

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матысік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
У.А. Плецюхоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш
А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2010

У адпаведнасці з загадам Вышэйшай атэстацыйнай
камісіі № 9 ад 15.01.2010 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навук



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush
A.V. Chichurin

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Cosmonauts, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

**Founder – Educational institution
«Brest state university named after A.S. Pushkin»**

№ 2 / 2010

According to the order of Supreme certification commission № 9
from January 15, 2010, the journal «Vesnik of Brest University» was included
to the List of editions of the Republic of Belarus for publication of the results
of scientific research in physics-mathematical sciences

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Андрусевич П.П., Стражев В.И. О внутренней симметрии дираковских полей (ч. 2).....	5
Галынский М.В., Кураев Э.А. О вычислении сечений процессов квантовой электродинамики с участием частично поляризованных фотонов в диагональном спиновом базисе.....	13
Лиопо В.А., Сабуть А.В., Секержицкий С.С., Струк В.А. Характеристики координационных сфер шаровых упаковок.....	23
Плетюхов В.А. Симметрии безмассовых полей дираковского типа.....	32
Секержицкий В.С. О влиянии магнитного поля на пионизацию ядер.....	39
Шуляковский Р.Г. Функции Грина для произвольного числа фермионов в инстантонных процессах множественного рождения.....	45

МАТЭМАТЫКА

Ворошилов А.А. Решение задачи типа Коши для дробного уравнения конвекции с частной производной Римана–Лиувилля.....	50
Жук А.И., Яблонский О.Л. Многомерные дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций.....	55
Княгина В.Н. О p -разрешимости кофактора перестановочной подгруппы конечной группы.....	63
Комаров И.И. Использование обобщенных мер зависимостей случайных величин в статистическом анализе временных рядов.....	70
Курочкин Ю.А., Жукович С.Я. Симметрия множеств, генерируемых октонионным аналогом алгоритма Жулиа и Фату.....	74
Мадорский В.М. О нерегуляризованных нелокальных вариантах метода Канторовича–Красносельского решения нелинейных уравнений.....	81
Марзан С.А. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка.....	87
Монахов В.С., Трофимук А.А. Конечные группы с ограничениями на силовские подгруппы в подгруппах Шмидта.....	94
Олешкевич Д.Н., Прохорович М.А. Точки Лебега для функций из классов Соболева на пространстве p -адических чисел.....	103
Самойленко В.Г., Самойленко Ю.И. Метод погранслоя и условие типа Гюгонио для уравнения Кортевега–де Фриза.....	111
Трофимук А.А., Монахов В.С. Конечные группы с ограничениями на силовские подгруппы факторов.....	130
Чичурин А.В. Решение системы Шази и интегрирование дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами с помощью системы <i>Mathematica</i>	134
Швычкина Е.Н. О построении системы, эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками.....	142
Звесткі аб аўтарах.....	149

INDEX

PHYSIS

Andrusevich P.P., Strazhev V.I. On Inner Symmetry of Dirac Fields (Part 2).....	5
Galynskii M.V., Kuraev E.A. About the Calculation of Differential Sections of the Processes of Quantum Electrodynamics with Participation of Partially Polarized Photons in the Diagonal Spin Basis	13
Liopo V.A., Sabutz A.V., Sekerzhitsky S.S., Struk V.A. Characteristics of Coordination Spheres of Globular Packing	23
Pletyukhov V.A. The Symmetries of Massless Dirac Type Fields	32
Sekerzhitsky V.S. About Influence of Magnetic Field on Pionization of Nuclei	39
Shulyakovsky R.G. Multifermion Green Functions for Instanton Processes and their Contribution into Deed Inelastic Scattering	45

MATHEMATIS

Voroshilov A.A. Solving of Cauchy-Type Problem for Fractional Convection Equation with Riemann-Liouville Partial Derivative.....	50
Zhuk A.I., Yablonski A.L. Multidimensional Differential Equations with Generalized Coefficients in the Algebra of Generalized Functions	55
Kniazhina V.N. On P-Solvability of a Permutable Subgroup Cofactor of a Finite Group	63
Komarov I.I. Usage of Generalized Measures of Dependence of Stochastic Values in a Statistic Analysis of Temporal Series	70
Kurochkin Y., Zhukovich S.Y. Set Symmetry, Generated by Octonion Analog of Julia-Fatou Algorithm.....	74
Madorsky V.M. About Non Regularized Non Local Kantorovich-Krasnoselski Methods of Solving Non Linear Equations.....	81
Marzan S.A. Existence and Uniqueness of Solutions of Cauchy Problem for Linear Differential Equations with Caputo Derivative of Complex Order.....	87
Monakhov V.S., Trofimuk A.A. Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Schmidt Subgroups.....	94
Oleshkevich D.N., Prokhorovich M.A. Lebesgue Points for Functions from Sobolev Classes on Space of p -Adic Numbers	103
Samoilenko V., Samoilenko Yu. To the Metod of the Boundary Layer and the Hugoniot-tupe Condition for the Kortveg de Vries Equation.....	111
Trofimuk A.A., Monakhov V.S. Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Factors	134
Chichurin A.V. Solution of Chazy System and Integration of Chazy Differential Equation with Six Permanent Poles with the Help of Mathematica	134
Shvychkina H.N. The Building of Equivalent System with Six Singularities	142
Information about the authors	149

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.И. Стражев

О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ ПОЛЕЙ (Ч. 2)

Продолжено начатое в предыдущих работах авторов на данную тему исследование симметричных свойств лагранжевой формулировки дираковских полей. В рамках вещественного описания рассмотрена система из двух уравнений Дирака одного типа с лагранжианом $L = L_1 - L_2$ и система из двух уравнений Дирака разных типов. Проведен сравнительный анализ внутренних симметрий указанных систем в классическом и квантовом случаях.

Введение

В работе [1] с использованием подхода, предложенного в [2; 3], исследована внутренняя (нелоренцевская) симметрия 8-компонентного комплексного массивного поля, описываемого системой из двух уравнений Дирака

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 &= 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при выборе лагранжиана в виде

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 - \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2. \quad (2)$$

Было установлено, что искомая симметрия в классическом случае описывается группой $SO(3,2)$, которая содержит обычно сопоставляемую такому полю группу $SO(3)$ (или $SU(2)$) в качестве подгруппы. Продолжим исследование, начатое в [1].

Симметрия 8-компонентного дираковского поля с лагранжианом $L = L_1 - L_2$

Рассмотрим систему (1) с лагранжианом

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2. \quad (3)$$

Опять приведем систему (1) к 16-компонентной вещественной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \quad (4)$$

где

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \quad (5)$$

(ψ_1^r, ψ_2^r – вещественные, ψ_1^i, ψ_2^i – чисто мнимые компоненты) и

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4. \quad (6)$$

Матрица билинейной лоренц-инвариантной формы η имеет в данном случае вид:

$$\eta = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes \gamma_4) = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_4. \quad (7)$$

Преобразования внутренней симметрии рассматриваемого поля могут быть параметризованы посредством эрмитовских генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu, \quad \Gamma'_5 = \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4, \quad i\Gamma'_\mu\Gamma'_5, \quad \frac{i}{2}\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{i}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu), \quad (8)$$

где Γ'_μ – квадратные матрицы 16×16 , удовлетворяющие алгебре матриц Дирака и взаимно коммутирующие с Γ_μ . В базисе (5) матрицы Γ'_μ имеют вид [1]:

$$\Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2. \quad (9)$$

Накладывая сначала на бесконечно малые преобразования внутренней симметрии

$$Q = 1 + \omega_A J^A \quad (10)$$

с генераторами (8), (9) условие сохранения структуры (5) волновой функции (условие вещественности поля), найдем ограничения на параметры ω_A . Применяя затем условие

$$(\omega_A J^A)^+ \eta = -\eta \omega_A J^A \quad (11)$$

инвариантности лагранжиана, получим, что «хорошими» в данном случае являются генераторы

$$\Gamma'_2, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, i\Gamma'_2\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5, i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]}, i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]}, i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \quad (12)$$

которым соответствуют 6 вещественных ($\omega_3, \omega_4, \omega_{35}, \omega_{45}, \omega_{[23]}, \omega_{[24]}$) и 4 мнимых ($\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[34]}$) параметра.

Таким образом, как и в случае теории с лагранжианом (2), приходим к группе SO(3,2), но с иным набором генераторов [1]. Группа SO(2,1), ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний, содержится в ней в качестве подгруппы и задается генераторами

$$i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]}, i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]}, i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}. \quad (13)$$

Симметрия двух дираковских полей разных типов

Теперь рассмотрим систему, состоящую из двух различных типов уравнений Дирака

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 &= 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

лагранжиан которой выберем в виде

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2. \quad (15)$$

Для удобства исследования перепишем (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 &= 0, \\ (-\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Беря от (16) комплексное сопряжение, затем складывая и вычитая соответствующие уравнения исходной и комплексно сопряженной систем, получим 16-компонентную систему уравнений, которая может быть записана в форме (4), (5) с матрицами:

$$\Gamma_1 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_4. \quad (17)$$

Матрица билинейной формы η в данном случае имеет вид:

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (18)$$

Переход в фермионный базис осуществляется здесь с помощью преобразования:

$$\begin{aligned} C &= AB, \\ A &= \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \\ A^{-1} &= A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \\ B &= B^+ = B^{-1} = \frac{1}{2}[(I_4 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes I_4 + (I_4 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes \gamma_5]. \end{aligned} \quad (19)$$

Генераторы (8) унитарной группы преобразований внутренней симметрии, удовлетворяющих условию $[Q, \Gamma_\mu]_- = 0$, переводятся в базис (5) посредством матрицы

$C^{-1} = BA^{-1}$ и имеют в этом базисе вид:

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= -\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad \Gamma'_2 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad \Gamma'_3 = -\gamma_4 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma'_4 &= \gamma_3 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4, \quad \Gamma'_1\Gamma'_5 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5, \\ \Gamma'_2\Gamma'_5 &= i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad \Gamma'_3\Gamma'_5 = -i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} &= i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = i\gamma_3\gamma_1 \otimes \gamma_5, \quad \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} &= i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_5, \quad \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = i\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5, \quad \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (20)$$

Условие вещественности поля приводит к вещественности параметров $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45}, \omega_{[23]}, \omega_{[12]}, \omega_{[24]}$ и мнимости параметров $\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]}$. С учетом данного обстоятельства нетрудно убедиться, что условию (11) удовлетворяют генераторы (12), которым по-прежнему соответствуют шесть вещественных и четыре мнимых параметра.

Таким образом, группа внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака разных типов с лагранжианом (15) совпадает с группой внутренней симметрии системы (1) с лагранжианом (3).

Квантовый случай

Выясним, сохраняется ли установленная выше $SO(3,2)$ -симметрия системы (1) на квантовом уровне. Рассмотрим сначала систему (1) с лагранжианом (3). Переведем генераторы (12) из базиса (5) в базис

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) - \text{столбец}, \quad (21)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4$ ($i = 1, 2$). В результате получим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma'_2 &= -i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_3 = -i\gamma_5\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_4 &= \gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad \Gamma'_5 = -i\gamma_4 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_2\Gamma'_5 &= i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ i\Gamma'_4\Gamma'_5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \quad i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} &= -i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \quad i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Затем разложим ψ_i и $\bar{\psi}_i$ по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (1) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина $s = 1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_s a_{is} \psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+ \psi_{is}^{(-)}, \\ \bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^+ \bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is} \bar{\psi}_{is}^{(-)}. \end{aligned} \quad (23)$$

При квантовании коэффициенты разложения $a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is}$ принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутирующие соотношения (статистика Ферми–Дирака)

$$\begin{aligned} [a_{1s}(p), a_{1s'}^{(+)}(p')]_+ &= [b_{1s}(p), b_{1s'}^{(+)}(p')]_+ = \delta_{ss'} \delta(p - p'), \\ [a_{2s}(p), a_{2s'}^{(+)}(p')]_+ &= [b_{2s}(p), b_{2s'}^{(+)}(p')]_+ = -\delta_{ss'} \delta(p - p'), \end{aligned} \quad (24)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (24) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (22), надо установить соответст-

вующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базе (21) операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_4 &= \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1), \\ \hat{S}_3 &= \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1), \\ \hat{\Pi} &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1).\end{aligned}\quad (25)$$

Располагая теперь операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (25), и применяя к нему (столбцу) преобразования $I^0 + \Omega_A I^A$, находим соответствующие трансформационные свойства этих операторов. В итоге для генераторов (22) получим:

$$\begin{aligned}a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2si\omega b_{2,s}, \quad (b'_{1,s})' = b_{1,s}^+ - 2si\omega a_{2,s}^+, \\ (a'_{2,s})' &= a_{2,s}^+ - 2si\omega b_{1,s}^+, \quad b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{1,s},\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}(a'_{1,s})' &= a_{1,s}^+ + 2si\omega b_{2,s}^+, \quad b'_{1,s} = b_{1,s} + 2si\omega a_{2,s}, \\ a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2si\omega b_{1,s}, \quad (b'_{2,s})' = b_{2,s}^+ + 2si\omega a_{1,s}^+, \\ a'_{1,s} &= a_{1,s} + 2s\omega b_{1,s}, \quad (b'_{1,s})' = b_{1,s}^+ + 2s\omega a_{1,s}^+, \\ (a'_{2,s})' &= a_{2,s}^+ + 2s\omega b_{2,s}^+, \quad b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s},\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}(a'_{1,s})' &= a_{1,s}^+ + 2s\omega b_{1,s}^+, \quad b'_{1,s} = b_{1,s} + 2s\omega a_{1,s}, \\ a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s}, \quad (b'_{2,s})' = b_{2,s}^+ + 2s\omega a_{2,s}^+, \\ a'_{1,s} &= a_{1,s} + 2si\omega b_{1,s}, \quad (b'_{1,s})' = b_{1,s}^+ + 2si\omega a_{1,s}^+, \\ (a'_{2,s})' &= a_{2,s}^+ - 2si\omega b_{2,s}^+, \quad b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s},\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}(a'_{1,s})' &= a_{1,s}^+ - 2si\omega b_{1,s}^+, \quad b'_{1,s} = b_{1,s} - 2si\omega a_{1,s}, \\ a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s}, \quad (b'_{2,s})' = b_{2,s}^+ + 2si\omega a_{2,s}^+, \\ a'_{1,s} &= a_{1,s} - \omega a_{1,s}, \quad (b'_{1,s})' = b_{1,s}^+ - \omega b_{1,s}^+, \\ (a'_{2,s})' &= a_{2,s}^+ - \omega a_{2,s}^+, \quad b'_{2,s} = b_{2,s} - \omega b_{2,s},\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}(a'_{1,s})' &= a_{1,s}^+ + \omega a_{1,s}^+, \quad b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{1,s}, \\ a'_{2,s} &= a_{2,s} + \omega a_{2,s}, \quad (b'_{2,s})' = b_{2,s}^+ + \omega b_{2,s}^+, \\ a'_{1,s} &= a_{1,s} + 2s\omega b_{2,s}, \quad (b'_{1,s})' = b_{1,s}^+ + 2s\omega a_{2,s}^+, \\ (a'_{2,s})' &= a_{2,s}^+ + 2s\omega b_{1,s}^+, \quad b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{1,s},\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}(a'_{1,s})' &= a_{1,s}^+ + 2s\omega b_{2,s}^+, \quad b'_{1,s} = b_{1,s} + 2s\omega a_{2,s}, \\ a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2s\omega b_{1,s}, \quad (b'_{2,s})' = b_{2,s}^+ + 2s\omega a_{1,s}^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2si\omega b_{1,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ - 2si\omega a_{1,s}^+, \\
 (a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ - 2si\omega b_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s}, \\
 (a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ + 2si\omega b_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + 2si\omega a_{1,s}, \\
 a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ + 2si\omega a_{2,s}^+,
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2s\omega b_{1,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ - 2s\omega a_{1,s}^+, \\
 (a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ + 2s\omega b_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s}, \\
 (a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ - 2s\omega b_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - 2s\omega a_{1,s}, \\
 a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ + 2s\omega a_{2,s}^+,
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{1,s} &= a_{1,s} - \omega a_{2,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ - \omega b_{2,s}^+, \\
 (a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ - \omega a_{1,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - \omega b_{1,s}, \\
 (a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ + \omega a_{2,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + \omega b_{2,s}, \\
 a'_{2,s} &= a_{2,s} + \omega a_{1,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ + \omega b_{1,s}^+,
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{1,s} &= a_{1,s} + i\omega a_{2,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ + i\omega b_{2,s}^+, \\
 (a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ - i\omega a_{1,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - i\omega b_{1,s}, \\
 (a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ + i\omega a_{2,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + i\omega b_{2,s}, \\
 a'_{2,s} &= a_{2,s} - i\omega a_{1,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ - i\omega b_{1,s}^+,
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{1,s} &= a_{1,s} - \omega a_{1,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ - \omega b_{1,s}^+, \\
 (a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ + \omega a_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + \omega b_{2,s}, \\
 (a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ + \omega a_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + \omega b_{1,s}, \\
 a'_{2,s} &= a_{2,s} - \omega a_{2,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ - \omega b_{2,s}^+.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Проверка показывает, что инвариантность условий квантования (24) имеет место для четырех генераторов Γ'_2 , $i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, $i\Gamma'_2\Gamma'_5$ и Γ'_5 (преобразования (26), (29), (30), (35)), которым соответствуют мнимые параметры $\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[34]}$. Первые три генератора определяют внутреннюю симметрию квантовой (статистика Ферми–Дирака) теории 8-компонентного дираковского поля с лагранжианом (3). Генератор Γ'_5 соответствуют фазовому преобразованию $\psi_1 \rightarrow \psi_1 e^{i\varphi}$, $\psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-i\varphi}$.

Кроме того, для рассматриваемого поля возможно физически непротиворечивое квантование по статистике Бозе–Эйнштейна, которое осуществляется с помощью коммутационных соотношений

$$\begin{aligned}
 [a_{1s}(p), a_{1s'}^{(+)}(p')]_- &= [b_{2s}(p), b_{2s'}^{(+)}(p')]_- = \delta_{ss'} \delta(p-p'), \\
 [a_{2s}(p), a_{2s'}^{(+)}(p')]_- &= [b_{1s}(p), b_{1s'}^{(+)}(p')]_- = -\delta_{ss'} \delta(p-p').
 \end{aligned} \tag{36}$$

Как показывает непосредственная проверка, перестановочные соотношения (36) инвариантны относительно преобразований, задаваемых генераторами

$$\Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5, i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \quad (37)$$

которым соответствуют 4 вещественных ($\omega_3, \omega_4, \omega_{35}, \omega_{45}$) и 2 мнимых ($\omega_5, \omega_{[34]}$) параметра. Следовательно, внутренняя симметрия квантовой формулировки исследуемого дираковского поля при его квантовании по статистике Бозе–Эйнштейна описывается группой, изоморфной группе $SO(2,2)$.

Рассмотрим теперь систему (14) с лагранжианом (15). Генераторы (12) для системы (14) в базисе (21) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Gamma'_2 &= -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3, & \Gamma'_3 &= \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_4 &= \gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, & \Gamma'_5 &= -\gamma_4 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_2\Gamma'_5 &= i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3, & i\Gamma'_3\Gamma'_5 &= i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ i\Gamma'_4\Gamma'_5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, & i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} &= i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_5, \\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} &= -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5, & i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} &= i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (38)$$

Квантовая формулировка дираковского поля, описываемого системой (14), базируется на антикоммутирующих соотношениях

$$\begin{aligned} [a_{1s}(p), a_{1s}^{(+)}(p')]_+ &= [b_{1s}(p), b_{1s}^{(+)}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p-p'), \\ [a_{2s}(p), a_{2s}^{(+)}(p')]_+ &= [b_{2s}(p), b_{2s}^{(+)}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p-p'). \end{aligned} \quad (39)$$

Операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина \hat{S}_3 и внутренней четности $\hat{\Pi}$ в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_4 &= \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1), \\ \hat{S}_3 &= \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1), \\ \hat{\Pi} &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1). \end{aligned} \quad (40)$$

Поступая далее аналогично п. 3, получим следующие формулы преобразования для операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + 2si\omega a_{2s}, & (b'_{1s})^+ &= b_{1s}^+ + 2si\omega b_{2s}^+, \\ (a'_{2s})^+ &= a_{2s}^+ + 2si\omega a_{1s}^+, & b'_{2s} &= b_{2s} + 2si\omega b_{1s}, \\ (a'_{1s})^+ &= a_{1s}^+ - 2si\omega a_{2s}^+, & b'_{1s} &= b_{1s} - 2si\omega b_{2s}, \\ a'_{2s} &= a_{2s} - 2si\omega a_{1s}, & (b'_{2s})^+ &= b_{2s}^+ - 2si\omega b_{1s}^+, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} - 2s\omega b_{1s}, & (b'_{1s})^+ &= b_{1s}^+ - 2s\omega a_{1s}^+, \\ (a'_{2s})^+ &= a_{2s}^+ - 2s\omega b_{2s}^+, & b'_{2s} &= b_{2s} - 2s\omega a_{2s}, \\ (a'_{1s})^+ &= a_{1s}^+ - 2s\omega b_{1s}^+, & b'_{1s} &= b_{1s} - 2s\omega a_{1s}, \\ a'_{2s} &= a_{2s} - 2s\omega b_{2s}, & (b'_{2s})^+ &= b_{2s}^+ - 2s\omega a_{2s}^+, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} + 2si\omega b_{1,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ + 2si\omega a_{1,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ - 2si\omega b_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ - 2si\omega b_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - 2si\omega a_{1,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ + 2si\omega a_{2,s}^+,
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} - \omega a_{1,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ - \omega b_{1,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ - \omega a_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - \omega b_{2,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ + \omega a_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + \omega b_{1,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} + \omega a_{2,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ + \omega b_{2,s}^+,
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2s\omega a_{2,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ - 2s\omega b_{2,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ - 2s\omega a_{1,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - 2s\omega b_{1,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ - 2s\omega a_{2,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - 2s\omega b_{2,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} - 2s\omega a_{1,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ - 2s\omega b_{1,s}^+,
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2si\omega b_{1,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ - 2si\omega a_{1,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ - 2si\omega b_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ + 2si\omega b_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + 2si\omega a_{1,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ + 2si\omega a_{2,s}^+,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} - 2s\omega b_{1,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ - 2s\omega a_{1,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ + 2s\omega b_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ - 2s\omega b_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - 2s\omega a_{1,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ + 2s\omega a_{2,s}^+,
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} + \omega b_{2,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ + \omega a_{2,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ + \omega b_{1,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + \omega a_{1,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ - \omega b_{2,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - \omega a_{2,s},
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
a'_{2,s} &= a_{2,s} - \omega b_{1,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ - \omega a_{1,s}^+, \\
a'_{1,s} &= a_{1,s} - i\omega b_{2,s}, & (b_{1,s}^+)' &= b_{1,s}^+ - i\omega a_{2,s}^+, \\
(a_{2,s}^+)' &= a_{2,s}^+ + i\omega b_{1,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + i\omega a_{1,s}, \\
(a_{1,s}^+)' &= a_{1,s}^+ - i\omega b_{2,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} - i\omega a_{2,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} + i\omega b_{1,s}, & (b_{2,s}^+)' &= b_{2,s}^+ + i\omega a_{1,s}^+,
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1,s} &= a_{1,s} - \omega a_{1,s}, & (b'_{1,s})^+ &= b_{1,s}^+ - \omega b_{1,s}^+, \\
(a'_{2,s})^+ &= a_{2,s}^+ + \omega a_{2,s}^+, & b'_{2,s} &= b_{2,s} + \omega b_{2,s}, \\
(a'_{1,s})^+ &= a_{1,s}^+ + \omega a_{1,s}^+, & b'_{1,s} &= b_{1,s} + \omega b_{1,s}, \\
a'_{2,s} &= a_{2,s} - \omega a_{2,s}, & (b'_{2,s})^+ &= b_{2,s}^+ - \omega b_{2,s}^+.
\end{aligned} \tag{50}$$

Проверяя инвариантность перестановочных соотношений (39) относительно этих преобразований, получим, что условия (30) инвариантны относительно преобразований с генераторами $\Gamma'_2, \Gamma'_5, i\Gamma'_2\Gamma'_5$ перемешивающих состояния частицы и античастицы из различных уравнений Дирака и образующих группу $SO(3)$, а также преобразования $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, соответствующего в данном случае фазовому преобразованию $\psi_1 \rightarrow \psi_1 e^{i\varphi}$, $\psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-i\varphi}$.

Заклучение

Проведенный в работе анализ показывает, что внутренняя симметрия системы двух одинаковых уравнений Дирака с разностью лагранжианов и системы двух уравнений Дирака разных типов на классическом уровне совпадают и описываются группой $SO(3,2)$. Для квантового поля в первом случае «выживает» группа $SO(2,1)$, во втором – $SO(3)$. В частности, это приводит к возможности рассмотрения внутренней симметрии $SO(3)$ в теории двух полей Дирака разных типов и может оказаться методом описания и исследования новых физических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч.1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 5–10
2. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009, № 2. – С. 46–51
3. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
4. Стражев, В.И. О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.
5. Фушич, В.И. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака / В.И. Фушич, А.Г. Никитин // ЭЧАЯ. – 1983. – Т. 14. – № 1. – С. 5–57.
6. Нишиджима, К. Фундаментальные частицы / К. Нишиджима. – Москва: Изд-во «Мир», 1965. – 462 с.

P.P. Andrusевич, V.I. Strazhev. On Inner Symmetry of Dirac Fields (Part 2)

The research on symmetric properties of Lagrange formula of Dirac fields which was started in the previous papers of the authors is continued. In the framework of material description the system of two Dirac equations of one type with Lagrange and the system of two Dirac equations of different types are considered. The comparative analysis of inner symmetries in the given systems in classical and quantum cases is carried out.

УДК 539.12

М.В. Галынский, Э.А. Кураев

О ВЫЧИСЛЕНИИ СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С УЧАСТИЕМ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ФОТОНОВ В ДИАГОНАЛЬНОМ СПИНОВОМ БАЗИСЕ

В ультрарелятивистском безмассовом случае проведены расчеты дифференциальных сечений процессов квантовой электродинамики $\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$, $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$, $\gamma e \rightarrow e \gamma \gamma$ с участием частично поляризованных фотонов на основе метода вычисления спиральных амплитуд в диагональном спиновом базисе. Для описания частично поляризованных фотонных пучков использован формализм матрицы плотности, выраженной через параметры Стокса.

Введение

В работах [1–3] был развит ковариантный метод вычисления матричных процессов квантовой электродинамики (КЭД) в диагональном спиновом базисе (ДСБ) [4], в котором спиновые 4-векторы частиц s_1 и s_3 с 4-импульсами p_1 и p_3 ($s_1 p_1 = s_3 p_3 = 0$, $s_1^2 = s_3^2 = -1$) принадлежат гиперплоскости, образованной 4-векторами p_1 и p_3 :

$$s_1 = -\frac{(v_1 v_3) v_1 - v_3}{\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}}, \quad s_3 = \frac{(v_1 v_3) v_3 - v_1}{\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}}, \quad v_1 = p_1 / m_1, \quad v_3 = p_3 / m_3. \quad (1)$$

В рассматриваемом спиновом базисе операторы проекции спина σ_1 и σ_3 , а также повышающие и понижающие операторы $\sigma_1^{\pm\delta}$ и $\sigma_3^{\pm\delta}$ для первой и третьей частиц совпадают и в случае дираковских частиц имеют вид [1–3]:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 = \sigma_3 = \gamma^5 \hat{s}_1 \hat{v}_1 = \gamma^5 \hat{s}_3 \hat{v}_3 = \gamma^5 \hat{n}_3 \hat{n}_0 = i \hat{n}_2 \hat{n}_1, \\ \sigma^{\pm\delta} &= \sigma_1^{\pm\delta} = \sigma_3^{\pm\delta} = i / 2 \gamma^5 \hat{n}_{\pm\delta}, \quad n_{\pm\delta} = n_1 \pm i \delta n_2, \quad \delta = \pm 1, \\ \sigma u^\delta(p_i) &= \delta u^\delta(p_i), \quad \sigma^{\pm\delta} u^{\mp\delta}(p_i) = u^{\pm\delta}(p_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^\delta(p_i) = u^\delta(p_i, s_i)$ ($i = 1, 3$) – биспиноры 1-ой и 3-ей частиц. В (2) для построения повышающих и понижающих спиновых операторов использован ортонормированный базис векторов (ОБВ) $n_A, n_A n_B = g_{AB}$ ($A, B = 0, 1, 2, 3$)

$$n_1 = [n_0 \cdot n_3]^\times n_2, \quad n_2 = [p_1 \cdot p_3]^\times r / \rho, \quad n_3 = \frac{(p_3 - p_1)}{\sqrt{-(p_3 - p_1)^2}}, \quad n_0 = \frac{(p_3 + p_1)}{\sqrt{(p_3 + p_1)^2}}, \quad (3)$$

где $n_\delta = n_1 + i \delta n_2$, а r – 4-импульс частицы, участвующей в реакции, отличный от p_1 и p_3 , ρ определяется из условий нормировки $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = -n_0^2 = -1$. Для них выполняется соотношение полноты

$$n_0 \cdot n_0 - n_1 \cdot n_1 - n_2 \cdot n_2 - n_3 \cdot n_3 = g. \quad (4)$$

Матричные элементы процессов КЭД имеют вид

$$M^{\pm\delta, \delta} = u^{\mp\delta}(p_3) Q u^\delta(p_1), \quad (5)$$

где Q – оператор взаимодействия, а $u^\delta(p_1)$ и $u^{\pm\delta}(p_3)$ – биспиноры начального и конечного состояний электрона, $\bar{u}^\delta(p_i) u^\delta(p_i) = m$, $p_i^2 = m^2$, ($i = 1, 3$).

В ковариантном подходе Богуша–Федорова [5] расчет матричных элементов, имеющих вид (5), сводится к операции вычисления шпура

$$M^{\pm\delta,\delta} = \text{Tr}(P_{31}^{\pm\delta,\delta} Q), P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^{\pm\delta}(p_3), \quad (6)$$

$$P_{31}^{\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^\delta(p_3) = u^\delta(p_1) \bar{u}^\delta(p_1) T_{13} = \tau_1^\delta T_{13}, \quad (7)$$

$$P_{31}^{-\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^{-\delta}(p_3) = \sigma^{+\delta} u^{-\delta}(p_1) \bar{u}^{-\delta}(p_3) = \sigma^{+\delta} P_{31}^{-\delta,-\delta}, \quad (8)$$

где $\tau_1^\delta = u^\delta(p_1) \cdot \bar{u}^\delta(p_1)$ – проективный оператор [5]:

$$\tau_1^\delta = 1/4(m + \hat{p}_1)(1 - \delta\gamma^5 \hat{s}_1).$$

Явный вид для операторов $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$ (7), (8) в ДСБ в случае переходов без переворота ($M^{\delta,\delta}$) и с переворотом спина ($M^{-\delta,\delta}$) был получен в работах [1–3]

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = (\xi_+ + m \hat{n}_0 - \xi_- \hat{n}_3 \hat{n}_0 + \delta\gamma^5 (\xi_- - m \hat{n}_3 - \xi_+ \hat{n}_3 \hat{n}_0)), \quad (9)$$

$$4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta (\xi_- + m \hat{n}_3 + \xi_+ \delta\gamma^5) \hat{n}_\delta, \xi_\pm = \sqrt{(p_1 p_3 \pm m^2)/2}. \quad (10)$$

Для операторов $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$ справедливо другое, эквивалентное представление [3]

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = (\hat{p}_1 + m) \left(\frac{1}{\sqrt{2(p_1 p_3 + m^2)}} - \frac{\delta\gamma^5}{\sqrt{2(p_1 p_3 - m^2)}} \right) (\hat{p}_3 + m), \quad (11)$$

$$4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\frac{\delta(\hat{p}_1 + m)}{rn_1} \left[\frac{1}{\sqrt{2(p_1 p_3 - m^2)}} \left(\hat{r} - m \frac{(p_1 + p_3)r}{p_1 p_3 + m^2} \right) - \frac{\delta\gamma^5}{\sqrt{2(p_1 p_3 + m^2)}} \left(\hat{r} + m \frac{(p_3 - p_1)r}{p_1 p_3 - m^2} \right) \right] (\hat{p}_3 + m), \quad (12)$$

где rn_1 вычисляется с помощью соотношения полноты (4): $(rn_1)^2 = (rn_0)^2 - (rn_3)^2 - r^2$. Представление (11–12) содержит дираковские операторы лишь от 4-импульсов частиц p_1, p_3, r ; кроме того, структура операторов $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$ (11–12) такова, что для них автоматически выполняются уравнения Дирака: $(\hat{p}_1 - m)P_{31}^{\pm\delta,\delta} = P_{31}^{\pm\delta,\delta}(\hat{p}_3 - m) = 0$. Эта идея была положена в основу вывода формул (11–12).

Расчет матричных элементов процессов КЭД в безмассовом случае

В ультррелятивистском пределе, когда массами частиц можно пренебречь ($p_i^2 = r^2 = 0, i = 1, 3$), выражения для операторов (9–10) и (11–12) принимают вид:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = \xi(1 + \delta\gamma^5)(1 + \hat{n}_0 \hat{n}_3), 4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta\xi(1 + \delta\gamma^5) \hat{n}_\delta, \xi = \sqrt{p_1 p_3 / 2}, \quad (13)$$

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = \frac{(1 + \delta\gamma^5) \hat{p}_1 \hat{p}_3}{\sqrt{2p_1 p_3}}, 4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta \frac{(1 + \delta\gamma^5) \hat{p}_1 \hat{r} \hat{p}_3}{\sqrt{2p_1 r \cdot 2p_3 r}}. \quad (14)$$

До сих пор наше рассмотрение относилось к случаю, когда в начальном и конечном состояниях были только электроны. Если одно состояние является электронным, а второе позитронным, то амплитуда процесса будет иметь вид [6]

$$M_{31}^{\pm\delta,\delta} = \left[\frac{\bar{u}^{\pm\delta}(-p_3) Q u^\delta(p_1)}{\bar{u}^{\pm\delta}(p_3) Q u^\delta(-p_1)} \right], \quad (15)$$

где $u^\delta(-p_1)$ и $\bar{u}^{\pm\delta}(-p_3)$ – биспиноры позитрона в конечном и начальном состояниях,

$\bar{u}^\delta(-p_i)u^\delta(-p_i) = -m$ ($i=1,3$). При этом верхняя амплитуда в (15) соответствует процессу аннигиляции, а нижняя – образованию пары. Для построения операторов

$$P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(p_1)\bar{u}^{\pm\delta}(-p_3), \quad P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(-p_1)\bar{u}^{\pm\delta}(p_3),$$

с помощью которых нахождение матричных элементов (5) сводится к вычислению следов $M^{\pm\delta,\delta} = (P_{31}^{\pm\delta,\delta}Q)_t$, необходимо воспользоваться связью между биспинорами позитрона и электрона в ДСБ [1–3]

$$u^\delta(-p) = -\delta \gamma^5 u^{-\delta}(p), \quad \bar{u}^\delta(-p) = \bar{u}^{-\delta}(p) \delta \gamma^5.$$

В безмассовом случае для описания вектора поляризации $e_{\pm\lambda}$ циркулярно поляризованного фотона с 4-импульсом k , испущенного частицей при переходе $p_1 \rightarrow p_3$, удобно использовать представление группы CALKUL [7] для операторов $\hat{e}_{\pm\lambda}$

$$\hat{e}_{\pm\lambda} = N_{13}(\hat{k}\hat{p}_3\hat{p}_1(1 \mp \lambda\gamma^5) - \hat{p}_3\hat{p}_1\hat{k}(1 \pm \lambda\gamma^5)), \quad N_{13}^{-1} = 4(p_1p_3 \cdot p_1k \cdot p_3k)^{1/2}. \quad (16)$$

С помощью (16) нетрудно убедиться в справедливости соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\pm\lambda_1}(k_1)u^\delta(p_1) &= -(1 \pm \delta\lambda_1)2p_1k_1 N_1\hat{p}_2 u^\delta(p_1), \\ \hat{e}_{\pm\lambda_2}(k_2)v^\delta(q_+) &= -(1 \mp \delta\lambda_2)2q_+k_2 N_2\hat{q}_- v^\delta(q_+), \\ \bar{u}^\delta(p_2)\hat{e}_{\pm\lambda_1}(k_1) &= +(1 \pm \delta\lambda_1)2p_2k_1 N_1\bar{u}^\delta(p_2)\hat{p}_1, \\ \bar{u}^{-\delta}(p_2)\hat{e}_{\pm\lambda_2}(k_2) &= +(1 \mp \delta\lambda_2)2p_2k_2 N_2\bar{u}^{-\delta}(p_2)\hat{p}_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения (13), (14), (16) составляют основу для вычисления матричных элементов процессов КЭД в ультрарелятивистском, безмассовом случае. Ниже они будут использованы для расчета матричных элементов процессов КЭД второго и третьего порядка по теории возмущений ($\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$, $\gamma e \rightarrow e\gamma\gamma$), что позволит провести расчеты дифференциальных сечений этих процессов для случая, когда фотоны являются частично поляризованными. Для описания частично поляризованных фотонных пучков будет использован традиционный формализм поляризационной матрицы плотности, выраженной через параметры Стокса.

Процесс комптоновского рассеяния: $\gamma e \rightarrow \gamma e$

В наинизшем порядке по теории возмущений процессу комптоновского рассеяния

$$\gamma(k_1, \lambda_1) + e^-(p_1, \lambda_e) \rightarrow e^-(p_3, \lambda_e) + \gamma(k_2, \lambda_2) \quad (18)$$

соответствуют две диаграммы, матричные элементы которых имеют вид

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e} = 4\pi\alpha\bar{u}^{-\lambda_e}(p_3) \left[\hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1}{\chi} \hat{e}_{\lambda_1} + \hat{e}_{\lambda_1} \frac{\hat{p}_3 - \hat{k}_1}{-\chi'} \hat{e}_{\lambda_2}^* \right] u^{\lambda_e}(p_1), \quad (19)$$

где $\chi = 2p_1k_1 = 2p_3k_2$, $\chi' = 2p_1k_2 = 2p_3k_1$, а величины $\lambda_i = \pm 1$ описывает спиральные состояния частиц. Действуя операторами \hat{e}_{λ_1} и $\hat{e}_{\lambda_2}^*$ на биспиноры $u^{\lambda_e}(p_1)$ и $\bar{u}^{-\lambda_e}(p_3)$, согласно (17), и используя уравнение Дирака, матричный элемент $M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e}$ (19) можно привести к виду

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e} = 4\pi\alpha N_1 N_2 s (d_1^+ d_2^+ \chi + d_1^- d_2^- \chi') \times \bar{u}^{-\lambda_e}(p_3) \hat{k} u^{\lambda_e}(p_1), \quad d_{1,2}^\pm = 1 \pm \lambda_e \lambda_{1,2}. \quad (20)$$

В результате простых вычислений для амплитуд $M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e}$ (19) получим

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e} = -4\pi\alpha (1 + \lambda_1\lambda_2) (\lambda_e(\chi + \chi') - \lambda_1(\chi - \chi')) / (2\sqrt{\chi\chi'}). \quad (21)$$

Очевидно, что матричные элементы (21) для комптоновского рассеяния являются вещественными и обращаются в нуль, если спиральности фотонов противоположны. Все отличные от нуля амплитуды имеют вид

$$M_{++}^+ = -M_{--}^- = -2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi'/\chi}, M_{--}^+ = -M_{++}^- = -2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi/\chi'}. \quad (22)$$

Для вычисления дифференциального сечения процесса в случае частично поляризованных фотонных пучков с импульсами k_i ($i=1,2$) будем использовать поляризационную матрицу плотности $\rho_i = \rho_i(k_i)$ в спиральном представлении, которая выражается через параметры Стокса $\xi^{(i)}$ следующим образом [6]:

$$\rho_i = \rho_i(k_i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_2^{(i)} & i\xi_1^{(i)} - \xi_3^{(i)} \\ -i\xi_1^{(i)} - \xi_3^{(i)} & 1 - \xi_2^{(i)} \end{pmatrix}, \rho_i^+ = \rho_i, \text{Tr}(\rho_i) = 1, \quad (23)$$

где символ «+» есть операция эрмитовского сопряжения. Введем 2×2 матрицу, построенную из амплитуд (22)

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{++} & m_{+-} \\ m_{-+} & m_{--} \end{pmatrix}, m_{\pm\pm} = M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e} (\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1).$$

Тогда расчет вероятности процесса (18) сведется к вычислению шпура от произведения следующих матриц:

$$|M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_e}|^2 \rightarrow W_1 = \text{Tr}(\tilde{\rho}_1 M_1 \tilde{\rho}_2 M_1^\dagger). \quad (24)$$

В результате для дифференциального сечения получим следующее выражение:

$$\frac{d\sigma_{\xi_1\xi_2\xi_e}^{\gamma e \rightarrow \gamma e}}{d\Omega_\gamma} = \frac{\alpha^2}{8\chi} \{ (1 + \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)})R_+ + 2(\xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)}\xi_3^{(2)}) + \lambda_e(\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)})R_- \}, \quad (25)$$

где $R_\pm = (\chi^2 \pm \chi'^2) / \chi\chi'$. Для сечений с учетом поляризаций только фотонов будем иметь результат, совпадающий с [6] в безмассовом пределе

$$\frac{d\sigma_{\xi_1\xi_2}^{\gamma e \rightarrow \gamma e}}{d\Omega_\gamma} = \frac{\alpha^2}{4\chi} \{ (1 + \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)})R_+ + 2(\xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)}\xi_3^{(2)}) \}. \quad (26)$$

В случае, когда конечный фотон не поляризован ($\xi_2 = 0$), из (25) для дифференциального сечения получим

$$d\sigma_{\lambda_e\xi_1}^{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha^2}{4\chi} \left[\frac{\chi^2 + \chi'^2}{\chi\chi'} + \xi_2^{(1)}\lambda_e \frac{\chi^2 - \chi'^2}{\chi\chi'} \right] d\Omega_\gamma. \quad (27)$$

Наконец, в случае, когда все частицы неполяризованы, имеем результат, совпадающий с [6] в безмассовом пределе

$$\frac{d\sigma^{\gamma e \rightarrow \gamma e}}{d\Omega_\gamma} = \frac{\alpha^2}{2\chi} R_+.$$

Выражение (25) позволяет определить параметры Стокса испущенного фотона как функцию от параметров Стокса ($\xi_j^{(1)}$) начального фотона с 4-импульсом k_1

$$\xi_{1,3}^{(f)} = \frac{2\xi_{1,3}^{(1)}}{R_+ + \lambda_e\xi_2^{(1)}R_-}, \quad \xi_2^{(f)} = \frac{R_+\xi_2^{(1)} + \lambda_e R_-}{R_+ + \lambda_e\xi_2^{(1)}R_-}, \quad (28)$$

откуда следует, что если начальный фотон был полностью циркулярно поляризован ($\xi_2^{(1)} = \pm 1$), то независимо от того, какую спиральность имел начальный электрон, спи-

ральность фотона в конечном состоянии будет равна спиральности начального фотона. Из выражения (28) следует также, что если начальный фотон был лишь частично линейно поляризован ($\xi_2^{(1)} = 0$), то в результате рассеяния степень линейной поляризации уменьшается

$$P_l^{(f)} = \frac{2}{R_+} P_l^{(i)}, \quad P_l^{(i)} = \sqrt{(\xi_1^{(1)})^2 + (\xi_3^{(1)})^2}, \quad 2/R_+ \leq 1.$$

Процесс рождения пары двумя фотонами: $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Матричные элементы процесса $\gamma(k_1) + \gamma(k_2) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-)$ имеют вид:

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = 4\pi\alpha\bar{u}_\delta(q_-) \left[\hat{e}_{\lambda_1} \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_1}{-\chi_{1-}} \hat{e}_{\lambda_2} + \hat{e}_{\lambda_2} \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_1}{-\chi_{1+}} \hat{e}_{\lambda_1} \right] v_\delta(q_+), \quad (29)$$

где $\chi_{1\pm} = 2k_1q_\pm$, $\chi_{2\pm} = 2k_2q_\pm$, $\lambda_1, \lambda_2, \delta = \pm 1$, а $\hat{e}_\lambda, \bar{u}_\delta, v_\delta$ описывают определенные спиральные состояния фотонов и фермионов. Действуя операторами \hat{e}_{λ_1} и \hat{e}_{λ_2} на биспиноры $v_\delta(q_+)$ и $\bar{u}_\delta(q_-)$, согласно (17), и используя уравнение Дирака, матричный элемент $M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ (29) можно привести к виду

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = -4\pi\alpha N_1 N_2 s_1 (d_1^- d_2^+ \chi_{1+} - d_1^+ d_2^- \chi_{1-}) \times \bar{u}^\delta(q_-) \hat{k}_1 v^\delta(q_+), \quad d_{1,2}^\pm = 1 \pm \delta\lambda_{1,2}. \quad (30)$$

В результате простых вычислений для амплитуд процесса $M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ (31) получим

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = -4\pi\alpha (1 - \lambda_1\lambda_2) (\delta(\chi_{1+} - \chi_{1-}) - \lambda_1(\chi_{1+} + \chi_{1-})) / (2\sqrt{\chi_{1+}\chi_{1-}}). \quad (31)$$

Очевидно, что матричные элементы (31) являются действительными и обращаются в нуль, если спиральности фотонов равны. Все отличные от нуля амплитуды имеют вид

$$M_{+-}^+ = -M_{-+}^- = 2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi_{1+}/\chi_{1-}}, \quad M_{+-}^- = -M_{-+}^+ = 2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi_{1-}/\chi_{1+}}. \quad (32)$$

Введем 2×2 матрицу, построенную из амплитуд (32)

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{++} & m_{+-} \\ m_{-+} & m_{--} \end{pmatrix}, \quad m_{\pm\pm} = M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta (\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1).$$

Тогда расчет вероятности процесса сведется к вычислению шпура от произведения следующих матриц

$$|M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta|^2 \rightarrow W_1 = \text{Tr}(\tilde{\rho}_1 M_1 \rho_2 M_1^\dagger), \quad (33)$$

где ρ_i – поляризационные матрицы плотности фотонов с импульсами k_i , $\tilde{\rho}_1$ есть матрица, транспонированная к ρ_1 . Дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\xi_1\xi_2\delta}^{\gamma\gamma \rightarrow \mu\bar{\mu}}}{d\Omega_\mu} = \frac{\alpha^2}{4s} \{ (1 - \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)})R_+ - 2(\xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)}\xi_3^{(2)}) - \delta(\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)})R_- \}, \quad (34)$$

$$R_\pm = \frac{\chi_{1+}^2 \pm \chi_{1-}^2}{\chi_{1-}\chi_{1+}}, \quad \chi_{1\pm} = \chi_{2\mp}, \quad s = 2k_1k_2. \quad (35)$$

Для сечений с учетом поляризаций только фотонов имеем

$$\frac{d\sigma_{\xi_1\xi_2}^{\gamma\gamma \rightarrow \mu\bar{\mu}}}{d\Omega_\mu} = \frac{\alpha^2}{2s} \{ (1 - \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)})R_+ - 2(\xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)}\xi_3^{(2)}) \}. \quad (36)$$

В случае, когда все частицы неполяризованы, имеем результат, совпадающий с [6] в безмассовом пределе:

$$\frac{d\sigma^{\gamma\gamma\rightarrow\mu\bar{\mu}}}{d\Omega_{\mu}} = \frac{\alpha^2}{2s} R_+.$$

Процесс аннигиляции пары: $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma\gamma$

Матричные элементы процесса аннигиляции $\mu^+ \mu^-$ пары в два фотона имеют вид:

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = 4\pi\alpha\bar{u}^\delta(-q_+) \left[\hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_1}{-\chi_{1+}} \hat{e}_{\lambda_2}^* + \hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_1}{-\chi_{1-}} \hat{e}_{\lambda_1}^* \right] u^\delta(q_-), \quad (37)$$

где $\chi_{1\pm} = 2k_1q_{\pm}$, $\chi_{2\pm} = 2k_2q_{\pm}$, $\lambda_1, \lambda_2, \delta = \pm 1$.

