$

Подставив (28), (29) в (27), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du = \frac{1}{\pi t^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} + \frac{\beta\pi}{2}\right) r \delta^{\frac{1+r}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) - \frac{1}{\pi t^2} \int_0^\infty \tau''(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du.$$

Отсюда

$$\left| \int_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| \leq \frac{1}{\pi t^2} \int_0^\infty |\tau''(u)| du + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}. \quad (31)$$

Для оценки интеграла с правой части неравенства (31) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$ и проведем размышления аналогичные, как и при оценке первого интеграла с (9).

Учитывая, что $\tau''(u) \geq 0$ на $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ и первое неравенство с (16), получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\tau''(u)| du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) du = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} e^{-u^2} (1-2u^2) du \leq 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} (1-2u^2) du = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right) \quad (32)$$

Пусть $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$. Размышляя, как и при оценивании первого интеграла с (7) на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$, можно показать справедливость оценки

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 |\tau''(u)| du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Если $u \in [1, \infty)$, то

$$\int_1^{\infty} |\tau''(u)| du = O(1). \quad (34)$$

Объединив формулы (31)–(34), получим

$$\left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| = \frac{1}{t^2} O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right).$$

Отсюда,

$$\int_{|t| \geq \frac{\delta\pi}{2}} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-\alpha}{2}}} + \frac{1}{\delta^{\frac{2-(r+\alpha)}{2}}}\right). \quad (35)$$

Из соотношений (26), (35) вытекает равенство (5). Теорема доказана.

Теорема 2. При $r > 2$, $0 \leq \alpha < 1$ и $\delta \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \|f''(x)\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} + \frac{1}{\delta^2}\right). \quad (36)$$

Доказательство. Подадим функцию $\tau(u)$, заданную при помощи соотношения (1), в виде $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, где

$$\varphi(u) = \begin{cases} u^2 \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ u^{2-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (37)$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2} - u^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2} - u^2) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \quad (38)$$

Убедимся в суммируемости преобразований $\widehat{\varphi}(t)$ и $\widehat{\mu}(t)$ функций $\varphi(u)$ и $\mu(u)$ вида

$$\widehat{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du, \quad (39)$$

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du. \quad (40)$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha, \varphi)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)|, \quad (41)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (42)$$

Для первого интеграла с (41) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du + (2-r)(1-r) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha} du = \\ &= O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Так как функция $|u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|$ непрерывная на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, то она ограниченная на этом отрезке. Поэтому

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O(1). \quad (44)$$

Оценим третий интеграл с (41):

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u |d\varphi'(u)| = (2-r)(1-r) \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{1-r} du = O(1). \quad (45)$$

Для оценки первого интеграла с (42) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$. Получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 u^{1-r-\alpha} du + \int_1^{\infty} u^{1-r-\alpha} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{1-r+\alpha}{2}}}\right). \quad (46)$$

Для второго интеграла с (42) имеет место равенство

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|(1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|(1-u)^{2-r} - (1+u)^{2-r}|}{u^{1+\alpha}} du.$$

Так как

$$\frac{|(1-u)^{2-r} - (1+u)^{2-r}|}{u} \leq K,$$

то

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \leq K \left(\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \right) u^{-\alpha} = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r-\alpha}{2}}}\right). \quad (47)$$

Таким образом, учитывая соотношения (42)–(47), в силу теоремы 1' преобразование Фурье функции $\varphi(u)$, заданное в виде (39), суммируемо на всей числовой оси.

Для того, чтоб оценить величину $A(\alpha, \mu)$, согласно сформулированной выше теореме 1', достаточно найти оценки следующих интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)|, \quad (48)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (49)$$

Исследуем первый интеграл с (48). Для этого разобьем промежуток $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на две части: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Учитывая третье неравенство с (11) и то, что при $u \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $\mu''(u) \leq 0$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} (2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1) du \leq 6\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (50)$$

Найдем оценку этого интеграла на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Из равенства (38) имеем

$$\mu''(u) = (1 - e^{-u^2} - u^2)r(r+1)u^{-r-2} + 4(-r)u(e^{-u^2} - 1)u^{-r-1} + 2u^{-r}(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1).$$

Можно убедиться, что $\mu''(u) \leq 0$, когда $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда, учитывая неравенства

(11) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| &\leq r(r+1) \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (u^2 + e^{-u^2} - 1)u^{-1-r-\alpha} du + 4r \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-u^2})u^{1-r-\alpha} du + \\ &+ 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1)u^{1-r-\alpha} du \leq K \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (51) \end{aligned}$$

Из соотношений (50), (51) вытекает

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (52)$$

Аналогично, как и при оценивании второго интеграла с (41), получим

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| = O(1). \quad (53)$$

Из неравенств

$$e^{-u^2} \leq 1, \quad 1 - e^{-u^2} \leq 1, \quad u^2 e^{-u^2} \leq K_1$$

вытекает

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| \leq K \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{-r+1} du = O(1). \quad (54)$$

Для оценки первого интеграла с (49) разобьем промежутки $[0, \infty)$ на три части:

$\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$, $[1, \infty)$. Используя первые неравенства с (11) и (16), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du &= \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{e^{-u^2} + u^2 - 1}{u^{1+\alpha}} du + \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 + \int_1^{\infty} \right) (e^{-u^2} + u^2 - 1) u^{-1-r-\alpha} du \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha} du + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 u^{3-r-\alpha} du + \int_1^{\infty} u^{1-r-\alpha} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{\frac{2-r+\alpha}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (55)$$

Оценим второй интеграл с (49). Из соотношения (38) найдем вид функций $\mu(1-u)$ и $\mu(1+u)$.

$$\mu(1-u) = \begin{cases} (1 - e^{-(1-u)^2} - (1-u)^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \leq u \leq 1, \\ (1 - e^{-(1-u)^2} - (1-u)^2) (1-u)^{-r}, & u \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (56)$$

$$\mu(1+u) = \begin{cases} (1 - e^{-(1+u)^2} - (1+u)^2) \delta^{\frac{r}{2}}, & -1 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1, \\ (1 - e^{-(1+u)^2} - (1+u)^2) (1+u)^{-r}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1. \end{cases} \quad (57)$$

Подадим второй интеграл с (49) в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (58)$$

Оценим сначала первое слагаемое правой части равенства (58). С этой целью, додадим и отнимем под знаком модуля в подынтегральной функции величину

$$e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du &\leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du + \\ &+ \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| \mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du. \end{aligned} \quad (59)$$

Для первого интеграла с правой части неравенства (58) есть очевидной оценка

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du \leq K \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha} du = O(1). \quad (60)$$

Дальше, так как имеют место соотношения (56) и (57), то при $u \in \left[0, 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$

$$e^{-(1-u)^2} = 2u - u^2 - (1-u)^r \mu(1-u), \quad e^{-(1+u)^2} = 2u - u^2 - (1+u)^r \mu(1+u).$$

Тогда

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left| \mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right|}{u^{1+\alpha}} du \leq$$

$$\leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)| |1-(1-u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)| |1-(1+u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \quad (61)$$

Так как функция $\mu(u)$ виду (38), принадлежит множеству E_α , то согласно утверждению 1' будем иметь, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)| |1-(1-u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)| |1-(1+u)^r| \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \\ & = H(\alpha, \mu) O \left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r| du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r| du}{u^{1+\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Покажем, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$I_{1,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r| du}{u^{1+\alpha}} = O(1), \quad (63)$$

$$I_{2,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r| du}{u^{1+\alpha}} = O(1). \quad (64)$$

Действительно, функция $\frac{1-(1-u)^r}{u}$ ограниченная при всех $u \in \left[\sqrt{\delta}; 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right]$, $0 < \delta < 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ и кроме того,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1-(1-u)^r}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} r(1-u)^{r-1} = O(1), \\ \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha} du &= O(1). \end{aligned}$$

Итак, $I_{1,\delta} = O(1)$, $\delta \rightarrow \infty$.

Аналогично, можно доказать, что $I_{2,\delta} = O(1)$.

Объединение соотношений (61)–(64) позволяет записать, что

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = H(\alpha, \mu) O(1), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Для величины $H(\alpha, \mu)$ виду (4), согласно с (52)–(54), справедлива оценка

$$H(\alpha, \mu) = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (66)$$

Итак, при $\delta \rightarrow \infty$

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (67)$$

Учитывая (59)–(61), получаем

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (68)$$

Оценим второе слагаемое из правой части равенства (58). Имеем

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du +$$

$$+ O \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du \right). \quad (69)$$

Из соотношений (55), (57) при $u \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$ вытекают равенства

$$e^{-(1-u)^2} = 2 - u^2 - \delta^{-\frac{r}{2}} \mu(1-u), \quad e^{-(1+u)^2} = 2 - u^2 - \delta^{-\frac{r}{2}} \mu(1+u). \quad (70)$$

Учитывая (70) и в силу утверждения 1', находим, что

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u) + e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du \leq$$

$$\leq \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \left| \mu(1-u)(1 - \delta^{-\frac{r}{2}}) - \mu(1+u)(1 - (1+u)^r) + (1-u)^2 - (1+u)^2 \right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} =$$

$$= H(\alpha, \mu) O \left(\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - \delta^{-\frac{r}{2}}|}{u^{1+\alpha}} du + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - (1+u)^r|}{u^{1+\alpha}} du \right). \quad (71)$$

Дальше получаем

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - \delta^{-\frac{r}{2}}|}{u^{1+\alpha}} du = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^\alpha} - 1 \right) = O(1). \quad (72)$$

Повторяя размышления, приведенные при установлении оценки (65), можно показать, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|1 - (1+u)^r|}{u^{1+\alpha}} du = O(1). \quad (73)$$

Объединив соотношения (69)–(72), учитывая (66) и тот факт, что

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|e^{-(1-u)^2} - e^{-(1+u)^2} + (1-u)^2 - (1+u)^2|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

получаем такую оценку

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right).$$

Из равенства (58) на основе оценок (67), (68) имеем

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O \left(1 + \frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}} \right). \quad (74)$$

Согласно теореме 1', с учетом соотношений (55), (66) и (74), получим

$$A(\alpha, \mu) = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \quad (75)$$

Аналогично к соотношению (1.1) работы [5] можно показать, что ряд Фурье функции

$$f_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \widehat{\varphi}(t) dt$$

имеет вид

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \delta^{\frac{r}{2}-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\delta}\right) \widehat{\varphi}(t) dt = -\frac{1}{\delta^{1-\frac{r}{2}}} f''(x). \quad (76)$$

Как показано в [3] имеет место равенство

$$f(x) - W_\delta(f, x) = \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x)\right) \widehat{\tau}(t) dt.$$

Отсюда, учитывая данное равенство и то, что $f(x) \in W_\beta^r H^\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} E(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x)\right) \widehat{\tau}(t) dt \right\|_C = \\ &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x)\right) (\widehat{\varphi}(t) + \widehat{\mu}(t)) dt \right\|_C \leq \\ &\leq \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \delta^{-\frac{r}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) - f_\beta^r(x)\right) \widehat{\varphi}(t) dt \right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}} A(\alpha, \mu)\right). \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя (75), (76) в (77) получим равенство (36). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич, Ю.И. Наближення (ψ, β) -диференційовних функцій інтегралами Вейерштрасса / Ю.И. Харкевич, І.В. Кальчук // Укр. мат. журн. – 2007. – Т.59, №7. – С.953–978.
2. Степанец, А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – Киев : Наук. Думка, 1987. – 268 с.
3. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II / Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – Т. 46, № 3. – С.15–31.
4. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – Т. 55, № 6. – С.5–17.
5. Новикова, А.К. О приближении функций в пространствах C и L / А.К. Новикова // Вопросы суммирования рядов Фурье. – Киев, 1985. – С.14–51. – (Препринт /АН УССР Ин-т математики ; 85.61).

I.V. Kalchuk, U.Z. Grabova, T.A. Stepanyuk. Approximative Properties of Integrals of Weierstrass on Classes $W_\beta^r H^\alpha$

The article is devoted to the solution of one of the problem of the Approximation's Theory, the problem of researching approximating properties of Weierstrass'es integrals on classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$. The asymptotic equalities are obtained for upper borders of deflection of functions of the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$ from Weierstrass'es integrals.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.09.2010 г.