Действуя операторами $\hat{e}_{\lambda_1}^*$ и $\hat{e}_{\lambda_2}^*$ на биспиноры $u^\delta(q_-)$ и $\bar{u}^\delta(-q_+)$, согласно (17), и используя уравнение Дирака, матричный элемент $M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ (37) можно привести к виду:

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = 4\pi\alpha N_1 N_2 s_1 (d_1^- d_2^+ \chi_{2+} - d_1^+ d_2^- \chi_{2-}) \times \bar{u}^\delta(-q_+) \hat{k}_1 u^\delta(q_-), \quad d_{1,2}^\pm = 1 \pm \delta\lambda_{1,2}. \quad (38)$$

В результате простых вычислений для амплитуд $M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ (38) получим

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta = 4\pi\alpha (1 - \lambda_1\lambda_2) (\delta(\chi_{1-} - \chi_{1+}) - \lambda_1(\chi_{1-} + \chi_{1+})) / (2\sqrt{\chi_{1-}\chi_{1+}}). \quad (39)$$

Очевидно, что матричные элементы (39) являются действительными и обращаются в нуль, если спиральности фотонов равны. Все отличные от нуля амплитуды имеют вид:

$$M_{-+}^- = -M_{+-}^+ = 2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi_{1+}/\chi_{1-}}, \quad M_{-+}^+ = -M_{+-}^- = 2(4\pi\alpha)\sqrt{\chi_{1-}/\chi_{1+}}. \quad (40)$$

Введем 2×2 матрицу, построенную из амплитуд (40):

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{++} & m_{+-} \\ m_{-+} & m_{--} \end{pmatrix}, \quad m_{\pm\pm} = M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta (\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1).$$

Тогда расчет вероятности процесса аннигиляции сведется к вычислению шпура от произведения следующих матриц:

$$|M_{\lambda_1\lambda_2}^\delta|^2 \rightarrow W_1 = \text{Tr}(\rho_1 M_1 \tilde{\rho}_2 M_1^\dagger), \quad (41)$$

где $\tilde{\rho}_2$ есть матрица, транспонированная к ρ_2 . Дифференциальное сечение имеет вид:

$$\frac{d\sigma^{\mu\bar{\mu}\rightarrow\gamma\gamma}}{d\Omega_{k_1}} = \frac{\alpha^2}{8s} \{ (1 - \xi_2^{(1)} \xi_2^{(2)}) R_+ - 2(\xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)} \xi_3^{(2)}) - \delta(\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)}) R_- \}, \quad (42)$$

$$R_{\pm} = \frac{\chi_{1-}^2 \pm \chi_{1+}^2}{\chi_{1-}\chi_{1+}}, \quad \chi_{1\pm} = \chi_{2\mp}. \quad (43)$$

В случае, когда все частицы неполяризованы, имеем результат, совпадающий с [6] в безмассовом пределе:

$$\frac{d\sigma^{\mu\bar{\mu}\rightarrow\gamma\gamma}}{d\Omega_{k_1}} = \frac{\alpha^2}{2s} R_+.$$

Процесс радиационного рождения пары двумя фотонами

В безмассовом случае матричные элементы процесса

$$\gamma(k_1) + \gamma(k_2) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-) + \gamma(k), \quad (44)$$

имеют вид:

$$M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda\delta} = (4\pi\alpha)^{3/2} \bar{u}_\delta(q_-) \times \left[\hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{\hat{q}_- + \hat{k}}{\chi_-} \hat{e}_{\lambda_2} \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_2}{-\chi_{2+}} \hat{e}_{\lambda_2} + \hat{e}_{\lambda_1} \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_1}{-\chi_{1-}} \hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_2}{-\chi_{2+}} \hat{e}_{\lambda_2} + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{e}_{\lambda_1} \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_1}{-\chi_{1-}} \hat{e}_{\lambda_2} \frac{-\hat{q}_+ - \hat{k}}{\chi_+} \hat{e}_{\lambda}^* + \hat{e}_{\lambda}^* \frac{\hat{q}_- + \hat{k}}{\chi_-} \hat{e}_{\lambda_2} \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_1}{-\chi_{1+}} \hat{e}_{\lambda_1} + \\
 & + \hat{e}_{\lambda_2} \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_2}{-\chi_{2-}} \hat{e}_{\lambda}^* \frac{-\hat{q}_+ + \hat{k}_1}{-\chi_{1+}} \hat{e}_{\lambda_1} + \hat{e}_{\lambda_2} \frac{\hat{q}_- - \hat{k}_2}{-\chi_{2-}} \hat{e}_{\lambda_1} \frac{-\hat{q}_+ - \hat{k}}{\chi_+} \hat{e}_{\lambda}^* \left] v_{\delta}(q_+), \right. \\
 & \chi_{1\pm} = 2k_1 q_{\pm}, \quad \chi_{2\pm} = 2k_2 q_{\pm}, \quad \chi_{\pm} = 2k q_{\pm} \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \delta = \pm 1,
 \end{aligned} \tag{45}$$

где $\hat{e}_{\lambda}, \bar{u}_{\delta}, v_{\delta}$ описывают определенные спиральные состояния фотонов и фермионов, для операторов $\hat{e}_{\lambda_i}(k_i)$ будем использовать представление (16)

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_{\lambda}(k) &= N[\hat{q}_- \hat{q}_+ \hat{k} \omega_{-\lambda} - \hat{k} \hat{q}_- \hat{q}_+ \omega_{\lambda}], \quad N = [s_1 \chi_- \chi_+ / 2]^{-1/2}, \\
 \hat{e}_{\lambda_1}(k_1) &= N_1[\hat{q}_- \hat{q}_+ \hat{k}_1 \omega_{-\lambda_1} - \hat{k}_1 \hat{q}_- \hat{q}_+ \omega_{\lambda_1}], \quad N_1 = [s_1 \chi_{1-} \chi_{1+} / 2]^{-1/2}, \\
 \hat{e}_{\lambda_2}(k_2) &= N_2[\hat{q}_- \hat{q}_+ \hat{k}_2 \omega_{-\lambda_2} - \hat{k}_2 \hat{q}_- \hat{q}_+ \omega_{\lambda_2}], \quad N_2 = [s_1 \chi_{2-} \chi_{2+} / 2]^{-1/2}, \\
 s_1 &= 2q_+ q_-, \quad \omega_{\pm\lambda} = (1 \pm \lambda \gamma_5) / 2, \\
 u_{\delta} &= \omega_{\delta} u, \quad v_{\delta} = \omega_{-\delta} v, \quad \bar{u}_{\delta} = \bar{u} \omega_{-\delta}, \quad \bar{v}_{\delta} = \bar{v} \omega_{\delta}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Спиральные амплитуды процесса (44) можно представить в виде

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \delta} = (4\pi\alpha)^{3/2} N N_1 N_2 s_1^2 \bar{u}^{\delta}(q_-) \hat{h} u^{\delta}(-q_+) = (4\pi\alpha)^{3/2} N N_1 N_2 s_1^2 \sqrt{s_1} (h n_{\delta}^*), \tag{47}$$

где n_{δ}^*, h 4-векторы: $n_{\delta}^* = n_1 - i\delta n_2$; n_1 и n_2 4-векторы ортонормированного базиса (3), причем в качестве вспомогательного 4-вектора r выбран вектор 4-импульса конечного фотона k ; 4-вектор h имеет вид

$$\begin{aligned}
 h &= (-\chi_+ d_0^+ d_1^+ d_2^+ + \chi_- d_0^- d_1^- d_2^-) k + \\
 &+ (\chi_{1-} d_0^+ d_1^+ d_2^- - \chi_{1+} d_0^- d_1^- d_2^+) k_1 + \\
 &+ (-\chi_{2+} d_0^- d_1^+ d_2^- + \chi_{2-} d_0^+ d_1^- d_2^+) k_2,
 \end{aligned} \tag{48}$$

где $d_0^{\pm}, d_1^{\pm}, d_2^{\pm}$ – поляризационные множители:

$$d_0^{\pm} = 1 \pm \delta \lambda, \quad d_1^{\pm} = 1 \pm \delta \lambda_1, \quad d_2^{\pm} = 1 \pm \delta \lambda_2.$$

Квадрат модуля матричного элемента (47) можно представить в компактной форме

$$|M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \delta}|^2 = 8(4\pi\alpha)^3 s_1^4 N^2 N_1^2 N_2^2 \times T_{all}, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 T_{all} &= \chi_+ \chi_- (1 + \lambda_1 \lambda_2) (1 + \lambda \lambda_1) [\chi_+^2 + \chi_-^2 - \lambda \lambda (\chi_+^2 - \chi_-^2)] + \\
 &+ \chi_{1+} \chi_{1-} (1 - \lambda_1 \lambda_2) (1 + \lambda \lambda_1) [\chi_{1+}^2 + \chi_2^2 + \lambda \lambda (\chi_{1+}^2 - \chi_{1-}^2)] + \\
 &+ \chi_{2+} \chi_{2-} (1 - \lambda_1 \lambda_2) (1 - \lambda \lambda_1) [\chi_{2+}^2 + \chi_{2-}^2 + \lambda \lambda (\chi_{2+}^2 - \chi_{2-}^2)].
 \end{aligned} \tag{50}$$

Вероятность процесса (44), просуммированная по поляризациям конечных частиц, вычисляется аналогично вероятности процесса (29) по формуле (33). Соответствующее дифференциальное сечение с учетом частичной поляризации у сталкивающихся фотонных пучков имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\xi_1 \xi_2}^{\gamma\gamma \rightarrow \mu\bar{\nu}\gamma} &= \frac{\alpha^3 s_1}{2\pi^2 s} \frac{T_{in}}{D} d\Gamma, \quad D = \chi_- \chi_+ \chi_{1-} \chi_{1+} \chi_{2-} \chi_{2+}, \\
 d\Gamma &= \frac{d^3 q_+}{\varepsilon_+} \frac{d^3 q_-}{\varepsilon_-} \frac{d^3 k}{\omega} \delta^4(k_1 + k_2 - q_+ - q_- - k),
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
T_{in} = & (\xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} + \xi_3^{(1)} \xi_3^{(2)}) (\chi_{1+} \chi_{2+} + \chi_{1-} \chi_{2-}) (\chi_+ \chi_- - \chi_{1+} \chi_{1-} - \chi_{2+} \chi_{2-}) + \\
& + 4(\xi_1^{(1)} \xi_3^{(2)} - \xi_3^{(1)} \xi_1^{(2)}) (\chi_{1+} \chi_{2+} - \chi_{1-} \chi_{2-}) E_q - \\
& - 4\xi_1^{(1)} (\chi_+ \chi_{2-} - \chi_- \chi_{2+}) E_q + 4\xi_1^{(2)} (\chi_+ \chi_{1-} - \chi_- \chi_{1+}) E_q + \\
& + \xi_3^{(1)} (\chi_+ \chi_{2-} + \chi_- \chi_{2+}) (\chi_+ \chi_- - \chi_{1+} \chi_{1-} + \chi_{2+} \chi_{2-}) + \\
& + \xi_3^{(2)} (\chi_+ \chi_{1-} + \chi_- \chi_{1+}) (\chi_+ \chi_- + \chi_{1+} \chi_{1-} - \chi_{2+} \chi_{2-}) + \\
& + \xi_2^{(1)} \xi_2^{(2)} [\chi_+ \chi_- (\chi_+^2 + \chi_-^2) - \chi_{1+} \chi_{1-} (\chi_{1+}^2 + \chi_{1-}^2) - \chi_{2+} \chi_{2-} (\chi_{2+}^2 + \chi_{2-}^2)] + \\
& + \chi_+ \chi_- (\chi_+^2 + \chi_-^2) + \chi_{1+} \chi_{1-} (\chi_{1+}^2 + \chi_{1-}^2) + \chi_{2+} \chi_{2-} (\chi_{2+}^2 + \chi_{2-}^2),
\end{aligned}$$

где $E_q = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\mu k_2^\nu q_+^\rho q_-^\sigma = \frac{S}{2} [q_+ q_-]_z$.

Процесс двойного комптоновского рассеяния: $\gamma e \rightarrow e \gamma \gamma$

В наинизшем порядке по теории возмущений процессу двойного комптоновского рассеяния

$$\gamma(k, \lambda) + e^-(p, \lambda_e) \rightarrow e^-(p', \lambda_e) + \gamma(k_1, \lambda_1) + \gamma(k_2, \lambda_2) \quad (52)$$

соответствуют шесть фейнмановских диаграмм, их матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned}
M_{\lambda\lambda_e}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_e} = & (4\pi\alpha)^{3/2} \bar{u}_{\lambda_e}(p') \times \\
& \times \left[\hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{p}' + \hat{k}_2}{\chi_{2'}} \hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{\hat{p} + \hat{k}}{\chi} \hat{e}_{\lambda} + \hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{\hat{p}' + \hat{k}_1}{-\chi_1'} \hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{p} + \hat{k}}{\chi} \hat{e}_{\lambda} + \right. \\
& + \hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{p}' + \hat{k}_2}{\chi_2'} \hat{e}_{\lambda} \frac{\hat{p} - \hat{k}_1}{-\chi_1} \hat{e}_{\lambda_1}^* + \hat{e}_{\lambda} \frac{\hat{p}' - \hat{k}}{-\chi'} \hat{e}_{\lambda_2}^* \frac{\hat{p} - \hat{k}_1}{-\chi_1} \hat{e}_{\lambda_1}^* + \\
& \left. + \hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{\hat{p}' + \hat{k}_1}{\chi_1'} \hat{e}_{\lambda} \frac{\hat{p} - \hat{k}_2}{-\chi_2} \hat{e}_{\lambda_2}^* + \hat{e}_{\lambda} \frac{\hat{p}' - \hat{k}_1}{-\chi_1'} \hat{e}_{\lambda_1}^* \frac{\hat{p} - \hat{k}_2}{-\chi_2} \hat{e}_{\lambda_2}^* \right] u_{\lambda_e}(p),
\end{aligned} \quad (53)$$

где $\hat{e}_{\lambda_i}, \bar{u}_{\lambda_e}, u_{\lambda_e}$ описывают определенные спиральные состояния фотонов и фермионов ($\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \delta = \pm 1$), а $\chi = 2kp$, $\chi' = 2kp'$, $\chi_i = 2k_i p$, $\chi_i' = 2k_i p'$. Для операторов $\hat{e}_{\lambda_i}(k_i)$ будем использовать представления группы CALKUL [7]

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{\lambda}(k) = & N[\hat{k}\hat{p}'\hat{p}\omega_{-\lambda} - \hat{p}'\hat{p}\hat{k}\omega_{\lambda}], \quad N = [s_1\chi\chi'/2]^{-1/2}, \\
\hat{e}_{\lambda_1}(k_1) = & N_1[\hat{k}_1\hat{p}'\hat{p}\omega_{-\lambda_1} - \hat{p}'\hat{p}\hat{k}_1\omega_{\lambda_1}], \quad N_1 = [s_1\chi_1\chi_1'/2]^{-1/2}, \\
\hat{e}_{\lambda_2}(k_2) = & N_2[\hat{k}_2\hat{p}'\hat{p}\omega_{-\lambda_2} - \hat{p}'\hat{p}\hat{k}_2\omega_{\lambda_2}], \quad N_2 = [s_1\chi_2\chi_2'/2]^{-1/2}, \\
s_1 = & 2pp', \quad \omega_{\pm\lambda} = (1 \pm \lambda\gamma_5)/2.
\end{aligned} \quad (54)$$

С помощью уравнения Дирака матричные элементы (53) можно представить в виде

$$M_{\lambda\lambda_e}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_e} = (4\pi\alpha)^{3/2} N N_1 N_2 s_1^2 \bar{u}_{\lambda_e}(p') \hat{h} u_{\lambda_e}(p).$$

Их вычисление сводится к нахождению тривиального шпура, в результате получим

$$M_{\lambda\lambda_e}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_e} = (4\pi\alpha)^{3/2} N N_1 N_2 s_1^2 \sqrt{s_1} (h n_{\lambda_e}), \quad (55)$$

где h, n_{λ_e} 4-векторы: $n_{\lambda_e} = n_1 + i\lambda_e n_2$, n_1 и n_2 – 4-векторы ортонормированного базиса (3); 4-вектор h имеет вид

$$\begin{aligned}
h = & (\chi_+ d_0^+ d_1^+ d_2^+ + \chi' d_0^- d_1^- d_2^-) k + \\
& + (\chi_1 d_0^- d_1^- d_2^+ + \chi_1' d_0^+ d_1^+ d_2^-) k_1 +
\end{aligned} \quad (56)$$

$$+(\chi_2 d_0^- d_1^+ d_2^- + \chi_1' d_0^+ d_1^- d_2^+) k_2,$$

где $d_0^\pm, d_1^\pm, d_2^\pm$ – поляризационные множители: $d_0^\pm = 1 \pm \lambda_e \lambda, d_1^\pm = 1 \pm \lambda_e \lambda_1, d_2^\pm = 1 \pm \lambda_e \lambda_2$.

Квадрат модуля матричного элемента (55) может быть представлен в виде:

$$|M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \delta}|^2 = 8(4\pi\alpha)^3 s_1^4 N_1^2 N_2^2 \times T_{all}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} T_{all} = & \chi\chi'(1 + \lambda_1 \lambda_2)(1 + \lambda \lambda_1)[\chi^2 + \chi'^2 + \lambda \lambda_e (\chi'^2 - \chi^2)] + \\ & + \chi_1 \chi_1' (1 - \lambda_1 \lambda_2)(1 + \lambda \lambda_1)[\chi_1^2 + \chi_1'^2 + \lambda \lambda_e (\chi_1'^2 - \chi_1^2)] + \\ & + \chi_2 \chi_2' (1 - \lambda_1 \lambda_2)(1 - \lambda \lambda_1)[\chi_2^2 + \chi_2'^2 + \lambda \lambda_e (\chi_2'^2 - \chi_2^2)]. \end{aligned} \quad (58)$$

Введем 2×2 матрицу, построенную из амплитуд (55):

$$M = \begin{pmatrix} m_+^* m_+ & m_+^* m_- \\ m_-^* m_+ & m_-^* m_- \end{pmatrix}, m_\pm = M_{\lambda \lambda_e}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_e} (\lambda = \pm 1).$$

Тогда расчет вероятности процесса (52) в случае частично поляризованных начальных фотонных пучков сведется к вычислению шпура от произведения следующих матриц:

$$|M_{\lambda \lambda_e}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_e}|^2 \rightarrow W = Tr(\rho M),$$

где $\rho = \rho(k)$ – поляризационная матрица плотности начального фотона, (23). В результате для случая, когда начальный электронный пучок является полностью поляризованным, а фотонный пучок поляризован лишь частично, для дифференциального сечения процесса двойного комптоновского рассеяния, просуммированного по поляризациям конечных частиц, имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Gamma_\gamma} = & \frac{1}{2} \frac{\alpha^3}{2\pi^2 \chi D} (\chi\chi'(\chi^2 + \chi'^2) + \chi_1 \chi_1' (\chi_1^2 + \chi_1'^2) + \chi_2 \chi_2' (\chi_2^2 + \chi_2'^2) + \\ & + 4\xi_1 B(\chi_1 \chi_2 - \chi_2 \chi_1) - \xi_3 (\chi_1 \chi_2 + \chi_2 \chi_1) (\chi\chi' - \chi_1 \chi_1' - \chi_2 \chi_2') + \\ & + \lambda_e \xi_2 [\chi\chi'(\chi'^2 - \chi^2) + \chi_1 \chi_1' (\chi_1'^2 - \chi_1^2) + \chi_2 \chi_2' (\chi_2'^2 - \chi_2^2)]), \end{aligned} \quad (59)$$

$$d\Gamma_\gamma = \frac{d^3 p'}{\varepsilon'} \frac{d^3 k_1}{\varepsilon_1} \frac{d^3 k_2}{\varepsilon_2} \delta^4(p + k - p' - k_1 - k_2),$$

где множитель $1/2$ учитывает факт тождественности фотонов в конечном состоянии, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – параметры Стокса начального фотона, λ_e – спиральность начального электрона. Величины B и D в (59) имеют вид: $B = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_2^\mu k_1^\nu p^\rho p'^\sigma$, $D = \chi\chi' \chi_1 \chi_1' \chi_2 \chi_2'$.

Заключение

В настоящей работе в ультрарелятивистском безмассовом случае проведен расчет дифференциальных сечений процессов КЭД $\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$, $\gamma e \rightarrow e\gamma\gamma$ (второго и третьего порядка по теории возмущений) с участием частично поляризованных фотонов на основе последовательного использования метода вычисления матричных элементов (спиральных амплитуд) в ДСБ. В отличие от других стандартных методов используемый подход позволяет представить амплитуды процессов только через скалярные произведения 4-импульсов частиц, участвующих в реакциях и их поляризационные множители. Они имеют компактный вид даже в случае процессов третьего порядка, что свидетельствует о высокой эффективности используемого подхода. Для описания частично поляризованных фотонных пучков использован формализм поляризационной матрицы плотности, выраженной через параметры Стокса. Расчеты процессов второго порядка имеют скорее методический характер. Расчет мат-

ричных элементов (спиральных амплитуд) процессов третьего порядка является оригинальным, также как и расчет вероятности соответствующих процессов, в случае, когда все участвующие в процессах частицы являются полностью спирально поляризованными. Поскольку процессы $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ и $\gamma e \rightarrow \gamma\gamma e$ являются калибровочными для γe - и $\gamma\gamma$ -коллайдеров, то полученные для них дифференциальные сечения могут быть использованы для калибровки светимостей фотонных коллайдеров и измерения поляризации фотонных пучков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галынский, М.В. К расчету матричных элементов в диагональном спиновом базисе / М.В. Галынский, С.М. Сикач // Сб. науч. тр. / Ин-т физики АН БССР. – Минск, 1986. – Вып. 2: Ковариантные методы в теоретической физике. – С. 121–126.
2. Расчет амплитуд и дифференциальных сечений процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ в ультрарелятивистском случае / М.В. Галынский [и др.] // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 95, № 6. – С. 1921–1928.
3. Галынский, М.В. Диагональный спиновый базис и расчет процессов с участием поляризованных частиц / М.В. Галынский, С.М. Сикач // ЭЧАЯ. – 1998. – Т. 29, № 5. – С. 1133–1193.
4. Сикач, С.М. Матричные элементы диагональных амплитуд / С.М. Сикач // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1984. – № 2. – С. 84–93.
5. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
6. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1989. – 724 с.
7. Berends, F. Helicity amplitudes for massless QED / F. Berends [et al.] // Phys. Lett. B. – 1981. – Vol. 105, № 2–3. – P. 215–218.
8. Bartos, E. Calibration processes for photon-photon colliders / E. Bartos [et al.] // Nucl. Phys. B. – 2004. – Vol. 676, № 1–2. – P. 481–490.
9. Bartos, E. The lowest order inelastic QED processes at polarized photon-electron high energy collisions / E. Bartos [et al.] // Nucl. Phys. B. – 2004. – Vol. 676, № 1–2. – P. 390–398.

M.V. Galynskii, E.A. Kuraev. About the Calculation of Differential Sections of the Processes of Quantum Electrodynamics with Participation of Partially Polarized Photons in the Diagonal Spin Basis

In ultrarelativistic massless case the differential sections of the processes of quantum electrodynamics $\gamma e \rightarrow \gamma e$, $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\gamma\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$, $\gamma e \rightarrow e\gamma\gamma$ with participation of partially polarized photons on the basis of calculation method of spiral amplitudes in diagonal spin basis are calculated. For the description of partially polarized photon bunches the formalism of a matrix of the density expressed through the Stokes parameters is used.

УДК 539.21

В.А. Лиопо, А.В. Сабуть, С.С. Секержицкий, В.А. Струк

ХАРАКТЕРИСТИКИ КООРДИНАЦИОННЫХ СФЕР ШАРОВЫХ УПАКОВОК

Для гексагональной плотнейшей упаковки (ГПУ) и гранецентрированной кубической (ГЦК), а также для объемноцентрированной кубической (ОЦК) решетки рассчитаны радиусы координационных сфер, их координационные числа (КЧ) и число атомов в частице, ограниченной N -ой координационной сферой. Расчет выполнен для сфер до сотого номера включительно. Построены диаграммы КЧ и ретикулярных плотностей координационных сфер.

При исследовании веществ с изодесмическими межатомными связями применимы модели шаровых упаковок [1; 2]. Наиболее простым вариантом таких структур являются металлы, которые используются в том числе и в качестве нанонаполнителей при создании композиционных материалов, например, на полимерной основе [3]. Формировать нанокристалл металла можно двумя способами: диспергированием крупного образца или выращиванием наночастиц из расплава, раствора или конденсацией паров. В этом случае метод построения шаровых упаковок позволяет установить габитус наночастиц любого размера. Для упаковок шаровых частиц, в том числе и атомов произвольного типа в объеме, применимо понятие коэффициент компактности, или коэффициент упаковки:

$$P = \frac{\sum_{j=1}^N W_j}{V}, \quad (1)$$

где W_j – объем j -той частицы, N – число частиц, V – объем системы N частиц.

Если рассматривается шаровая упаковка из N частиц с размерами r_j , а n_j – это число j -ых шаров, то

$$P = \frac{4}{V} \pi \sum_{j=1}^m n_j r_j^3,$$

где m – число различных классов крупности, т.е. $j=1\dots m$. Очевидно, что $\sum n_j = N$, где N – общее число всех частиц в системе. Если структура будет находится в состоянии, когда P имеет максимальное значение, то это состояние называется плотнейшей упаковкой.

Для одного и двух слоев шаров плотнейшая упаковка осуществляется единственно возможными взаимораспределениями шаров, приведенными на рисунке 1.

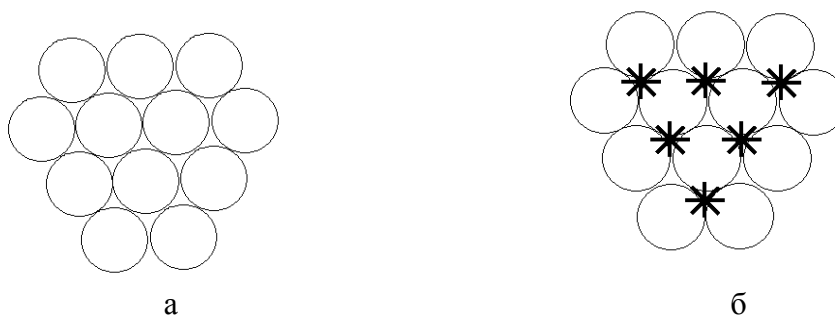
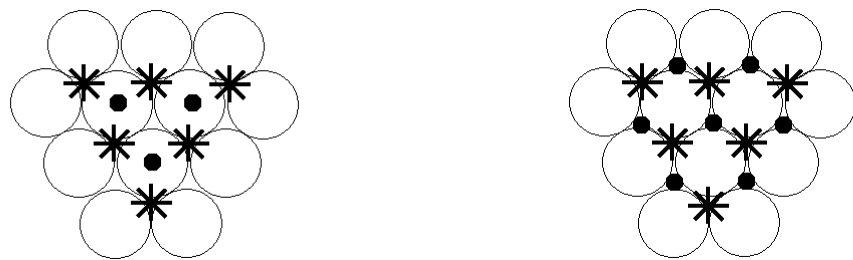


Рисунок 1 – Плоская плотнейшая упаковка (а), * – шары второго слоя (б)

Шары трэцяга слоя могуць быць уложаны в лункі шаров второго слоя двумя способами. Центры шаров третьего слоя находятся в лунках шаров второго слоя, но над центрами шаров первого слоя (рисунок 2, а). То есть последовательность шаров в этой упаковке может быть представлена как ... АВАВАВ..... Упаковка шаров такого типа называется гексагональной плотнейшей упаковкой (ГПУ). Во втором типе плотнейших шаровых упаковок центры шаров третьего слоя находятся в лунках шаров второго слоя над пустотами-лунками шаров первого слоя (рисунок 2, б). Последовательность слоев в такой упаковке имеет вид ...АВСАВС..., а сама эта упаковка называется гранецентрированной кубической (ГЦК). Обе эти плотнейшие упаковки изображены на рисунке 3.



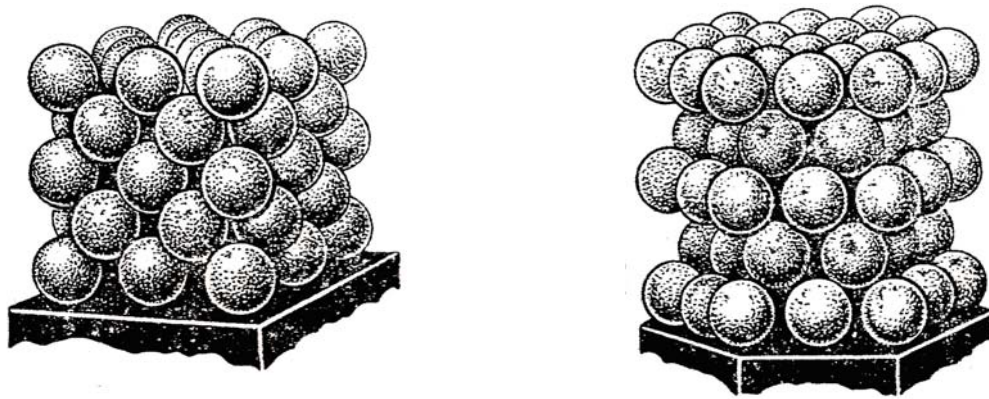
а

б

а) двухслойная (...АВАВАВ...); б) трехслойная (...АВСАВС...)

Центры шаров второго слоя обозначены (*), третьего (●)

Рисунок 2 – Два типа плотнейшей упаковки шаров



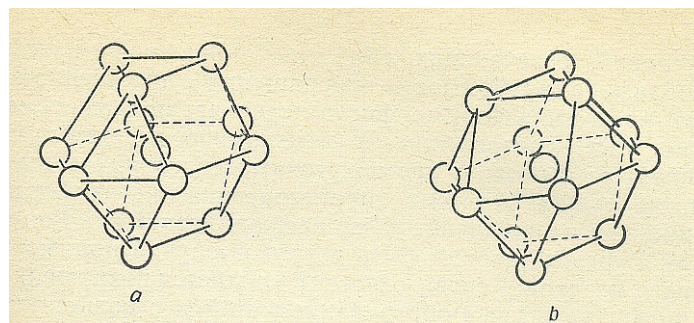
а

б

а) ГПУ, б) ГЦК [1]

Рисунок 3 – Плотнейшие упаковки шаров одинакового размера

Как следует из рисунков 2 и 3, различия в упаковке слоев приводят к изменению взаиморасположения атомов, которые моделируются шарами, уже в ближайшем окружении атома, принятого за центральный. Расстояние от центрального атома до всех соседних атомов одинаковое, то есть центры соседних атомов лежат на сфере, которая называется координационной сферой. Число атомов на координационной сфере называется координационным числом. Радиус первой координационной сферы равен диаметру атома, а координационное число равно 12. Расположения шаров на первой координационной сфере в ГПУ- и ГЦК-упаковках приведены на рисунке 4.



а) ГПУ ;б) ГЦК

Рисунок 4 – Первая координационная сфера [2]

Атомы, прилегающие к атомам первой координационной сферы, образуют вторую координационную сферу, которая характеризуется своим координационным числом. В условиях плотнейшей упаковки атомы не будут размещаться на n-ой координационной сфере, пока не завершено наполнение предыдущей координационной сферы.

Если координационное число j -той сферы n_j , а ее радиус – r_j , то отношение

$$\rho_j = n_j / 4\pi r_j^2 \tag{2}$$

определяет плотность атомов на поверхности j -той координационной сферы и называется ретикулярной сферической плотностью.

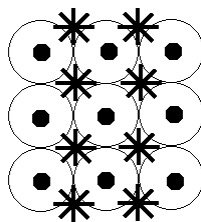
Коэффициенты компактности указанных шаровых упаковок одинаковы и равны

$$P = \frac{1}{6} \pi \sqrt{2} = 0,74. \tag{3}$$

Это значение коэффициента компактности является максимальным для плотнейших упаковок шаров с одинаковыми размерами.

В небольших объемах, когда центром упаковки является не отдельный атом, а четыре, образующие тетраэдр, то следующая координация определяется шарами, помещенными в лунки, образованными тремя шарами грани тетраэдра. Следующие шары располагаются в лунке между тремя шарами внутренней сетки, то есть построение упаковки происходит в режиме создания тетраэдров. Такое построение называется «жадным алгоритмом», и коэффициент компактности в этом случае будет превышать 0,74. Но это условие будет справедливо для сравнительно небольшого объема системы, то есть для небольшого числа атомов-шаров. При дальнейшем увеличении числа шаров коэффициент компактности начинает уменьшаться и затем станет меньше 0,74.

Многие металлы характеризуются расположением атомов либо по ГЦК-, либо по ГПУ-мотивам. Но есть еще одна упаковка, которая не является плотнейшей, но встречается достаточно часто. Схема этой упаковки приведена на рисунке 5. Название такой упаковки – объемноцентрированная кубическая, или ОЦК.

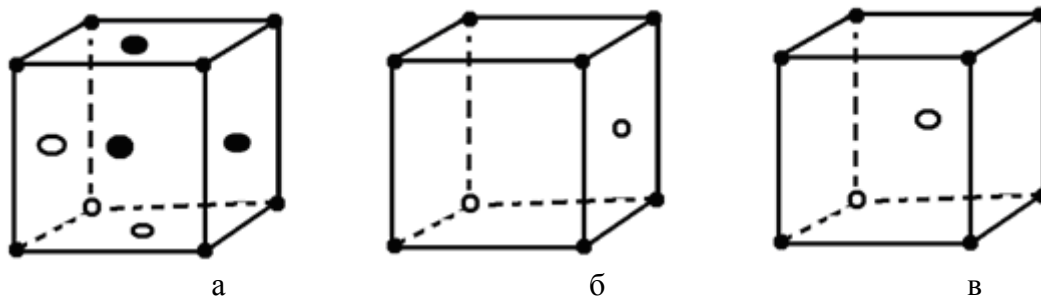


* – центры атомов второго слоя, ● – центры атомов третьего слоя

Рисунок 5 – Схема ОЦК-упаковки

Коэффициент компактности ОЦК-упаковки равен:

$$\rho = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0,68$$



а

б

в

а) ГПУ, б) ГЦК, в) ОЦК

Центры упаковок обозначены (●) в видимой и (○) в «невидимой» частях ячейки

Рисунок 6 – Ячейки кристаллов с различными упаковками атомов

На рисунке 6 приведены ячейки кристаллов для ГПУ-, ГЦК- и ОЦК-упаковок. Для всех этих упаковок рассчитаны квадраты радиусов координационных сфер (R^2), соответствующие им координационные числа (K) и число атомов (C) внутри соответствующей координационной сферы [4].

Таблица 1 – Характеристики координационных сфер

R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C
1	12	12	41/3	12	304	25	36	762	113/3	12	1368
2	6	18	43/3	6	310	26	24	786	38	24	1392
8/3	2	20	44/3	24	334	79/3	12	798	115/3	12	1404
3	18	38	15	12	346	80/3	12	810	116/3	36	1440
11/3	12	50	46/3	12	358	27	42	852	39	36	1476
4	6	56	47/3	24	382	82/3	6	858	118/3	6	1482
5	12	68	16	6	388	83/3	12	870	119/3	24	1506
17/3	12	80	49/3	12	400	28	24	894	40	12	1518
6	6	86	17	24	424	85/3	12	906	121/3	12	1530
19/3	6	92	53/3	24	448	29	12	918	41	24	1554
20/3	12	104	18	18	466	89/3	36	954	125/3	48	1602
7	24	128	55/3	12	478	91/3	12	966	42	36	1638
22/3	6	134	56/3	12	490	92/3	24	990	127/3	12	1650
25/3	12	146	19	24	514	31	72	1062	128/3	2	1652
9	12	158	59/3	12	526	94/3	12	1074	43	72	1724
29/3	24	182	61/3	12	538	95/3	24	1098	130/3	12	1736
10	12	194	21	36	574	97/3	12	1110	131/3	12	1748
31/3	12	206	65/3	24	598	33	48	1158	45	60	1808
32/3	2	208	22	12	610	101/3	24	1182	137/3	36	1844
11	12	220	67/3	18	628	34	24	1206	139/3	6	1850
34/3	6	226	68/3	12	640	35	24	1230	140/3	24	1874
35/3	24	250	23	24	664	107/3	12	1242	47	48	1922
12	6	256	70/3	12	676	36	18	1260	142/3	12	1934
37/3	12	268	71/3	48	724	109/3	24	1284	143/3	24	1958
13	24	292	24	2	726	37	72	1356	48	6	1964

В трехслойной простейшей упаковке радиус n -ой координационной сферы $R_n = d\sqrt{n}$, где d – диаметр шара. В нашем случае принято значение $d=1$. Для ГЦК упаковок квадрат радиуса координационной сферы равен ее номеру. Как следует из таблицы 2, некоторые координационные сферы ГЦК-упаковки оказываются незаполненными, то есть их координационные числа равны нулю (№ 30, 46, 56, 62, 78, 94). Для ГПУ- и ОЦК-структур координационные сферы с нулевыми координационными числами не приводятся. Для этих структур зависимость радиуса координационной сферы от ее номера носит более сложный характер, чем для ГЦК-решеток. Для трех рассматриваемых упаковок в таблицах 1–3 приведены квадраты радиусов координационных сфер (R^2) в порядке возрастания их номеров, а также координационные числа при заполнении внешней координационной сферы (K) и число атомов в кластере (C). Для каждой из структур приведены характеристики 100 координационных сфер, сформированных вокруг центрального одиночного атома сферической формы.

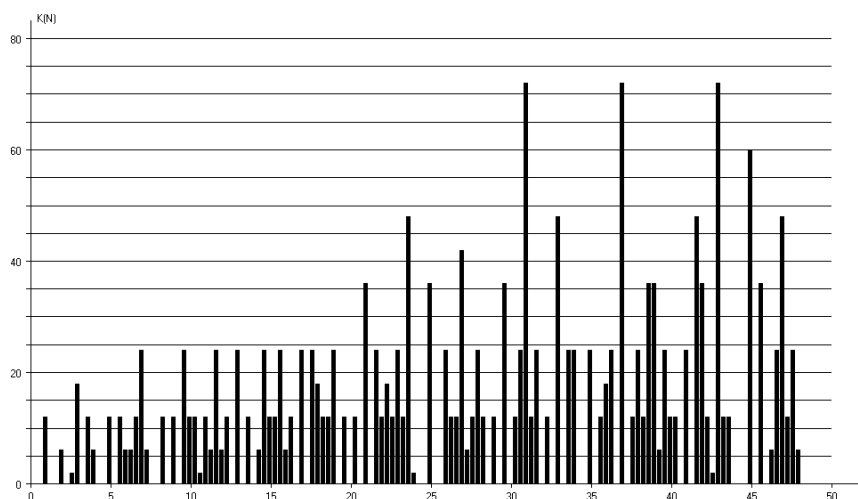
Таблица 2 – Характеристики координационных сфер ГЦК-структур

R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C
1	12	12	26	24	790	51	48	2170	76	72	3996
2	6	18	27	96	886	52	72	2242	77	96	4092
3	24	42	28	48	934	53	72	2314	78	0	4092
4	12	54	29	24	958	54	32	2346	79	96	4188
5	24	78	30	0	958	55	144	2490	80	24	4212
6	8	86	31	96	1054	56	0	2490	81	108	4320
7	48	134	32	6	1060	57	96	2586	82	96	4416
8	6	140	33	96	1156	58	72	2658	83	120	4536
9	36	176	34	48	1204	59	72	2730	84	48	4588
10	24	200	35	48	1252	60	48	2778	85	144	4728
11	24	224	36	36	1288	61	120	2898	86	24	4752
12	24	248	37	120	1408	62	0	2898	87	144	4896
13	72	320	38	24	1432	63	144	3042	88	24	4920
14	0	320	39	48	1480	64	12	3054	89	96	5016
15	48	368	40	24	1504	65	48	3102	90	72	5088
16	12	380	41	48	1552	66	48	3150	91	144	5232
17	48	428	42	48	1600	67	168	3318	92	48	5280
18	30	458	43	120	1720	68	48	3366	93	144	5424
19	72	530	44	24	1744	69	96	3462	94	0	5424
20	24	554	45	120	1864	70	48	3510	95	48	5472
21	48	602	46	0	1864	71	48	3558	96	8	5480
22	24	626	47	96	1960	72	30	3588	97	240	5720
23	48	674	48	24	1984	73	192	3780	98	54	5774
24	8	682	49	108	2092	74	24	3804	99	120	5894
25	84	766	50	30	2122	75	120	3924	100	84	5978

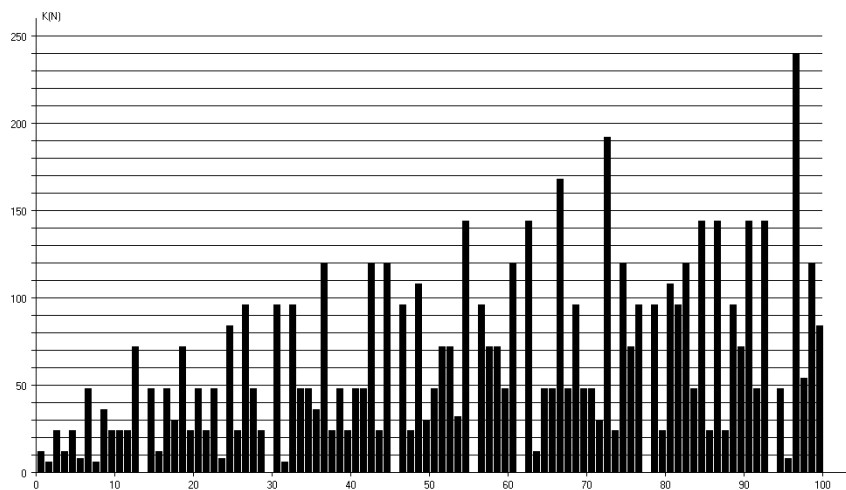
Таблица 3 – Характеристики координационных сфер ОЦК-структур

R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C	R^2	K	C
1	8	8	25	56	690	148/3	24	1906	224/3	48	3516
4/3	6	14	76/3	24	714	152/3	72	1978	227/3	120	3536
8/3	12	26	80/3	24	738	155/3	96	2074	76	48	3684
11/3	24	40	83/3	72	810	160/3	24	2098	232/3	24	3708
4	8	48	28	48	858	163/3	24	2122	235/3	48	3756
16/3	6	54	88/3	24	882	164/3	96	2218	236/3	72	3828
19/3	24	78	91/3	48	930	56	48	2266	81	104	3932
20/3	24	102	32	24	954	57	120	2386	244/3	72	4004
8	24	126	33	72	1026	172/3	24	2410	248/3	96	4100
9	32	158	100/3	30	1056	176/3	24	2434	251/3	168	4268
32/3	12	170	104/3	72	1128	179/3	120	2554	256/3	6	4274
35/3	48	218	107/3	72	1200	60	72	2626	259/3	96	4370
12	30	248	36	32	1232	184/3	48	2674	260/3	96	4466
40/3	24	272	115/3	48	1280	187/3	48	2722	88	96	4562
43/3	24	296	116/3	72	1352	64	8	2730	89	48	4610
44/3	24	320	40	48	1400	65	96	2826	268/3	24	4634
16	8	328	41	48	1448	196/3	54	2880	272/3	48	4682
17	48	376	128/3	12	1460	200/3	84	2964	275/3	120	4802
52/3	24	400	131/3	120	1580	203/3	96	3060	92	96	4898
56/3	48	448	44	48	1628	68	48	3108	280/3	48	4946
59/3	72	520	136/3	48	1676	208/3	24	3132	283/3	72	5018
64/3	6	526	139/3	72	1748	211/3	72	3204	96	36	5054
67/3	24	550	140/3	48	1796	212/3	72	3276	97	96	5100
68/3	48	598	48	30	1826	72	96	3372	292/3	48	5148
24	36	634	49	56	1882	73	96	3468	296/3	120	5268

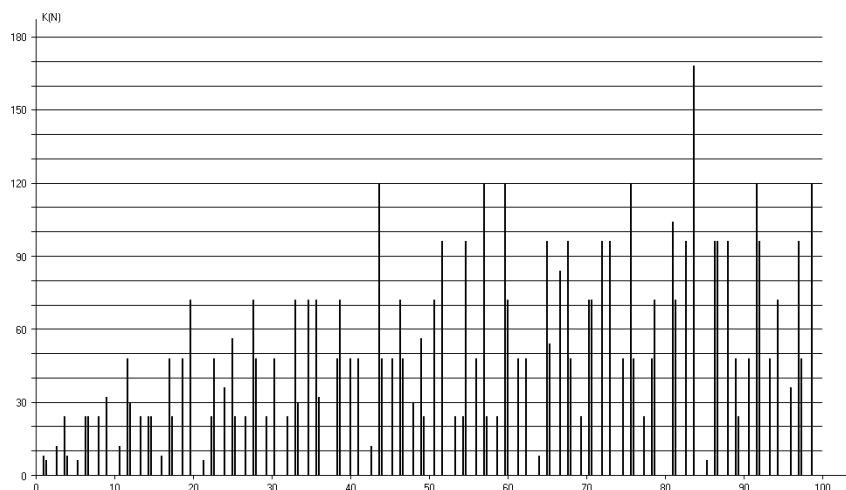
На рисунке 7 приведены диаграммы значений координационных чисел (ось ординат) для различных координационных сфер, номера которых указаны на оси абсцисс (N):



а



а



б

а) ГПУ-, б) ГЦК-, в) ОЦК-структуры

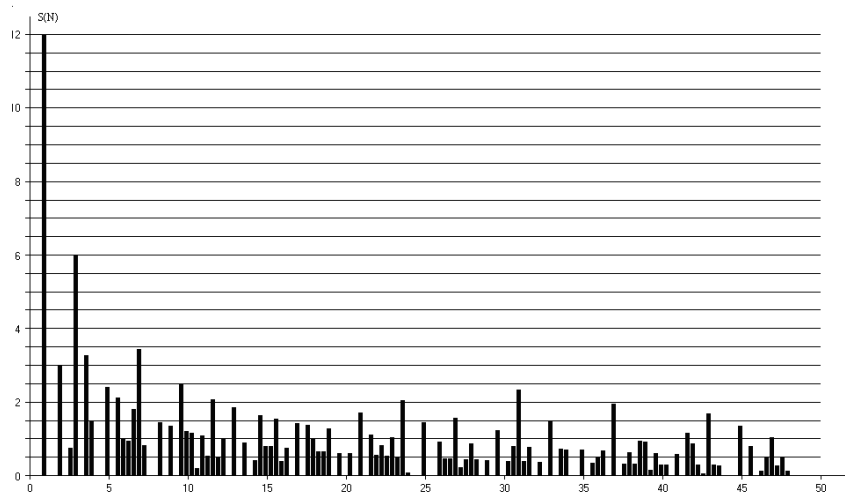
Рисунок 7 – Координационные числа $K(N)$ для координационных сфер

Для иллюстрации относительных значений ретикулярных плотностей на различных координационных сферах в шаровых упаковках ГПУ-, ГЦК-, и ОЦК- типов на рисунке 8 приведены отношения координационных чисел к квадратам радиусов координационных сфер. $S(N) = K(N) / R^2$, где N – номера координационных сфер.

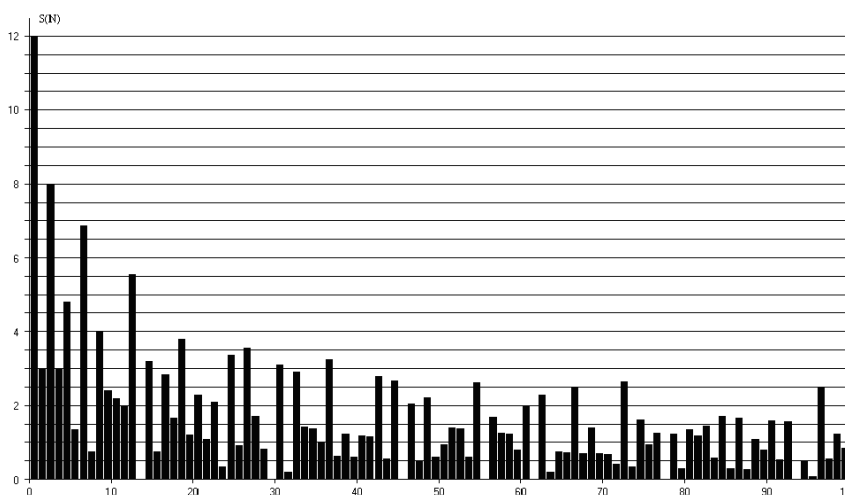
$$S(N) = K(N) / R^2$$

Сравнение характеристик координационных сфер, приведенных в таблицах 1–3 и на диаграммах рисунков 7–8 показывает, что во всех случаях наблюдаются достаточно большие вариации координационных чисел в пределах каждого типа упаковок.

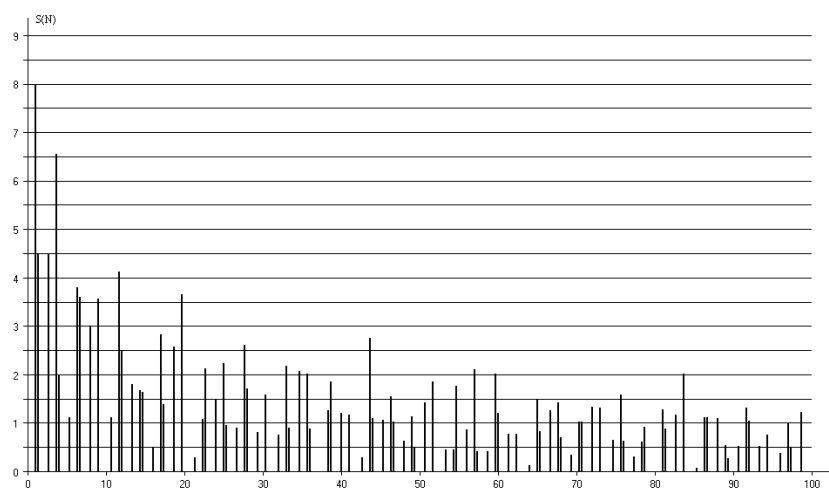
В пределах 100 координационных сфер размеры частиц достаточно малые. Для ГЦК радиус соответствующей координационной сферы равен $R_{100} = 10d$, для ГПУ $R_{100} \approx 7d$, для ОЦК $R_{100} \approx 10d$. Две плотнейшие упаковки ГПУ и ГЦК имеют совершенно различные конфигурации координационных сфер, хотя коэффициенты компактности их достаточно близки и уже в пределах 10 координационных сфер, как и у ОЦК-упаковки, совпадают с объемным значением.



а



б



в

а) ГПУ-, б) ГЦК-, в) ОЦК-структур

Рисунок 8 – Отношения координационных чисел координационных сфер $K(N)$ к квадрату их радиусов (R^2), где N – номер координационной сферы

Из приведенных результатов расчета характеристик координационных сфер следует, что при формировании наночастиц наполнителя при создании композиционных материалов необходимо учитывать, что в зависимости от размера частиц их модифицирующая активность может существенно зависеть от их размера. Это обусловлено различиями ретикулярных плотностей. Чем выше эта величина, тем больше нескомпонированных атомных связей, то есть тем выше поверхностная активность этих частиц. Изменение координационных чисел для частиц в нанодиапазоне окажет влияние и на характер зависимости физических свойств от размера частиц, так как поверхности этих частиц имеют различные атомные координации. Координационные числа ряда сфер совпадают со значениями числа атомов в фуллеренах, то есть габитусы наночастиц могут обладать некристаллографическими точечными симметриями [5]. Различия габитусов плотнейших шаровых упаковок следует учитывать и при создании гетерогенных систем на основе сферических частиц с различными диаметрами [6]. Так как дивергентные потоки в технологических процессах гомогенизации смесей приводят к образованию кластеров из частиц одного размера, то и в этом случае применимо приближение шаровых упаковок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бокий, Г.Б. Кристаллохимия / Г.Б. Бокий. – М. : Наука, 1971. – 400 с.
2. Зеeman, И. Кристаллохимия / И. Зеeman. – М. : Мир, 1969. – 155 с.
3. Авдейчик, С.В. Введение в физику наноконпозиционных строительных материалов / С.В. Авдейчик [и др.]. – Гродно : Изд. ГрГАУ, 2009. – 438 с.
4. Лиопо, В.А. Габитус наночастиц, полученных при их росте их жидкой или газовых фаз / В.А. Лиопо [и др.]. // Сб. мат. III Республ. науч.-прак. конф. – Брест : Изд. БрГУ, 2009. – С.64–68.
5. Сабуть, А.В. Классификация и симметрия целочисленных регулярных решеток в многомерных евклидовых пространствах : канд. дис. ... на соискание уч. степени канд. ф.-м. н. / А.В. Сабуть. – Гродно, 2003. – 192 с.
6. Секержицкий, С.С. Математическое моделирование гетерогенных структур наполненных систем : канд. дисс. ... на соискание уч. степени канд. ф.-м. н. / С.С. Секержицкий. – Брест, 1995. – 189 с.

V.A. Liopo, A.V. Sabutz, S.S. Sekerzhitsky, V.A. Struk. Characteristics of Coordination Spheres of Globular Packing

For the hexagonal closest packing (HCP) and face-centered cubic (FCC) as well as for the body-centered cubic lattice (BCC) are calculated radii of coordination spheres, theirs coordination numbers (CN) and number of atoms in particle, which is coordinated spheres of number N limited. Calculation is for spheres to hundredth number inclusive execute. Diagrams (CN) and reticulated density of coordination spheres are build.

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов**СИММЕТРИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ
ДИРАКОВСКОГО ТИПА**

Предлагается подход для исследования внутренней симметрии безмассовых дираковских полей в рамках их вещественного описания. Показано, что в классической теории 8- и 16-компонентные поля обладают симметриями, описываемыми группами $SO(3,1)$ и $SO(4,3)$ соответственно. При переходе к квантовой теории преобразования группы $SO(3,1)$ сужаются до группы $SO(3)$, группы $SO(4,3)$ – до $SO(3,1)$.

1. Постановка задачи

В работах [1–3] был развит метод исследования диракоподобных релятивистских волновых уравнений для частиц с массой, который позволяет установить наиболее полную группу внутренней симметрии лагранжевой формулировки таких уравнений. В частности, в [1] было показано, что для уравнения Дирака искомая симметрия в классическом случае исчерпывается группой $SO(2,1)$ (так называемая зарядовая симметрия [4]). В настоящей работе данный метод будет адаптирован для исследования безмассовых полей дираковского типа.

2. Внутренняя симметрия безмассового уравнения Дирака

Рассмотрим безмассовое уравнение Дирака

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (1)$$

где ψ – биспинор первого ранга, γ_μ – матрицы Дирака, которые выберем в виде:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

σ_i – матрицы Паули. Следуя [1–3], возьмем от уравнения (1) комплексное сопряжение и введем в рассмотрение 8-компонентную волновую функцию

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*) \quad (4)$$

являются соответственно вещественными и чисто мнимыми компонентами функции Ψ . Волновая функция Ψ (3), (4) подчиняется уравнению

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (5)$$

с матрицами Γ_μ вида

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes \gamma_4. \quad (6)$$

Уравнение (5) представляет собой вещественную форму уравнения (1) [1].

Для инвариантности лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (7)$$

($\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta$, $\eta = I_2 \otimes \gamma_4$ – матрица билинейной формы) безмассового уравнения (5) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \quad (8)$$

должно выполняться условие:

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu. \quad (9)$$

Условию (9) можно удовлетворить двумя способами:

1) посредством соотношений

$$[\Gamma_\mu, Q_1]_- = 0, \quad Q_1^+ \eta Q_1 = \eta; \quad (10)$$

2) посредством соотношений

$$[\Gamma_\mu, Q_2]_+ = 0, \quad Q_2^+ \eta Q_2 = -\eta. \quad (11)$$

Условия (10) были рассмотрены в [1] и приводят к упомянутой в п.1 группе зарядовой симметрии с генераторами

$$J^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \quad J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \quad (12)$$

которым соответствуют один мнимый (ω_1) и два вещественных (ω_2, ω_3) параметра.

Рассмотрим подробно условия (11). Для этого удобно сначала использовать фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu. \quad (13)$$

В этом базисе наиболее общий вид матрицы Q_2 , удовлетворяющей первому из условий (11), очевидно, таков:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \otimes \gamma_5. \quad (14)$$

Здесь $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, q_{mn} – произвольные комплексные числа. Переход из фермионного базиса в базис (3) осуществляется с помощью унитарного преобразования [1]

$$A = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (15)$$

В результате для матрицы Q_2 получим выражение:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 + \begin{pmatrix} \lambda & \rho \\ -\rho & -\lambda \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 \gamma_5, \quad (16)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \frac{1}{2}(q_{11} + q_{22}), \quad \beta = \frac{1}{2}(q_{12} + q_{21}), \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(q_{11} - q_{22}), \quad \rho = \frac{1}{2}(q_{12} - q_{21}).$$

Требование сохранения структуры (3) волновой функции при преобразованиях (16) приводит к следующим ограничениям на параметры (17):

$$\alpha, \lambda - \text{мнимые}; \quad \beta, \rho - \text{вещественные}. \quad (18)$$

Второе из условий (11) приводит к соотношению:

$$\beta^2 + \lambda^2 - \alpha^2 - \rho^2 = 1. \quad (19)$$

Таким образом, матрица Q_2 (16) определяет некоторое трехпараметрическое преобразование. Его можно параметризовать посредством эрмитовских генераторов I^i , имеющих в фермионном базисе вид:

$$I^i = \sigma_i \otimes \gamma_5. \quad (20)$$

В базисе, в котором волновая функция Ψ имеет вид (3), будем иметь:

$$I^1 = I_2 \otimes \gamma_5, \quad I^2 = \sigma_2 \otimes i\gamma_5\gamma_2, \quad I^3 = \sigma_3 \otimes i\gamma_5\gamma_2. \quad (21)$$

Сравнивая выражения (16) и (21), заключаем, что генераторам I^i соответствуют параметры:

$$\Omega_1 = \beta, \quad \Omega_2 = i\rho, \quad \Omega_3 = \lambda, \quad (22)$$

из которых один вещественный (Ω_1) и два мнимых (Ω_2, Ω_3).

Объединяя эти преобразования с преобразованиями зарядовой симметрии, заключаем, что полная группа внутренней симметрии лагранжиана безмассового поля Дирака задается шестью генераторами J^i (12), I^i (21), удовлетворяющими алгебре

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\varepsilon_{ijk}J^k, \\ [I^i, I^j] &= i\varepsilon_{ijk}J^k, \\ [J^i, I^j] &= i\varepsilon_{ijk}I^k. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что из шести соответствующих параметров ω_i, Ω_i три являются вещественными ($\Omega_1, \omega_2, \omega_3$) и три мнимыми ($\omega_1, \Omega_2, \Omega_3$), заключаем, что полученная группа симметрии изоморфна группе SO(3,1). Данный результат согласуется с результатом, полученным в [5] другим способом для уравнения Дирака без учета условия инвариантности лагранжиана.

Заметим, что помимо подгруппы зарядовой симметрии в указанной группе можно выделить также подгруппу SO(3) с генераторами J^1, I^2, I^3 и мнимыми параметрами $\omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, которая соответствует преобразованиям Паули–Гюрши [6].

3. Внутренняя симметрия системы двух безмассовых уравнений Дирака

Теперь рассмотрим систему двух уравнений типа (1):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 &= 0, \\ \gamma_\mu \hat{\partial}_\mu \psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Вводя по аналогии с п. 2 16-компонентную волновую функцию

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \quad (25)$$

можем записать (24) в виде (5), где

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4. \quad (26)$$

Условия инвариантности лагранжиана (7) относительно преобразований внутренней симметрии (8) по-прежнему задаются соотношениями (10), (11), где матрица η имеет вид:

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (27)$$

Соотношения (10) для системы (24) были исследованы в [3] и приводят к 10-параметрической группе SO(3,2), задаваемой эрмитовскими генераторами J^A ($A=1 \div 10$)

$$\begin{aligned} J^1 &= i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^2 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ J^4 &= \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^5 = \gamma_1 \otimes \gamma_2, \quad J^6 = \gamma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^7 = \gamma_4 \otimes \gamma_2, \\ J^8 &= i\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \quad J^9 = i\gamma_1\gamma_4 \otimes I_4, \quad J^{10} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4, \end{aligned} \quad (28)$$

которым соответствуют 6 вещественных ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$) и 4 мнимых ($\omega_4, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$) параметра.

Для исследования условий (11) здесь, как и в случае одного уравнения Дирака, удобно сначала перейти в фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ (26) принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (29)$$

Искомый переход из базиса (25) осуществляется посредством унитарного преобразования [2; 3]:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (30)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Для матрицы Q_2 , удовлетворяющей первому из условий (11), получаем в фермионном базисе наиболее общее выражение:

$$Q_2 = q \otimes \gamma_5, \quad (31)$$

где q – произвольная комплексная матрица размерности 4x4. Преобразование Q_2 (31) может быть параметризовано посредством 16 генераторов

$$(\sigma_i \otimes \sigma_j) \otimes \gamma_5, (I_2 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5, (\sigma_i \otimes I_2) \otimes \gamma_5, I_2 \otimes \gamma_5, \quad (32)$$

принимающих в исходном базисе (25) вид

$$(I_2 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5, -(\sigma_2 \otimes \sigma_i) \otimes i\gamma_2\gamma_5, -(\sigma_3 \otimes \sigma_i) \otimes i\gamma_2\gamma_5, (\sigma_1 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5, \quad (33)$$

$$I_4 \otimes \gamma_5, -(\sigma_2 \otimes I_2) \otimes i\gamma_2\gamma_5, -(\sigma_3 \otimes I_2) \otimes i\gamma_2\gamma_5, -\gamma_5 \otimes \gamma_5.$$

Второму из соотношений (11) с учетом условия сохранения структуры (25) волновой функции удовлетворяют преобразования, задаваемые генераторами

$$I^0 = -\gamma_5 \otimes \gamma_5, I^1 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5, I^2 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5, I^3 = -i\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad (34)$$

$$I^4 = -I_4 \otimes \gamma_5, I^5 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, I^6 = \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, I^7 = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,$$

$$I^8 = i\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5, I^9 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5, I^{10} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_5,$$

которым соответствуют 4 вещественных ($\Omega_4, \Omega_8, \Omega_9, \Omega_{10}$), и 7 мнимых ($\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6, \Omega_7$) параметров.

Объединяя преобразования (28) и (34), получаем 21-параметрическую группу с 10 вещественными и 11 мнимыми параметрами, которая, как можно убедиться, изоморфна группе SO(4,3).

4. Симметрия квантованных безмассовых полей дираковского типа

Внутренняя симметрия уравнения Дирака на квантовом уровне относительно преобразований, задаваемых генераторами (12) была рассмотрена в [1]. Было показано, что квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований, соответствующих генератору J^1 .

Рассмотрим преобразования, задаваемые генераторами I^1 (21). Для этого предварительно переведем I^i из базиса (34) в базис

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4$. В результате получим выражения:

$$I^1 = \sigma_3 \otimes \gamma_5, I^2 = -\sigma_2 \otimes i\gamma_5\gamma_2\gamma_4, I^3 = \sigma_1 \otimes i\gamma_5\gamma_2\gamma_4. \quad (36)$$

Затем разложим ψ и $\bar{\psi}$ по «чистым» состояниям $\psi_s^{(+)}, \psi_s^{(-)}, \bar{\psi}_s^{(+)}, \bar{\psi}_s^{(-)}$:

$$\begin{aligned}\psi &= a_s \psi_s^{(+)} + b_s^+ \psi_s^{(-)}, \\ \bar{\psi} &= a_s^+ \bar{\psi}_s^{(+)} + b_s \bar{\psi}_s^{(-)}.\end{aligned}\quad (37)$$

При квантовании коэффициенты разложения в (37) принимают смысл операторов рождения и уничтожения, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям:

$$[a_s, a_{s'}^+]_+ = [b_s, b_{s'}^+]_+ = \delta_{ss'}, \quad (38)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Поступая далее аналогично [1], устанавливаем трансформационные свойства операторов a_s, b_s, a_s^+, b_s^+ относительно однопараметрических преобразований, определяемых генераторами I^1, I^2, I^3 (36). При этом соответственно получим:

$$\begin{aligned}a'_{1/2} &= -b_{1/2}^+ - \omega_1 b_{1/2}^+, & a'_{-1/2} &= -b_{-1/2}^+ - \omega_1 b_{-1/2}^+, \\ (b_{1/2}^+)' &= -a_{1/2} - \omega_1 a_{1/2}, & (b_{-1/2}^+)' &= -a_{-1/2} - \omega_1 a_{-1/2}, \\ (a_{1/2}^+)' &= -b_{1/2} + \omega_1 b_{1/2}, & (a_{-1/2}^+)' &= -b_{-1/2} + \omega_1 b_{-1/2}, \\ b'_{1/2} &= -a_{1/2}^+ - \omega_1 a_{1/2}^+, & b'_{-1/2} &= -a_{-1/2}^+ - \omega_1 a_{-1/2}^+.\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}a'_{1/2} &= -b_{1/2}^+ + \omega_2 a_{1/2}^+, & a'_{-1/2} &= -b_{-1/2}^+ - \omega_2 a_{-1/2}^+, \\ (b_{1/2}^+)' &= -a_{1/2} + \omega_2 b_{1/2}, & (b_{-1/2}^+)' &= -a_{-1/2} - \omega_2 b_{-1/2}, \\ (a_{1/2}^+)' &= -b_{1/2} + \omega_2 a_{1/2}, & (a_{-1/2}^+)' &= -b_{-1/2} + \omega_2 a_{-1/2}, \\ b'_{1/2} &= -a_{1/2}^+ + \omega_2 b_{1/2}^+, & b'_{-1/2} &= -a_{-1/2}^+ - \omega_2 b_{-1/2}^+.\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}a'_{1/2} &= -b_{1/2}^+ - i\omega_3 a_{1/2}^+, & a'_{-1/2} &= -b_{-1/2}^+ + i\omega_3 a_{-1/2}^+, \\ (b_{1/2}^+)' &= -a_{1/2} - i\omega_3 b_{1/2}, & (b_{-1/2}^+)' &= -a_{-1/2} + i\omega_3 b_{-1/2}, \\ (a_{1/2}^+)' &= -b_{1/2} + i\omega_3 a_{1/2}, & (a_{-1/2}^+)' &= -b_{-1/2} + i\omega_3 a_{-1/2}, \\ b'_{1/2} &= -a_{1/2}^+ + i\omega_3 b_{1/2}^+, & b'_{-1/2} &= -a_{-1/2}^+ - i\omega_3 b_{-1/2}^+.\end{aligned}\quad (41)$$

Проверяя инвариантность соотношений (38) и остальных (нулевых) антикоммутантов относительно преобразований (39)–(41), убеждаемся, что указанная инвариантность имеет место для преобразований, отвечающих генераторам I^2, I^3 .

Таким образом, приходим к выводу, что на квантовом уровне группа $SO(3,1)$ инвариантности классического уравнения Дирака сужается до группы $SO(3)$ преобразований Паули–Гюрши.

Симметрия квантовой формулировки системы двух массивных уравнений Дирака относительно преобразований, задаваемых генераторами (28), была исследована в [3], где было показано, что инвариантность условий квантования

$$[a_{is}, a_{i's'}^+]_+ = [b_{is}, b_{i's'}^+]_+ = \delta_{ii'} \delta_{ss'} \quad (42)$$

($i = 1, 2$) имеет место для генераторов J^4, J^8, J^9, J^{10} .

В базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \text{ – столбец} \quad (43)$$

они имеют вид:

$$J^4 = \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^8 = i\gamma_3 \gamma_1 \otimes I_4, \quad J^9 = i\gamma_1 \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^{10} = i\gamma_3 \gamma_5 \otimes I_4. \quad (44)$$

Последние три из них образуют набор генераторов, который ассоциируется с группой

SO(3) (SU(2)). Генератор же J^4 соответствует фазовому преобразованию, при котором

$$\psi_1 \rightarrow \psi_1 e^{i\varphi}, \quad \psi_2 \rightarrow \psi_2 e^{-i\varphi}. \quad (45)$$

Таким образом, для определения полной группы внутренней симметрии квантовой формулировки системы (24) двух безмассовых уравнений Дирака остается исследовать инвариантность условий квантования (42) относительно однопараметрических преобразований, определяемых генераторами (34). Для этого с помощью матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_2 \otimes \gamma_4 & -I_2 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (46)$$

переведем операторы (34) в базис (43). В результате получим:

$$\begin{aligned} I^0 &= I_4 \otimes \gamma_5, \quad I^1 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \quad I^2 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \quad I^3 = -i\gamma_5 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \\ I^4 &= -i\gamma_4 \otimes \gamma_5, \quad I^5 = -\gamma_1 \gamma_4 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \quad I^6 = -\gamma_3 \gamma_4 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \quad I^7 = \gamma_4 \gamma_5 \otimes \gamma_1 \gamma_3, \\ I^8 &= i\gamma_3 \gamma_1 \otimes \gamma_5, \quad I^9 = i\gamma_1 \gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad I^{10} = i\gamma_3 \gamma_5 \otimes \gamma_5. \end{aligned} \quad (47)$$

Операторы знака энергии $\hat{\Gamma}_4$, проекции спина (спиральности) $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4} \Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют в базисе (43) вид:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_4 &= \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1), \\ \hat{S}_3 &= \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1), \\ \hat{\Pi} &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1). \end{aligned} \quad (48)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (48), и применяя к нему (столбцу) преобразования $I^0 + \Omega_A I^A$, находим соответствующие трансформационные свойства этих операторов. Так, в случае преобразований, определяемых, например, генераторами J^4, J^8, J^9, J^{10} , будем соответственно иметь:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= -b_{1s}^+ + \omega b_{1s}^+, \quad a'_{2s} = -b_{2s}^+ + \omega b_{2s}^+, \\ (a_{1s}^+)' &= -b_{1s} - \omega b_{1s}, \quad (a_{2s}^+)' = -b_{2s} - \omega b_{2s}, \\ b'_{1s} &= -a_{1s}^+ + \omega a_{1s}, \quad b'_{2s} = -a_{2s}^+ + \omega a_{2s}, \\ (b_{1s}^+)' &= -a_{1s} - \omega a_{1s}, \quad (b_{2s}^+)' = -a_{2s} - \omega a_{2s}. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= -b_{1s}^+ - i\omega b_{2s}^+, \quad a'_{2s} = -b_{2s}^+ + i\omega b_{1s}^+, \\ (a_{1s}^+)' &= -b_{1s} - i\omega b_{2s}, \quad (a_{2s}^+)' = -b_{2s} + i\omega b_{1s}, \\ b'_{1s} &= -a_{1s}^+ - i\omega a_{2s}^+, \quad b'_{2s} = -a_{2s}^+ + i\omega a_{1s}^+, \\ (b_{1s}^+)' &= -a_{1s} - i\omega a_{2s}, \quad (b_{2s}^+)' = -a_{2s} + i\omega a_{1s}. \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
a'_{1s} &= -b_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+, & a'_{2s} &= -b_{2s}^+ + \omega b_{1s}^+, \\
(a'_{1s})' &= -b_{1s} - \omega b_{2s}, & (a'_{2s})' &= -b_{2s} - \omega b_{1s}, \\
b'_{1s} &= -a_{1s}^+ - \omega a_{2s}^+, & b'_{2s} &= -a_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+, \\
(b'_{1s})' &= -a_{1s} + \omega a_{2s}, & (b'_{2s})' &= -a_{2s} + \omega a_{1s}.
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
a'_{1s} &= -b_{1s}^+ + \omega b_{1s}^+, & a'_{2s} &= -b_{2s}^+ + \omega b_{2s}^+, \\
(a'_{1s})' &= -b_{1s} - \omega b_{1s}, & (a'_{2s})' &= -b_{2s} + \omega b_{2s}, \\
b'_{1s} &= -a_{1s}^+ + \omega a_{1s}^+, & b'_{2s} &= -a_{2s}^+ - \omega a_{2s}^+, \\
(b'_{1s})' &= -a_{1s} + \omega a_{1s}, & (b'_{2s})' &= -a_{2s} + \omega a_{2s}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что перестановочные соотношения (42) и все прочие антикоммутанты типа $[a_{is}, a_{i's'}^+]_+ = 0$ и т.д. инвариантны относительно преобразований (49)–(52). Относительно остальных преобразований, вид которых мы не выписываем, чтобы не загромождать изложение, соотношения (42) не инвариантны.

Следовательно, полный набор однопараметрических преобразований внутренней симметрии системы (24), «выживающих» на квантовом уровне, задается восемью генераторами $J^4, J^8, J^9, J^{10}, I^4, I^8, I^9, I^{10}$. При этом генераторы $J^8, J^9, J^{10}, I^8, I^9, I^{10}$ с тремя мнимыми ($\omega_8, \omega_9, \omega_{10}$) и тремя вещественными ($\Omega_8, \Omega_9, \Omega_{10}$) параметрами удовлетворяют алгебре типа (23) и образуют, следовательно, группу SO(3,1). Что же касается генераторов J^4 и I^4 , то они соответствуют фазовому преобразованию (45) и γ_5 -преобразованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – №2. – С. 46–51.
2. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.
3. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч.1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 5–10.
4. Стражев, В.И. О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – №11. – С. 115–117.
5. Фушич, В.И. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака / В.И. Фушич, А.Г. Никитин // ЭЧАЯ. – 1983. – Т.14. – №1. – С. 5–57.
6. Нишиджима, К. Фундаментальные частицы / К. Нишиджима. – Москва : Изд-во «Мир», 1965. – 462 с.

V.A. Pletyukhov. The Symmetries of Massless Dirac Type Fields

The approach to investigate an internal symmetry of massless Dirac type wave equations in the framework of real description is proposed. It is shown that the classical formulation of 8- and 16-component real fields has the internal symmetry groups SO(3,1) and SO(4,3) respectively. The symmetries of these kinds reduce to groups SO(3) and SO(3,1) respectively in the quantum theory.

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПИОНИЗАЦИЮ ЯДЕР

Показано, что сильное магнитное поле препятствует пионизации тяжелых атомных ядер. В сверхплотном замагниченном веществе свободные нейтроны могут появиться при меньших значениях плотности, чем пионы в ядрах.

Согласно существующим представлениям [1; 2], в тяжелых ядрах возможно существование отрицательно заряженных пионов в качестве самостоятельного компонента. Проведем оценку ядерных параметров (массового A и зарядового Z чисел ядра), соответствующих порогу появления пионов. Будем исходить из полуэмпирической формулы Бете-Вайцеккера, модифицированной для данной задачи в соответствии с [1; 2]. Масса ядра

$$Mc^2 = N_n m_n c^2 + N_p m_p c^2 - c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{(N_p - N_\pi)^2}{A^{1/3}} + c_3 \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right)^2 + c'_3 \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right)^4 + c_\pi N_\pi, \quad (1)$$

где N_n, N_p, N_π – числа соответственно нейтронов, протонов и пионов в ядре; $c_0 = 15,75$ МэВ, $c_1 = 17,8$ МэВ, $c_2 = 0,71$ МэВ, $c_3 = 23,7$ МэВ, $c'_3 \approx 17,7$ МэВ, $c_\pi \approx 11,9$ МэВ [1]; коэффициент c_4 различен в разных источниках: $c_4 = 0$ [3], $c_4 \approx 0,88$ МэВ [4], $c_4 \approx 7,7$ МэВ [1], $c_4 \approx -3,5$ МэВ [2].

Химические потенциалы компонентов ядра связаны соотношением:

$$\chi_n = \chi_p + \chi_\pi. \quad (2)$$

Учитывая, что $\chi_j = \frac{\partial Mc^2}{\partial N_j}$, находим:

$$\chi_n = m_n c^2 + \frac{2c_3}{A} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right) + \frac{4c_4}{A^3} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right)^3, \quad (3)$$

$$\chi_p = m_p c^2 + 2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} - 2 \frac{c_3}{A} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right) - \frac{4c_4}{A^3} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right)^3, \quad (4)$$

$$\chi_\pi = -2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} + 2 \frac{c_3}{A} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right) + \frac{4c_4}{A^3} \left(N_n - (N_p - N_\pi) \right)^3 + 2c'_3 \frac{N_\pi}{A} + c_\pi. \quad (5)$$

Подставляя в (2) выражения для химических потенциалов с учетом того, что $A = N_n + N_p$, $Z = N_p$, получаем в простейшем случае (при $c_4 = 0$):

$$N_{\pi} = \frac{c'_{\pi} A}{2(c_3 - c'_3)} - \frac{c_3(A - 2Z)}{c_3 - c'_3}, \quad (6)$$

где $c'_{\pi} = c_{\pi} + m_p c^2 - m_n c^2$. Заметим, что формула (3) существенно отличается от соответствующего выражения [2, с. 38], ошибка в котором связана с потерей знака при вычислении химического потенциала пионов.

У порога рождения пионов $N_{\pi} = 0$ и

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c'_{\pi}}{2c_3} \right) \approx 0,39. \quad (7)$$

Таким образом, в земных условиях существование пионного конденсата возможно в тяжелых ядрах с $A > 230$.

Результаты расчетов эффективного числа пионов в тяжелых ядрах с учетом поправки к энергии асимметрии в формуле Бете–Вайцзеккера при $c_4 = -3,5$ МэВ представлены в таблице 1. Заметим, что влияние значения c_4 на результаты вычислений довольно существенное.

Таблица 1 – Эффективное число π^- -мезонов в ядрах с $A > 200$ при $c_4 = -3,5$ МэВ

A	Z	N_{π}	N_{π} [2]	A	Z	N_{π}	N_{π} [2]	A	Z	N_{π}	N_{π} [2]
254	102	49	2	242	98	60	1	230	93	54	1
	101	34	4		97	44	3		92	39	2
	100	25	4		96	32	3		91	27	3
	99	14	5		95	21	4		90	17	4
	98	5	6		93	1	6		89	7	7
251	102	70	1	239	97	64	1	227	92	58	1
	100	38	3		96	46	2		91	42	2
	99	26	4		94	22	4		90	29	3
	98	16	5		93	12	5		89	18	4
	97	6	6		92	2	6		88	8	5
248	100	54	2	236	96	69	1	224	91	62	1
	99	39	3		95	49	2		90	44	2
	98	28	3		94	35	2		89	31	3
	97	17	4		93	24	3		87	20	4
245	99	57	2	233	94	52	2	221	90	68	1
	98	42	3		93	37	3		89	46	2
	96	19	4		92	26	3		88	33	2
	95	9	5		91	15	4		86	21	3

Легко видеть, что ядра-изобары содержат тем больше пионов, чем больше число протонов. Данный вывод, сделанный нами на основании результатов численных расчетов, прямо противоположен результату [2], полученному, как отмечалось выше, вслед-

ствии элементарной ошибки при математических преобразованиях. В таблице 1 для сравнения представлены результаты, полученные нами, и результаты, приведенные в таблице 1 [2, с. 40]: расхождения не только количественные, но и качественные.

В магнитном поле с индукцией B в выражении (1) необходим учет еще двух слагаемых: $N_\pi \mu_\pi B$ и $c_5 B^2 (N_p - N_\pi) A^{2/3}$ [5, с. 164], где $\mu_\pi = 2,1 \cdot 10^{-17}$ МэВ/Гс – магнетон, соответствующий пиону с массой m_π , $c_5 \approx 6,9 \cdot 10^{-38}$ МэВ/Гс². Первое добавочное слагаемое представляет собой кинетическую энергию пионов в квантующем магнитном поле (в приближении крайнего вырождения). Второе слагаемое связано с нарушением сферической симметрии ядра-капли магнитным полем и существенно при $B \sim 10^{18}$ Гс и выше [6]. Пренебрегая этим слагаемым, получаем в магнитном поле с индукцией B у порога рождения пионов (при $c_4 = 0$)

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c'_\pi + \mu_\pi B}{2c_3} \right). \quad (8)$$

Легко видеть, что сильное магнитное поле с индукцией $B \sim 10^{17}$ Гс и выше заметно уменьшает пороговое значение отношения Z/A , т.е. пионы появляются в более тяжелых ядрах, чем в отсутствие поля.

Магнитные поля с индукцией, превышающей 10^{17} Гс, в земных условиях пока недостижимы. Однако, такие поля вполне возможны в веществе сверхплотных астрофизических объектов типа нейтронных звезд. При плотностях, превышающих 10^6 г/см³, реализуется электронно-ядерная фаза крайне вырожденного вещества [3]. Существенное повышение плотности приводит к нейтронизации ядер, в результате чего в электронно-ядерном веществе могли бы появиться свободные нейтроны в качестве стабильного компонента [3]. Но, согласно [2], пионизация тяжелых ядер подавляет их нейтронизацию, что препятствует переходу электронно-ядерной фазы вещества в электронно-нейтронно-ядерную фазу. Рассмотрим, какие коррективы в этот результат [2] вносит учет возможности существования в сверхплотном веществе сильного магнитного поля.

Получим соотношения, необходимые для вычисления равновесных параметров Aen -фазы замагниченного вещества с учетом размеров ядер и ядерного взаимодействия свободных нейтронов между собой. Частично эти вопросы обсуждались в [5], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы. При численных расчетах и оценках не будет учитываться зависимость величины магнитного момента нейтрона от индукции магнитного поля (корректность данного приближения для задач, аналогичных рассматриваемой, обоснована в [5]); не будет учитываться также малая величина аномального магнитного момента электрона.

Численные оценки проведены нами для так называемого абсолютно устойчивого состояния вещества, при котором устанавливается термодинамическое равновесие по отношению к бета-процессам и пикноядерным реакциям [3]. Исходной при этом является формула для энергии среды [1; 5]:

$$E = E_A + E_n + E_e = N_A M c^2 + w_n \left(V - \frac{A N_A}{n_0} \right) + w_e V, \quad (9)$$

где E_A, E_n, E_e – энергии атомных ядер, свободных нейтронов и электронов, V – объем рассматриваемой системы, N_A – число ядер в этом объеме, $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ – концентрация нуклонов в ядре, w_n и w_e – плотности энергий свободных нейтронов и электронов. Энергию $E_A = N_A M c^2$ будем вычислять с помощью (1) с указанными выше дополнительными слагаемыми.

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме V равны [1]

$$E_n = w_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n^* = n_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (10)$$

где (см., например, [5], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы)

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (11)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left((\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} \right), \quad (12)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{Я} = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} n_n^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad (14)$$

n_n и P_n – концентрация и давление свободных нейтронов, $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$ – их химический потенциал, $\mu_{Я}$ – ядерный магнетон, $\sigma_n = 1,913$.

Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [2; 7]:

$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2 m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (15)$$

где n_e, P_e, χ_e – концентрация, давление и химический потенциал электронов, m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора.

Среда полагается электронейтральной, полное число нуклонов сохраняется:

$$n_e V = (N_p - N_\pi) N_A, \quad nV = AN_A + n_n \left(V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad n = n_n + n_e \left(1 - \frac{n_n}{n_0} \right) \frac{A}{N_p - N_\pi}, \quad (16)$$

n – концентрация всех нуклонов.

Абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия соответствует минимум энергии среды E относительно независимых параметров A, N_p, N_π и N_A при фиксированных $N = nV$ и B :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial N_p} = \frac{\partial E}{\partial N_\pi} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, получаем систему уравнений для вычисления равновесных параметров сверхплотного замагниченного вещества:

$$\frac{\partial(Mc^2)}{\partial A} + \left(\frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} - \frac{\partial w_n}{\partial n_n} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_p} + \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_\pi} - \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = 0, \quad (20)$$

$$Mc^2 + A \left(\left(\frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} - \frac{\partial w_n}{\partial n_n} \right) + (N_p - N_\pi) \left(\frac{\partial w_e}{\partial n_e} \right) = 0, \quad (21)$$

откуда

$$\frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_p} = - \frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_\pi}, \quad (22)$$

$$Mc^2 - A \frac{\partial(Mc^2)}{\partial A} - N_p \frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_p} - N_\pi \frac{\partial(Mc^2)}{\partial N_\pi} = 0. \quad (23)$$

При этом имеет место однозначное соответствие между массовым числом A и разностью $(N_p - N_\pi)$ для наиболее устойчивого ядра при заданном B :

$$N_p - N_\pi = \sqrt{\frac{c_1 A}{2c_2} + \frac{c_5^2 B^4 A^2}{4c_2^2}} - \frac{c_5 B^2 A}{2c_2}. \quad (24)$$

Порог появления свободных нейтронов в электронно-ядерном веществе определяется в первом приближении ($c_4 = 0$ и малое при $B < 10^{18}$ Гс слагаемое $c_5 B^2 (N_p - N_\pi) A^{2/3}$ не учитывается) из соотношения:

$$c_3 - c_0 + c_1 A^{-1/3} - \frac{c_1}{2c_2 A} (4c_3 + c_2 A^{2/3}) = -\mu_n B, \quad (25)$$

где $\mu_n = \sigma_n \mu_\gamma = 6,0 \cdot 10^{-18}$ МэВ/Гс – магнитный момент нейтрона. Пороговые значения массового числа уменьшаются с ростом индукции магнитного поля: $A = 122$ при $B = 0$, $A = 105$ при $B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс, $A = 91$ при $B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс.

Порог появления пионов в ядрах электронно-ядерного вещества определяется при том же приближении выражением

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c'_\pi + \mu_\pi B}{2c_3} \right), \quad (26)$$

откуда с учетом (29) находим пороговые значения: $A = 83$ при $B = 0$, $A = 106$ при $B = 2 \cdot 10^{17}$ Гс, $A = 139$ при $B = 4 \cdot 10^{17}$ Гс. Легко видеть, что с ростом индукции магнитного поля значения массового числа наиболее устойчивых ядер, соответствующие порогу пионизации, увеличиваются. Заметим, что при заданной индукции магнитного поля массовое число наиболее устойчивого ядра однозначно зависит от плотности вещества.

Итак, если в отсутствие магнитного поля пионизация ядер может препятствовать появлению свободных нейтронов, то при $B > 2 \cdot 10^{17}$ Гс свободные нейтроны появляются при повышении плотности раньше, чем пионы в ядрах, и существование электронно-нейтронно-ядерной фазы в сильно замагниченном веществе вполне возможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г.С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г.С. Саакян, Л.Ш. Григорян // *Астрофизика*. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
2. Саакян, Г.С. Физика нейтронных звезд / Г.С. Саакян. – Дубна : Изд-во ОИЯИ, 1995. – 347 с.
3. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Вартамян, Ю.Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю.Л. Вартамян, Н.К. Овакимова // *Астрон. журн.* – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
5. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
6. Леинсон, Л.Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л.Б. Леинсон, В.Н. Ораевский // *Ядерн. физ.* – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
7. Шульман, Г.А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г.А. Шульман // *Астрофизика*. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

V.S. Sekerzhitsky. About Influence of Magnetic Field on Pionization of Nuclei

The strong magnetic field creating obstacles to pionization of heavy atomic nuclei is shown. In superdense magnetized matter the free neutrons may appear among lesser values of density than pions in nuclei.

УДК 539.12

Р.Г. Шуляковский

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ФЕРМИОНОВ В ИНСТАНТОННЫХ ПРОЦЕССАХ МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ

В рамках кирального предела КХД аналитически вычисляются инстантонные функции Грина для произвольного числа кварков. Полученный результат используется для оценки вклада в глубоконеупругое рассеяние инстантонных процессов с большой кварковой множественностью.

Введение

Инстантоны (классические решения уравнений Янга–Миллса в евклидовом пространстве с конечным действием) [1], описывающие в квантовой теории туннельные переходы между классически невырожденными вакуумными состояниями [2], позволяют объяснить ряд важных явлений сильных [3] и электрослабых взаимодействий [4]. В то же время на сегодняшний день отсутствует прямое экспериментальное подтверждение существования инстантонов. Возможная причина заключается в том, что вероятность любого инстантонного процесса пропорциональна малому фактору $\exp\left(-\frac{16\pi^2}{g^2}\right)$, который имеет порядок 10^{-160} в электрослабой теории и 10^{-10} в КХД.

В начале 1990-ых годов было показано, что сечение инстантонных процессов может значительно увеличиваться в процессах при высоких энергиях [5]:

$$\sigma \propto \exp\left(\frac{16\pi^2}{g^2} F(\sqrt{s})\right), \quad F(\sqrt{s}) = -1 + \frac{9}{8} \left(\frac{\sqrt{s}}{E_{sp}}\right)^4 - \frac{9}{16} \left(\frac{\sqrt{s}}{E_{sp}}\right)^2 + \dots, \quad \sqrt{s} < E_{sp},$$

где E_{sp} – энергия сфалерона (величина потенциального барьера, через который совершается туннелирование) [6], \sqrt{s} – энергия в системе центра масс. Т.е. при энергиях, близких к энергии сфалерона, может происходить компенсация малого экспоненциального фактора, подавляющего инстантонные процессы. В электрослабой теории инстантонные процессы могут наблюдаться при энергиях $\sqrt{s} \propto 10 - 100$ ТэВ, не достижимых на современных ускорителях, в КХД – при энергиях $\sqrt{s} \propto 1$ ГэВ [5].

Первые результаты по поиску КХД-инстантонов в электрон-протонном глубоконеупругом рассеянии на ускорителе HERA (DESY, Гамбург, Германия) оставляют вопрос открытым: избыток событий, который можно было бы интерпретировать как инстантонный сигнал, лежит в пределах погрешностей [7]. Эксперимент основывался на проверке теоретических предсказаний для широкого круга инстантонных характеристик в различных кинематических областях, полученных А. Рингвальдом и Ф. Шремпом [8]. В основе расчётов Рингвальда–Шремпа лежит инстантонный процесс, включающий минимально необходимое число кварков и произвольное число глюонов. В то же время инстантонные процессы с участием произвольного числа фермионов не подавлены малостью константы связи. Для изучения их влияния на свойства адронного спектра инстантонного канала глубоконеупругого рассеяния нужно вычислить многофермионные инстантонные функции Грина.

Многофермионные инстантонные функции Грина

Рассмотрим евклидову КХД с одним безмассовым кварковым ароматом:

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - i\bar{\psi} \hat{D} \psi, \quad \hat{D} = \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} - igA_{\mu}), \quad A_{\mu} = A_{\mu}^a \frac{\lambda^a}{2}.$$

Цветовые и спинорные индексы кварковых полей для упрощения выражений здесь и ниже опущены. Обобщение на случай трёх безмассовых ароматов u, d, s тривиально; рождение массивных кварков в инстантонных процессах подавлено и обычно не рассматривается [3].

Инстантонная функция Грина с произвольным числом внешних глюонов и кварков, записанная в виде функционального интеграла по полям, имеет следующий вид в гауссовом приближении:

$$\int DAD\psi D\bar{\psi} e^{-S[A,\psi,\bar{\psi}]} \prod_{i=1}^m \psi(x_i) \bar{\psi}(y_i) \prod_{j=1}^n A_{\mu_j}(z_j) \approx \int d^4z \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^5} dU \mu(\rho) e^{-\frac{8\pi^2}{g^2} \prod_{j=1}^n A_{\mu_j}^I(z_j - z)} \times \\ \times \int D\psi D\bar{\psi} e^{-\bar{\psi} \hat{D}[A^I] \psi} \prod_{i=1}^m \psi(x_i - z) \bar{\psi}(y_i - z),$$

где $A_{\mu_j}^I(z_j - z)$ – инстантонные решения [1], z_{μ} , ρ , U и $\mu(\rho)$ – соответственно центр, размер, ориентация в цветовом пространстве и плотность инстантонов [9]. Т.е. интегрирование по фермионным и бозонным полям производится независимо в гауссовом приближении. Бозонная часть интеграла хорошо изучена [5], поэтому сосредоточим внимание на фермионной части интеграла, которая может рассматриваться как фермионная функция Грина во внешнем (инстантонном) поле:

$$\langle \psi(x_1) \cdots \bar{\psi}(y_m) \rangle^I = \int D\psi D\bar{\psi} e^{-\int dx \bar{\psi} \hat{D}[A^I] \psi} \prod_{i=1}^m \psi(x_i) \bar{\psi}(y_i). \quad (1)$$

В простейшем случае $m = 0$ выражение (1), являющееся инстантонной амплитудой «вакуум \rightarrow вакуум», исчезает вследствие наличия нулевой моды (собственной функции $\psi_0(x)$ оператора $\hat{D}[A^I]$, принадлежащей нулевому собственному значению) [2].

Простейшая неисчезающая функция Грина имеет вид [2]:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle^I = \det' \{ \hat{D}[A^I] \} \psi_0(x) \bar{\psi}_0(y), \quad \det' \{ \hat{D}[A^I] \} = \prod_{n \neq 0} \lambda_n,$$

$$\hat{D}[A^I] \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad \lambda_0 = 0.$$

Вычислим 4-точечную фермионную функцию Грина:

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_2) \rangle^I = \prod_n \int dc_n d\bar{c}_n e^{\lambda_n c_n \bar{c}_n} \psi(x_1) \bar{\psi}(y_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_2) = \\ = \int dc_0 d\bar{c}_0 c_0 \psi_0(x_1) \bar{c}_0 \bar{\psi}_0(y_1) \prod_{n \neq 0} \int dc_n d\bar{c}_n (1 + \lambda_n c_n \bar{c}_n) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_2) + \dots, \\ \prod_{n \neq 0} \int dc_n d\bar{c}_n (1 + \lambda_n c_n \bar{c}_n) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_2) = \sum_{k \neq 0} \int dc_k d\bar{c}_k c_k \psi_k(x_2) \bar{c}_k \bar{\psi}_k(y_2) \times \\ \times \prod_{n \neq 0, k} \int dc_n d\bar{c}_n \lambda_n c_n \bar{c}_n = \sum_{k \neq 0} \psi_k(x_2) \bar{\psi}_k(y_2) \prod_{n \neq 0, k} \lambda_n = S^{nz}(x_2, y_2) \det' \{ \hat{D}[A^I] \},$$

где во второй строчке выражения опущены слагаемые, отличающиеся от предыдущего лишь перестановкой координат; пропагатор ненулевых мод в поле инстантона

$S^{nz}(x, y) = \sum_{j \neq 0} \frac{\psi_j(x) \bar{\psi}_j(y)}{\lambda_j}$ известен аналитически [3:10]. При вычислениях, как принято

при работе с функциональными интегралами по ферми-полям, использовались грасмановы переменные c_n, \bar{c}_n .

Таким образом, 4-точечная фермионная функция Грина в поле инстантона имеет вид:

$$\langle \psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(y_2) \rangle^I = \psi_0(x_1)\bar{\psi}_0(y_1)S^{nz}(x_2, y_2) \det\{\hat{D}[A^I]\} + (x_1 \leftrightarrow x_2) + (y_1 \leftrightarrow y_2) + (x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2). \quad (2)$$

Аналогично могут быть вычислены функции Грина высших порядков. Так, например, для шести фермионов получим

$$\langle \psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(y_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(y_3) \rangle^I = \psi_0(x_1)\bar{\psi}_0(y_1)\psi_0(x_2)\bar{\psi}_0(y_2) \times S^{nz}(x_3, y_3) \det\{\hat{D}[A^I]\} + (i \hat{a} \hat{b} \hat{a} \hat{b} \hat{a} \hat{b} \hat{a} \hat{b} \hat{a} \hat{b} \hat{a} \hat{b}). \quad (3)$$

Вклад многофермионных инстантонных процессов в глубоконеупругое рассеяние

Вклад инстантонных процессов с произвольной фермионной множественностью в полное сечение, оцененный О. Эспинозой [11],

$$\sigma_{multifermion} \propto \exp\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{s}}{E_{sp}}\right)^{\frac{4}{3}}\right], \quad \sqrt{s} < E_{sp},$$

может играть существенную роль при энергиях, близких к энергии сфалерона. Метод, использованный в работе [11], не позволяет вычислить вклад многофермионных процессов в распределение по множественности вторичных частиц и другие характеристики адронного спектра. Эта задача может быть решена при использовании многофермионных функций Грина.

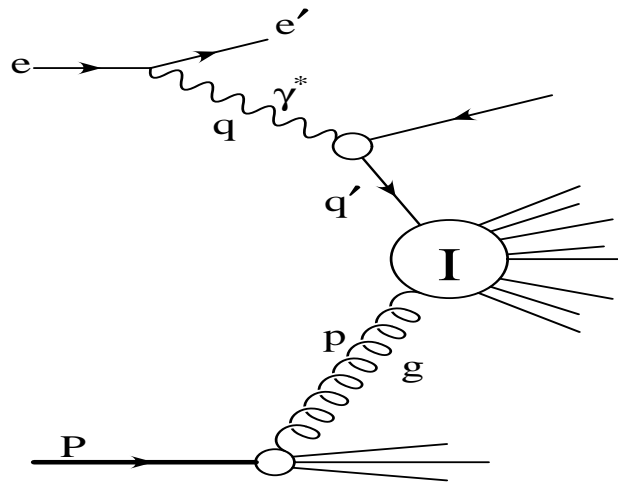


Рисунок 1 – Инстантонный канал глубоконеупругого электрон-протонного рассеяния

Амплитуда вероятности рождения $2m$ фермионов получается на основе функций Грина (2), (3) при использовании процедуры Леммана–Симанчика–Циммерманна. Квадрирование амплитуды и суммирование по всевозможным значениям импульсов и спинов конечных частиц приводит к распределению Пуассона по числу пар фермионов для каждого безмассового аромата в инстантонных процессах в дополнение к фиксированному (минимально допустимому) числу кварков [12; 13]. Учёт стадии адронизации производится при модификации монтекарловского генератора инстантонных событий QCDINS2.0. [14].

Результаты численного анализа для процесса глубоко-неупругого рассеяния (Рисунок 1) приведены на Рисунках 2 и 3.

Наиболее яркие отличия инстантонных процессов без учёта произвольной кварковой множественности и с её учётом проявляются в распределениях по числу К-мезонов и по числу адронных мини-струй в спектрах вторичных частиц.

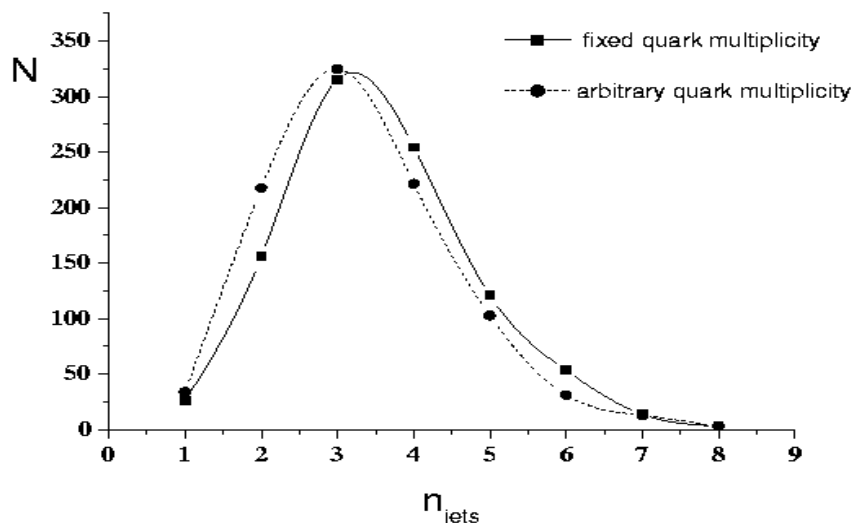


Рисунок 2 – Распределение по числу адронных мини-струй для случаев произвольной (пунктирная линия) и фиксированной (сплошная линия) кварковой множественности

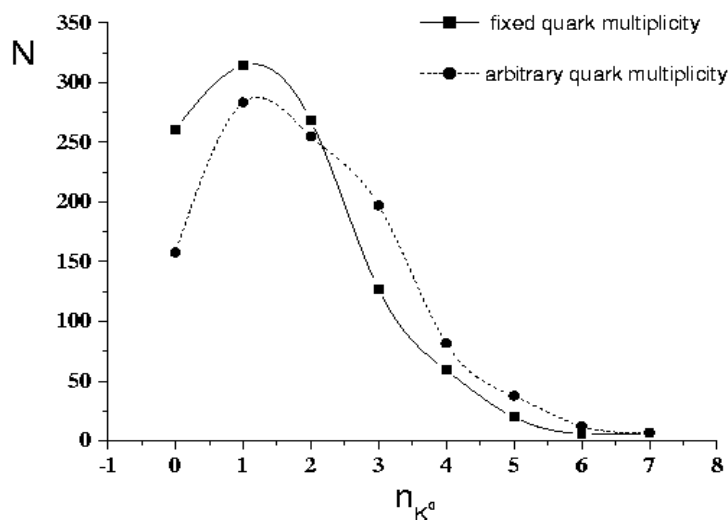


Рисунок 3 – Распределение по числу нейтральных каонов для случаев произвольной (пунктирная линия) и фиксированной (сплошная линия) кварковой множественности

Заклучение

Учёт произвольной кварковой множественности позволяет получить более точные критерии обнаружения инстантонов по сравнению с уже имеющимися, что может

быть использовано в эксперименте по поиску КХД-инстантонов на ускорителе HERA (DESY), а также, в перспективе, на ускорителе LHC (CERN).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belavin, A.A. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations / A.A. Belavin [et al.] // Phys. Lett. – 1975. – B59. – P. 85–87.
2. 't Hooft, G. Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies / G. Hooft // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37, P. 8–11; Hooft, G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle / G. Hooft // Phys. Rev. – 1976. – Vol. D 14. – P. 3432–3450.
3. Schaefer, T. Instantons in QCD / T. Schaefer, E. Shuryak // Rev. Mod. Phys. – 1998. – Vol. 70. – P. 323–425.
4. Рубаков, В.А. Электрослабое несохранение барионного числа в ранней Вселенной и в столкновениях частиц при высоких энергиях / В.А. Рубаков, М.Е. Шапошников // УФН. – 1996. – Т. 166. – С. 493–537.
5. Ringwald, A. High Energy Breakdown of Perturbation Theory in the Electroweak Instanton Sector / A. Ringwald // Nucl. Phys. – 1990. – Vol. B330. – P.1–18.
6. Manton, N. Topology in the Weinberg-Salam theory / N. Manton // Phys. Rev. – 1983. – Vol. D 28. – P. 2019–2026.
7. Adloff, C. Deep inelastic diffractive scattering at HERA / C. Adloff // Eur. Phys. J. – 2002. – Vol. C25. – P. 495–507.
8. Ringwald, A. Instanton-induced cross-section in deep-inelastic scattering / A. Ringwald, F. Schrempp // Nucl. Phys. – 1998. – Vol. B 438. – P.217–228.
9. Вайнштейн, А.И. Инстантонная азбука / А.И. Вайнштейн [и др.] // УФН. – 1982. – Т. 134. – С. 553–591.
10. Brown, L. Propagation functions in pseudoparticle fields / L.S. Brown [et al.] // Phys. Rev. – 1978. – Vol. D 17. – P.1583–1597.
11. Espinosa, O. Fermions in Anomalous Processes / O. Espinosa // Nucl. Phys. – 1992. – Vol. B375. – P. 263–278.
12. Kashkan, V.I. Non-zero Quark Modes Contribution to the QCD-Instanton-Induced Deep Inelastic Scattering / V.I. Kashkan, V.I. Kuvshinov, R.G. Shulyakovsky // Proceed. of the 10th Annual Seminar «Nonlinear phenomena in complex systems» (May 15–18, 2001, Minsk, Belarus). – 2001. – P.172–173.
13. Kuvshinov, V.I. New Criteria of QCD-Instantons Search in Deep Inelastic Scattering / V.I. Kuvshinov, R.G. Shulyakovsky / Proceed. of the 17-th International Workshop on Quantum Field Theory and High Energy Physics / QFTHEP'2003 / (September 4–11, 2003, Volga, Russia). – 2004. – P. 363–367.
14. Ringwald, A. QCDINS 2.0 – A Monte Carlo generator for instanton-induced processes in deep-inelastic scattering / A. Ringwald, F. Schrempp // Comput. Phys. Commun. – 2000. – Vol. 132. – P. 267–305.