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Для решения линейных операторных уравнений I рода с положительным ограниченным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается новый неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближённой правой части операторного уравнения, погрешность в счёте. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается новый неявный итерационный метод

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \left(\|x - x_{n,\delta}\| \right) \right) = 0$.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Теорема 1. *Итерационный метод (2) при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Покажем по индукции, что

$$x_n = A^{-1} \left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n} \left(E - \alpha A^k\right)^{2n} \right] y. \quad (4)$$

Из (2) и (4) $x_1 = 2\alpha \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1} A^{k-1}y$, следовательно, при $n = 1$ формула (4) верна. Предположим, что она справедлива при $n = m$, т.е.

$x_m = A^{-1} \left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-m} \left(E - \alpha A^k\right)^{2m} \right] y$ и докажем, что (4) верна при $n = m + 1$:

$$x_{m+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1} \left\{ \left(E - \alpha A^k\right)^2 A^{-1} \left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-m} \left(E - \alpha A^k\right)^{2m} \right] y + 2\alpha A^{k-1}y \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} \left(E - \alpha A^k \right)^2 y - A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-(m+1)} \left(E - \alpha A^k \right)^{2(m+1)} y + \\
&\quad + \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} 2\alpha A^{k-1} y = A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} - 2\alpha A^k \right) y - \\
&\quad - A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-(m+1)} \left(E - \alpha A^k \right)^{2(m+1)} y + 2\alpha A^{k-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} y = \\
&= A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right) y - 2\alpha A^{k-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} y - \\
&\quad - A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-(m+1)} \left(E - \alpha A^k \right)^{2(m+1)} y + 2\alpha A^{k-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-1} y = \\
&\quad = A^{-1} \left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-(m+1)} \left(E - \alpha A^k \right)^{2(m+1)} \right] y.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливость формулы (4) доказана.

Используя интегральное представление самосопряжённого оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$,

($M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$\begin{aligned}
x - x_n &= A^{-1} y - A^{-1} \left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-n} \left(E - \alpha A^k \right)^{2n} \right] y = A^{-1} \left(E + \alpha^2 A^{2k} \right)^{-n} \left(E - \alpha A^k \right)^{2n} y = \\
&= \int_0^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось

$$\alpha > 0. \quad (5)$$

Тогда $\frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \leq q < 1$ и, следовательно,

$$\left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| = q^n \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| = \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| \leq \|E_\varepsilon x\| \rightarrow 0, \quad \text{так как при } \varepsilon \rightarrow 0$$

E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, т.е. метод (2) при условии (5) сходится. Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y = \int_0^M \lambda^s \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda z.$$

Для оценки $\|x - x_n\|$ оценим подынтегральную функцию $f(\lambda) = \lambda^s \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n} \geq 0$.

Поскольку $f(\lambda) = \lambda^s \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n} \leq \lambda^s (1 - \alpha\lambda^k)^{2n} = \bar{f}(\lambda)$, то достаточно найти максимум

функции $\bar{f}(\lambda)$. Приравняв к нулю производную от $\bar{f}(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $\bar{f}(\lambda)$:

$$\lambda^{s-1} (1 - \alpha\lambda^k)^{2n-1} [s - (2kn + s)\alpha\lambda^k] = 0.$$

Отсюда видно, что производная обращается в нуль при равенстве нулю любого из трёх множителей. Но при обращении в нуль первых двух функция $\bar{f}(\lambda)$ тоже обращается в нуль. Поэтому остаётся рассмотреть равенство: $s - (2kn + s)\alpha\lambda^k = 0$, откуда

$\lambda^* = \left[\frac{s}{(2kn + s)\alpha} \right]^{1/k}$ – стационарная точка. Она является точкой локального максимума, так как

$$\bar{f}'(\lambda^*) = - \left[\frac{s}{(2kn + s)\alpha} \right]^{(k+s-2)/k} \left(\frac{2kn}{2kn + s} \right)^{2n-1} k(2kn + s)\alpha < 0.$$

Найдём его:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda^*) &= \lambda^s (1 - \alpha\lambda^k)^{2n} \Big|_{\lambda=\lambda^*} = s^{s/k} \alpha^{-s/k} (2kn + s)^{-s/k} \left(\frac{2kn}{2kn + s} \right)^{2n} = \\ &= s^{s/k} \alpha^{-s/k} (2kn)^{-s/k} \left(\frac{2kn + s}{2kn} \right)^{-2n - s/k} = \\ &= s^{s/k} \alpha^{-s/k} (2kn)^{-s/k} \left[\left(1 + \frac{s}{2kn} \right)^{2kn/s} \right]^{(s/2kn)(-2n - s/k)} < s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}. \end{aligned}$$

Отсюда $\|x - x_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$.

Но может оказаться, что локальный максимум внутри $[0, M]$ не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т.е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце отрезка $f(0) = 0$). Тогда

$$\max_{[0, M]} f(\lambda) \leq \max \left\{ s^s (2kn\alpha e)^{-s/k}, M^s \frac{(1 - \alpha M^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 M^{2k})^n} \right\}$$

и справедливо записать, что

$$\|x - x_n\| \leq \max \left\{ s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}, M^s \frac{(1 - \alpha M^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 M^{2k})^n} \right\} \|z\|.$$

4. Сходимость метода при приближённой правой части уравнения

Покажем, что при условии (5) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ

приближённой правой части операторного уравнения (1). Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в разделе 2 $x - x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора, получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} \right] (y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right]$ при условии (5).

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1 + \alpha^2\lambda^{2k}}$. Её производная равна $g_1'(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-1} \left[(k-1)(1 + \alpha^2\lambda^{2k}) - 2k\alpha^2\lambda^{2k} \right]}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^2}$, следовательно $\lambda^* = \left[\frac{k-1}{(k+1)\alpha^2} \right]^{1/2k}$ —

стационарная точка для функции $g_1(x)$.

Поскольку $g_1''(\lambda^*) < 0$, то λ^* — точка максимума для функции $g_1(\lambda)$ и $\max_{[0, M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \leq 2\alpha^{1/k}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \leq 2k(n\alpha)^{1/k}. \quad (6)$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \geq 2$. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \leq 2k(m\alpha)^{1/k}$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} g_{m+1}(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2(m+1)}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{m+1}} \right] = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2m}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^m} \right] + \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2(m+1)}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{m+1}} \right] - \\ &\quad - \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2m}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^m} \right] \leq 2k(m\alpha)^{1/k} + \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2m}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^m} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \right] = \\ &= 2k(m\alpha)^{1/k} + \frac{2\alpha\lambda^{k-1}(1 - \alpha \lambda^k)^{2m}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{m+1}}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$k(m\alpha)^{1/k} + \frac{\alpha\lambda^{k-1}(1 - \alpha \lambda^k)^{2m}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{m+1}} \leq k((m+1)\alpha)^{1/k}, \quad (7)$$

равносильно неравенству $\frac{\alpha\lambda^{k-1}(1-\alpha\lambda^k)^{2m}}{(1+\alpha^2\lambda^{2k})^{m+1}} \leq (\sqrt[k]{m+1} - \sqrt[k]{m})k\alpha^{1/k}$. Последнее неравенство

заменяем на более сильное неравенство $\alpha\lambda^{k-1}(1-\alpha\lambda^k)^{2m} \leq (\sqrt[k]{m+1} - \sqrt[k]{m})k\alpha^{1/k}$. Отсюда
 $\alpha^{(k-1)/k}\lambda^{k-1}(1-\alpha\lambda^k)^{2m} \leq (\sqrt[k]{m+1} - \sqrt[k]{m})k$. Имеем

$$\sqrt[k]{m+1} = \sqrt[k]{m\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \sqrt[k]{m} \left\{ 1 + \frac{1}{km} + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!m^2} + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!m^3} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!m^4} + \dots + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\dots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1)m^{2p-1}} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\dots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot 2p \cdot m^{2p}} + \dots \right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т. е.

$$\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\dots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1)m^{2p-1}} > \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\dots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot 2p \cdot m^{2p}}, \quad \text{что равносильно}$$

$$1 > \frac{\left|\frac{1}{k}-(2p-1)\right|}{2pm} \quad \text{или} \quad \frac{2p-1-\frac{1}{k}}{2pm} < 1, \quad \text{а это уже очевидно при } m \geq 1. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\sqrt[k]{m+1} > \sqrt[k]{m} \left(1 + \frac{1}{km} - \frac{k-1}{2k^2m^2} \right).$$

Вернёмся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. раздел 3) $\lambda^{k-1}(1-\alpha\lambda^k)^{2m} \leq (k-1)^{(k-1)/k} (2km\alpha e)^{-(k-1)/k}$, то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$(k-1)^{(k-1)/k} (2km\alpha e)^{-(k-1)/k} \alpha^{(k-1)/k} \leq km^{1/k} \left(\frac{1}{km} - \frac{k-1}{2k^2m^2} \right). \quad (8)$$

$$\text{Преобразуем его: } \left(\frac{k-1}{k} \right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} 2^{-(k-1)/k} \leq km^{1/k} \frac{1}{km} \left(1 - \frac{k-1}{2km} \right).$$

Поскольку $\left(\frac{k-1}{k} \right)^{(k-1)/k} < 1$, то докажем более сильное неравенство $m^{-(k-1)/k} 2^{-(k-1)/k} \leq m^{-(k-1)/k} \left(1 - \frac{k-1}{2km} \right)$, что тоже самое $1 \leq 2^{(k-1)/k} \left(1 - \frac{k-1}{2km} \right)$, $m \geq 2$.

При $k=1$ имеем $1 \leq 1$, следовательно, последнее неравенство справедливо при $k=1$.

При $k \geq 2$, $m \geq 2$ $2^{(k-1)/k} \left(1 - \frac{k-1}{2km} \right) \geq \frac{3}{4} \cdot 2^{1/2} > 1$. Значит, неравенство (8) выполняется

и, тем более, справедливо неравенство (7). Таким образом, для $n \geq 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda) \leq 2k(n\alpha)^{1/k}$, $n \geq 1$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2k(n\alpha)^{1/k} \delta$, $n \geq 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/k} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Итак, доказана

Теорема 2. При условии (5) метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/k} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

5. Оценка погрешности метода и её оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \max \left\{ s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}, M^s \frac{(1 - \alpha M^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 M^{2k})^n} \right\} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad n \geq 1.$$

Так как для достаточно больших n $M^s \frac{(1 - \alpha M^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 M^{2k})^n} \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}$, то для этих n справедлива оценка

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Если решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии (5) для метода (3) справедлива оценка погрешности (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = s \frac{s+k}{s+1} (2k)^{\frac{s+k}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}. \quad (10)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \left(\frac{s}{k} \right)^{k(s+1)} e^{-\frac{s}{k(s+1)}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \quad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 4. Оптимальная оценка погрешности имеет вид (11) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (10).

Замечание 1. Оценка погрешности (11) имеет порядок $O(\delta^{s/(s+1)})$ и, как следует из [1], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Оптимальная оценка (11) не зависит от α , но от параметра α зависит $n_{\text{опт}}$, поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать α , удовлетворяющим условию (5) и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно

$$\text{выбрать } \alpha_{\text{опт}} = s \frac{s+k}{s+1} (2k)^{\frac{s+k}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}.$$

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций [1, 3–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (12)$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

6. Погрешность в счёте

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), а z_n – значение с учётом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} \left[(E - \alpha A^k)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y \right] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (13)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (E - \alpha A^k)^2 \varepsilon_n + \alpha \gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha^2 A^{2k})^{-(n-1-i)} (E - \alpha A^k)^{2(n-1-i)} \alpha \gamma_i.$$

В силу (5) и тому, что $0 \in SpA$ справедливо $\left\| (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (E - \alpha A^k)^2 \right\| \leq 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma$, $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha\varepsilon)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1.$$

Замечание 3. Для решения операторного уравнения (1) с несамосопряжённым или неположительным, но ограниченным оператором A можно перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближённом элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left(E + \alpha^2 (A^*A)^{2k} \right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha (A^*A)^k \right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha (A^*A)^{k-1} A^* y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N.$$

Предложенный метод может быть применён для решения задач спектроскопии, гравиметрии, обратных задач теории потенциала, уравнений Фредгольма I рода.