R.G. Shulyakovsky. Multifermion Green Functions for Instanton Processes and their Contribution into Deep Inelastic Scattering

In the chiral limit of QCD instanton Green functions for arbitrary number of quarks are calculated analytically. The obtained results are used for the estimation of the processes with large quark multiplicity contribution into deep inelastic scattering.

УДК 517.955

А.А. Ворошилов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

*Посвящается памяти моего Учителя
профессора А.А. Килбаса*

Исследуется задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля положительного порядка по времени. Рассматриваемое уравнение обобщает уравнение конвекции и дробное диффузионно-волновое уравнение. С использованием метода интегральных преобразований находится решение поставленной задачи в квадратурах. Решение выражается в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера.

Введение

Пусть $(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t)$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от функции $u(x,t)$ по второй переменной [1, с. 342]:

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0, \alpha > 0, n = -[\alpha]). \quad (1)$$

В частности, если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то дробная производная Римана–Лиувилля порядка α совпадает с обычной производной n -го порядка.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Если $\alpha = 1$, то $(D_{0+,t}^1 u)(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$,

и уравнение (2) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением конвекции [2, (1.1.4)]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0). \quad (3)$$

Поэтому уравнение (2) называют дробным уравнением конвекции.

В случае $\mu = 0$ уравнение (2) совпадает с дробным диффузионно-волновым уравнением

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0), \quad (4)$$

исследованным в работах [3–5].

Интерес к изучению дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка вызван их многочисленными приложениями при решении задач физики, механики и других прикладных наук [6, гл. 7]. В частности, в статье [7] получен алгоритм решения дробного уравнения конвекции с нелинейным членом, содержащего

дробную производную Капуто ${}^c D_{0+,t}^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial x} + \Psi(u) + f(x,t)$ ($0 < x < 1, 0 < \alpha \leq 1, t > 0$).

Настоящая работа посвящена решению уравнения (2) порядка $\alpha > 0$ с начальными условиями

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,0+) = f_k(x) \quad (k = 1, \dots, n = -[\alpha], x \in \mathbb{R}). \quad (5)$$

Здесь производные $(D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,t)$ определяются формулой (1), при этом предполагается, что $(D_{0+,t}^0u)(x,t) = u(x,t)$, а выражение $(D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,0+)$ понимается как предел

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} (D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,t) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то задача (2), (5) представляет собой задачу Коши. Поэтому, по аналогии, её называют задачей типа Коши.

1. Решение задачи в терминах преобразований Лапласа и Фурье

Для решения рассматриваемой задачи используем метод интегральных преобразований. Применим преобразование Лапласа функции $u(x,t)$ по переменной t

$$(L_t u)(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt \quad (x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}) \quad (6)$$

и преобразование Фурье по переменной x

$$(F_x u)(\sigma,t) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\sigma x} u(x,t) dx \quad (\sigma \in \mathbb{R}, t > 0), \quad (7)$$

а также их обратные преобразования относительно $s \in \mathbb{C}$ и $\sigma \in \mathbb{R}$

$$(L_s^{-1}u)(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} u(x,s) ds \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad (8)$$

$$(F_\sigma^{-1}u)(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\sigma x} u(\sigma,t) d\sigma \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad (9)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ – фиксированное действительное число. Свойства прямых и обратных преобразований Лапласа и Фурье и описание классов основных и обобщённых функций $u(x,t)$, для которых эти преобразования определены, можно найти в монографиях [8, Гл. 1–2], [9, §3–4], [10, Гл. 1, §1]. В частности, операторы (6), (8) и (7), (9) взаимно обратны на «достаточно хороших» функциях $u(x,t)$.

Пусть существуют преобразования Фурье $(F_x f_k)(\sigma)$ функций $f_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$). Применяя к обеим частям уравнения (2) преобразование Лапласа (6), учитывая начальные условия (5) и формулу преобразования Лапласа частной дробной производной Римана–Лиувилля [11, (2.248)]

$$(L_t D_{0+,t}^\alpha u)(x,s) = s^\alpha (L_t u)(x,s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} (D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x,0+),$$

получим соотношение

$$s^\alpha (L_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^n s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (L_t u)(x,s) + \mu \frac{\partial}{\partial x} (L_t u)(x,s).$$

Применяя преобразование Фурье (7) к обеим частям этого равенства и учитывая формулу преобразования Фурье производной

$$\left(F_x \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) (\sigma,s) = (-i\sigma)^n (F_x u)(\sigma,s) \quad (n \in \mathbb{N})$$

с $n = 1$ и $n = 2$, приходим к уравнению

$$(F_x L_t u)(\sigma, s) = \sum_{k=1}^n \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} (F_x f_k)(\sigma) \quad (\sigma \in R, s \in C). \quad (10)$$

Применяя к этому соотношению обратные преобразования Лапласа (8) и Фурье (9), получим решение $u(x, t)$ исходной задачи (2), (5) в виде

$$u(x, t) = \left(L_s^{-1} F_\sigma^{-1} \left[\sum_{k=1}^n \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} (F_x f_k)(\sigma) \right] \right) (x, t). \quad (11)$$

Другое представление получим, применяя к соотношению (10) обратное преобразование Фурье и используя теорему о свертке Фурье. По формулам преобразования Фурье, равенство (10) примет вид:

$$(L_t u)(x, p) = \sum_{k=1}^n \frac{s^{k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^\alpha + \mu^2}} e^{-\frac{1}{2\lambda^2}(\mu x + |x| \sqrt{4\lambda^2 s^\alpha + \mu^2})} *_x f_k(x),$$

где $*_x$ – свертка Фурье по переменной x .

Таким образом, по формуле обратного преобразования Лапласа

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s^{k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^\alpha + \mu^2}} e^{st - \frac{1}{2\lambda^2}(\mu x + |x| \sqrt{4\lambda^2 s^\alpha + \mu^2})} ds *_x f_k(x), \quad (12)$$

где $\gamma \in R$ – фиксированное действительное число.

2. Решение задачи в терминах функции Миттаг-Леффлера

Выразим решение (11) в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера [12, 18.1(18)]

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad (z \in C, \alpha, \beta > 0),$$

являющейся целой функцией от z .

Применяя обратное преобразование Лапласа к обеим частям формулы (10), получим

$$(F_x u)(\sigma, t) = \sum_{k=1}^n L_s^{-1} \left(\frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \right) (t) (F_x f_k)(\sigma) \quad (\sigma \in R, t > 0). \quad (13)$$

Лемма 1. *Имеет место следующая формула обратного преобразования Лапласа:*

$$L_s^{-1} \left(\frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \right) (t) = t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left((-\lambda^2 \sigma^2 - \mu i \sigma) t^\alpha \right). \quad (14)$$

Доказательство. Справедлива формула преобразования Лапласа [1, (1.93)] функции Миттаг-Леффлера:

$$\left(L_z \left[z^{b-1} E_{a,b}(z^a) \right] \right) (s) = \frac{s^{a-b}}{s^a - 1} \quad (\operatorname{Re}(z) > 1). \quad (15)$$

Используя формулу (15) с параметрами $a = \alpha$, $b = \alpha - k + 1$, получаем соотношение

$$\left(L_z \left[z^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(z^\alpha) \right] \right) (s) = \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - 1}. \quad (16)$$

По свойству умножения аргумента на число,

$$L_z(f(qz))(s) = \frac{1}{q} (Lf) \left(\frac{s}{q} \right). \quad (17)$$

Применяя соотношение (17) с параметром $q = (-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma)^{1/\alpha}$ и учитывая формулу (16), получим:

$$\begin{aligned} & L_t \left(t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma) t^\alpha \right) \right) (s) = \\ & = \left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma \right)^{(k-\alpha)/\alpha} L_t \left(\left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma)^{1/\alpha} t \right)^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left(\left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma)^{1/\alpha} t \right)^\alpha \right) \right) (s) = \\ & = \left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma \right)^{(k-\alpha)/\alpha} \cdot \frac{1}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma \right)^{1/\alpha}} \cdot \frac{\left(\frac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma \right)^{1/\alpha}} \right)^{k-1}}{\left(\frac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma \right)^{1/\alpha}} \right)^\alpha - 1} = \\ & = \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2\sigma^2 + \mu i\sigma}, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение Леммы.

Учитывая формулу (14), перепишем уравнение (13) в виде

$$(F_x u)(\sigma, t) = \sum_{k=1}^n t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma) t^\alpha \right) (F_x f_k)(\sigma),$$

откуда можно записать представление решения задачи (2), (5) в виде обратного преобразования Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{\alpha-k}}{2\pi} \int_R E_{\alpha, \alpha-k+1} \left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma) t^\alpha \right) (F_x f_k)(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma. \quad (18)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$), то задача типа Коши (2), (5) имеет решение $u(x, t)$, даваемое формулой (18), при условии что интегралы в (18) сходятся.

Исследуем решение (18) задачи (2), (5) при $\alpha = 1$. В этом случае $k = n = 1$ и

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_R E_{1,1} \left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma) t \right) (F_x f_1)(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_R \exp \left((-\lambda^2\sigma^2 - \mu i\sigma) t \right) (F_x f_1)(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = \\ &= F_\sigma^{-1} \left(F_x \left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(x + \mu t)^2}{4\lambda^2 t} \right] \right) (\sigma) \cdot (F_x f_1)(\sigma) \right) (x). \end{aligned} \quad (19)$$

В соответствии с теоремой о свертке Фурье, решение (19) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(x + \mu t)^2}{4\lambda^2 t} \right] *_x f_1(x), \quad (20)$$

где $*_x$ – свертка Фурье по переменной x , и совпадает с известным решением уравнения конвекции (3) [2, (1.1.4)].

Если же $\mu = 0$, то решение (18) принимает вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{\alpha-k}}{2\pi} \int_R E_{\alpha, \alpha-k+1} \left(-\lambda^2\sigma^2 t^\alpha \right) (F_x f_k)(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma \quad (21)$$

и совпадает с решением дробного диффузионно-волнового уравнения (4), полученным в работе [5, (21)].

Заклучение

В работе с использованием метода интегральных преобразований получено решение задачи типа Коши для дифференциального уравнения с частной производной Римана–Лиувилля произвольного положительного порядка, являющегося обобщением уравнения конвекции.

Результаты являются новыми и носят теоретический характер. Они вносят вклад в разработку теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.

Практическое использование результатов статьи возможно в приложениях при решении интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка, а также при решении конкретных задач физики, механики и других прикладных наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Polianin, A.D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / A.D. Polianin. – Boca Raton, 2002.
3. Ворошилов, А.А. Задача типа Коши для уравнения диффузии дробного порядка / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 14–18.
4. Kilbas, A.A. Cauchy-type Problem For Diffusion-wave Equation With The Riemann–Liouville Partial Derivative / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, A.A. Voroshilov // Fractional Calculus And Applied Analysis. – 2005. – Vol.8, № 4. – P. 1–28.
5. Ворошилов, А.А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады академии наук. – 2006. – Т. 406, № 1. – С. 12–16.
6. Kilbas, A.A., Trujillo, J.J. // Appl. Anal. 2002. – V.81, № 2. – P. 435–493.
7. Momani, S. An algorithm for solving the fractional convection–diffusion equation with nonlinear source term / S. Momani // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 12, Issue 7, 2007, P. 1283–1290.
8. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М., 1974.
9. Снеддон, И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М., 1955.
10. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977.
11. Podlubny, I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering / I. Podlubny. – San Diego, 1999. – 198 p.
12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Т.3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М. : Наука, 1967.

A.A. Voroshilov. Solving of Cauchy-Type Problem for Fractional Convection Equation with Riemann-Liouville Partial Derivative

The Cauchy-type problem for the linear differential equation with Riemann–Liouville partial fractional derivative of positive order with respect to time is investigated. The equation under consideration generalizes the convection equation and the fractional diffusion-wave equation. Using direct and inverse Laplace and Fourier transforms, a solution in closed form of the above problem is established. It is shown that the solution of the problem is established in terms of special Mittag-Leffler function.

УДК 517.9

А.И. Жук, О.Л. Яблонский

МНОГОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуются системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций. Получены ассоциированные решения рассматриваемых систем.

В данной работе исследуется следующее уравнение с обобщенными коэффициентами на отрезке $T = [0, a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(x(t))L^j(t), \quad i = \overline{1, p} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ – некоторые липшицевые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T . Вообще говоря, $L^j(t)$ являются обобщенными функциями и функции $f^{ij}(x(t))$ не гладкие, то возникает проблема определения произведения $f^{ij}(x(t))L^j(t)$. Поэтому есть трудности с корректным определением решения задачи (1), (2).

В настоящее время существует несколько подходов к преодолению данной трудности. Первый подход (см., напр., [5, 6]) связан с попытками привлечения аппарата теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(x(t))L^j(t)$.

Второй подход заключается в переходе к интегральному уравнению [1], где интеграл понимается в определенном смысле, например в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса и т.д.

Третий подход [6] опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1), (2) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения, полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря, различны.

В данной статье уравнение (1), (2) рассматривается в алгебре новых обобщенных функций определенной в [8; 4]). Согласно этим работам, уравнение (1), (2) заменяется уравнением в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Отметим, что новые обобщенные функции определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1), (2) с помощью трех описанных выше подходов, что и было показано в работах [3; 7] для аналогичной одномерной задачи.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

с начальным условием $\tilde{x}|_{[\tilde{a}; \tilde{h}]} = \tilde{x}^0$, где $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{a} = [\{a\}] \in \tilde{T}$ и $\tilde{\tau} = [\{t_n\}] \in \tilde{T}$, $\tilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\tilde{g} = [\{g_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и $L_n \rightarrow L$, $x_n^0 \rightarrow x(0)$. Далее, если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса, ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(x_n(t)) [L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1, p}, \quad (4)$$

$$x_n(t)|_{[0; h_n]} = x_{n0}(t). \quad (5)$$

Здесь $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \in C^\infty(R)$, $\rho \geq 0$, $supp(\rho) \subseteq [0; 1]$, $\int_0^1 \rho(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho}_n(x_1, \dots, x_p) = n^p \tilde{\rho}(nx_1, \dots, nx_p)$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^p)$, $\tilde{\rho} \geq 0$, $\int_{[0; 1]^p} \tilde{\rho}(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p = 1$, $supp(\tilde{\rho}_n) \subset [0; 1]^p$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = \tau_i + m_i h_n$, где $\tau_i \in [0; h_n)$, $m_i \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_i) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n^{ij}(x_n(\tau_i + kh_n)) [L_n^j(\tau_i + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_i + kh_n)], \quad i = \overline{1, p}, \quad (6)$$

Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_{\mu_r \leq t} f^{ij}(x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1, p}, \quad (7)$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r + 0) - L^d(\mu_r - 0)$ – величина скачка, $S^i(x, u) = \varphi^i(1, x, u) - \varphi^i(0, x, u)$, а функция $\varphi^i(t, x, u)$ находится из системы уравнений $\varphi^i(t, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\varphi(s, x, u)) ds$, $i = \overline{1, p}$.

Интеграл $\int_u^t f(x) dL(x)$ в этом случае понимается в смысле Лебега–Стилтьеса на промежутке $(u; t]$, а существование и единственность решения системы (7) для липшицевых f^{ij} доказано в [2] (также [3]).

Лемма 1. Пусть для любого n справедливо неравенство

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k Z_k,$$

где A , A_k , B_k – некоторые положительные константы и $Z_k > 0$, $k = \overline{0, n}$.

Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \leq (A + \sum_{k=1}^n A_k) \exp(\sum_{k=1}^n B_k).$$

В дальнейшем под модулем вектора $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ будем понимать

$$|x(t)| = \sum_{i=1}^p |x^i(t)| \quad \text{и аналогично модуль матрицы} \quad |f(x)| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |f^{ij}(x)|.$$

Теорема 1. Пусть функции f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. Тогда при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $h_n = o(1/n)$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (4)–(5) сходится к решению системы уравнений (7) для всех $t \in T$, если $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \rightarrow 0$ для любого $t \in T$.

Доказательство. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} |x_n^1(t) - x^1(t)| &= |x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - \\ &- L_n^j(\tau_t + kh_n)] - \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) - \sum_{\mu_r \leq t} S^1(x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))| \leq \\ &\leq |x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1| + \sum_{j=1}^q \left| \int_0^{\tau_t} f_n^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) \right| + \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) - \right. \\ &- f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))) [L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n)] + \\ &+ \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) \times \right. \\ &\times [L^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] + \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - \right. \\ &- L^{jc}(\tau_t + kh_n)] - \int_{\tau_t}^t f^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) \left. \right| + \left| \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) \times \right. \\ &\times [L_n^{jd}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jd}(\tau_t + kh_n)] - \sum_{\mu_r \leq t} S^1(x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) \left. \right| = \\ &= I_0(t) + \sum_{j=1}^q (I_1^j(t) + I_2^j(t) + I_3^j(t) + I_4^j(t) + I_5(t)). \end{aligned}$$

Везде далее C – константа, не зависящая от n , t , h_n , значение которой может меняться в разных формулах. Так как функции f^{ij} ограничены а, функции $L^j(t)$ имеют ограниченную вариацию, то $I_1^j(t) \leq C \varlimsup_{t \in [0; h_n]} L^{jc}(t)$, $j = \overline{1, q}$.

Используя то, что функции f^{ij} удовлетворяют условию Липшица, получим:

$$\begin{aligned} I_2^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) - f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))) [L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n)] \right| \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{m_t-1} (|x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n)| + 1/n) |L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n)|. \end{aligned}$$

Для оценки слагаемых вида $I_3^j(t)$ $j = \overline{1, q}$ разобьем сумму на две, затем в первой сделаем замену индексов суммирования, после чего воспользуемся условием Липшица и видом $x(t)$:

$$\begin{aligned} I_3^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) \times \right. \\ &\times [L^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] \left. \right| = \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - \right. \\ &- L^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] \left. \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{m_t} f_n^{1j}(x(\tau_t + (k-1)h_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] = \left| \sum_{k=1}^{m_t-1} (f^{1j}(x(\tau_t + (k-1)h_n)) - f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))) \times \right. \\
& \quad \times [L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] + f^{1j}(x(\tau_t + (m_t-1)h_n)) [L_n^{jc}(\tau_t + m_t h_n) - \\
& \quad \left. - L^{jc}(\tau_t + m_t h_n)] - f^{1j}(x(\tau_t)) [L_n^{jc}(\tau_t) - L^{jc}(\tau_t)] \right| \leq C \sum_{k=1}^{m_t-1} \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + kh_n + 1/n]} L^{jc}(t) \times \\
& \times (|x(\tau_t + (k-1)h_n) - x(\tau_t + kh_n)| + h_n) + C \operatorname{var}_{t \in [\tau_t, \tau_t + 1/n]} L^{jc}(t) + C \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + m_t h_n, \tau_t + m_t h_n + 1/n]} L^{jc}(t) \leq \\
& \leq C \operatorname{var}_{t \in T} x(t) \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) + C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n.
\end{aligned}$$

Обозначим $\delta(s) = \tau_t + kh_n$, $s \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n]$. Тогда из свойств интеграла Стильеса вытекает оценка для слагаемых вида $I_4^j(t)$.

$$\begin{aligned}
I_4^j(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L^{jc}(\tau_t + kh_n)] - \int_{\tau_t}^t f^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) \right| = \\
&= \left| \int_{\tau_t}^t [f^{1j}(x(\delta(s))) - f^{1j}(x(s))] dL^{jc}(s) \right| \leq C \sum_{k=1}^{m_t-1} (\operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n]} x(t) + h_n) \times \\
& \quad \times \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n]} L^{jc}(t) \leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) \operatorname{var}_{t \in T} x(t) + Ch_n \leq \\
& \leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n.
\end{aligned}$$

Рассмотрим $I_5^j(t)$. Так как функция $L^j(\cdot)$ имеет не более чем четное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum_{r=1}^{\infty} |\Delta L^j(\mu_r)| < +\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in N$ такое, что $\sum_{j=1r=n_0}^q \sum_{r=n_0}^{\infty} |\Delta L^j(\mu_r)| < \varepsilon$. Представим L^{jd} в виде $L^{jd}(t) = L^{jd, \geq n_0}(t) + L^{jd, < n_0}(t)$, где $L^{jd, \geq n_0}(\cdot)$ и $L^{jd, < n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_r с номерами, большими либо равными n_0 , т.е. $r \geq n_0$, и меньшими n_0 , т.е. $r < n_0$, соответственно. Получим:

$$\begin{aligned}
I_5(t) &= \left| \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jd}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jd}(\tau_t + kh_n)] - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\mu_r \leq t} S^1(x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) \right| = \left| \sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jd}(\tau_t + (k+1)h_n) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - L_n^{jd}(\tau_t + kh_n)] - \sum_{\mu_r \leq t} \Delta L^{jd}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right] \right| \leq \\
& \leq \left| \sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jd, < n_0}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jd, < n_0}(\tau_t + kh_n)] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{\mu_r \leq t} \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left| \sum_{j=1}^q \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^{jd, \geq n_0}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jd, \geq n_0}(\tau_t + kh_n)] - \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$- \sum_{\mu_r \leq t} \Delta L^{jd, \geq n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \Big| = \sum_{j=1}^q I_5^{j1}(t) + \sum_{j=1}^q I_5^{j2}(t).$$

Так как функция $L^{jd, < n_0}$ имеет $n_0 - 1$ точку разрыва на отрезке T , то существует конечное число номеров k_r таких, что $\mu_r - 1/n \in [\tau_t + k_r h_n, \tau_t + (k_r + 1)h_n]$, причем, если $h_n + 1/n < \min_{1 \leq r \leq n_0-1} |\mu_{r+1} - \mu_r|$, то $k_r \neq k_s$ при $r \neq s$.

Положим $\xi_k^r = \int_{\mu_r - kh_n - \tau_t}^{1/n} \rho_n(s) ds$. Тогда $0 \leq \xi_0^r \leq \xi_1^r \leq \dots \leq \xi_{l+2}^r = 1$, где $l = [1/nh_n]$

(квадратные скобки обозначают целую часть числа). Таким образом, ξ_k^r образуют разбиение отрезка $[0; 1]$. Используя вид $L_n^{jd, < n_0}$, получаем для достаточно больших n

$$\begin{aligned} I_5^{j1}(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_l-1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \int_{\mu_r - (k+1)h_n - \tau_t}^{\mu_r - kh_n - \tau_t} \rho_n(s) ds - \right. \\ &- \left. \sum_{\mu_r \leq t} \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| = \\ &= \sum_{\mu_r \leq t} \left| \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \right| \sum_{\mu_r - 1/n - h_n < \tau_t + kh_n < \mu_r} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) \int_{\mu_r - (k+1)h_n - \tau_t}^{\mu_r - kh_n - \tau_t} \rho_n(s) ds - \\ &- \left| \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{\mu_r \leq t} \left| \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \right| \sum_{k=k_r}^{k_r+l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) \int_{\mu_r - (k+1)h_n - \tau_t}^{\mu_r - kh_n - \tau_t} \rho_n(s) ds - \\ &- \left| \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{\mu_r \leq t} \left| \Delta L^{jd, < n_0}(\mu_r) \right| \sum_{k=0}^{l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n)) (\xi_{k+1}^r - \xi_k^r) - \\ &- \left| \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right|. \end{aligned}$$

Далее оценим сумму, стоящую под знаком модуля в последнем неравенстве:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n)) (\xi_{k+1}^r - \xi_k^r) - \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} (f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n)) - f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)))) ds \right| \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{l+1} \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} |x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n) - \phi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))| ds + C/n = \\ &= C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) + \sum_{j=1}^q \sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n)) \times \right. \\ &\times (L_n^j(\tau_t + (k_r + z + 1)h_n) - L_n^j(\tau_t + (k_r + z)h_n)) - x^i(\mu_r - 0) - \\ &\left. - \sum_{j=1}^q \Delta L^j(\mu_r) \int_0^s f^{ij}(\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) du \right| ds + C/n = I. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из определения функций $x_n(t)$ и $\varphi(t, x, u)$. Далее имеем:

$$\begin{aligned}
I &\leq C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} |x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)| ds + \\
&+ C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} \left| \sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(L_n^j(\tau_t + (k_r + z + 1)h_n) - \right. \\
&- L_n^j(\tau_t + (k_r + z)h_n)) - \Delta L^j(\mu_r) \int_0^s f^{ij}(\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) du \Big| ds + C/n \leq \\
&\leq C \sum_{i=1}^p |x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)| + C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} \text{var}_{\tau_t + k_r h_n \leq t \leq \tau_t + (k_r + k)h_n} L^{jc}(t) ds + \\
&+ C\varepsilon + C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} |\Delta L^j(\mu_r) \sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \\
&- \Delta L^j(\mu_r) \int_0^s \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du| ds + C/n = I.
\end{aligned}$$

Воспользуемся свойством вариации функции $L^{jc}(t)$:

$$\begin{aligned}
I &\leq C \sum_{i=1}^p |x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)| + C \sum_{j=1}^q \text{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon + \\
&+ C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} |\Delta L^j(\mu_r) \int_{\xi_k^r}^s \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du ds + \\
&+ C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} |\Delta L^j(\mu_r) \sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \\
&- \int_0^{\xi_k^r} \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du| ds + C/n \leq \\
&\leq C \sum_{i=1}^p |x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)| + C \sum_{j=1}^q \text{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon + \\
&+ C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\Delta L^j(\mu_r) \int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r} (s - \xi_k^r) ds + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\Delta L^j(\mu_r) \sum_{k=1}^{l+1} |\xi_{k+1}^r - \xi_k^r| \times \\
&\times \left| \sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \int_0^{\xi_k^r} \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du \right| + C/n \leq \\
&\leq C \sum_{i=1}^p |x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)| + C \sum_{j=1}^q \text{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon + \\
&+ C \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\Delta L^j(\mu_r) (\xi_{k+1}^r - \xi_k^r)^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |\Delta L^j(\mu_r) \sum_{k=0}^l |\xi_k^r - \xi_{k-1}^r| \times \\
&\times \left| \sum_{z=0}^k f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \int_0^{\xi_{k+1}^r} \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du \right| + C/n.
\end{aligned}$$

Объединяя предыдущие неравенства, получаем:

$$\left| \sum_{k=0}^{l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n))(\xi_{k+1}^r - \xi_k^r) - \int_0^1 f^{1j}(\phi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{i=1}^p \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0) \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C \max \left| \xi_{k+1}^r - \xi_k^r \right| + \\ &+ C \sum_{k=0}^l \left| \xi_k^r - \xi_{k-1}^r \right| \left| \sum_{z=0}^k f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n)) (\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \right. \\ &\left. - \int_0^{\xi_{k+1}^r} \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)) du \right| + C/n + C\varepsilon. \end{aligned}$$

По неравенству Гронуолла из леммы 1 получим:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n)) (\xi_{k+1}^r - \xi_k^r) - \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| \leq \\ &\leq C \sum_{i=1}^p \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0) \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C \max \left| \xi_{k+1}^r - \xi_k^r \right| + C/n + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Для $I_5^{j1}(t)$ получим

$$\begin{aligned} I_5^{j1}(t) &\leq C \sum_{i=1}^p \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0) \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + \\ &+ C \max \left| \xi_{k+1}^r - \xi_k^r \right| + C1/n + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Для $I_5^{j2}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} I_5^{j2}(t) &= \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L^{jd, \geq n_0}(\tau_t + kh_n) - L^{jd, \geq n_0}(\tau_t + (k+1)h_n)] - \right. \\ &\left. - \sum_{\mu_r \leq t} \Delta L^{jd, \geq n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))) ds \right| \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left| x_n^1(t) - x^1(t) \right| \leq \left| x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^{jc}(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} \left| x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n) \right| + \\ &+ \frac{1}{n} \left| L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) \right| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n + \\ &+ C \sum_{i=1}^p \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0) \right| + C \max \left| \xi_{k+1}^r - \xi_k^r \right| + C1/n + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство получаем и для остальных x_n^i , $i = \overline{1, p}$, складывая их, получаем:

$$\begin{aligned} &\left| x_n(t) - x(t) \right| \leq \sum_{i=1}^p \left| x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^{jc}(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} \left| x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n) \right| + \\ &+ \frac{1}{n} \left| L_n^{jc}(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^{jc}(\tau_t + kh_n) \right| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n + \\ &+ C \sum_{i=1}^p \left| x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0) \right| + C \max \left| \xi_{k+1}^r - \xi_k^r \right| + C/n + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1 к последнему неравенству, имеем:

$$\left| x_n(t) - x(t) \right| \leq \sum_{i=1}^p \left| x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^{jc}(t) + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n +$$

$$+ C \max |\xi_{k+1}^r - \xi_k^r| + C/n + C\varepsilon.$$

$$\text{Так как } \max |\xi_{k+1}^r - \xi_k^r| = \max \left| \int_{\mu_r - (k+1)h_n - \tau_r}^{\mu_r - kh_n - \tau_r} \rho_n(s) ds \right| = \max \left| \int_{n(\mu_r - (k+1)h_n - \tau_r)}^{n(\mu_r - kh_n - \tau_r)} \rho(s) ds \right| \leq nh_n \max |\rho(s)|,$$

то $\max |\xi_{k+1}^r - \xi_k^r| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $h_n = o(1/n)$.

Устремляя $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $h_n = o(1/n)$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, из непрерывности $L^{jc}(t)$, на отрезке T , а значит, и равномерной непрерывности на этом отрезке, получим, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ для любого $t \in T$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Das, P.C. Existence and stability of measure differential equations / P.C. Das, R.R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
2. Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illinois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
3. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
4. Антоневиц, А.Б. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А.Б. Антоневиц, Я.В. Радыно // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318. – №2. – С. 267–270.
5. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский // М. : Мир. – 1976. – С. 311.
6. Завалицин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалицин, А.Н. Сесекин // М. : Наука. – 1991. – С. 256.
7. Ковальчук, А.Н. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский // Известия ВУЗов. Математика – 2005. – №3. – С. 23–31.
8. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.

A.I. Zhuk, A.L. Yablonski. Multidimensional Differential Equations with Generalized Coefficients in the Algebra of Generalized Functions

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of generalized functions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.

УДК 512.542

В.Н. Княгина

О p -РАЗРЕШИМОСТИ КОФАКТОРА ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Для простого числа p устанавливается p -разрешимость кофактора H/H_G при условии, что подгруппа H конечной группы G перестановочна со всеми подгруппами порядка $p^\alpha q^\beta$, где q – любой простой делитель порядка группы, α и β – натуральные числа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Если H – подгруппа группы G , то $H_G = \bigcap_{x \in G} H^x$ – ее ядро в группе G , а H/H_G – кофактор подгруппы H в группе G . Примарная группа – это группа порядка p^α , а бипримарная группа – группа порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q – различные простые числа, α и β – натуральные числа.

Квазинормальной называют подгруппу, перестановочную со всеми подгруппами группы. Ясно, что квазинормальная силовская подгруппа нормальна. Поэтому нильпотентной является группа, у которой все силовские подгруппы квазинормальны. Согласно теореме Ито–Сепы [1] кофакторы квазинормальных подгрупп нильпотентны. Поскольку подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, будет перестановочна с их порождением, то нильпотентным будет кофактор подгруппы, перестановочной со всеми примарными подгруппами. Это следует из того, что подгруппа, перестановочная со всеми примарными подгруппами, является квазинормальной.

Ясно, что подгруппа, перестановочная со всеми бипримарными подгруппами, не обязана быть квазинормальной. Примером служит подгруппа порядка 2 в симметрической группе степени 3.

Э.М. Пальчик [2] установил следующие свойства подгруппы H , перестановочной со всеми бипримарными подгруппами группы G :

1) либо H субнормальна, либо примарна;

2) фактор-группа H/H_G разрешима; в частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна.

В настоящей заметке развиваются результаты работы [2] и доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что силовская p -подгруппа P группы G ненормальна в G и перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G . Тогда G – бипримарная группа, P максимальна в G и силовская q -подгруппа Q – элементарная абелева, где $q \neq p, q \in \pi(G)$. Кроме того, либо G – группа Фробениуса и Q – минимальная нормальная подгруппа в G , либо $|Q| = q$ и p делит $q-1$.*

Теорема 2. *Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G , то H/H_G p -разрешима.*

При $p = 2$ получаем

Следствие 2.1. Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми бипримарными подгруппами четного порядка, то H/H_G разрешима. В частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна в G .

В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [3; 4]. Напомним, что pd -подгруппой называется подгруппа, порядок которой делится на простое число p . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G . Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A . Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой. Подгруппа S называется *субнормальной подгруппой* группы G , если существует цепочка подгрупп

$$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n = G$$

такая, что S_i – нормальная подгруппа в S_{i+1} для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Группа, которая содержит подгруппу H такую, что $H \cap H^x = 1$ для всех $x \in G \setminus H$, называется *группой Фробениуса*. Известно, что в группе Фробениуса G существует нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что $G = [K]H$.

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Известно, что группы Шмидта имеют порядок, делящийся точно на два простых числа, одна из силовских подгрупп нормальная, а другая – циклическая.

Более подробная информация о группах Шмидта и группах Фробениуса имеется в [3; 4].

Вспомогательные результаты

Лемма 1. Каждая непримарная pd -группа порождается своими бипримарными pd -подгруппами.

Доказательство. Пусть G – непримарная pd -группа. Если она p -нильпотентна, то в ней существуют $\{p, q\}$ -холловы подгруппы для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, [4, гл. VI]. Ясно, что группа G ими порождается. Пусть G не p -нильпотентна. По теореме IV. 5.4 [4], в G существует бипримарная pd -подгруппа. Через B обозначим подгруппу, порожденную всеми бипримарными pd -подгруппами группы G . Ясно, что подгруппа B нормальна в G и p делит порядок B .

Пусть $B \neq G$ и q – простой делитель $|G : B|$. Предположим, что $q \neq p$. По лемме Фраттини, $G = N_G(P)B$, где P – силовская p -подгруппа из B . Так как

$$|G : B| = |N_G(P) : B \cap N_G(P)|,$$

то в $N_G(P)$ существует подгруппа $[P]Q$, где Q – силовская q -подгруппа из $N_G(P)$. По построению подгруппы B подгруппа $[P]Q$ содержится в B и q не делит $|G : B|$ – противоречие. Значит, допущение неверно и $q = p$, т.е. $|G : B| = p^n$, где n – натуральное число. Так как B не является p -группой, то некоторое простое число $r \neq p$ делит $|B|$. Теперь по лемме Фраттини, $G = BN_G(R)$, где R – силовская r -подгруппа из B . Пусть S – силовская p -подгруппа из $N_G(R)$. Подгруппа $[R]S$ является бипримарной pd -подгруппой, поэтому $[R]S \subseteq N_G(R) \cap B$ и p не делит

$$|G : B| = |N_G(R) : N_G(R) \cap B|.$$

Противоречие. Поэтому допущение $B \neq G$ неверно и $B = G$.

Лемма 2. Пусть H – подгруппа группы G . Если $HN^x = N^xH$ для всех $x \in G$, то H субнормальна в G .

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Если $H = G$, то утверждение справедливо. Пусть H – собственная подгруппа группы G . По лемме VI. 4.10 [4] подгруппа H^G отлична от G . По индукции H субнормальна в H^G , поэтому H субнормальна в G .

Лемма 3. Пусть непримарная pd -подгруппа H перестановочна со всеми би-примарными pd -подгруппами группы G . Тогда H субнормальна в G .

Доказательство. По лемме 1 подгруппа H порождается своими би-примарными pd -подгруппами. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Поэтому подгруппа H перестановочна с подгруппой H^x для каждого $x \in G$. Теперь H субнормальна в G по лемме 2.

Лемма 4. Если H – субнормальная подгруппа группы G и простое число p не делит $|G:H|$, то каждая силовская p -подгруппа группы G содержится в H_G .

Доказательство. Пусть P – произвольная силовская p -подгруппа группы G . Если H нормальна в G , то

$$HP = PH \text{ и } |G:H| = |G:HP| |HP:H|$$

не делится на p . Поэтому p не делит $|HP:H|$ и $H = HP$, т.е. P содержится в H .

Теперь $P^G = \langle P^g \mid g \in G \rangle$ содержится в H . Так как P^G нормальна в G , то $P^G \subseteq H_G$.

Пусть

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G,$$

где подгруппа H_i нормальна в H_{i+1} для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Применим индукцию по n . Для $n = 1$ утверждение уже проверено. Так как

$$|G:H| = |G:H_i| |H_i:H|,$$

то p не делит $|G:H_i|$ для любого i . Подгруппа P содержится в H_{n-1} , по доказанному. Так как P является силовской p -подгруппой в H_{n-1} , то, по индукции, P содержится в H . Отсюда следует, что $P^G \subseteq H_G$. Лемма доказана.

Нам понадобятся некоторые элементы теории формаций [3]. Если F – формация, G – группа, то G^F – наименьшая подгруппа группы G такая, что $G/G^F \in F$. Подгруппу G^F называют F -корадикалом группы G . Если X и Y – формации, то их произведение XY состоит из всех групп G , у которых $G/G^Y \in X$. Если p и q – простые числа, то $G(p, q)$ – подгруппа группы G , порожденная всеми силовскими r -подгруппами для всех $r \in \pi(G) \setminus \{p, q\}$.

Лемма 5. Пусть F – наследственная формация и $FF = F$. Если H – подгруппа группы G и $G^F \subseteq H$, то $G^F = H^F$.

Доказательство. Поскольку H/G^F – подгруппа в группе $G/G^F \in F$ и F – наследственная формация, то $H/G^F \in F$ и $H^F \subseteq G^F$. Подгруппа G^F/H^F содержится в $H/H^F \in F$, поэтому

$$G^F/H^F \in F \text{ и } (G^F)^F = G^F \subseteq H^F.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть H и B – перестановочные подгруппы группы G , причем H субнормальна, а B – $\{p, q\}$ -подгруппа для некоторых различных простых чисел p и q . Пусть F – наследственная формация, содержащая все $\{p, q\}$ -группы и $FF = F$. Тогда $H^F = (HB)^F = H(p, q)^F$ и H^F является нормальной подгруппой в HB .

Доказательство. Если R – силовская r -подгруппа из HB , $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$, то R содержится в H согласно лемме 4. Значит, R содержится в $H(p, q)$ и $H(p, q)$ порождается всеми силовскими r -подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$. Поэтому $H(p, q)$ – характеристическая подгруппа в HB . Но $H(p, q)^F$ – характеристическая подгруппа в $H(p, q)$, поэтому $H(p, q)^F$ нормальна в HB . Так как $HB/H(p, q) = \{p, q\}$ -группа, то

$$HB/H(p, q) \in F \text{ и } (HB)^F \subseteq H(p, q).$$

По лемме 5, $(HB)^F = H(p, q)^F$. Подгруппа $H(p, q)$ содержится в H и $H/H(p, q) \in F$, поэтому $H^F \subseteq H(p, q)$ и, опять по лемме, 5 $H^F = H(p, q)^F$.

Лемма 7. Если некоторая силовская p -подгруппа P группы G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами группы G , то G p -разрешима.

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G . Предположим, что G не p -разрешима. Обозначим через S бипримарную $\{p, q\}$ -подгруппу для некоторого простого числа q . Она существует по теореме IV.5.4 [4]. Пусть P^g – произвольная силовская p -подгруппа группы G , $g \in G$. По условию леммы, подгруппы P и $S^{g^{-1}}$ перестановочны, поэтому

$$\left(PS^{g^{-1}}\right)^g = P^gS = \left(S^{g^{-1}}P\right)^g = SP^g.$$

Значит, если силовская p -подгруппа P группы G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G , то каждая силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G .

Проверим наследование условий леммы подгруппами и фактор-группами. Пусть H – подгруппа группы G . Обозначим через $S_1 = \{p, q\}$ -подгруппу из H , а через P_1 – силовскую p -подгруппу группы H . По теореме Силова, существует силовская p -подгруппа P в группе G такая, что P_1 содержится в P . По условию леммы, подгруппы P и S_1 перестановочны, т.е. $K = PS_1$ – подгруппа группы G . По тождеству Дедекинда, $K \cap H = (P \cap H)S_1$. Так как P_1 содержится в $P \cap H$ и является силовской p -подгруппой в H , то $P_1 = P \cap H$ и $K \cap H = P_1S_1$ – подгруппа группы G . Поэтому подгруппы P_1 и S_1 перестановочны. Таким образом, условия леммы наследуются всеми подгруппами группы G .

Пусть $A/N = \{p, q\}$ -подгруппа фактор-группы G/N , а P_1/N – силовская p -подгруппа из G/N . Ясно, что $P_1 = PN$, где P – некоторая силовская p -подгруппа группы G . Обозначим через L минимальное добавление к N в A , т.е. $A = LN$. Поскольку $A/N \cong LN/N \cong L/L \cap N$, то $\pi(A/N) \subseteq \pi(L)$.

С другой стороны, $L \cap N \subseteq \Phi(L)$, по лемме 3.21 [3], и $\pi(L) = \pi(L/\Phi(L))$, по теореме 4.33 [3], следовательно $\pi(L) = \pi(L/\Phi(L)) \subseteq \pi(L/L \cap N) = \pi(A/N)$. Значит, $\pi(L) = \pi(A/N) = \{p, q\}$. Теперь, по условию леммы, подгруппа L перестановочна

с силовской p -подгруппой P из G . Так как N нормальна в G , то подгруппы $P_1 = PN$ и $A = LN$ перестановочны. Таким образом, подгруппы A/N и P_1/N перестановочны. Значит, условия леммы наследуются фактор-группами группы G .

Предположим, что группа G непроста и N – неединичная собственная нормальная подгруппа группы G . По индукции, N и G/N p -разрешимы, значит, группа G также p -разрешима. Теперь G – простая группа. Если $G \neq PS$, где P – некоторая силовская p -подгруппа группы G , а $S = \{p, q\}$ -подгруппа для некоторых простых чисел p и q , то ввиду леммы VI. 4.10 [4] группа G непроста – противоречие. Значит, $G = PS$, $|\pi(G)| \leq 2$, и G разрешима.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что группа G не бипримарна, и пусть Q и R – силовские q - и r -подгруппы группы G , $q \neq p \neq r$, $q \neq r$. Если G не p -нильпотентна, то, по теореме IV. 5.4 [4] в G существуют бипримарные pd -подгруппы, которые, по условию, перестановочны с подгруппой P . По лемме 7, группа G p -разрешима. Если G p -нильпотентна, то G также p -разрешима. Итак, в любом случае группа G p -разрешима. По теореме 5.3.13 [6], в G существуют $\{p, q\}$ - и $\{p, r\}$ -холловы подгруппы. Без ущерба для доказательства можно считать, что PQ и PR – подгруппы группы G . Подгруппы $(PQ)^x$ и $(PR)^x$ перестановочны с подгруппой P для любого $x \in G$. Значит, $P(PQ)^x$ является подгруппой в группе G , поэтому

$$P \subseteq \bigcap_{x \in G} (PQ)^x = (PQ)_G.$$

Аналогично $P \subseteq (PR)_G$. Отсюда следует, что

$$P = (PQ)_G \cap (PR)_G,$$

т.е. подгруппа P нормальна в G . Имеем противоречие с условием. Поэтому допущение неверно и группа G бипримарна.

Предположим, что подгруппа P не максимальна в группе G , и пусть

$$P \subseteq N_G(P) \subseteq M,$$

где M – максимальная подгруппа группы G . Так как $P \neq M$, то M – бипримарная подгруппа. По условию, $PM^x = M^xP$ для всех $x \in G$, поэтому $P \subseteq M_G$. По лемме Фраттини,

$$G = M_G N_G(P) \subseteq M,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно, и P – максимальная подгруппа.

Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. Так как G не q -нильпотентна, то, по теореме IV. 5.4 [4], в G существует q -замкнутая qd -подгруппа Шмидта $S = [Q]P_1$. Напомним, что группой Шмидта называется нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Их свойства перечислены в теореме IV. 5.4 [4]. По условию,

$$P([Q]P_1) = ([Q]P_1)P = G$$

и Q является силовской q -подгруппой группы G . Предположим, что Q не является элементарной абелевой. Тогда $Z(Q)P_1$ – бипримарная подгруппа группы G и $P(Z(Q)P_1) = G$, откуда следует, что $Z(Q)$ – силовская q -подгруппа группы G – противоречие. Поэтому допущение неверно, и силовская q -подгруппа Q в G элементарная абелева.

Пусть $D = P \cap P^x$ – пересечение наибольшего порядка двух различных силовских p -подгрупп. Если $D = 1$, то G – группа Фробениуса [4, гл. V.8; 6, 6.2.1] и Q –

минимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть $D \neq 1$. По лемме 4.16 [3], подгруппа $N_G(D)$ не является p -замкнутой, поэтому в $N_G(D)$ существует бипримарная подгруппа $D \langle g \rangle$, где g – элемент порядка q . Элемент g существует, поскольку подгруппа Q элементарная абелева. По условию,

$$P(D \langle g \rangle) = (D \langle g \rangle)P = P \langle g \rangle = G$$

и $|Q| = q$. Так как в G существует q -замкнутая подгруппа Шмидта $[Q]P_1$, то по их свойствам p делит $q-1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $H_G = 1$ и H не p -разрешима. Тогда $p \in \pi(H)$ и H субнормальна в G , по лемме 3. Поскольку группа G не p -нильпотентна, то существует бипримарная $\{p, q\}$ -подгруппа B для некоторого простого числа q . Пусть K – подгруппа в HB , порожденная всеми силовскими r -подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$. По лемме 4, подгруппа K содержится в H . Так как HB/K – $\{p, q\}$ -группа, то $H^{pS} \subseteq K$. Здесь pS – класс всех p -разрешимых групп, а H^{pS} – pS -корадикал подгруппы pS , т.е. H^{pS} является наименьшей нормальной в H подгруппой, фактор-группа H/H^{pS} по которой p -разрешима. Хорошо известно, что класс pS является насыщенной наследственной формацией, поэтому подгруппа H^{pS} определяется однозначно. Формация pS является наследственной, и $(pS)(pS) = pS$. В силу леммы 6, получаем, что $K^{pS} = H^{pS}$ и H^{pS} нормальна в HB , т.е. $B \subseteq N_G(H^{pS})$. Поскольку группа G порождается, в силу леммы 1, всеми бипримарными pd -подгруппами, то H^{pS} нормальна в G и H^{pS} содержится в $H_G = 1$. Значит, подгруппа H p -разрешима.

Пусть теперь $H_G \neq 1$. Проверим, что подгруппа H/H_G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из фактор-группы G/H_G . Пусть A/H_G – бипримарная pd -подгруппа группы G и B – минимальное добавление к подгруппе H_G в A . По лемме 3.21 [3], пересечение $B \cap H_G \subseteq \Phi(H)$. Так как

$$A/H_G \cong B/B \cap H_G,$$

то $\pi(A/H_G) = \pi(B)$, по теореме 4.33 [3]. Поэтому B – бипримарная pd -подгруппа группы G . По условию, подгруппы H и B перестановочны, поэтому перестановочными будут и подгруппы H/H_G и A/H_G . Так как ядро подгруппы H/H_G в группе G/H_G равно единице, то, по доказанному, подгруппа H/H_G p -разрешима. Теорема доказана.

Следствие 2.2. Если подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами группы G и $H = H^{pS}$, то H нормальна в G .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Acta Sci. Math. Sz. – 1962. – V. 23. – P. 168–170.
2. Пальчик, Э.М. О b -квазинормальных подгруппах / Э.М. Пальчик. // Доклады Академии наук БССР. – 1967. – Т. XI, № 11. – С. 967–969.

3. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
4. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.
5. Беркович, Я.Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сибирский мат. ж. – 1967. – Т. VIII, № 4. – С. 741–753.
6. Suzuki, M. Group theory II / M. Suzuki. – New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo : Springer-Verlag, 1986.

V.N. Kniashina. On P -Solvability of a Permutable Subgroup Cofactor of a Finite Group

The p -solvability of H/H_G where the subgroup H is permutable with all pd -subgroups of finite group G is obtained.

УДК 519.24

И.И. Комаров

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕР ЗАВИСИМОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В данной статье рассматривается новая мера зависимости для случайного процесса $X_n, n \in Z$. Доказывается, что введённая мера зависимости является расширенным понятием ковариационной функции. Выводятся формулы для оценки параметров авторегрессионной модели с использованием введённой меры зависимости на примере модели авторегрессии $AR(1)$ и показано, что в частном случае полученные формулы совпадают с системой Юла–Уокера.

Пусть $X_n, n \in Z$ – симметричный устойчивый стационарный случайный процесс с индексом устойчивости $\alpha, 0 < \alpha \leq 2$. Если $\alpha = 2$, то ковариационная функция $R(n) = E(X_n \cdot X_0) - E(X_n)E(X_0), n \in Z$ описывает структуру зависимости процесса $X_n, n \in Z$. В случае $0 < \alpha < 2$ ковариационная функция не определена, поэтому возникает необходимость введения мер зависимости для случайного процесса $X_n, n \in Z$, которые являются расширением понятия ковариационной функции.

В качестве такой меры, когда $n = 0, 1, 2, \dots$ может выступать функция [1]:

$$I_n(\theta_1, \theta_2) = -\ln E(e^{i(\theta_1 X_n + \theta_2 X_0)}) + \ln E(e^{i\theta_1 X_n}) + \ln E(e^{i\theta_2 X_0}), \quad (1)$$

где $\theta_1, \theta_2 \in R, n \in Z$.

Теорема 1. Если $\alpha = 2$, то введённая функция (1) связана с ковариационной функцией следующим соотношением:

$$I_n(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \theta_2 R(n), \quad (2)$$

$\theta_1, \theta_2 \in R, n \in Z$.

Доказательство. Перепишем (1) в виде

$$I_n(\theta_1, \theta_2) = -\ln \varphi_{X_n, X_0}(\theta_1, \theta_2) + \ln \varphi_{X_n}(\theta_1) + \ln \varphi_{X_0}(\theta_2), \quad (3)$$

где $n \in Z$, а $\varphi_{X_0}(\theta_2), \varphi_{X_n}(\theta_1), \varphi_{X_n, X_0}(\theta_1, \theta_2)$ – характеристические функции $X_0, X_n, (X_n, X_0)$ соответственно [2].

Учитывая, что при $\alpha = 2$ характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{ita - \frac{\sigma_*^2 t^2}{2}}, \quad (4)$$

где $a = EX_n, \sigma_*^2 = DX_n, n \in Z$.

Подставляя характеристические функции $X_0, X_n, (X_n, X_0)$ [3], для нашего случая имеем:

$$I_n(\theta_1, \theta_2) = -\ln e^{\frac{i(\theta_1 X_n + \theta_2 X_0) - (\theta_1^2 DX_n + \theta_2^2 DX_0 + 2\theta_1 \theta_2 R(n))}{2}} + \\ + \ln e^{\frac{i\theta_1 X_n - \frac{\theta_1^2 \cdot DX_n}{2}}{2}} + \ln e^{\frac{i\theta_2 X_0 - \frac{\theta_2^2 \cdot DX_0}{2}}{2}} = \theta_1 \theta_2 R(n).$$

Исследуем задачу нахождения коэффициентов моделей авторегрессии AP(1) с использованием функции (1).

Известно[4]: для того чтобы случайная величина ε была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая функция $\varphi_\varepsilon(t)$ допускала представление

$$\ln \varphi_\varepsilon(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t \omega(t, \alpha, \beta), \tag{5}$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\sigma > 0$, $\mu \in R$, $t \in R$, и

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1, \\ -2\beta \ln |t| / \pi, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Если характеристическая функция случайной величины ε удовлетворяет (5), то в этом случае мы будем писать $\varepsilon \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$.

Модель авторегрессии первого порядка AP(1)

Рассмотрим процесс авторегрессии первого порядка AP(1)

$$X_n - b_1 X_{n-1} = \varepsilon_n,$$

где $b_1 \in R$, а ошибки ε_n – независимые, симметричные α -устойчивые случайные величины ($\varepsilon_n \sim S_\alpha(\theta, \sigma, 0)$) с характеристической функцией

$$\varphi_{\varepsilon_n}(t) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}, \tag{6}$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\sigma > 0$, $n \in Z$.

Предполагаем, что процесс является стационарным, т.е. $|b_1| < 1$. Исследуем задачу нахождения коэффициента авторегрессии b_1 . Для этого рассмотрим функцию $I_1(\theta_1, \theta_2)$:

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = -\ln E(e^{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0)}) + \ln E(e^{i\theta_1 X_1}) + \ln E(e^{i\theta_2 X_0}),$$

где $\theta_1, \theta_2 \in R$.

Определим распределение случайных величин $\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0$, $\theta_1 X_1$, $\theta_2 X_0$. Для этого воспользуемся следующим свойством устойчивых законов распределения [5].

Свойство. Если Y_1, Y_2 – независимые α -устойчивые случайные величины, $Y_i \sim S_\alpha(\sigma_i, 0, 0)$, $i = 1, 2$, то

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \sim S_\alpha((|a_1|^\alpha \sigma_1^\alpha + |a_2|^\alpha \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0), \tag{7}$$

$a_1, a_2 \in R$.

Запишем $\theta_2 X_0$ как

$$\theta_2 X_0 = \theta_2 (b_1 X_{-1} + \varepsilon_0) = \theta_2 (b_1 (b_1 X_{-2} + \varepsilon_{-1}) + \varepsilon_0) = \theta_2 \varepsilon_0 + \theta_2 b_1 \varepsilon_{-1} + \dots + \theta_2 b_1^k \varepsilon_{-k} + \dots,$$

тогда

$$\theta_2 X_0 \sim S_\alpha((|\theta_2|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_2 b_1|^\alpha \sigma^\alpha + \dots + |\theta_2 b_1^k|^\alpha \sigma^\alpha + \dots)^{1/\alpha}, 0, 0).$$

С учетом распределения $\theta_2 X_0$ и вида характеристической функции симметричной устойчивой случайной величины (6) мы можем записать, что

$$\varphi_{\theta_2 X_0}(1) = e^{-(|\theta_2|^\alpha + |\theta_2 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_2 b_1^k|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha}.$$

Запишем случайную величину $\theta_1 X_1$ как

$$\theta_1 X_1 = \theta_1 (b_1 X_0 + \varepsilon_1) = \theta_1 (b_1 (b_1 X_{-1} + \varepsilon_0) + \varepsilon_1) = \theta_1 \varepsilon_1 + \theta_1 b_1 \varepsilon_0 + \dots + \theta_1 b_1^{k+1} \varepsilon_{-k} + \dots.$$

Учитывая (7), имеем:

$$\theta_1 X_1 \sim S_\alpha ((|\theta_1|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha \sigma^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1}|^\alpha \sigma^\alpha + \dots)^\alpha, 0, 0). \quad (9)$$

Как и в случае с $\theta_2 X_0$, для $\theta_1 X_1$ получим:

$$\varphi_{\theta_1 X_1}(1) = e^{-(|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1}|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha}. \quad (10)$$

Для случайной величины $\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0$ имеем:

$$\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0 = \theta_1 \varepsilon_1 + \theta_1 b_1 \varepsilon_0 + \dots + \theta_1 b_1^{k+1} \varepsilon_{-k} + \dots + \theta_2 \varepsilon_0 + \theta_2 b_1 \varepsilon_{-1} + \dots + \theta_2 b_1^k \varepsilon_{-k} + \dots$$

Учитывая (7), получим:

$$\begin{aligned} & \theta_1 X_1 + \theta_2 X_0 \sim \\ & \sim S_\alpha ((|\theta_1|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1^2 + \theta_2 b_1|^\alpha \sigma^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1} + \theta_2 b_1^k|^\alpha \sigma^\alpha + \dots)^\alpha, 0, 0), \end{aligned} \quad (11)$$

следовательно, с учётом (6)

$$\varphi_{\theta_2 X_0 + \theta_1 X_1}(1) = e^{-(|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha + |\theta_1 b_1^2 + \theta_2 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1} + \theta_2 b_1^k|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha}. \quad (12)$$

Подставляя (8), (10), (12) в (1), имеем:

$$\begin{aligned} I_1(\theta_1, \theta_2) &= (|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha + |\theta_1 b_1^2 + \theta_2 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1} + \theta_2 b_1^k|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha - \\ &- (|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1}|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha - (|\theta_2|^\alpha + |\theta_2 b_1|^\alpha + \dots + |\theta_2 b_1^k|^\alpha + \dots) \sigma^\alpha. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned} I_1(\theta_1, \theta_2) &= |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1^2 + \theta_2 b_1|^\alpha \sigma^\alpha + \dots + |\theta_1 b_1^{k+1} + \theta_2 b_1^k|^\alpha \sigma^\alpha + \dots - \\ &- |\theta_1 b_1|^\alpha \sigma^\alpha - \dots - |\theta_1 b_1^{k+1}|^\alpha \sigma^\alpha - \dots - |\theta_2|^\alpha \sigma^\alpha - |\theta_2 b_1|^\alpha \sigma^\alpha - \dots - |\theta_2 b_1^k|^\alpha \sigma^\alpha - \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_1 b_1^{i+1} + \theta_2 b_1^i|^\alpha \sigma^\alpha - \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_1 b_1^{i+1}|^\alpha \sigma^\alpha - \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_2 b_1^i|^\alpha \sigma^\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 2. Если $\alpha = 2$, то

$$b_1 = \rho_1,$$

Доказательство. Перепишем (13) в виде

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_1 b_1^{i+1} + \theta_2 b_1^i|^2 \sigma^2 - \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_1 b_1^{i+1}|^2 \sigma^2 - \sum_{i=0}^{\infty} |\theta_2 b_1^i|^2 \sigma^2. \quad (14)$$

Преобразуя (14), получим

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = 2\sigma^2 \theta_1 \theta_2 \sum_{i=0}^{\infty} b_1^{2i+1}.$$

С учётом (2) имеем

$$\theta_1 \theta_2 R(1) = 2\sigma^2 \theta_1 \theta_2 \frac{b_1}{1-b_1^2}.$$

$$R(1) = 2\sigma^2 \frac{b_1}{1-b_1^2}.$$

Так как $\alpha = 2$, то $2\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2$ (это вытекает из характеристических функций для ε (6) и нормально распределённой случайной величины), и, учитывая, что

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-b^2} = R(0),$$

будем иметь

$$R(1) = b_1 R(0).$$

$$b_1 = \rho_1,$$

где $\rho_n = \frac{R(n)}{R(0)}$.

Таким образом, для случая AP(1), при $\alpha = 2$, коэффициент не зависит от значений коэффициентов θ_1 , и θ_2 и совпадает с коэффициентом в случае метода Юла–Уокера.

Аналогично можно показать, что введенную функцию (1) можно использовать и для более высоких порядков модели авторегрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nowicka, J. Measurer of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations / J. Nowicka, A. Veron. // *Annals Univ. Marie Curie-Sklodowska*. – Lublin, 1997. – P. 12.
2. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей. Т.2. / В.Феллер. – М. : Мир, 1984. – 752 с.
3. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука. – 1969. – 400 с.
4. Zolotarev, V. Stable Distributions and their Applications / V. Zolotarev, V. Uchaikin. – Utrecht : VSP. – 1999. – 594 s.
5. Труш, Н.Н. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов / Н.Н. Труш, Т.В. Соболева. – Минск : БГУ. – 2008. – 68 с.
6. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир. – 1974. – 408 с.

I.I. Komarov. Usage of Generalized Measures of Dependence of Stochastic Values in a Statistic Analysis of Temporal Series

The article deals with the measure of dependence for a stochastic process X_n , $n \in Z$. The measure is an extension of the covariance function concept. The work contains the formulas for estimating the parameters of an autoregressive model with the use of the measure of dependence.

УДК 539.12

Ю.А. Курочкин, С.Я. Жукович

СИММЕТРИЯ МНОЖЕСТВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ОКТОНИОННЫМ АНАЛОГОМ АЛГОРИТМА ЖУЛИА И ФАТУ

Введены алгоритмы для генерации аналогов множеств Жулиа и Фату алгебры октав. Показано, что внутренними автоморфизмами, реализуемыми правыми и левыми произведениями в алгебре октав, данные множества (алгоритмы, их генерирующие) разбиваются на эквивалентные классы. Классы различаются двумя числами – инвариантами внутренних автоморфизмов, нулевой компонентой и модулем «векторной» части управляющей октавы, объединенными в элемент подалгебры алгебры октав- комплексное число. Для конкретного фиксированного алгоритма (множества) имеет место аксиальная симметрия относительно оси, задаваемой «векторной» частью октавы. Возможность сведения алгоритма к алгоритму с управляющим комплексным числом означает, что для одного класса эквивалентности алгоритмов, задаваемых комплексными числами, кватернионами и октавами имеет общее множество Мандельброта реализуемое в комплексной плоскости.

Введение

Фракталы – новый язык науки и новая геометрия. Однако, как это часто бывает, многие аспекты этого нового направления исследований имеют довольно-таки длительную историю, восходящую, по крайней мере, к первой четверти XX столетия. Слово «фрактал» (от латинского слова fractus – дробный) введено в научный обиход американским математиком польского происхождения, апологетом данного направления в математике Бенуа Мандельбротом относительно недавно, в семидесятые годы прошлого столетия [1].

В последние десятилетия ушедшего XX столетия и в истекшие годы XXI фракталы являются объектом интенсивного исследования математиков, физиков, ученых других областей науки [1–16]. В этот период, наряду с подходами, традиционно исследующими фракталы, связанные с простейшими отображениями, реализуемыми функциями вещественного [2; 3] и комплексного [4; 5] переменных, начинаются исследования аналогичных отображений, реализуемых функциями двойной переменной [6; 7], гиперкомплексными системами, такими как кватернионы и бикватернионы [8–10]. Существенно расширяется область возможных применений такого рода множеств.

Попытки применения фракталов достаточно многочисленны и разнообразны. Фрактальные множества используются для моделирования поведения траекторий динамической системы в фазовом пространстве методом сечений А. Пуанкаре [11], оптических свойств биофракталов [12], структуры углеродных кластеров при объяснении возможного механизма возникновения шаровой молнии [13], моделирования искусственных сред с определенными электромагнитными свойствами [14], для описания колебания цен на товарных биржах [16]. Работа [8], в частности, представляет собой исследование свойств кватернионных аналогов множеств Жулиа в связи с проблемами компьютерной графики, при этом в ней отмечается трудность визуализации построенных множеств. Последнее обстоятельство связано с четырехмерностью евклидова пространства, в котором реализуются геометрические представления кватернионов, в том числе генерируемых в результате применения алгоритмов типа Жулиа, о которых будет идти речь ниже. Установление свойств симметрии таких множеств в работах [9; 10] в значительной степени облегчает проблему их визуализации. Естественно, не только проблема визуализации делает важным исследование различных математических (в том числе симметричных) свойств различных фрактальных множеств. Следует

учесть многочисленные применения, в том числе физические, фрактальных множеств, указанных выше.

Предлагаемая статья продолжает упомянутые работы [8–10] по исследованию свойств симметрии множеств, генерируемых алгоритмом типа Жулия, обобщенным для простейших гиперкомплексных систем. В ней рассмотрены множества, генерируемые простейшими прямым

$$X_{k+1} = X_k^2 + C \tag{1}$$

и обратным

$$X_{k+1} = \pm\sqrt{X_k - C} \tag{2}$$

алгоритмами, где X_{k+1}, X_k, C – восьмерки чисел – элементы алгебры октав. При этом C – фиксированная октава, которая называется управляющей. Если в формуле (1) начать с произвольно выбранной октавы X_0 , возвести ее в квадрат и прибавить к результату октаву C , получим X_1 . Повторив операцию, заменив X_0 на X_1 , получим X_2 , и так далее. Результатом описанных итераций в зависимости от выбранной X_0 будут следующие последовательности: последовательность точек восьмимерного евклидова пространства, уходящих на бесконечность – множество «беглецов», последовательность точек, сходящихся к точке внутри некоторой области – множество «узников» и, наконец, граничное множество точек, не относящихся ни к одному из двух предыдущих множеств – аналог фрактального множества Жулия. Указанное множество может быть построено либо с помощью алгоритма (2), в котором знак выбирается компьютером случайным образом, обратного алгоритму (1), либо с помощью алгоритма (1), когда компьютер тестирует точки, отбирает из них только те, которые не принадлежат ни множеству «узников», ни множеству «беглецов».

Как и в случае кватернионных алгоритмов (1), (2) [9; 10] будет установлено, что существуют классы эквивалентности таких множеств и алгоритмов, их генерирующих, различающиеся только двумя управляющими параметрами, объединяемыми в комплексное число, выступающее как элемент подалгебры октав. Полученные результаты проливают новый свет на значение множества Мандельброта. Предлагаемая работа представляет собой расширенный вариант доклада [17].

Необходимые сведения из алгебры октав

Октава общего вида является линейной комбинацией

$$X = x_0e + x_1i + x_2j + x_3k + x_4E + x_5I + x_6J + x_7K \tag{3}$$

восьми базисных элементов e, i, j, k, E, I, J, K .

Алгебраические свойства октав полностью определяются таблицей умножения базисных величин, которую можно представить в виде [18]

			$-k$	I	J	I	i	E
k	i	j	K	I	$-j$	J	j	E
			K	$-i$	J	K	k	E

Если обозначить любую из этих троек α, β, γ , то

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \gamma, \beta\alpha = -\gamma; \beta\gamma = \alpha, \gamma\beta = -\alpha; \gamma\alpha = \beta, \alpha\gamma = -\beta; \\ \alpha^2 &= -e, \beta^2 = -e, \gamma^2 = -e. \end{aligned} \tag{4}$$

Сопряжение в системе октав определяется как

$$\bar{X} = x_0 e - x_1 i - x_2 j - x_3 k - x_4 E - x_5 I - x_6 J - x_7 K, \quad (5)$$

тогда произведение

$$X\bar{X} = \bar{X}X = |X|^2 \quad (6)$$

является числом и определяет модуль октавы

$$|X| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}. \quad (7)$$

Произведение октав некоммутативно и неассоциативно, но обладает свойством альтернативности

$$(X_1 X_2) X_2 = X_1 (X_2 X_2), \quad (8)$$

$$X_1 (X_1 X_2) = (X_1 X_1) X_2, \quad (9)$$

$$(X_1 X_2) \bar{X}_2 = X_1 (X_2 \bar{X}_2), \quad (10)$$

$$\bar{X}_1 (X_1 X_2) = (\bar{X}_1 X_1) X_2. \quad (11)$$

Алгебра октав является системой с делением. Произвольную октаву можно представить в виде

$$X = x_0 + \underline{X}, \quad (12)$$

где

$$\underline{X} = x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 E + x_5 I + x_6 J + x_7 K, \quad (13)$$

причем

$$\overline{\underline{X}} = -\underline{X}. \quad (14)$$

Тогда

$$\underline{X}^2 = -|\underline{X}|^2, \quad (15)$$

$$X^2 = x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0 \underline{X}. \quad (16)$$

Очевидно, октавы могут быть интерпретированы как векторы восьмимерного евклидова пространства, длина которых определяется выражением (7).

Некоторые свойства преобразований, определяемых октавами

Преобразования в системе октав типа

$$X' = (AX)\bar{A} = A(X\bar{A}), \quad (17)$$

где

$$A\bar{A} = 1, \quad (18)$$

являются внутренними автоморфизмами в том смысле, что

$$(X')^m = (X^m)', \quad (19)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Доказательство проведем для $m = 2$ и $m = 3$.

$$(X^2)' = x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0 (AX)\bar{A}.$$

$$\begin{aligned} (X')^2 &= (x_0 + \underline{X}')^2 = x_0^2 + [(AX)\bar{A}][A(\underline{X}\bar{A})] + 2x_0(AX)\bar{A} = \\ &= x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0(AX)\bar{A}, \end{aligned}$$

где учтено, что x_0 и $|\underline{X}|^2$ инвариантны при преобразованиях (17).

Таким образом,

$$(X')^2 = (X^2)'. \quad (20)$$

Для $m = 3$ имеем

$$\begin{aligned} (X^3)' &= (x_0^3 + 3x_0^2\underline{X} + 3x_0\underline{X}^2 + \underline{X}^3)' = \\ &= (x_0^3 + 3x_0^2\underline{X} - 3x_0|\underline{X}|^2 - |\underline{X}|^2\underline{X})' = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(AX)\bar{A} - 3x_0|\underline{X}|^2 - |\underline{X}|^2(AX)\bar{A}. \\ (X')^3 &= (x_0 + \underline{X}')^3 = x_0^3 + 3x_0^2\underline{X}' + 3x_0(\underline{X}')^2 + (\underline{X}')^3 = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(AX)\bar{A} + 3x_0(\underline{X}^2)' + (\underline{X}')^3 = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(AX)\bar{A} - 3x_0|\underline{X}|^2 + [(AX)\bar{A}]^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(AX)\bar{A}]^3 &= [(AX)\bar{A}][A(\underline{X}\bar{A})][A(\underline{X}\bar{A})] = \\ &= [(AX^2)\bar{A}][A(\underline{X}\bar{A})] = -|\underline{X}|^2(AX)\bar{A}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(X')^3 = (X^3)'. \quad (21)$$

Т.к. для любого четного m имеем

$$[(AX)\bar{A}]^m = (\pm 1)|\underline{X}|^m, \quad (22)$$

а для любого нечетного m

$$[(AX)\bar{A}]^m = (\pm 1)|\underline{X}|^{m-1}(AX)\bar{A}, \quad (23)$$

то

$$(X')^m = (X^m)'. \quad (24)$$

Свойства алгоритма типа Жулиа–Фату

Алгебраические свойства октав позволяют ввести октанионный аналог алгоритма Жулиа–Фату.

$$X_{k+1} = X_k^2 + C, \quad (25)$$

где X, C – октавы.

В силу установленных выше трансформационных свойств степеней октав относительно преобразований (19) формула (25) ковариантна относительно следующих преобразований в том смысле, что

$$X'_{k+1} = (AX_{k+1})\bar{A}, \quad (26)$$

если

$$X'_k = (AX_k)\bar{A}, \quad (27)$$

$$C' = (AC)\bar{A}, \quad (28)$$

где октава A удовлетворяет условию (18)

$$A\bar{A} = 1, \text{ т.е. } \bar{A} = A^{-1}. \quad (29)$$

Таким образом, с учетом данных свойств алгоритм (25) для октав является представителем классов эквивалентности таких алгоритмов и множеств, ими определяемых, которые связаны между собой преобразованиями эквивалентности (26–29) по всей цепочке итераций, аналогично тому, как это имеет место для кватернионных аналогов такого рода алгоритмов. А это значит, что любой из таких алгоритмов можно задать с помощью только двух чисел – c_0 и $|\underline{C}|$.

Произвольная октава C всегда может быть приведена к виду

$$C' = c_0 + |\underline{C}|i, \quad (30)$$

причем октава A , преобразующая октавы в алгоритме (25), в этом случае может быть представлена в виде

$$A = \frac{C + C'}{\sqrt{-|C + C'|^2}} \frac{\bar{C}}{\sqrt{-|C|^2}}, \quad (30)$$

$$\bar{A} = \frac{C}{\sqrt{-|C|^2}} \frac{\bar{C} + \bar{C}'}{\sqrt{-|C + C'|^2}} \quad [19; 20]. \quad (31)$$

Аналогично случаю кватернионных алгоритмов типа (25) точки, генерируемые данными алгоритмами (при фиксированном C), определены с точностью до преобразований вращений около оси, задаваемой векторной частью C , которые являются частным случаем преобразований эквивалентности (26–29). Указанные преобразования имеют вид:

$$A = \frac{1 + \underline{n} \tan(\varphi/2)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi/2)}} = \cos(\varphi/2) + \underline{n} \sin(\varphi/2), \text{ где } \underline{n} = \underline{C}/|\underline{C}|.$$

Заключение

Таким образом, несмотря на неассоциативность алгебры октав, но благодаря свойству ее альтернативности, алгоритмы (25) и множества, ими генерируемые, обладают симметрией относительно внутренних автоморфизмов (26–28) данной алгебры и распадаются на классы эквивалентности, определяемые инвариантами данных преобразований C_0 и $|\underline{C}|$, объединенными в элементы подалгебры октав, из алгебры изоморфной комплексным числам, что существенно облегчает дальнейшее исследование свойств данных множеств и их приложения, в частности, в физике. Одним из следствий проведенного исследования является вывод о том, что множества Мандельброта для кватернионов и октав могут быть сведены к множествам Мандельброта в комплексной плоскости.

История фракталов началась задолго до появления компьютеров и, как иногда бывает в науке, началась с игры, а именно с исследования поведения точек, генерируемых алгоритмами вида (1), (2). Эта игра породила фундаментальные исследования в области теории аналитических функций комплексной переменной и в теории динамических систем. С возникновением компьютерной визуализации эти исследования пе-

решили на качественно новый уровень. Как замечает известный британский математик и физик Роджер Пенроуз, в данном случае компьютер применяется математиками в сущности так же, как прибор в руках физика-экспериментатора. Кто бы из математиков или программистов ни занялся изучением множества Мандельброта, результатом их исследований обязательно будут приближения к одной и той же единой для всех фундаментальной математической структуре. Т.е. данная структура не является всего лишь частью нашего мышления, но реальна сама по себе [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – N.Y. : Freeman and company. – 1982. – 468 p.
2. Якобсон, М.В. Эргодическая теория одномерных отображений. Динамические системы / М.В. Якобсон // ВИНТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : Наука. – 1985. – Т. 2. – С. 204–233.
3. Файгенбаум, М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Файгенбаум // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141. – № 2. – С. 343–358.
4. Милнор, Дж. Голоморфная динамика / Дж. Милнор. – Удмурдский государственный университет, 2000. – 319 с.
5. Пайтген, Х.О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М. : Мир. – 1993. – 175 с.
6. Gazizov, A.Z. The Analog of Julia Sets Associated with Double Numbers / A.Z. Gazizov, Yu.A. Kurochkin // Proc. of the Int. Seminar «Nonlinear phenomena in Complex Systems». – Polatsk, 1992. – С. 126–134.
7. Павлов, Д.Г. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной / Д.Г. Павлов [и др.] // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6. – № 1 (11) – С. 135–145.
8. Norton, A. Julia Sets in the Quaternions / A. Norton // Computers and Graphics. – 1989. – Т. 2. – № 13. – С. 266–278.
9. Bogush, A.A. On symmetry properties of quaternionic analogs of Julia sets / A.A. Bogush [et al.] // Proc. of IX Nolinear phenomena in Complex Systems. – Minsk. – 2000. – P. 304–309.
10. Bogush, A.A. Symmetry properties of quaternionic and biquaternionic analogs of Julia sets / A.A. Bogush [et al.] // Ukrainskij fizicheskij jurnal. – 2003. – Vol. 48. – № 4. – P. 295–299.
11. Николс, Г. Познание сложного / Г. Николс, И. Пригожин. – М. : Мир – 1990. – 342 с.
12. Ушенко, А.Г. Лазерная диагностика биофракталов / А.Г. Ушенко // Квантовая электроника. – 1999. – Т. 29. – С. 239–245.
13. Смирнов, Б.М. Проблема шаровой молнии / Б.М. Смирнов. – М. : Наука. – 1978. – 208 с.
14. Курочкин, Ю.А. Система визуализации кватернионных аналогов множеств Жулиа и определение интенсивности полей, рассеянных на них / Ю.А. Курочкин, А.Г. Сломинский // Труды конференции молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики». – Минск. – 2006. – С. 98–102.
15. Курочкин, Ю.А. Способ формирования защитного изображения на образце с последующим распознаванием / Ю.А. Курочкин, В.В. Махнач, А.Г. Сломинский // Патент Республики Беларусь на изобретение №11092 (2008).
16. Мандельброт, Б. Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – Москва–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика. – 2004. – 255 с.

17. Kurochkin, Yu.A. Symmetry Properties of the Sets Generated by Octonionic Julia-Fatou Algorithm / Yu.A. Kurochkin, S.Ya. Zhukovich // Proceedings of the 11-th Conference-School «Foundations and Advances in Nonlinear Science». – Minsk. – 2004. – P. 52–56.

18. Кантор, И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М. : Наука – 1973. – 143 с.

19. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука і тэхніка – 1989. – 200 с.

20. Богуш, А.А. О преобразованиях четырехмерных векторов / А.А. Богуш, Ф.И. Федоров // Доклады АН БССР. – 1962. – Т. 6. – № 11. – С. 690–693; Богуш, А.А. Конечные преобразования группы Лоренца и их представления / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск. – 1970. – 50 с. – (Препринт / Института физики АН БССР).

21. Богуш, А.А. Что такое фракталы / А.А. Богуш [и др.] // Наука и инновации. – 2004. – № 8 (18). – С.36–43.

22. Пенроуз, Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики / Р. Пенроуз. – М. – 2003. – 382 с.

Y. Kurochkin, S.Y. Zhukovich. Set Symmetry, Generated by Octonion Analog of Julia-Fatou Algorithm

The algorithms for generation of the analogs of Julia-Fatou sets for elements of the octonion algebra is introduced. We set up that by inner automorphisms which realized as left and right multiplications in the octonion algebra the above sets (generating algorithms) presents as unifications class of equivalence. These classes are defined by the two invariants of inner automorphisms namely zero part C_0 and module of the «vector» part $|\underline{C}|$ of control octonion C . Due to this symmetry control octonion can be reduced to the complex number of element of the subalgebra of octonion algebra. Thus Mandelbrot set for quaternions-and octonions sets connections with algorithms Julia-Fatou type are the same that for complex numbers.

УДК 517.519.948

В.М. Мадорский

О НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА– КРАСНОСЕЛЬСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматриваются сверхлинейные итерационные процессы для нахождения приближенного решения нелинейного операторного уравнения в пространстве Банаха. Процессы сходятся к точному решению уравнения с «плохим» начальным приближением. Локальная скорость сходимости процесса – квадратичная. Приводятся условия существования решения в области D .

Применение итеративных методов для решения нелинейных уравнений наталкивается на следующую трудность: если оператор задачи не дифференциальный, то для успешного применения метода простой итерации, он должен быть оператором строгого сжатия, что на практике редко имеет место. Тем не менее очень часто оператор задачи может быть представлен в виде суммы двух операторов, один из которых не дифференцируем, а второй дифференцируем. В этом случае строится итерационный процесс, предложенный Л.В. Канторовичем и развитый затем М.А. Красносельским [1]. К сожалению, предлагаемый процесс, который назовём процессом Канторовича–Красносельского, является локальным, т.е. сходящимся при «хороших» начальных приближениях. Для превращения этого процесса в «нелокальный» (по другой терминологии, в «полулокальный») используем идеи монографии [1].

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D банахова пространства X , в X в монографии [1] предложен алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) = x_n - \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Он подробно рассмотрен в [2], где доказана его локальная сходимость. Для решения уравнения (1) предлагается нелокальный алгоритм с регулировкой шага.

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n :

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n(f(x_n) + g(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Шаг 2. Находится очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (4)$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$, ε – малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|} \beta_n \right), \quad \beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}], \quad \beta_{-1} < \beta_0 \quad (5)$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предполагаем, что $f \in C_D^{(1)}$, производная Фреше $f'(x)$ оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и $\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B, \quad \forall x \in D$. Относительно оператора g полагаем, что $\forall x \in D$ имеет место соотношение:

$$\| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| \leq \beta_n K. \quad (6)$$

Условие вида (6) впервые, по-видимому, было рассмотрено в [3; 4, с. 297].

Теорема 1. Пусть в области $D = \bar{S}(x_0, \frac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0})$ существует x^* –

решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (KB + LB^2) \cdot \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < 1. \quad (7)$$

Тогда алгоритм (3)–(5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Доказательство. Из (3) и условий теоремы имеем

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \leq \| f(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)) - f'(x_n) \| \times \\ \times \| x_{n+1} - x_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \|^2. \quad (8)$$

С учетом (8) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_{n-1} g(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) + \\ + \beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)) \| \leq \beta_n^2 LB^2 \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2. \quad (9)$$

Из (9) следует соотношение, связывающее нормы квазиневязок на соседних шагах:

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \leq (1 - \beta_n) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| + \| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| + \\ + \beta_n^2 LB^2 \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 \leq (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| = \\ = q_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|. \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon_n = \beta_n (KB + LB^2) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

Соотношение (10) является базовым при доказательстве сходимости процесса (3)–(5). При $n = 0$ из (10) и условий теоремы имеем:

$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \leq (1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \quad q_0 < 1, \\ \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| < \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|. \quad (11)$$

Из (5) и (11) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (5), (10) и условий теоремы получим оценку

$$\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| \leq (1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| = \\ = (1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \leq \\ \leq q_1 q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \quad (12)$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$. Из (12) следует, что $\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| < \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \|$, тогда из (5) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (10) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^n q_i \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \quad (13)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3)–(5) к x^* . При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Переходя к пределу в (5) при $n \rightarrow \infty$ с учетом (13), имеем, что $\exists K$, что при $i \geq K$ $\beta \equiv 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| = \| f(x^*) + g(x^*) \| = 0. \quad (14)$$

Из соотношения (3), (13) и условий теоремы имеем оценку

$$\| x^* - x_n \| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \| \Delta x_i \| < \frac{Bq_0^n \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \|}{1 - q_0}, \quad (15)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

При $n = 0$ из (15) находим величину радиуса сферы $D = \bar{S}(x_0, r)$, $r = \frac{B \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \|}{1 - q_0}$. Как следует из (13), существует такой номер n_0 , что для всех

$n > n_0$ итерации (3)–(5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n > n_0$, метод (3)–(5) имеет квадратичную скорость сходимости. В самом деле, при $\beta_n \equiv 1$ из (10) следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \leq (LB + KB^2) \| f(x_n) + g(x_n) \|^2,$$

или $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^2$, из которой следует локальная квадратичная сходимость процесса (3)–(5) с $\beta_n = 1$ к x^* . Теорема доказана.

Замечание 1. Частный случай алгоритма (3)–(5) при $g(x) = 0$ рассмотрен в работе [5].

Рассмотрим сходимость процесса (3)–(5) в условиях Вертгейма, то есть если производная Фреше оператора $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида:

$$\| f'(x) - f'(y) \| \leq L \| x - y \|^p, \quad L > 0, \quad 0 < p < 1. \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть в интересующей нас области D выполняются условия теоремы 1, оператор $f'(x)$ удовлетворяет условию (16), начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0^p (KB + LB^{1+p}) \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \|^p < 1. \quad (17)$$

Тогда алгоритм (3)–(5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* .

Доказательство. Из условий теоремы следует оценка

$$\begin{aligned} \| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| &\leq \| f'(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)) - f'(x_n) \| \times \\ &\times \| x_{n+1} - x_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \|^{1+p}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) имеем:

$$\begin{aligned} \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_{n-1}g(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) + \\ + \beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)) \| \leq \beta_n^{1+p} LB^{1+p} \| f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \|^{1+p}, \end{aligned}$$

откуда следует соотношение, связывающие нормы квазиневязок на соседних шагах.

$$\begin{aligned} \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| &\leq (1 - \beta_n) \| f(x_n + \beta_{n-1}g(x_n)) \| + \| \beta_n g(x_{n+1}) - \\ &- \beta_{n-1}g(x_n) \| + \beta_n^{1+p} LB^{1+p} \| f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \|^{1+p} \leq \\ &\leq (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \| = q_n \| f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \|, \end{aligned} \quad (19)$$

здесь $\varepsilon_n = \beta_n^p (KB + B^{1+p}) \| f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \|^p$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

При $n = 0$ из (19) и условий теоремы имеем

$$\begin{aligned} \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| &\leq (1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \|, \\ q_0 < 1, \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| &< \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \|. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (5) и (20) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (5), (20) и условий теоремы следует оценка:

$$\begin{aligned} \|f(x_2) + \beta_1 g(x_2)\| &\leq (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| = \\ &= (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_0)) \times \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| = q_1 \|f(x_1) + \beta_0 g(x_1)\| \leq \\ &q_1 q_0 \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\|, \end{aligned} \quad (21)$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$.

Из (5) и (21) имеем, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и, в силу (19), справедлива оценка:

$$\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\| < q_0^{n+1} \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\|, \quad (22)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3)–(5) к x^* . При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Доказательство того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta^* = 1$, проводим вполне аналогично тому, как это делалось в теореме 1.

Из соотношений (3), (19) и условий теоремы имеем оценку

$$\|x^* - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|\Delta x_i\| < \frac{B q_0^n \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\|}{1 - q_0}, \quad (23)$$

из которой следует и сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

При $n = 0$ из (23) находим величину радиуса интересующей нас области $D = \bar{S}(x_0, r)$:

$$r = \frac{B \|f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0)\|}{1 - q_0}. \quad (24)$$

Как следует из (19), существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ итерации (3)–(5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, так что из (19) при $n > n_0$ следует оценка

$$\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| \leq (LB + KB^{1+p}) \|f(x_n) + g(x_n)\|^{1+p},$$

или $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^{1+p}$, из которой следует сверхлинейная сходимость процесса (3)–(5) с $\beta_n = 1$ к x^* . Теорема доказана.

Как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач, алгоритм, описанный выше, является более эффективным (часто на порядок) по количеству итераций, если вместо формулы (5) для определения шаговой длины использовать следующие формулы:

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\|f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \beta_n} \right),$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}], \beta_1 < \beta_0.$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{W_n}{2 \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \beta_n} \right),$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|,$$

$$W_0 = \gamma \|f(x_0) + g(x_0)\|, \gamma \ll 1, \beta_0 \in [0,001;0,1].$$

Если область D определить другим способом, чем это мы делали выше, то может быть описан еще ряд эффективных процессов.

Пусть оператор f удовлетворяет в области D условиям: $f \in C_D^{(2)}$, линейный оператор $f'(x)$ в D обратим и имеют место оценки

$$\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B, \quad \|f''(x)\| \leq K, \quad \forall x \in D.$$

Здесь $f'(x)$ – производная Фреше оператора f . Относительно оператора g полагаем, что выполняется условие (6).

Определим область D следующим образом: $D = \{x : w_n \leq w_0\}$. Для решения уравнения (1.1) применим процесс вида:

Шаг 1. Решается линейное уравнение:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)), n = 0,1,2... \quad (25)$$

Шаг 2. Находим очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in (10^{-3} \div 10^{-1}), \beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}]. \quad (26)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (параметр останова), то конец расчётов, иначе

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{w_n}{\alpha \beta_n (\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|)} \right), \quad (27)$$

$$w_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})w_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|, \quad (28)$$

$$w_0 = \gamma \|f(x_0) + \beta_0 g(x_0)\|; \alpha > 1, \gamma \ll 1$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 3. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям. Пусть сверх того выполняются условия:

а) $\beta_0 \frac{KB^2 \|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\|}{2} = l_0 < 1;$

б) $\frac{\gamma}{\alpha \beta_0^2} < 1.$

Тогда итерационный процесс (25)–(28) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in D$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

Замечание 2. Как следует из (28), w_{n+1} аппроксимирует $\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|$, и, следовательно, существует такой номер k , что для всех $i > k$ начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона. Если $\beta_i \sim 1$, тогда x_i попадает в область притяжения метода Ньютона, и мы можем рассчитывать на локальную квадратичную сходимость процесса (25)–(28).

Теорема 4 справедлива в предположении существования в D x^* – решения уравнения (1). Сформулируем и докажем теорему, в которой будут использованы доказательные вычисления.

Теорема 4. Пусть в области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B$, $\| f''(x) \| \leq K$, $\forall x \in D$ и, сверх того, выполняются условия:

$$\text{а) } \frac{\beta_0 K B^2 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{2} = l_0 < 1, \quad \text{б) } \frac{\gamma}{\alpha \beta_0^2} < 1,$$

$$\text{в) } \text{начиная с некоторого номера } k \quad \beta_i = 1, \quad i > k,$$

тогда итерационный процесс (25)–(28) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in D$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Приближение решения операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 455 с.
2. Zabrejko, P.P. The Majorant method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Ptak Error Estimates / P.P. Zabrejko, D.F. Nguen // Numer. Funct. Anal and Optimiz. – 1987. – Vol. 9, № 5–6. – P. 671–684.
3. Perron, O. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzgleichungen / O. Perron // J. Reine und Angew. Math. – 1929. – № 161. – S. 41–64.
4. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
5. Жанлав, Т. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // ЖВМ. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 146–156.
6. Ульм, С. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Известия АН ЭССР, физика, математика. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–26.

V.M. Madorsky. About non Regulariseid non Local Kantorovich-Krasnoselski methods of Solving non Linear Equations

The paper is concerned with the non local super linear Kantorovich-Krasnoselski iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the Banach space. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation. The local speed of convergence of the processes is too. We have the conditions that solution in the region D is exist.

УДК 517.927.21, 517.518.82

С.А. Марзан

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

*Посвящается памяти моего Учителя
профессора А.А. Килбаса*

Исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка в весовом пространстве непрерывно дифференцируемых функций на конечном отрезке действительной оси. Получены условия существования единственного решения рассматриваемой задачи. Построены явные решения задач Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведены соответствующие утверждения для задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с производными Капуто комплексных порядков.

Пусть $I_{a+}^{\alpha} g$ и $D_{a+}^{\alpha} y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

$([\operatorname{Re}(\alpha)])$ – целая часть $\operatorname{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4]. Обозначим через ${}^c D_{a+}^{\alpha} y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right)(x) \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (3)$$

$n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1, 2, \dots\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ ($n \in N$) и $y(x) \in C^n[a, b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^c D_{a+}^{\alpha} y$ совпадает с обычной производной:

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D^n y)(x) \quad \left(n \in N; D = \frac{d}{dx} \right),$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^c D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n :

$$\left({}^c D_{a+}^\alpha y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) \left(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}; D = \frac{d}{dx}\right). \quad (4)$$

Конструкция (4) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вязкоэластичности ([2; 3]), и поэтому выражения (3) и (4) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in \mathbb{C}$.

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами [1, §§ 42–43; 4]. Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [5; 6].

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = \lambda y(x) + h(x) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (5)$$

с производной Капуто комплексного порядка $m+i\theta$ ($m \in \mathbb{N}, \theta \neq 0$)

$$\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \left(I_{a+}^{1-i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{(t-a)^j}{j!} y^{(j)}(a) \right] \right)(x), \quad (6)$$

и начальными условиями

$$y^{(j)}(a) = b_j, \quad b_j \in \mathbb{C} \quad (j = 0, 1, \dots, m). \quad (7)$$

При $a=0$ задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 0$

$$\left({}^c D_{0+}^\alpha y\right)(x) = \lambda y(x), \quad (n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}), \quad y^{(k)}(0) = b_k \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, на $[0, T]$ ($0 < T \leq \infty$), рассматривалась в [7], где операционный метод был применен для получения явного решения задачи (8)

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j E_{\alpha, j+1}(\lambda x^\alpha)$$

в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbb{C}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (9)$$

Этот результат перенесен в [8] на абстрактную задачу Коши вида (8), в которой $\lambda y(x)$ заменено на $Ay(x)$, где A – неограниченный замкнутый оператор в банаховом пространстве.

В работе [9] показано, что задачи Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто (3) комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ с $n-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$ и положительного порядка $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}$) имеют одинаковые постановки. Ситуация изменяется для дифференциального уравнения с производной Капуто (6) комплексного порядка $m+i\theta$ ($m \in \mathbb{N}, \theta \neq 0$).

Обозначим через $C_\gamma[a, b]$ ($\gamma \in C$) класс функций $g(x)$, заданных на $[a, b]$ и таких, что $(x - a)^\gamma g(x) \in C[a, b]$:

$$C_\gamma[a, b] = \left\{ g(x) : \|g\|_{C_\gamma} = \|(x - a)^\gamma g(x)\|_C < \infty \right\}, \quad C_0[a, b] = C[a, b].$$

Из [9, теорема 1] следует, что если $m + i\theta$ ($m \in N, \theta \neq 0$) $\gamma \in C$ ($0 \leq \text{Re}(\gamma) < 1$), $\lambda \in C$, $h(x) \in C_\gamma[a, b]$, то для того, чтобы функция $y(x) \in C^m[a, b]$ являлась решением задачи Коши (5), (7), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + \frac{\lambda}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}} + (I_{a+}^{m+i\theta} h)(x). \quad (10)$$

Используем для решения уравнения (10) метод последовательных приближений. Пусть

$$y_0(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j,$$

$$y_\nu(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + I_{a+}^{m+i\theta} [\lambda y_{\nu-1}(t) + h(t)](x), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

С использованием (1) непосредственно проверяется, что для $\alpha \in C$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$), $\beta \in C$ ($\text{Re}(\beta) > 0$)

$$(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Используя это равенство, находим при $\nu = 1, 2, \dots$:

$$y_1(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + \lambda \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (I_{a+}^{m+i\theta} (x-a)^j)(x) + (I_{a+}^{m+i\theta} h)(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + \lambda \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta+j+1)} (x-a)^{m+i\theta+j} + (I_{a+}^{m+i\theta} h)(x),$$

$$y_2(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + I_{a+}^{m+i\theta} [\lambda y_1(x) + h(x)] =$$

$$= \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(j+1)} (x-a)^j + \lambda \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta+j+1)} (x-a)^{m+i\theta+j} +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(2(m+i\theta)+j+1)} (x-a)^{2(m+i\theta)+j} + (I_{a+}^{m+i\theta} h)(x) + \lambda (I_{a+}^{2(m+i\theta)} h)(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k (x-a)^{k(m+i\theta)+j}}{\Gamma(k(m+i\theta)+j+1)} + \sum_{k=0}^1 \lambda^k I_{a+}^{k(m+i\theta)+m+i\theta} h,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$y_v(x) = \sum_{j=0}^m b_j \sum_{k=0}^v \frac{\lambda^k (x-a)^{k(m+i\theta)+j}}{\Gamma(k(m+i\theta)+j+1)} + \sum_{k=0}^{v-1} \lambda^k I_{a+}^{k(m+i\theta)+m+i\theta} h, \quad v=1,2,\dots$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получаем следующее представление искомого решения:

$$y(x) = \sum_{j=0}^m b_j (x-a)^j E_{m+i\theta, j+1} [\lambda(x-a)^{m+i\theta}] + \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} E_{m+i\theta, m+i\theta} [\lambda(x-t)^{m+i\theta}] h(t) dt, \quad (11)$$

где $E_{\alpha, \beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера (9).

Формула (11) дает единственное решение интегрального уравнения (10), так как соответствующее (10) однородное уравнение

$$y(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ [1, § 2.4]. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$), $\lambda \in C$, $h(x) \in C_\gamma[a, b]$. Задача Коши (5), (7) имеет в $C_\gamma^{m+i\theta}[a, b] = \{y(x) \in C^m[a, b] : {}^c D_{a+}^{m+i\theta} y \in C_\gamma[a, b]\}$ ($m \in N, \theta \neq 0$) единственное решение, определяемое формулой

$$y(x) = \sum_{j=0}^m b_j (x-a)^j E_{m+i\theta, j+1} [\lambda(x-a)^{m+i\theta}] + \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} E_{m+i\theta, m+i\theta} [\lambda(x-t)^{m+i\theta}] h(t) dt.$$

В частности, единственное решение задачи

$$({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y)(x) = \lambda y(x), \quad y^{(k)}(a) = b_k \in C \quad (k=0, 1, \dots, m)$$

определяется формулой

$$y(x) = \sum_{j=0}^m b_j (x-a)^j E_{m+i\theta, j+1} [\lambda(x-a)^{m+i\theta}].$$

Следствие 1. При $\theta \neq 0$, $\lambda \in C$, $\gamma \in C$ ($0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$) и $h(x) \in C[a, b]$ задача Коши

$$({}^c D_{a+}^{1+i\theta} y)(x) = \lambda y(x) + h(x), \quad y(a) = b_1 \in C, \quad y'(a) = b_2 \in C$$

имеет в $C_\gamma^{1+i\theta}[a, b]$ единственное решение

$$y(x) = b_1 E_{1+i\theta,1} [\lambda(x-a)^{1+i\theta}] + b_2 E_{1+i\theta,2} [\lambda(x-a)^{1+i\theta}] + \int_a^x (x-t)^{i\theta} E_{1+i\theta,1+i\theta} [\lambda(x-t)^{1+i\theta}] h(t) dt.$$

В частности, решение задачи

$$({}^c D_{a+}^{1+i\theta} y)(x) = \lambda y(x), y(a) = b_1 \in C, y'(a) = b_2 \in C$$

имеет вид

$$y(x) = b_1 E_{1+i\theta,1} [\lambda(x-a)^{1+i\theta}] + b_2 E_{1+i\theta,2} [\lambda(x-a)^{1+i\theta}].$$

Проводя аналогичные рассуждения, полученные результаты легко распространить на случай задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с производными Капуто комплексных порядков.

Теорема 2. Пусть $l_s \in N$, $\theta_s \neq 0$, $\gamma_s \in C$ ($0 \leq \text{Re}(\gamma_s) < 1$), $\lambda_s \in C$ и $h_s(x) \in C_{\gamma_s}[a, b]$ ($s = 1, \dots, m$). Задача Коши

$$({}^c D_{a+}^{l_s+i\theta_s} y_s)(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s y_s(x) + h_s(x), y_s^{(k_s)}(a) = b_{k_s} \in C \quad (k_s = 0, 1, \dots, l_s; s = 1, \dots, m)$$

имеет в $\overline{C_{\bar{\gamma}}^{l+i\theta}[a, b]} = C_{\gamma_1}^{l_1+i\theta_1, l_1}[a, b] \times \dots \times C_{\gamma_m}^{l_m+i\theta_m, l_m}[a, b]$ единственное решение, определяемое формулой

$$y_s(x) = \sum_{j_s=0}^{l_s} b_{j_s} (x-a)^{j_s} E_{l_s+i\theta_s, j_s+1} [\lambda_s (x-a)^{l_s+i\theta_s}] + \int_a^x (x-t)^{l_s+i\theta_s-1} E_{l_s+i\theta_s, l_s+i\theta_s} [\lambda_s (x-t)^{l_s+i\theta_s}] h_s(t) dt.$$

В частности, единственное решение задачи

$$({}^c D_{a+}^{l_s+i\theta_s} y_s)(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s y_s(x), y_s^{(k_s)}(a) = b_{k_s} \in C \quad (k_s = 0, 1, \dots, l_s; s = 1, \dots, m)$$

определяется формулой

$$y_s(x) = \sum_{j_s=0}^{l_s} b_{j_s} (x-a)^{j_s} E_{l_s+i\theta_s, j_s+1} [\lambda_s (x-a)^{l_s+i\theta_s}].$$

Следствие 2. При $\theta_s \neq 0$, $\lambda_s \in C$, $\gamma_s \in C$ ($0 \leq \text{Re}(\gamma_s) < 1$) и $h_s(x) \in C[a, b]$ задача Коши

$$({}^c D_{a+}^{1+i\theta_s} y_s)(x) = \sum_{s=1}^m \lambda_s y_s(x) + h_s(x), y_s(a) = b_{1s} \in C, y_s'(a) = b_{2s} \in C \quad (s = 1, \dots, m)$$

имеет в $\overline{C_{\bar{\gamma}}^{1+i\theta}[a, b]}$ единственное решение

$$y_s(x) = b_{1s} E_{1+i\theta_s,1} [\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}] + b_{2s} E_{1+i\theta_s,2} [\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}] +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{i\theta_s} E_{1+i\theta_s, 1+i\theta_s} [\lambda_s (x-t)^{1+i\theta_s}] h_s(t) dt.$$

В частности, решение задачи

$$\left({}^c D_{a^+}^{1+i\theta_s} y_s \right)(x) = \lambda_s y_s(x), y_s(a) = b_{1s} \in C, y'_s(a) = b_{2s} \in C \quad (s = 1, \dots, m)$$

имеет вид

$$y_s(x) = b_{1s} E_{1+i\theta_s, 1} [\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}] + b_{2s} E_{1+i\theta_s, 2} [\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}].$$

Непосредственно проверяется, что функции

$$y_j(x) = (x-a)^j E_{m+i\theta, j+1} [\lambda (x-a)^{m+i\theta}] \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

являются линейно независимыми решениями однородного дифференциального уравнения комплексного порядка

$$\left({}^c D_{a^+}^{m+i\theta} y \right)(x) = \lambda y(x) \quad (m \in N, \theta \neq 0)$$

с производной Капуто (6).