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука. – 1986. – 178 с.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49. – № 3. – С. 38–43.
3. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я.В. Константинова, С.А. Лисковец // Вестник Белорус. ун-та. Серия 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. About Approximamative Decision of the First-Kind Operator Equations

In the Hilbert space to solve the linear equations of type I with limited affirmed self-adjoned operator we investigate the application of the new non-evident iterative method. The convergence of the method in its initial norm of Hilbert space is proved. The apriori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.01.2011 г.

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ТИПА КАНТОРОВИЧА–КРАСНОСЕЛЬСКОГО

В статье рассматриваются одношаговые и многошаговые нелокальные итерационные процессы для решения нелинейных уравнений. За счёт регуляризации процессы «работают» с «плохим» начальным приближением. Скорость сходимости рассмотренных нелокальных вариантов процессов типа Канторовича–Красносельского оказывается сверхлинейной.

Для решения нелинейного уравнения $f(x) + g(x) = 0$ (1)

где f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D пространства R^n в R^n , $f \in C_D^{(1)}$, $g \in C_D$ в монографии [1] предложены нерегуляризованные нелокальные итерационные процессы для решения уравнения (1).

В настоящей работе для решения уравнения (1) предлагается семейство итерационных процессов:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n :

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E + \overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E) \times \\ & (f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E)\Delta x_n = \\ & = -(\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E)(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\overline{f'(x_n)}$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$, $\alpha \ll 1$.

Шаг 2. Находится очередное приближение $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n. \quad (3)$$

Шаг 3. Проверяется условие окончания вычислительного процесса: если $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (ε – параметр останова), то конец просчетов иначе,

Шаг 4. Производится пересчёт шаговой длины β_{n+1} по одной из формул, которые будут приведены ниже, таким образом, что выполняется соотношение

$$\sqrt{\beta_0}\|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\| = \dots = \sqrt{\beta_n}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|, \beta_{n-1} = \beta_0 \quad (4)$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Далее полагаем, что имеют место оценки:

$$\begin{aligned} & \left\| (\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E + \overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E) \times \right. \\ & \left. \times (f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E)^{-1} \right\| \leq B \\ & \left\| \overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E \right\|^{-1} \leq A, \\ & \left\| f'(x_n) + \alpha\beta_{n-1}\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|E \right\| \leq C. \end{aligned} \quad (5)$$

Относительно оператора g полагаем, что $\forall x \in D$ имеет место соотношение:

$$\|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \leq K\alpha, \quad (6)$$

а производная Фреше оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L .

Теорема 1. Пусть в интересующей нас области D существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное

приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_1 таковы, что $\varepsilon_0 < 1$. Тогда перечисленные ниже алгоритмы со сверхлинейной скоростью сходятся к x^* .

Доказательство. Из условий теоремы имеем

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq L\|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (7)$$

Далее, используя (2), находим $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$.

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\alpha \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| E)^{-1} \times \\ \times \Delta x_n - (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)) - \alpha \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\| \Delta x_n. \quad (8)$$

Простые преобразования позволяют получить оценку, используя (5–8)

$$\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \leq \beta_n L B^2 \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \\ + \alpha \beta_n A C \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \alpha \beta_n A \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \\ + (1 - \sqrt{\beta_n}) \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\| + \alpha K_1 \beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 = \\ = (1 - \sqrt{\beta_n}) \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\| + \beta_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 (L B^2 + \\ + \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) = (1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\| = \\ = q_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|, \varepsilon_n = (L B^2 + \\ + \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) \sqrt{\beta_n} \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|, \\ K_1 = K / \beta_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|^2, q_n = 1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n). \quad (9)$$

Соотношение (9) является базовым при доказательстве сходимости процессов (2–4) при различных способах задания шаговых длин β_{n+1} .

При $n = 0$ из (9) и условий теоремы имеем

$$\|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| \leq (1 - \sqrt{\beta_0} (1 - \varepsilon_0)) \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\| = q_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|.$$

Так как $q_0 < 1$, тогда

$$\|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| < \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|. \quad (10)$$

Из (4) и (10) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (4), (10) и условий теоремы имеем оценку

$$\|f(x_2) + \beta_1 g(x_2)\| \leq (1 - \sqrt{\beta_1} (1 - \varepsilon_1)) \|f(x_1) + \beta_0 g(x_0)\| = \\ = q_1 \|f(x_1) + \beta_0 g(x_0)\| \leq q_1 q_0 \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|. \quad (11)$$

И так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0 < 1$. Из (9) и (11) при $n = 1$ имеем, что $\|f(x_2) + \beta_1 g(x_2)\| < \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\|$, откуда в силу (4) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (9) справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\| < q_0^{n+1} \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|, \quad (12)$$

из которой следует сходимость последовательности элементов $\{f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\}$ к элементу $(f(x^*) + \beta^*g(x^*))$. При этом так как $\beta_n \nearrow 1$, то есть последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей, то существует предельный элемент β^* . Предлагаемые ниже алгоритмы пересчёта шаговой длины таковы, что $\lim \beta_n = 1$ при $n \rightarrow \infty$.

В связи со сказанным выше и из (12) имеем, что

$$\lim \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_n)\| = \|f(x^*) + g(x^*)\| = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что последовательность элементов, генерируемая процессом (2–4), сходится к x^* решению уравнения (1).

Из (2) и условий теоремы имеем оценку

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \frac{BCq_0^n \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|}{1 - q_0}, \quad (13)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

При $n=0$ из (13) находим величину радиуса сферы $D = \bar{S}(x_0, r)$, $r = \frac{BC \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|}{1 - q_0}$.

Как следует из (12), существует такой номер n_0 , что для всех $k > n_0$, итерация (2–4) попадает в область притяжения метода Канторовича-Красносельского с $\beta_k = 1$, рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n > n_0$, метод (2–4) имеет квадратичную скорость сходимости. При $\beta_k = 1$ из (9) имеем

$\|f(x_{k+1}) + g(x_{k+1})\| \leq (LB^2 + \alpha A + \alpha AC + \alpha K_1) \|f(x_k) + g(x_k)\|^2$, или $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k^2$, из которой следует локальная квадратичная скорость сходимости процесса (2–4) к x^* . Теорема доказана.

Замечание 1. Константы, фигурирующие в формулировке теоремы, фактически нигде не вычисляются. Важен лишь факт их существования.

Замечание 2. Из соотношения (13) следует, что рассмотренные выше алгоритмы легко можно рассматривать в банаховых пространствах.

Замечание 3. Конкретные виды алгоритмов, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, имеют вид:

алгоритм 1 пересчёта шаговой длины:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min\left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^4 \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2) \beta_n}\right) \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^4 (\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g(x_{n+2})\|^2) \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^4 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2) \beta_n} \\ \gamma_0 &= \frac{\beta_0^2 (\|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|^2 + \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\|^2)}{\|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритм 2 пересчёта шаговой длины:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2}{(\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2) \beta_n}\right), \quad (15) \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2 (\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g(x_{n+2})\|^2) \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+2}) + \beta_{n-1} g(x_{n+2})\|^2 (\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|^2) \beta_n} \\ \gamma_0 &= \frac{\beta_0 (\|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|^2 + \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\|^2)}{\|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\|^2}. \end{aligned}$$

Алгоритм 3 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_0^2 \|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\|^2 \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 \beta_n}\right), \quad (16)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}; \quad \gamma_0 = 1.$$

Алгоритм 4 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|^2 \beta_n}\right), \quad (17)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g_t(x_{n+2})\|}; \quad \gamma_0 = \beta_0^2.$$

Перечисленные выше четыре алгоритма удовлетворяют условию (4), в чём нетрудно убедиться, взяв отношение $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ в выражениях для β_{n+1} во всех четырёх алгоритмах позволяет утверждать, что начиная с некоторого номера итерации k_0 , все $\beta_i \equiv 1$ для $i > k_0$.

В качестве одного из вариантов регуляризованного итерационного процесса рассмотрим следующий алгоритм.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_k :

$$f'(x_k) \Delta x_k = -\beta_k (f(x_k) + \beta_{k-1} g_t(x_k)), \quad g_t(x) = g(x) - f(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Шаг 2. Вносится поправка Δx_k в вектор x_k

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\|g(x_k)\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (ε – параметр пространства I , то конец расчётов, иначе

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина β_{k+1} , $\beta_{k+1} \in (0, 1]$ одним из приведённых способов и осуществляется переход на шаг 1.

Здесь в развитии рассмотренных выше подходов к решению нелинейных уравнений в качестве вектора $f(x)$ целесообразно брать гладкую аппроксимацию функции $g(x)$, которую назовём $f_1(x)$ и решаем уравнение

$$f_1(x) + (f(x) + g(x) - f_1(x)) = f_1(x) + g_1(x) = 0.$$

Процесс шаг 1 – шаг 4 осуществляется нужное число раз.

Относительно оператора f_1 полагаем, что имеет место оценка $\|[f_1'(x)]^{-1}\| \leq B \quad \forall x \in D$, а оператор $g_1(x)$ удовлетворяет условию (6).

L – константа Липшица оператора $f_1'(x)$ в области D .

Теорема 2. Пусть в области $D = \frac{B \|f_1(x_0) + \beta_0 g_1(x_0)\|}{1 - q_0}$ существует x^* – решение

уравнения (1), операторы $f_1(x)$ и $g_1(x)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (K\alpha B + LB^2) \|f_1(x_0) + \beta_{-1} g_1(x_0)\| < 1$$

Тогда алгоритм шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1} , определяемыми по формулам (14–17) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.46 монографии [1], при этом β_{n+1} выбирается предложенным там способом.

В результате мы имеем, что

$$\lim \|f(x_k) + \beta_{k-1} g_I(x_k)\| = \|f(x^*) + g_1(x^*)\| = \|g(x^*)\| = 0, k \rightarrow \infty,$$

откуда и следует, что предельный элемент последовательности, генерируемой алгоритмом шаг 1 – шаг 4, является решением уравнения $g(x) = 0$.

Рассмотренные выше итерационные процессы являются многошаговыми. Предлагаемые ниже одношаговые процессы являются весьма эффективными для решения нелинейного уравнения (1):

Шаг 1. Решается нелинейная система относительно поправки x_n :

$$(\alpha \|f(x_n) + g(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)) \Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} (f(x_n) + g(x_n)).$$

Шаг 2. Вносится поправка для получения очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n.$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\|f(x_n) + g(x_n)\| < \varepsilon, \varepsilon \ll 1$ (ε – параметр останова), то конец расчётов, иначе пересчёт β_{n+1} по одной из следующих формул:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (18)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (19)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n (\|f(x_n) + f(x_{n+1})\| \|f(x_n)\|)}{2 \|f(x_{n+1})\|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (20)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \beta_n \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_n}{\beta_{n+1}}, \gamma_0 = 1 \quad (21)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_0)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (22)$$

и переход на шаг 1.

Вполне аналогично тому, как это было сделано выше, могут быть сформулированы и доказаны теоремы о сходимости процессов шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1} , определяемых по одной из формул (18–21) или (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.
2. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.] – М : Наука, 1969. – 455 с.

V.M. Madorski. On Regularized Nonlocal Iterative Processes of Kantorovich-Krasnoselski Type

The paper is concerned with the one and many-step iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the space of R^n . The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation. The local speed of convergence of the processes is shown.

Рукапіс паступиў у рэдкалегію 23.12.2010 г.

Е.М. Радыно, А.Г. Сидорик

ХАРАКТЕРИСТИКА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Мы рассматриваем преобразование Фурье векторнозначных функций на локально компактной абелевой группе G , принимающих значения в банаховом пространстве X , квадратично интегрируемых по Бохнеру. Если G конечная группа, то преобразование Фурье является ограниченным оператором. Если G бесконечна, то преобразование Фурье $F: L_2(G, X) \rightarrow L_2(\hat{G}, X)$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству.