Этот факт показывает существенное различие между дифференциальными уравнениями натурального и комплексного порядков. Именно, однородное линейное дифференциальное уравнение порядка $m \in N$ с постоянными коэффициентами имеет m линейно независимых решений, в то время как линейное однородное дифференциальное уравнение комплексного порядка $m+i\theta$ ($m \in N, \theta \neq 0$) с постоянными коэффициентами может иметь $(m+1)$ линейно независимое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mainardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.
4. Kilbas, A.A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.
5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi // Viena : Springer. – 1997. – P. 223–276.
6. Oldham, K.B. The fractional calculus / K.B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.
7. Luchko, Yu.F. An operational method for solving fractional differential equation with the Caputo derivative / Yu.F. Luchko, R. Gorenflo // Acta Math. Vietnam. – 1999. – Vol. 24, № 2. – P. 207–233.

8. Gorenflo, R. On solvability linear fractional differential equations in Banach spaces / R. Gorenflo, Yu.F. Luchko, P.P. Zabreiko // *Fract. Calc. Appl. Anal.* – 1999. – Vol. 2, № 2. – P. 163–174.

9. Килбас, А.А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // *Доклады академии наук.* – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.

S.A. Marzan. Existence and Uniqueness of Solutions of the Cauchy Problem for Linear Differential Equations with the Caputo Derivative of Complex Order

The Cauchy problem for linear differential equations with the Caputo derivative of complex order axis in the weighted space of continuously differentiable functions on a finite interval of the real. The conditions of existence of a unique solution to the problem. Explicit solutions of Cauchy problems for linear differential equations with constant coefficients. The corresponding assertions for the Cauchy problems for a system of linear differential equations with the Caputo derivatives of complex orders.

УДК 512.542

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ В ПОДГРУППАХ ШМИДТА

Натуральное число n называется свободным от четвертых степеней, если p^4 не делит n для всех простых p . Изучено строение группы, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядка, свободного от четвертых степеней. В частности, получен критерий отсутствия в группе подгрупп Шмидта, нормальные силовские подгруппы которых имеют порядки, делящиеся на четвертые степени простых чисел.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта, или минимальной ненильпотентной группой. В своей работе О.Ю. Шмидт [1] доказал, что группа Шмидта бипримарна (т.е. её порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, а другая циклическая, и указал систему индексов главного ряда группы Шмидта. В дальнейшем $S_{\langle p,q \rangle}$ -группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной циклической силовской q -подгруппой. Подробный обзор результатов о группах Шмидта с их приложениями в теории групп содержится в работе [2].

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что m свободно от n -х степеней, если p^n не делит m для всех простых чисел p . При $n = 2$ говорят, что m свободно от квадратов, а при $n = 3$ – свободно от кубов.

В 1995 г. В.С. Монахов [3] исследовал строение групп, у которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, и строение групп, у которых все подгруппы Шмидта несверхразрешимы. Поскольку группа Шмидта сверхразрешима в точности тогда, когда ее нормальная силовская подгруппа имеет простой порядок, то из [3] следует описание групп, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от квадратов. В [4] были исследованы группы, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от кубов. В частности, перечислены ее бипримарные подгруппы и приведены примеры как разрешимых, так и неразрешимых таких групп. В настоящей заметке исследуются группы, у которых подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы, порядки которых делят кубы простых чисел. Отсюда вытекает информация о строении групп с подгруппами Шмидта порядков, свободных от четвертых степеней.

Критерий отсутствия в группе подгрупп Шмидта, нормальные силовские подгруппы которых имеют порядки, делящиеся на четвертые степени простых чисел, получен в следующей теореме.

Теорема 1. В группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, тогда и только тогда, когда для каждой пары простых чисел $\{s, r\} \neq \{3, 2\}$ из $\pi(G)$ таких, что $s > r$ и s не делит $r^2 + r + 1$, любая $\{s, r\}$ -подгруппа группы G является s -замкнутой. Кроме того, если r не делит $(s + 1)(s^3 - 1)$, то любая $\{s, r\}$ -подгруппа группы G нильпотентна.

Строение группы, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, установлено в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими подгруппами:

1.1) $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппами $[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, $i \in \mathbf{N}$;

1.2) $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппами $[E_{p^2}]Z_{q^i}$, $[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}$, $[T]Z_{3^i}$, где q делит $p+1$, $q > 2$, $i \in \mathbf{N}$, и T – группа кватернионов порядка 8;

1.3) $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппами $[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 , $i \in \mathbf{N}$.

2. Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.2), когда:

2.1) группа G 2-замкнута и 3-замкнута;

2.2) для любых простых $s > r > 3$ из $\pi(G)$ таких, что r делит s^2-1 , $\{s, r\}$ -холлова подгруппа r -замкнута.

3. Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.3), когда:

3.1) группа G 2-замкнута;

3.2) $3'$ - и $2'$ -холловы подгруппы дисперсивны по Оре;

3.3) $\{s, r\}$ -холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s > r > 2$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s+1$.

4. Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.2) и 1.3), когда:

4.1) группа G дисперсивна по Оре;

4.2) $\{s, r\}$ -холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s > r$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s-1$.

Здесь \mathbf{N} – множество всех натуральных чисел, E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n , Z_n – циклическая группа порядка n . Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A .

1. Вспомогательные результаты

Символами p и q всегда будем обозначать различные простые числа, а m – показатель p по модулю q . Напомним, что показателем числа p по модулю q называют такое наименьшее натуральное число m , что q делит (p^m-1) . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называется группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, у которой для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$. Дисперсивная по Оре группа G p -замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$ и q -нильпотентна для наименьшего $q \in \pi(G)$.

Лемма 1. [2, теорема 2.1] Если группа не p -нильпотентна, то в ней существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа для некоторого q .

Лемма 2. Если $\{p, q\}$ -группа не q -замкнута, то в ней существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 1.

Лемма 3. [2, теорема 2.4] В любой не 2-замкнутой группе существует 2-нильпотентная $2d$ -подгруппа Шмидта.

Лемма 4. Пусть $S = [P]Q$ – группа Шмидта, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p, q – различные простые числа. Тогда:

1) если q делит $p-1$, то $P \cong Z_p$;

2) если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то либо $P \cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3 ;

3) если q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 , то $P \cong E_{p^3}$;

4) если q не делит p^3-1 и $p+1$, то порядок S делится на p^4 .

В частности,

a) если порядок подгруппы P делит p^2 , то либо $S = [Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S = [E_{p^2}]Z_{q^i}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$.

b) если порядок подгруппы P делит p^3 , то

либо $S = [Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$,

либо $S \in \{[E_{p^2}]Z_{q^i}, [[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, [T]Z_{3^i}\}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$ и T – группа кватернионов порядка 8, $q > 2$,

либо $S = [E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 .

Доказательство. Пусть m – показатель числа p по модулю q .

1. Если q делит $p-1$, то $m=1$ и по теореме 1.3 [2] $P \cong Z_p$.

2. Если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то $m=2$ и, по теореме 1.2–1.3 [2], либо $P \cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3 экспоненты p или 4.

3. Если q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 , то $m=3$ и, по теореме 1.3 [2], $P \cong E_{p^3}$.

4. Если q не делит p^3-1 и $p+1$, то, по теоремам 1.2–1.3 [2], $m \geq 4$ и порядок S делится на четвертую степень простого числа p .

Если порядок P делит p^2 , то $m \leq 2$ и возможны только случаи 1) и 2). Поэтому либо $S = [Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S = [E_{p^2}]Z_{q^i}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$.

Если порядок P делит p^3 , то $m \leq 3$ и возможны случаи 1)–3). Тогда либо $S = [Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S \in \{[E_{p^2}]Z_{q^i}, [[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, [T]Z_{3^i}\}$, где q не делит

$p-1$, но делит $p+1$ и T – группа кватернионов порядка 8, либо $S = [E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 . Лемма доказана.

Группы, у которых все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, обладают важным свойством π -однородности.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Группа называется π -замкнутой, если она содержит нормальную π -холлову подгруппу. Группа G называется π -однородной, если $N_G(H)/C_G(H)$ – π -группа для любой π -подгруппы $H \leq G$. Для любого множества π из π' -замкнутости группы следует её π -однородность. Из π -однородности группы не всегда следует её π' -замкнутость. Например, при $\pi = \{2,3\}$ знакопеременная группа A_5 является π -однородной, но не π' -замкнутой.

Лемма 5. Пусть π – некоторое множество простых чисел и G – π -однородная группа. Если выполняется любое одно из следующих условий:

- 1) $|\pi|=1$;
- 2) $2 \notin \pi$;
- 3) G – D_π -группа,

то группа G π' -замкнута. В частности, если G – разрешимая π -однородная группа, то G π' -замкнута.

Доказательство. 1. Если $|\pi|=1$, то $\pi = \{p\}$ и по теореме Фробениуса, [5, теорема IV.5.8] группа G p -нильпотентна, т.е. π' -замкнута.

2. Утверждение доказано в работе [6] с использованием классификации простых групп.

3. Утверждение доказано в работе [7].

Теорема 3. Пусть G – группа, $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и $\pi_i = \{p_1, \dots, p_i\}$, причем порядки нормальных силовских подгрупп всех подгрупп Шмидта группы G , свободны от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп для всех простых $p, q \in \pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\{2,3\} \subseteq \pi(G)$, то G – π_i -однородная группа для каждого $i \geq 2$;
- 2) если $|\{2,3\} \cap \pi(G)| \leq 1$, то G – π_j -однородная группа для каждого $j \geq 1$.

Доказательство. Допустим противное: пусть существует номер i , для которого группа G не является π_i -однородной. Это означает, что существует π_i -подгруппа T такая, что $N_G(T)/C_G(T)$ не является π_i -группой. Поэтому существует простое $p > p_i$, которое делит $|N_G(T)/C_G(T)|$. Пусть P – силовская p -подгруппа из $N_G(T)$. Так как P не содержится в $C_G(T)$, то существует силовская q -подгруппа Q в T такая, что P не содержится в $C_G(Q)$. Пусть $H = N_G(T)$. Из леммы Фраттини следует, что $H = N_H(Q)T$.

Так как $P \subseteq H$ и p не делит $|T|$, то $P \subseteq N_H(Q)$. Так как Q нормальна в $N_H(Q)$, то в группе $N_H(Q)$, имеется $\{p, q\}$ -подгруппа QP , причем QP q -замкнута. Если $[Q]P$ – p -замкнута, то $P \leq C_G(Q)$, противоречие. Значит, $[Q]P$ не p -замкнута и, по лемме 2, в группе $[Q]P$ существует $S_{\langle q, p \rangle}$ -подгруппа. Так как в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от

четвертых степеней, то из леммы 4 следует, что или p делит $q-1$, или p не делит $q-1$, но делит $q+1$, или p не делит q^2-1 , но делит q^2+q+1 . Так как $p > q$ и в группе G нет $S_{\langle q,p \rangle}$ -подгрупп, где p не делит q^2-1 , но делит q^2+q+1 , то возможен только вариант, когда $q=2$, $p=3$, т.е. $\{2,3\} \subseteq \pi(G)$ и $i=1$. Противоречие.

Следствие. Пусть порядки нормальных силовских подгрупп всех подгрупп Шмидта группы G свободны от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгрупп для всех простых $p, q \in \pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\{2,3\} \subseteq \pi(G)$, то G является $\{2,3\}$ -однородной.
2. Если $3 \in \pi(G)$, $2 \notin \pi(G)$, то G является 3-однородной.
3. Если $2 \in \pi(G)$, $3 \notin \pi(G)$, то G является 2-однородной.

Лемма 6. Пусть G – разрешимая группа, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгрупп для всех простых $p, q \in \pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 . Тогда $\{2,3\}'$ -холлова подгруппа группы нормальна и дисперсивна по Оре. Кроме того, $2'$ - и $3'$ -холловы подгруппы группы G дисперсивны по Оре.

Доказательство. По следствию теоремы 3 и по лемме 5, $\{2,3\}'$ -холлова подгруппа H нормальна в группе G .

Пусть $\pi(H) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ и $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Тогда, по теореме 3, группа $H \pi_i$ -однородна для каждого $i=1, 2, \dots, n$ и, по лемме 5, $H \pi_i'$ -замкнута для каждого $i=1, 2, \dots, n$. Значит, существует нормальный ряд

$$1 = H_{\pi_n'} \leq H_{\pi_{n-1}'} \leq \dots \leq H_{\pi_1'} \leq H,$$

факторы которого изоморфны силовским подгруппам группы H :

$$H_{\pi_{n-1}'} / 1 \approx H_{p_n}, \dots, H / H_{\pi_1'} \approx H_{p_1},$$

поэтому H будет дисперсивна по Оре.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, и пусть H – произвольная $\{s, r\}$ -подгруппа группы G , где s и r – простые числа из $\pi(G)$ такие, что $\{s, r\} \neq \{3, 2\}$, $s > r$ и s не делит r^2+r+1 . Если H не s -замкнута, то, по лемме 2, в ней существует $S_{\langle r,s \rangle}$ -подгруппа S . По условию теоремы порядок ее нормальной силовской r -подгруппы делит r^3 . По лемме 4 простое число s делит либо $r-1$, либо не делит $r-1$, но делит $r+1$, либо не делит r^2-1 , но делит r^2+r+1 . Первый случай невозможен, так как $s > r$. Второй случай выполняется только при $s=3$ и $r=2$, что противоречит условию. Так как по условию s не делит r^2+r+1 , то и в третьем случае имеем противоречие. Поэтому подгруппа H s -замкнута.

Предположим, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда H не r -замкнута и, по лемме 2, в H существует $S_{\langle s,r \rangle}$ -подгруппа S , нормальная силовская s -подгруппа которой имеет порядок, делящий s^3 . Из леммы 4 следует, что или r делит $s-1$, или r

не делит $s-1$, но делит $s+1$, или r не делит s^2-1 , но делит s^2+s+1 . Противоречие с тем, что r не делит $(s+1)(s^3-1)$. Значит, H нильпотентна.

Обратно. Пусть для группы G выполняются условия теоремы и $S - S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа, p и q из $\pi(G)$. Предположим, что $\{p,q\} = \{2,3\}$. Тогда по лемме 4 нормальная силовская p -подгруппа имеет порядок, делящий p^3 . Пусть $\{p,q\} \neq \{3,2\}$. Предположим, что $p > q$. Если q делит $(p+1)(p^3-1)$, то по лемме 4 нормальная силовская p -подгруппа имеет порядок, делящий p^3 . Если q не делит $(p+1)(p^3-1)$, то, по условию, группа S нильпотентна. Противоречие. Предположим, что $q > p$. Очевидно, что q не делит p^2-1 . Поэтому если q делит p^2+p+1 , то, по лемме 4, нормальная силовская p -подгруппа имеет порядок, делящий p^3 . Если же q не делит p^2+p+1 , то, по условию теоремы, группа S q -замкнута. Противоречие. Теорема 1 доказана полностью.

Пример 1. Группа $G = [E_{2^5}]Z_5$ не является 5-замкнутой и имеет в качестве своей подгруппы группу Шмидта $[E_{2^4}]Z_5$.

Пример 2. Группа $G = ([E_{2^3}]Z_7) \times D_{10}$ имеет порядок $2^4 \cdot 5 \cdot 7$, и множество всех подгрупп Шмидта исчерпывается группами типа $[E_{2^3}]Z_7$ и D_{10} . Кроме того, холлова $\{5,7\}$ -подгруппа группы G нильпотентна, где 7 не делит $5^2+5+1=31$ и 5 не делит $(7+1)(7^3-1) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней.

1. Согласно лемме 4 множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппами:

$$[Z_p]Z_{q^i}, q \text{ делит } p-1;$$

$$[E_{p^2}]Z_{q^i}, q \text{ делит } p+1, q > 2;$$

$$[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, q \text{ делит } p+1, q > 2;$$

$$[T]Z_{3^i}, T - \text{группа кватернионов порядка } 8;$$

$$[E_{p^3}]Z_{q^i}, q \text{ не делит } p^2-1, \text{ но делит } p^2+p+1.$$

2. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.2). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппами $[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 . В частности, все подгруппы Шмидта в группе G несверхразрешимы и в G нет 2-нильпотентных $2d$ -подгрупп Шмидта. По лемме 3, группа G 2-замкнута. В частности, по теореме Томпсона–Фейта, группа G разрешима и в ней существуют π -холловы подгруппы для любого множества $\pi \subseteq \pi(G)$.

Если $\{3,s\}$ -холлова подгруппа в G не 3-замкнута, то по лемме 2 в ней существует $S_{\langle s,3 \rangle}$ -подгруппа S , нормальная силовская s -подгруппа которой имеет порядок, делящий s^3 . Из леммы 4 следует, что или 3 делит $s-1$, или 3 не делит $s-1$,

но делит $s+1$, или 3 не делит s^2-1 , но делит s^2+s+1 . Первые два случая противоречат условию п. 2 теоремы. Если 3 делит s^2+s+1 , то 3 делит $s^2+s-2=(s-1)(s+2)$. Возможны варианты: или 3 делит $s-1$, или 3 делит $s+2$. Как из первого, так и из второго вариантов следует, что 3 делит $s-1$. Противоречие. Поэтому группа G является 3-замкнутой.

Пусть $H = \{s, r\}$ -холлова подгруппа, где $s > r > 3$. Если r делит s^2-1 и H не r -замкнута, то, по лемме 2, в H существует $S_{\langle s, r \rangle}$ -подгруппа S . Однако получаем противоречие с условием п. 2 теоремы.

Обратно, пусть для нильпотентной группы G выполняются условия 2.1–2.2 и S – ее произвольная $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, p и q из $\pi(G)$.

Если $q = 2$, то S 2-замкнута. Противоречие. Если $q = 3$, то S 3-замкнута. Противоречие. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q > 3$. Пусть $p = 2$. Если q делит $p^2-1=2^2-1=3$, то $q = 3$. Противоречие. Если q не делит $2^2-1=3$, но делит $2^2+2+1=7$. Тогда группа S является группой Шмидта типа 1.3). Если q не делит $2^2-1=3$ и не делит $2^2+2+1=7$, то порядок нормальной силовой 2-подгруппы группы S делится на 2^4 . Пусть $p = 3$. Если q делит $p^2-1=3^2-1=8$, то $q = 2$. Противоречие. Если q не делит $3^2-1=8$, но делит $3^2+3+1=13$. Тогда группа S является группой Шмидта типа 1.3). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $p > 3$.

Пусть $p > q > 3$. Если q делит p^2-1 , то из 2.2) следует, что $\{p, q\}$ -холлова подгруппа q -замкнута. Противоречие. Если q не делит p^2-1 , но делит p^2+p+1 , то $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа является группой Шмидта типа 1.3). Пусть $q > p > 3$. Следовательно, q не делит p^2-1 . Если q делит p^2+p+1 , то подгруппа S является группой Шмидта типа 1.3).

Из приведенных рассуждений следует, что в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.2).

3. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.3). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается следующими $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппами:

$$[E_{p^2}]Z_{q^i}, q \text{ делит } p+1, q > 2;$$

$$[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, q \text{ делит } p+1, q > 2;$$

$$[T]Z_{3^i}, T \text{ – группа кватернионов порядка } 8.$$

В частности, все подгруппы Шмидта в группе G несверхразрешимы и в G нет 2-нильпотентных $2d$ -подгрупп Шмидта. По лемме 3, группа G 2-замкнута. В частности, по теореме Томпсона-Фейта группа G разрешима и в ней существуют π -холловы подгруппы для любого множества $\pi \subseteq \pi(G)$. Из леммы 6 следует, что $3'$ - и $2'$ -холловы подгруппы дисперсивны по Оре.

Покажем, что $\{s, r\}$ -холлова подгруппа H нильпотентна для всех простых чисел $s > r > 2$, r не делит $s+1$. Если группа H не s -замкнута, то по лемме 2 в ней существует r -замкнутая подгруппа Шмидта. По условию порядок ее силовой r -подгруппы делит r^3 . По лемме 4 простое число s делит либо $r^2-1=(r-1)(r+1)$, либо не делит r^2-1 , но делит r^2+r+1 . Каждый из этих случаев противоречит условию п. 3. Поэтому подгруппа H s -замкнута. Если группа H не нильпотентна, то H не r -зам-

кнута. По лемме 2, в ней существует s -замкнутая подгруппа Шмидта и, по условию, порядок ее силовой s -подгруппы делит s^3 . По лемме 4, простое число r делит $(s-1)$ либо не делит $(s-1)$, но делит $(s+1)$ либо не делит (s^2-1) , но делит s^2+s+1 . Первый и третий случаи исключаются условием п. 3. Поэтому из предположения, что r не делит $s+1$, следует, что подгруппа H группы G нильпотентна.

Обратно. Пусть для группы G выполняются условия 3.1)–3.3) и S является $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппой, p и q из $\pi(G)$.

Если $q=2$, то, по условию 3.1), S 2-замкнута. Противоречие. Поэтому $q>2$. Пусть $p=2$. Тогда либо q делит $p^2-1=2^2-1=3$, либо q не делит 3, но делит $2^2+2+1=7$. В первом случае S является подгруппой Шмидта типа 1.2), а во втором имеем противоречие с тем, что 3'-холлова подгруппа дисперсивна по Оре. Поэтому $p>2$ и S – $2'$ -группа.

Из 3.2) следует, что S дисперсивна по Оре, поэтому $p>q$. Из 3.3) вытекает, что q делит $p+1$. Если q делит $p-1$, то $q=2$. Противоречие. Поэтому S является подгруппой Шмидта типа 1.2).

4. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.2) и 1.3). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппами $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$. В частности, все подгруппы Шмидта группы G сверхразрешимы и из теоремы 1 [3] следует, что группа G дисперсивна по Оре и $\{s,r\}$ -холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел s и r таких, что $s>r$, r не делит $s-1$.

Обратно. Пусть группа G дисперсивна по Оре, $\{s,r\}$ -холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел s и r таких, что $s>r$, r не делит $s-1$, и S – произвольная $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа группы G . Согласно теореме 1 [3] все подгруппы Шмидта S группы G сверхразрешимы. Таким образом, в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.2) и 1.3).

Теорема 2 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса. – 2002. – С. 81–90.
3. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
4. Монахов, В.С. Конечные группы, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008 – № 2 (31). – С. 19–23.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.
6. Arad, Z. A criterion for the existence of normal π -complements in finite groups / Z. Arad, D. Chillag // J. Algebra. – 1984. – Vol. 87, № 2. – P. 472–482.
7. Ferguson, P. On π -closure of π -homogeneous groups / P. Ferguson // American Math. Society. – 1977. – Vol. 66, № 1. – P. 9–12.

V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk. Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Schmidt Subgroups

The natural number n is called free from the fourth degrees if p^4 does not divide n for all prime p . The structure of groups such that the Schmidt subgroups of its have normal Sylow subgroups of order free from the fourth degrees are studied. In particular, the criterion of absence in group the Schmidt subgroups such that the orders of its normal Sylow subgroups is divided on the fourth degrees of prime numbers is obtained.

УДК 517.5

Д.Н. Олешкевич, М.А. Прохорович

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ПРОСТРАНСТВЕ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Пусть $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ – обобщенные классы Соболева на поле p -адических чисел и $\text{Cap}_{\alpha,q}$ – соответствующая емкость. Мы покажем, что для любой функции $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, существует множество $E \subset \mathbb{Q}_p^m$ такое, что $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ и для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$ выполнено

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu = u^*(x), \quad \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u^*(x)|^s d\mu = 0,$$

где $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m}$, $B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^m : \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq p^\gamma\}$.

Более того, функция u^* обладает $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -свойством Лузина и $\text{Cap}_{\alpha,q}(\{u^* \neq u\}) = 0$.

Введение.

В работе А. Кальдерона [1] было дано описание пространств Соболева $W_1^q(\mathbb{R}^m)$ в терминах максимальных функций, не использующее специфических конструкций на \mathbb{R}^m , кроме метрики и меры.

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ , которые связаны условием удвоения: при некотором $m > 0$ (здесь и далее через c обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли)

$$\mu(B(x, R)) \leq cR^m r^{-m} \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R. \tag{1}$$

Здесь $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ – шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$. В таком случае принято говорить, что (X, d, μ) является пространством однородного типа.

Классы Кальдерона вводятся следующим образом:

$$W_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : \|u\|_{W_\alpha^q(X)} = \|u\|_{L^q(X)} + \|S_\alpha u\|_{L^q(X)} < \infty\}, \tag{2}$$

$$S_\alpha u(x) = \sup_{x \in B} r_B^{-\alpha} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(y) - u_B| d\mu(y), \quad u_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u d\mu$$

(точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y, r)$ радиуса $0 < r_B \leq 1$, содержащим точку $x \in X$). В случае $X = \mathbb{R}^m$ и $\alpha = 1$ классы $W_1^q(X)$ совпадают с классическим пространством Соболева первого порядка [1], а в общем случае – совпадают с классами Соболева–Хайлаша [2]. Для этих классов имеется также много других эквивалентных описаний [3; 4], некоторые из них будут использованы ниже.

В работах [6–10] изучалась задача о массивности дополнения ко множеству точек Лебега для функции из $W_\alpha^q(X)$. Итоговый результат выглядит следующим образом:

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, $u \in W_\alpha^q(X)$, а мера μ удовлетворяет условию (1). Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для любого $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u d\mu = u^*(x), \quad \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^s d\mu = 0, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m},$$

и справедливы следующие оценки (здесь \dim_H – размерность Хаусдорфа, а $\text{Cap}_{\alpha,q}$ – емкость, порожденная классами $W_\alpha^q(X)$):

- 1) $\dim_H(E) \leq m - \alpha q$,
- 2) если $\alpha \leq 1$, то дополнительно можно утверждать, что $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$.

В случае $X = \mathbb{R}^m$ это было сделано в [11]. История соответствующих результатов в этом направлении на \mathbb{R}^m достаточно подробно изложена в [12, глава 6.2]. На пространствах однородного типа при $\alpha = 1$ в терминах размерности Хаусдорфа этот результат был частично получен в [6], а в терминах соответствующих емкостей при всех $s^{-1} > q^{-1} - m^{-1}$ – в [7]. Случай $\alpha > 0$, $s^{-1} = q^{-1} - m^{-1}$ был рассмотрен вторым автором в терминах емкостей для $0 < \alpha \leq 1$ [8] и в терминах размерности Хаусдорфа для $0 < \alpha \leq 1$ [9] и [10] для $\alpha > 0$.

Однако существуют интересные ситуации, когда классы Гельдера нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$. Например, это так на кривой Коха при $0 < \alpha \leq \ln 4 (\ln 3)^{-1}$ [13] или пространстве p -адических чисел \mathbb{Q}_p для всех $\alpha > 0$. Поэтому условие $\alpha \leq 1$ существенно сужает множество возможных ситуаций. К сожалению, на общих метрических пространствах работа с емкостями в классах $W_\alpha^q(X)$ с $\alpha > 1$ затруднена, так как необходимо уметь строить нетривиальные гильдеровские функции с показателем $\alpha > 1$ и носителем на любом заданном шаре, а это не всегда возможно.

В этой работе мы перенесем результаты из [8] на пространство \mathbb{Q}_p^m , причем нам удалось избавиться от ограничения $\alpha \leq 1$. Перейдем к точным формулировкам и опишем необходимые понятия.

1. Необходимые определения.

1.1. Пространство p -адических чисел \mathbb{Q}_p^m .

Пусть p – простое число. В поле \mathbb{Q} можно ввести нормирование $|x|_p$ по правилу $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$, где число $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ определяется из представления $x = p^\gamma m n^{-1}$, причем $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимнопросты с p . Введенное нормирование называется p -адическим нормированием. Оно порождает ультраметрику, т.е. неравенство треугольника имеет вид:

$$|x - y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Пополнение поля \mathbb{Q} по p -адическому нормированию называется полем p -адических чисел и обозначается \mathbb{Q}_p [14; 15]. Пространство \mathbb{Q}_p^m состоит из точек $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x_i \in \mathbb{Q}_p$, $i = 1, \dots, m$ и снабжено нормой $\|x\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|_p$, которая также является ультраметрикой [15, с. 34].

Шар радиуса $p^{-\gamma}$ с центром в точке $x \in \mathbb{Q}_p^m$ будем обозначать далее

$$B_\gamma(x) = \left\{ y \in \mathbb{Q}_p^m : \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq p^{-\gamma} \right\}.$$

Также будем использовать стандартные обозначения: $L^\infty = L^\infty(\mathbb{Q}_p^m)$ – множество классов эквивалентности измеримых существенно ограниченных вещественнозначных

функций, $L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^m)$ – множество локально интегрируемых функций, $L^q = L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $1 \leq q < \infty$ – обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ (здесь μ – мера Хаара на \mathbb{Q}_p^m [15, с. 57]), $C(\mathbb{Q}_p^m)$ – пространство непрерывных функций, $H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ – стандартные классы Гельдера

$$H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m) = \{f \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^m) : \|f\|_{H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)} = \sup_{x \neq y} \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{-\alpha} |f(x) - f(y)| < +\infty\}.$$

1.2. Пространства $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ и емкости

Нам понадобится следующее эквивалентное определение классов $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, которое восходит к П. Хайлашу [2; 3; 5].

Для функции $u \in L^q$ обозначим через $D_\alpha[u]$, $\alpha > 0$, класс всех неотрицательных μ -измеримых функций f на \mathbb{Q}_p^m , для каждой из которых существует такое множество $E \subset \mathbb{Q}_p^m$, $\mu(E) = 0$, что $|u(x) - u(y)| \leq \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha [f(x) + f(y)]$ для любых $x, y \in X \setminus E$. Дробные классы Хайлаша–Соболева $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ вводятся следующим образом [5; 3]:

$$W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m) = \{u \in L^q(\mathbb{Q}_p^m) : D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m) \neq \emptyset\},$$

$$\|u\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q = \|u\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q + \inf \left\{ \|f\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q : f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m) \right\}. \quad (3)$$

В случае евклидовых пространств \mathbb{R}^m классы $W_1^q(\mathbb{R}^m)$ совпадают с классическим пространством Соболева [2]. В случае произвольного метрического пространства X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения (1), классы $W_1^q(X)$ были введены в работе [2]. Определения (2) и (3) эквивалентны [3; 4], поэтому мы и используем для них одно и то же обозначение.

Классы $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ порождают соответствующие емкости

$$\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf \left\{ \|u\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q : u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m), u \geq 1 \text{ в окрестности } E \subset \mathbb{Q}_p^m \right\}.$$

В случае метрических пространств с условием удвоения (1) при $\alpha = 1$ они были определены и изучены в работе [16], а в случае произвольного $\alpha > 0$ – в [8; 17]. В случае евклидовых пространств \mathbb{R}^m результаты в этом направлении можно найти во многих работах [12, с. 152–153].

2. Основной результат

Функции из классов $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ определены лишь μ -почти всюду, поэтому, следуя [6], мы считаем, что все локально суммируемые функции в каждой точке определяются равенством

$$u(x) = \limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu.$$

Будем говорить, что функция $u : \mathbb{Q}_p^m \rightarrow \mathbb{R}$ обладает $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -свойством Лузина (при $\alpha = 1$ это свойство называют обычно q -квазинепрерывностью [16], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $E_\varepsilon \subset \mathbb{Q}_p^m$ такое, что $\text{Cap}_{\alpha,q}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и сужение функции u на $\mathbb{Q}_p^m \setminus E_\varepsilon$ непрерывно.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$ и функция $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$. Тогда существует множество $E \subset \mathbb{Q}_p^m$ такое, что $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ и для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$ выполнено

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu = u^*(x), \quad \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u^*(x)|^s d\mu = 0, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m}.$$

Более того, функция u^* обладает $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -свойством Лузина и $\text{Cap}_{\alpha,q}(\{u^* \neq u\}) = 0$.

При доказательстве теоремы 2 мы используем схему рассуждений из работы [8], приспособленную к пространствам \mathbb{Q}_p^m .

3. Вспомогательные утверждения

Нам потребуется обобщенное неравенство Соболева–Пуанкаре, в котором участвует максимальная функция А. Кальдерона–Р.Скотта из (2). Утверждение леммы 1 является частным случаем результатов работы И.А.Иванишко и В.Г.Кротова [18].

Лемма 1. Пусть $q > 0$, $0 < \alpha < m q^{-1}$, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^m)$. Тогда для любого шара $B_\gamma \subset \mathbb{Q}_p^m$

$$\left[\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u_{B_\gamma(x)}|^s d\mu \right]^{1/s} \leq c p^{\gamma\alpha} \left[\frac{1}{\mu(B_{c\gamma}(x))} \int_{B_{c\gamma}(x)} (S_\alpha u)^q d\mu \right]^{1/q}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m}.$$

Отметим также одно свойство емкостей. Случай евклидовых пространств \mathbb{R}^m [12, с. 152–153]. Случай метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения при $\alpha = 1$ [7; 16], а при $0 < \alpha \leq 1$ в [8; 17].

Лемма 2. Пусть $1 < q < \infty$, $f \in L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $f(x) \geq 0$ и $\alpha > 0$ тогда $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$, где

$$E = \{x \in \mathbb{Q}_p^m : \limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} p^{\gamma\alpha} \frac{1}{\mu(B_\gamma)} \int_{B_\gamma} f^q d\mu > 0\}.$$

4. Теорема о продолжении функции

Хорошо известно, что функции, удовлетворяющие условию Гельдера порядка $0 < \alpha \leq 1$ на подмножестве метрического пространства, могут быть продолжены с сохранением этого свойства на все пространство [19, теорема 13.14]. Нам понадобится аналогичное утверждение в случае \mathbb{Q}_p^m , но уже для всех $\alpha > 0$.

Теорема 3. Пусть $E \subset \mathbb{Q}_p^m$ и функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для некоторых $K > 0$, $\alpha > 0$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha$. (4)

Тогда существует функция $\tilde{f} : \mathbb{Q}_p^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}|_E = f$, для которой \tilde{f} выполнено условие (4) на \mathbb{Q}_p^m .

Доказательство.

Из (4) следует, что функция f является равномерно непрерывной. Следовательно, ее можно продолжить на замыкание множества E с сохранением константы и показателя Гельдера. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что E замкнуто.

Для $x \in \mathbb{Q}_p^m$ обозначим $R(x) = \inf \{\|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} : y \in E\}$. Отметим, что в $R(x)$ точная нижняя грань достигается. Действительно, существует радиус p^{γ_0} , такой что $B_{\gamma_0}(x) \cap E \neq \emptyset$ и инфимум достаточно брать по множеству $B_{\gamma_0}(x) \cap E$, которое является компактным. Обозначим $B[x] = B_{\gamma_0}(x)$. Пусть

$$M(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \in E \\ B[x] \cap E, & x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E \end{cases}, \quad h(x) = \max\{f(z) : z \in M(x)\},$$

$$T(x) = \{z \in M(x) : f(z) = h(x)\}.$$

Возьмем $\tau(x) \in T(x)$. Положим $\tilde{f}(x) = f(\tau(x))$. Покажем, что для \tilde{f} выполняется $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq K \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha$. Рассмотрим все возможные случаи расположения точек x, y .

1) В случае $x, y \in E$ утверждение теоремы очевидно.

2) Пусть $x \in E, y \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$. В этом случае выполнено $\tau(x) = x \in E$. В силу определения $\tau(y)$ имеем $\|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq \|\tau(y) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m}, x \in E$. Отсюда $\|\tau(y) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Тогда $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(\tau(x)) - f(\tau(y))| \leq K \|\tau(x) - \tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha = K \|\tau(y) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha \leq K \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha$.

3) Если $x, y \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$, то возможны два случая:

3.1) $B[x] \cap B[y] = \emptyset$. В этом случае $\|\tau(y) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m} < \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$ и $\|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} < \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Отсюда $\|\tau(x) - \tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$ и, по свойству неархимедовой метрики имеем $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(\tau(x)) - f(\tau(y))| \leq K \|\tau(x) - \tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha = K \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha$.

3.2) Если $B[x] \cap B[y] \neq \emptyset$, то неограничивая общности $B[x] \subset B[y]$, т.е. $R(x) \leq R(y)$.

Возможны два подслучая.

3.2.1) Если $y \in B[y] \setminus B[x]$. Выполнено $\|\tau(x) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m} < \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$, откуда $\|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Поскольку $P[x] \subset P[y]$, то $\tau(x) \in P(y)$ и $\|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. По сильному неравенству треугольника

$$\|\tau(x) - \tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq \max\{\|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}, \|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}\} = \|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}.$$

Откуда получаем

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(\tau(x)) - f(\tau(y))| \leq K \|\tau(x) - \tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha = K \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha.$$

3.2.2) Пусть $y \in B[x]$. Тогда $R(y) = \|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Так как $\tau(x) \in P(x) = (B[x] \cap E) \subset (B[y] \cap E) = P(y)$. Следовательно, $\|\tau(y) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} = \|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Так как $y \in B[x]$, то $\|\tau(x) - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq \|\tau(x) - x\|_{\mathbb{Q}_p^m} = R(x)$. Следовательно, $B[x] = B[y]$, $P(x) = P(y)$, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$. Теорема доказана.

5. Плотность класса Гельдера в $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$

Класс Гельдера $H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ плотен в $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$; более того, справедливо следующее утверждение (случай $\alpha = 1$ [2, с. 408]).

Теорема 4. Для любой функции $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ такая что, $\mu(\{x \in \mathbb{Q}_p^m : u(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$ и $\|u - \varphi\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)} < \varepsilon$.

6. Неравенство слабого типа для емкости

Максимальная функция Харди–Литтлвуда [20, с. 65], вводится стандартным способом

$$Mu(x) = \sup \frac{1}{\mu(B_\gamma)} \int_{B_\gamma} |u| d\mu : \quad (5)$$

(sup берется по всем шарам B_γ , содержащим точку $u \in \mathbb{Q}_p^m$).

Лемма 3. Пусть $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$. Тогда $Mu \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ и при некотором $c > 0$ выполнено $cMf \in D_\alpha[Mu] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$.

Неравенство слабого типа для $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -емкости, приведенное в следующей теореме, является ключевым для доказательства нашего основного результата. В случае метрических пространств с мерой доказательство теоремы 5 приведено в [7] для $\alpha = 1$ и в [8] для $0 < \alpha \leq 1$. Лемма 3 существенно используется при доказательстве теоремы 5.

Теорема 5. Если $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, то при некотором $c > 0$.

$$\text{Cap}_{\alpha,q}(\{Mu > \lambda\}) \leq c\lambda^{-q} \|u\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q, \lambda > 0.$$

7. Доказательство теоремы 2

После того, как готовы все вспомогательные средства, в которых использовалась специфика пространства \mathbb{Q}_p^m , доказательство теоремы 2 будет следовать схеме рассуждений из работы [8].

В силу теоремы 4 существует такая последовательность непрерывных функций $u_i \in C(\mathbb{Q}_p^m) \cap W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, что $\|u - u_i\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q \leq 2^{-i(q+1)}$. Обозначим

$$A_i = \{x \in \mathbb{Q}_p^m : M(u - u_i)(x) > 2^{-i}\}, i \in \mathbb{N}.$$

Тогда, используя теорему 5, получаем следующее неравенство:

$\text{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \leq c2^{iq} \|u - u_i\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}^q \leq c2^{-i}$. Очевидно, что

$$|u_i(x) - u_\gamma(x)| \leq \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i(x) - u_i| d\mu + \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i - u| d\mu,$$

и так как для любой точки $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus A_i$

$$\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i(x) - u_i| d\mu \rightarrow 0 \text{ при } \gamma \rightarrow -\infty,$$

то справедлива оценка $\limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} |u_i(x) - u_\gamma(x)| \leq M(u_i - u)(x) \leq 2^{-i}$. Обозначим

$$B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i, k \in \mathbb{N}, \text{Cap}_{\alpha,q}(B_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \text{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \leq c \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = c2^{-k}$$

(неравенство верно в силу субаддитивности емкости). Если $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$ и $i, j \geq k$, то

$$|u_i(x) - u_j(x)| \leq \limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} |u_i(x) - u_\gamma(x)| + \limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} |u_\gamma(x) - u_j(x)| \leq 2^{-i} + 2^{-j}.$$

Это означает, что $\{u_i\}$ сходятся равномерно на $\mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$ к некоторой непрерывной функции v , для которой справедлива оценка

$$\limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} |v(x) - u_\gamma(x)| \leq |v(x) - u_i(x)| + \limsup_{\gamma \rightarrow -\infty} |u_i(x) - u_\gamma(x)|.$$

Теперь мы можем определить функцию $u^*(x) = v(x) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu$ для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$. Пусть $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, тогда $\text{Cap}_{\alpha,q}(B_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \text{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i}$, откуда $\text{Cap}_{\alpha,q}(C) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Cap}_{\alpha,q}(B_k) = 0$. Значит, $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -почти всюду (на $\mathbb{Q}_p^m \setminus C$) существует

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu = u^*(x).$$

Пусть D – множество из леммы 2 для функции $f = \mathcal{S}_\alpha u \in L^q(\mathbb{Q}_p^m)$. Тогда в силу леммы 1 на $\mathbb{Q}_p^m \setminus D$

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u_\gamma(x)|^s d\mu \right)^{1/s} \leq c \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} p^{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} (\mathcal{S}_\alpha u)^q d\mu \right)^{1/q} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Осталось заметить, что } \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u^*(x)|^s d\mu \right)^{1/s} &\leq \\ &\leq \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u_\gamma(x)|^s d\mu \right)^{1/s} + \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} |u_\gamma(x) - u^*(x)| = 0 \end{aligned}$$

для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus (C \cup D)$ и $\text{Cap}_{\alpha,q}(C \cup D) = 0$.

Теперь, чтобы получить утверждение теоремы, нужно зафиксировать $\varepsilon > 0$ и выбрать k достаточно большим, чтобы $\text{Cap}_{\alpha,q}(B_k) < \varepsilon/2$. Тогда существует открытое множество $O \supset B_k$ такое что, $\text{Cap}_{\alpha,q}(O) < \varepsilon$. Так как $\{u_i\}$ сходятся равномерно к u^* на $\mathbb{Q}_p^m \setminus O$, то сужение $u^*|_{\mathbb{Q}_p^m \setminus O}$ – непрерывная функция. Теорема доказана.

Авторы выражают признательность В.Г. Кротову и Я.В. Радыно за постоянное внимание, а также Е.М. Радыно за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Calderon, A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions / A.P. Calderon // *Studia Mathematica*. – 1972. – Vol. 44. – P. 561–582.
2. Hajlasz, P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces / P. Hajlasz // *Potential Analysis*. – 1996. – Vol. 5, № 4. – P. 403–415.
3. Yang, D. New characterization of Hajlasz-Sobolev spaces on metric spaces / D. Yang // *Science in China (series A)*. – 2003. – Vol. 46, № 5. – P. 675–689.
4. Иванишко, И.А. Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко // *Математические заметки*. – 2005. – Т. 77, № 6. – С. 937–940.
5. Hu, J. A note on Hajlasz-Sobolev spaces on fractals / J. Hu // *Journal of mathematical analysis and applications*. – 2003. – Vol. 280, № 1. – P. 91–101.
6. Hajlasz, P. Holder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces / P. Hajlasz, J. Kinnunen // *Revista Matematica Iberoamericana*. – 1998. – Vol. 14, № 3. – P. 601–622.
7. Kinnunen, J. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces / J. Kinnunen, V. Latvala // *Revista Matematica Iberoamericana*. – 2002. – Vol. 18, № 3. – P. 685–700.

8. Прохорович, М.А. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша-Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2006. – № 1. – С. 19–23.
9. Прохорович, М.А. Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 1. – С. 99–107.
10. Прохорович, М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева $W_\alpha^p, \alpha > 0$, на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 616–621.
11. Federer, H. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p -th power summable / H. Federer, W. Ziemer // Indiana University Mathematics Journal. – 1972. – Vol. 22, № 2. – P. 139–158.
12. Adams, D.R. Function spaces and potential theory / D.R. Adams, L.I. Hedberg. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag. – 1996. – 366 p.
13. Jonsson, A. Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions / A. Jonsson // Journal of mathematical analysis and applications. – 2004. – Vol. 290, № 1. – P. 86–104.
14. Schikhov, W. Ultrametric calculus. An introduction to p -adic analysis/ W. Schikhov. – London : Cambridge University Press. – 1984. – 306 p.
15. Владимиров В.С. p -адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленев. – М. – 1994. – 352 с.
16. Kinnunen, J. The Sobolev capacity on metric spaces / J. Kinnunen, O. Martio // Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica. – 1996. – Vol. 21. – P. 367–382.
17. Прохорович, М.А. Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2007. – № 3. – С. 106–111.
18. Иванишко, И.А. Обобщенное неравенство Пуанкаре-Соболева на метрических пространствах / И.А. Иванишко, В.Г. Кротов // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2005. – Т. 14, № 1. – С. 51–61.
19. Wells, J.H. Embeddings and Extensions in Analysis / J.H. Wells, L.R. Williams. – Berlin : Springer. – 1975. – 116 p.
20. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн ; под ред. Е.Д. Соломенцева и С.Б. Стечкина. – Москва : Мир. – 1974. – 331 с.

D.N. Oleshkevich, M.A. Prokhorovich. Lebesgue Points for Functions From Sobolev Classes on Space of p -Adic Numbers

Let $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ – be Sobolev generalized classes on space of p -adic numbers and $\text{Cap}_{\alpha,q}$ – corresponding capacity. We show, that for any function $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, there exists a set $E \subset \mathbb{Q}_p^m$, such that $\text{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ and for any $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu = u^*(x), \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u^*(x)|^s d\mu = 0, \quad \text{where } \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m},$$

$$B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^m : \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \leq p^\gamma\}.$$

Moreover, function u^* hold $\text{Cap}_{\alpha,q}$ -Lusin's property and $\text{Cap}_{\alpha,q}(\{u^* \neq u\}) = 0$.

УДК 517.956

В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко

МЕТОД ПОГРАНСЛОЯ И УСЛОВИЕ ТИПА ГЮГОНИО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами построены асимптотические однофазовые солитоноподобные решения, с помощью которых получены так называемые условия типа Гюгонио для рассматриваемого уравнения. Методом погранслоя построено решение задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами.

Введение

Одним из фундаментальных уравнений современной теоретической и математической физики является уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

появившееся в связи с попытками получить адекватное математическое описание явления уединенной волны, которую впервые наблюдал в 1834 году шотландский ученый Джон Скотт Рассел [1].

Точное решение уравнения (1), которое описывает движение уединенной волны, имеет вид

$$u(x, t) = u_0 + A \operatorname{ch}^{-2}(\beta(x - \varphi(t))), \quad (2)$$

где $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$, $A = \frac{a^2}{2}$, $\beta = \frac{a}{2}$. Здесь $a > 0$, u_0 – некоторые константы.

Как оказалось, уравнение Кортевега–де Фриза описывает ряд самых разнообразных явлений и процессов: в частности, это уравнение используется для описания ионно-звуковых и магнитогидродинамических волн в плазме, волн в ангармонической решетке и многих других [3].

Как известно [2], Д. Кортевег и Дж. де Фриз нашли периодические волновые решения уравнения (1), которые имеют несинусоидальную форму и становятся приближенно синусоидальными, если их амплитуда очень мала. При увеличении длины волны эти решения принимают вид далеко расположенных друг от друга возвышенностей на поверхности жидкости, а в предельном случае, при очень большой длине волны, превращаются в одну возвышенность, которой соответствует уединенная волна.

Это уравнение было предложено в 1895 году голландским ученым Д. Дж. Кортевегом и его учеником Дж. де Фризом в работе [2], которая осталась почти не замеченной. Ее быстро забыли, и только лишь отдельные ученые, занимавшиеся задачами гидродинамики, изредка возвращались к рассмотрению уравнения Кортевега–де Фриза и проблеме уединенной волны.

Позже было уделено надлежащее внимание этому уравнению и его создателям, когда в 1995 году в Амстердаме – на родине Д. Кортевега и Дж. де Фриза, была проведена международная научная конференция, посвященная столетию со дня открытия уравнения Кортевега–де Фриза.

В 1965 году уравнение Кортевега–де Фриза оказалось в центре внимания физиков и математиков, когда известные американские ученые М. Крускал и Н. Забуски предложили [4] решение проблемы Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [5] и когда ими была обнаружена связь уравнений цепочки Тоды [6], которую исследовали Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улам, с уравнением Кортевега–де Фриза.

Изучая позже при помощи численных экспериментов уравнение Кортевега–де Фриза для случая малой дисперсии, то есть при наличии малого параметра при старшей производной в (1), М. Крускал и Н. Забуски [4] математически обосновали многие физические свойства уединенной волны, экспериментально открытые Дж. Скоттом Расселом, и сформулировали определение солитона [4].

В связи с уравнением Кортевега–де Фриза следует также упомянуть классическую работу К.С. Гарднера, Дж.М. Грина, М.Д. Крускала и Р.М. Миуры [7], где впервые был предложен так называемый метод спектрального преобразования для решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза, и работу П. Лакса [8], где указан общий характер этого метода.

Это вызвало бурное развитие нового направления в современной математической физике – математической теории солитонов, основы которой были заложены работами многих ученых по исследованию уравнения Кортевега–де Фриза [9].

Как известно, при исследовании разнообразных задач квантовой механики [10], нелинейной теории распространения волн [11], физики плазмы [3] возникает необходимость изучения волновых процессов как в средах с малой дисперсией, так и в неоднородных средах.

Наиболее простой моделью, описывающей волновые процессы в средах с малой вязкостью ε , является уравнение Бюргерса

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad (3)$$

которое, как известно [12], при помощи подстановки Коула–Хопфа сводится к уравнению теплопроводности.

Эта процедура позволяет получить точные решения уравнения (3) и изучить многие специфические эффекты в гидродинамике сред с малой вязкостью, в частности, явления опрокидывания волн и ударной волны. Кроме того, использование формул для точных решений уравнения (3) позволяет проанализировать асимптотические свойства (при $\varepsilon \rightarrow 0$) этих решений и указать такие решения уравнения (3), которые стремятся (поточечно) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому разрывному решению. Заметим, что такой сценарий асимптотического поведения решений уравнения (3) свойственен именно ударной волне [12].

Для более сложных систем, например, для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, системы Навье–Стокса с малой вязкостью и других уравнений с частными производными, содержащих малый параметр, не всегда удается найти их точное решение, а поэтому для анализа свойств их решений используются различные асимптотические методы малого параметра [13–24], применение которых часто основывается на использовании формул для точных решений соответствующей порождающей (невозмущенной, $\varepsilon = 0$) задачи, представляющие предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение решения возмущенной задачи. При этом решение соответствующей порождающей задачи часто является разрывной функцией, как это видно в [12] на примере уравнения Бюргерса (3).

Задача нахождения асимптотических решений для дифференциальных уравнений с малым параметром решалась при помощи различных методов: в [13] при построении асимптотических решений для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами применялся метод усреднения; в [14] при построении так называемых асимптотических однофазовых и многофазовых солитоноподобных решений для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с частными производными Г. Венцель, Х. Крамер и Л. Бриллюэн предложили метод, впоследствии получивший название метода ВКБ, который позже применялся Г.Б. Уиземом [15] и М.Дж. Лайтхил-

лом [16] при изучении задач о распространении периодических волн; в [17] при исследовании задач теории нелинейных колебаний использовался метод усреднения; в [18] при помощи принципа сглаживания, итерационного варианта метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова и метода усреднения изучались регулярные по малому параметру многочастотные системы дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми фазовыми переменными, в которых возможны резонансные соотношения между основными частотами; в [19; 20] В.П. Маслов, Г.А. Омелянов и С.Ю. Доброхотов получили солитоноподобные решения для ряда нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными математической и теоретической физики и обосновали для рассмотренных ими уравнений идею построения асимптотических разложений для солитоноподобных решений; в [21] построено асимптотическое решение типа погранслоя краевой задачи для линейного эллиптического уравнения.

Асимптотические разложения возникают также при построении быстро осциллирующих асимптотических решений линейных и нелинейных уравнений [22], асимптотики функции Грина для параболических уравнений [23], асимптотических быстроубывающих решений для строго гиперболических систем с переменными коэффициентами [24], а также в других случаях.

Математические модели, основанные на уравнении Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной, описывают волновые процессы в средах с малой дисперсией [25; 26], поэтому представляет значительный интерес решение задачи о построении асимптотических разложений для указанного типа уравнений, поскольку такие решения можно использовать при анализе важных физических явлений. В частности, Е.С. Бенилов, Р. Гримшоу и Е.П. Кузнецова [27] рассмотрели уравнение Кортевега–де Фриза пятого порядка с малым параметром при старшей производной и исследовали устойчивость нелокальной уединенной волны для этого уравнения.

Несмотря на то, что уравнение Кортевега–де Фриза привело к возникновению теории обратной задачи рассеивания, которая стала важным инструментом исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, эта теория не позволяет найти точные решения уравнения Кортевега–де Фриза в случае переменных коэффициентов. Поэтому для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами используют асимптотические методы, которые позволяют найти приближенные решения.

Данная работа посвящена рассмотрению вопроса об асимптотических однофазовых солитоноподобных решениях (см. определение 1) сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами вида

$$\varepsilon^{N_0} u_{xxx} = a(x, \varepsilon) u_t + b(x, \varepsilon) u u_x, \quad N_0 \in \mathbf{N}, \quad (4)$$

где функции $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$ представимы рядами

$$a(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varepsilon^k, \quad b(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) \varepsilon^k,$$

$a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k \geq 0$; $t \in [0; T]$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Сначала в данной работе построено асимптотическое однофазовое солитоноподобное решение уравнения (4) (в классе быстроубывающих функций, без учета каких-либо начальных условий), затем полученные формулы для асимптотического однофазового солитоноподобного решения и главный член асимптотики используются для вывода так называемых условий типа Гюгонио (для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза (4)).

Эти условия представляют достаточные условия существования некоторых специальных разрывных решений квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, являющегося порождающим для уравнения Кортевега–де Фриза (получаемого из (4) при $\varepsilon = 0$).

В завершение статьи при помощи метода погранслоя получено решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (4) в виде асимптотической однофазовой солитоноподобной функции (в классе быстроубывающих функций). Часть результатов данной статьи ранее получена в работах авторов.

1. Асимптотические решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами

Пусть $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$, удовлетворяющих равномерно по переменным (x, t) на каждом компакте $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ для произвольных неотрицательных целых чисел n, m, q, α следующим двум условиям [28]:

1) имеет место соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K,$$

2) существует бесконечно дифференцируемая функция $f^-(x, t)$ такая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Обозначим через $G_0 = G_0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}) \subset G$ пространство функций $f(x, t, \tau)$, удовлетворяющих равномерно по переменным (x, t) на каждом компакте $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Определение 1 [28]. Функция $u = u(x, t, \varepsilon)$ называется асимптотической однофазовой солитоноподобной, если для каждого целого числа $N > 0$ эта функция $u(x, t, \varepsilon)$ представима с помощью асимптотического разложения по малому параметру ε следующего вида:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon},$$

где $\varphi(t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0; T])$ – скалярная действительная функция; функции $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, – бесконечно дифференцируемы, причем в точках $t = 0$, $t = T$ рассматриваются соответственно левая и правая производные; $V_0(x, t, \tau) \in G_0$; $V_j(x, t, \tau) \in G$, $j = \overline{1, N}$.

Функция $S(x, t) = x - \varphi(t)$ называется фазой однофазовой солитоноподобной функции $u(x, t, \varepsilon)$ и определяет линию разрыва $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : x = \varphi(t)\}$ некоторого разрывного решения уравнения $a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x = 0$.

В дальнейшем используются некоторые обозначения из асимптотического анализа [29]. В частности, асимптотическое равенство $\Psi(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $(x, t) \in K$ понимается в том смысле, что существуют некоторое значение $\varepsilon_0 > 0$ и по-

стоянная $C > 0$ такие, что выполняется неравенство $|\Psi(x, t, \varepsilon)| \leq C \varepsilon^N$ для всех $(x, t) \in K$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

Вид асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения (4) зависит от порядка сингулярности в (4), т.е. числа N_0 , а именно [30–33]:

если число N_0 четное, то

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = (x - \varphi(t)) / \varepsilon^{\frac{N_0}{2}};$$

если число N_0 нечетное, то

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{при} \quad N \leq \left[\frac{N_0}{2} \right],$$

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{N_0}{2} \right]} \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + \\ + \sum_{j=\left[\frac{N_0}{2} + 1 \right]}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + O(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}) \quad \text{при} \quad N > \left[\frac{N_0}{2} \right].$$

Здесь $u_j(x, t)$, $V_j(x, t, \tau)$, $j \geq 0$ – некоторые функции, определяемые в процессе построения асимптотического решения.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $N_0 = 2$ и опишем алгоритм построения асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения (4) для $N_0 = 2$. Это решение ищем в виде следующего асимптотического ряда:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}. \quad (5)$$

В соответствии с общей методологией построения асимптотических решений подставим разложение (5) в уравнение (4) и, умножив полученное соотношение на ε , находим:

$$\varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3} \right) + 3\varepsilon \frac{\partial^3 V_N}{\partial x \partial \tau^2} + 3\varepsilon^2 \frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2 \partial \tau} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau^3} - \\ - a(x, \varepsilon) \left(\varepsilon \frac{\partial U_N}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial V_N}{\partial t} - \varphi'(t) \frac{\partial V_N}{\partial \tau} \right) - \\ - b(x, \varepsilon) (U_N + V_N) \left(\varepsilon \frac{\partial U_N}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{\partial V_N}{\partial \tau} \right) = O(\varepsilon^{N+2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь использованы обозначения:

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t)$$

для регулярной части асимптотики (5) и

$$V_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau)$$

для сингулярной части асимптотики (5), $\tau = (x - \varphi(t)) / \varepsilon$.

Учитывая, что $V_0(x, t, \tau) \in G_0$; $V_j(x, t, \tau) \in G$, $j = \overline{1, N}$, уравнения для регулярной части асимптотики получим из (6) при $\tau \rightarrow +\infty$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой частях полученного равенства, для определения коэффициентов регулярной части асимптотики находим систему дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$a_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$a_0(x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x) u_0(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x) u_j(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} = f_j(x, t), \quad j = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где функции $f_j(x, t) = f_j(x, t, u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_{j-1}(x, t))$, $j = \overline{1, N}$, определяются рекуррентным образом.

Полученная система состоит из одного квазилинейного дифференциального уравнения (7) и линейных дифференциальных уравнений вида (8), которые при каждом $j = \overline{1, N}$ при весьма общих условиях имеют бесконечно дифференцируемые решения.

В дальнейшем предполагается, что уравнения (7), (8) имеет бесконечно дифференцируемые решения для всех $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$. Другими словами, задача о построении регулярной части асимптотики (5) может считаться решенной.

Сингулярная часть асимптотики (5) определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x) \left[u_0(x, t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right] = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x) \left[u_0(x, t) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} + V_j \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \right] = F_j(x, t, \tau), \quad (10)$$

где $F_j(x, t, \tau) = F_j(t, V_0(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau), u_0(x, t), \dots, u_j(x, t))$, $j = \overline{1, N}$.

Задача о разрешимости системы уравнений (9), (10) является более сложной, чем задача о разрешимости системы уравнений (7), (8), поскольку система (9), (10), кроме неизвестных функций $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, содержит также неизвестную функцию $\varphi(t)$, с помощью которой определяется линия разрыва Γ .

Задача об определении функций $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, из системы (9), (10) решается следующим образом [28]: сначала определяются значения этих функций на линии разрыва Γ , а затем эти функции продолжают непрерывно дифференцируемым образом в некоторую окрестность этой линии и в последующем «вкладываются» в пространство быстро убывающих функций.

На линии разрыва Γ функции $v_j(t, \tau) = V_j(\varphi(t), t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, определяются как решения системы дифференциальных уравнений с частными производными вида:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi(t)) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(\varphi(t)) \left[u_0(\varphi(t), t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \right] = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_j}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi(t)) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(\varphi(t)) \left[u_0(\varphi(t), t) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} + v_j \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \right] = \\ = F_j(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} F_j(t, \tau) = F_j(t, V_0(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau), u_0(x, t), \dots, u_j(x, t)) \Big|_{x=\varphi(t)}, \\ j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Уравнение (11) в пространстве G_0 имеет единственное решение следующего вида

$$v_0(t, \tau) = -3 \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))} ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} (\tau + c_0) \right),$$

где

$$A(\varphi(t), t) = -a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) > 0, \quad c_0 = c_0(t). \quad (13)$$

В случае, когда $F_j(t, \tau) \in G_0$, $j = \overline{1, N}$, необходимым и достаточным условием существования в пространстве G решений уравнений системы (12) (при каждом $j = \overline{1, N}$) является условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t, \tau) v_0(t, \tau) d\tau = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Для доказательства того, что условие (14) является необходимым и достаточным условием существования решений уравнений системы (12), достаточно записать решение каждого уравнения (12) в следующем виде

$$v_j(t, \tau) = v_j(t)\eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где

$$v_j(t) = [a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t), t)]^{-1} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau),$$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t, \xi) d\xi + E_j(t),$$

постоянная интегрирования $E_j(t)$ определяется из условия

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0;$$

функция $\eta_j(t, \tau) \in G$ удовлетворяет дополнительному условию $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta_j(t, \tau) = 1$, а затем показать эквивалентность условия $\psi_j(t, \tau) \in G_0$ условию (14).

В самом деле, рассмотрим вспомогательное уравнение, полученное из (12) при помощи интегрирования по τ (в пределах от $-\infty$ до τ):

$$L_1 v_j = \Phi_j(t, \tau), \quad (16)$$

где

$$L_1 = \frac{d^2}{d\tau^2} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) - b_0(\varphi(t))v_0(t, \tau).$$

Из равенств (15), (16) следует, что функция $\psi_j(t, \tau)$ удовлетворяет уравнение

$$L_1 \psi_j = \Phi_j - v_j L_1 \eta.$$

Поскольку оператор $L_1 : (G_0)^* \rightarrow (G_0)^*$ является нетеровым, т.е. область его значений является замкнутым множеством, размерности его ядра и дополнения к области его значений конечны, а $\text{Ker} L_1^* = \{v_{0\tau}\}$, то $\psi_j \in G_0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие ортогональности [10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_j - v_j L_1 \eta) v_{0\tau} d\tau = 0,$$

эквивалентное условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t, \tau) v_0(t, \tau) d\tau = 0, \quad j = \overline{1, N},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача о нахождении функций $v_j(t, \tau) = V_j(\varphi(t), t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, может считаться решенной.

Условия ортогональности (14) можно использовать для определения линии разрыва, а именно: из (14) при $j=1$ следует уравнение для определения функции $\varphi(t)$, имеющее следующий вид:

$$15a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}A(\varphi(t), t) - 20a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\varphi'(t)A(\varphi(t), t) + \\ + 10b_0^2(\varphi(t))u'_{0x}(\varphi(t), t)A(\varphi(t), t) + 10A(\varphi(t), t)b_0(\varphi(t))a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - \\ - 10A(\varphi(t), t)b_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) + 16b_0(\varphi(t))A^2(\varphi(t), t) = 0, \quad (17)$$

где $A(\varphi(t), t)$ имеет вид (13).

Уравнение (17) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим решение $\varphi = \varphi(t)$ при весьма общих условиях. В дальнейшем считается, что функция $\varphi(t)$ известна.

Для продолжения функции $v_j(t, \tau) = V_j(\varphi(t), t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, с кривой Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x, t) : |x - \varphi(t)| < 2\mu\}$, где μ – некоторое достаточно малое число, воспользуемся представлением (15) и рассмотрим функцию $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, N}$, в следующем виде:

$$V_j(x, t, \tau) = w_j^-(x, t)\eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \quad (18)$$

где $w_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, N}$ – решение линейного дифференциального уравнения с частными производными

$$\Lambda w_j^-(x, t) = f_j^-(x, t), \quad (19)$$

где

$$\Lambda = a_0(x)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x)u_0(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x},$$

с начальным условием на линии разрыва Γ

$$w_j^-(x, t)|_\Gamma = v_j(t), \quad j = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Здесь $f_1^-(x, t) = 0$, а функции $f_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, N}$, рекуррентно определяются по функциям $f_k^-(x, t)$, $k = \overline{1, j-1}$.

Уравнение (19) получено из асимптотического соотношения (6) после подстановки представления (18) в (6) и дальнейшего перехода к пределу при $\tau \rightarrow -\infty$.

Задача Коши (19), (20) удовлетворяет всем условиям теоремы Коши–Ковалевской, поэтому в соответствии с этой теоремой данная задача имеет, по крайней мере, в некоторой окрестности кривой Γ – области $\Omega_\mu(\Gamma)$, единственное аналитическое решение.

Если решение задачи Коши (19, 20) определено только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$, то N -тое приближение асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения Кортевега–де Фриза (4) представимо формулой:

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(t, \tau)], \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]. \quad (21)$$

Заметим, что функция (21) удовлетворяет асимптотическому равенству (6) при $\tau \rightarrow -\infty$ с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$.

Если же функции $w_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, N}$, как решения задачи Коши (19), (20) определены не только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$, а и в области $\{(x, t) : x - \varphi(t) \leq -\mu, t \in [0; T]\}$, то N -тое приближение асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения Кортевега–де Фриза (4) представимо формулой:

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)], & (x, t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ u_0(x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + w_j^-(x, t)], & (x, t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases} \quad (22)$$

где

$$D^- = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : \varphi(t) - x \geq \mu\},$$

$$D^+ = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : x - \varphi(t) \leq \mu\}.$$

При этом функция (22) удовлетворяет асимптотическому равенству (6) при $\tau \rightarrow -\infty$ с точностью $O(\varepsilon^{N+2})$.

2. Условие типа Гюгонио

Порождающее (при $\varepsilon = 0$) и исходное (4) уравнения являются дифференциальными уравнениями различного типа: они имеют не только различные порядки как дифференциальные уравнения, но и соответственно различную структуру решений, что, например, проявляется при предельном переходе в формулах для решений исходного (возмущенного) уравнения, когда значение малого параметра стремится к нулю.

Известно, что если сингулярно возмущенное уравнение обладает гладким по переменным x, t решением, то в пределе, при стремлении малого параметра к нулю, это решение может иметь своим пределом разрывную (по переменным x, t) функцию.

Рассмотрим в качестве примера сингулярно возмущенное уравнение Бюргера, имеющее важное значение в гидродинамике [12]:

$$u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0; T],$$

точное решение которого представляется формулой

$$u(x, t, \varepsilon) = 2a \left(1 - \operatorname{th} \left(\frac{a(x - \varphi(t))}{\varepsilon} \right) \right), \quad (23)$$

где $\varphi(t) = 2at$, $a > 0$ – произвольная постоянная.

Очевидно, что функция (23) является гладкой по переменным x, t при $\varepsilon \neq 0$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $u(x, t, \varepsilon)$ стремится к разрывной функции $u_0(x, t)$, где

$$u_0(x, t) = \begin{cases} 0, & x > \varphi(t), \\ 4a, & x < \varphi(t), \end{cases} \quad (24)$$

удовлетворяющей порождающему уравнению

$$u_t + uu_x = 0. \quad (25)$$

Обозначим

$$\left[u(x, t) \Big|_{x=\varphi(t)} \right] = u(\varphi(t) + 0, t) - u(\varphi(t) - 0, t).$$

Тогда известное в гидродинамике условие Гюгонио, связывающее между собой значение скорости $\varphi'(t)$ распространения прямой волны, описываемой уравнением

Бюргерса, и значения разрывного решения $u_0(x, t)$ слева (до кривой разрыва) и справа (после кривой разрыва) на кривой разрыва для его порождающего уравнения, можно записать в следующем виде:

$$\left[u(x, t) \Big|_{x=\varphi(t)} \right] \varphi'_t = \frac{1}{2} [u^2(x, t) \Big|_{x=\varphi(t)}], \quad (26)$$

т.е. условие Гюгионо связано с задачей существования так называемых разрывных решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными, являющимися порождающими уравнениями для некоторых сингулярно возмущенных уравнений с частными производными.

Пусть L_ε – некоторый дифференциальный оператор, непрерывно зависящий от параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0; \varepsilon_0)$, дифференциальный оператор $L_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon$ – его предельное значение (предел понимается в классическом смысле), причем порядок оператора L_0 ниже порядка оператора L_ε .

Как и в [28], разрывным решением дифференциального уравнения вида $L_0 u = 0$ будем называть такую разрывную функцию $u_0(x, t)$, для которой $L_0 u_0(x, t) = 0$ во всех точках непрерывной дифференцируемости функции $u_0(x, t)$ (считается, что в этих точках корректно определено действие оператора L_0 на $u_0(x, t)$), а в некоторой достаточно малой проколотой окрестности каждой точки разрыва $u_0(x, t)$ данная функция является пределом некоторого решения $u(x, t, \varepsilon)$ уравнения $L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) = 0$, т.е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t)$.

Рассмотрим пример разрывного решения линейного уравнения вида

$$u_t + cu_x = 0, \quad (27)$$

где $c = c(x, t)$ – некоторая непрерывная функция.

Пусть требуется построить решение уравнения (27), имеющее разрыв на некоторой линии $S(x, t) = 0$, являющейся пока неизвестной (функция $S(x, t)$ определяется в процессе построения решения). Подобное разрывное решение естественно представить с помощью функции Хевисайда

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ -1, & \tau < 0, \end{cases}$$

в виде

$$u(x, t) = \Theta(S) \Psi(x, S, t), \quad (28)$$

где

$$\Psi(x, S, t) = \psi_1 + S\psi_2 + S^2\psi_3 + \dots, \quad S = S(x, t),$$

$\psi_1 = \psi_1(x, t)$, $\psi_2 = \psi_2(x, t)$, ..., – пока неизвестные функции, определяемые последовательно или с помощью дельта-функции Дирака и функции Хевисайда, в соответствии с подходом Р. Куранта [35], в следующем виде:

$$u(x, t) = \delta(S) \psi_0(x, t) + \Theta(S) \Psi(x, S, t), \quad (29)$$

где $\delta(S)$ – дельта-функция Дирака, $\psi_0 = \psi_0(x, t)$ – пока неизвестная функция.

После подстановки (29) в (27) получаем уравнение вида:

$$\begin{aligned} (S_t + cS_x) \delta'(S) \psi_0 + [\psi_{0t} + c\psi_{0x} + (S_t + cS_x) \Psi(x, S, t)] \delta(S) + \\ + \Theta(S) \{ \Psi_t + c\Psi_x + (S_t + cS_x) \Psi_S \} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

откуда, после приравнивания коэффициентов при $\delta'(S)$, $\delta(S)$ и $\Theta(S)$ к нулю, можно получить дифференциальные уравнения для определения функций $S = S(x, t)$, $\Psi(x, S, t)$ и $\psi_0 = \psi_0(x, t)$, причем эти функции можно искать уже в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Однако подход Р. Куранта не применим при нахождении разрывных решений нелинейных уравнений даже в случае квазилинейного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, если разрывное решение порождающего ($\varepsilon = 0$) уравнения для (3) искать в виде (29), то после подстановки $u(x, t)$ вида (29) в (25) возникает проблема, связанная с корректным определением произведения обобщенных функций $\Theta(S)\delta(S)$, которое, вообще говоря, не определено, поскольку зависит от способа аппроксимации обобщенных функций $\Theta(S)$ и $\delta(S)$.

В связи с проблемой определения произведения обобщенных функций следует упомянуть работу В.К. Иванова [36], где был предложен подход к определению произведения обобщенных функций, позволивший решить ряд задач, связанных с нахождением разрывных решений квазилинейных уравнений, и, таким образом, изучить ряд задач для некоторых важных классов дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих малый параметр при старшей производной.

С другой стороны, при построении специальных разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений можно воспользоваться методом сингулярных возмущений [37], при котором вместо исходного уравнения рассматривается некоторое сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение более высокого порядка с малым параметром при старшей производной (такое сингулярно возмущенное уравнение при нулевом значении малого параметра превращается в исходное дифференциальное уравнение). Затем строится аналитическое решение сингулярно возмущенного уравнения и рассматривается его предельное значение при стремлении малого параметра к нулю. Вследствие наличия сингулярностей в построенном аналитическом решении предельная (при стремлении малого параметра к нулю) функция будет иметь разрыв на некоторой кривой. Отметим, что вместо аналитического решения можно использовать его асимптотическое представление.

Указанную идею продемонстрируем на примере квазилинейного дифференциального уравнения вида

$$u_t + 6uu_x = 0,$$

являющегося порождающим уравнением для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t + 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0. \quad (31)$$

Точное решение уравнения (31) имеет вид:

$$u(x, t, \varepsilon) = A ch^{-2} \left(\frac{\beta(x - \varphi(t))}{\varepsilon} \right), \quad (32)$$

где $A = \frac{a^2}{2}$, $\beta = \frac{a}{2}$, $\varphi(t) = a^2 t$, a – некоторая постоянная, $\varepsilon \neq 0$.

Для решения (32) имеют место соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} A, & x = \varphi(t), \\ 0, & x \neq \varphi(t), \end{cases} \quad (34)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} u(x, t, \varepsilon) = 2 \frac{A}{\beta} \delta(x - \varphi(t)), \quad (35)$$

где $\delta(x - \varphi(t))$ – дельта-функция Дирака.

Подставив (32) в уравнение (31), разделив обе его части на ε и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим соотношение, аналогичное соотношению (30):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (u_t(x, t, \varepsilon) - 3(u^2(x, t, \varepsilon))_x + \varepsilon^2 u_{xxx}(x, t, \varepsilon)) = \\ = \left(-2 \frac{A}{\beta} \varphi'(t) + 4 \frac{A^2}{\beta} \right) \delta'(S) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

откуда, из условия равенства нулю коэффициента при $\delta'(S)$, получаем равенство

$$\varphi'(t) - 2A = 0. \quad (37)$$

При вычислении предела в (36) использована теорема о пределе суммы величин и равенства, аналогичные (34), (35).

Равенство (37) называется условием типа Гюгонио для уравнения (31) и, очевидно, выполняется в случае, когда решение уравнения (37) представляется формулой (32).

Таким образом, можно предложить следующее определение условия типа Гюгонио.

Определение 4 [38]. Пусть уравнение

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (38)$$

где $L_\varepsilon : C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0; T]) \rightarrow C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0; T])$ – некоторый дифференциальный оператор, имеет асимптотическое решение

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad N \geq 1,$$

где $S = S(x, t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0; T])$, $S_x|_\Gamma \neq 0$,

$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T], S(x, t) = 0\}.$$

Тогда, если существует (поточечный по x, t) предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon Y_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0 \quad (39)$$

в пространстве обобщенных функций D' , то условие (39) называется условием типа Гюгонио для уравнения (38).

Проиллюстрируем данное определение на примере сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами (4). Для вычисления предела в (39), используя полученные выше формулы (21, 22), представим N -тое приближение асимптотического решения уравнения (4) следующим образом:

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = H_N(x, t, \varepsilon) + \varepsilon F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) + \varepsilon G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right), \quad (40)$$

где $S = x - \varphi(t)$,

$$H_N(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} u_0(x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + w_j^-(x, t)], & (x, t) \in D^- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t) & (x, t) \in D^+ \cup \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

если решение задачи Коши (19, 20) определено в области $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : x - \varphi(t) \leq -\mu\}$; и

$$H_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^j u_j(x, t),$$

если решение задачи Коши (19), (20) определено только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$;

$$F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} V_j\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}\right); \quad (41)$$

$$G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon} V_0\left(t, \frac{S}{\varepsilon}\right) = -\frac{3}{\varepsilon} \frac{A(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))} ch^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{2} \left(\frac{S}{\varepsilon} + C \right) \right). \quad (42)$$

При помощи прямых вычислений для функций $F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$, $G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ можно получить следующие утверждения.

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= -\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \delta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G^2\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= \frac{24A(\varphi(t), t)\sqrt{A(\varphi(t))}}{b_0^2(\varphi(t))} \delta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) \delta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \frac{\partial}{\partial x} G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial S^{3-j}} G\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0, \quad j = \overline{0, 3}; \end{aligned}$$

где предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D' , $\delta(S)$ – функция Дирака.

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= w_1^-(x, t)\theta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= \frac{\partial}{\partial t} (w_1^-(x, t))\theta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= \frac{\partial}{\partial x} (w_1^-(x, t))\Theta(S); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \frac{\partial}{\partial x} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \frac{\partial}{\partial S} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial S} F_N\left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= w_1^-(x, t)\delta(S); \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial S^{3-j}} F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0, \quad j = \overline{0, 3},$$

где предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D' , $\delta(S)$ – функция Дирака, $\Theta(S)$ – функция Хевисайда.

Лемма 3. Имеют место соотношения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial x} G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial x} F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial S} F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon F_N \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial S} G \left(x, t, \frac{S}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = 0,$$

где предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D' .

Подставив равенство (40) в уравнение (4), разделив обе части полученного соотношения на ε и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, с использованием лемм 1–3, получаем соотношения вида

$$H_1(t)\delta'(S) + H_2(t)\delta(S) + H_3(t)\Theta(S) = 0,$$

где

$$H_1(t) = -\varphi'(t)a_0(\varphi(t)) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) - A(\varphi(t), t),$$

$$H_2(t) = a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) + \varphi'(t)a_0(\varphi(t))w_1^-(\varphi(t), t) + \\ + b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t), t) \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) - b_0u_0(\varphi(t), t)w_1^-(\varphi(t), t),$$

$$H_3(t) = a_0(x) \frac{\partial w_1^-(x, t)}{\partial t} + b_0(x) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} w_1^-(x, t) + b_0(x)u_0(x, t) \frac{\partial w_1^-(x, t)}{\partial x}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$-\varphi'(t)a_0(\varphi(t)) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) - A(\varphi(t), t) = 0; \quad (43)$$

$$a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) + \varphi'(t)a_0(\varphi(t))w_1^-(\varphi(t), t) + \\ + b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t), t) \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) - b_0u_0(\varphi(t), t)w_1^-(\varphi(t), t) = 0; \quad (44)$$

$$a_0(x) \frac{\partial w_1^-(x, t)}{\partial t} + b_0(x) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} w_1^-(x, t) + b_0(x)u_0(x, t) \frac{\partial w_1^-(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (45)$$

Равенства (43), (45) выполняются в силу алгоритма построения асимптотического решения.

Из равенства (44) с учетом (43), (45) получаем условие типа Гюгонио для уравнения (4) в виде:

$$a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) + b_0(\varphi(t)) u_{0x}(\varphi(t), t) \left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t), t)}}{b_0(\varphi(t))} \right) - A(\varphi(t), t) w_1^-(\varphi(t), t) = 0, \quad (46)$$

где $u_0 = u_0(x, t)$ – главный член регулярной части асимптотического решения для уравнения (4).

3. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной вида

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, \varepsilon) u_t + b(x, \varepsilon) u u_x, \quad (47)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (48)$$

где

$$a(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varepsilon^k, \quad b(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) \varepsilon^k,$$

$a_k(x), b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k \geq 0$; функция $f(\eta), \eta \in \mathbf{R}$, – быстроубывающая; $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Определение 5 [38–44]. Пусть $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times [0; \theta])$, где $\theta > 0$ – некоторое число, – линейное пространство таких бесконечно дифференцируемых функций $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; \theta]$, $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$, что для всех целых неотрицательных чисел p, q, r, q_1, q_2 равномерно по переменным (x, t) на каждом компактном множестве $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^r \frac{\partial^{q_1}}{\partial \tau_1^{q_1}} \frac{\partial^{q_2}}{\partial \tau_2^{q_2}} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x, t, \tau_1, \tau_2) = 0, \quad (x, t) \in K, \quad \tau_2 \in [0; \theta].$$

Асимптотическое решение задачи Коши (47), (48) ищется в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (49)$$

где

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \left[u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1) + W_j(\tau_1, \tau_2) \right],$$

$$\tau_1 = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Функции регулярной части асимптотики $U_N(x, t, \varepsilon)$ и сингулярной части асимптотики $V_N(x, t, \varepsilon)$ определены выше в п.1.

Линия разрыва определяется из уравнения (17) с начальным условием $\varphi(0) = 0$.

Для построения асимптотического решения задачи (47, 48) необходимо определить дополнительную функцию сингулярной части асимптотики $W_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j W_j(\tau_1, \tau_2)$. Эта функция задана в некоторой окрестности связного множества

$$\{(t, x) : t = 0, x \in \mathbf{R}\} \cup \{(t, x) : x = \varphi(t), t \in [0; T]\}.$$

Для определения функций сингулярной части асимптотики $W_N(\tau_1, \tau_2)$ подставим разложение (49) в уравнение (47) и умножим на ε :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} \right) + 3\varepsilon \frac{\partial^3 V_N}{\partial x \partial \tau_1^2} + 3\varepsilon^2 \frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2 \partial \tau_1} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^3} + \frac{\partial W_N}{\partial \tau_1} - \\ & - a(x, \varepsilon) \left(\varepsilon \frac{\partial U_N}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial V_N}{\partial t} - \varphi'(t) \frac{\partial V_N}{\partial \tau_1} - \varphi'(t) \frac{\partial W_N}{\partial \tau_1} + \frac{\partial W_N}{\partial \tau_2} \right) - \\ & - b(x, \varepsilon) (U_N + V_N + W_N) \left(\varepsilon \frac{\partial U_N}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{\partial V_N}{\partial \tau_1} + \frac{\partial W_N}{\partial \tau_1} \right) = O(\varepsilon^{N+2}). \end{aligned} \quad (50)$$

Учитывая уравнения для функций $U_N(x, t, \varepsilon)$, $V_N(x, t, \varepsilon)$, из (50) получаем систему уравнений для определения сингулярной части асимптотики $W_N(x, t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 W_0}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0) \left[\varphi'(0) \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau_2} \right] + \\ & + b_0(0) \left[V_0(0, \tau_1) \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0, \tau_1)}{\partial \tau_1} W_0 + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 W_j}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0) \left[\varphi'(0) \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_j}{\partial \tau_2} \right] + \\ & + b_0(0) \left[V_0(0, \tau_1) \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0, \tau_1)}{\partial \tau_1} W_j + \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} W_j + W_0 \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} \right] + G_j(\tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (52)$$

где функции $G_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, определяются рекуррентным образом после нахождения функций $W_k(\tau_1, \tau_2)$, $k = \overline{0, j-1}$.

Из начального условия (48) имеем:

$$u(x, 0, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, 0) + \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j \left(x, 0, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \sum_{j=0}^N \varepsilon^j W_j \left(0, \frac{x}{\varepsilon} \right) = f \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

откуда, положив

$$u_j(x, 0) = 0, \quad j = \overline{0, N},$$

$$V_j(x, t, \tau_1) = V_j(t, \tau_1) = v_j(t, \tau_1), \quad j = \overline{0, N},$$

получаем начальные условия для сингулярной части асимптотики $W_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{0, N}$ вида

$$W_0(\tau_1, 0) = f(\tau_1) - V_0(0, \tau_1), \quad (53)$$

$$W_j(\tau_1, 0) = -V_j(0, \tau_1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (54)$$

Система (51), (52) с начальными условиями (53), (54) не является нормальной относительно переменной τ_2 , но имеет решение. Используя результаты работы [45], можно доказать следующие утверждения.

Лемма 4. Уравнение (51) с начальным условием (53) имеет решение $W_0(\tau_1, \tau_2)$, принадлежащее пространству G_2^+ .

Лемма 5. Если функции сингулярной части асимптотики $V_j(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$ являются быстроубывающими функциями по переменной τ_1 для произвольного $t \in [0; T]$, то задача (52), (54) имеет решение $W_j(\tau_1, \tau_2)$, принадлежащее пространству G_2^+ .

Таким образом, установлены следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения леммы 5. Тогда при каждом $N = 0, 1, \dots$ функция

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \left(u_j(x, t) + V_j \left(t, \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon} \right) + W_j \left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) \right),$$

удовлетворяет уравнение (4) с точностью $O(\varepsilon^N)$, а начальное условие (48) – с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$ при $0 \leq t \leq \varepsilon\Theta$.

Теорема 2. Пусть функции $a(x, \varepsilon), b(x, \varepsilon)$ принадлежат пространству G_0 для $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, функция $a(x, \varepsilon) < 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. Тогда для точного решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (47), (48) и его N -того асимптотического приближения $Y_N(x, t, \varepsilon)$ имеет место оценка следующего вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, t, \varepsilon) - Y_N(x, t, \varepsilon)]^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x, \varepsilon) dx, \quad t \in [0; \varepsilon\theta],$$

где $h(x, \varepsilon) \in G_0$ – некоторая функция, для которой выполняется неравенство $|h(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{N+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott-Russel, J. Report on waves / J. Scott-Russel // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. – London: John Murray, 1834. – P. 311–390.
2. Korteweg, D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422–433.
3. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. – М. : Советское радио, 1977. – 368 с.
4. Zabusky, N.J. Interaction of «solitons» in a collision less plasma and the recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // Phys. Rev. Lett. – Vol. 15. – P. 240 –
5. Ферми, Э. Изучение нелинейных задач / Э. Ферми, Дж. Паста, С. Улам // Ферми Э. Научные труды. В 2-х т. – Т. 2. – М. : Наука, 1972. – 256 с.
6. Toda, M. Waves in nonlinear lattice / M. Toda // Suppl. Theory Phys. – 1970. – № 45. – P. 174–200.
7. Gardner, C.S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C.S. Gardner [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. – P. 1095–1098.
8. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P.D. Lax // Commun. Pure Appl. Mathem. – 1968. – Vol. 21, № 15. – P. 467–490.
9. Самойленко, В.Г. Волна трансляции и математическая теория солитонов / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Математический вестник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 126–148.
10. Маслов, В.П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В.П. Маслов, М.В. Федорюк. – М. : Наука, 1976. – 296 с.
11. Баренблатт, Г.И. Нелинейная теория распространения волн / Г.И. Баренблатт. – М. : Мир, 1970. – 231 с.
12. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М. : Мир, 1972. – 276 с.
13. Марченко, В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой структурой / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. – К. : Наукова думка, 1974. – 279 с.

14. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 400 с.
15. Whitham, G.B. Non-linear dispersive waves / G.B. Whitham // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1965. – № 283. – P. 238–261.
16. Lighthill, M.J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid / M.J. Lighthill // Phil. Mag. – 1949. – Vol. 40. – P. 1179–1201.
17. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Наука, 1964. – 540 с.
18. Гребеников, Е.А. Введение в резонансную аналитическую динамику / Е.А. Гребеников, Ю.А. Митропольский, Ю.А. Рябов. – М. : Янус, 1999. – 302 с.
19. Доброхотов, С.Ю. Конечнзонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях / С.Ю. Доброхотов, В.П. Маслов // Современные проблемы математики. – М. : ВИНТИ, 1980. – Вып. 5. – С. 3–94.
20. Маслов, В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
21. Вишик, М.И. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи матем. наук. – 1960. – Вып. 5 (121). – С. 778–781.
22. Маслов, В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1973. – 543 с.
23. Данилов, В.Г. Туннельный метод ВКБ построения асимптотики функции Грина для параболических уравнений / В.Г. Данилов, С.М. Фроловичев // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379, № 5. – С. 591–594.
24. Доброхотов, С.Ю. Асимптотические быстро убывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами / С.Ю. Доброхотов [и др.] // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49, № 4. – С. 31–46.
25. Омелянов, Г.А. Взаимодействие волн разных масштабов в газовой динамике / Г.А. Омелянов // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 1. – С. 148–151.
26. Dobrokhotov, S.Yu. Hugoniot–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations / S.Yu. Dobrokhotov // Russian J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 6, № 2. – P. 137–173.
27. Benilov, E.S. The generation of radiating waves in a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation / E.S. Benilov, R. Grimshaw, E.P. Kuznetsova // Physica D. – 1993. – Vol. 69, № 3–4. – P. 270–278.
28. Maslov, V.P. Geometric asymptotics for PDE. I. / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. – Providence : AMS. – 2001. – 243 p.
29. де Брейн, Н.Г. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. де Брейн. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 248 с.
30. Самойленко, В.Г. Асимптотические разложения однофазовых солитоноподобных решений уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С. 111–124.
31. Samoilenko, Yul. Asymptotical expansion for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg–de Vries equation / Yul. Samoilenko // Proceedings of the Fifth International Conference «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» – К. : Institute of Mathematics. – 2004. – Т. 3. – P. 1435–1441.
32. Самойленко, В.Г. Построение асимптотических решений для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малой дисперсией / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Вестник Херсонского национ. техн. ун-та. – 2007. – Т. 2 (28). – С. 323–328.
33. Самойленко, В.Г. Солитоноподобные решения сингулярно возмущенного

уравнения Кортевега–де Фриза / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Proceed. V Intern. Scient. Conf. – Aktobe, October 9 – 10, 2009. – P. 232–234.

34. Грушин, В.В. Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии / В.В. Грушин // Матем. сборник. – 1971. – Вып. 84 (126), № 2. – С. 163–195.

35. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир. – 1977. – 540 с.

36. Иванов, В.К. Ассоциативная алгебра простейших обобщенных функций / В.К. Иванов // Сиб. матем. журн. – 1979. – Т. 20, № 4. – С. 731–740.

37. Дубинский, Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники : ВИНТИ. Современные проблемы математики. – 1976. – № 9. – С. 5–130.

38. Самойленко, Ю.И. Условия существования разрывных решений квазилинейного уравнения с переменными коэффициентами / Ю.И. Самойленко // Вестник Киевского нац. ун-та имени Тараса Шевченко. Математика. Механика. – 2009. – Вып. 22. – С. 30–36.

39. Самойленко, Ю.И. Асимптотические разложения для однофазовых солитоноподобных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малой дисперсией / Ю.И. Самойленко // Науч. вестник Черновецкого ун-та : Сборник научных работ. Математика. – Черновцы. – 2007. – Вып. 336–337. – С. 170–177.

40. Самойленко, В.Г. Асимптотические решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122–132.

41. Samoilenko, V.Hr. Asymptotical expansions of solution to Cauchy problem for Korteweg–de Vries equation with varying coefficients and small parameter / V.Hr. Samoilenko, Yul. Samoilenko // CERMCS International conference of young scientists. Communications. – Chisinau : Moldova State University, 2006. – P. 186–192.

42. Самойленко, Ю.И. Асимптотические решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром четной степени при старшей производной / Ю.И. Самойленко // Науч. вестник Черновецкого ун-та : Сборник научных работ. Математика. – Черновцы. – 2009. – Вып. 485. – С. 102–107.

43. Самойленко, В.Г. Асимптотические двухфазовые солитоноподобные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 378–387.

44. Samoilenko, V.Hr. Asymptotic two phase soliton type solutions to singularly perturbed Korteweg–de Vries equation / V.Hr. Samoilenko, Yul. Samoilenko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, control and stability of dynamical systems. – Siedlce : Wydawnictwo WSFiZ, 2009. – P.156–164.

45. Фаминский, А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений / А.В. Фаминский // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56–105.

V. Samoilenko, Yu. Samoilenko. To the Method of the Boundary Layer and the Hugoniot-type Condition for the Kortveg de Vries Equation

The paper deals with asymptotic one phase soliton type solutions to singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. Using the asymptotic series Hugoniot type condition is found and asymptotic solution of Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients is constructed through boundary layer method.

УДК 512.542

*А.А. Трофимук, В.С. Монахов***КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
НА СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ ФАКТОРОВ**

Изучено строение разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами в факторах нормального ряда и получена оценка производной длины разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, в котором небициклические силовские подгруппы факторов имеют ограниченный порядок.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В работе [2, следствие 1.5] установлено, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$ -е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B . Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в работе [3, теорема 1]. В частности, доказано, что производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. В работе [4] установлено, что производная длина разрешимой группы G , силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$, не превышает 6; $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$, $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$. Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G .

Напомним, что нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов. Из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] следует, что группа G , обладающая нормальным рядом с циклическими силовскими подгруппами в факторах, является сверхразрешимой. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 2.

Натуральное число n называется свободным от кубов, если n не делится на кубы простых чисел. В работе [5] изучены разрешимые группы G , обладающие нормальным рядом с факторами порядков, свободных от кубов. В частности, установлено, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина G не выше 4.

Основными результатами данной работы являются теорема 1, в которой получено описание разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами в факторах нормального ряда, и теорема 2, в которой получена оценка производной длины разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, в котором небициклические силовские подгруппы факторов имеют ограниченный порядок.

В доказательствах теорем используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что:

1) если все силовские подгруппы в факторах бициклические, то:

1. главные факторы группы G имеют порядки p , q^2 или 8 , где p и q – простые числа из $\pi(G)$.

2.1) индексы максимальных подгрупп группы G являются простыми числами, квадратами простых чисел или равны 8 .

2. если существует в факторах хотя бы одна небициклическая силовская подгруппа и порядок каждой такой небициклической силовской p -подгруппы не делится на p^{n+1} , $p \in \pi(G)$, n – натуральное число, то порядки главных факторов группы G и индексы максимальных подгрупп группы G не делятся на p^{n+1} , $p \in \pi(G)$.

Лемма 2. Пусть в p -разрешимой группе G силовская p -подгруппа имеет порядок $\leq p^3$. Если $p > 3$, то $l_p(G) \leq 1$.

Лемма 3 [1, теорема VI.6.6]. p -длина разрешимой группы не превосходит производную длину и степень нильпотентности своей силовской p -подгруппы.

В работе [2] введена функция $m(G) = \max_{p \in \pi(G)} m_p(G)$, где

$$m_p(G) = \max \{ \log_p(|G : M|) \mid M < \cdot G, |G : M| = p^a, p \in \pi(G) \}.$$

Здесь запись $M < \cdot G$ означает, что M – максимальная подгруппа в G .

Лемма 4 [2, теорема 1]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(m(G))$.

Здесь $d(G)$ – производная длина группы G .

Теорема 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4 , а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5 .

2. $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

3. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что фактор-группа G/N сверхразрешима.

4. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7\}'$ -холлову подгруппу.

5. Если группа G A_4 -свободна, то:

5.1) $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p ;

5.2) производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3 .

6. Если G имеет нечетный порядок, то:

6.1) G дисперсивна по Оре;

6.2) коммутант группы G нильпотентен. В частности, фактор-группа $G/\Phi(G)$ метабелева.

Группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Ясно, что теорема 1 охватывает все разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими факторами.

Следующий пример показывает, что оценки, полученные в теореме 1, являются точными. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n .

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27 . Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является группой порядка $2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини

$\Phi(G)$ порядка 3. Производная длина G равна 6, а производная длина $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с бициклическими факторами, где Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Теорема 2. Пусть разрешимая группа G , обладает нормальным рядом, в факторах которого имеются небициклические силовские подгруппы и порядок каждой такой небициклической силовской p -подгруппы не делится на p^{n+1} , $p \in \pi(G)$, n – натуральное число. Тогда производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $\rho(n)+1$.

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, \mathbf{P})$ над полем \mathbf{P} .

Следствие 3. Пусть в разрешимой группе G имеется небициклическая силовская подгруппа и порядок каждой небициклической силовской p -подгруппы не делится на p^{n+1} , $p \in \pi(G)$, n – натуральное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $d(G) \leq \rho(n) + \delta(n) + 1$, где $\delta(n) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid n \geq 2^k + 2k - 2\}$.

2. Если силовская p -подгруппа G_p бициклическая, то $l_p(G) \leq 1$, $p > 2$ и $l_2(G) \leq 2$. Если G_p небициклическая и $|G_p| = p^{n_p}$, то $l_p(G) \leq \delta(n_p) + 1$, где $n_p \leq n$.

Здесь \mathbf{N} – множество всех натуральных чисел.

Лемма 5 [6]. Производная длина группы G порядка p^n не превышает $\delta(n)+1$.

В частности, справедливы утверждения:

- 1) если $n \leq 2$, то $d(G) = 1$;
- 2) если $3 \leq n \leq 5$, то $d(G) \leq 2$;
- 3) если $6 \leq n \leq 11$, то $d(G) \leq 3$;
- 4) если $12 \leq n \leq 21$, то $d(G) \leq 4$;
- 5) если $22 \leq n \leq 39$, то $d(G) \leq 5$;
- 6) если $40 \leq n \leq 73$, то $d(G) \leq 6$.

Из следствия 3, используя значения функций $\delta(n)$ и $\rho(n)$ для конкретных значений n , см. лемму 5 и теорему A_5 [7, лемма 5, теорема A_5], получим следующее следствие.

Следствие 4. Пусть G – разрешимая группа, у которой порядок каждой небициклической силовской p -подгруппы не делится на p^{n+1} , $p \in \pi(G)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда:

- 1) если $3 \leq n \leq 6$, то $d(G) \leq n + 4$;
- 2) если $7 \leq n \leq 10$, то $d(G) \leq n + 3$;
- 3) если $n = 11$, то $d(G) \leq 13$;
- 4) если $12 \leq n \leq 17$, то $d(G) \leq 14$;
- 5) если $18 \leq n \leq 21$, то $d(G) \leq 15$;
- 6) если $22 \leq n \leq 25$, то $d(G) \leq 16$;
- 7) если $26 \leq n \leq 33$, то $d(G) \leq 17$;
- 8) если $34 \leq n \leq 39$, то $d(G) \leq 18$;
- 9) если $40 \leq n \leq 65$, то $d(G) \leq 19$;
- 10) если $n \geq 66$, то $d(G) \leq 5 \log_9(n-2) + \delta(n) + 6,3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.
2. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
4. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы, силовские p -подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
5. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободными от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 118–126.
6. Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // Journal of Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
7. Newman, M.F. The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – P. 59–70.

A.A. Trofimuk, V.S. Monakhov. Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Factors

The structure of solvable group with bicyclic Sylow subgroups in factors of a normal series is studied. The estimation of derived length of the solvable group possessing a normal series in which nonbicyclic Sylow subgroups of factors have the limited order is obtained.

УДК 517.9:519.61

А.В. Чичурин

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ШАЗИ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ПОСТОЯННЫМИ ПОЛЮСАМИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA*

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Используя возможности системы *Mathematica*, построен программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази и приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази в численной или аналитической форме, а также осуществлять процесс визуализации и анимации частных решений.

Введение

В работе [1] Ж. Шази при решении задачи об отыскании дифференциальных уравнений третьего порядка Пенлеве-типа с шестью особыми точками построил дифференциальное уравнение вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k(w' - a_k')^3 + B_k(w' - a_k')^2 + C_k(w' - a_k')}{w - a_k} + D w'' + E w' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k}. \quad (1)$$

Уравнение (1) содержит 32 функции по $z : a_k, A_k, B_k, C_k, F_k (k = \overline{1,6}), D, E$. Развивая метод Пенлеве [2] для уравнения (4), Шази получил систему из 31 алгебраического и дифференциальных уравнений, в которых в качестве неизвестных выступают 32 функции – коэффициенты уравнения (1) [1]:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k A_k = -6, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^6 a_k, \quad (2)$$

$$2A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \quad (3)$$

$$2D + \sum_{k=1}^6 (B_k - 3a_k' A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 F_k = \sum_{k=1}^6 a_k F_k = \sum_{k=1}^6 a_k^2 F_k = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & -\left(-\frac{5}{2} A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_j = -A_k' + \\ & + A_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 3 \sum_j A_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2} A_k \sum_{i=1}^6 a_i' A_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & -\left(2A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right) C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k' - B_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - \\ & - \sum_j \frac{3A_j (a_k' - a_j')^2 + 2B_j (a_k' - a_j')}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a_k'' - a_j''}{a_k - a_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & -a_k''' - B_k C_k + C_k' + \sum_j \frac{(a_k' - a_j')(a_k'' - a_j'' - C_k) + A_j (a_k' - a_j')^3}{a_k - a_j} + \\
 & + \sum_j \frac{B_j (a_k' - a_j')^2 + C_j (a_j' - a_k')}{a_k - a_j} + E a_k' + D (a_k'' - C_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Решение системы (2), (3) имеет вид [3; 4]

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \quad (8)$$

где основные симметрические многочлены σ_k , составленные из элементов a_k ($k = \overline{1,6}$), связаны с величинами $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$ следующими соотношениями

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \quad (9)$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \quad (10)$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени:

$$\begin{aligned}
 & 1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\
 & - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_2^3 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\
 & - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + \\
 & + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Таким образом, исследование уравнения (1) на первом этапе сводится к отысканию решений системы (4)–(7). Общий метод исследования этой системы и построения уравнения (1) приведен в работах [5; 6].

В данной работе строится программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази, а также приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w' w'' + A_k w'^3 + B_k w'^2 + C_k w'}{w - a_k} + D w'' + E w' + \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k} \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \quad (12)$$

с шестью постоянными полюсами a_k ($k = \overline{1,6}$) в численной или аналитической форме. На конкретном примере показано, как осуществлять процесс визуализации или анимации искомых частных решений.