В работе Ж. Петре [1] исследовалось обобщение теоремы Хаусдорфа-Юнга об образе пространства X под действием преобразования Фурье. Автор рассматривал векторнозначные функции $x \in L_p(\mathbb{R}, X)$ $x \in L_p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p \leq 2$, на действительной оси, принимающие значения в банаховом пространстве X и интегрируемые в смысле Бохнера [2], т.е. слабо измеримые с конечной нормой

$$\|x\|_{L_p(\mathbb{R}, X)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Ж. Петре было отмечено, что при $p = 2$ во всех известных ему случаях преобразование Фурье

$$F: L_2(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, X), \quad F(x)(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i s t} dt$$

оказывалось ограниченным, только если X изоморфно гильбертовому пространству. В работе [3] польский математик С. Квапень подтвердил наблюдение Ж. Петре. Фактически, он доказал следующую теорему.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.
- 2) Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n} \in X$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k t} \cdot x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2.$$

- 3) Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n} \in X$

$$C^{-1} \sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2 \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k t} \cdot x_k \right\|^2 dt.$$

- 4) Преобразование Фурье F , заданное на плотном в $L_2(\mathbb{R}, X)$ подпространстве

$$D_F = \left\{ x(t) = \sum_{k=1}^n I_{A_k}(t) \cdot x_k \right\},$$

где A_k – измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в \mathbb{R} , I_{A_k} – функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$, является ограниченным оператором со значениями в $L_2(\mathbb{R}, X)$.

Определим оператор Фурье на векторных функциях целочисленного аргумента формулой

$$F_Z: L_2(\mathbb{Z}, X) \rightarrow L_2(\mathbb{T}, X): (x_k) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k t} \cdot x_k.$$

Здесь T означает одномерный тор $T = R/Z$, который как пространство с мерой изоморфен единичному отрезку прямой.

Неравенство в пункте 2 теоремы 1 превращается в утверждении об ограниченности композиции $F_Z I_Z$ (здесь I_Z – изометрический оператор замены переменной $I_Z : (x_k) \mapsto (x_{-k})$). Отсюда следует ограниченность самого оператора F_Z на плотном в $L_2(Z, X)$ подпространстве функций с конечным носителем. Последнее означает, что F_Z непрерывно продолжается на все $L_2(Z, X)$.

Аналогично, пункт 3 в теореме 1 эквивалентен ограниченности обратного преобразования Фурье

$$F_Z^{-1} : L_2(T, X) \rightarrow L_2(Z, X).$$

Естественной проблемой в данном направлении является исследование преобразования Фурье в пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру векторзначных функций на локально компактной абелевой группе G :

$$F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X), \quad F(x)(\xi) = \int_G \langle \xi, t \rangle_G x(t) d\mu_G(t),$$

где X – банахово пространство, \mathfrak{G} – группа двойственная к G по Понтрягину (группа характеров), $\langle \xi, t \rangle_G$ – каноническое спаривание \mathfrak{G} и G , μ_G – мера Хаара.

Прежде чем приступить к разбору общей задачи приведем необходимые сведения. За доказательствами результатов из области гармонического анализа мы отсылаем к [5], из области структурной теории локально компактных групп – к [6], теория пространств Брюа-Шварца изложена в [7].

Будем считать далее, что на \mathfrak{G} задана двойственная мера Хаара $\mu_{\mathfrak{G}}$ такая, что выполняется скалярное равенство Стеклова-Парсевала

$$\|\varphi\|_{L_2(G)}^2 = \int_G |\varphi|^2 d\mu_G = \int_{\mathfrak{G}} |F\varphi|^2 d\mu_{\mathfrak{G}} = \|F\varphi\|_{L_2(\mathfrak{G})}^2.$$

В качестве начальной области задания для преобразования Фурье удобно рассматривать всюду плотное подпространство $D_F = L_2(G) \otimes X \subset L_2(G, X)$, где преобразование Фурье действует по формуле

$$F\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot x_k\right) = \sum_{k=1}^n ((F\varphi_k)(\xi) \cdot x_k).$$

Плотность D_F вытекает из того, что в пространстве $L_2(G, X)$ плотны конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^n I_{A_k}(t) \cdot x_k \in L_2(G) \otimes X = D_F,$$

где A_k – измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в G , I_{A_k} – функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$.

Другим полезным подпространством в $L_2(G, X)$ является $S(G) \otimes X$, где $S(G)$ пространство Брюа-Шварца «гладких, быстро убывающих» функций на группе G . Оно также плотно в $L_2(G, X)$, поскольку $S(G) \subset L_2(G)$ и плотно в нем.

В силу того, что скалярное преобразование Фурье является биекцией $L_2(G)$ в $L_2(\mathfrak{G})$ и с $S(G)$ в $S(\mathfrak{G})$ сужение векторзначного преобразования на $L_2(\mathfrak{G}) \otimes X$ является биекцией в $L_2(\mathfrak{G}) \otimes X$, а сужение на $S(G) \otimes X$ – в $S(\mathfrak{G}) \otimes X$.

Для того, чтобы рассмотреть случай бесконечной группы нам понадобится теорема о строении локально компактных групп [6].

Теорема 2. Пусть G – локально компактная абелева группа. Тогда G представима в виде объединения открытых компактно-порожденных подгрупп H с топологией

индуктивного предела. В свою очередь каждая компактно-порожденная группа H представима в виде проективного предела факторгрупп H/K , где $K \subset H$ – компактная подгруппа, а фактор-группа H/K элементарна, т.е. изоморфна произведению

$$H/K \cong R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K},$$

где $F_{H,K}$ – конечная группа.

Определение 1. Будем говорить, что группа G содержит R -составляющую, если при некоторых H, K из теоремы 2 в элементарной фактор-группе $R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K}$ показатель $a_{H,K} > 0$.

Аналогичным образом определяется смысл выражений «группа G содержит Z -составляющую», « G содержит T -составляющую».

Перед формулировкой общей теоремы докажем ряд необходимых лемм.

Лемма 1. Допустим банахово пространство X изоморфно гильбертовому, т.е. существует скалярное произведение (\cdot, \cdot) на X такое, что для некоторого $C > 0$ выполняется неравенство

$$C^{-1}(x, x)_X^{1/2} \leq \|x\|_X \leq C(x, x)_X^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$ ограничено.

Доказательство. Рассмотрим векторнозначное равенство Стеклова–Парсеваля

$$(F\varphi, F\varphi)_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = \int_{\mathfrak{G}} (F\varphi(\xi), F\varphi(\xi)) d\mu_{\mathfrak{G}}(\xi) = \int_G (\varphi(t), \varphi(t)) d\mu_G(t) = (\varphi, \varphi)_{L_2(G, X)},$$

которое легко проверяется для функций $\varphi \in L_2(G) \otimes X$ с помощью аксиом скалярного произведения, скалярного равенства Стеклова–Парсеваля и равенства кросс-нормы

$$(\varphi_1 \otimes x_1, \varphi_2 \otimes x_2)_{L_2(G, X)} = (\varphi_1, \varphi_2)_{L_2(G)} \otimes (x_1, x_2)_X.$$

Тогда на плотном подпространстве верно неравенство

$$\|F\varphi\|_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = C(F\varphi, F\varphi)_{L_2(\mathfrak{G}, X)} = C(\varphi, \varphi)_{L_2(G, X)} \leq C^2 \|\varphi\|_{L_2(G, X)},$$

что позволяет распространить F по непрерывности на все $L_2(G, X)$. Лемма доказана.

В случае конечной группы G пространство $L_2(G, X)$ изоморфно конечному декартовому произведению X^G . Группа \mathfrak{G} , двойственная по Понтрягину к G , изоморфна самой G . Самодвойственная мера Хаара обладает свойством $\mu_G(G) = \sqrt{|G|}$. Преобразование Фурье, известное также как дискретное преобразование Фурье, принимает вид

$$(F\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t)$$

Теорема 3. Если G – конечная группа, то преобразование Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$ ограничено для любого банахова пространства X .

Доказательство. Следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|F\varphi\|_{L_2(\mathfrak{G}, X)} &= \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left\| \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t) \right\|_X^2 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left(\sum_{t \in G} |\langle \xi, t \rangle| \|\varphi(t)\|_X \right)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \left(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X \right)^2 \leq |G| \sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X^2 = |G| \|\varphi\|_{L_2(G, X)}^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению бесконечных групп.

Лемма 2. Допустим группа G содержит R -составляющую, T -составляющую или Z -составляющую. Тогда ограниченность преобразования Фурье

$$F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X)$$

влечет изоморфность банахова пространства X гильбертову.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда группа G содержит R -составляющую. Тогда в G имеются открытая компактно-порожденная подгруппа H и компактная подгруппа $K \subset H$ такие, что $H/K \cong R^a \times T^b \times Z^c \times F$, где $a \geq 1$.

Пусть $\tau_1: H \rightarrow H/K$ – каноническая проекция, $\tau_2: H/K \rightarrow R$ проекция на первую координату R^a , $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$.

Рассмотрим вспомогательные функции $\psi_{R,i} \in L_2(R)$, $2 \leq i \leq a$, $\psi_{T,j} \in L_2(T)$, $1 \leq j \leq b$, $\psi_{Z,k} \in L_2(Z)$, $1 \leq k \leq c$, $\psi_F \in L_2(F)$, каждая из которых имеет в соответствующем пространстве норму равную 1. Рассмотрим вложение

$$J: \varphi \rightarrow ((\varphi \circ \tau) \otimes (\bigotimes_{i=2}^a \psi_{R,i}) \otimes (\bigotimes_{j=1}^b \psi_{T,j}) \otimes (\bigotimes_{k=1}^c \psi_{Z,k}) \otimes \psi_F).$$

Вложение J , как легко видеть, является изометрическим. Существует единственное вложение $\mathfrak{J}: L_2(R, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{H}, X)$, которое также является изометрическим, и для которого будет коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(R, X) & \xrightarrow{F_R} & L_2(R, X) \\ \downarrow J & & \downarrow \mathfrak{J} \\ L_2(H, X) & \xrightarrow{F_H} & L_2(\mathfrak{H}, X) \end{array}$$

Пространство $L_2(H, X)$ можно отождествить в силу открытости подгруппы H с замкнутым подпространством $L_2(G, X)$, продолжив функции с H на G нулем. Пространство $L_2(\mathfrak{H}, X)$ можно отождествить с замкнутым подпространством $L_2(\mathfrak{G}, X)$, состоящим из функций постоянных на классах смежности по H^\perp .

Преобразование Фурье F_H является сужением F_G и, таким образом, ограничено. Преобразование Фурье $F_R = (\mathfrak{J})^{-1} F_H J$ будет непрерывно как композиция непрерывных. По теореме 1 пункт 4 пространство X изоморфно гильбертову.

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда группа G содержит T -составляющую или Z -составляющую. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению случая, когда группа G не содержит R -, Z - или T -составляющих. В этом случае все компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются проективными пределами конечных подгрупп с дискретной топологией, т.е. являются *профинитными* группами. Профинитные группы характеризуются в следующей лемме [9].

Лемма 3. Топологическая группа H является профинитной тогда и только тогда, когда она:

- a) хаусдорфова;
- b) компактна;

c) вполне несвязна, т.е. для всех $x, y \in H$ существует открыто-замкнутое подмножество $U \subset H$ такое, что $x \in U$ и $y \notin U$.

Любая профинитная группа H либо дискретна (и тогда конечна в силу компактности), либо недискретна (и тогда бесконечна).

Рассмотрим недискретную профинитную группу H . Меру Хаара на H будем нормировать условием $\mu_H(H) = 1$. Группа H является пространством Лебега, т.е. изоморфно как пространство с мерой интервалу $[0, 1]$ с длиной, см. [5], [8]. Данный факт можно доказать, выбрав последовательность компактных подгрупп $K_n \subset H$ таких, что $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ и мощность фактор-групп $M_n := |H/K_n|$ стремится к $+\infty$. Пронумеровав должным образом классы смежности по K_n , мы сможем отождествить их с точностью до меры 0 с интервалом отрезка с длиной $1/M_n$.

В силу сказанного на группе H можно задать систему функций $(r_i)_{i=1,2,\dots}$, аналогичную системе функций Радемахера на отрезке $[0,1]$. Это ортогональная система

функций, которые принимают значения $\{+1, -1\}$ на подмножествах меры $1/2$. Говоря теоретико-вероятностным языком, функции r_i будут являться реализациями независимых в совокупности случайных величин, принимающих значения $\{+1, -1\}$ с вероятностью $1/2$.

Нам понадобится критерий, доказанный в [3].

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.
- 2) Существует константа $C > 0$ такая, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно двухстороннее неравенство

$$C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq E \left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\|^2 = \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2,$$

где r_i – независимые случайные величины, принимающие значения $\{+1, -1\}$ с вероятностью $1/2$, символ E означает математическое ожидание.

Следуя [3], мы сформулируем лемму, которая демонстрирует важность системы (r_i) на H и позволит перейти к рассмотрению базисов в $L_2(H)$. Мету Хаара на H будем также обозначать символом dt .

Лемма 4. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Если для некоторого $C > 0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв., } C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i \right\|^2 dt \right).$$

Тогда для той же константы $C > 0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ также имеем

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв., } C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right).$$

Доказательство. В силу ортонормальности системы Радемахера (r_i) и полноты (f_k) мы для заданного $\varepsilon > 0$ можем найти возрастающую последовательность индексов (k_j) , (m_j) и ортонормированную последовательность (h_j) такую, что

$$h_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k) \cdot f_k, \quad \int_H |h_j(t) - r_{m_j}(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Для фиксированного n и для фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ имеем

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt = \int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_{m_j}(t) \cdot x_i \right\|^2 dt.$$

По неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n r_{m_j}(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n (r_{m_j}(t) - h_j(t)) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Поскольку $1 = h_j^2 = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k)^2$, получаем

$$\int_H \left\| \sum_{j=1}^n h_j(t) \cdot x_j \right\|^2 dt = \int_H \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k) \cdot f_k \right) x_j \right\|^2 dt \leq C \sum_{j=1}^n \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} |(h_j, f_k)|^2 \|x_j\|^2 = C \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Таким образом,

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt \leq (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{C})^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Неравенство в обратную сторону доказывается независимо и аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Тогда X изоморфно гильбертову пространству если и только если существует такая константа $C > 0$, что для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$C^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) \cdot x_i \right\|^2 dt \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

В следствии 1 изоморфность X гильбертову пространству вытекает из *двойного* неравенства. Структурные особенности профинитных групп позволяют нам переходить от оценок снизу к оценкам сверху и наоборот.

Отметим, что пространство функций Брюа–Шварца на профинитной группе H и на двойственной группе $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}$ состоят из локально постоянных функций с компактными носителями. Пространства $S(H)$ и $S(\mathbf{H}^{\mathbf{A}})$ можно представить в виде индуктивного предела конечномерных пространств. В силу этого они несут сильнейшую локально выпуклую топологию [7].

Теперь мы готовы рассмотреть важный частный случай преобразования Фурье векторнозначных функций на профинитной недискретной группе.

Так как H компактная бесконечная группа, то двойственная $\mathbf{H}^{\mathbf{A}}$ будет дискретной бесконечной группой.

Лемма 5. Пусть X – банахово пространство, H – профинитная недискретная группа. Следующие утверждения эквивалентны:

1) X изоморфно гильбертову пространству.

2) Существует такая константа $C > 0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ и характеров $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{H}^{\mathbf{A}}$ верно неравенство

$$\int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

2)' Преобразование Фурье $F_{\mathbf{H}^{\mathbf{A}}}: L_2(\mathbf{H}^{\mathbf{A}}, X) \rightarrow L_2(H, X)$ и $F_H^{-1} = I_H F_{\mathbf{H}^{\mathbf{A}}}$ ограничены. Здесь I_H – изометричный оператор замены переменной $x(t) \mapsto x(-t)$.

3) Существует такая константа $C > 0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ и характеров $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{H}^{\mathbf{A}}$ верно неравенство

$$C^{-1} \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq \int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt.$$

3)' Обратное преобразование Фурье $F_{\mathbf{H}^{\mathbf{A}}}^{-1}: L_2(H, X) \rightarrow L_2(\mathbf{H}^{\mathbf{A}}, X)$ и $F_H = I_H F_{\mathbf{H}^{\mathbf{A}}}^{-1}$ ограничены.

Доказательство. Лемма 1 дает импликации 1) \Rightarrow 2)', 1) \Rightarrow 3)'.
 Чтобы получить эквивалентности 2)' \Leftrightarrow 2), 3)' \Rightarrow 3) достаточно рассмотреть функции вида

$$h = \sum_{k=1}^n I_{\{\xi_k\}} \cdot x_k \in S(\mathbf{H}^{\mathbf{A}}) \otimes X,$$

где $\xi_k \in \mathbf{H}^{\mathbf{A}}$, $x_k \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Из определения преобразования Фурье $F: L_2(\mathbf{H}^{\mathbf{A}}, X) \rightarrow L_2(H, X)$ и выбора нормировки меры Хаара на H сразу получаем

$$\|h\|_{L_2(\mathfrak{H}, X)}^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2, \|Fh\|_{L_2(H, X)}^2 = \int_H \left\| \sum_{k=1}^n \langle \xi_k, t \rangle x_k \right\|^2 dt.$$

Эквивалентности следуют из плотности $S(\mathfrak{H}) \otimes X$ в $L_2(\mathfrak{H}, X)$, $S(H) \otimes X$ в $L_2(H, X)$ и биективности $F_{\mathfrak{H}}$, F_H на соответствующих подпространствах.

По следствию 1 мы имеем импликацию 2) & 3) \Rightarrow 1).

Допустим, имеет место ограниченность 2)'. Исследуем преобразование Фурье F_H на подпространстве $S(H) \otimes X$. Для этого рассмотрим произвольную компактную подгруппу $K \subset H$, где $|H/K| < +\infty$. Функции постоянные на классах смежности по K мы отождествим с элементами $S(H/K) \otimes X$.

В силу конечности H/K существует изоморфизм $\alpha: H/K \rightarrow H/K$. Он индуцирует сопряженный изоморфизм $\alpha^*: H/K \rightarrow H/K$ по формуле

$$\langle \xi_1, \alpha(\xi_2) \rangle_H = \langle \alpha^*(\xi_1), \xi_2 \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

Определим оператор

$$R_\alpha: S(H/K) \otimes X \rightarrow S(H/K) \otimes X: (R_\alpha \psi)(\xi') = \psi(\alpha(\xi')) \cdot |H/K|^{-\frac{1}{2}}.$$

Он является изометрией в силу равенства

$$\begin{aligned} \|R_\alpha \psi\|^2 &= \sum_{\xi' \in H/K} \|R_\alpha \psi(\xi')\|^2 \mu_{H/K}(\xi') = \sum_{\xi' \in H/K} \|\psi(\alpha(\xi'))\|^2 \cdot |H/K|^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = \\ &= [t := \alpha(\xi')] = \sum_{t \in H/K} \|\psi(t)\|^2 \cdot |H/K|^{-1} = \sum_{t \in H/K} \|\psi(t)\|^2 \mu_{H/K}(t) = \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} (F_{\mathfrak{H}} R_\alpha \psi)(t') &= \sum_{\xi' \in H/K} \langle t', \xi' \rangle_{H/K} (\psi(\alpha(\xi')) |H/K|^{-\frac{1}{2}}), \\ (R_{\alpha^*} F_{\mathfrak{H}} R_\alpha \psi)(\xi) &= \left(\sum_{\xi' \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \xi' \rangle_{H/K} \psi(\alpha(\xi')) |H/K|^{-\frac{1}{2}} \right) |H/K|^{-\frac{1}{2}} = [t := \alpha(\xi')] = \\ &= \left(\sum_{t \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \alpha^{-1}(t) \rangle_{H/K} \psi(t) |H/K|^{-1} \right) = \sum_{t \in H/K} \langle \alpha^*(\xi), \alpha(\alpha^{-1}(t)) \rangle_{H/K} \psi(t) |H/K|^{-1} = \\ &= \sum_{t \in H/K} \langle \xi, t \rangle_{H/K} \psi(t) \mu_{H/K}(t) = (F_H \psi)(\xi) \end{aligned}$$

Таким образом, сужение F_H на $S(H/K) \otimes X$ имеет ту же константу ограниченности, что и $F_{\mathfrak{H}}$. В силу произвольности K это значит, что F_H непрерывен на $L_2(H, X)$, и верна импликация 2) \Rightarrow 3). Импликация 3) \Rightarrow 2) доказывается аналогично.

Доказанных импликаций достаточно, чтобы утверждать эквивалентность пунктов теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда преобразование Фурье действует в пространстве векторнозначных функций на произвольной локально компактной абелевой группе G .

Теорема 5. Пусть X – банахово пространство, G – бесконечная локально компактная абелева группа. Пространство X изоморфно гильбертову тогда и только тогда, когда ограничено преобразование Фурье

$$F: L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathfrak{G}, X).$$

Доказательство. Достаточность условия изоморфности для ограниченности F показана в лемме 1.

Обратно, допустим преобразование Фурье ограничено.

Если группа G содержит R -, T - или Z -составляющую, то изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 2 и доказательство в этом случае закончено.

Будем далее считать, что группа G не содержит R -, T - или Z -составляющих. В

этом случае все открытые компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются профинитными.

Если среди подгрупп H найдется недискретная, то мы рассмотрим пространство $L_2(H, X)$ как замкнутое подпространство $L_2(G, X)$, продолжая функции за пределом H нулем. Пространство $L_2(\mathbb{H}, X)$ отождествим с пространством $L_2(\mathbb{G}, X)$ функций, постоянных на классах смежности по аннулятору $H_G^\perp \subset \mathbb{G}$. Преобразование Фурье на $L_2(H, X)$ является сужением преобразования Фурье с $L_2(G, X)$ и, таким образом, ограничено. Изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 5 (пункт 3)'. Доказательство в этом случае закончено.

Если же все рассматриваемые подгруппы $H \subset G$ являются дискретными (в силу компактности отсюда следует их конечность), то по структурной теореме 2 группа G является индуктивным пределом конечных дискретных подгрупп. В силу свойств двойственности Понтрягина, двойственная группа \mathbb{G} является проективным пределом групп \mathbb{H} . Группы \mathbb{H} двойственны к конечным дискретным группам H , изоморфны им, и сами являются конечными дискретными. Таким образом, группа \mathbb{G} является профинитной. Поскольку G является бесконечной, то \mathbb{G} недискретна.

Утверждение об ограниченности преобразования Фурье $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\mathbb{G}, X)$ эквивалентно ограниченности обратного преобразования $F_{\mathbb{G}}^{-1}$ для профинитной недискретной группы \mathbb{G} . Изоморфность X гильбертову пространству в этом последнем случае следует из леммы 5 пункт 2)'. Конец доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peetre, J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles / J. Peetre // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1969. – Vol. 42. – P.15–26.
2. Mikusinski, J. The Bochner integral // J. Mikusinski. – Acad. Press, 1978.
3. Kwapien, S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients / S. Kwapien // Studia mathematica. – 1972. – Vol. XLIV. – P.583–595.
4. Радыно, Е.М. Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p -адических чисел / Е.М. Радыно, Я.В. Радыно, А.Г. Сидорик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т.48, №5. – С. 17–22.
5. Хьюит, Э. Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюит, К. Росс – Т.1. – М : Наука, 1975.
6. Моррис, С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп / С. Моррис – М : Мир, 1980.
7. Bruchac, F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des representations des groupes p -adiques / F. Bruchac // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – Vol. 89. – P.43–75.
8. Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов – Минск, 2002.
9. Lenstra, H. Profinite groups // Электронный документ: <http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/Lenstra-Profinite.pdf>

Ya.M. Radyna H.G. Sidoryk. The Fourier Transform of Vector-valued Functions on Locally Compact Groups

We consider Fourier transform of vector-valued functions on a locally compact group G taking value in Banach space X , and square-integrable in Bochner sense. If G is a finite group then Fourier

transform is a bounded operator. If G is an infinite group then Fourier transform $F : L_2(G, X) \rightarrow L_2(\hat{G}, X)$ is a bounded operator if and only if Banach space X is isomorphic to a Hilbert one.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.10.2010 г.

Е.А. Натынчик, Т.И. Шило

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В настоящей работе найдены необходимые условия принадлежности специального уравнения второго порядка к классу Р-типа, т.е. найдены необходимые условия отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях данного уравнения. Эта проблема не нова, однако для данного уравнения эта задача ещё не была рассмотрена. Предлагаемый метод решения задачи по выделению уравнений с неподвижными критическими особыми точками несколько отличается от методов, которые применялись ранее для решения такого рода задач. Наряду с методом малого параметра Пенлеве в этой заметке рассмотрен метод, основанный на редукции от нелинейных уравнений второго порядка к системе двух уравнений Брио и Буке. Найденные условия принадлежности уравнения второго порядка к Р-типу выписаны в явном виде, которые легко проверяются на практике.

Еще Пенлеве и его ученики Гарнье, Гамбье и другие выделили 50 канонических уравнений вида

$$w'' = A_0(w, z)w'^2 + A_1(w, z)w' + A_2(w, z)w, \quad (1)$$

где A_0, A_1, A_2 – рациональные дроби по w и голоморфные по z , для которых выполнялись необходимые условия принадлежности к Р-типу.

Русский математик Голубев [1] упростил и существенно дополнил рассуждения Гамбье и Пенлеве. Однако подробное описание выделения уравнений вида (1) с неподвижными критическими особыми точками сделано лишь для случаев, когда коэффициент $A_0(w, z)$ имел одну из восьми форм:

- | | |
|--|--|
| 1. $A_0(w, z) = 0;$ | 5. $A_0(w, z) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right);$ |
| 2. $A_0(w, z) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{w};$ | 6. $A_0(w, z) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right);$ |
| 3. $A_0(w, z) = \frac{1}{w};$ | 7. $A_0(w, z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{w} + \frac{1}{2(w-1)};$ |
| 4. $A_0(w, z) = \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1};$ | 8. $A_0(w, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-h} \right);$ |

где n – целое, h – постоянное, или равно z .

В настоящей работе данная задача решена в случае, когда $A_0(w, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right)$.

Предлагаемый метод решения задачи по нахождению необходимых условий отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях уравнения вида (1) несколько отличается от метода, рекомендуемого в работах [1, 2].

Рассмотрим уравнение вида

$$w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right) w'^2 + \left(a_0(z)w + a_1(z) + \frac{B_1(z)}{w} + \frac{B_2(z)}{w-1} \right) w' + b_0(z)w^3 + b_1(z)w^2 + b_2(z)w + b_3(z) + \frac{C_1(z)}{w} + \frac{C_2(z)}{w-1} \quad (2)$$

с коэффициентами голоморфными относительно z в некоторой области D .

Сделаем в уравнении (2) замену $w = \lambda W$ и $z = z_0 + \lambda Z$, получим

$$W'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{W} + \frac{\lambda}{\lambda W - 1} \right) W'^2 + \left(\alpha_0(z_0 + \lambda Z) W \lambda^2 + \alpha_1(z_0 + \lambda Z) + \frac{B_2(z_0 + \lambda Z)}{W} + \frac{\lambda B_2(z_0 + \lambda Z)}{\lambda W - 1} \right) W' + \lambda^4 b_0(z_0 + \lambda Z) W^3 + \lambda^3 b_1(z_0 + \lambda Z) W^2 + \lambda^2 b_2(z_0 + \lambda Z) W + \lambda b_3(z_0 + \lambda Z) + \frac{C_2(z_0 + \lambda Z)}{W} + \frac{\lambda C_2(z_0 + \lambda Z)}{\lambda W - 1}$$

Откуда при $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение

$$W_0'' = \frac{\frac{1}{2} W_0'^2 + B_2(z_0) W_0' + C_2(z_0)}{W_0} \quad (3)$$

Заменяем уравнение (3) системой

$$\begin{cases} \frac{dW_0}{dZ} = T, \\ \frac{dT}{dZ} = \frac{\frac{1}{2}(T-\alpha)(T-\beta)}{W_0}, \end{cases} \quad (4)$$

где α и β удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2B_1(z_0) \\ \alpha \cdot \beta = 2C_1(z_0). \end{cases} \quad (5)$$

Положим в системе (4) $T - \alpha = \lambda T_1$. Тогда при условии $\lambda = 0$ получим

$$\begin{cases} \frac{dW_0}{dZ} = \alpha \\ \frac{dT_1}{dZ} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)T_1}{W_0}, \end{cases}$$

откуда находим $T_1 = (z - z_0)^{\frac{1}{2}(1-\frac{\beta}{\alpha})}$.

Для отсутствия подвижных критических особых точек необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = M, \quad (6)$$

где M – целое число. Меняя местами α и β , получим еще условие

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = N, \quad (7)$$

где N – целое число. Из уравнений (6) и (7) находим

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 2. \quad (8)$$

Очевидно, что в качестве M и N можно взять лишь число 1, т.е. $M = 1$ и $N = 1$. В этом случае $\alpha = -\beta$. Согласно (5) $\alpha + \beta = -2B_1(z_0)$, т.е. $B_1(z_0) = 0$.

Сделав в уравнении (2) замену $w - 1 = \lambda W$ и $z = z_0 + \lambda Z$, аналогично получим, что для принадлежности уравнения (2) к классу Р-типа необходимо, чтобы $B_2(z) \equiv 0$.

Итак, в дальнейшем будем исследовать уравнение вида

$$w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right) w'^2 + (\alpha_0(z)w + \alpha_1(z))w' + b_0(z)w^3 + b_1(z)w^2 + b_2(z)w + b_3(z) + \frac{C_1(z)}{w} + \frac{C_2(z)}{w-1}. \quad (9)$$

Делая в (9) подстановку

$$w = \frac{W}{\lambda^2}, z = z_0 + \lambda^2 Z,$$

при $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение

$$W_0'' = \frac{1}{W_0} W_0'^2 + \alpha_0(z_0) W_0 W_0' + b_0(z_0) W_0^3. \quad (10)$$

Сделав замену $W_0 = \frac{W_1}{\sqrt{-b_0(z_0)}}$, придем к уравнению

$$W_1'' = \frac{1}{W_1} W_1'^2 + \frac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}} W_1 W_1' - W_1^3. \quad (11)$$

Наконец, сделав подстановку $W_1' = \frac{W_1^2}{T}$, заменим уравнение (11) системой

$$\begin{cases} W_1' = \frac{W_1^2}{T} \\ T' = W_1 \left(T^2 - \frac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}} T + 1 \right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{dT}{dZ} = W_1 (T - \alpha)(T - \beta) \\ \frac{dW_1}{dZ} = \frac{W_1^2}{T} \end{cases}, \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}}, \\ \alpha \cdot \beta = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Полагая далее в (12) $T - \alpha = \lambda T_1$, при $\lambda = 0$ получим систему

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{dZ} = \frac{W_1^2}{\alpha} \\ \frac{dT_1}{dZ} = W_1 T_1 (\alpha - \beta), \end{cases}$$

решение которой

$$W_1 = -\frac{\alpha}{z - z_0}, T_1 = C_1 (z - z_0)^{-\alpha(\alpha - \beta)}.$$

Для отсутствия критических подвижных особых точек необходимо, чтобы $-\alpha(\alpha - \beta) = M$, где M – целое число. Точно так же получим еще условие $-\beta(\beta - \alpha) = N$, где N – целое число.

Из этих условий имеем в силу (13)

$$\alpha^2 \beta^2 = (M - 1)(N - 1)$$

или

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 1.$$

Очевидно, $M = 2, N = 2$. Тогда $\alpha^2 = \beta^2 = -1$, откуда $\alpha = \pm i, \beta = \pm i$. Но так как $\alpha \cdot \beta = 1$, то $\alpha = \pm i, \beta = \mp i$, т.е. $\alpha + \beta = 0$ и $a_0(z_0) = 0$.

Для дальнейшего исследования уравнения (2) применим метод, основанный на редукции от нелинейных уравнений второго порядка к системе двух уравнений Брио и Буке. Так как мы ищем уравнения с неподвижными критическими особыми точками, то при сведении уравнения к системе Брио и Буке мы должны требовать, чтобы решения системы были однозначны при обходе вокруг всех точек, которые не являются неподвижными особыми точками.

Для этого перепишем уравнение (9) в виде

$$w(w - 1)w'' = \left(w - \frac{1}{2} \right) w'^2 + a_1(z)(w^2 - w)w' + b_0(z)w^5 + (b_1(z) - b_0(z))w^4 + (b_2(z) - b_1(z))w^3 + (b_3(z) - b_2(z))w^2 + (C_1(z) + C_2(z) - b_3(z)w - C_1(z))$$

(14)

Полагая в уравнении (14)

$$w = \frac{1}{W},$$

получим

$$W(W - 1)W'' = \left(\frac{3}{2}W - 1 \right) W'^2 + a_1(z)(W^2 - W)W' + b_0(z) + (b_1(z) - b_0(z))W +$$

$$+(b_2(z) - b_1(z))W^2 + (b_3(z) - b_2(z))W^3 + (C_1(z) + C_2(z) - b_3(z))W^4 - C_1(z)W^5. \quad (15)$$

Сделав в уравнении (15) подстановку

$$z - z_0 = \tau, W = \frac{\beta_0 + u}{\tau}, W' = \frac{\tau u' - u + \tau \beta_0' - \beta_0}{\tau^2}$$

и полагая $\tau u' - u = v$, приходим к системе двух уравнений Брио и Буке

$$\begin{cases} \tau \frac{du}{d\tau} = u + v, \\ \tau \frac{dv}{d\tau} = -v + \tau(-\beta_0' - a_1(z_0)\beta_0 + \frac{1}{2} + C_2(z_0)\beta_0^2 - b_3(z_0)\beta_0^2 - C_1'(z_0)\beta_0^3 + \dots), \end{cases} \quad (16)$$

где $\beta_0^2 = -\frac{1}{2C_1(z_0)}$, z_0 – произвольная точка из области D , для которой $C_1(z_0) \neq 0$.

Интерес представляют голоморфные решения системы (16), обладающие свойством $u(\tau) \rightarrow 0, v(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. (17)

Корни характеристического уравнения для системы (16) будут $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$.

Известно [3], что в этом случае для существования голоморфного решения, обладающего свойством (17), необходимо, чтобы

$$-\beta_0' - a_1(z)\beta_0 + \frac{1}{2} - \frac{C_2(z)}{2C_1(z)} + \frac{b_3(z)}{2C_1(z)} + \frac{C_2'(z)}{2C_1(z)}\beta_0 \equiv 0, \quad (18)$$

где $\beta_0^2 = -\frac{1}{2C_1(z)}$, или

$$-\beta_0' + \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{C_2'(z)}{C_1(z)} - 2a_1(z) \right) + \frac{C_2(z) - C_2(z) + b_3(z)}{2C_1(z)} \equiv 0. \quad (19)$$

Условие (19) эквивалентно соотношению

$$C_1(z) - C_2(z) + b_3(z) \equiv 0 \text{ при условии } \frac{\beta_0'}{\beta_0} = -\frac{a_1(z)}{2} \text{ или } \frac{C_2'(z)}{C_1(z)} = a_1(z). \quad (20)$$

Рассмотрим полюс $w = 1$. Сделав в уравнении (14) замену

$$w - 1 = \frac{1}{W},$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} (W^2 + W)W'' &= \left(1 + \frac{3}{2}W\right)W'^2 + a_1(z)(W^2 + W)W' - b_0(z)(W + 1)^5 - \\ &- (b_1(z) - b_0(z))W(W + 1)^4 - (b_2(z) - b_1(z))W^2(W + 1)^3 - \\ &- (b_3(z) - b_2(z))W^3(W + 1)^2 - (C_1(z) + C_2(z) - b_3(z))W^4(W + 1) + C_1(z)W^5. \end{aligned} \quad (21)$$

Точно также, т.е. используя метод сведения уравнения (21) к системе Брио и Буке, получим, что для отсутствия подвижных критических особых точек в решениях уравнения (21), а значит и в решениях уравнения (2), должно выполняться условие:

$$-\frac{1}{2} + \frac{C_2(z) + b_0(z) + b_1(z) + b_2(z) + b_3(z)}{2C_2(z)} - \gamma_0' - a_1(z)\gamma_0 + C_2'(z)\gamma_0^3 \equiv 0, \quad (22)$$

где $\gamma_0^2 = -\frac{1}{2C_2(z)}$,

или

$$-\gamma_0' + \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{C_2'(z)}{C_2(z)} - 2a_1(z) \right) + \frac{b_0(z) + b_1(z) + b_2(z)}{2C_2(z)} \equiv 0. \quad (23)$$

При условии $\frac{C_2'(z)}{C_2(z)} = a_1(z)$ соотношение (23) эквивалентно условию

$$b_0(z) + b_1(z) + b_2(z) \equiv 0. \quad (24)$$

Наконец, сделав в уравнении (14) замену

$$z - z_0 = \tau, W = \frac{\alpha_0 + u}{\tau}, W' = \frac{\tau u' - u + \tau \alpha_0' - \alpha_0}{\tau^2},$$

придем к системе двух уравнений Брио и Буке

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{du}{d\tau} = u + v, \\ \tau \frac{dv}{d\tau} = 2u + \tau \left(\frac{1}{2} + \frac{b_0'(z)}{b_0(z)} \alpha_0 + \frac{b_1(z)}{b_0(z)} - a_1(z) \alpha_0 \right) + \tau^2 \left(-\alpha_0'' + a_1(z) \alpha_0' - a_1'(z) \alpha_0 + \frac{1}{2} b_0(z) \alpha_0 + \right. \\ \left. + \frac{b_0''(z)}{2b_0(z)} \alpha_0 + b_2(z) \alpha_0 - b_0(z) \alpha_0 \alpha_0' + b_0(z) \alpha_0 \alpha_0'^2 + \frac{b_1'(z)}{b_0(z)} \right) + 4b_0(z) \alpha_0 u^2 + \\ \left. + \left(2b_0(z) \alpha_0 \alpha_0' + 3 \frac{b_0'(z)}{b_0(z)} + 2b_1(z) \alpha_0 - b_0(z) \alpha_0 \right) u\tau + \dots, \right. \end{array} \right. \quad (25)$$

где $\alpha_0^2 = \frac{1}{b_0(z)}$.

Корни характеристического уравнения системы (25) равны $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

Известно [3], что в этом случае для существования голоморфных решений со свойством (17) у системы (25) необходимо, чтобы имело место условие:

$$\begin{aligned} & -\alpha_0'' + a_1(z) \alpha_0' - a_1'(z) \alpha_0 + \frac{1}{2} b_0(z) \alpha_0 + \frac{b_0''(z)}{2b_0(z)} \alpha_0 + b_2(z) \alpha_0 - b_0(z) \alpha_0 \alpha_0' + \\ & + b_0(z) \alpha_0 \alpha_0'^2 + \frac{b_1'(z)}{b_0(z)} + \left(2b_0(z) \alpha_0 \alpha_0' + 3 \frac{b_0'(z)}{b_0(z)} + 2b_1(z) \alpha_0 - b_0(z) \alpha_0 \right) \alpha_1 + \\ & + 4b_0(z) \alpha_0 \alpha_1^2 \equiv 0, \text{ где } \alpha_1 = -\frac{1}{4} - \frac{b_0'(z)}{2b_0(z)} \alpha_0 - \frac{b_1(z)}{2b_0(z)} + \frac{a_1 \alpha_0}{2} \text{ и } \alpha_0^2 = -\frac{1}{b_0(z)}, \end{aligned} \quad (26)$$

или

$$b_0''(z) = \frac{b_0'^2(z)}{2b_0(z)} + \frac{3}{2} a_1(z) b_0'(z) + (a_1'(z) - a_1^2(z)) b_0(z)$$

при

$$\left(b_1(z) + \frac{3}{2} b_0(z) \right)' \equiv a_1(z) \left(b_1(z) + \frac{3}{2} b_0(z) \right). \quad (27)$$

Итак, из вышесказанного следует

Теорема. Если уравнение (2) есть уравнение с неподвижными критическими точками, то должны выполняться следующие условия:

1. $B_1(z) \equiv 0, B_2(z) \equiv 0, \alpha_0(z) \equiv 0$;
2. $b_3(z) \equiv C_2(z) - C_1(z), \frac{C_1'(z)}{C_1(z)} \equiv a_1(z)$;
3. $b_0(z) + b_1(z) + b_2(z) \equiv 0, \frac{C_2'(z)}{C_2(z)} \equiv a_1(z)$;
4. $b_0''(z) = \frac{b_0'^2(z)}{2b_0(z)} + \frac{3}{2} a_1(z) b_0'(z) + (a_1'(z) - a_1^2(z)) b_0(z)$;
5. $\left(b_1(z) + \frac{3}{2} b_0(z) \right)' \equiv a_1(z) \left(b_1(z) + \frac{3}{2} b_0(z) \right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.
3. Мячин, В.Ф. Системы уравнений Брио и Буке / В.Ф. Мячин // Вестник Ленинградского ун-та. – 1958. – № 7. – С. 88–102.

E.A. Natynchik, T.I. Shilo. Second Order Equations with Singular Points Stationary Critical

In this paper we find necessary conditions for a special second order equation for P-type, i.e. find necessary conditions for the absence of mobile multi-valued singularities in the solutions of the equation. This problem is not new, though for this equation this problem has not been reviewed yet. The proposed

method of solving the problem of equation selection with fixed critical singularities is somewhat different from the methods applied earlier for solving such problems.

Along with the method of small parameter Painlevé the method based on the reduction of nonlinear second-order system of two equations of Briot and Bouquet is presented in this article. The found conditions for a second-order equation for P-type written explicitly, are tested in practice.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.07.2010 г.

А.А. Юдов, О.В. Пинчук

О РЕДУКТИВНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ G – ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 1R_4

В работе рассматривается пространство 1R_4 – четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры (пространство Минковского). Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли G – группой Ли движений пространства 1R_4 . Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности трехмерную подгруппу Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Среди однородных пространств такого вида находятся все редуктивные пространства. В алгебрах Ли этих редуктивных пространств находятся все редуктивные дополнения.

Введение

Работа изучается геометрия однородных пространств. Исследование таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и другие, а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте [1] и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси [2–3]. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуктивных однородных пространств, в частности исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах. В данной работе исследуется специальный класс однородных пространств, фундаментальной группой для которых является группа Ли G движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства 1R_4 . Рассматриваются такие однородные пространства, группа стационарности у которых трехмерная. Среди таких пространств находятся все редуктивные однородные пространства, в алгебрах Ли фундаментальных групп Ли которых находятся все соответствующие редуктивные дополнения.

Постановка задачи и метод исследования

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства 1R_4 : $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли \bar{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \bar{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли группы Ли: $\bar{G} = \bar{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли G движений пространства 1R_4 . Все связные подгруппы Ли группы Ли G , с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4].

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i , где G_i – связная трехпараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \bar{G} и \bar{G}_i , затем находятся все трехмерные

подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \overline{G}_i . Эти пространства будут редуکتивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуکتивно, отсюда будет следовать редуکتивность однородного пространства G/G_i . При этом можно показать, что всякое редуکتивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение. Однородное пространство H/G_i называется редуکتивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad \overline{G}_i$, где $ad \overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G}_i .

Для нахождения редуکتивных дополнений используем следующий способ. Пусть a_1, a_2, a_3 – базис алгебры Ли \overline{G}_i группы Ли G_i , принадлежащей группе Ли H . Рассмотрим трехмерное векторное подпространство m алгебры Ли \overline{H} , образованное векторами b_1, b_2, b_3 , т.е. $m = \{b_1, b_2, b_3\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнение условия инвариантности относительно $ada_i, i=1, 2, 3$. Т.е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j] = \alpha_{j1}b_1 + \alpha_{j2}b_2 + \alpha_{j3}b_3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ [5] алгебры Ли \overline{H} , получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть например $b_j = \beta_{j5}i_5 + \dots + \beta_{j10}i_{10}$. Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3\}$ с более простыми коэффициентами β_{jk} . Для этого придется рассмотреть 20 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены трехмерные пространства m_1, \dots, m_p , инвариантные относительно $ad \overline{G}_i$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_i и будут искомыми редуکتивными дополнениями.

Нахождение редуکتивных пространств H/G_i

Все трехмерные подгруппы Ли группы Ли H известны [4]. Запишем алгебры Ли для этих подгрупп с помощью базисов: $\overline{G}_8 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}$, $\overline{G}_9 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}$, $\overline{G}_{10} = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + ki_6\}$, $\overline{G}_{11} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$, $\overline{G}_{12} = \{i_5, i_6, i_8\}$.

Рассмотрим оператор i_9 . Будем искать трехмерные инвариантные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad(i_9)$. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1^0 . Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6 + \nu i_8, i_{10} + \sigma i_9 + s i_6 + t i_8, i_7 + p i_9 + q i_6 + r i_8\}$. Система инвариантности имеет вид: $\nu s - q = 0, \nu t - r = 0, \nu \sigma - p = 0, ts = 0, t^2 = 1, t\sigma = 0, rs = 0, tr = 0, r\sigma = 0$. Из пятого уравнения следует $t = \pm 1$. Тогда из четвертого, шестого и восьмого уравнения следует $s = 0, \sigma = 0$ и $r = 0$, а из первого, второго и третьего: $q = 0, \nu = 0, p = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6, i_{10} \pm i_8, i_7\}$.

2⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_6 + \nu i_8, i_{10} + \sigma i_7 + s i_6 + t i_8, i_9 + p i_6 + q i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

3⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10} + \nu i_8, i_{10} + \sigma i_7 + s i_9 + t i_8, i_6 + p i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

4⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_6, i_{10} + \sigma i_7 + s i_9 + t i_6, i_7\}$. Система инвариантности противоречива.

5⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_8 + \mu i_6, i_7 + s i_8 + \sigma i_6, i_9 + p i_6 + q i_8\}$. Система инвариантности имеет вид: $\sigma = 0, s = 0, \nu = 0, \mu = 0, \lambda = 0, q = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_7, i_9 + p i_6\}$.

6⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_8 + \mu i_6, i_7 + s i_8 + \sigma i_9, i_6 + p i_8\}$ Система инвариантности имеет вид: $\nu = 0, s = \lambda, p = 0, \mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, q = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_7, i_6\}$.

7⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_6 + \mu i_9, i_7 + s i_6 + \sigma i_9, i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

8⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_8 + \mu i_7, i_9 + \sigma i_8, i_6 + p i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

9⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_6 + \mu i_7, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

10⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \nu i_9 + \mu i_7, i_6, i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

11⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_6 + \mu i_8, i_7 + \sigma i_6 + s i_8, i_9 + q i_8 + p i_6\}$. Система инвариантности имеет следующий вид: $\mu \lambda = 0, \mu^2 = 1, s \lambda + \sigma = 0, s \mu + s = 0, q \lambda = 0, q \mu = 0$. Из второго уравнения следует $\mu = \pm 1$, из четвертого $s = 0$, следовательно $\sigma = 0, \lambda = 0, q = 0$. Получим инвариантное пространство в виде: $\{i_{10} \pm i_8, i_7, i_9 + p i_6\}$.

12⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_9 + \mu i_8, i_7 + \sigma i_9 + s i_8, i_6 + p i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

13⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_9 + \mu i_6, i_7 + \sigma i_9 + s i_6, i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

14⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_7 + \mu i_8, i_9 + \sigma i_8, i_6 + p i_8\}$. Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0, \mu^2 = 1, \mu \lambda = 0, \sigma \lambda = 0, \sigma \mu = 0, \lambda p = 0, p \mu = 0$. Из второго уравнения следует $\mu = \pm 1$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_{10} \pm i_8, i_9, i_6\}$.

15⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_7 + \mu i_6, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$. Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0, \mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_{10}, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$.

16⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_7 + \mu i_9, i_6, i_8\}$. Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0, \mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_{10}, i_6, i_8\}$.

17⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_8, i_9 + \sigma i_8, i_6 + p i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

18⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_6, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$ Система инвариантности противоречива.

19⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_9, i_6, i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

20⁰. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_9, i_6, i_8\}$. Система инвариантности противоречива.

Таким образом, получена

Теорема 1. Относительно adi_9 инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6, i_{10} + i_8, i_7\}$, 2. $\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6, i_{10} - i_8, i_7\}$, 3. $\{i_5, i_7, i_9 + pi_6\}$, 4. $\{i_5, i_7, i_6\}$,
5. $\{i_{10} + i_8, i_7, i_9 + pi_6\}$, 6. $\{i_{10} - i_8, i_7, i_9 + pi_6\}$, 7. $\{i_{10} + i_8, i_9, i_6\}$, 8. $\{i_{10} - i_8, i_9, i_6\}$,
9. $\{i_{10}, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$, 10. $\{i_{10}, i_6, i_8\}$.

Рассматривая аналогично операторы adi_5 , adi_6 , adi_8 , adi_{10} , $ad(i_5 - i_8)$, $ad(i_7 + i_{10})$, $ad(i_9 + ki_6)$, приходим к следующим теоремам.

Теорема 2. Относительно adi_6 инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5 + i_8, i_{10} + ti_8, i_7 + ti_8\}$, 2. $\{i_5 - i_8, i_{10} + ti_8, i_7 - ti_8\}$, 3. $\{i_5 \pm i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + pi_6\}$, 4. $\{i_5 \pm i_8, i_7 - i_{10}, i_9 + pi_6\}$,
5. $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8\}$, 6. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1 + \lambda ti_8}, i_{10} + ti_8 \pm \sqrt{1 + \lambda ti_7}, i_9 + pi_6\}$,
7. $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_9 + ti_6\right\}$, 8. $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6\right\}$, 9. $\{i_5 + \lambda i_{10} \pm \lambda i_9, i_7, i_8\}$, 10. $\{i_5, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$,
11. $\{i_5, i_6, i_8\}$, 12. $\{i_{10}, i_7, i_9 + si_6\}$, 13. $\{i_{10}, i_7, i_6 - i_8\}$, 14. $\{i_{10} \pm i_7, i_9, i_6\}$,
15. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + i_7, i_6\}$, 16. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} - i_7, i_6\}$.

Теорема 3. Относительно adi_5 инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5, i_{10}, i_7 \pm i_9 + qi_6 \pm qi_8\}$, 2. $\{i_5, i_{10}, i_6 \pm i_8\}$, 3. $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + \sigma i_6 + si_8, i_9 + si_6 + \sigma i_8\}$,
4. $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 \pm i_9, i_6 \pm i_8\}$, 5. $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 \mp i_9 + si_8, i_6 \pm i_8\}$, 6. $\{i_5, i_6, i_8\}$, 7. $\{i_{10}, i_6, i_8\}$,
8. $\{i_7 + i_9, i_6, i_8\}$, 9. $\{i_7 + \lambda i_8, i_9 \mp i_8, i_6 \pm i_8\}$, 10. $\{i_{10}, i_7 \pm i_9, i_6 \pm i_8\}$,
11. $\{i_{10}, i_7 \pm i_9 + \sigma i_8, i_6 \mp i_8\}$, 12. $\{i_{10}, i_7 + \nu i_6 + \sigma i_8, i_9 + \sigma i_6 + \nu i_8\}$

Теорема 4. Относительно adi_{10} инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + pi_9, i_6 + pi_8\}$, 2. $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_9, i_8\}$, 3. $\{i_{10}, i_9, i_8\}$, 4. $\{i_{10}, i_7, i_6\}$,
5. $\{i_7 + \lambda i_9, i_6, i_8\}$, 6. $\{i_{10}, i_7 + \sigma i_6 + si_8, i_9 + pi_6 - \sigma i_8\}$, 7. $\{i_5, i_7, i_6\}$.

Теорема 5. Относительно adi_8 инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\left\{i_5 + \lambda i_9 \pm \sqrt{\lambda s - 1} i_6, i_{10} \pm \sqrt{\lambda s - 1} i_9 + si_6, i_7 + ri_8\right\}$, 2. $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + si_8, i_9 - \frac{1}{\lambda} i_6\right\}$,
3. $\{i_5, i_7 + si_8, i_6\}$, 4. $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_9 - \frac{1}{\lambda} i_6, i_8\right\}$, 5. $\{i_5, i_6, i_8\}$, 6. $\{i_{10}, i_7, i_9\}$, 7. $\{i_{10}, i_9, i_8\}$,
8. $\{i_{10}, i_7, i_6\}$, 9. $\{i_5, i_7, i_6\}$, 10. $\{i_7, i_9, i_8\}$.

Для оператора $ad(i_5 - i_8)$ получим следующую теорему.

Теорема 6. Относительно $ad(i_5 - i_8)$ инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5 - i_8, i_{10} + i_7, i_9\}$, 2. $\{i_5 + i_8, i_{10} + i_7, i_6\}$, 3. $\{i_5 + i_8, i_{10} + i_7 + ti_8, i_6\}$,
4. $\{i_5 \pm \sqrt{2} i_6 + i_8, i_{10} + i_7, i_9 + pi_6 \pm \sqrt{2} pi_8\}$, 5. $\{i_5, i_6, i_8\}$, 6. $\{i_{10}, i_7, i_9\}$.

Теорема 7. Относительно $ad(i_7 + i_{10})$ инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :

1. $\{i_{10}, i_7, i_6\}$, 2. $\{i_5, i_9, i_8\}$, 3. $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_9 + \lambda i_6\right\}$, 4. $\{i_5 - i_8, i_{10} + i_7 + p i_9, i_6 + p i_8\}$,
5. $\{i_5 + \lambda i_7 - i_8, i_{10} + i_7, i_6\}$.

Теорема 8. Относительно $ad(i_9 + k i_6)$ инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H}

1. $\{i_5 + i_{10}, i_7, i_9 + p i_6\}$, 2. $\{i_5 + i_{10}, i_7 + \lambda i_8, i_6\}$, 3. $\left\{i_5 - \frac{1}{k} i_{10}, i_9, i_6\right\}$, 4. $\{i_5 + i_{10}, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$,
5. $\{i_5 - i_{10}, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$, 6. $\left\{i_{10}, i_7 - \frac{1}{k} i_8, i_9 + p i_6\right\}$, 7. $\{i_{10}, i_9 + \sigma i_6, i_8\}$.

Вернемся к вопросу о редуцируемости однородных пространств.

Из теорем 6 и 7 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и $ad(i_7 + i_{10})$ нет общих инвариантных трёхмерных подпространств алгебры Ли \overline{H} . Поэтому алгебры Ли \overline{G}_9 , \overline{G}_8 , \overline{G}_{10} не имеют в алгебре Ли \overline{H} редуцируемых дополнений. Таким образом, получим теорему:

Теорема 9. Однородные пространства H/G_8 , H/G_9 , H/G_{10} не являются редуцируемыми.

Рассмотрим подалгебру $G_{11} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$. Тогда из теоремы 2 и теоремы 4 следует, что для adi_8 и adi_{10} одновременно инвариантными являются только следующие трехмерные пространства $\{i_5, i_7, i_6\}$ и $\{i_{10}, i_7, i_6\}$, из которых только пространство $\{i_5, i_7, i_6\}$ является дополнительным к алгебре G_{11} . Это же пространство инвариантно и относительно adi_9 . Следовательно, получена теорема:

Теорема 10. Однородное пространство H/G_{11} является редуцируемым.

Единственным редуцируемым дополнением для подалгебры Ли \overline{G}_{11} в алгебре Ли \overline{H} является подпространство $\{i_5, i_7, i_6\}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_{12} . Из теорем 3 и 5 следует, что единственными трехмерными подпространствами алгебры Ли \overline{H} , инвариантными относительно $ad\overline{G}_{12}$, являются подпространства $\{i_5, i_6, i_8\}$ и $\{i_{10}, i_7, i_9\}$. Из них только $\{i_{10}, i_7, i_9\}$ является дополнительным в алгебре Ли \overline{H} к \overline{G}_{12} . Таким образом, получили теорему.

Теорема 11. Однородное пространство H/G_{12} является редуцируемым.

Итоги исследований подведём в виде следующей теоремы.

Единственным редуцируемым дополнением для подалгебры Ли \overline{G}_{12} в алгебре Ли \overline{H} является подпространство $\{i_{10}, i_7, i_9\}$.

Теорема 12. Однородные пространства H/G_{11} и H/G_{12} являются редуцируемыми.

Редуцируемым дополнением в алгебре Ли \overline{H} для подалгебры Ли \overline{G}_{11} является только подпространство $\{i_5, i_7, i_6\}$, а редуцируемым дополнением в алгебре Ли \overline{H} для подалгебры Ли \overline{G}_{12} является только подпространство $\{i_{10}, i_7, i_9\}$. Однородные пространства H/G_8 , H/G_9 , H/G_{10} не являются редуцируемыми.

1. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // I респ. конф. математиков Белоруссии : науч. тр. – Минск, 1965. – С. 247–258.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.1. – 343 с.
3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.2. – 413 с.
4. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца-Пуанкаре / И.В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – № 1. – С. 16–21.
5. Корчук, О.В. Исследование и классификация редуктивных однородных пространств с группой вращений пространства 1R_4 с четырехмерными группами стационарности / О.В. Корчук, А.А. Юдов // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23 апреля 2009 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест, 2009. – С. 182–183.

A. Yudov, O. Pinchuk. About the Reduction of Homogenous Spaces with Fundamental Group G – Group of Motions of Space 1R_4

In the article the space 1R_4 – 4-dimensional pseudoeuclidious space of the zero signature is considered. Homogenous spaces with fundamental group Lee G – group Lee of motions space 1R_4 are dealt with. The class of such spaces, having as a group of stability a 3-dimensional subgroup Lee of group Lee H of rotations of space 1R_4 is investigated. Homogeneous spaces of such kind are all reductive homogeneous spaces. All reductive supplements are in algebras Lee of reductive spaces.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 21.02.2011 г.

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

- Аўсіюк А.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна
- Адамчук Д.В.** – студэнт фізічнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Багаль К.А.** – магістрантка, выкладчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Валюшына Т.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры геаметрыі і алгебры Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Грабава У.З.** – аспірантка кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Дзямідчык А.У.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Длубаковска-Пузія Е.** – кандыдат эканамічных навук, дацэнт кафедры маркетынга Кашалінскага політэхнічнага ўніверсітэта (Польшча)
- Жыгала К.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, дактарант кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Жигалло Т.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Кальчук І.У.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Карпук М.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры эканаметрыкі Кашалінскага політэхнічнага ўніверсітэта (Польшча)
- Костка У.С.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Мадорскі В.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Матысік А.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Мірская А.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Натынчык А.А.** – асістэнт кафедры матэматычнага мадэлявання Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Пінчук О.В.** – студэнтка матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Плецохоў У.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Пузія К.** – магістр Грамадскай Вышэйшай школы прадпрымальніцтва і кіравання ў Лодзі (філіял у Калабжегу, Польшча)
- Равінскі А.Ф.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна, прафесар тэхнічнага ўніверсітэта у Беластоку (Польшча)
- Радына Я.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры функцыянальнага аналізу механіка-матэматычнага факультэта БДУ
- Саўчук В.Ф.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Серы А.І.** – старшы выкладчык кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Сідорык А.Г.** – аспірантка кафедры функцыянальнага аналізу механіка-матэматычнага факультэта БДУ
- Сцепанюк Т.А.** – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Украіна)
- Трыгук В.В.** – выкладчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Шыла Т.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Юдаў А.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
 - анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
 - бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
 - рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падроздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаваанне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Подписано в печать 31.03.2011. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 15,11. Уч.-изд. л. 8,71.
Тираж 100 экз. Заказ № 130.
Издатель и полиграфическое исполнение
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».
ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.