Основной результат

Модуль, позволяющий по заданным значениям величин a_k ($k = \overline{1,6}$) находить решения соответствующей системы (4)–(7), а следовательно, построить уравнение (12) имеет вид:

```

constrEquationChazy[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_] :=
Module[{eqa2, sol1}, ρ1 = {a1 → a1, a2 → a2, a3 → a3, a4 → a4, a5 → a5, a6 → a6};

equationChazy = w'''[z] ==  $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{w[z] - a_k} (w'[z] w''[z] + \mathfrak{A}_k w'[z]^3 + b_k w'[z]^2 + c_k w'[z]) + d w''[z] +$ 
 $e w'[z] + \sum_{k=1}^6 \frac{f_k}{w_k[z] - a_k} \prod_{i=1}^6 (w[z] - a_i);$ 

σ1 = SymmetricPolynomial[1, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ2 = SymmetricPolynomial[2, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ3 = SymmetricPolynomial[3, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ4 = SymmetricPolynomial[4, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ5 = SymmetricPolynomial[5, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ6 = SymmetricPolynomial[6, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
β2 =  $\frac{(3 \alpha_2 - \sigma_2) (2 \alpha_2 \sigma_1 - 3 \sigma_3) - 2 \sigma_1 \sigma_4 + 6 \sigma_5}{18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2};$ 
β3 =  $(- (3 \alpha_2 - \sigma_2) (12 \alpha_2^2 - 4 \alpha_2 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 - 4 \sigma_4) + 2 \sigma_1 \sigma_5) / (2 (18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2));$ 
eqa2 =  $1296 \alpha_2^5 - 1296 \alpha_2^4 \sigma_2 - 3 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3^2 + \alpha_2^3 (432 \sigma_2^2 + 216 \sigma_1 \sigma_3 - 432 \sigma_4) + 2 \sigma_1^3 \sigma_3 \sigma_4 + 12 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 - 8 \sigma_1^2 \sigma_4^2 -$ 
 $6 \sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_5 - 36 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5 + 48 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_5 - 72 \sigma_5^2 + 4 \sigma_1^4 \sigma_6 - 48 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_6 + 144 \sigma_2^2 \sigma_6 +$ 
 $\alpha_2^2 (-48 \sigma_3^3 - 144 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 24 \sigma_1^2 \sigma_4 + 288 \sigma_2 \sigma_4 - 216 \sigma_1 \sigma_5 + 1296 \sigma_6) +$ 
 $\alpha_2 (24 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3 + 9 \sigma_1^2 \sigma_3^2 - 8 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4 - 48 \sigma_2^2 \sigma_4 - 36 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 - 4 \sigma_1^3 \sigma_5 + 72 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 + 108 \sigma_3 \sigma_5 + 144 \sigma_1^2 \sigma_6 - 864 \sigma_2 \sigma_6) / . \rho 1;$ 
sol = Solve[eqa2 == 0, α2] // Union // Flatten;
Print[StringForm["polynom for α2 is `` all roots of polynomial: `` ", eqa2, sol]];
Do[If[ $((18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2) / . \rho 1 / . sol[[i]]) == 0$ , sol1 = Delete[sol, i],
Print[StringForm["solution exists for `` ", sol[[i, 1]] == sol[[i, 2]] ]], {i, Length[sol]}];
Print[StringForm["roots for solution of the Chazy system (sol1): `` ", sol1]];
ρ[k_] =  $\mathfrak{A}_k \rightarrow (-6 \alpha_k^4 + 4 \sigma_1 \alpha_k^3 + 3 (\alpha_2 - \sigma_2) \alpha_k^2 - 3 \beta_2 \alpha_k + 3 \beta_3 - \sigma_4) / (6 \alpha_k^5 - 5 \sigma_1 \alpha_k^4 + 4 \sigma_2 \alpha_k^3 - 3 \sigma_3 \alpha_k^2 + 2 \sigma_4 \alpha_k - \sigma_5);$ 
eqb[k_] =  $-\left(-\frac{5}{2} \mathfrak{A}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_k + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{2} + \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_j + \sum_{j=k+1}^6 \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{2} + \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_j == 0;$ 
sysb = Table[eqb[i], {i, 1, 6}]; (* system of Bk *)
eqc[k_] =  $-\left(2 \mathfrak{A}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) c_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{c_j}{\alpha_k - a_j} == b_k^2 + b_k d - e;$ 
sysc = Table[eqc[i], {i, 1, 6}]; (* system of Ck *)
eqf[k_] =  $-b_k c_k + D[c_k, x] - d c_k + f_k \left(\prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - a_j)\right) \prod_{j=k+1}^6 (\alpha_k - a_j) == 0;$ 
sysf = Table[eqf[i], {i, 1, 6}]; (* system of Fk *)
sysg =  $\left\{2 d + \sum_{k=1}^6 b_k == 0, \sum_{k=1}^6 f_k == 0, \sum_{k=1}^6 \alpha_k f_k == 0, \sum_{k=1}^6 \alpha_k^2 f_k == 0\right\};$ 
For[i = 1, i < Length[sol1] + 1, i++, solA = {ρ[1], ρ[2], ρ[3], ρ[4], ρ[5], ρ[6]} /. ρ1 /. sol1[[i]] // Simplify;
sysbn = sysb /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA // Flatten;
solb = Solve[sysbn, {b1, b2, b3, b4, b5, b6}] // Simplify // Flatten;
syscn = sysc /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten;
solc = Solve[syscn, {c1, c2, c3, c4, c5, c6}] // Simplify // Flatten;
sysgn = sysg /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten;
sysfn = sysf /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb /. solc // Flatten;
solf = Solve[Join[sysfn, sysgn], {f1, f2, f3, f4, f5, f6, d}] // Simplify // Flatten;
Print[StringForm["i = `` solSysChazy: `` eqChazy: `` ", i,
solSysChazy[i] = Join[solA, solb, solc, solf], eqChazy[i] = equationChazy /. ρ1 /. solSysChazy[i]]
If[Coefficient[Coefficient[eqChazy[1][2], w'[z]], w'[z], 0] == 0,
linearEqChazy[i] = eqChazy[i] /. {w'[z] →  $\sqrt{y[w]}$ , w''[z] →  $\frac{y'[w]}{2}$ , w'''[z] →  $\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w]$ , w[z] → w} //
Simplify // Flatten; };
Print[StringForm["i = `` linearEqChazy: `` ", i, linearEqChazy[i]]
];]

```

Проиллюстрируем действие данного модуля. Введем, например, команду

```
In[4]:= constrEquationChazy[1, -1, 3, -3, 1/3, -1/3]
```

(13)

Это означает, что в качестве значений a_k ($k = \overline{1,6}$) выбраны соответственно величины 1, -1, 3, -3, 1/3, -1/3. Напомним, что знак « \equiv » означает в системе *Mathematica* знак «равно», а знак « \rightarrow » означает оператор прямой подстановки. В результате действия введенной команды (13) получим следующие соотношения:

```

polynom for a2 is - $\frac{132496}{9}$  -  $\frac{14179984 \alpha_2}{243}$  +  $\frac{4587424 \alpha_2^2}{243}$  +  $\frac{119392 \alpha_2^3}{3}$  + 13104  $\alpha_2^4$  + 1296  $\alpha_2^5$ 
all roots of polynomial: { $\alpha_2 \rightarrow -\frac{91}{27}$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 1$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ }
solution exists for  $\alpha_2 = 1$ 
solution exists for  $\alpha_2 = \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ 
solution exists for  $\alpha_2 = \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ 
roots for solution of the Chazy system (sol1): { $\alpha_2 \rightarrow 1$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ }
i=1 solSysChazy:
{ $\mathcal{A}_1 \rightarrow -1$ ,  $\mathcal{A}_2 \rightarrow 1$ ,  $\mathcal{A}_3 \rightarrow -\frac{7}{15}$ ,  $\mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{7}{15}$ ,  $\mathcal{A}_5 \rightarrow -\frac{9}{5}$ ,  $\mathcal{A}_6 \rightarrow \frac{9}{5}$ ,  $b_1 \rightarrow 0$ ,  $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_3 \rightarrow 0$ ,  $b_4 \rightarrow 0$ ,  $b_5 \rightarrow 0$ ,  $b_6 \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow \frac{1}{27} (2e + 75 c_5$ 
+ 60  $c_6)$ ,  $c_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-2e + 60 c_5 + 75 c_6)$ ,  $c_3 \rightarrow \frac{1}{81} (100e + 375 c_5 + 354 c_6)$ ,  $c_4 \rightarrow \frac{1}{81} (-100e + 354 c_5 + 375 c_6)$ ,  $f_1 \rightarrow 0$ 
,  $f_2 \rightarrow 0$ ,  $f_3 \rightarrow 0$ ,  $f_4 \rightarrow 0$ ,  $f_5 \rightarrow 0$ ,  $f_6 \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 0$ } eqChazy:
w(3)[z] == e w'[z] +  $\frac{c_5 w'[z] - \frac{9}{5} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]}$  +  $\frac{\frac{1}{27} (2e + 75 c_5 + 60 c_6) w'[z] - w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]}$  +
 $\frac{\frac{1}{81} (100e + 375 c_5 + 354 c_6) w'[z] - \frac{7}{15} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]}$  +  $\frac{\frac{1}{81} (-100e + 354 c_5 + 375 c_6) w'[z] + \frac{7}{15} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]}$ 
+  $\frac{\frac{1}{27} (-2e + 60 c_5 + 75 c_6) w'[z] + w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{1 + w[z]}$  +  $\frac{c_6 w'[z] + \frac{9}{5} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]}$ 
i=1 linearEqChazy:
 $\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y'[w] = \frac{1}{27 (-9 + 91 w^2 - 91 w^4 + 9 w^6)} \sqrt{y[w]} (-7e + 129e w^2 - 621e w^4 + 243e w^6 + 15(1 + 3w)^2 (59 - 111w - 15w^2$ 
+ 27 w3)  $c_5 + 15(1 - 3w)^2 (-59 - 111w + 15w^2 + 27w^3) c_6 - 3186 y[w] + 8100 w^2 y[w] - 1458 w^4 y[w] + 2457 w y'[w] -$ 
4914 w3 y'[w] + 729 w5 y'[w])
i=2 solSysChazy:
{ $\mathcal{A}_1 \rightarrow \frac{1}{8} (-8 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_2 \rightarrow 1 - \frac{\sqrt{43}}{8}$ ,  $\mathcal{A}_3 \rightarrow \frac{1}{48} (-31 - \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{1}{48} (31 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_5 \rightarrow -\frac{3}{16} (1 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_6 \rightarrow \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43})$ ,  $b_1 \rightarrow 0$ ,
 $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_3 \rightarrow 0$ ,  $b_4 \rightarrow 0$ ,  $b_5 \rightarrow 0$ ,  $b_6 \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow \frac{-4e - 12(-9 + \sqrt{43}) c_5 + 3(3 + \sqrt{43}) c_6}{9(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $c_2 \rightarrow \frac{3(3 + \sqrt{43}) c_5 + 4(e - 3(-9 + \sqrt{43}) c_6)}{9(-6 + \sqrt{43})}$ ,
 $c_3 \rightarrow \frac{-15(7 + 4\sqrt{43}) c_5 + 8(5(-5 + \sqrt{43})e - 6(4 + \sqrt{43}) c_6)}{27(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $c_4 \rightarrow -\frac{48(4 + \sqrt{43}) c_5 + 5(8(-5 + \sqrt{43})e + 3(7 + 4\sqrt{43}) c_6)}{27(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $f_1 \rightarrow$ 
0,  $f_2 \rightarrow 0$ ,  $f_3 \rightarrow 0$ ,  $f_4 \rightarrow 0$ ,  $f_5 \rightarrow 0$ ,  $f_6 \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 0$ } eqChazy:
 $\frac{(-15(7 + 4\sqrt{43}) c_5 + 8(5(-5 + \sqrt{43})e - 6(4 + \sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{27(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{48} (-31 - \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]}$  +
 $\frac{(\frac{3(3 + \sqrt{43}) c_5 + 4(e - 3(-9 + \sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{9(-6 + \sqrt{43})} + (1 - \frac{\sqrt{43}}{8}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{1 + w[z]}$  +
 $\frac{(-4e - 12(-9 + \sqrt{43}) c_5 + 3(3 + \sqrt{43}) c_6) w'[z]}{9(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{8} (-8 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]}$  +  $\frac{c_5 w'[z] - \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43}) w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]}$  +
 $\frac{c_6 w'[z] + \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43}) w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]}$  +
 $\frac{(-48(4 + \sqrt{43}) c_5 + 5(8(-5 + \sqrt{43})e + 3(7 + 4\sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{27(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{48} (31 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]}$ 

```

i=2 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w] = - \left(\sqrt{y[w]} \left(-14e + \sqrt{43} e + 258 e w^2 - 19 \sqrt{43} e w^2 - 1242 e w^4 + 99 \sqrt{43} e w^4 + 486 e w^6 - 81 \sqrt{43} e w^6 + 12 (1+3w)^2 \left(-8 \left(-5 + \sqrt{43} \right) - 3 \left(-15 + \sqrt{43} \right) w - 16 w^2 + 3 \left(1 + \sqrt{43} \right) w^3 \right) c_5 + 12 (1-3w)^2 \left(8 \left(-5 + \sqrt{43} \right) - 3 \left(-15 + \sqrt{43} \right) w + 16 w^2 + 3 \left(1 + \sqrt{43} \right) w^3 \right) c_6 + 1368 y[w] - 144 \sqrt{43} y[w] + 14652 w^2 y[w] - 2358 \sqrt{43} w^2 y[w] - 2916 w^4 y[w] + 486 \sqrt{43} w^4 y[w] + 4914 w y'[w] - 819 \sqrt{43} w y'[w] - 9828 w^3 y'[w] + 1638 \sqrt{43} w^3 y'[w] + 1458 w^5 y'[w] - 243 \sqrt{43} w^5 y'[w] \right) / \left(9 \left(-6 + \sqrt{43} \right) (-3+w) (-1+w) (1+w) (3+w) (-1+3w) (1+3w) \right)$$

i=3 solSysChazy:

$$\left\{ \mathcal{A}_1 \rightarrow -1 - \frac{\sqrt{43}}{8}, \mathcal{A}_2 \rightarrow \frac{1}{8} (8 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_3 \rightarrow \frac{1}{48} (-31 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{1}{48} (31 - \sqrt{43}), \mathcal{A}_5 \rightarrow \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_6 \rightarrow -\frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}), b_1 \rightarrow 0, b_2 \rightarrow 0, b_3 \rightarrow 0, b_4 \rightarrow 0, b_5 \rightarrow 0, b_6 \rightarrow 0, c_1 \rightarrow \frac{4e - 12(9 + \sqrt{43})c_5 + 3(-3 + \sqrt{43})c_6}{9(6 + \sqrt{43})}, c_2 \rightarrow \frac{3(-3 + \sqrt{43})c_5 - 4(e + 3(9 + \sqrt{43})c_6)}{9(6 + \sqrt{43})}, c_3 \rightarrow \frac{-15(-7 + 4\sqrt{43})c_5 + 8(5(5 + \sqrt{43})e - 6(-4 + \sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})}, c_4 \rightarrow -\frac{48(-4 + \sqrt{43})c_5 + 5(8(5 + \sqrt{43})e + 3(-7 + 4\sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})}, f_1 \rightarrow 0, f_2 \rightarrow 0, f_3 \rightarrow 0, f_4 \rightarrow 0, f_5 \rightarrow 0, f_6 \rightarrow 0, d \rightarrow 0 \right\}$$

$$eqChazy: w^{(3)}[z] = e w'[z] + \frac{-\frac{48(-4 + \sqrt{43})c_5 + 5(8(5 + \sqrt{43})e + 3(-7 + 4\sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{48} (31 - \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{4e - 12(9 + \sqrt{43})c_5 + 3(-3 + \sqrt{43})c_6}{9(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \left(-1 - \frac{\sqrt{43}}{8}\right) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{-15(-7 + 4\sqrt{43})c_5 + 8(5(5 + \sqrt{43})e - 6(-4 + \sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{48} (-31 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]} +$$

$$\frac{c_6 w'[z] - \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]} + \frac{c_5 w'[z] + \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{3(-3 + \sqrt{43})c_5 - 4(e + 3(9 + \sqrt{43})c_6)}{9(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{8} (8 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{1 + w[z]}$$

i=3 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w] = \left(\sqrt{y[w]} \left(-14e - \sqrt{43} e + 258 e w^2 + 19 \sqrt{43} e w^2 - 1242 e w^4 - 99 \sqrt{43} e w^4 + 486 e w^6 + 81 \sqrt{43} e w^6 - 12 (1+3w)^2 \left(-8 (5 + \sqrt{43}) - 3 (15 + \sqrt{43}) w + 16 w^2 + 3 (-1 + \sqrt{43}) w^3 \right) c_5 - 12 (1-3w)^2 \left(8 (5 + \sqrt{43}) - 3 (15 + \sqrt{43}) w - 16 w^2 + 3 (-1 + \sqrt{43}) w^3 \right) c_6 + 1368 y[w] + 144 \sqrt{43} y[w] + 14652 w^2 y[w] + 2358 \sqrt{43} w^2 y[w] - 2916 w^4 y[w] - 486 \sqrt{43} w^4 y[w] + 4914 w y'[w] + 819 \sqrt{43} w y'[w] - 9828 w^3 y'[w] - 1638 \sqrt{43} w^3 y'[w] + 1458 w^5 y'[w] + 243 \sqrt{43} w^5 y'[w] \right) / \left(9 \left(6 + \sqrt{43} \right) (-3+w) (-1+w) (1+w) (3+w) (-1+3w) (1+3w) \right)$$

Таким образом, существует три решения системы Шази (solSysChazy) соответствующие корням $\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = -\frac{8\sqrt{43}+59}{27}$, $\alpha_2 = \frac{8\sqrt{43}-59}{27}$. Для каждого i ($i = 1, i = 2, i = 3$) приведено уравнение Шази (eqChazy) с коэффициентами, которые получены при решении соответствующей системы Шази. Поскольку в каждом из трех решений оказалось, что коэффициент $D = 0$, то внутри модуля была использована замена

$$w'(z) = \sqrt{y(w)}, \quad (13)$$

позволяющая свести построенное уравнение Шази к линейному уравнению (получается из уравнения linearEqChazy делением на $\sqrt{y(w)}$) второго порядка с шестью особыми точками. Так, например, для $i = 1$ с помощью команды

$$\text{In[4]:= lineq[1] = \frac{\text{linearEqChazy[1][[1]] - linearEqChazy[1][[2]]}{\sqrt{y[w]}} = 0 // \text{FullSimplify} // \text{TraditionalForm}$$

получается искомое линейное уравнение:

$$\frac{1}{-9 + 91w^2 - 91w^4 + 9w^6} (30(1+3w)^2(59+3w(-37+w(-5+9w)))c_5 + 30(1-3w)^2(-59+3w(-37+w(5+9w)))c_6 - 108(59-150w^2+27w^4)y[w] + 54w(91-182w^2+27w^4)y'[w] + (-1+9w^2)(2e(7-66w^2+27w^4) - 27(9-10w^2+w^4)y''[w])) = 0 \quad (14).$$

Уравнение (14) легко интегрируется с помощью команды

solutionLinear[1]=DSolve[(linearEqChazy[1]/.

{ a₁ → 1, a₂ → -1, a₃ → 3, a₂ → -3, a₂ → 1/3, a₂ → -1/3 }, y[w], w]//Simplify

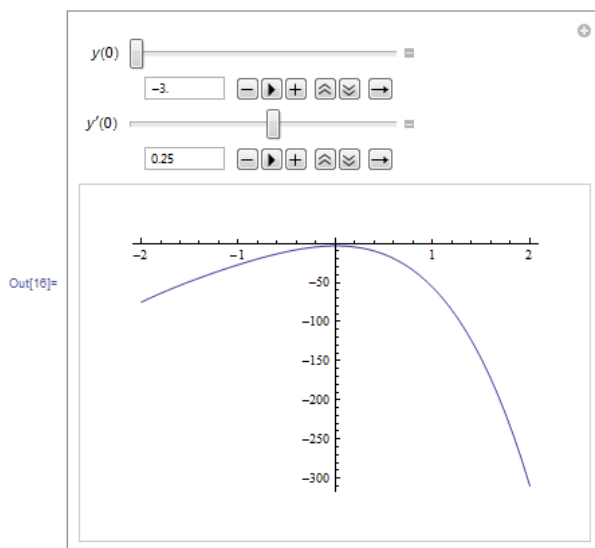
Общее решение уравнения (14) имеет вид:

$$\left\{ \left\{ y[w] \rightarrow 0 \right\}, \left\{ y[w] \rightarrow \frac{2e}{27} + ew^2 + \frac{((-3+w)(-1+3w))^{3/2} \sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6} C[1]}{\sqrt{(-1+w)(1+w)(3+w)(1+3w)}} - \frac{w(1+w^2) \sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6} C[2]}{\sqrt{3-10w+3w^2} \sqrt{-3-10w+10w^2+3w^4}} + \left(\frac{5}{18} + 5w\right) c_5 + \left(-\frac{5}{18} + 5w\right) c_6 \right\} \right\} \quad (15)$$

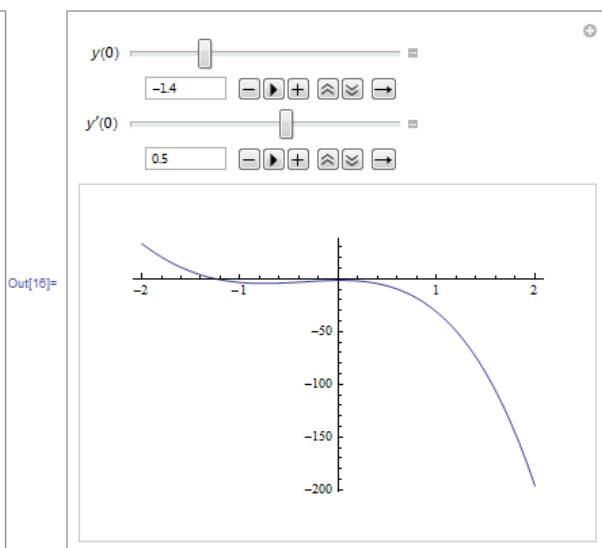
где C[1] и C[2] – произвольные постоянные.

Построить графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica* легко с помощью функции **Plot**, задав значения параметров, входящих в общее решение. Версии системы *Mathematica* 6.0 и выше позволяют также строить частные решения, не определяя конкретных значений параметров, а задавая только интервалы их изменения с помощью модуля манипуляций **Manipulate**. Для уравнения (14) это выглядит следующим образом:

```
In[16]:= Manipulate[Plot[Evaluate[y[w] /. First[NDSolve[{{(lineq[1] /. {c5 → 1, c6 → 2, e → 3}), y[0] == a, y'[0] == b}, y, {w, -10, 10}]], {w, -2, 2}], ImagePadding → 25, PlotRange → Automatic], {{a, 1, TraditionalForm[y[0]]}, -3, 3}, {{b, 0, TraditionalForm[y'[0]]}, -3, 3}]
```



a)



б)

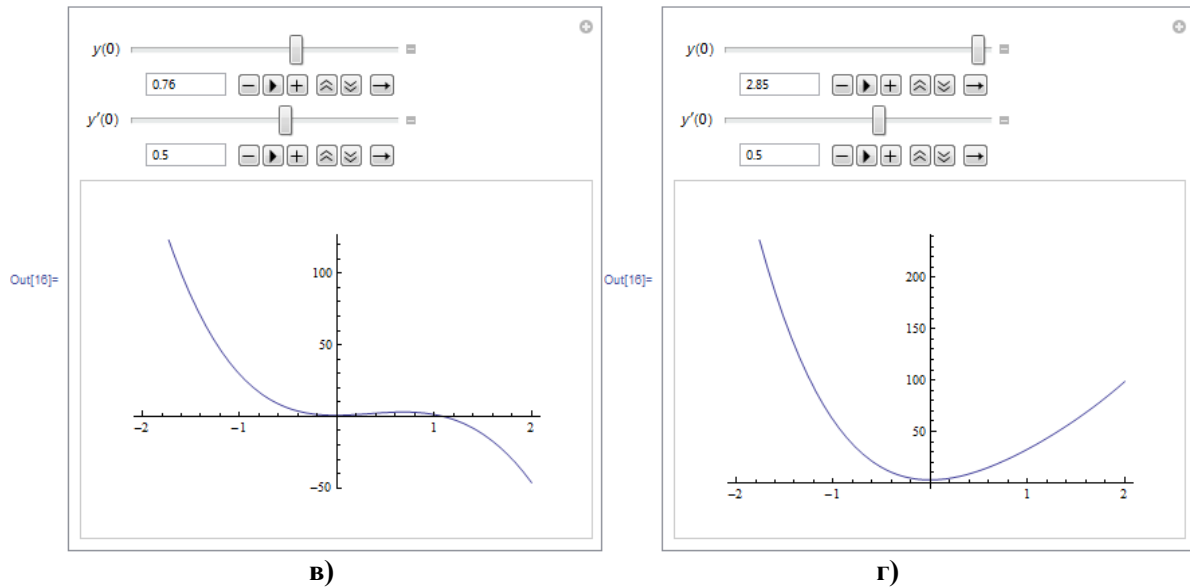


Рисунок – Графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica*

Графики частных решений (Рисунок) изменяются с помощью двух слайдеров, которые автоматически создаются модулем **Manipulate** с помощью динамического объекта **Slider**, и изменение положения слайдеров отвечает изменению начальных условий y_0 и y_0' . Тем самым используется метод объектно-ориентированного программирования для осуществления анимации интегральных кривых в зависимости от изменения начальных условий.

Зная вид общего решения (15) уравнения (14), легко находим общий интеграл уравнения Шази eqChazy для $i = 1$ [7] (аналогично общий интеграл может быть получен и для двух других значений i):

$$\text{Solve}\left[\alpha + 54 C[3] == \frac{\text{RootSum}\left[4 e + 486 C[1] - 3240 C[1] \pi 1 - 54 C[2] \pi 1 + 54 e \pi 1^2 + 6372 C[1] \pi 1^2 - 3240 C[1] \pi 1^3 - 54 C[2] \pi 1^3 + 486 C[1] \pi 1^4 + 15 c_5 + 270 \pi 1 c_5 - 15 c_6 + 270 \pi 1 c_6 \pi, \text{Log}[-\pi 1 + w[\pi]]\right]}{-60 C[1] - C[2] + 2 e \pi 1 + 236 C[1] \pi 1 - 180 C[1] \pi 1^2 - 3 C[2] \pi 1^2 + 36 C[1] \pi 1^3 + 5 c_5 + 5 c_6}, w[\pi]\right]$$

Замечание. Если при заданных значениях величин $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ корни многочлена eq $\alpha 2$ выражаются через Root-объекты, то в приведенном модуле constrEquationChazy вместо команды

```
sol = solve [eq $\alpha 2$  == 0,  $\alpha 2$ ] // Union // Flatten;
```

следует написать команду

```
sol = N[solve [eq $\alpha 2$  == 0,  $\alpha 2$ ] // Union // Flatten; sol1 = sol;.
```

В результате все вычисления могут быть проведены с нужным числом значащих цифр, посредством задания соответствующих опций инструкции **N**.

Заключение

Используя модуль **constrEquationChazy [a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_]**, удастся найти решения системы Шази для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Если при этом коэффициент $D = 0$, то данный модуль строит линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится уравнение Шази. Используя команды **DSolve** или **NDSolve**, удастся решить построенные уравнения и с помощью визуализационных средств системы

Mathematica определить поведение интегральных кривых. В частности, используя функции Manipulate или Animate, удастся установить характер изменения интегральных кривых в зависимости от одного или более параметров, входящих в общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения Шази.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
2. Painleve, P. Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles / P. Painleve // Professies a Stokholm. – Paris, 1897.
3. Мартынов, И.П. Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тезисы докладов межд. конф., Минск, 2007, Минск, ИМ НАНБ, 2007. – С. 89–91.
4. Мартынов, И.П. О решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Нелінійні Коливання. – 2009. – Т. 12. № 1. – С. 92–98.
5. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : Монография / А.В. Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.
6. Чичурин, А.В. О компьютерном моделировании метода нахождения решений дифференциальных уравнений второго и третьего порядков с шестью особыми точками / А.В. Чичурин // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010 : материалы II Международной науч.-практ. Конф. [Электронный ресурс] / УО «Гр.ун-т им. Я. Купаль». – Гродно, 2010. – 1 электр. компакт-диск (CD-R).
7. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access : www.wolfram.com – Date of access : 1.09.2010.

A.V. Chichurin. Solution of Chazy System and Integration of Chazy Differential Equation with Six Permanent Poles with the Help of Mathematica

Chazy non-linear differential equation of the third order with six permanent poles is considered. Using the possibility of *Mathematica* system, program module allowing to find the solution to the corresponding Chazy system is built and program measures, allowing to find the solution to Chazy equation in a number or analytic form are given.

УДК 517.9

Е.Н. Швычкина

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В данной работе построена эквивалентная система для дифференциального уравнения Шази с шестью особыми точками, при условии, что все коэффициенты данного уравнения являются постоянными. Рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами искомой эквивалентной системы, а также получены условия на параметры, при которых система дифференциальных уравнений является эквивалентной уравнению Шази с шестью особыми точками. Также приведен пример построения таких систем для конкретных коэффициентов. Все вычисления, преобразования и построения выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Введение

При исследовании характера подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений и во многих других вопросах общей и аналитической теорий обыкновенных дифференциальных уравнений удобнее рассматривать вместо самого дифференциального уравнения эквивалентные ему системы. Например, для уравнений Пенлеве типа второго порядка возможность представления их в виде эквивалентной системы позволили построить преобразования Бэклунда и, в частности, автопреобразования, которые дают возможность находить рациональные и специальные решения этих уравнений [1; 2].

Дифференциальные уравнения третьего порядка с шестью различными полюсами относительно искомой функции классифицировал и изучил Ж. Шази в работе [3]. Результаты его исследований сводятся к следующему:

1. Если решения рассматриваемых уравнений третьего порядка не имеют подвижных критических особых точек, то последние, по необходимости, должны иметь вид:

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k (w' - a_k')^3 + B_k (w' - a_k')^2 + C_k (w' - a_k')}{w - a_k} + D w'' + E w' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k}. \quad (1)$$

Уравнение (1) содержит 32 функции по $z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k$ ($k = \overline{1,6}$), D, E .

2. Кроме того, эти функции должны удовлетворять специальной системе (S), состоящей из 31 алгебраического и дифференциального уравнений.

Для исследования дифференциального уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют системе (S) на предмет наличия у его решений Пенлеве свойства [3], Шази построил эквивалентные системы. Так, например, в окрестности точки голоморфности функции $w(z)$ решения уравнения (1) им была построена система вида:

$$\begin{cases} \frac{w'}{2} + P_3 w' + Q_3 + Pv - Qu = 0, \\ w'' + P_2 w' + Q_2 + \frac{\partial P}{\partial w} v - \frac{\partial Q}{\partial w} u = 0, \end{cases}$$

где P_3, Q_3, P_2, Q_2 – полиномы от w , степень которых равна нижнему индексу, и коэффициенты которых голоморфны в каждой точке, где голоморфны коэффициенты уравнения (1).

Исследование уравнения (1) было продолжено Н. А. Лукашевичем в работе [2]. Им было доказано, что решение шести неприводимых уравнений Пенлеве выражается через решения частных классов систем вида

$$\begin{cases} uu''-u'^2 = a_0uu'+a_1uv'+a_2u'v + a_3vv'+a_4u^2 + a_5uv + a_6v^2, \\ v v''-v'^2 = b_0uu'+b_1uv'+b_2u'v + b_3vv'+b_4u^2 + b_5uv + b_6v^2 \end{cases} \quad (2)$$

с аналитическими коэффициентами a_i, b_i ($i = \overline{0,6}$) по z . Им доказано, что если $w(z)$ – решение уравнения Пенлеве, то это решение можно представить в виде

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \quad (3)$$

где $u(z)$ и $v(z)$ целые функции, удовлетворяющие системе (2). Подстановка (3) сводит систему (2) к уравнению

$$wR w''' = L w'w'' - R_w w'^3 + M w'' + N w'^2 + S w' + T, \quad (4)$$

которое можно записать в виде (1).

Конкретные значения коэффициентов a_i, b_i ($i = \overline{0,6}$), при которых общее решение (P_6) является частным решением уравнения (4), приведены в [4].

Необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (4) принадлежало к P – типу, были получены Н.А. Лукашевичем в [5].

Построение эквивалентной системы

В данной работе решается задача о построении новых систем, эквивалентных дифференциальному уравнению Шази (1). Имеет место

Теорема 1. Дифференциальное уравнение Шази вида (1), коэффициенты a_k, A_k, B_k, C_k, F_k ($k = \overline{1,6}$), D, E которого являются постоянными величинами,

а $B_k = 0$ ($k = \overline{1,6}$), $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$ и удовлетворяют системе (S), эквивалентно системе вида

$$\begin{cases} w'' = -f_1(z, w)w^2 + f_2(z, w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v, \end{cases} \quad (5)$$

где f_i ($i = \overline{1,4}$) функции по z и w .

Доказательство:

При сделанных в условиях теоремы предположениях из системы (S) следует, что $D = 0, F_k = 0$ ($k = \overline{1,6}$). Тогда уравнение (1) примет вид:

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w'w'' + A_k(w')^3 + C_k(w' - a_k')}{w - a_k} + Ew' \quad (6)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (5) по z и, подставляя (6) в уравнение Шази (6), сравним коэффициенты при одинаковых степенях w и v . В результате получим систему дифференциальных уравнений для отыскания функций f_i ($i = \overline{1,4}$). Эта система имеет следующий вид:

$$f_2 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} - \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$-2f_1^2 + f_1 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w-a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w-a_k} - \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0, \quad (8)$$

$$E - 2f_3 f_1 + f_3 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w-a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{C_k}{w-a_k} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0. \quad (9)$$

Из первых двух уравнений системы (7) находим функцию

$$f_2(z, w) = \prod_{k=1}^6 (w - a_k) \cdot C_2, \quad (10)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Чтобы решить систему (7)–(8) применим метод, который рассматривается в работе [6] для решения линейного уравнения второго порядка класса Фукса с шестью особыми точками. Рассмотрим подробнее процедуру нахождения функции $f_1(z, w)$. Из третьего уравнения системы (7) найдем

$$f_1(z, w) = C_1 \cdot G(w),$$

где C_1 – произвольная постоянная, $G(w)$ – некоторая аналитическая функция от w .

Подставим в уравнение (8) функцию $f_1(z, w)$ из последнего соотношения. В результате это уравнение станет уравнением Риккати относительно неизвестной функции $G(w)$. Очевидно, что для построения общего решения уравнения Риккати достаточно знать частное решение этого уравнения. Такое частное решение будем искать в виде:

$$G(w) = \frac{b_0 w^5 + b_1 w^4 + b_2 w^3 + b_3 w^2 + b_4 w + b_5}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6}, \quad (11)$$

где σ_i ($i = \overline{1,6}$) – элементарные симметрические многочлены, составленные из функций a_i ($i = \overline{1,6}$).

В работе [7] было доказано, что коэффициенты A_k ($k = \overline{1,6}$) и коэффициенты a_i ($i = \overline{1,6}$) связаны соотношениями:

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \quad (12)$$

где величины α_2 , β_2 , β_3 определяются согласно формулам:

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2 \sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1 \sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \quad (13)$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1 \sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1 \sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \quad (14)$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению пятой степени:

$$\begin{aligned} & 1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + (432\sigma_2^2 + 216\sigma_1\sigma_3 - 432\sigma_4)\alpha_2^3 + 2\sigma_1^3\sigma_3\sigma_4 + \\ & + 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 8\sigma_1^2\sigma_4^2 - 6\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5 - 36\sigma_2\sigma_3\sigma_5 + 48\sigma_1\sigma_4\sigma_5 - 72\sigma_5^2 + 4\sigma_1^4\sigma_6 - \\ & - 48\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6 + 144\sigma_2^2\sigma_6 + \alpha_2^2(-48\sigma_2^3 - 144\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 24\sigma_1^2\sigma_4 + 288\sigma_2\sigma_4 - 216\sigma_1\sigma_5 + \\ & + 1296\sigma_6) + \alpha_2(24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_3^2 - 8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 - 48\sigma_2^2\sigma_4 - 36\sigma_1\sigma_3\sigma_4 - 4\sigma_1^3\sigma_5 + \\ & + 72\sigma_1\sigma_2\sigma_5 + 108\sigma_3\sigma_5 + 144\sigma_1^2\sigma_6 - 864\sigma_2\sigma_6). \end{aligned} \quad (15)$$

Для дальнейших вычислений, используя соотношения (12), удобно представить дробь $\sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w - a_k}$ в виде:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w - a_k} = - \frac{6w^4 - 4\sigma_1 w^3 - 3w^2 \alpha_2 + 3\sigma_1 w^2 + 3\beta_2 w - 3\beta_3 + \sigma_4}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6}. \quad (16)$$

Используя равенства (12) – (16), уравнение (8) можно переписать в виде

$$2G^2 + \frac{6w^4 - 4w^3 \sigma_1 - 3\alpha_2 w^2 + 3w^2 \sigma_2 + 3w \beta_2 - 3\beta_3 + \sigma_4}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6} - \frac{6w^5 - 5w^4 \sigma_1 + 4w^3 \sigma_2 - 3w^2 \sigma_3 + 2w \sigma_4 - \sigma_5}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6} G - G' = 0.$$

Для определения величин b_k ($k = \overline{0,5}$), σ_i ($i = \overline{1,6}$) подставим функцию из (11) в последнее уравнение, и, проведя соответствующие преобразования, запишем уравнение десятой степени относительно W . Приравнявая коэффициенты полученного уравнения при одинаковых степенях W , получим систему из одиннадцати алгебраических уравнений, которую обозначим (A), где неизвестными являются коэффициенты b_k ($k = \overline{0,5}$) и σ_i ($i = \overline{1,6}$). Первое уравнение системы (A), полученное для коэффициента при десятой степени, имеет вид:

$$2b_0^2 - 7b_0 + 6 = 0.$$

Отсюда находим: $b_0 = 2$ или $b_0 = \frac{3}{2}$.

Для значения $b_0 = 2$, последовательно решая полученную систему (A) при условии $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$, найдем частное решение (11) уравнения Риккати:

$$G(w) = \frac{10w}{5w^2 + 3\alpha_2}.$$

Таким образом,

$$f_1(z, w) = \frac{2(10C_1 w(5w^2 + 3\alpha_2) - 3\alpha_2(3w^2 + \alpha_2))}{2(C_1(5w^2 + 3\alpha_2)^2 - 6w\alpha_2(w^2 + \alpha_2)) + 5\sigma_5}. \quad (17)$$

Зная вид функции $f_1(z, w)$ из (17), определим функцию $f_3(w)$ из равенства (9) как решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Подставив найденные функции $f_i(z, w)$ ($i = \overline{1,4}$) в систему (5), построим эквивалентную систему в явном виде.

Замечание 1. При значении $b_0 = 2$ результате вычислений получаем действительное решение уравнения (8) в виде функции (17). При $b_0 = \frac{3}{2}$ ситуация усложняется, так как частное решение уравнения Риккати является комплекснозначной функцией:

$$G(w) = \left(\frac{3w^5}{2} + \frac{(13\alpha_2^2 + 3i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha_2} + 3\sigma_4)w^3}{6\alpha_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(18\sigma_3\alpha_2^2 + i\sqrt{3}(20\alpha_2^2 - 9\sigma_4)\alpha_2^{3/2})w^2}{24\alpha_2^2 - 9i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha_2} - 9\sigma_4} + \\
& + \frac{1}{18}(16\alpha_2^2 - 33i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha_2} + 21\sigma_4)w + \\
& + \frac{\sigma_3(9\alpha_2\sigma_4 - 24\alpha_2^3) - i\sqrt{3}\alpha_2(16\alpha_2^4 - 12\sigma_4\alpha_2^2 + 3\sigma_4^2)}{24\alpha_2^2 - 9i\sqrt{3}\alpha_2\sigma_3 - 9\sigma_4} \cdot (w^6 + \\
& + \frac{(19\alpha_2^2 + 3i\sqrt{3}\alpha_2\sigma_3 + 19\sigma_4)w^4}{9\alpha_2} + \frac{4i\alpha_2^{3/2}w^3}{3\sqrt{3}} + (\frac{4\alpha_2^2}{3} + i\sqrt{3}\alpha_2\sigma_3 + \sigma_4)w^2 - \\
& - \frac{4i\sqrt{\alpha_2}(4\alpha_2^2 - 3\sigma_4)w}{27\sqrt{3}} + (2\alpha_2(112\alpha_2^6 + 88\sigma_4\alpha_2^4 - 120\sigma_4^2\alpha_2^2 + 135i\sqrt{3}\alpha_2^3\sigma_3^3 - \\
& - 3i\sqrt{3}\sigma_3(128\alpha_2^4 - 42\sigma_4\alpha_2^2 - 3\sigma_4^2))\sqrt{\alpha_2} + 27\sigma_3^2 - \\
& - 9\sigma_3^2(88\alpha_2^3 - 21\alpha_2\sigma_4)))/(27(-8\alpha_2^2 + 3i\sqrt{3}\alpha_2\sigma_3 + 3\sigma_4)^2)).
\end{aligned}$$

Пример

Построим эквивалентную систему (5) для уравнения Шази (6), коэффициенты которого a_k ($k = \overline{1,6}$) имеют вид:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{4}, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = \frac{1}{4}, \quad a_6 = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

При таких a_k ($k = \overline{1,6}$) выполняется условие $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$.

Сначала вычислим значения величин

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = -\frac{1}{4}, \quad \sigma_4 = -1, \quad \sigma_5 = \frac{1}{4}, \quad \sigma_6 = \frac{1}{2} \quad (19)$$

и подставим значения (18) и (19) в соотношение (15). В результате получим уравнение пятой степени:

$$(7 + 16\alpha_2)(64\alpha_2^3 + 28\alpha_2^2 - 7\alpha_2 - 1) = 0. \quad (20)$$

Корень $\alpha_2 = -7/16$ сразу исключим из рассмотрения, поскольку он обращает знаменатели правых частей уравнений (13) и (14) в ноль. Корнями второго множителя левой части равенства (20) будут $\alpha_2 = 1/4$, $\alpha_2 = \frac{-\sqrt{57}-11}{32}$, $\alpha_2 = \frac{\sqrt{57}-11}{32}$. Для простоты вычислений рассмотрим корень

$$\alpha_2 = 1/4. \quad (21)$$

Подставив значения (18), (19) в соотношения (13)–(16), найдем значения коэффициентов:

$$A_1 = -2, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = -\frac{13}{10}, \quad A_4 = \frac{13}{10}, \quad A_5 = -\frac{14}{5}, \quad A_6 = \frac{14}{5}.$$

Затем, используя формулы (10) и (17), определим функции $f_1(z, w)$ и $f_2(z, w)$:

$$f_1(z, w) = \frac{-3 + 4w(30C_1 + w(200C_1w - 9))}{9C_1 + 2w(-3 + 4w(15C_1 + w(50C_1w - 3)))}, \quad (22)$$

$$f_2(z, w) = \frac{1}{64}(64w^6 - 84w^4 + 21w^2 - 1). \quad (23)$$

Из уравнения (9) с коэффициентами вида (18)–(23) находим функцию $f_3(w)$:

$$\begin{aligned} f_3(w) = & ((64w^6 - 84w^4 + 21w^2 - 1)(2777211C_3 + E((150(6286742 + 15634157w - \\ & - 30326215w^2 + 18546780w^3 + 47127380w^4 - 24388270w^5) - C_1(12426403234 + \\ & + 36621655999w - 193509801425w^2 - 175283033200w^3 + 376943153956w^4 + \\ & + 19973889121w^5)))/(225(64w^6 - 84w^4 + 21w^2 - 1)) - \\ & - \frac{4(4088484232C_1 - 765054575)\ln(w-1)}{3375} - \frac{2}{3}(54846490C_1 + 3607689)\ln(w+1) - \\ & - \frac{4}{3}(26012080C_1 - 2777211)\ln(2w-1) + \frac{4}{27}(30019232C_1 + 23428947)\ln(2w+1) + \\ & + (38488969C_1 - 4612584)\ln(4w-1) - \frac{1}{125}(855443961C_1 + \\ & + 132866150)\ln(4w+1))/((277211(C_1(20w^2 + 3)^2 - 6(4w^3 + w))), \quad (24) \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 произвольные постоянные.

Таким образом, все коэффициенты системы (5) определены и построенная система с коэффициентами (22)–(24) является эквивалентной уравнению Шази (6).

Замечание 2. В процессе проведения аналитических вычислений при построении эквивалентных систем, а также при сравнении частных решений (решений задач Коши) у уравнения (6) и эквивалентной ему системы (5) удобно использовать системы компьютерной математики *Mathematica*. Например, решим задачу Коши для уравнения (6) при коэффициентах a_k ($k = \overline{1,6}$) вида (18)

$$\begin{aligned} & -8331633w^3(128w^4 - 100w^2 + 11) + w'(-17774150E w^6 - 103817108E w^4 - \\ & - 39745721E w^2 + 11997139E + 14w(8331633w'' + 758201E) + 32w^5(33326532w'' + \\ & + 4915919E) - 4w^3(23328572w'' + 4956527E) - 2777211(64w^6 - 84w^4 + \\ & + 21w^2 - 1)w''')/(2777211(64w^6 - 84w^4 + 21w^2 - 1)) = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (25) с использованием функции *NDSolve*, можно найти его частное решение для заданных начальных условий. Его график, например, при

$$w(0) = 1,5, w'(0) = 1,5, w''(0) = 1,5, E = 0$$

имеет вид (рисунок, прерывистая линия).

Используем также функцию *NDSolve* для интегрирования системы (5), (22)–(24) эквивалентной уравнению (25). Решение построенной системы (5), (22)–(24) при

$$w(0) = 1,5, w'(0) = 1,5, v(0) = 0, E = 0,$$

$$C_1 = 0, C_3 = \frac{25}{72}, C_2 - \text{произвольное число,}$$

имеет вид (рисунок, сплошная линия).

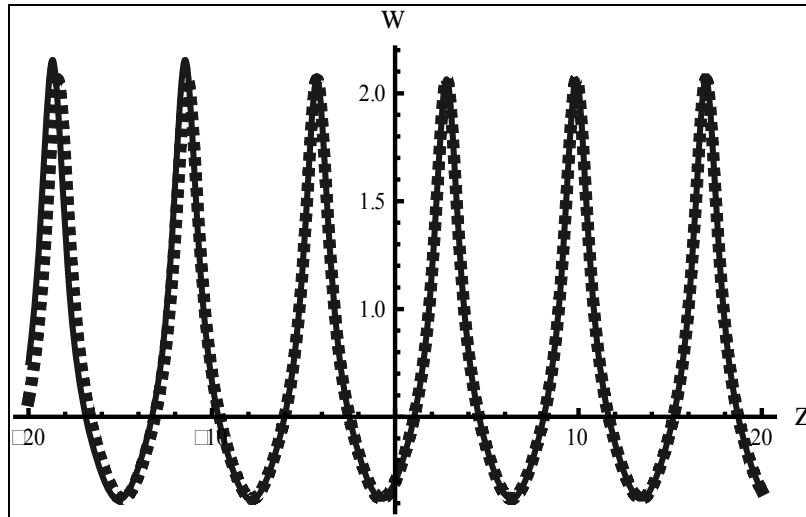


Рисунок – График функции $w(z)$ на интервале $(-20, 20)$

Видим, что графики обоих частных решений совпадают.

Заклучение

В работе построен новый класс эквивалентных систем для дифференциального уравнения Шази с шестью особыми точками, при условии, что все коэффициенты данного уравнения являются постоянными величинами. Рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами искомой эквивалентной системы, а также получены условия на параметры, при которых система дифференциальных уравнений является эквивалентной уравнению Шази с шестью особыми точками. Также приведен пример построения таких систем для конкретных коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудряшов, Н.А., Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов. – Москва : Ижевск, 2004. – 360 с.
2. Лукашевич, Н.А. К теории уравнения Шази / Н.А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, №2. – С. 353–357.
3. Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – № 34 – P. 317–385.
4. Мкртумян, Р.Р. Аналитическая характеристика решений некоторых специальных классов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений : Автореф.... дис. канд. физ.-мат. Наук : 01.01.02 / Р.Р. Мкртумян. – Минск, 1982. – 14 с.
5. Лукашевич, Н.А. Уравнения третьего порядка без подвижных критических точек (п.к.т.) / Н.А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, №5. – С. 778–785.
6. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : Монография / А.В. Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН 2003. – 163 с.
7. Мартынов, И.П. О решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Нейніні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 92–98.

H.N. Shvychkina. The Building of Equivalent System With Six Singularities

In this paper the building of equivalent system of the Chazy differential equation with six singularities. We considered the case, when all coefficients are constants. We formulated the conditions for parameters, when the system of differential equations is equivalent of the Chazy equation. We represent examples here which illustrates given considered method. All calculations, transformations and plotting were done with computer algebra system *Mathematica*.

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

- Алешкевіч Д.Н.** – асістэнт кафедры вышэйшай матэматыкі БДУІР
- Андрусевіч П.П.** – аспірант кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
- Варашылаў А.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэорыі функцый Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
- Галынскі М.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік лабараторыі сілавых узаімадзеянняў Аб’яднанага інстытута энергетычных і ядзерных даследаванняў СОСНЫ
- Жук А.І.** – асістэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага тэхнічнага ўніверсітэта
- Жуковіч С.Я.** – асістэнт кафедры інфармацыйных тэхналогій Беларускага дзяржаўнага эканамічнага ўніверсітэта
- Камароў І.І.** – аспірант кафедры тэорыі імавернасцей і матэматычнай статыстыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
- Княгіна В.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры прыродазнаўчых навук Гомельскага інжынернага інстытута Міністэрства па надзвычайных сітуацыях Рэспублікі Беларусь
- Кураеў Э.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, галоўны навуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі імя М.М. Багалюбава Аб’яднанага інстытута ядзерных даследаванняў (Дубна, Расія)
- Курачкін Ю.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, загадчык лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі НАН Беларусі
- Ліёна В.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы
- Мадорскі В.М.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Манахаў В.С.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры алгебры і геаметрыі Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф. Скарыны
- Марзан С.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Плецохоў У.А.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Прахаровіч М.А.** – асістэнт кафедры вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
- Сабуць А.В.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы
- Самойленка В.Р.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры матэматычнай фізікі механіка-матэматычнага факультэта Кіеўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Т. Шаўчэнкі.
- Самойленко Ю.І.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнай фізікі механіка-матэматычнага факультэта Кіеўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Тараса Шаўчэнкі.
- Секяржыцкі С.С.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна
- Секяржыцкі У.С.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Стражаў В.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Струк В.А. – доктар тэхнічных навук, прафесар ГрДАУ

Трафімук А.А. – аспірант кафедры алгебры і геаметрыі Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф. Скарыны

Чычурын А.В. – доктар фізіка-матэматычных навук (Украіна), дацэнт, загадчык кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна.

Швычкіна А.М. – аспірант кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Шулякоўскі Р.Г. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вучоны сакратар інстытута фізікі НАН Беларусі

Яблонскі О.Л. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры функцыянальнага аналізу Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта