

ISSN

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Галоўны рэдактар:*  
М.Э. Часноўскі

*Намеснік галоўнага рэдактара:*  
Г.М. Сендзер

*Міжнародны савет*  
Я.А. Грэбенікаў (Расія)  
В.Г. Самойленка (Украіна)  
В.В. Дзікусар (Расія)

*Рэдакцыйная калегія:*

А.В. Матысік  
(адказны рэдактар)  
У.В. Амелькін  
М.І. Ляўчук  
У.А. Плецюхоў  
А.Ф. Равінскі  
Я.В. Радыно  
В.Ф. Саўчук  
У.С. Секержыцкі  
М.М. Труш  
А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі  
ў Міністэрстве інфармацыі  
Рэспублікі Беларусь  
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:  
224665, г. Брэст,  
бульвар Касманаўтаў, 21  
тэл.:  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага  
універсітэта» выдаецца  
з снежня 1997 года

**Серыя 4**

**МАТЭМАТЫКА**

**ФІЗІКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

**№ 1 / 2010**

У адпаведнасці з загадам Вышэйшай атэстацыйнай  
камісіі № 9 ад 15.01.2010 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навук

ISSN



# *Vesnik*

*of Brest University*

**Editor-in-chief:**  
M.E. Chasnovski

**Deputy Editor-in-chief:**  
G.M. Sender

**International Board:**  
Y.A. Grebenikav (Russia)  
V.G. Samoilenka (Ukraine)  
V.V. Dzikussar (Russia)

**Editorial Board:**  
A.V. Matysik  
(managing editor)  
Y.V. Amelkin  
M.I. Lyavchuk  
Y.A. Pletsukhov  
A.F. Ravinski  
Y.V. Radyno  
V.F. Sauchuk  
Y.S. Sekerhzitski  
M.M. Trush  
A.V. Chichurin

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224665, Brest,  
Boulevard Cosmonauts, 21  
tel.:  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

**Series 4**

**MATHEMATICS**

**PHYSICS**

**SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL**

**Issued two times a year**

**Founder – Educational institution  
«Brest state university named after A.S. Pushkin»**

***№ 1 / 2010***

According to the order of Supreme certification commission № 9  
from January 15, 2010, the journal «Vesnik of Brest University» was included  
to the List of editions of the Republic of Belarus for publication of the results  
of scientific research in physics-mathematical sciences

## ЗМЕСТ

### ФІЗІКА

<b>Андрусевич П.П., Плетюхов В.А., Стражев В.И.</b> О внутренней симметрии дираковских полей (ч.1).....	5
<b>Косарев В.М.</b> Способ измерения длины когерентности квазимонохроматического света .....	11
<b>Левчук М.И., Львов А.И.</b> Поляризационные наблюдаемые в комптоновском рассеянии на дейтроне при энергиях ниже пионного порога .....	18
<b>Ревинский А.Ф., Тригук В.В., Макоед И.И.</b> О сегнетоэлектрической неустойчивости феррита висмута.....	28
<b>Редьков В.М.</b> Спинорный формализм группы Лоренца и поляризованный свет .....	37
<b>Секержицкий В.С.</b> Об уравнении состояния электронно-нейтронно-ядерного вещества в сильном магнитном поле.....	46
<b>Серый А.И.</b> К вопросу о спиновой поляризации нейтронно-протонной ферми-жидкости .....	52
<b>Тригук В.В., Феранчук И.Д.</b> Аналитическая теория возмущений для двухэлектронного атома .....	60

### МАТЭМАТЫКА

<b>Волчек А.А., Махнист Л.П., Рубанов В.С.</b> О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока .....	68
<b>Жигалло К.Н., Жигалло Т.В.</b> Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах сопряженных функций.....	78
<b>Кальчук И.В., Степанюк Т.А., Грабова У.З.</b> Приближение дифференцируемых функций бигармоническими интегралами Пуассона.....	83
<b>Каримова Т.И., Яблонский О.Л.</b> Системы неавтономных стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов.....	93
<b>Климашевская И.Н., Грицук Д.В.</b> Условия алгеброидности решений с заданным предельным свойством автономных систем двух дифференциальных уравнений .....	103
<b>Комаров И.И., Хайлун Чэнь</b> О применимости метода DPR для оценки индекса устойчивости .....	108
<b>Матысик О.В., Савчук В.Ф.</b> О сходимости неявного итерационного метода решения некорректных задач с правилом останова по соседним приближениям.....	112
<b>Монахов В.С., Трофимук А.А.</b> Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободными от кубов .....	118
<b>Шевчук С.Н., Семенчук В.Н.</b> Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$ -субнормальны, либо $\mathfrak{F}$ -абнормальны .....	127
<b>Юдов А.А., Гурская Е.Е.</b> Геодезические линии канонической связности в редуцированных однородных пространствах .....	132
Звесткі аб аўтарах .....	140

## INDEX

### PHYSIS

<b>Andrusevich P.P., Pletyukhov V.A., Strazhev V.I.</b> On Internal Symmetry of Dirac Fields .....	5
<b>Kosarev V.</b> The Way of Measurement of Length of Coherence of Quasi-monochromatic Light.....	11
<b>Levchuk M.I., L'vov A.I.</b> Polarization Observables in Deuteron Compton Scattering at Energies below Pion Threshold.....	18
<b>Ravinski A.F., Triguk V.V., Makoed I.I.</b> About Ferroelectric Instability in Bismuth Ferrite.....	28
<b>Red'kov B.M.</b> Spinor Formalism of the Lorentz Group and Polarized Light.....	37
<b>Sekerzhitsky V.S.</b> About States Equation of Electron-Neutron-Nuclear Matter in Strong Magnetic Field.....	46
<b>Sery A.I.</b> On the Problem of Neutron-Proton Fermi-liquid Spin Polarization .....	52
<b>Triguk V.V., Feranchuk I.D.</b> Analytic Perturbation Theory for Two-Electron Atoms.....	60

### MATHEMATIS

<b>Volchek A.A., Makhnist L.P., Rubanov V.S.</b> About the Solution to the Set of Differential Equations, One of the Models of Several Years' Fluctuation of the River Flow.....	68
<b>Jigallo K.N., Jigallo T.V.</b> Approximational Properties of Poisson's Integrals on the Classes of Conjured Functions .....	78
<b>Kalchuk I.V., Stepaniuk T.A., Grabova U.Z.</b> Approximation of Differentiable Functions by Poisson's Biharmonic Integrals .....	83
<b>Karimava T.I., Yablonski A.L.</b> System of Nonautonomous Stochastic Differentials Equations in Algebra of Generalized Stochastic Processes.....	93
<b>Klimashevskaya I.N., Gritsuk D.V.</b> Conditions of the Algebraic Solutions with Given Limit Properties for Autonomous Systems of Two Differential Equations .....	103
<b>Komarov I.I., Hailong Chen.</b> The Applicability of DPR Method to the Estimation of Stability Index.....	108
<b>Matysik O.V., Savchuk V.F.</b> On the Convergence of the Implicite Iteration Method with the Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems.....	112
<b>Monakhov V.S., Trofimuk A.A.</b> Finite Solvable Groups with Cube-Free Orders of Factors of Normal Series.....	118
<b>Shevchuk S.N., Semenchuk V.N.</b> Finite Groups Every Primary Subgroup of which is Either $\mathcal{F}$ -subnormal or $\mathcal{F}$ -abnormal.....	127
<b>Yudov A.A., Gurskaya H.H.</b> The Geodetic Lines of Canonical Connectednesses in Reductive Homogeneous Spaces .....	132
Information about the authors .....	140

УДК 539.12:530.145

*П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев*

## О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ ПОЛЕЙ (Ч.1)

Исследована внутренняя симметрия 8-компонентного дираковского поля в матричном подходе. Установлено, что классическая формулировка теории обладает внутренней симметрией  $SO(3,2)$ . На квантовом уровне остается симметрия  $SO(3)$  ( $SU(2)$ ), обычно сопоставляемая такому полю.

### Введение

В работе [1] на примере уравнения Дирака был предложен новый подход к исследованию внутренней симметрии релятивистских волновых уравнений (РВУ) с дираковской алгеброй матриц.

В настоящей работе мы применим данный подход для установления полной группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки 8-компонентного дираковского на классическом и квантовом уровнях.

Напомним, что под преобразованиями  $Q$  внутренней симметрии лагранжевой формулировки РВУ первого порядка, записанного в матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \quad (1)$$

( $\Psi$  – многокомпонентная волновая функция,  $\Gamma_\mu$  – квадратные матрицы,  $m$  – массовый параметр), понимаются преобразования

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu), \quad (2)$$

удовлетворяющие требованиям:

матрица  $Q$  коммутирует со всеми матрицами  $\Gamma_\mu$ , то есть

$$[Q, \Gamma_\mu] = 0; \quad (3)$$

для матрицы  $Q$  выполняется условие

$$Q^+ \eta Q = \eta, \quad (4)$$

где  $\eta$  – матрица билинейной лоренц-инвариантной формы  $\Psi^+ \eta \Psi$ , знак «+» означает эрмитовское сопряжение. Для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = I + \omega J \quad (5)$$

( $\omega$  – параметр,  $J$  – генератор) условие (4) принимает вид:

$$(\omega J)^+ \eta = -\eta \omega J. \quad (6)$$

### Вещественная форма дираковского поля

Итак, возьмем систему из двух уравнений Дирака

$$\begin{cases} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  – биспиноры первого ранга,  $\gamma_\mu$  – матрицы  $4 \times 4$ , имеющие вид:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим теорию, базирующуюся на лагранжиане

$$L = L_1 + L_2, \quad (9)$$

что соответствует выбору

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_4 \quad (10)$$

матрицы билинейной формы.

Для решения поставленной задачи предварительно преобразуем систему (7). Возьмем от (7) комплексное сопряжение и, учитывая, что  $\gamma_1^* = -\gamma_1$ ,  $\gamma_2^* = \gamma_2$ ,  $\gamma_3^* = -\gamma_3$ ,  $\gamma_4^* = \gamma_4$ ,  $\partial_i^* = \partial_i$ ,  $\partial_4^* = -\partial_4$ , получим уравнения:

$$\begin{cases} (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m) \psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - \gamma_4 \partial_4 + m) \psi_2^* = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Объединяя (11) с исходными уравнениями (7), приходим к системе из четырех (шестнадцати) уравнений, которая может быть записана в стандартной матричной форме (1). Матрицы  $\Gamma_\mu$  16x16 и матрица  $\eta$  в базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \text{ – столбец} \quad (12)$$

для такой системы будут иметь вид:

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4, \quad (13)$$

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \quad (14)$$

Складывая и вычитая затем соответствующие уравнения (7) и (11) и вводя функции

$$\psi_1^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1^*), \quad \psi_2^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_2^*), \quad \psi_1^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_1^*), \quad \psi_2^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_2^*), \quad (15)$$

получим эквивалентную исходной 16-компонентную систему уравнений, которая также может быть записана в форме (1). При этом, если расположить вещественные ( $\psi_1^r, \psi_2^r$ ) и чисто мнимые ( $\psi_1^i, \psi_2^i$ ) компоненты волновой функции, например, в последовательности

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{ – столбец}, \quad (16)$$

матрицы  $\Gamma_\mu$  трансформируются к виду:

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2, \quad \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4, \quad (17)$$

где  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ . Для матрицы же  $\eta$  сохраняется выражение (14).

Нетрудно убедиться, что при выборе (15) полевых функций в системе (1), (16), (17) последняя становится вещественной. Будем называть ее вещественной формой исходной системы (7), или 16-компонентным вещественным дираковским полем. Отметим, что аналогичным образом можно записать любое РВУ первого порядка с дираковской алгеброй матриц  $\Gamma_\mu$ , в том числе и обычное уравнение Дирака [1]. Преимущество данной записи заключается в том, что она позволяет обнаружить симметрию, которая остается скрытой при использовании стандартной комплексной формы РВУ.

### Внутренняя симметрия. Классический случай

При установлении группы внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме, необходимо учесть следующее. Волновая функция (16) содержит 8 вещественных и 8 мнимых компонент. Это соотношение должно (по определению) сохраняться при преобразованиях (2). Следовательно, к условиям (3), (6) в данном случае добавляется еще одно: преобразование  $Q$  должно оставлять вещественные (мнимые) компоненты волновой функции  $\Psi$  вещественными (мнимыми) в том смысле, что если  $\Psi_A$  – вещественная (мнимая) функция, то и  $\Psi'_A = Q_{AB} \Psi_B$  – также вещественная (мнимая).

Применение условий, накладываемых на матрицу  $Q$ , удобнее всего проводить в так называемом фермионном базисе [2], в котором диракоподобные матрицы  $\Gamma_\mu$  (17) принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (18)$$

Переход из базиса (16), (17) в фермионный базис осуществляется посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (19)$$

$$A^{-1} = A^\dagger = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Очевидно, что группа внутренней симметрии 16-компонентного вещественного дираковского поля может быть параметризована с помощью генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu, \Gamma'_5, \Gamma'_\mu \Gamma'_5, \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma'_\mu \Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu \Gamma'_\mu), \quad (20)$$

описывающей внутреннюю SU(4)-симметрию 16-компонентного комплексного поля Дирака [3]. Здесь  $\Gamma'_\mu$  – квадратные матрицы размерности 16x16, удовлетворяющие, как и  $\Gamma_\mu$  (18), алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующие с  $\Gamma_\mu$  и имеющие в фермионном базисе вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \quad (21)$$

Для того чтобы выделить в (20) генераторы, определяющие группу внутренней симметрии системы (7), записанной в вещественной форме (1), (16), (17), поступим следующим образом. С помощью преобразования  $A^{-1}$  (19) переведем генераторы (20) в базис (16), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. Получим:

$$\begin{aligned} J^1 &= \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, & J^2 &= \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ J^3 &= \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, & J^4 &= \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ J^5 &= \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4, & J^6 &= \Gamma'_1 \Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2, \\ J^7 &= \Gamma'_2 \Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2, & J^8 &= \Gamma'_3 \Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2, \\ J^9 &= \Gamma'_4 \Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2, & J^{10} &= \Gamma'_{[2} \Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \\ J^{11} &= \Gamma'_{[3} \Gamma'_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, & J^{12} &= \Gamma'_{[1} \Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \\ J^{13} &= \Gamma'_{[1} \Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_4 \otimes I_4, & J^{14} &= \Gamma'_{[2} \Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4, \\ J^{15} &= \Gamma'_{[3} \Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_4 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Затем, используя определение (2), выражения (5), (22) для однопараметрических преобразований и условие, сформулированное в начале данного пункта, устанавливаем, какие из параметров  $\omega$  в (5) являются вещественными, а какие – мнимыми. И наконец, проверяем, для каких однопараметрических преобразований выполняется условие (6), и таким образом находим группу внутренней симметрии лагранжиана рассматриваемого дираковского поля с одновременной ее явной параметризацией.

Проверка показывает, что условию (6) удовлетворяют следующие 10 генераторов:

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5, \Gamma'_1 \Gamma'_5, \Gamma'_3 \Gamma'_5, \Gamma'_4 \Gamma'_5, \Gamma'_{[3} \Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1} \Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3} \Gamma'_{4]}, \quad (23)$$

которым соответствуют 6 вещественных ( $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{[31]}, \omega_{[14]}, \omega_{[34]}$ ) и 4 мнимых

$(\omega_5, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45})$  параметра. Для установления структуры группы, задаваемой генераторами (23) и соответствующими параметрами, выберем все параметры вещественными. При этом придем к генераторам

$$\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_5, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} \quad (24)$$

Здесь 6 генераторов  $(\Gamma'_1, \Gamma'_3, \Gamma'_4, i\Gamma'_1\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5, i\Gamma'_4\Gamma'_5)$  являются эрмитовскими и 4  $(i\Gamma'_5, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, i\Gamma'_{[1}\Gamma'_{5]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]})$  – антиэрмитовскими.

Таким образом, получаем группу внутренней симметрии, изоморфную группе  $SO(3,2)$ . Обнаруженное в данном подходе расширение симметрии по сравнению с ожидаемой группой  $SU(2)$  (или  $SO(3)$  в присоединенном представлении) в рамках релятивистской квантовой механики соответствует перемешиванию состояний с противоположными значениями энергии, в том числе и для решений из двух различных уравнений Дирака. Группа  $SO(3)$ , ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний из различных уравнений, содержится в  $SO(3,2)$  в качестве подгруппы и задается генераторами

$$\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}, \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}, \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} \quad (25)$$

### Внутренняя симметрия. Квантовый случай

Для того чтобы выяснить, сохраняется ли установленная выше  $SO(3,2)$ -симметрия системы (7) на квантовом уровне, необходимо проверить инвариантность перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения относительно соответствующих однопараметрических преобразований. С этой целью удобно перевести генераторы (24) из базиса (16), в котором они имеют вид (22), в базис

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \text{ – столбец,} \quad (26)$$

где  $\bar{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4 (i=1,2)$ . В результате получим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= -i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, & \Gamma'_3 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_4 &= -i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4, & i\Gamma'_5 &= -i\gamma_4 \otimes I_4, \\ i\Gamma'_1\Gamma'_5 &= -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, & i\Gamma'_3\Gamma'_5 &= -\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4, \\ i\Gamma'_4\Gamma'_5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4, & \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} &= -\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} &= \gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, & \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} &= \gamma_3\gamma_5 \otimes I_4. \end{aligned} \quad (27)$$

Затем разложим  $\psi_i$  и  $\bar{\psi}_i$  по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (7) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина  $s=1/2, -1/2$ :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_s a_{is} \psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+ \psi_{is}^{(-)}, \\ \bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^+ \bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is} \bar{\psi}_{is}^{(-)}. \end{aligned} \quad (28)$$

При квантовании коэффициенты разложения  $a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is}$  принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутиационные соотношения

$$\{a_{is}, a_{i's'}^+\} = \{b_{is}, b_{i's'}^+\} = \delta_{ii'} \delta_{ss'} \quad (29)$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (29) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (27), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе,



определяемом выражениями (8), (26), (27), операторы знака энергии  $\hat{\Gamma}_4$ , проекции спина  $\hat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$  и внутренней четности  $\hat{\Pi} = I_2 \otimes (\hat{\sigma}_3 \otimes I_4)$ , выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1), \quad (30)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1), \quad (31)$$

$$\hat{\Pi} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1). \quad (32)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (30) – (32), и проводя над ним (столбцом) преобразования (5), где в качестве  $J$  берутся по очереди генераторы (27), устанавливаем искомые трансформационные свойства этих операторов.

В результате для однопараметрического преобразования, задаваемого, например, генератором  $\Gamma'_1$ , получим:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega b_{2s}, & a'_{2s} &= a_{2s} + \omega b_{1s}, \\ (a'_{1s})^+ &= a_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+, & (a'_{2s})^+ &= a_{2s}^+ + \omega b_{1s}^+, \\ b'_{1s} &= b_{1s} - \omega a_{2s}, & b'_{2s} &= b_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (b'_{1s})^+ &= b_{1s}^+ - \omega a_{2s}^+, & (b'_{2s})^+ &= b_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулы (33), вычислим антикоммутирующую пару  $\{a'_{1,1/2}, (b'_{2,1/2})^+\}$ :

$$\{a'_{1,1/2}, (b'_{2,1/2})^+\} = \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+\} + \omega \{a_{1,1/2}, a_{1,1/2}^+\} + \omega \{b_{2,1/2}, b_{2,1/2}^+\} = \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+\} + 2\omega \neq \{a_{1,1/2}, b_{2,1/2}^+\}.$$

Таким образом, данный антикоммутирующую пару, а значит и в целом условия квантования (29), не инвариантны относительно однопараметрических преобразований с генератором  $\Gamma'_1$ .

В случае генератора  $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$  имеем:

$$\begin{aligned} a'_{1s} &= a_{1s} + \omega a_{2s}, & a'_{2s} &= a_{2s} - \omega a_{1s}, \\ (a'_{1s})^+ &= a_{1s}^+ + \omega a_{2s}^+, & (a'_{2s})^+ &= a_{2s}^+ - \omega a_{1s}^+, \\ b'_{1s} &= b_{1s} + \omega b_{2s}, & b'_{2s} &= b_{2s} - \omega b_{1s}, \\ (b'_{1s})^+ &= b_{1s}^+ + \omega b_{2s}^+, & (b'_{2s})^+ &= b_{2s}^+ - \omega b_{1s}^+. \end{aligned} \quad (34)$$

Прямая проверка показывает, что относительно преобразований (34) антикоммутирующие соотношения (29) инвариантны.

Расчеты, проведенные для всех остальных однопараметрических преобразований (5) с генераторами (27), показывают, что инвариантность условий квантования (29) имеет место еще для двух генераторов:  $\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]}$ ,  $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$ . Совместно с генератором  $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]}$  они образуют совпадающий с (24) набор генераторов, который ассоциируется с группой инвариантности  $SU(2)$  ( $SO(3,2)$ ) классического 8-компонентного дираковского поля в обычном подходе.

### Предельный переход к уравнению Дирака

Предлагаемый в настоящей работе подход распространяется на дираковские поля произвольной  $4n$ - размерности, в том числе и на одно уравнение Дирака. Правильные результаты для уравнения Дирака можно получить из вышеприведенных выражений путем вычеркивания во всех матрицах и генераторах строк и столбцов, соответствующих волновой функции  $\psi_2$ . Так, из 10 генераторов (24) группы  $SO(3,2)$  внутрен-

ней симметрии системы (7) остаются только три генератора:

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = i \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad J^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

получающиеся путем указанного предельного перехода из генераторов  $\Gamma'_3, i\Gamma'_5, i\Gamma'_3\Gamma'_5$ . Поскольку генераторы  $J^1$  и  $J^3$  являются эрмитовскими, а генератор  $J^2$  – антиэрмитовский, с учетом вещественности всех параметров приходим к выводу: лагранжева формулировка свободного классического уравнения Дирака обладает группой внутренней симметрии  $SO(2,1)$ . С физической точки зрения этот факт объясняется тем, что в отсутствие электромагнитного взаимодействия состояния частицы и античастицы являются неразличимыми.

Квантовая формулировка теории Дирака базируется на антикоммутиционных соотношениях

$$\{a_s, a_{s'}^+\} = \{b_s, b_{s'}^+\} = \delta_{ss'}. \quad (36)$$

В базисе

$$\Psi = (\psi, \bar{\psi}) \text{ – столбец} \quad (37)$$

операторы полного набора имеют следующий вид:

$$\hat{\Gamma}_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1), \quad (38)$$

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1). \quad (39)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в порядке, соответствующем выражениям (38), (39), и рассматривая, например, однопараметрическое преобразование с генератором  $J^3$ , получим следующий закон преобразования этих операторов:

$$\begin{aligned} a'_{1/2} &= a_{1/2} + \omega b_{1/2}, & a'_{-1/2} &= a_{-1/2} - \omega b_{-1/2}, \\ (a'_{1/2})' &= a_{1/2}^+ + \omega b_{1/2}^+, & (a'_{-1/2})' &= a_{-1/2}^+ - \omega b_{-1/2}^+, \\ b'_{1/2} &= b_{1/2} + \omega a_{1/2}, & b'_{-1/2} &= b_{-1/2} - \omega a_{-1/2}, \\ (b'_{1/2})' &= b_{1/2}^+ + \omega a_{1/2}^+, & (b'_{-1/2})' &= b_{-1/2}^+ - \omega a_{-1/2}^+. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь, используя (40), вычислим антикоммутант  $\{a'_{1/2}, (b'_{1/2})'\}$ :  $\{a'_{1/2}, (b'_{1/2})'\} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + \omega\{a_{1/2}, a_{1/2}^+\} + \omega\{b_{1/2}, b_{1/2}^+\} = \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\} + 2\omega \neq \{a_{1/2}, b_{1/2}^+\}$ . Этот результат означает, что данный антикоммутант, а значит и в целом условия квантования уравнения Дирака, не инвариантны относительно преобразования, задаваемого генератором  $J^3$ . Аналогичный вывод получается и для генератора  $J^2$ . Генератор  $J^1$  соответствует обычному фазовому преобразованию. Следовательно, квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БрГУ. – 2009. – № 2. – С. 46–51.
2. Стражев, В.И. Уравнение Дирака-Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко // Минск: изд-во БГУ. – 2007. – 196 с.
3. В.А. Плетюхов, В.И. Стражев / Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.

### *P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. On Internal Symmetry of Dirac Fields*

The internal symmetry of the 8-component real Dirac field in matrix approach has been investigated. The classical formulation of the theory has the internal symmetry group  $SO(3,2)$ . The quantum formulation has the internal symmetry group  $SO(3)$ .

УДК 535.8

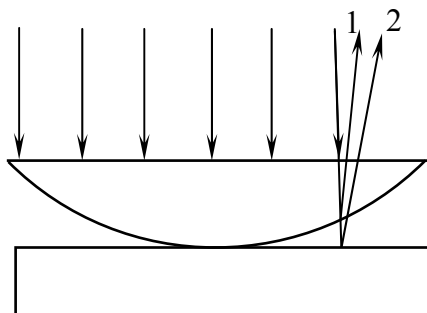
**В.М. Косарев**

## СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ КОГЕРЕНТНОСТИ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СВЕТА

В работе предлагается способ измерения длины когерентности квазимонохроматического света, основанный на измерении разности хода интерферирующих лучей до величины, при которой интерференционные полосы исчезают. В качестве измерительного устройства используется микроинтерферометр МИИ-4У4.2, изначально предназначенный для контроля качества обработки металлических поверхностей, близких к зеркальным.

Длина когерентности света является одним из основных его параметров. Если разность хода  $\Delta$  интерферирующих лучей меньше длины их когерентности  $D$ , то интерференционная картина наблюдается. Если  $\Delta > D$ , то интерференционной картины нет. При плавном изменении  $\Delta$  (например, путем перемещения одной из отражающих поверхностей) момент исчезновения интерференционных полос соответствует ситуации, когда  $\Delta = D$  [1]. Этим обстоятельством можно воспользоваться для измерения длины когерентности используемого света.

В литературе есть описание способа измерения  $D$ , основанного на измерении  $\Delta$  интерферирующих лучей до величины, при которой интерференционные полосы исчезают, и предназначенного для использования в лабораторном практикуме по общей физике [2].



**Рисунок 1 – Схема наблюдения интерференционной картины, используемой в [2]**

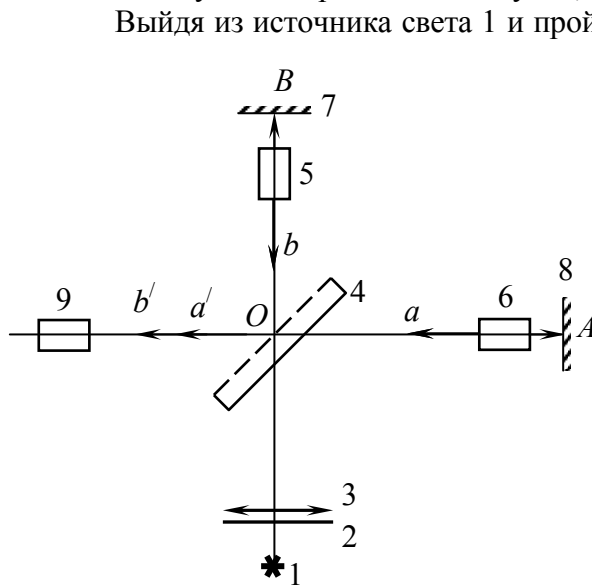
В нем с помощью биологического микроскопа наблюдают в отраженном свете интерференционную картину, возникающую при интерференции луча 1, отраженного от выпуклой поверхности линзы (см. рис. 1), и луча 2, отраженного от плоской поверхности стеклянной пластинки. Множество таких лучей из параллельного пучка, падающего сверху, формирует интерференционную картину, которую обычно называют «кольца Ньютона». Геометрическая разность хода интерферирующих лучей 1 и 2 определяется соответствующим удвоенным расстоянием от выпуклой поверхности линзы до плоской поверхности пластинки. Линза с помощью специального приспособления крепится к объективу микроскопа.

Разность хода интерферирующих лучей увеличивают путем подъема тубуса вместе с объективом (а значит, и вместе с линзой). При этом интерференционные кольца сбегают к центру интерференционной картины и исчезают там. С помощью микровинта, вращение которого приводит к перемещению тубуса, измеряют то максимальное перемещение линзы  $d$ , при котором исчезает последнее кольцо интерференционной картины. Величину длины когерентности  $D$  рассчитывают по формуле  $D = 2d$ .

Недостатками способа, предлагаемого в [2], являются: 1. Для его реализации необходима перестройка биологического микроскопа для наблюдения интерференционной картины в отраженном свете и для осуществления перемещения линзы вместе с тубусом. 2. Способ измерения длины когерентности квазимонохроматического света путем изменения разности хода интерферирующих лучей имеет несколько разновидностей. В учебной лаборатории желательно показать хотя бы некоторые из них. Способ, предлагаемый в [2], не дает такой возможности.

В предлагаемом нами способе измерения длины когерентности квазимонохроматического света, основанного на измерении изменения разности хода интерферирующих лучей до величины, при которой интерференционные полосы исчезают, в качестве измерительного устройства используется микроинтерферометр МИИ-4У4.2, изначально предназначенный для контроля качества обработки металлических поверхностей, близких к зеркальным. Причем для измерения длины когерентности он не требует никаких переделок. В качестве квазимонохроматического света используется свет лампы накаливания микроинтерферометра, пропущенный через встроенный интерференционный светофильтр.

Оптическая схема микроинтерферометра представлена на рисунке 2, где показан ход одного луча из параллельного пучка, падающего на светоделительную пластинку 4.



**Рисунок 2 – Оптическая схема микроинтерферометра**

Только в том случае, если слева от пластинки 4 встречаются «цуги-братья», будет формироваться устойчивая интерференционная картина, которую наблюдают через окуляр 9. Следовательно, разность хода  $\Delta = 2(OA - OB)$ , а значит, отставание (или опережение) одного цуга  $a$  относительно другого цуга  $b$ , не должна превышать длину цуга  $D$ , которая и есть длина когерентности, т.е.  $\Delta \leq D$  (1). Это обязательное условие формирования устойчивой интерференционной картины.

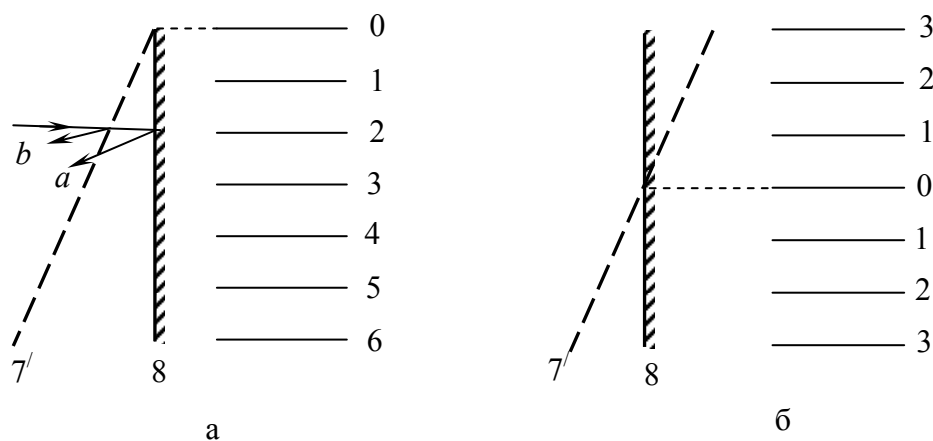
Для сравнения путей, пройденных цугами  $a$  и  $b$  после светоделительного слоя 4 до их встречи слева от пластинки 4, будем откладывать пути для лучей типа  $b$  вдоль направления  $OA$ . Фактически таким способом мы строим мнимое изображение исследуемого зеркала 7 в полупрозрачном слое 4. Т.е. можно считать, что лучи  $a$  отражаются от эталонного зеркала 8, а лучи  $b$  – от изображения  $7'$  исследуемого зеркала (рисунок 3а). Т.е. мы свели задачу к интерференции светового пучка на воздушной прослойке между 8 и  $7'$ , которая примет форму клина, если слегка повернуть исследуемое зеркало 7. В этом случае, если световой пучок, падающий на светоделительную пластинку 4, параллельный, наблюдаются так называемые полосы равной толщины, которые имеют форму прямых линий, параллельных ребру клина. Расстояние между полосами  $l$  (для нашего случая нормального падения светового пучка на клин и когда он воздушный) равно:

Выйдя из источника света 1 и пройдя через интерференционный светофильтр 2 и собирающую линзу 3, формирующую параллельный пучок, луч света попадает на полупрозрачный слой светоделительной пластинки 4, где каждый волновой цуг светового пучка делится на два совершенно одинаковых. Один из них  $a$  через объектив 6 попадает на эталонное зеркало 8, отражается от него, идет обратно к светоделительной пластинке 4 и проходит через нее. Второй цуг  $b$  через объектив 5 попадает на исследуемое зеркало 7, отражается от него, затем отражается от пластинки 4 и следует за цугом  $a$ . Таким образом, слева от светоделительной пластинки 4 накладываются волны, которые при определенных условиях могут быть когерентными и формировать интерференционную картину. Как показывает анализ [1], когерентными будут только два цуга, происходящие из одного.

$$l = \frac{\lambda}{2\alpha}, \tag{2}$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $\alpha$  – угол клина [1].

Если перемещать изображение  $7'$  параллельно самому себе (в микроинтерферометре это делается путем перемещения объектива 5), то интерференционная картина



**Рисунок 3 – Возникновение интерференционной картины в микроинтерферометре при двух положениях изображения  $7'$  исследуемого зеркала**

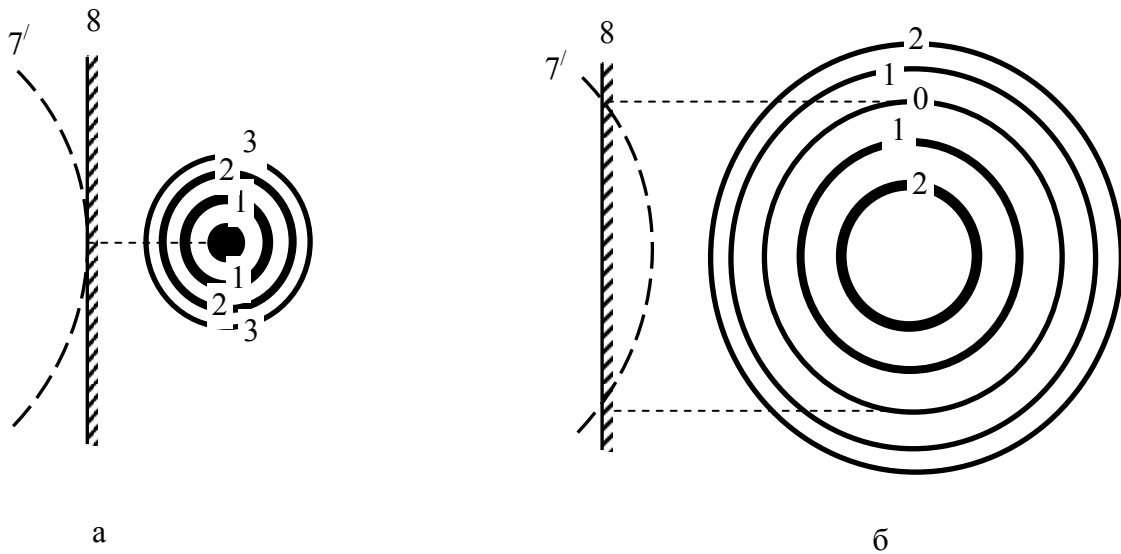
будет смещаться, причем число полос  $N$ , на которое сместится интерференционная картина, и перемещение объектива 5 (а значит, и изображения  $7'$ )  $h$  связаны формулой [1]:

$$h = \frac{\lambda}{2} N \tag{3}$$

На рисунке 3 показаны два положения эталонного зеркала 8 и изображения  $7'$ , а справа – схематически положение интерференционных полос с соответствующими порядками интерференции. Максимум нулевого порядка всегда располагается там, где пересекаются 8 и  $7'$ . В случае использования белого света он всегда белый, четкий. Максимумы остальных порядков окрашенные, т.к. их положения зависят от длины волны  $\lambda$ .

Если вместо исследуемого зеркала 7 использовать выпуклую поверхность сферической линзы, то мы будем наблюдать кольца Ньютона. На рисунке 4 представлены два положения изображения  $7'$  выпуклой сферической поверхности линзы относительно эталонного зеркала 8 и соответствующие интерференционные картины.

В случае а) максимум нулевого порядка расположен в центре интерференционной картины, где изображение сферической поверхности линзы касается эталонного зеркала. Если объективом 5 (рисунок 2) удалять изображение сферической поверхности  $7'$  от зеркала 8, кольца начнут сбегаться к центру картины (похожая ситуация реализуется в работе [2]). И когда удвоенное кратчайшее расстояние от изображения поверхности линзы до эталонного зеркала станет больше или равным длине когерентности, кольца полностью исчезнут. Если изображение сферической поверхности смещать вправо, кольцо нулевого порядка будет расширяться, а кольца более высоких порядков будут следовать за ним (рисунок 4, б).

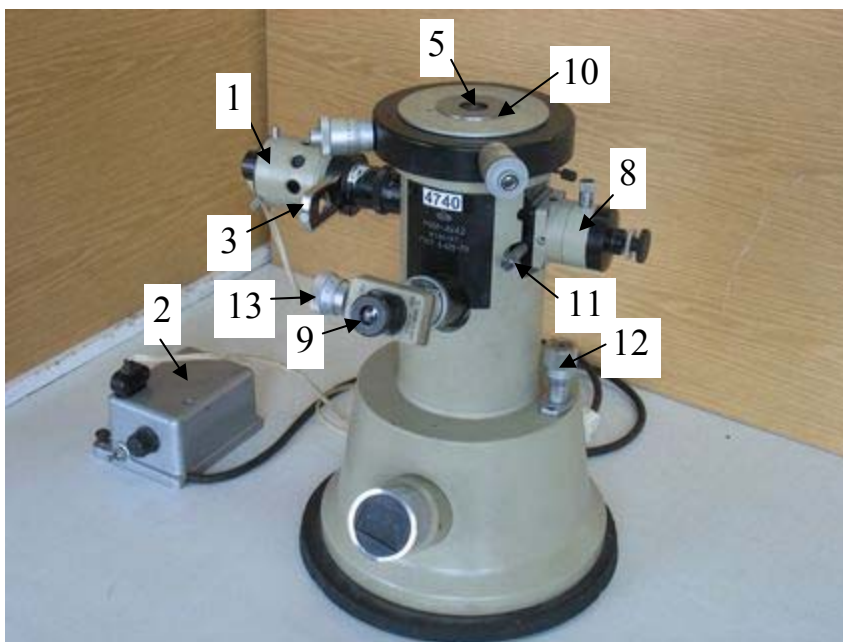


**Рисунок 4 – Возникновение интерференционной картины в микроинтерферометре при двух положениях изображения 7' исследуемой линзы**

Микроинтерферометр МИИ-4У4.2 изображен на фото (рисунок 5). 1 – это кожух лампочки накаливания, 2 – ее блок питания. Для получения квазимонохроматического света используются интерференционные светофильтры, вставленные в пластину 3. В зависимости от положения этой пластины свет проходит либо через зеленый, либо через желтый светофильтр, либо мимо них. Спектры пропускания светофильтров изображены на рис. 6, где по горизонтали отложена длина волны света  $\lambda$  в нм, а по вертикали – коэффициент пропускания  $\tau = \frac{I_\lambda}{I_{0\lambda}}$ , где  $I_{0\lambda}$  – интенсивность падающего на свето-

фильтр света,  $I_\lambda$  – прошедшего через него. Исследуемое зеркало (либо линза) кладется на столик 10. С помощью ручки 11 можно опускать шторку, расположенную внутри, перекрывая тем самым световой пучок, идущий к эталонному зеркалу 8. Тогда микроинтерферометр работает как обычный отражательный микроскоп. При открытой шторке наблюдается интерференционная картина через окуляр 9, совмещенный с измерительной головкой типа МПВ-1-15×, позволяющий производить измерения деталей интерференционной картины (например, расстояния между интерференционными полосами). Цена деления микровинта измерительной головки  $0,3 \cdot 10^{-6}$  м. Перемещение объекта 5 осуществляется вращением микровинта 12, цена деления которого  $3 \cdot 10^{-6}$  м.

Как уже указывалось, способ измерения длины когерентности квазимонохроматического света, основанного на измерении изменения разности хода интерферирующих лучей до момента исчезновения интерференционных полос, имеет несколько разновидностей. Это связано с тем, что интерференционную картину можно наблюдать на воздушной прослойке между двумя плоскими поверхностями (воздушный клин), между плоской и сферической поверхностью (кольца Ньютона). Кроме того, наблюдая интерференционную картину на воздушном клине, ситуацию, когда  $\Delta = D$  (т.е. когда интерференционные полосы в определенном месте клина исчезают), можно оценивать либо путем перемещения одной из поверхностей, либо считая число наблюдаемых интерференционных полос.



**Рисунок 5 – Фотография микроинтерферометра МІИ-4У4.2**

1. Кладем на столик 10 плоское зеркало. Пластину 3 ставим в среднее положение; в этом случае интерферометр работает в белом свете. Ручкой 11 перекрываем пучок света, идущий к эталонному зеркалу. Интерферометр работает как обычный отражательный микроскоп. Вращением микровинта 12 добиваемся, чтобы в окуляр 9 четко была видна поверхность зеркала, лежащего на столике. Ручкой 11 открываем световой пучок, идущий к эталонному зеркалу 8. В окуляре видны интерференционные полосы в виде прямых линий, причем максимум нулевого порядка резко выделяется своей четкостью и отсутствием окраски. Вращением микровинта 12 перемещаем максимум нулевого порядка в центр поля зрения окуляра, записываем показания микровинта  $d$ . Вращением микровинта на измерительной головке окуляра наводим на максимум нулевого порядка перекрестие, видимое в поле зрения окуляра. Пластиной 3 вводим в световой пучок желтый интерференционный светофильтр. При этом количество интерференционных полос резко увеличивается, полосы становятся монохромными. Медленно вращаем микровинт 12. Все полосы начинают перемещаться. Следим за контрастностью тех полос, которые находятся в районе перекрестия, т.е. где находился максимум нулевого порядка. Вращаем микровинт 12 до тех пор, пока контрастность полос в районе перекрестия не станет нулевой – полосы исчезнут. Делаем отсчет  $d_2$  по микровинту 12. Величину длины когерентности  $D$  находим по формуле  $D = 2(d_2 - d_1)$ .

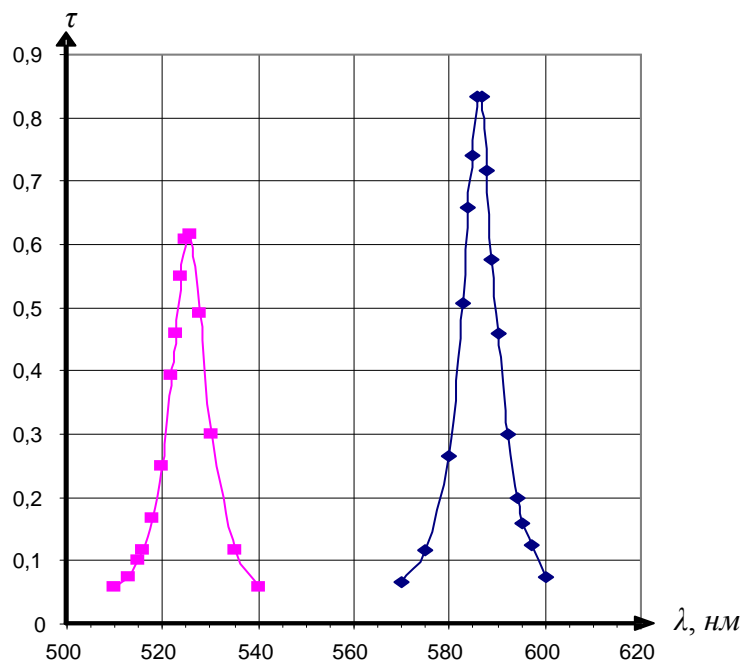


Рисунок 6 – Спектры пропускания желтого и зеленого интерференционных светофильтров

2. На столике 10 по-прежнему плоское зеркало. Пластину 3 ставим в среднее положение, интерферометр работает в белом свете. Вращением микровинта 12 перемещаем максимум нулевого порядка на край поля зрения окуляра. Вращением микровинта 13 на измерительной головке окуляра совмещаем перекрестие с максимумом нулевого порядка. Пластиной 3 вводим в световой пучок желтый интерференционный светофильтр. Последовательно наводя перекрестие окуляра (путем вращения микровинта 13 на измерительной головке) на каждую интерференционную полосу, считаем число  $N$  видимых полос. Длина когерентности определяется по формуле  $D = \lambda N$ .

3. На столик 10 вместо плоского зеркала кладем линзу выпуклой поверхностью вниз. Радиус кривизны этой поверхности  $1,1 \cdot 10^{-2}$  м. Работая в белом свете, наблюдаем интерференционную картину «кольца Ньютона». Вращением микровинта 12 добиваемся, чтобы в центре картины находился максимум нулевого порядка. Делаем отсчет  $d_1$ . Это соответствует ситуации, изображенной на рисунке 4а. Пластиной 3 вводим в световой пучок интерференционный светофильтр. Вращаем микровинт 12. Кольца начинают сбегаться к центру картинке. Вращаем микровинт до тех пор, пока в центре картины не исчезнет последнее видимое кольцо. Делаем отсчет по микровинту  $d_2$ . Величину длины когерентности  $D$  находим по формуле  $D = 2(d_2 - d_1)$ .

Все измерения, описанные в пунктах 1 – 3, можно проводить и с зеленым светофильтром, беря соответствующие значения  $\lambda_3$  ( $\lambda_{жс} = 586$  нм,  $\lambda_3 = 526$  нм).

С точки зрения величины погрешности измерений, предпочтение следует отдать варианту 2, т.к. в нем присутствует только случайная погрешность, связанная с определением места в интерференционной картине, где ее контрастность падает до нуля (полосы исчезают). В вариантах 1 и 3, кроме аналогичной случайной ошибки, присутствует систематическая погрешность, связанная с ценой деления микровинта 12, по которому делаются отсчеты перемещения объектива. При количестве измерений равном 10 и заданной надежности 0,9 это увеличивает погрешность примерно в два раза.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие : Для вузов. Т. IV. Оптика – 3-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2005. – 792 с.
2. Лабораторный практикум по общей и экспериментальной физике : Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.Н. Александров, С.В. Бирюков, И.А. Васильева и др.; под ред. Е.М. Гершензона и А.Н. Мансурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 464

***V. Kosarev. The Way of Measurement of Length of Coherence of Quasi-monochromatic Light***

The way of measurement of length of coherence of quasi-monochromatic light, based on measurement of a difference of a course interference beams up to size at which interference fringes disappear is offered in the article. As a measuring device microinterferometer МИ-4У4.2 is used, initially intended for quality assurance of processing metal surface, close to mirror.

УДК 539.12

*М.И. Левчук, А.И. Львов*

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ В КОМПТОНОВСКОМ РАССЕЙНИИ НА ДЕЙТРОНЕ ПРИ ЭНЕРГИЯХ НИЖЕ ПИОННОГО ПОРОГА

Исследовано комптоновское рассеяние фотонов на дейтроне при энергиях ниже порога фоторождения пионов с учетом поляризаций начальных частиц. Теоретический подход основан на использовании нерелятивистской версии потенциала однобозонного обмена для  $NN$ -взаимодействия. Изучена чувствительность теоретических предсказаний к величинам изоскалярных электрической ( $\alpha$ ) и магнитной ( $\beta$ ) поляризуемостей нуклона. Показано, что асимметрия  $\Sigma$  рассеяния линейно-поляризованных фотонов, а также векторная,  $T_{11}$ , и тензорная,  $T_{22}$ , асимметрии рассеяния на поляризованных дейтронах слабо зависят от величин  $\alpha$  и  $\beta$ . В то же время тензорные асимметрии  $T_{20}$  и  $T_{21}$  проявляют заметную чувствительность к поляризуемостям нуклонов в области энергий вблизи 100 МэВ, и их измерение может служить одним из методов получения информации о поляризуемостях.

### Введение

Упругое (или комптоновское) рассеяние фотонов на составной системе позволяет получать важную информацию о внутренней структуре такой системы, в частности об ее дипольных электрической ( $\alpha$ ) и магнитной ( $\beta$ ) поляризуемостях. Поляризуемости характеризуют способность системы приобретать наведенный электрический и магнитный дипольные моменты во внешнем электромагнитном поле. Они входят в низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния во втором порядке по энергии фотона [1].

Поляризуемости протона  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  были измерены в серии экспериментов по  $\gamma p$ -рассеянию при энергиях ниже порога фоторождения пионов, проведенных с 1960 по 2001 годы. Усредненные значения результатов этих измерений приведены в обзоре [2] и составляют:

$$\alpha_p = 12.0 \pm 0.6, \quad \beta_p = 1.9 \pm 0.5 \quad (1)$$

в единицах  $10^{-4}$  Фм<sup>3</sup>, которые будем использовать в дальнейшем для поляризуемостей.

Поскольку свободные, стабильные нейтронные мишени отсутствуют, то аналогичные эксперименты по  $\gamma n$ -рассеянию невозможны. Поэтому поляризуемости нейтрона можно извлекать только из данных по рассеянию фотонов на нейтронах, связанных в ядрах. Очевидно, что наиболее подходящим для таких целей является простейшая система – дейтрон, состоящая из протона и нейтрона с энергией связи  $E_b = 2.2246$  МэВ.

В последнее время были развиты различные подходы к теоретическому описанию комптоновского рассеяния на дейтроне [3–10]. Часть из них, обсуждаемая, например, в работах [3–6], основана на использовании реалистических феноменологических потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия. В других анализах [7–10] применялись методы эффективных полевых теорий, в частности, киральной полевой теории.

Ранее в рамках модели [6] были проанализированы результаты имеющихся экспериментов [11–13] по измерению дифференциального сечения  $\gamma d$ -рассеяния и получены следующие значения поляризуемостей нейтрона (см., обзор [2]):

$$\alpha_n = 8.8 \pm 2.4 \pm 3.0, \quad \beta_n = 6.5 \pm 2.4 \pm 3.0, \quad (2)$$

которые имеют заметно бóльшие неопределенности, чем аналогичные значения для

протона (1).

В последнее время активно обсуждаются возможности проведения  $\gamma d$ -экспериментов с поляризованными частицами. Пучок поляризованных фотонов имеется на установке  $\text{HI} \gamma \text{S}$  (университет г. Дюка, США), и аналогичный скоро будет создан в  $\text{MAX-Lab}$  (Лундский университет, Швеция). Кроме того, на  $\text{HI} \gamma \text{S}$  имеется и поляризованная дейтронная мишень. Учитывая, что в планах исследований указанных лабораторий значится изучение комптоновского рассеяния на дейтроне, представляется своевременным проведение теоретического анализа поляризационных явлений в  $\gamma d$ -рассеянии и возможности извлечения из таких экспериментов информации о поляризуемостях нейтрона. Такой анализ и проведен в настоящей работе в рамках подхода [6].

Сделаем здесь два важных замечания. Во-первых, из-за того, что амплитуда  $\gamma d$ -рассеяния зависит только от изоскалярных комбинаций поляризуемостей протона и нейтрона:

$$\alpha = \frac{\alpha_p + \alpha_n}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_p + \beta_n}{2}, \quad (3)$$

только их и можно извлечь из экспериментальных данных. Далее следует использовать протонные значения (1) для нахождения  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ . Поскольку эти значения весьма точные, то такая процедура не вносит больших погрешностей в  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ .

Во-вторых, имеется известное правило сумм Балдина для суммы поляризуемостей:

$$\alpha + \beta = \int_{\omega_0}^{\infty} \sigma_{tot}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi^2 \omega^2}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_{tot}(\omega) = \frac{1}{2} [\sigma_{tot}^p(\omega) + \sigma_{tot}^n(\omega)]$  – усредненное по изоспину полное сечение фотопоглощения на нуклоне, а  $\omega_0$  означает энергию порога фоторождения пионов на нуклонах. Дисперсионный интеграл был вычислен в [6] и составляет  $\alpha + \beta = 14.6 \pm 0.5$ . Таким образом, единственной величиной, которую нужно извлечь из экспериментов, остается разность поляризуемостей  $\alpha - \beta$ . Отметим, что анализ амплитуды комптоновского рассеяния на частице с произвольным спином показывает, что такая амплитуда при задних углах рассеяния зависит именно от  $\alpha - \beta$  [1].

### Кинематика и определения поляризационных наблюдаемых

Расчеты амплитуды реакции  $\gamma(\omega_B, \vec{k}) + d(E_d, \vec{p}_d) \rightarrow \gamma'(\omega'_B, \vec{k}') + d'(E'_d, \vec{p}'_d)$  будем проводить в системе Брейта, в которой имеются следующие соотношения между импульсами и энергиями частиц:

$$\vec{p}_d = -\vec{p}'_d = \frac{\vec{k}' - \vec{k}}{2}, \quad E_d = E'_d = \sqrt{M_d^2 - \frac{t}{4}}, \quad \omega_B = \omega'_B. \quad (5)$$

Здесь  $M_d = 2M_N - E_b$  есть масса дейтрона ( $M_N = 938.9$  МэВ – масса нуклона) и  $t = -(\vec{k}' - \vec{k})^2$ . Отметим следующие полезные соотношения между энергиями фотона и углами рассеяния в лабораторной системе  $(E_\gamma, \Theta_L)$ , системе центра масс  $(\omega, \Theta)$  и системе Брейта  $(\omega_B, \Theta_B)$ :

$$t = -2\omega^2(1 - \cos \Theta) = -2\omega_B^2(1 - \cos \Theta_B),$$

$$\omega W = M_d E_\gamma, \quad \omega_B E_d = M_d E_\gamma + \frac{t}{4}, \quad W = \sqrt{M_d^2 + 2M_d E_\gamma}. \quad (6)$$

Амплитуда  $\gamma d$ -рассеяния  $\langle \lambda' m' | T | \lambda m \rangle$  зависит от спиральностей начального,  $\lambda$ , и конечного,  $\lambda'$ , фотонов, а также проекций спинов начального и конечного дейтронов ( $m$  и  $m'$ , соответственно) на ось  $z$ , выбранную вдоль импульса начального фотона  $\vec{k}$ .

В данной работе мы будем изучать случай, когда поляризована только одна из частиц – фотон или дейтрон. Дифференциальное сечение реакции имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} & \left[ 1 - P_\gamma^l \cos(2\phi) \Sigma + \hat{t}_{10} \frac{\sin \Theta_d \sin \varphi_d}{\sqrt{2}} T_{11} + \right. \\ & \left. + \hat{t}_{20} \left( \frac{3 \cos^2 \Theta_d - 1}{2} T_{20} + \sqrt{\frac{3}{8}} \sin 2\Theta_d \cos \varphi_d T_{21} + \sqrt{\frac{3}{8}} \sin^2 \Theta_d \cos 2\varphi_d T_{22} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $d\sigma_0/d\Omega$  – сечение реакции в случае неполяризованных частиц.  $P_\gamma^l$  означает степень линейной поляризации (она определяется свойствами конкретной экспериментальной установки), а  $\phi$  – это угол между вектором линейной поляризации фотона и плоскостью реакции  $xz$ , образуемой векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ . При  $\phi = 0$  (поляризация вдоль оси  $x$ ) или  $\phi = 90^\circ$  (поляризация вдоль оси  $y \parallel \vec{k} \times \vec{k}'$ ) мы имеем дело с фотонами, поляризованными параллельно или перпендикулярно плоскости реакции, соответственно. Тогда, полагая  $P_\gamma^l = 1$ , получаем из (7), что асимметрия рассеяния фотонов  $\Sigma$  есть

$$\Sigma = \frac{d\sigma^\perp - d\sigma^\parallel}{d\sigma^\perp + d\sigma^\parallel}, \quad (8)$$

где  $d\sigma^\perp$  и  $d\sigma^\parallel$  – дифференциальные сечения реакции рассеяния фотонов, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости реакции, соответственно.

Асимметрия  $\Sigma$  выражается через парциальные амплитуды реакции соотношением:

$$\Sigma = \frac{1}{f} 2 \operatorname{Re} \sum_{\lambda' m' m} \langle \lambda' m' | T | +1m \rangle \langle \lambda' m' | T | -1m \rangle^*, \quad (9)$$

где введено обозначение

$$f = \sum_{\lambda' m' m} |\langle \lambda' m' | T | \lambda m \rangle|^2. \quad (10)$$

Отметим, что часто при рассмотрении различных процессов с поляризованным пучком фотонов используется знак  $+$  перед вторым слагаемым в правой части (7). При этом, соответственно, изменятся и знаки правых частей выражений типа (8) и (9).

В выражении (7)  $\hat{t}_{10}$  и  $\hat{t}_{20}$  – это параметры векторной и тензорной поляризаций дейтрона, которые также определяются свойствами конкретной экспериментальной установки. Они имеют вид:

$$\hat{t}_{10} = \sqrt{\frac{3}{2}} (w_{+1} - w_{-1}), \quad (11)$$

$$\hat{t}_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_{+1} + w_{-1} - 2w_0). \quad (12)$$

Здесь  $w_{m_d}$  есть заселенность состояния дейтрона с проекцией спина  $m_d$  на ось ориентации  $\vec{d}$ , которая определяется углами  $\Theta_d$  и  $\varphi_d$  в выбранной системе координат.

Векторная  $T_{11}$  и тензорные  $T_{2M}$  асимметрии выражаются через амплитуды реакции следующим образом (см., например, [16]):

$$T_{11} = \frac{1}{f} \sqrt{6} \operatorname{Im} \sum_{\lambda'\lambda m'} (\langle \lambda' m' | T | \lambda + 1 \rangle - \langle \lambda' m' | T | \lambda - 1 \rangle) \langle \lambda' m' | T | \lambda 0 \rangle^*, \quad (13)$$

$$T_{20} = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda'\lambda m'} (|\langle \lambda' m' | T | \lambda - 1 \rangle|^2 + |\langle \lambda' m' | T | \lambda + 1 \rangle|^2 - 2 |\langle \lambda' m' | T | \lambda 0 \rangle|^2), \quad (14)$$

$$T_{21} = \frac{1}{f} \sqrt{6} \operatorname{Re} \sum_{\lambda'\lambda m'} (\langle \lambda' m' | T | \lambda - 1 \rangle - \langle \lambda' m' | T | \lambda + 1 \rangle) \langle \lambda' m' | T | \lambda 0 \rangle^*, \quad (15)$$

$$T_{22} = \frac{1}{f} 2\sqrt{3} \operatorname{Re} \sum_{\lambda'\lambda m'} \langle \lambda' m' | T | \lambda - 1 \rangle \langle \lambda' m' | T | \lambda + 1 \rangle^*. \quad (16)$$

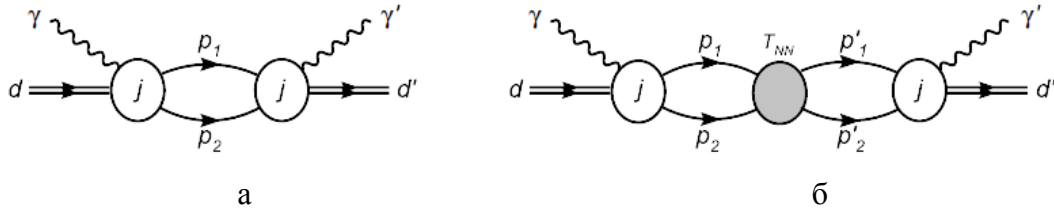
### Теоретическая модель реакции

Теоретический подход основан на использовании нерелятивистской версии потенциала однобозонного обмена для  $NN$ -взаимодействия. Поскольку он подробно описан в работе [6], то мы приведем ниже только некоторые детали расчетов.

Два типа диаграмм дают вклады в амплитуду реакции. Первый из них – это резонансные диаграммы. Физически они соответствуют механизму, когда дейтрон, поглотив начальный фотон, переходит в возбужденное  $np$ -состояние, которое затем, излучив конечный фотон, возвращается в основное дейтронное состояние. Поскольку  $np$ -пропагатор  $G(E) = (E - H + i0)^{-1}$  может быть представлен в виде

$$G(E) = G_0(E) + G_0(E) T_{NN}(E) G_0(E), \quad (17)$$

где  $G_0(E) = (E - H_0 + i0)^{-1}$  – пропагатор свободных нуклонов, а  $T_{NN}(E)$  – немассовая амплитуда  $NN$ -рассеяния, то резонансная амплитуда разбивается на две части: без  $NN$ -перерассеяния в промежуточном состоянии и с перерассеянием. Диаграммное представление указанных механизмов приведено на рис. 1.



**Рисунок 1 – Резонансные вклады без  $NN$ -перерассеяния в промежуточном состоянии (а) и с перерассеянием (б). Перекрестные диаграммы не показаны**

Символ  $j$  на рис. 1 означает оператор электромагнитного тока. Форма этого оператора должна быть согласована с гамильтонианом  $NN$ -взаимодействия  $H$ , т. е. удовлетворять условию калибровочной инвариантности

$$[j_0^{[1]}(\vec{x}), H] = -i\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = -i\vec{\nabla} \cdot [\vec{j}^{[1]}(\vec{x}) + \vec{j}^{[2]}(\vec{x})], \quad (18)$$

где  $\vec{j}^{[1]}(\vec{x})$  и  $\vec{j}^{[2]}(\vec{x})$  – одно- и двухчастичные операторы токов. Последний часто называют мезонным обменным током (МОТ). Предполагается, что зарядовая плотность  $j_0(\vec{x})$  не изменяется потенциалом  $NN$ -взаимодействия  $V$  (теорема Зигерта), так что  $j_0(\vec{x})$  совпадает с одночастичной зарядовой плотностью двух нуклонов  $i = 1, 2$ :

$$j_0(\vec{x}) = j_0^{[1]}(\vec{x}) = \sum_{i=1,2} eZ_i \delta(\vec{x} - \vec{r}_i), \quad Z_i = \frac{1 + \tau_i^z}{2}. \quad (19)$$

Одночастичный оператор  $j^{[1]}$  имеет следующий вид в импульсном пространстве [6]:

$$\vec{j}^{[1]}(\vec{k}; \vec{p}, \vec{p}') = -\frac{eZ}{2M_N}(\vec{p} + \vec{p}') - \frac{e}{2M_N}(Z + \kappa)i\omega \vec{\sigma} \times \vec{k} + \frac{e}{8M_N^2}(Z + 2\kappa)i\omega \vec{\sigma} \times (\vec{p} + \vec{p}'). \quad (20)$$

Два первых слагаемых в правой части (20) описывают электромагнитное взаимодействие частицы со спином  $1/2$ , массой  $M_N$ , зарядом  $eZ$  и аномальным магнитным моментом  $\kappa$ . Последний член в (20) – это спин-орбитальная часть тока. Она не учитывалась во многих расчетах [5; 7–10]. Но, как показано в [6], хотя этот ток и является релятивистской поправкой  $\sim (\omega p) / M_N^2$ , его вклад в наблюдаемые, тем не менее оказывается очень важным даже при энергии ниже 100 МэВ.

В практических расчетах нами были использованы нерелятивистские версии боннского потенциала однобозонного обмена (ОВЕР) [14; 15]. Оператор двухчастичного тока  $\vec{j}^{[2]}$ , согласованный с этими потенциалами, может быть получен из диаграммного представления, показанного на рис. 2. Этот ток является модельно-зависимым в том смысле, что его вид определяется потенциалом  $NN$ -взаимодействия, и эта связь задается уравнением непрерывности (18). Явные выражения для  $\vec{j}^{[2]}$  приведены в работах [6; 16].

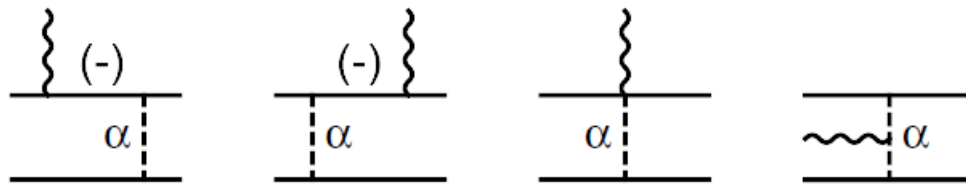


Рисунок 2 – Диаграммное представление потенциально-зависимой части оператора  $\vec{j}^{[2]}$ . Символ  $\alpha$  означает различные мезонные обмены

Существуют также вклады в  $\vec{j}^{[2]}$ , форма которых не задается уравнением непрерывности (18). Это так называемые модельно-зависимые МОТ. Их диаграммное представление показано на рис. 3. Основной вклад в амплитуду реакции дают модельно-зависимые МОТ, связанные с возбуждением  $\Delta$ -изобары.

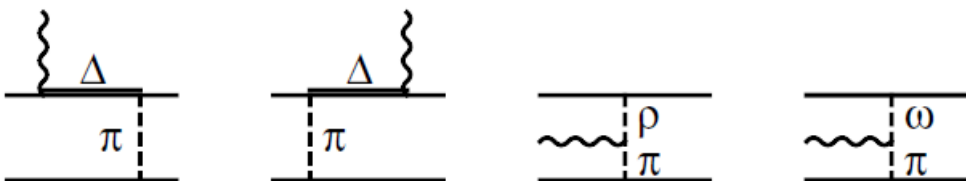


Рисунок 3 – Диаграммное представление потенциально-независимой части оператора  $\vec{j}^{[2]}$

Сегалльная амплитуда, в отличие от резонансной, отвечает процессу, при котором поглощение и излучение фотона происходит в один и тот же момент времени. Как и в случае оператора тока  $\vec{j}$ , форма оператора сегалла  $S$  зависит от гамильтониана  $H$ . Соответствующее условие калибровочной инвариантности имеет вид:

$$[j_0^{[1]}(\vec{x}), j_l(\vec{y})] = i \frac{\partial S_{kl}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial x_k}. \quad (21)$$

Оператор  $S$  также может быть разбит на одночастичную,  $S^{[1]}$ , и двухчастичную,  $S^{[2]}$ , части. Первой из них отвечает диаграммное представление, показанное на рис. 4.

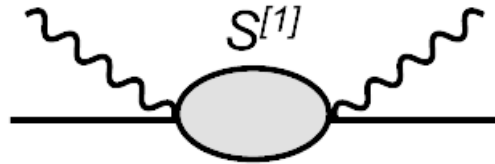


Рисунок 4 – Диаграммное представление одночастичного сегалла  $S^{[1]}$

Оператор  $S^{[1]}$  имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{\mu} \varepsilon^{\nu} S_{\mu\nu}^{[1]}(-k', k) = & -\frac{e^2 Z^2}{M_N} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'^* + \frac{e^2 Z}{4M_N^2} (Z + 2\kappa)(\omega + \omega') i\vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}'^* \times \vec{\varepsilon} + \\ & + 4\pi\omega\omega'(\alpha_N + \delta\alpha_0) \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'^* + 4\pi\omega\omega'\beta_N \vec{s} \cdot \vec{s}'^* + \varepsilon'^{\mu} \varepsilon^{\nu} \delta S_{\mu\nu}^{[1]}(-k', k). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\varepsilon}'$  – векторы поляризации начального и конечного фотонов соответственно:  $\vec{s} = \vec{k} \times \vec{\varepsilon}$  и  $\vec{s}' = \vec{k}' \times \vec{\varepsilon}'$ .  $\delta\alpha_0$  – есть релятивистская поправка к электрической поляризуемости  $\alpha$ . Последний член содержит вклады от поляризуемостей более высоких порядков. Из выражения (22) видно, что поляризуемости нуклонов  $\alpha_N$  и  $\beta_N$  входят в качестве параметров именно в  $S^{[1]}$ .

Наконец, явный вид оператора двухчастичного сегалла  $S^{[2]}$  может быть получен из его диаграммного представления на рис. 5. Соответствующие выражения приведены в [6].

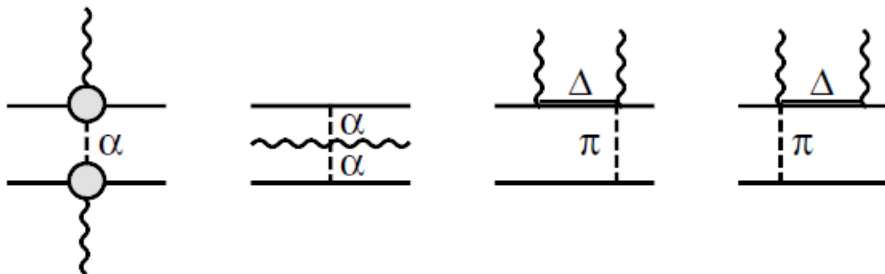


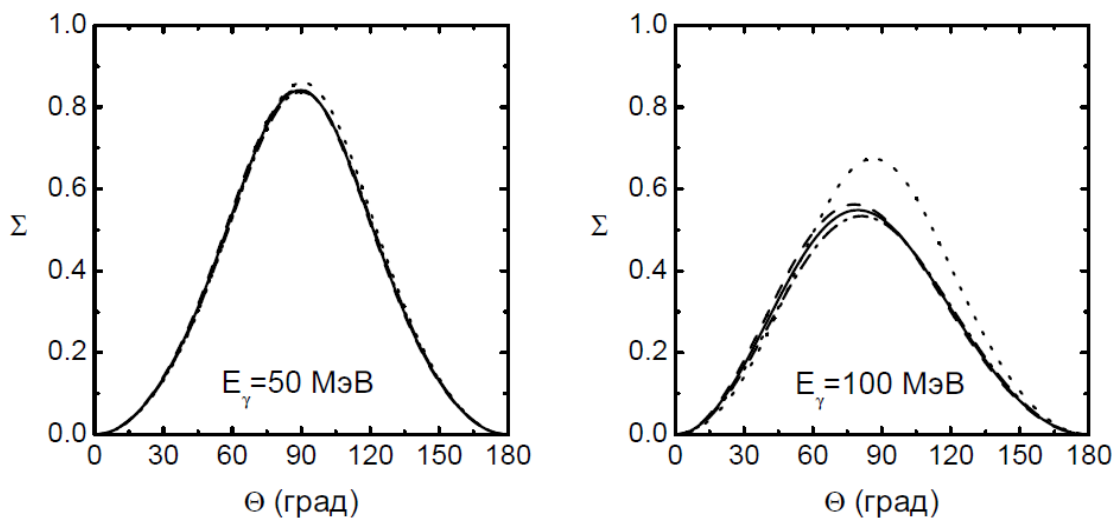
Рисунок 5 – Диаграммное представление двухчастичного сегалла  $S^{[2]}$

Описанная в этом разделе модель была использована в [6] для анализа экспериментальных данных работ [11–13] по дифференциальному сечению рассеяния неполяризованных частиц при энергиях в области от 55 до 94 МэВ. В данной работе мы применим ее для случая реакции с поляризованными фотонами и дейтронами.

### Результаты и обсуждение

Начнем обсуждение с асимметрии рассеяния линейно-поляризованных фотонов  $\Sigma$ . На рис. 6 показана угловая зависимость  $\Sigma$  при энергиях 50 и 100 МэВ. Можно видеть, что при 50 МэВ учет поляризуемостей практически не изменяет величину асимметрии. С ростом энергии эффект поляризуемостей заметно увеличивается. Однако даже при 100 МэВ имеется только весьма слабая чувствительность  $\Sigma$  к величине  $\alpha - \beta$  (мы варьируем ее в пределах  $9 \pm 3$ , поскольку именно эти значения лежат в области теоретических предсказаний). Таким образом, можно сделать вывод о том, что

измерение асимметрии  $\Sigma$  вряд ли целесообразно для целей извлечения величины  $\alpha - \beta$ . Аналогичное заключение было уже сделано ранее в работе [6] и подтверждено в более поздних расчетах [17; 18].

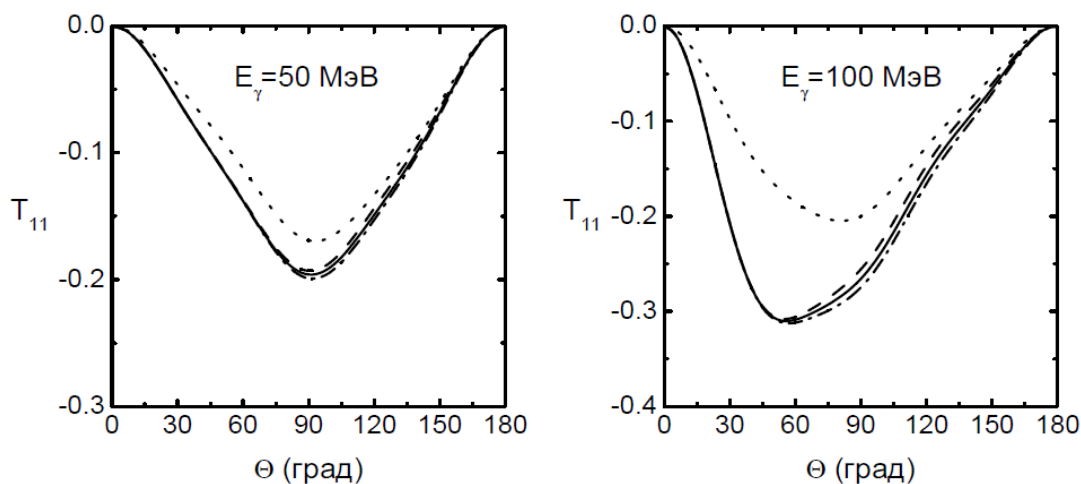


Пунктирные кривые соответствуют расчетам без поляризуемостей. Штрихованные, сплошные и штрихпунктирные кривые получены при  $\alpha - \beta = 6, 9$  и  $12$  соответственно.

Сумма поляризуемостей зафиксирована значением  $\alpha + \beta = 14,6$  в соответствии с предсказанием правила сумм Балдина.

**Рисунок 6 – Угловая зависимость асимметрии  $\Sigma$  при 50 и 100 МэВ**

Как видно из рис. 7, все, что было сказано об асимметрии  $\Sigma$ , в полной мере относится и к векторной асимметрии  $T_{11}$ . Хотя вклад поляризуемостей оказывается несколько бóльшим, но чувствительность  $T_{11}$  к величине  $\alpha - \beta$  весьма слаба, так что измерение  $T_{11}$  не может служить методом для извлечения поляризуемостей.



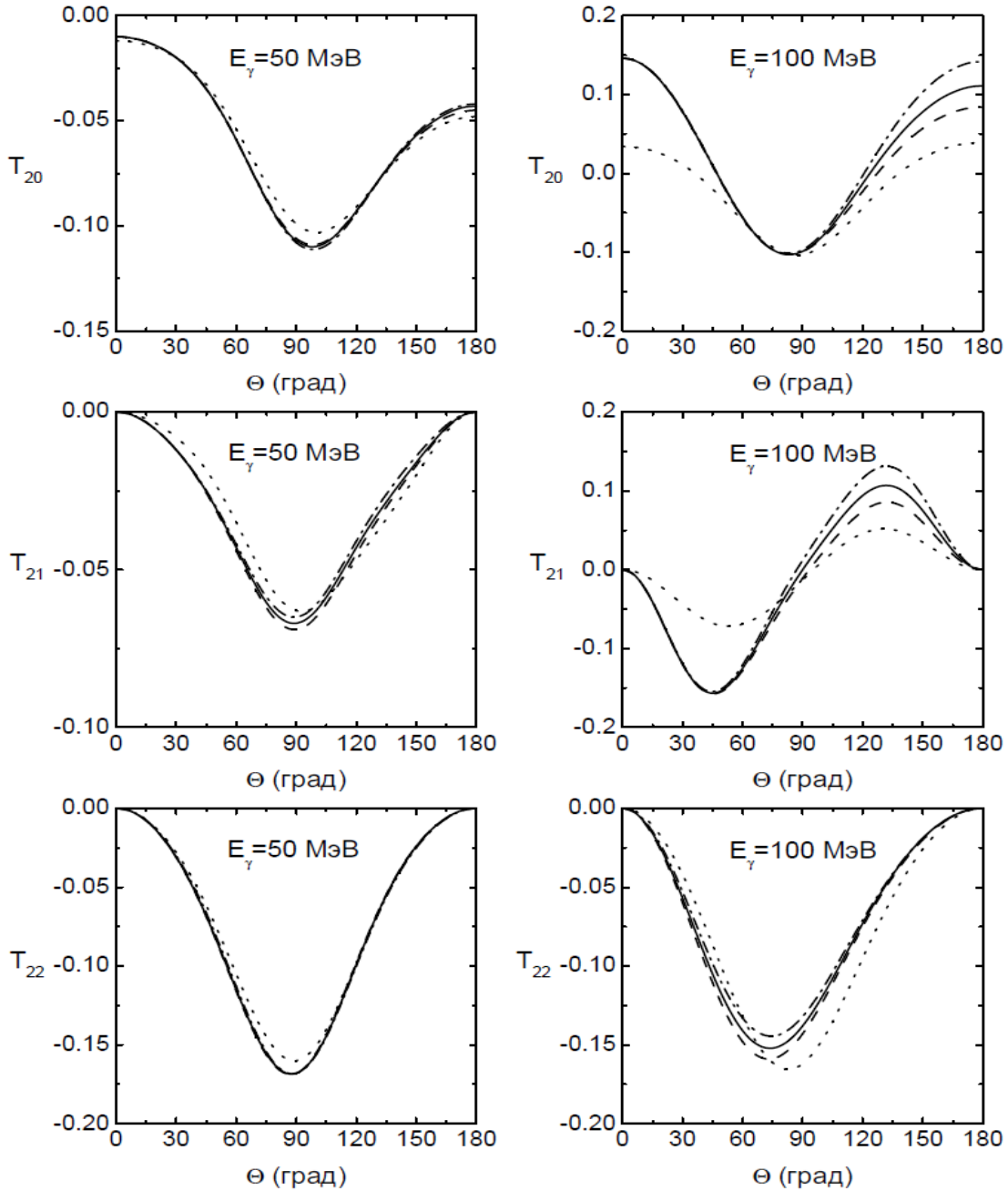
Смысл кривых, как и на рис. 6.

**Рисунок 7 – Угловая зависимость векторной асимметрии  $T_{11}$  при 50 и 100 МэВ**

Наконец, на рис. 8 показаны предсказания модели для тензорных асимметрий дейтрона  $T_{2M}$ . Можно видеть, что при 50 МэВ все  $T_{2M}$  слабо зависят от поляризуемостей. Однако при 100 МэВ ситуация существенно изменяется. Хотя асимметрия  $T_{22}$  ос-



тается малочувствительной к  $\alpha - \beta$ , но асимметрии  $T_{20}$  и  $T_{21}$  проявляют заметную зависимость от этой разности. Например, в области  $\Theta \sim 120^\circ$  вариация  $\alpha - \beta$  с 9 на  $\pm 3$  приводит к изменению величин  $T_{20}$  и  $T_{21}$  примерно на  $\pm 30\%$ . Таким образом, измерения асимметрий  $T_{20}$  и  $T_{21}$  с точностью  $\sim 10\%$  при энергиях фотона в области 100 МэВ и задних углах рассеяния были бы весьма полезными для извлечения поляризуемостей.



Смысл кривых, как и на рис. 6.

**Рисунок 8 – Угловая зависимость тензорных асимметрий  $T_{2M}$  при 50 и 100 МэВ**

Отметим еще один интересный факт, который не связан непосредственно с поляризуемостями. Как видно из рис. 6–8, форма угловой зависимости асимметрий  $\Sigma$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{21}$  и  $T_{22}$  практически не изменяется при увеличении энергии фотона с 50 до 100 МэВ. В то же время поведение асимметрии  $T_{21}$  имеет совершенно разный вид при

энергиях 50 и 100 МэВ.

### Заклучение

Таким образом, изучение комптоновского рассеяния фотонов на дейтроне с поляризованными начальными частицами позволило бы, в принципе, получать информацию о поляризуемостях нейтрона. Для этого необходимо работать при энергиях  $\sim 100$  МэВ. При меньших энергиях все рассмотренные асимметрии слабо зависят от разности поляризуемостей  $\alpha - \beta$ . Однако и вблизи 100 МэВ не все асимметрии чувствительны к  $\alpha - \beta$ . Изучение асимметрии рассеяния линейно-поляризованных фотонов  $\Sigma$ , а также векторной  $T_{11}$  и тензорной  $T_{22}$  асимметрий вряд ли имеет смысл для указанной цели. Только измерения тензорных асимметрий  $T_{20}$  и  $T_{21}$  с точностью  $\sim 10\%$  могут дать сильные ограничения на величину  $\alpha - \beta$ .

*Работа поддержана грантом Ф09-051 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и программой «Физика элементарных частиц и фундаментальная ядерная физика» Российской Академии наук.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L'vov, A.I. Theoretical aspects of the polarizability of the nucleon // A.I. L'vov // Int. J. Mod. Phys. – 1993. – Vol. A8, №30. – P. 5267–5303.
2. Review of Particle Physics / C. Amsler [et al.] // Phys. Lett. – 2008. – Vol. B667, №1. – P. 1–1340.
3. Wilbois, T. Deuteron Compton Scattering / T. Wilbois, P. Wilhelm, H. Arenhövel // Few-Body. Syst. Suppl. – 1995. – Vol. 9, – P. 263–266.
4. Levchuk, M.I. Elastic  $\gamma d$ -Scattering // M.I. Levchuk, A.I. L'vov // Few-Body. Syst. Suppl. – 1995. – Vol. 9, – P. 239–443.
5. Karakowski, J.J. Neutron polarizabilities from Compton scattering on the deuteron? / J.J. Karakowski, G.A. Miller // Phys. Rev. – 1999. – Vol. C60, №1. – P. 014001.
6. Levchuk, M.I. Deuteron Compton scattering below pion photoproduction threshold / M.I. Levchuk, A.I. L'vov // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. A674, №3,4. – P. 449–492.
7. Gamma - deuteron Compton scattering in effective field theory / J.-W. Chen, [et al.] // Nucl. Phys. – 1998. – Vol. A644, №3. – P. 245–259.
8. Compton scattering on the deuteron in baryon chiral perturbation theory / S.R. Beane [et al.] // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. A656, №3,4. – P. 367–399.
9. Compton scattering on the proton, neutron, and deuteron in chiral perturbation theory to  $O(Q^*4)$  / S.R. Beane [et al.] // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A747, №2-4. – P. 311–361.
10. Explicit Delta(1232) degrees of freedom in Compton scattering off the deuteron / R.P. Hildebrandt [et al.] // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A748, №3,4. – P. 573–595.
11. Lucas, M.A. Compton scattering from the deuteron at intermediate energies: PhD Thesis / M.A. Lucas – Urbana, Illinois, 1994. – 173 p.
12. Elastic Compton scattering from the deuteron and nucleon polarizabilities / D.L. Hornidge [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, №11. – P. 2334–2338.
13. Compton scattering from the deuteron and extracted neutron polarizabilities / M. Lundin [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 90, №19. – P. 192501-192505.
14. Machleidt, R. The Bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction / R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster // Phys. Rep. – 1987. – Vol. 149, №1. – P. 1–89.
15. Machleidt, R. The meson theory of nuclear forces and nucleon structure / R. Machleidt // Adv. Nucl. Phys. – 1989. – Vol. 19. – P. 189-376.
16. Levchuk, M.I. Deuteron photodisintegration in the diagrammatic approach /

M.I. Levchuk // Few-Body Syst. – 1995. – Vol. 19, №3. – P. 77–108.

17. Choudhury, D. Predictions for polarized-beam and/or vector-polarized-target observables in elastic Compton scattering on the deuteron / D. Choudhury, D.R. Phillips // Phys. Rev. – 2005. – Vol. C71, №4. – P. 044002.

18. Chen, J.-W. Deuteron Compton scattering in effective field theory: Spin-dependent cross sections and asymmetries / J.-W. Chen, X. Ji, Y. Li // Phys. Rev. – 2005. – Vol. C71, №4. – P. 044321.

***M.I. Levchuk, A.I. L'vov. Polarization Observables in Deuteron Compton Scattering at Energies below Pion Threshold***

Deuteron Compton scattering below pion threshold is investigated in the case of polarized initial particles. The approach is based on a nonrelativistic one-boson-exchange potential of  $NN$ -interaction. The sensitivity of theoretical predictions to values of the isoscalar electric,  $\alpha$ , and magnetic,  $\beta$ , polarizabilities of the nucleon is studied. It has been shown that the photon beam asymmetry  $\Sigma$ , and both vector  $T_{11}$  and tensor  $T_{22}$  target asymmetries are practically independent of  $\alpha$  and  $\beta$ . However, the tensor asymmetries  $T_{20}$  и  $T_{21}$  at energies near 100 MeV are noticeably sensitive to the nucleon polarizabilities so that their measurements can serve as one of methods for providing information on the polarizabilities.

УДК 537.312: 538.245

*А.Ф. Ревинский, В.В. Тригук, И.И. Макоед***О СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ФЕРРИТА ВИСМУТА**

В рамках теории функционала плотности выполнены *ab-initio* расчеты частот нормальных колебаний феррита висмута для кубической фазы. На основе анализа зависимости полученных частот от внешнего давления сделано предположение о механизме сегнетоэлектрической неустойчивости  $\text{BiFeO}_3$ .

**Введение**

Феррит висмута  $\text{BiFeO}_3$  благодаря наличию в нём сосуществования упорядоченных антиферромагнитной ( $T_N = 640$  К) и сегнетоэлектрической ( $T_C = 1100$  К) фаз [1; 2] является перспективным материалом современной электроники. В последнее время после открытия гигантского магнитоэлектрического эффекта в тонких пленках  $\text{BiFeO}_3$  он привлекает особое внимание исследователей [3]. Процессы, связанные с возникновением, распространением и поглощением электромагнитного излучения в мультиферроиках, представляют большой научный и практический интерес в связи с возможным их использованием в качестве сред, пригодных для записи, хранения и переработки информации. Это означает, что при помощи магнитного поля можно задавать поляризацию сегнетоэлектрического домена, а при помощи электрического поля можно регулировать намагниченность домена, несущего бит информации.

Теоретическому исследованию физических свойств  $\text{BiFeO}_3$  посвящено большое количество работ, обзор которых представлен в источниках [4; 5]. К настоящему времени нет единого подхода по вопросу физической природы сосуществования антиферромагнитной и сегнетоэлектрической фаз в  $\text{BiFeO}_3$ . Остается открытым вопрос и о физических причинах фазового перехода «сегнетоэлектрик — параэлектрик» при  $T_C = 1100$  К.

Согласно теории Гинзбурга [6], фазовый переход «сегнетоэлектрик — параэлектрик» обусловлен т.н. конденсацией «мягкой моды» колебаний кристаллической решетки. А именно, при стремлении температуры к точке Кюри частота указанный «мягкой моды» стремится к нулю. Конденсация этой моды приводит к малым искажениям решетки, а следовательно, к структурному фазовому переходу.

Результаты измерения спектров комбинационного рассеяния (КР) для  $\text{BiFeO}_3$  [7] свидетельствуют, что в точке фазового перехода  $T_C$   $\text{BiFeO}_3$  ведет себя как нестандартный сегнетоэлектрик. Общепринятой для данного перехода до последнего времени считали схему:



Другими словами, конденсация «мягкой» моды является основной причиной незначительных искажений ромбоэдрической сегнетофазы ( $R3c$ ), которые в конечном счете приводят к фазовому переходу I рода (1) в  $\text{BiFeO}_3$ .

Результаты измерений [7] показали, что в точке Кюри полностью исчезают пики комбинационного рассеяния. Согласно правилам отбора [8; 9], раман-активные моды запрещены для кубической фазы  $O_4^1$  (перовскит), в то время как для парафазы  $R\bar{3}c$  существует 5 раман-активных мод. В связи с этим авторы работы [7] делают вывод, что

сегнетофаза  $\text{BiFeO}_3$  в точке Кюри вместо парафазы  $R\bar{3}c$  переходит в кубическую парафазу, т.е. указанный переход вовсе не связан с конденсацией «мягкой» моды. На нетипичное поведение отдельных оптических мод под гидростатическим давлением было обращено внимание в теоретических расчетах [10].

Таким образом, исследование физических причин сегнетоэлектрической неустойчивости  $\text{BiFeO}_3$  является актуальным. При этом перспективными являются т.н. ab-initio расчеты динамики кристаллической решетки, которые дают возможность проследить механизм формирования конкретных мод колебаний решетки, которые возникают или конденсируются в результате очень тонкого баланса различных видов взаимодействий в многочастичной системе «ядро плюс электроны» [11]. Благодаря развитию возможностей ЭВМ в настоящее время расчеты динамики решетки дают результаты [12], которые хорошо согласуются с опытными данными.

Целью настоящей работы является проведение ab-initio вычислений частот нормальных колебаний  $\text{BiFeO}_3$  в зависимости от внешнего давления и выяснение механизма сегнетоэлектрической неустойчивости феррита висмута.

### Эксперимент

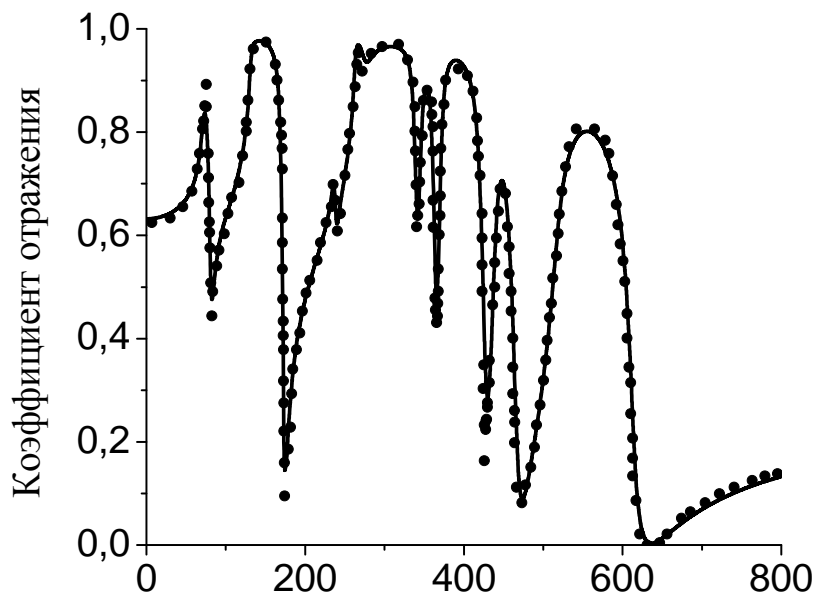
Решеточные спектры  $\text{BiFeO}_3$  исследованы методами диэлектрической спектроскопии. В процессе получения экспериментальных данных неизбежны погрешности, обусловленные как используемыми приборами, так и ошибками экспериментатора: неточностями в определении абсолютных величин коэффициента отражения, скачками на краях шкалы многопредельных приборов, а также неоднородностями, возникающими при сшивании результатов, полученных на разных приборах. Подобные ошибки при обработке спектров по методу Крамерса – Кронига могут привести к появлению особенностей в спектрах компонент диэлектрической проницаемости, обусловленных не природой образца, а математической обработкой. Поэтому предварительно было выполнено осцилляторное моделирование спектра коэффициента отражения с целью получения функциональной зависимости  $R(\omega)$ , максимально близкой к экспериментальной. Для этого была использована программа Reffit [13], которая позволяет с высокой степенью точности воспроизводить решеточные спектры ионных кристаллов. Полученный модельный спектр коэффициента отражения представлен на рисунке 1.

Моделирование спектров компонент диэлектрической проницаемости было проведено суммой невзаимодействующих квазигармонических осцилляторов:

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_{эл} + \sum_i \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)\omega_{0i}^2 S_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma_i \omega)^2}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \sum_i \frac{2\Gamma_i \omega_{0i}^2 S_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma_i \omega)^2}. \quad (3)$$

Резонансные частоты  $\omega_{0i} = 2\pi\nu_i$  и коэффициенты затухания  $\Gamma_i$  определяли с помощью данных предварительной обработки спектров коэффициента отражения по методу Крамерса – Кронига. В первом приближении при моделировании резонансные частоты брали соответствующими пикам спектра  $dR/d\nu$ , полученного с помощью программы ORIGIN из экспериментального спектра коэффициента отражения.



Точками изображены экспериментальные данные,  
сплошной линией – модельный спектр

**Рисунок 1 – Спектр коэффициента отражения  
феррита висмута**

Одной из центральных задач физики твёрдого тела является проблема спектроскопии собственных энергетических уровней кристаллов. При изучении тонкой структуры спектров используют метод диаграмм Арганда [14], который позволяет без дополнительных эмпирических параметров однозначно разделить интегральные кривые  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_2(\omega)$  на компоненты в рамках модели симметричных лоренцевских осцилляторов. Теория упругой поляризации основана на модели линейного осциллятора, где заряженная частица колеблется в параболической потенциальной яме, создаваемой квазиупругой возвращающей силой. Зависимость поляризации от частоты в этом случае описывают формулами Лоренца. При анализе электронных диэлектрических спектров успешно применяют расчетную схему, разработанную Соболевым В.В. [14]. Суть данной методики состоит в обработке экспериментально полученного спектра коэффициента отражения по методу Крамерса – Кронига с целью получения полного комплекса фундаментальных оптических функций – показателя преломления ( $n$ ), показателя поглощения ( $k$ ), действительной ( $\epsilon_1$ ) и мнимой ( $\epsilon_2$ ) компонент диэлектрической проницаемости, спектров объемных ( $-\text{Im}\epsilon^{-1}$ ) и поверхностных ( $-\text{Im}(1+\epsilon)^{-1}$ ) потерь, коэффициента поглощения ( $\mu$ ), электрооптических функций  $\alpha$  и  $\beta$ , а также  $\epsilon_2 E^2$ ,  $\Theta$ ,  $n_{\text{eff}}$ ,  $\epsilon_{\text{eff}}$ .

Как показывают результаты расчетов, в случае ионных кристаллов метод диаграмм Арганда может быть применен для обработки оптических спектров в области решеточных резонансов. Диаграмма Арганда для феррита висмута представлена на рисунке 2, а резонансные частоты осцилляторов, восстановленные разными методами, приведены в таблице 1. На основании анализа спектров коэффициента отражения и диэлектрических функций феррита висмута был сделан вывод о наличии в данном соединении сегнетофазы при комнатной температуре [2].

К настоящему времени появились результаты исследования оптических функций монокристаллического образца  $\text{BiFeO}_3$  при разных температурах [7], а также достаточно большое число работ, посвященных исследованию динамических свойств кристалличе-

ской решетки феррита висмута с методами рамановской спектроскопии [15].

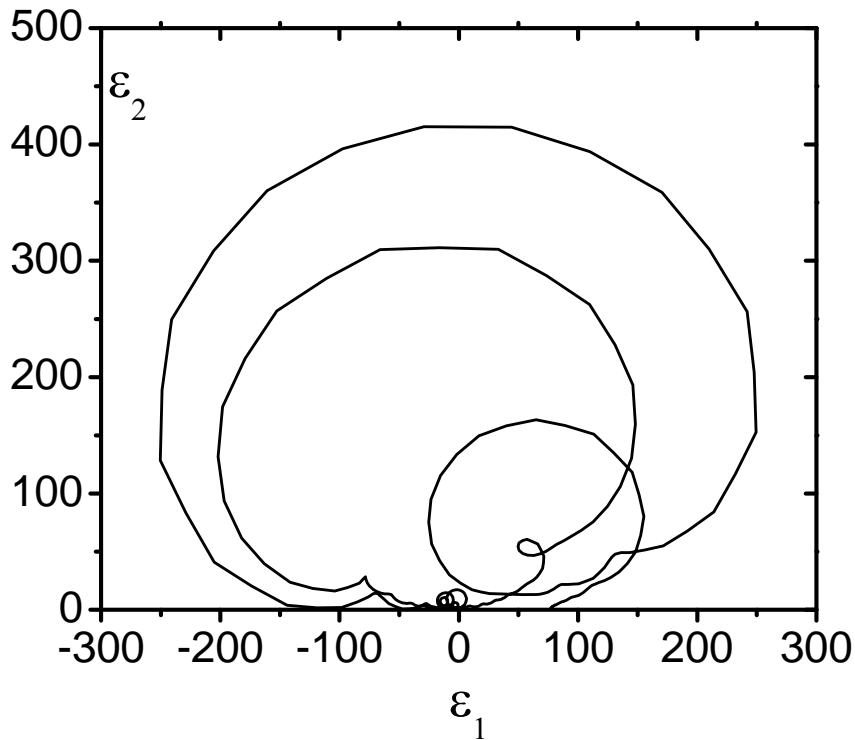


Рисунок 2 – Диаграмма Арганда  $\text{BiFeO}_3$

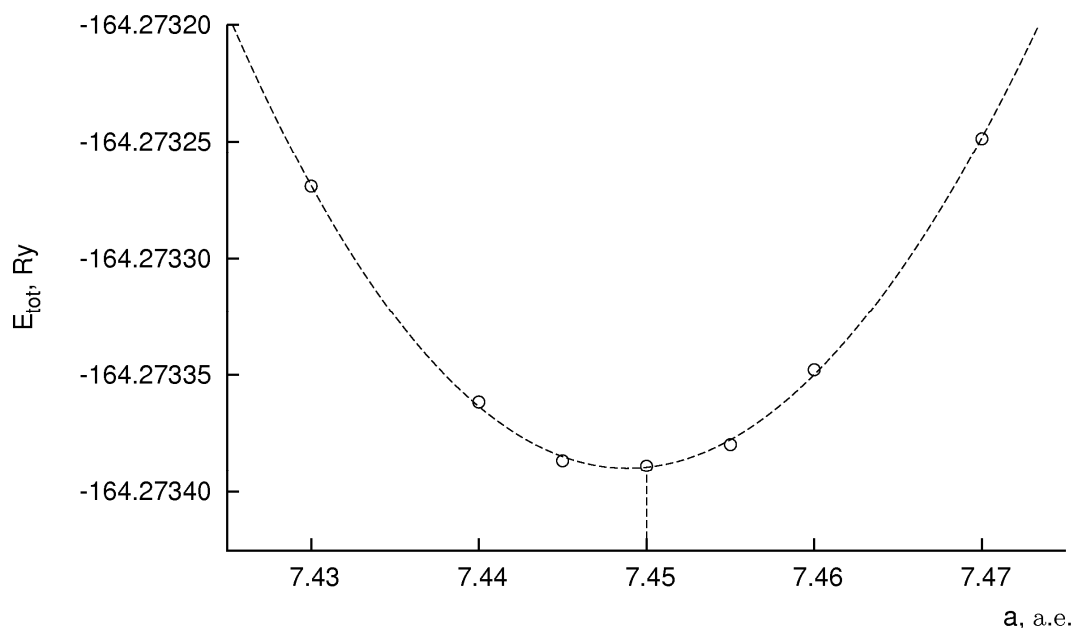
Таблица 1 – Параметры решеточных спектров коэффициента отражения и диэлектрических функций феррита висмута

Положение максимумов коэффициента отражения	Положение максимума модуля диэлектрической функции	Резонансные частоты, восстановленные по методу диаграмм Арганда
74	71	72
134	130	131
240	235	244
265	261	264
276	—	—
346	346	345
373	371	373
441	438	446
522	516	519

Спектры комбинационного рассеяния света были измерены при комнатной температуре в INPAC (Institute Nanoscale Physics and Chemistry) Левенского католического университета (Бельгия) (рисунок 3).







**Рисунок 4 – Зависимость полной энергии кристалла  $E_{tot}$  от величины постоянной решетки  $a$**

Следует отметить, что точное нахождение величины  $a_0$  для расчетов динамики решетки имеет очень важное значение, т.к. силовые постоянные в гармоническом приближении вычисляются как вторые производные полной энергии в точке  $a_0$ .

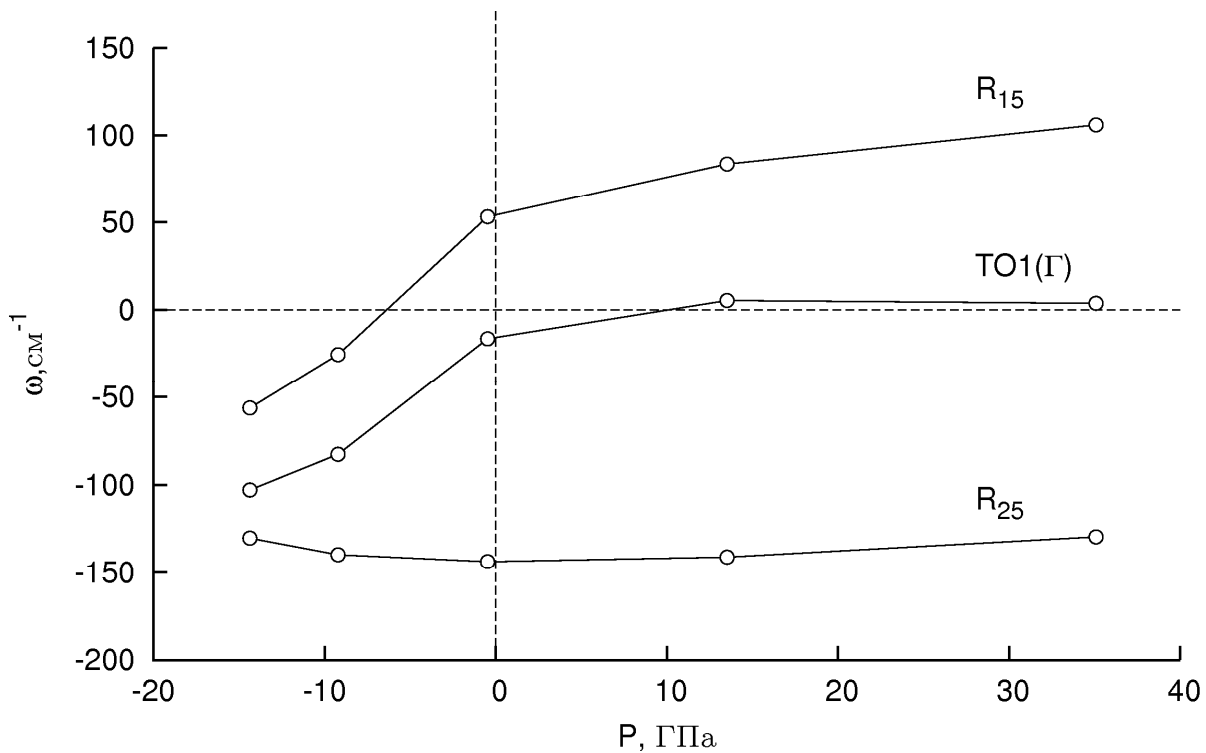
В таблице 2 представлены рассчитанные частоты нормальных колебаний  $\text{BiFeO}_3$  в двух точках зоны Бриллюэна:  $\Gamma(0,0,0)$  и  $R\left[\frac{2\pi}{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$  – в сравнении с существующими в литературе теоретическими данными [10].

Таблица 2 — Вычисленные частоты ( $\text{cm}^{-1}$ ) нормальных колебаний  $\text{BiFeO}_3$  ( $O_i^1$ ) в центре  $\Gamma(0,0,0)$  и в граничной точке  $R\left[\frac{2\pi}{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$  зоны Бриллюэна

$q = \Gamma(0,0,0)$			$q = R\left[\frac{2\pi}{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$		
Тип колебания	Данная работа	[10]	Тип колебания	Данная работа	[10]
TO1( $\Gamma$ )	16i	157i	R <sub>25</sub>	143i	247i
TO2( $\Gamma$ )	209	264	R <sub>15</sub>	53	101i
TO3( $\Gamma$ )	525	454	R <sub>15</sub>	251	273
$\Gamma_{2u}$	171	109	R' <sub>25</sub>	290	341
LO1( $\Gamma$ )	125	93	R' <sub>12</sub>	418	507
LO2( $\Gamma$ )	267	307	R' <sub>2</sub>	541	587
LO3( $\Gamma$ )	533	585			

Видно, что вычисленные из первых принципов частоты незначительно отличаются от результатов, полученных полуэмпирическим путем [10]. Наличие мнимых частот для мод  $\Gamma(\text{TO1})$  и  $R_{25}$  свидетельствует о неустойчивости кубической решетки  $\text{BiFeO}_3$  относительно данных низкочастотных колебаний. В связи с этим представляет интерес исследовать зависимость данных частот от внешнего давления, которую теоретически можно задавать, изменяя величину постоянной решетки.

На рисунке 5 представлена зависимость низкочастотных мод  $\text{TO1}(\Gamma)$ ,  $R_{25}$  и  $R_{15}$  от внешнего давления.



Мнимые частоты представлены в виде отрицательных чисел

**Рисунок 5 — Зависимость «мягких» мод (см<sup>-1</sup>)  $\text{BiFeO}_3$  от давления (ГПа)**

Как видно, кубическая решетка  $\text{BiFeO}_3$  является нестабильной относительно колебаний типа  $R_{25}$  вплоть до 35 ГПа. Мода  $R_{25}$  обусловлена вращением октаэдров  $\text{O}_6$  относительно оси  $\text{OO}'$  (рис. 6) в противоположных направлениях. Полярная мода  $\text{TO1}(\Gamma)$  полностью конденсируется при увеличении давления. Такого рода поведение частот колебаний ионов в  $\text{BiFeO}_3$  является нетипичным для семейства перовскитов. Например, в случае титаната бария  $\text{BaTiO}_3$  увеличение давления способствует стабилизации кристаллической решетки [10]. Полярная мода  $\text{TO1}(\Gamma)$  представляет собой т.н. «дышательную» моду и обусловлена сжатием и расширением кислородных октаэдров  $\text{O}_6$  относительно ионов железа вдоль оси  $\text{OO}'$ .

Согласно современным представлениям, основной причиной сегнетоэлектрической неустойчивости в сегнетоэлектриках типа смещения является дальнедействующее диполь-дипольное взаимодействие подрешеток Брауэ [см. 16; 17]. Однако в рамках теории функционала плотности в случае первопринципных расчетов уже не существует понятий «ион» и «диполь». А именно, в результате указанных вычислений мы имеем только карты распределения электронной плотности внутри кристалла. Величину поляризации вычисляют при помощи т.н. фаз Берри [17]. Понятия «ион» и «диполь» — ат-

рибуты сугубо феноменологических теорий, используемые для получения хорошей наглядности отдельных физических явлений и процессов.

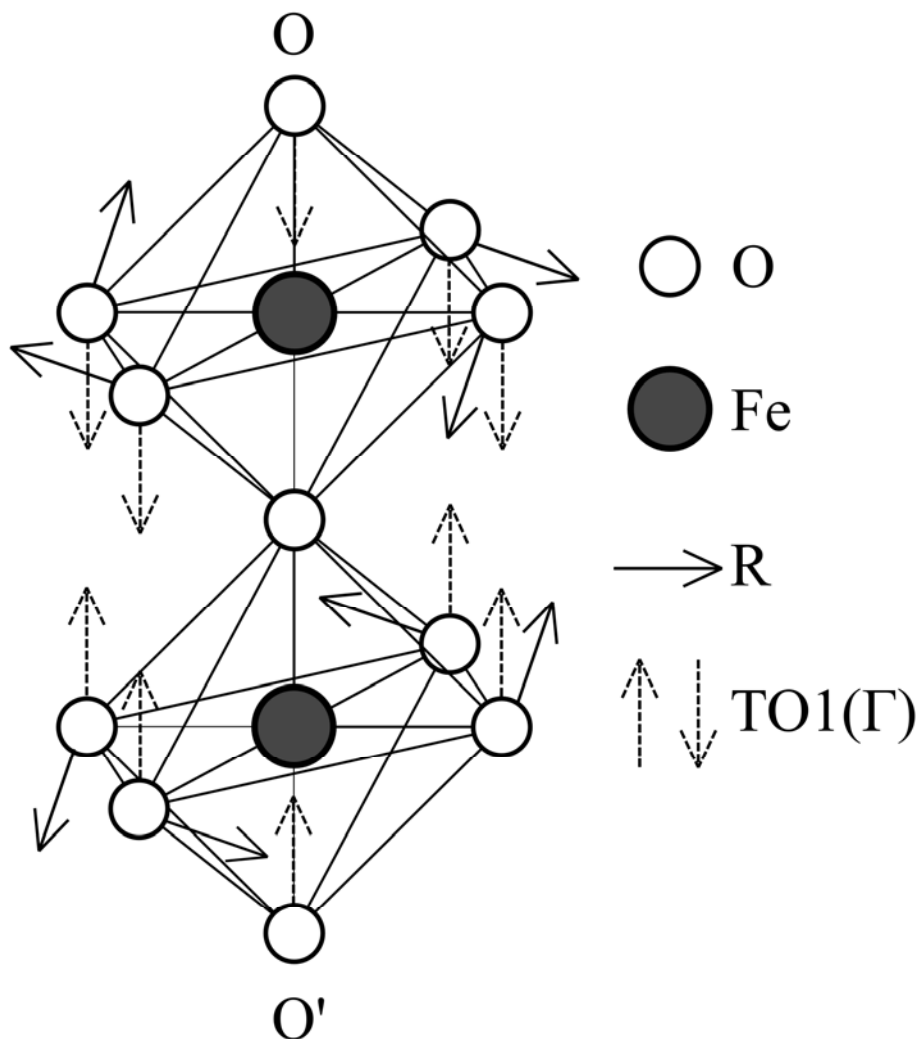


Рисунок 6 — Мягкие моды  $R_{25}$  и  $TO1(\Gamma)$

По-видимому, основной причиной, затрудняющей выяснение механизма фазового перехода «сегнетоэлектрик — параэлектрик» в точке Кюри  $T_c$  является то обстоятельство, что при температуре выше 900 °С начинается процесс плавления феррита висмута. При этом конденсация мягких мод типа  $TO1(\Gamma)$  и  $R_{25}$  является одной из основных причин дестабилизации сегнетофазы с увеличением температуры. Другими словами, при стремлении к точке Кюри в феррите висмута накладываются друг на друга два эффекта: конденсация «мягких» мод и плавление кристалла, способствующие структурной дестабилизации кристалла.

*Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований РБ «Кристаллические и молекулярные структуры». Авторы работы выражают благодарность директору института физики Левенского католического университета (Бельгия) профессору В. Мощалкову, а также профессору В. Тихомирову за предоставленную возможность и помощь при проведении измерений спектров рамановского рассеяния.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веневцев, Ю.Н. Сегнетоэлектрики / Ю.Н. Веневцев [и др.]. – М.: Наука, 1982. – 224 с.
2. Макоед, И.И. Получение и физические свойства мультиферроиков / И.И. Макоед. – Брест: Из-во БрГУ, 2009. – 180 с.
3. Wang, J. Epitaxial BiFeO<sub>3</sub> multiferroic thin film heterostructures / J. Wang, J.B. Neaton // Science. – 2003. – Vol. 299. – P. 1719–1722.
4. Ravindran, P. Origin of magnetoelectric behavior in BiFeO<sub>3</sub> / P. Ravindran [et al.] // cond-mat wtr1-su. 2007. – 0705.0460v1.
5. Neaton, J.B. First-principles study of spontaneous polarization in multiferroic BiFeO<sub>3</sub> / J.B. Neaton [et al.] // cond-mat. – 2004. – 0407679v1.
6. Гинзбург, В.Л. Фазовые переходы в сегнетоэлектриках / В.Л. Гинзбург // УФН. – 2001. – Т. 71, № 10. – С. 1091–1097.
7. Haumout, R. Phonon anomalies and the ferroelectric phase transition in multiferroic BiFeO<sub>3</sub> / R. Haumout [et al.] // Phys. Rev. – 2006. – Vol. B73. – P. 132101–132104.
8. Лайнс, М. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы / М. Лайнс, А. Гласс. – М.: Мир, 1981. – 736 с.
9. Александров, К.С. Фазовые переходы в кристаллах галоидных соединений АВХ<sub>3</sub> / К.С. Александров [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1981. – 364 с.
10. Зиненко, В.И. Динамика решетки BiFeO<sub>3</sub>: нетипичное поведение сегнетоэлектрической неустойчивости под гидростатическим давлением / В.И. Зиненко, М.С. Поплавский // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Т. 87, вып. 6. – С. 338–342.
11. Ревинский, А.Ф. Квантовая теория динамики кристаллической решетки / А.Ф. Ревинский. – Брест: Из-во БрГУ, 1998. – 216 с.
12. Gonze, X. A brief introduction to the abinit software package / X. Gonze [et al.] // Zeit. Kristallogr. – 2005. – Vol. 220. – P. 558–562.
13. Kuzmenko, A.B. Kramers-Kronig-constrained variational analysis of optical data / A.B. Kuzmenko // Rev. Sci. Instrum. – 2005. – V. 76, – P. 083108–083112.
14. Соболев, В.В. Методы вычислительной физики в теории твердого тела. Электронная структура полупроводников / В.В. Соболев, В.В. Немощкаленко. – Киев : Наукова думка, 1988. – 423 с.
15. Yuan, G.L., Or, S. W., Chan, H.L. Structural transformation and ferroelectric-paraelectric phase transition in Bi<sub>1-x</sub>La<sub>x</sub>FeO<sub>3</sub> (x=0-0.25) // J. Phys. D: Appl. Phys. 40 (2007) 1196–1200.
16. Квятковский, О.Е. Поляризационный механизм сегнетоэлектрической неустойчивости решетки в кристаллах / О.Е. Квятковский // ФТТ. – 1997. – Т. 39, №4. – С. 687–693.
17. Максимов, Е.Г. Расчеты динамических свойств ионных кристаллов из первых принципов / Е.Г. Максимов [и др.] // УФН. – 2004. – Т. 174, № 11. – С. 1145–1170.

***A.F. Ravinski, V.V. Triguk, I.I. Makoed. About Ferroelectric Instability in Bismuth Ferrite***

Ab-initio calculations of normal oscillation frequencies of cubic phase bismuth ferrite were calculated within the framework of density functional theory. Based on the analysis of dependence of calculated frequencies on external pressure, a hypothesis of ferroelectric instability of BiFeO<sub>3</sub> is proposed.

УДК 539.12

**В.М. Редьков**

## СПИНОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ

Развивается применение теории группы Лоренца в поляризационной оптике в рамках векторного формализма Стокса – Мюллера и спинорного формализма Джонса. 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времени-подобных векторов в рамках специальной теории относительности. Теоретико-групповая задача о способах построения этих векторов и сопутствующих им тензоров из биспиноров переформулируется как задача о связях между спинорным и тензорным описаниями полностью или частично поляризованного света. Полученные в явном виде формулы существенно различны для полностью и частично поляризованного света.

### Введение

Известно, что при описании поляризации света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований  $SO(3,1)$ , изоморфная группе Лоренца (см. [1; 2]; большой список литературы по этому вопросу приведен в [3]). Работа посвящена применению спинорного формализма группы Лоренца для описания полностью и частично поляризованного света.

### Спинорный формализм и полностью поляризованный свет

Исходим из хорошо известных соотношений, определяющих связь между биспинором второго ранга и набором соответствующих тензорных полей (используем обозначения из [4]):

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left[ -i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5\tilde{\Phi} + i\gamma^b\gamma^5\tilde{\Phi}_b \right] E^{-1}; \quad (1.1)$$

Все формулы отнесены к спинорному базису ( $E$  обозначает метрическую матрицу в биспинорном пространстве):

$$U = \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta & \xi^\alpha \eta_{\dot{\beta}} & \xi^\alpha \eta_{\dot{\beta}} \\ \eta_{\dot{\alpha}} & \xi^\beta & \eta_{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\beta}} & \eta_{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^\alpha_{\dot{\beta}} \\ H_{\dot{\alpha}}{}^\beta & \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{vmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a), \quad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Обратные к (1.1) соотношения выглядят так:

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma_a U], \quad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i} \text{Sp}[E\gamma^5\gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4} \text{Sp}[EU], \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma^5 U], \quad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp}[E\sigma_{mn} U]. \quad (1.3)$$

Сначала рассматриваем вектор

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{1}{2}[(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = \xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2}[(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = \xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2, \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2}[(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = i(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2}[(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1); \end{aligned}$$

и псевдовектор

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_0 &= \frac{1}{2}[-(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_1 &= \frac{1}{2}[-(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_2 &= \frac{i}{2}[-(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = 0, \\ \tilde{\Phi}_3 &= -\frac{1}{2}[-(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что  $\Phi = 0$ ,  $\tilde{\Phi} = 0$ , и антисимметричный тензор задается равенствами:

$$\begin{aligned}\Phi^{01} &= \frac{i}{4}[(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{i}{4}[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{23} &= \frac{1}{4}[(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{1}{4}[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4}[(\xi^{11} + \xi^{22}) + (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4}[(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i}[(\xi^{11} + \xi^{22}) - (\eta_{11} + \eta_{22})] = -\frac{1}{4i}[(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{4}[(\xi^{21} + \xi^{12}) + (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{i}{4}[\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2], \\ \Phi^{12} &= -\frac{1}{4}[(\xi^{21} + \xi^{12}) - (\eta_{21} + \eta_{12})] = -\frac{1}{4}[\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2]. \end{aligned}$$

Собирая результаты вместе

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0, \quad \tilde{\Phi}_a = 0, \quad \Phi_a \neq 0, \quad \Phi_{mn} \neq 0,$$

замечаем: чтобы иметь вещественный вектор и тензор необходимо наложить дополнительное условие, например, следующее:

$$\eta = +i \sigma^2 \xi^* \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = +\xi^{2*}, \quad \eta_2 = -\xi^{1*}, \quad (1.4)$$

что приводит к вещественным величинам:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= -(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) < 0, & \Phi_3 &= (\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 \Phi_1 &= (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & \Phi_2 &= i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}].
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Существует альтернативная возможность дополнительного условия:

$$\eta = -i \sigma^2 \xi^* \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = -\xi^{2*}, \quad \eta_2 = +\xi^{1*}; \tag{1.6}$$

она дает

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, & \Phi_3 &= -(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 \Phi_1 &= -(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & \Phi_2 &= -i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} [\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}].
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Последний случай (1.6) – (1.7) пригоден для того, чтобы описывать 4-вектор поляризации Стокса [1], и дает также возможность ввести соответствующий тензор поляризации:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i \sigma^2 \xi^* \end{vmatrix}, & \Psi \otimes \Psi & \Rightarrow S_a \neq 0, S_{mn} \neq 0, \\
 S_0 &= (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, & S_3 &= -(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\
 S_1 &= -(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & S_2 &= -i(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\
 a^1 &= S^{01} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 b^1 &= S^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 a^2 &= S^{02} = -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})], \\
 b^2 &= S^{31} = -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})],
 \end{aligned}$$

$$a^3 = S^{03} = -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), \quad b^3 = S^{12} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}). \quad (1.8)$$

Вычислим основной инвариант для вектора Стокса:

$$S_0 S_0 - S_j S_j = (\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*})^2 - (\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*})^2 - \\ - (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*})^2 + (\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*})^2 = 4(\xi^1 \xi^{1*}) (\xi^2 \xi^{2*}) - 4(\xi^1 \xi^{2*}) (\xi^2 \xi^{1*}) = 0.$$

Следовательно,  $S_a$  может рассматриваться как вектор Стокса полностью поляризованного света [1]; соответственно, построенный тензор  $S_{mn}$  может рассматриваться как тензор поляризации полностью поляризованного света; обе эти тензорные величины построены из биспинора типа Джонса (обычно рассматривают только 2-компонентный спинор Джонса [1]). Вычислим два возможных инварианта для тензора поляризации  $S_{mn}$ . Первый инвариант равен

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = \\ = \frac{1}{16} \{ -[(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 - [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 + \\ + [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 + [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})]^2 - \\ - 4(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*})^2 - 4(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*})^2 \} = 0. \quad (1.9)$$

Второй инвариант равен

$$I_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = \mathbf{ab} = \frac{i}{16} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)^2 - (\xi^{1*} \xi^{1*} - \xi^{2*} \xi^{2*})^2 - \\ - (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)^2 + (\xi^{1*} \xi^{1*} + \xi^{2*} \xi^{2*})^2 + 4(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*})(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*})] = \\ = \frac{i}{16} [(-4\xi^1 \xi^1 \xi^2 \xi^2 + 4\xi^{1*} \xi^{1*} \xi^{2*} \xi^{2*}) + (4\xi^1 \xi^1 \xi^2 \xi^2 - 4\xi^{1*} \xi^{1*} \xi^{2*} \xi^{2*})] = 0. \quad (1.10)$$

Можно получить выражения для стоксовых 4-вектора и 4-тензора через параметры исходного биспинора Джонса  $(M, N, \alpha, \beta)$ :

$$\Psi = \begin{pmatrix} N e^{i\alpha} \\ +M e^{i\beta} \\ -M e^{-i\beta} \\ N e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0, S_{mn} \neq 0,$$

$$S_0 = M^2 + N^2, S_3 = M^2 - N^2, S_1 = -2MN \cos(\alpha - \beta), S_2 = 2MN \sin(\alpha - \beta); \quad (1.11)$$

$$a^1 = S^{01} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta), \quad b^1 = S^{23} = +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta), \\ a^2 = S^{02} = -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta), \quad b^2 = S^{31} = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta), \\ a^3 = S^{03} = +NM \sin(\alpha + \beta), \quad b^3 = S^{12} = -NM \cos(\alpha + \beta). \quad (1.12)$$

6 компонент векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  задаются 4 параметрами  $N, M, \alpha, \beta$ , но дополнительно выполняются ограничения:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4}, \quad \mathbf{ab} = 0. \quad (1.13)$$

Следовательно, величины  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  содержат 4 независимых параметра  $N, M, \beta - \alpha, \beta + \alpha$ ,



тогда как 4-вектор Стокса зависит только от трех:  $N, M, \beta - \alpha$ . Вместо вещественного тензора  $S_{ab}$  можно ввести 3-мерный комплексный вектор  $\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} s^1 &= a^1 + ib^1 = S^{01} + iS^{23} = \frac{i}{2} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2), \\ s^2 &= a^2 + ib^2 = S^{02} + iS^{31} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2), \\ s^3 &= a^3 + ib^3 = S^{03} + iS^{12} = -i \xi^1 \xi^2. \\ s_1 + is_2 &= -i \xi^2 \xi^2, \quad s_1 - is_2 = +i \xi^1 \xi^1, \quad s^3 = -i \xi^1 \xi^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Величина  $\mathbf{s}$  преобразуется как вектор относительно комплексной группы вращения  $SO(3, C)$ . Таким образом, для описания полностью поляризованного света, наряду со спинором Джонса, 4-вектором Стокса, 4-тензором Стокса, можно использовать и комплексный 3-вектор Стокса:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i(N^2 e^{2i\alpha} - M^2 e^{2i\beta}) \\ -(N^2 e^{2i\alpha} + M^2 e^{2i\beta}) \\ -2i NM e^{i(\alpha+\beta)} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Очевидно, этот комплексный вектор изотропен:  $\mathbf{s}^2 = 0$ .

### Спинорный формализм и частично поляризованный свет

Исходим опять из известной связи между прямым произведением биспинора на себя с вектором и тензором:

$$\begin{aligned} U &= \Psi \otimes \Psi = (\gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab} \Phi_{ab}) E^{-1}; \\ U &= \begin{vmatrix} \xi^\alpha \xi^\beta & \xi^\alpha \eta_\beta \\ \eta_{\dot{\alpha}} \xi^\beta & \eta_{\dot{\alpha}} \eta_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha\beta} & \Delta^\alpha_{\dot{\beta}} \\ H_{\dot{\alpha}\beta} & \eta_{\dot{\alpha}\beta} \end{vmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix}, \\ E &= \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a), \quad \gamma^5 = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & +I \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp} [E \gamma_a U], \quad \Phi_{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E \sigma_{mn} U]. \quad (2.2)$$

В явной форме они дают:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} [(H_2^1 - H_1^2) - (\Delta_1^2 - \Delta_2^1)] = \xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1, \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2} [(H_1^1 - H_2^2) + (\Delta_1^1 - \Delta_2^2)] = \xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2, \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} [(H_1^1 + H_2^2) + (\Delta_1^1 + \Delta_2^2)] = i (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2), \\ \Phi_3 &= -\frac{1}{2} [(H_2^1 + H_1^2) + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1)] = -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1); \\ \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [(\xi^{11} - \xi^{22}) + (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \\ \Phi^{23} &= \frac{1}{4} [(\xi^{11} - \xi^{22}) - (\eta_{11} - \eta_{22})] = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [ (\xi^{11} + \xi^{22}) + (\eta_{11} + \eta_{22}) ] = -\frac{1}{4} [ (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) ], \\
\Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [ (\xi^{11} + \xi^{22}) - (\eta_{11} + \eta_{22}) ] = -\frac{1}{4i} [ (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) ], \\
\Phi^{03} &= -\frac{i}{4} [ (\xi^{21} + \xi^{12}) + (\eta_{21} + \eta_{12}) ] = -\frac{i}{2} [ \xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2 ], \\
\Phi^{12} &= -\frac{1}{4} [ (\xi^{21} + \xi^{12}) - (\eta_{21} + \eta_{12}) ] = -\frac{1}{2} [ \xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2 ].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим свойства возникающих таким образом 4-вектора и 4-тензора, когда никаких дополнительных условий на биспинор не накладывается:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^2 - \Phi_3^2 &= (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1)^2 - (\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1)^2 = -4 \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2, \\
\Phi_1^2 + \Phi_2^2 &= (\xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2)^2 - (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2)^2 = -4 \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2, \\
\Phi^0 \Phi^0 - \Phi_1 \Phi^1 - \Phi_2 \Phi^2 - \Phi_3 \Phi^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

т. е. комплексный вектор  $\Phi_a$  изотропный. Выделим вещественную и мнимую части:

$$\Phi_0 = A + iB, \quad \Phi_j = A_j + iB_j, \quad A^2 - \mathbf{A}^2 = B^2 - \mathbf{B}^2, \quad AB - \mathbf{A}\mathbf{B} = 0. \tag{2.5}$$

Два вещественных 4-вектора  $A_n$  и  $B_n$  имеют одну и ту же длину (не обязательно нулевую) и ортогональны друг другу.

Теперь обратимся к анализу 4-тензора. Основное уравнение связи и комплексно сопряженное к нему имеют вид:

$$\begin{aligned}
E(\Psi \otimes \Psi) &= \gamma^n \Phi_n + i \sigma^{mn} \Phi_{mn}, \\
E(\Psi^* \otimes \Psi^*) &= (\gamma^n)^* \Phi_n^* - i (\sigma^{mn})^* \Phi_{mn}^*.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

С учетом (используем спинорный базис)  $(\gamma^n)^* = \gamma^2 \gamma^n \gamma^2$ ,  $(\sigma^{mn})^* = -\gamma^2 \sigma^{mn} \gamma^2$  соотношения (2.6) дают

$$\begin{aligned}
(\Psi \otimes \Psi) &= [ \gamma^n \Phi_n + i \sigma^{mn} \Phi_{mn} ] E^{-1}, \\
(\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*) &= [ \gamma^n \Phi_n^* + i \sigma^{mn} \Phi_{mn}^* ] E^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, справедливы тождества:

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n = \Phi_n &= \frac{1}{4} \text{Sp} [ E \gamma_n (\Psi \otimes \Psi) ], \quad A_n - iB_n = \Phi_n^* = \frac{1}{4} \text{Sp} [ E \gamma_n (\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*) ], \\
\Phi_{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp} [ E \sigma_{mn} (\Psi \otimes \Psi) ], \quad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [ E \sigma_{mn} (\gamma^2 \Psi^* \otimes \gamma^2 \Psi^*) ].
\end{aligned} \tag{2.8a}$$

С использованием обозначения  $\gamma^2 \Psi^* = \Psi^c$  они записываются короче:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{8} \text{Sp} [ E \gamma_n (\Psi \otimes \Psi + \Psi^c \otimes \Psi^c) ], \quad iB_n = \frac{1}{8} \text{Sp} [ E \gamma_n (\Psi^c \otimes \Psi^c - \Psi \otimes \Psi) ], \\
\Phi_{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp} [ E \sigma_{mn} (\Psi \otimes \Psi) ], \quad \Phi_{mn}^* = -\frac{1}{2i} \text{Sp} [ E \sigma_{mn} (\Psi^c \otimes \Psi^c) ].
\end{aligned} \tag{2.8b}$$

Вычислим компоненты тензора в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Phi^{01} &= \frac{i}{4} [ (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2) ], \quad \Phi^{23} = \frac{1}{4} [ (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2) ], \\
s^1 &= \Phi^{01} + i\Phi^{23} = \frac{i}{2} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2), \quad t^1 = \Phi^{01} - i\Phi^{23} = \frac{i}{2} (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [ (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) ], & \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} [ (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) ], \\ s^2 &= \Phi^{02} + i\Phi^{31} = -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2), & t^2 &= \Phi^{02} - i\Phi^{31} = -\frac{1}{2} (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2); \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 + \eta_1 \eta_2), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 - \eta_1 \eta_2), \\ s^3 &= \Phi^{03} + i\Phi^{12} = -i \xi^1 \xi^2, & t^3 &= \Phi^{03} - i\Phi^{12} = -i \eta_1 \eta_2.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{t}$  изотропные:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^2 &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)^2 + \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)^2 - (\xi^1 \xi^2)^2 \equiv 0, \\ \mathbf{t}^2 &= -\frac{1}{4} (\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2)^2 + \frac{1}{4} (\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2)^2 - (\eta_1 \eta_2)^2 \equiv 0.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{s} \mathbf{t} &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2)(\eta_1 \eta_1 - \eta_2 \eta_2) + \\ &+ \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2)(\eta_1 \eta_1 + \eta_2 \eta_2) - \xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 = \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1)^2.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Установим знак релятивистской длины вектора  $A_n$  (и длины вектора  $B_n$ ):

$$\begin{aligned}2A_0 &= (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1) + (\xi^{1*} \eta_2^* - \xi^{2*} \eta_1^*), \\ 2A_3 &= -(\xi^1 \eta_2 + \xi^2 \eta_1) - (\xi^{1*} \eta_2^* + \xi^{2*} \eta_1^*), \\ A_1 &= (\xi^1 \eta_1 - \xi^2 \eta_2) + (\xi^{1*} \eta_1^* - \xi^{2*} \eta_2^*), \\ A_2 &= i(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2) - i(\xi^{1*} \eta_1^* + \xi^{2*} \eta_2^*).\end{aligned}$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned}4(A_0^2 - A_3^2) &= -4\xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 - 4\xi^{1*} \xi^{2*} \eta_1^* \eta_2^* - 4\xi^1 \xi^{1*} \eta_2 \eta_2^* - 4\xi^2 \xi^{2*} \eta_1 \eta_1^*, \\ 4(A_1^2 + A_2^2) &= -4\xi^1 \xi^2 \eta_1 \eta_2 - 4\xi^{1*} \xi^{2*} \eta_1^* \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \eta_1 \eta_1^* + 4\xi^2 \xi^{2*} \eta_2 \eta_2^*,\end{aligned}$$

приходим к соотношению

$$A_0^2 - \mathbf{A}^2 = -(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) (\eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*) < 0.\quad (2.11)$$

Следовательно, оба 4-вектора являются пространственноподобными и по этой причине не пригодны для описания частично поляризованного света [2].

Рассмотрим еще одну возможность построения 4-вектора и 4-тензора из биспинора:

$$\begin{aligned}\Psi \otimes (-i\Psi^c) &= (\xi^1, \xi^2, \eta_1, \eta_2) \otimes \begin{vmatrix} +\eta_2^* \\ -\eta_1^* \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} +\xi^1 \eta_2^* & -\xi^1 \eta_1^* & -\xi^1 \xi^{2*} & +\xi^1 \xi^{1*} \\ +\xi^2 \eta_2^* & -\xi^2 \eta_1^* & -\xi^2 \xi^{2*} & +\xi^2 \xi^{1*} \\ +\eta_1 \eta_2^* & -\eta_1 \eta_1^* & -\eta_1 \xi^{2*} & +\eta_1 \xi^{1*} \\ +\eta_2 \eta_2^* & -\eta_2 \eta_1^* & -\eta_2 \xi^{2*} & +\eta_2 \xi^{1*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^{11} & \xi^{12} & \Delta^1_1 & \Delta^1_2 \\ \xi^{21} & \xi^{22} & \Delta^2_1 & \Delta^2_2 \\ H_1^1 & H_1^2 & \eta_{11} & \eta_{12} \\ H_2^1 & H_2^2 & \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Соответствующий 4-вектор задается соотношениями:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} [ (\eta_2 \eta_2^* + \eta_1 \eta_1^*) + (\xi^2 \xi^{2*} + \xi^1 \xi^{1*}) ] > 0,$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2} [ (\eta_2 \eta_2^* - \eta_1 \eta_1^*) + (-\xi^2 \xi^{2*} + \xi^1 \xi^{1*}) ],$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} [ (\eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*) - (\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}) ],$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2} [ (\eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*) + (-\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}) ].$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned} 4(\Phi_0^2 - \Phi_3^2) &= 4\eta_1 \eta_1^* \eta_2 \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \xi^2 \xi^{2*} + 4\eta_1 \eta_1^* \xi^1 \xi^{1*} + 4\eta_2 \eta_2^* \xi^2 \xi^{2*}, \\ 4(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) &= 4\eta_1 \eta_1^* \eta_2 \eta_2^* + 4\xi^1 \xi^{1*} \xi^2 \xi^{2*} - 4\eta_1 \eta_2^* \xi^2 \xi^{1*} - 4\eta_2 \eta_1^* \xi^1 \xi^{2*}, \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$\Phi^a \Phi_a = \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_3^2 = \eta_1 \eta_1^* \xi^1 \xi^{1*} + \eta_2 \eta_2^* \xi^2 \xi^{2*} + \eta_1 \eta_2^* \xi^2 \xi^{1*} + \eta_2 \eta_1^* \xi^1 \xi^{2*}. \quad (2.13)$$

Покажем, что введенный 4-вектор временноподобный. С использованием обозначений

$$\xi = \begin{vmatrix} N_1 e^{im_1} \\ N_2 e^{im_2} \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} M_1 e^{im_1} \\ M_2 e^{im_2} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

получаем

$$\Phi^a \Phi_a = N_1^2 M_1^2 + N_2^2 M_2^2 + 2N_1 M_1 N_2 M_2 \cos [(n_1 - n_2) - (m_1 - m_2)].$$

Следовательно,

$$(N_1 M_1 - N_2 M_2)^2 < \Phi_0^2 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 - \Phi_3^2 < (N_1 M_1 + N_2 M_2)^2. \quad (2.15)$$

И следовательно, 4-вектор  $\Phi_a$  может рассматриваться как вектор Стокса  $S_a$  для частично поляризованного света [2]:

$$(N_1 M_1 - N_2 M_2)^2 < S_0^2 - \mathbf{S}^2 < (N_1 M_1 + N_2 M_2)^2. \quad (2.16)$$

Соответственно, два 2-спинора в (2.14) следует рассматривать как образующие биспинор Джонса для частично поляризованного света.

Остается установить явный вид тензора поляризации  $S_{ab}$  частично поляризованного света:

$$\begin{aligned} \Phi^{01} &= \frac{i}{4} [ (\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*) - (\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*}) ], \quad \Phi^{23} = \frac{1}{4} [ (\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*) + (\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*}) ], \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} [ (\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*) + (-\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*}) ], \quad \Phi^{31} = \frac{i}{4} [ (\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*) - (-\eta_1 \xi^{2*} + \eta_2 \xi^{1*}) ], \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{4} [ (\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*) + (-\eta_2 \xi^{2*} + \eta_1 \xi^{1*}) ], \quad \Phi^{12} = -\frac{1}{4} [ (\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*) - (-\eta_2 \xi^{2*} + \eta_1 \xi^{1*}) ]; \\ s^1 &= \frac{i}{2} (\xi^1 \eta_2^* + \xi^2 \eta_1^*), \quad s^2 = -\frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2^* - \xi^2 \eta_1^*), \quad s^3 = -\frac{i}{2} (\xi^2 \eta_2^* - \xi^1 \eta_1^*). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Комплексный 3-вектор является неизотропным:

$$4\mathbf{s}^2 = -(\xi^1 \eta_1^* - \xi^2 \eta_2^*)^2 \neq 0.$$

### Заклучение

Полученные результаты могут представлять интерес не только в поляризационной оптике, но также и в контексте описания уравнений Максвелла в спинорном подходе, когда вместо электромагнитных 4-потенциала  $A_n$  и тензора  $F_{mn}$  можно ввести фундаментальный электромагнитный биспинор  $\Psi = (\xi, \eta)$ . Также эти результаты могут быть полезными в контексте явного построения моделей для пространства-времени со спинорной структурой (например, см. [3]).

*Работа поддержана грантом БРФФИ Ф09К-123.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск, 1992. – 336 с.
2. Богуш, А.А. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.]. // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
3. Red'kov, V.M. Maxwell Equations in Media, Group Theory and Polarization of the Light. / V.M. Red'kov. – 73 pages, arxiv/0906.2482.
4. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

#### ***V.M. Red'kov. Spinor Formalism of the Lorentz Group and Polarized Light***

The application of Lorentz group theory in the optics of polarized light is developed in the frames of Stokes – Mueller real and Jones complex formalisms. Stokes vector of completely and partly polarized light is analogous to the isotropic and time-like 4-vectors respectively in the frame of special relativity. The group theoretical problem on constructing these vectors in terms of 4-spinors is formulated as a problem of connecting spinor and vector description of a polarized light. The formulas produced in explicit form are substantially different for completely and partly polarized light.

УДК 524.354.6-33

*В.С. Секержицкий*

## ОБ УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННО-НЕЙТРОННО-ЯДЕРНОГО ВЕЩЕСТВА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассчитаны равновесные термодинамические и ядерные параметры холодного сверхплотного электронно-нейтронно-ядерного вещества при наличии сверхсильного магнитного поля и получено уравнение состояния. Исследовано влияние сверхсильного магнитного поля на параметры компонентов такого вещества.

Согласно существующим представлениям, в нейтронных звездах (пульсарах) плотность вещества может превышать ядерную. При плотностях, меньших ядерной и характерных для оболочек нейтронных звезд и недр белых карликов, должны быть условия для реализации электронно-ядерной ( $Ae$ ), электронно-нейтронно-ядерной ( $Aen$ ) или электронно-нуклонной ( $enp$ ) фаз сверхплотного крайне вырожденного вещества [1]. В любой из перечисленных фаз одним из компонентов вещества является газ свободных электронов, который при плотностях  $\rho > 10^6$  г/см<sup>3</sup> является релятивистским; при этом температура его вырождения превышает  $10^{10}$  К, что значительно больше предполагаемых температур в недрах указанных астрофизических объектов. В веществе, находящемся в  $Aen$ - и  $enp$ -фазах, имеются также свободные нерелятивистские нейтроны, а в  $enp$ -фазе еще и свободные нерелятивистские протоны. Известно также, что сверхплотное вещество может находиться в абсолютно устойчивом состоянии, при котором устанавливается термодинамическое равновесие по отношению к бета-процессам и пикноядерным реакциям [1].

Исследование  $Ae$ -,  $Aen$ - и  $enp$ -фаз вещества, нахождение его параметров и уравнений состояния имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Решению этих вопросов посвящено огромное количество научных публикаций, дающих довольно стройное представление о возможных термодинамических свойствах и характеристиках вещества в  $Ae$ -,  $Aen$ - и  $enp$ -фазах.

Теоретически обоснованная и подтвержденная данными наблюдений (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу учета их влияния на физические свойства сверхплотного вещества.

В настоящей работе мы проведем вычисление равновесных параметров  $Aen$ -фазы замагниченного вещества с учетом размеров ядер и ядерного взаимодействия свободных нейтронов между собой и получим соответствующее уравнение состояния. Частично эти вопросы обсуждались в [2–5].

При численных расчетах и оценках не будет учитываться зависимость величины магнитного момента нейтрона от индукции магнитного поля; не будет учитываться также малая величина аномального магнитного момента электрона.

Представим энергию электронно-нейтронно-ядерного вещества в виде суммы энергий ядер, электронов и свободных нейтронов:

$$E = E_A + E_e + E_n; \quad (1)$$

при этом мы пренебрегаем кинетической энергией ядер и считаем, что электроны образуют крайне вырожденный идеальный газ. Числа частиц компонентов вещества связаны соотношением:

$$N = N_n + AN_A = N_n + \frac{A}{Z} N_e, \quad (2)$$

где  $N, N_A, N_n, N_e$  – соответственно числа всех нуклонов, ядер, свободных нейтронов и электронов в объеме  $V$  рассматриваемой электронейтральной среды,  $A$  и  $Z$  – массовое и зарядовое числа ядра. Концентрация всех нуклонов связана с концентрациями компонентов среды и ядерными параметрами соотношением:

$$n = n_n \frac{n_0 - n}{n_0 - n_n} + n_e \frac{A}{Z}, \quad (3)$$

где  $n_0 = 1,3 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$  – концентрация нуклонов в ядре.

Энергию покоя ядра будем вычислять с помощью модифицированной следующим образом формулы Бете – Вайцеккера:

$$Mc^2 = (A - Z)m_n c^2 + Zm_p c^2 + W, \quad (4)$$

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + c_3 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + c_4 A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^4 + c_5 B^2 Z A^{2/3}. \quad (5)$$

Здесь  $m_n$  и  $m_p$  – массы нейтрона и протона,  $W$  – энергия связи ядра,  $B$  – индукция магнитного поля;  $c_0 = 15,75 \text{ МэВ}$ ,  $c_1 = 17,8 \text{ МэВ}$ ,  $c_2 = 0,71 \text{ МэВ}$ ,  $c_3 = 23,7 \text{ МэВ}$  (значения взяты из [1]),  $c_4 = 7,7 \text{ МэВ}$  [6],  $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38} \text{ МэВ/Гс}^2$  [7]. Заметим, что в [8] при решении аналогичной задачи при  $B = 0$  с использованием модели невзаимодействующих свободных нейтронов берется  $c_4 = c_3/27 \approx 0,878 \text{ МэВ}$ .

Энергия свободных нейтронов и их число в объеме  $V$  равны [6]

$$E_n = w_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad N_n = n_n \left( V - \frac{AN_A}{n_0} \right), \quad (6)$$

где (см., например, [5], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы)

$$w_n = n_n (m_n c^2 + \zeta_n) - P_n, \quad (7)$$

$$n_n = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left( (\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} \right), \quad (8)$$

$$P_n = \frac{2}{5} n_n \frac{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{5/2}}{(\zeta_n - \varepsilon_{Я} + \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2} + (\zeta_n - \varepsilon_{Я} - \sigma_n \mu_{Я} B)^{3/2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_n = -1,48 \cdot 10^{-38} n_n \frac{40,4 - 1,61 \cdot 10^{-38} n_n}{1 + 6,25 \cdot 10^{-13} n_n^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad (10)$$

$n_n$  и  $P_n$  – концентрация и давление свободных нейтронов,  $\chi_n = \zeta_n + m_n c^2$  – их химический потенциал,  $\mu_n$  – ядерный магнетон,  $\sigma_n = 1,913$ .

Энергия ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле определяется следующим образом [9]:

$$E_e = w_e V, \quad w_e = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e^2}{2 m_e \mu_B B} = P_e = \frac{1}{2} \chi_e n_e, \quad (11)$$

где  $n_e, P_e, \chi_e$  – концентрация, давление и химический потенциал электронов,  $m_e$  – масса электрона,  $\mu_B$  – магнетон Бора.

Абсолютно устойчивому состоянию термодинамического равновесия соответствует минимум энергии среды  $E$  относительно независимых параметров  $A, Z$  и  $N_A$  при фиксированных  $N$  и  $B$ :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial N_A} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, имеем систему уравнений, которая позволяет установить однозначное соответствие между массовым числом  $A$  и зарядовым числом  $Z$  наиболее устойчивого ядра при фиксированном значении индукции магнитного поля  $B$ :

$$Z = \sqrt{\frac{c_1 A}{2c_2} + \frac{c_3^2 B^4 A^2}{4c_2^2}} - \frac{c_5 B^2 A}{2c_2}, \quad (13)$$

а также выразить химические потенциалы электронного и нейтронного газов:

$$\chi_e = \frac{\partial w_e}{\partial n_e} = m_n c^2 - m_p c^2 + 4c_3 - \frac{2Z}{A} (4c_3 + c_2 A^{2/3}) + 8c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 - c_5 B^2 A^{2/3}, \quad (14)$$

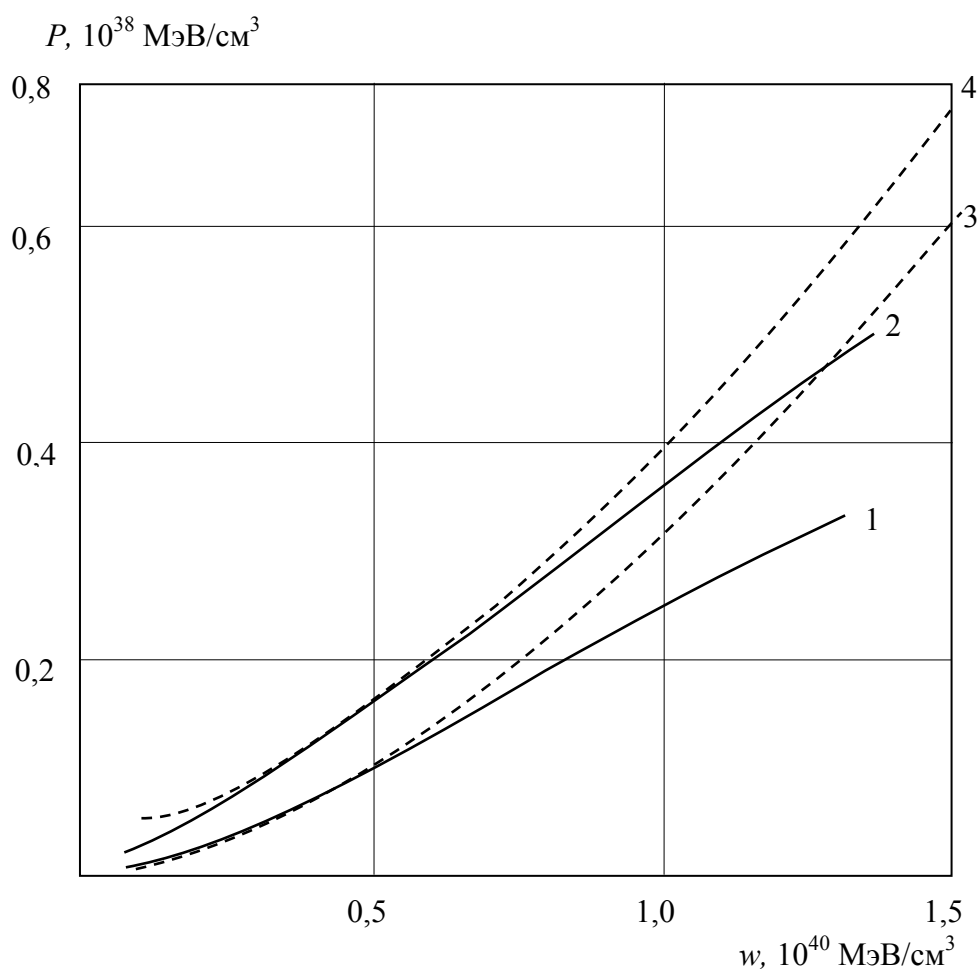
$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{\partial w_n}{\partial n_n}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \left( \frac{\partial w_n}{\partial n_n} - \frac{w_n}{n_n} \right) \frac{n_n}{n_0} = \\ &= m_n c^2 + c_3 - c_0 + c_1 A^{-1/3} - \frac{Z^2}{A^2} (4c_3 + c_2 A^{2/3}) + c_4 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^3 \left(1 + \frac{6Z}{A}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные соотношения дают возможность, задавая значения  $B$  и  $n = N/V$  (или значение массовой плотности  $\rho \approx m_n n$  вместо концентрации нуклонов  $n$ ), вычислять равновесные термодинамические и ядерные параметры электронно-нейтронно-ядерного и электронно-ядерного замагниченного вещества (в последнем случае применимы все приведенные выше формулы при условии  $n_n = 0$ ). Порог развала ядер и образования сплошной ядерной материи (электронно-нуклонной *enp*-фазы) можно оценить



из условия равенства нулю энергии связи ядра.

Приведенные выше соотношения позволяют, в частности, установить параметрическую зависимость между давлением  $P = P_e + P_n$  и плотностью энергии среды  $w = w_A + w_e + w_n$  (уравнение состояния). Результаты численного табулирования уравнения состояния для модели идеальных ферми-газов и модели, учитывающей взаимодействие свободных нейтронов и размеры ядер, представлены на рисунке 1. Из графиков видно, что характер влияния сверхсильного магнитного поля на равновесные параметры сверхплотного вещества тождественен для обеих рассматриваемых моделей, но при этом имеет место заметное расхождение численных значений параметров, рассчитанных в рамках разных моделей вещества.

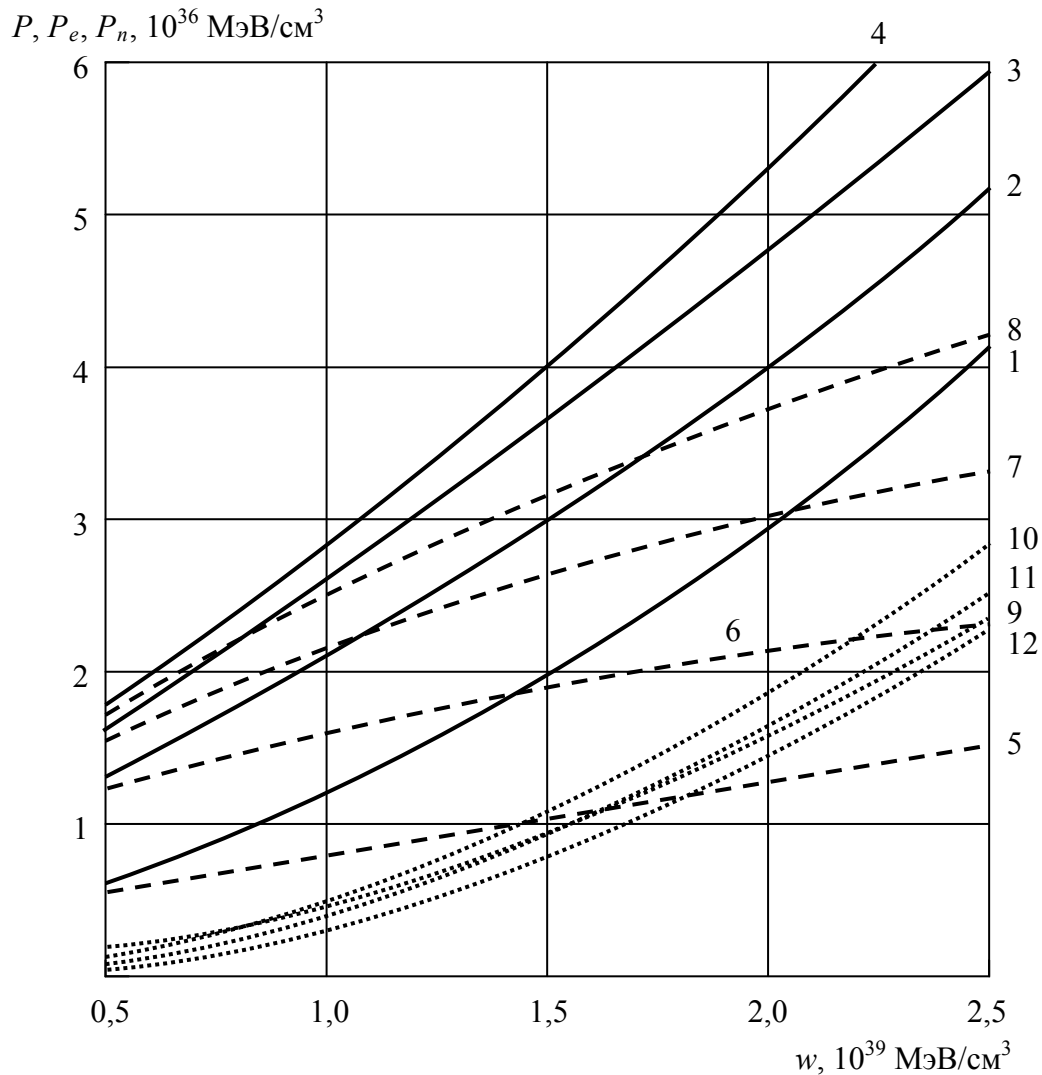


1, 3 –  $B = 0$ ; 2, 4 –  $B = 4 \cdot 10^{17}$  Гс;

**Рисунок 1 – Зависимость полного давления электронно-нейтронно-ядерного вещества от плотности энергии (уравнение состояния) для модели идеальных ферми-газов (1; 2) и модели, учитывающей взаимодействие свободных нейтронов и размеры ядер (3; 4)**

На рисунке 2 даны, в рамках модели идеальных ферми-газов, зависимости парциальных давлений электронного и нейтронного газов, а также полного давления от плотности энергии электронно-нейтронно-ядерного вещества, находящегося в абсолютно устойчивом состоянии, для ряда значений индукции магнитного поля. С ростом

$B$  увеличиваются  $P_e$  и  $P$ , а  $P_n$  сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться. Очевидно, дальнейший рост  $B$  привел бы к исчезновению свободных нейтронов при рассматриваемых плотностях (в соответствии с известным эффектом смещения нижнего порога  $Aep$ -фазы в сторону более высоких плотностей в сверхсильном магнитном поле [10]). Однако в данном случае проводить расчеты для поля с индукцией  $B > 2 \cdot 10^{17}$  Гс вряд ли корректно, т. к. плотность энергии магнитного поля будет выше плотности энергии покоя вещества.



1, 5, 9 –  $B = 0$ ; 2, 6, 10 –  $B = 10^{17}$  Гс; 3, 7, 11 –  $B = 1,5 \cdot 10^{17}$  Гс;  
4, 8, 12 –  $B = 2 \cdot 10^{17}$  Гс.

**Рисунок 2 – Зависимости давлений абсолютно равновесного электронно-нейтронно-ядерного вещества (1–4), его электронного (5–8) и нейтронного (9–12) компонентов от плотности энергии для модели идеальных ферми-газов**

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.

2. Секержицкий, В.С. Об уравнении состояния равновесного сильно замагниченного электронно-нейтронно-ядерного вещества / В.С. Секержицкий // Астрон. ж. – 1995. – Т. 72, № 2. – С. 263–265.
3. Гордеев, Д.В. К вопросу о влиянии сверхсильного магнитного поля и ядерного взаимодействия нейтронов на равновесные параметры сверхплотного вещества / Д.В. Гордеев, В.С. Секержицкий, С.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 1999. – № 6. – С. 27–33.
4. Секержицкий, В.С. Равновесные параметры холодного электронно-нейтронно-ядерного замагниченного вещества с учетом кулоновских взаимодействий / В.С. Секержицкий, С.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2002. – № 6. – С. 71–75.
5. Секержицкий, В.С. К вопросу о влиянии магнитного поля на термодинамические и ядерные параметры холодного сверхплотного вещества / В.С. Секержицкий // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна. – 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 82–93.
6. Саакян, Г.С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г.С. Саакян, Л.Ш. Григорян // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
7. Леинсон, Л.Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л.Б. Леинсон, В.Н. Ораевский // Ядерн. физ. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.
8. Вартанян, Ю.Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю.Л. Вартанян, Н.К. Овакимова // Астрон. ж. – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
9. Шульман, Г.А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г.А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.
10. Секержицкий, В.С. Об устойчивом состоянии холодного замагниченного вещества при плотностях, меньше ядерной / В.С. Секержицкий, Г.А. Шульман // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 3. – С. 473–484.

***V.S. Sekerzhitsky. About States Equation of Electron-Neutron-Nuclear Matter in Strong Magnetic Field***

We have calculated the equilibrium thermodynamic and nuclear parameters of cold superdense electron-neutron-nuclear matter during superstrong magnetic field and state equation has been received. Influence of a superstrong magnetic field on parameters of components of such matter is investigated.

УДК 539.171

**А.И. Серый****К ВОПРОСУ О СПИНОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
НЕЙТРОННО-ПРОТОННОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ**

Согласно методу, разработанному А.А. Исаевым, исследуется поляризованная по спину нейтронно-протонная ферми-жидкость, описываемая псевдопотенциалом Ферми и потенциалом однопионного обмена (ОПО) без учета бета-равновесия. При плотностях, соответствующих жидким ядрам нейтронных звезд, система самосогласованных уравнений имеет решения, соответствующие магнитным полям с индукцией  $B \sim 10^{12}-10^{13}$  Гс, что хорошо согласуется с наблюдаемыми магнитными полями нейтронных звезд. Векторы спиновой поляризации нейтронов и протонов направлены противоположно, что согласуется с результатами, полученными для нейтронно-протонного ферми-газа с ядерным псевдомагнетизмом, описываемым теми же потенциалами. Результаты подтверждают возможные объяснения механизма формирования магнитных полей нейтронных звезд не только через протонные сверхпроводящие токи, но и через спиновую поляризацию нуклонов в жидком ядре нейтронной звезды (на эту возможность указал В.Г. Барышевский после предсказания в 1964 г. ядерного псевдомагнетизма).

**Введение. Постановка задачи в рамках ферми-жидкостного подхода**

После предсказания в 1964 г. (В.Г. Барышевским и М.И. Подгорецким) ядерного псевдомагнетизма [1, с. 1050] В.Г. Барышевский указал на важность учета этого явления в моделировании сверхплотных астрофизических объектов, и в особенности при изучении проблемы происхождения сверхсильных магнитных полей нейтронных звезд (до этого единственно возможным механизмом генерации таких полей считались протонные сверхпроводящие токи в жидком ядре нейтронной звезды).

В данной работе по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова применена процедура исследования нейтронно-протонной ферми-жидкости, разработанная А.А. Исаевым и описанная, например, в [2, с. 15–16]. Здесь общая структура амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния, инвариантной по отношению к вращениям в спиновом и изоспиновом пространствах, имеет вид  $(\vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1 - \text{спиновые и изоспиновые матрицы Паули 2 нуклонов})$ :

$$v(\vec{p}, \vec{q}) = v_0(\vec{p}, \vec{q}) + v_1(\vec{p}, \vec{q}) \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 + v_2(\vec{p}, \vec{q}) \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 + v_3(\vec{p}, \vec{q}) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2). \quad (1.1)$$

$\dim(v_i) = [\text{МэВ} \cdot \text{см}^3]$ ; если импульсы 2 нуклонов до столкновения  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ , а после столкновения –  $\vec{p}_3, \vec{p}_4$ , соответственно, то [2, с. 15]:

$$\vec{p} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_4}{2}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p} - \vec{q}}{2}, \quad \vec{Q} = 2\vec{k} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 = -(\vec{p}_2 - \vec{p}_4). \quad (1.2)$$

$\vec{Q}$  – переданный импульс. Как видно, здесь предполагается отсутствие зависимости амплитуд (и потенциалов) от орбитального момента  $\vec{L}$  относительного движения двух нуклонов. Но, к примеру, в потенциал Хамада – Джонсона, который считается одним из лучших для описания двухчастичного межнуклонного взаимодействия и учитывает отталкивание на малых расстояниях, входят слагаемые, содержащие  $\vec{L}^2, \vec{L} \cdot \vec{S}, (\vec{L} \cdot \vec{S})^2$  [3, с. 66], поэтому под вышеупомянутую процедуру он не подходит даже при отбрасывании слагаемых с  $\vec{L} \cdot \vec{S}, (\vec{L} \cdot \vec{S})^2$  в случае бесконечной ядерной материи. Для простоты возьмем суперпозицию 2 потенциалов: потенциала однопионного обмена (ОПО), яв-

ляющегося пределом потенциала Хамада – Джонсона на достаточном удалении от отталкивающего кора, и  $\delta$ -потенциала, хорошо описывающего рассеяние при низких энергиях:  $V(\vec{r}) = V_{\text{ОПО}}(\vec{r}) + V_{\delta}(\vec{r})$ . Согласно замечанию, сделанному А.А. Исаевым, недостатком такой комбинации является отсутствие зависимости от плотности нуклонной среды (а в применяемом методе наличие такой зависимости является желательным). Здесь  $\delta$ -потенциал (для отдельной пары нуклонов) [3, с. 22–23] и потенциал ОПО (общая структура) [4, с. 56] имеют, соответственно, вид ( $a_X$  – длина рассеяния,  $m^*$  – приведенная масса двух нуклонов,  $m_{\pi}$  – масса пиона;  $f^2/4\pi \approx 0.08$ ,  $\vec{n}_r = \vec{r}/r$ ):

$$V_{\text{ОПО}}(\vec{r}) = (1/3)(f^2/4\pi)(\exp\{-m_{\pi}cr/\hbar\}/r - 4\pi(\hbar/m_{\pi}c)\delta^3(\vec{r}))(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) + (1/3)(f^2/4\pi)(1 + 3\hbar/(m_{\pi}cr) + 3\hbar^2/(m_{\pi}cr)^2)(\exp\{-m_{\pi}cr/\hbar\}/r)S_{12}(\vec{r})\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2, \\ S_{12}(\vec{r}) = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n}_r)(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}_r) - \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2. \quad (1.3)$$

$$V_{\delta}(\vec{r}) = 2\pi\hbar^2 a_X \delta^3(\vec{r})/m^* = g_X \delta^3(\vec{r}). \quad (1.4)$$

В (1.4) "X" обозначает s-состояние (т. е. с нулевым орбитальным моментом) системы 2 нуклонов. Согласно соотношению для 2 фермионов  $(-1)^{L+S+T} = -1$ , с использованием приближения, не учитывающего состояний с  $L \neq 0$ , получаем: "t" – нейтронно-протонное триплетное (суммарный спин  $S = 1$ , изоспин  $T = 0$ ), синглетные ( $S = 0$ ,  $T = 1$ ): "s" – нейтронно-протонное, "p" – протонно-протонное, "n" – нейтронно-нейтронное. Операторы состояний  $S = 1$ ,  $T = 0$  и  $S = 0$ ,  $T = 1$  имеют, соответственно, вид:

$$\hat{C}_1 = (3 + \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(1 - \vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)/16 \text{ и } \hat{C}_2 = (1 - \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(3 + \vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)/16. \quad (1.5)$$

Поскольку во 2-м случае могут реализоваться различные комбинации нуклонов (pp, nn, np), то при составлении потенциала на основе (1.3) и (1.4) нужно учитывать их статистические веса, поскольку при встрече 2 нуклонов вероятность одному иметь сорт "i", а другому сорт "j", равна для односортовых и разносортовых нуклонов, соответственно

$$w_{ii} = n_i^2/(n_p + n_n)^2, w_{ij} = 2n_p n_n/(n_p + n_n)^2. \quad (1.6)$$

### Получение системы уравнений в интегральной форме

Согласно следующему этапу алгоритма [2, с. 15–16], для конструирования нормальных ферми-жидкостных амплитуд найдем фурье-образ нуклон-нуклонных потенциалов по переданному импульсу (легко видеть, что  $\dim(V(\vec{Q})) = \dim(v_i)$ ):

$$v(\vec{p}, \vec{q}) = V(\vec{Q}) = \int V(\vec{r}) \exp\{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}\} d^3r. \quad (2.1)$$

Подстановка (1.3) в (2.1) дает [4, с. 59] ( $S_{12}(\vec{Q})$  определяется, как и в (1.3)):

$$V_{\text{ОПО}}(\vec{Q}) = -(1/3)(f^2/4\pi)(\vec{Q}^2/(\vec{Q}^2 + m_{\pi}^2 c^2))(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + S_{12}(\vec{Q}))\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2, \quad (2.2)$$

Если амплитуды рассеяния  $F$  с размерностью длины (как, например, в теории эффективного радиуса) заранее известны, то следует их умножить на  $-(2\pi\hbar^2)/m^*$ , где  $m^*$  – приведенная масса 2 нуклонов.

$$v(\vec{p}, \vec{q}) = -(2\pi\hbar^2)F/m^*. \quad (2.3)$$

В силу (1.4)–(2.1) фурье-образ  $\delta$ -потенциала имеет вид:

$$V_\delta(\vec{Q}) = g_t \hat{C}_1 + \hat{C}_2(g_s w_{np} + g_{pp} w_{pp} + g_{nn} w_{nn}) = g_t \hat{C}_1 + \hat{C}_2 G. \quad (2.4)$$

Складывая (2.1) с (2.4) (с учетом (1.5)), после чего, сравнивая с (1.1) с учетом (1.2), получаем:

$$\begin{aligned} v_0(\vec{p}, \vec{q}) &= 3(g_t + G)/16, \quad v_1(\vec{p}, \vec{q}) = (g_t - 3G)/16, \\ v_2(\vec{p}, \vec{q}) &= (G - 3g_t)/16 - (1/3)(f^2/4\pi)((\vec{p} - \vec{q})^2/((\vec{p} - \vec{q})^2 + m_\pi^2 c^2))S_{12}(\vec{p} - \vec{q}), \\ v_3(\vec{p}, \vec{q}) &= -(g_t + G)/16 - (1/3)(f^2/4\pi)((\vec{p} - \vec{q})^2/((\vec{p} - \vec{q})^2 + m_\pi^2 c^2)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Затем, производя в (2.5) замены  $\vec{p} \rightarrow \pm \vec{k}$ ,  $\vec{q} \rightarrow \pm \vec{k}$ , аналогично записываем  $v_i(\vec{k}, \vec{k})$ ,  $v_i(\vec{k}, -\vec{k})$ ,  $v_i(-\vec{k}, \vec{k})$ ,  $v_i(-\vec{k}, -\vec{k})$ . Эти величины, согласно тому же алгоритму, необходимы для дальнейшего конструирования нормальных ферми-жидкостных амплитуд. Система уравнений для нормальных ферми-жидкостных амплитуд в общем виде представлена например в [2, с. 15–16]. Чтобы записать ее в матричной форме, объединим нормальные ферми-жидкостные амплитуды в «вектор»:  $\vec{U} = [U_0(\vec{k}), U_1(\vec{k}), U_2(\vec{k}), U_3(\vec{k})]^T$ , после этого вводим обозначения  $y_i(\vec{k}) = v_i(\vec{k}, \vec{k}) + v_i(-\vec{k}, -\vec{k})$ ,  $z_i(\vec{k}) = v_i(\vec{k}, -\vec{k}) + v_i(-\vec{k}, \vec{k})$ , а затем «векторы»  $\vec{Y} = [y_0(\vec{k}), y_1(\vec{k}), y_2(\vec{k}), y_3(\vec{k})]^T$ ,  $\vec{Z} = [z_0(\vec{k}), z_1(\vec{k}), z_2(\vec{k}), z_3(\vec{k})]^T$ . Запишем, согласно [2, с. 16], соотношение ( $I_4$  – единичная матрица  $4 \times 4$ ):

$$\vec{U} = 4I_4 \vec{Y} + \Xi \vec{Z}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & -9 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Таким образом, обозначая  $\frac{f^2 \hbar^3}{m_\pi^2 c} = \lambda_1$ , с учетом (2.5) и (2.6), получаем выражения

для нормальных нуклон-нуклонных ферми-жидкостных амплитуд  $U_i(\vec{k})$ :

$$U_i(\vec{k}) = A_i + B_i H(\vec{k}), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 3(g_t + G) + 6\lambda_1, \quad A_1 = g_t - 3G - 2\lambda_1, \quad A_2 = -3g_t + G - 2\lambda_1, \\ A_3 &= -(g_t + G) + 2\lambda_1/3, \quad B_0 = -6, \quad B_1 = B_2 = 2, \quad B_3 = -2/3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кроме того, с использованием нейтронного избытка, или параметра изоспиновой асимметрии,  $\alpha = (n_n - n_p)/(n_n + n_p)$ , запишем:

$$\begin{aligned} n_p &= n(1 - \alpha)/2, \quad n_n = n(1 + \alpha)/2, \quad w_{pp} = \frac{n_p^2}{(n_p + n_n)^2} = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}, \\ w_{nn} &= \frac{n_n^2}{(n_p + n_n)^2} = \frac{(1 + \alpha)^2}{4}, \quad w_{np} = \frac{2n_p n_n}{(n_p + n_n)^2} = \frac{1 - \alpha^2}{2}, \\ G &= g_s w_{np} + g_{pp} w_{pp} + g_{nn} w_{nn} = (2g_s(1 - \alpha^2) + g_{pp}(1 - \alpha)^2 + g_{nn}(1 + \alpha)^2)/4. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) видно, что величины  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) зависят только от  $\alpha$ :

$$A_i = A_{i1} + A_{i2}\alpha + A_{i3}\alpha^2. \quad (2.10)$$

При этом в (2.7)

$$H(\vec{k}) = f^2 \hbar^3 c / (4\vec{k}^2 + m_\pi^2 c^2), \quad H(\vec{p}, \vec{q}) = f^2 \hbar^3 c / ((\vec{p} - \vec{q})^2 + m_\pi^2 c^2) \quad (2.11)$$

( $f^2/4\pi \approx 0.08$ ; смысл  $m_\pi$ ,  $g_X$  см. выше). Кроме того, отброшены слагаемые, содержащие  $S_{12}$ , в силу сказанного выше и того, что усреднение  $S_{12}$  по углам дает ноль (см., например, [5, с. 118]). Введем совокупности величин:

$$\vec{F} = [F_{00}(\vec{q}), F_{30}(\vec{q}), F_{03}(\vec{q}), F_{33}(\vec{q})]^T, \quad \vec{X} = [\xi_{00}, \xi_{30}, \xi_{03}, \xi_{33}]^T, \quad (2.12)$$

$$\vec{C}(\vec{k}, \vec{q}) = [U_0(\vec{k})F_{00}(\vec{q}), U_1(\vec{k})F_{30}(\vec{q}), U_2(\vec{k})F_{03}(\vec{q}), U_3(\vec{k})F_{33}(\vec{q})]^T, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= [\vec{p}^2/(2m_0) - \mu_{00}^0, -\mu_{03}^0, 0, 0], \\ \mu_{00}^0 &= (\mu_n^0 + \mu_p^0)/2, \quad \mu_{03}^0 = (\mu_n^0 - \mu_p^0)/2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\vec{F}$  – набор компонентов нормальной функции распределения;  $\mu_n^0$  и  $\mu_p^0$  – химические потенциалы нейтронов и протонов;  $m_0$  – масса «голового» нуклона. Согласно алгоритму [2, с. 15–17], с учетом (2.12) – (2.14) запишем:

$$X_i = D_i + (2V)^{-1} \sum_q C_i(\vec{k}, \vec{q}), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

При этом  $V$  – объем системы. Суммирование по  $\vec{q}$  можно заменить интегрированием:

$$\sum_q C_i(\vec{k}, \vec{q}) \rightarrow (V/(2\pi\hbar)^3) \int C_i(\vec{k}, \vec{q}) d^3 \vec{q}. \quad (2.16)$$

Компоненты функции распределения должны удовлетворять условиям нормировки [2, с. 3]:

$$(4/V) \sum_p F_{00}(\vec{p}) = n = n_n + n_p, \quad (4/V) \sum_p F_{03}(\vec{p}) = n_n - n_p \equiv \alpha n,$$

$$\begin{aligned}
 (4/V) \sum_p F_{30}(\vec{p}) &= n^\uparrow - n^\downarrow \equiv \Delta n_{\uparrow\downarrow}, \\
 (4/V) \sum_p F_{33}(\vec{p}) &= n_n^\uparrow + n_p^\downarrow - (n_n^\downarrow + n_p^\uparrow) \equiv \Delta n_{\uparrow\downarrow}.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Здесь  $n_p, n_n$  – концентрации протонов и нейтронов;  $\Delta n_{\uparrow\uparrow}$  и  $\Delta n_{\uparrow\downarrow}$  – ферромагнитный и антиферромагнитный параметры. Вводя обозначения (см. [2, с. 3])

$$\begin{aligned}
 N(\omega) &= \{\exp(\hbar\omega/(k\Theta)) + 1\}^{-1}, \quad \vec{N} = [N(\omega_{+,+}), N(\omega_{+,-}), N(\omega_{+,-}), N(\omega_{-,-})]^T, \\
 \vec{\Omega} &= [\hbar\omega_{+,+}, \hbar\omega_{+,-}, \hbar\omega_{+,-}, \hbar\omega_{-,-}]^T,
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

где  $\Theta$  – температура, запишем соотношения (согласно [2, с. 3]):

$$4\vec{F} = Z_4 \vec{N}, \quad \vec{\Omega} = Z_4 \vec{X}, \quad Z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
 \tag{2.19}$$

Ветви  $\omega_{\pm,+}$  соответствуют нейтронам со спинами вверх и вниз, а ветви  $\omega_{\pm,-}$  соответствуют протонам со спинами вверх и вниз. Подставляя (2.13) в (2.15), с учетом (2.7), (2.12), (2.14), (2.17) получаем:

$$\begin{aligned}
 \xi_{00} &= \vec{p}^2/(2m_0) + nA_0/8 - \mu_{00}, \quad \xi_{03} = \alpha nA_2/8 - \mu_{03}, \\
 \xi_{30} &= \Delta n_{\uparrow\uparrow}A_1/8 + B_1\langle H \rangle_{30}/8, \quad \xi_{33} = \Delta n_{\uparrow\downarrow}A_3/8 + B_3\langle H \rangle_{33}/8.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Смысл величин в (2.20) ( $\langle H \rangle_{ij}$  – математические ожидания функции  $H(\vec{p}, \vec{q})$  по соответствующим ветвям функции распределения):

$$\langle H \rangle_{30} = (4/V) \sum_q H(\vec{p}, \vec{q}) F_{30}(\vec{q}), \quad \langle H \rangle_{33} = (4/V) \sum_q H(\vec{p}, \vec{q}) F_{33}(\vec{q}).
 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{00} &= \mu_{00}^0 - B_0\langle H \rangle_{00}/8, \quad \mu_{03} = \mu_{03}^0 - B_2\langle H \rangle_{03}/8, \\
 \langle H \rangle_{00} &= (4/V) \sum_q H(\vec{p}, \vec{q}) F_{00}(\vec{q}), \quad \langle H \rangle_{03} = (4/V) \sum_q H(\vec{p}, \vec{q}) F_{03}(\vec{q}).
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Из (2.18) и (2.19) видно, что каждая компонента «вектора»  $\vec{F}$  выражается, в итоге, через все компоненты «вектора»  $\vec{X}$ , которые, в свою очередь, выражаются по формулам (2.20). Таким образом, 4 уравнения (2.17) и 2 уравнения (2.21) образуют систему самосогласованных уравнений.

### Приведение самосогласованной системы к алгебраическому виду

Система приводится к алгебраическому виду при замене суммирования на интегрирование по формулам (интегралы взяты согласно [6, с. 281, 597] при  $k\Theta/\mu \ll 1$ ):



$$\sum_q \left\{ \exp\left(\frac{p^2/2m - \mu}{k\Theta}\right) + 1 \right\}^{-1} \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left(\frac{p^2/2m - \mu}{k\Theta}\right) + 1} \approx$$

$$\approx \frac{V(2m\mu)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k\Theta}{\mu}\right)^2\right), \quad (3.1)$$

$$\sum_q p^2 \left\{ \exp\left(\frac{p^2/2m - \mu}{k\Theta}\right) + 1 \right\}^{-1} \rightarrow \frac{V(2m\mu)^{5/2}}{10\pi^2\hbar^3} \left(1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k\Theta}{\mu}\right)^2\right). \quad (3.2)$$

Кроме того, придется перейти к приближению, в котором нормальные фермижидкостные амплитуды квадратичны по импульсам (что и подразумевается в алгоритме [2, с. 15–17]).

$$H(\vec{k}) = \frac{f^2\hbar^3 c}{4\vec{k}^2 + m_\pi^2 c^2} \approx \frac{f^2\hbar^3 c}{m_\pi^2 c^2} \left(1 - \frac{4\vec{k}^2}{m_\pi^2 c^2}\right) = \frac{f^2\hbar^3}{m_\pi^2 c} \left(1 - \frac{4\vec{k}^2}{m_\pi^2 c^2}\right),$$

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{f^2\hbar^3 c}{(\vec{p} - \vec{q})^2 + m_\pi^2 c^2} \approx \frac{f^2\hbar^3}{m_\pi^2 c} \left(1 - \frac{\vec{p}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2}{m_\pi^2 c^2}\right). \quad (3.3)$$

Приближение обосновано тем, что реально  $\vec{k}^2 \ll m_\pi^2 c^2$ .

Введем квадратные 4-рядные матрицы, а также совокупности величин, которые условно можно назвать «4-векторами». Здесь  $\vec{\mu}_4$  – «4-вектор» эффективных химических потенциалов,  $\vec{M}_4$  – «4-вектор» обратных эффективных масс.

$$\vec{N}_4 = [n, \Delta n_{\uparrow\uparrow}, \alpha n, \Delta n_{\uparrow\downarrow}]^T, \quad \vec{Q}_4 = [<\vec{q}^2>_{00}, <\vec{q}^2>_{30}, <\vec{q}^2>_{03}, <\vec{q}^2>_{33}]^T,$$

$$\vec{\mu}_4 = [\mu(+,+), \mu(+,-), \mu(-,+), \mu(-,-)]^T, \quad \vec{M}_{04} = \left[\frac{1}{2m_n}, \frac{1}{2m_n}, \frac{1}{2m_p}, \frac{1}{2m_p}\right],$$

$$\vec{M}_4 = \left[\frac{1}{2m(+,+)}, \frac{1}{2m(+,-)}, \frac{1}{2m(-,+)}, \frac{1}{2m(-,-)}\right], \quad x_{ij} = m(i,j)\mu(i,j). \quad (3.4)$$

$$\vec{R}_4 = [r(+,+), r(+,-), r(-,+), r(-,-)]^T, \quad \vec{S}_4 = [s(+,+), s(+,-), s(-,+), s(-,-)]^T,$$

$$r(i,j) = x_{ij}^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k\Theta}{\mu(i,j)}\right)^2\right), \quad s(i,j) = x_{ij}^{5/2} \left(1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k\Theta}{\mu(i,j)}\right)^2\right). \quad (3.5)$$

$$\vec{I}_4 = [1, 1, 1, 1]^T, \quad \vec{J}_4 = [1, -1, 1, -1]^T,$$

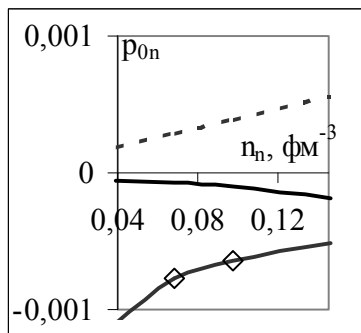
$$A_4 = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_0 & -A_1 & A_2 & -A_3 \\ A_0 & -A_1 & -A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_0 & B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_0 & -B_1 & B_2 & -B_3 \\ B_0 & -B_1 & -B_2 & B_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Элементы этих матриц см. в п. (2.8). Матрицу  $Z_4$  см. в п. (2.19). Обозначим  $\lambda_2 = \frac{f^2 \hbar^3}{8m_\pi^4 c^3}$ ,  $\lambda_3 = \frac{2^{5/2}}{5\pi^2 \hbar^3}$ ,  $\lambda_4 = \frac{2^{1/2}}{6\pi^2 \hbar^3}$ . Тогда, подставляя (3.3) в (2.21) с учетом (3.1), (3.2), систему (2.17), (2.21) можно переписать в виде:

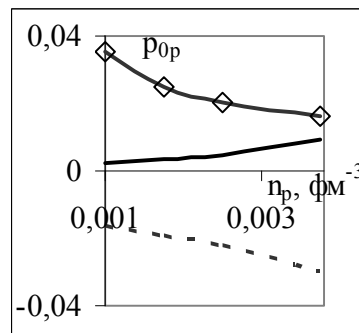
$$\vec{N}_4 = 2\lambda_4 Z_4 \vec{R}_4, \quad \vec{Q}_4 = 2\lambda_3 Z_4 \vec{S}_4, \quad (3.7)$$

$$\vec{M}_4 = \vec{M}_{04} - \lambda_2 B_4 \vec{N}_4, \quad 8\vec{\mu}_4 = 8\lambda_2 B_4 \vec{Q}_4 + 8\mu_{00}^0 \vec{I}_4 + 8\mu_{03}^0 \vec{J}_4 - \lambda_1 B_4 \vec{N}_4 - A_4 \vec{N}_4. \quad (3.8)$$

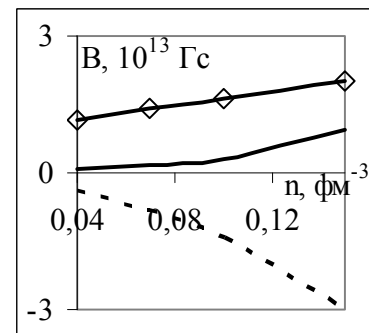
Поскольку в (3.8) компоненты  $\vec{M}_4$  выражаются не сами через себя, а только через компоненты «4-вектора»  $\vec{N}_4$ , компоненты  $\vec{\mu}_4$  выражаются не сами через себя, а только через компоненты «4-векторов»  $\vec{N}_4$ ,  $\vec{Q}_4$ , а компоненты  $\vec{R}_4$  и  $\vec{S}_4$ , как видно из (3.4), (3.5), выражаются через компоненты  $\vec{M}_4$  и  $\vec{\mu}_4$ , то в (3.7) можно выразить правые части систем уравнений через содержимое правых частей систем уравнений (3.8), после чего получится система из 8 самосогласованных алгебраических уравнений с 11 неизвестными:  $\Theta$ ,  $n$ ,  $\Delta n_{\uparrow\uparrow}$ ,  $\alpha n$ ,  $\Delta n_{\uparrow\downarrow}$ ,  $\langle \vec{q}^2 \rangle_{00}$ ,  $\langle \vec{q}^2 \rangle_{30}$ ,  $\langle \vec{q}^2 \rangle_{03}$ ,  $\langle \vec{q}^2 \rangle_{33}$ ,  $\mu_{00}^0$ ,  $\mu_{03}^0$ . Задавая  $T$ , при различных  $\alpha$  получаем 9 неизвестных, что позволяет строить графики. При этом интерес представляют лишь величины  $n$ ,  $\Delta n_{\uparrow\uparrow}$ ,  $\alpha n$ ,  $\Delta n_{\uparrow\downarrow}$ , остальные нужны лишь для получения самосогласованного решения системы.



**Рисунок 1 – Зависимость степени поляризации протонов от их концентрации**



**Рисунок 2 – Зависимость степени поляризации нейтронов от их концентрации**



**Рисунок 3 – Зависимость индукции магнитного поля от общей концентрации среды**

Предварительные расчеты проводились в Mathematica 5.2 для  $\alpha = 0.95$ ,  $T = 10^6$  К. Результаты показаны графически (на других участках они требуют уточнения, поэтому не приведены; участки, соответствующие друг другу на разных графиках, помечены одинаковыми типами маркеров). Как видно, степень поляризации протонов  $p_{0p} \sim 0.1 - 1$ , нейтронов  $p_{0n} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ , преимущественные направления спинов протонов и нейтронов противоположны (т. е. преимущественно сонаправлены их собственные магнитные моменты). Этот результат качественно согласуется с результатами, полученными в рамках ферми-газовых подходов (в т. ч. с учетом ядерного псевдомангнетизма) к нейтронно-протонной системе с теми же потенциалами [7, с. 36–37; 8, с. 35–36; 9, с. 58–60]. Индукцию магнитного поля оценим по формуле ( $\mu_n$  – ядерный магнетон,  $\sigma_p = 2.793$ ,  $\sigma_n = 1.913$ ):

$$B = 4\pi\mu_{\text{я}}(\sigma_{\text{p}}n_{\text{p}}\rho_{0\text{p}} + \sigma_{\text{n}}n_{\text{n}}\rho_{0\text{n}}). \quad (3.9)$$

По порядку величины это дает  $10^{12} - 10^{13}$  Гс, что хорошо согласуется с наблюдаемыми магнитными полями нейтронных звезд.

### Заклучение. Основные результаты

По алгоритму А.А. Исаева исследована поляризованная по спину нормальная нейтронно-протонная ферми-жидкость с псевдопотенциалом Ферми и потенциалом однопионного обмена без учета бета-равновесия. При плотностях, соответствующих жидким ядрам нейтронных звезд, система самосогласованных уравнений имеет решения, соответствующие магнитным полям  $B \sim 10^{12} - 10^{13}$  Гс, что согласуется с данными наблюдений. Векторы спиновой поляризации нейтронов и протонов направлены противоположно, что согласуется с результатами для нейтронно-протонного ферми-газа с ядерным псевдомагнетизмом, описываемым теми же потенциалами.

Результаты подтверждают возможность объяснения механизма формирования магнитных полей нейтронных звезд не только через протонные сверхпроводящие токи, но и через спиновую поляризацию нуклонов в жидком ядре нейтронной звезды.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В.Г. Ядерная прецессия нейтронов. / В.Г. Барышевский, М.И. Подгорецкий // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 47. – С. 1050–1054.
2. Isayev, A.A. Spin polarized states in nuclear matter with Skyrme effective interaction / A.A. Isayev, J. Yang // arXiv: nucl-th/0403059 v1 20 Mar 2004.
3. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский – М.: Атомиздат, 1972. – 351 с.
4. Эриксон, Т. Пионы и ядра: Пер. с англ. / Т. Эриксон, В. Вайзе. – М.: Наука, 1991. – 512 с.
5. Галицкий, В.М. Задачи по квантовой механике: Учебное пособие: В 2 ч. Изд. 3-е, испр. и доп. / В.М. Галицкий, В.И. Коган, Б.М. Карнаков. – М.: Едиториал УРСС, 2001. Ч. 2. – 304 с.
6. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 2000. – 608 с.
7. Серый, А.И. Об эффектах ядерного псевдомагнетизма в вырожденной нуклонной среде / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя прыродазнаучых навук. – 2006. – № 2(26). – С. 33–43.
8. Серый, А.И. К вопросу о ферромагнетизме вырожденного нейтронно-протонного газа / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя прыродазнаучых навук. – 2006. – № 1(25). – С. 31–38.
9. Серый, А.И. К вопросу о ядерном псевдомагнетизме в нуклонной среде с однопионным обменом. / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя прыродазнаучых навук. – 2008. – № 2(31). – С. 55–61.

#### *A.I. Sery. On the Problem of Neutron-Proton Fermi-liquid Spin Polarization*

According to the method elaborated by A. A. Isayev, spin-polarized neutron-proton Fermi-liquid described by Fermi pseudopotential and One-pion-exchange (OPE) potential ignoring beta-equilibrium, is investigated. Within the densities corresponding to liquid cores of neutron stars, the system of self-consistent equations has solutions cocorresponding to magnetic fields with induction  $B \sim 10^{12}$ - $10^{13}$  Gs, which is in good agreement with observable magnetic fields of neutron stars. Neutron and

proton spin polarization vectors are oppositely directed, which is in agreement with the results obtained for neutron-proton Fermi-gas with nuclear pseudomagnetism described by the same potentials. The results confirm the possibility to explain the mechanism of neutron stars magnetic fields formation not only by proton superconducting currents but also by spin polarization of nucleons in the liquid core of a neutron star (V. G. Baryshevsky pointed at this possibility after nuclear pseudomagnetism prediction in 1964).

УДК 539.18

**В.В. Тригук, И.Д. Феранчук****АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ  
ДЛЯ ДВУХЭЛЕКТРОННОГО АТОМА**

В настоящей работе предлагается модификация теории возмущений, позволяющая уже во втором порядке с высокой точностью учесть двухэлектронные корреляционные поправки к энергии. Суммирование по всему спектру возбужденных состояний двухэлектронной системы выполняется с помощью полученного нами аналитического представления для двухчастичной кулоновской функции Грина. На основе разработанного подхода вычислены энергии основного состояния нерелятивистского атома гелия и гелиеподобных ионов. Полученные значения значительно превосходят по точности результаты метода Хартри — Фока и находятся в хорошем согласии с вычислениями на основе многопараметрического метода Ритца.

**Введение**

Квантовомеханические задачи, связанные с описанием нерелятивистских двухэлектронных атомов и ионов, на сегодняшний день не имеют точных аналитических решений, и для них используются различные приближенные методы. Напомним коротко основные результаты вычисления энергии основного состояния  $E_0$  такой системы. Наибольшая точность достигнута с помощью вариационного подхода (метод Ритца [1]), основанного на применении неравенства

$$E_0 \leq \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы. При специальном выборе разложения пробной двухэлектронной волновой функции  $\psi$  и варьировании достаточно большого числа параметров энергии основного состояния двухэлектронных систем (атом гелия, ионы  $H, Li^+, Be^{+2}$  и т.д.) вычислены с высокой степенью точности (см., например, [1; 2]). К сожалению, этот подход достаточно трудно использовать для расчета спектра возбужденных состояний системы, описания ее взаимодействия с внешними полями и обобщить для многоэлектронных атомов. Более универсальным, но менее точным, является метод Хартри — Фока (МХФ), в котором  $\psi$  строится в виде произведения одночастичных волновых функций (например, [3]). Так, энергия основного состояния атома гелия, вычисленная с помощью МХФ, составляет  $E_0^{HF} = -2,86168$  [4], в то время как вариационное решение на основе метода Ритца составляет  $E_0^R = -2,90372$  [1]. Как известно, разница между этими значениями обусловлена более точным учетом двухэлектронного взаимодействия и получила название корреляционной энергии. Здесь и далее используется кулонова система единиц [5].

Детально исследован для этой задачи и наиболее прямой метод решения соответствующего уравнения Шредингера (УШ) на основе канонической теории возмущений (ТВ), который ведет к разложению энергии по обратным степеням заряда ядра  $Z$  ([6; 7]). Основная проблема вычисления последовательных слагаемых ряда ТВ связана с трудностями вычисления сумм по промежуточным состояниям двухэлектронной системы. Поэтому в настоящее время такие суммы оцениваются также на основе вариационного принципа, что позволяет достигнуть высокой точности при учете достаточного числа параметров и членов ряда ТВ.

В то же время для одноэлектронной задачи хорошо известен метод аналитической теории возмущений (АТВ), в которой суммирование по всем возбужденным состояниям электрона в поле ядра (включая непрерывный спектр) выполняется точно с помощью кулоновской функции Грина (КФГ) (например, [8]).

В настоящей работе показано, что АТВ может успешно применяться и в теории двухэлектронных систем. Для этого нами впервые построено замкнутое аналитическое выражение для двухчастичной КФГ и на этой основе выполнено суммирование по всем промежуточным состояниям системы во втором порядке АТВ. Кроме того, показано, что построение АТВ с помощью базисного набора состояний, зависящего от дополнительного параметра (эффективного заряда), позволяет найти аналитическое выражение для  $E_0(Z)$ , точность которого при всех  $Z$  значительно выше результатов МХФ и находится в хорошем согласии со значениями, вычисленными с помощью вариационных подходов.

### АТВ для одноэлектронной задачи

Рассмотрим некоторые соотношения стандартной ТВ, которые понадобятся нам при расчетах. Гамильтониан исходной задачи  $\hat{H}$  разбивается на гамильтониан нулевого приближения  $\hat{H}_0$ , для которого УШ допускает точное решение, и оператор возмущения  $\hat{V}$ , который, как правило, предполагается малым по сравнению с  $\hat{H}_0$ :

$$(\hat{H} - E_n)|\psi_n\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V} - E_n)|\psi_n\rangle = 0$$

Тогда ряд ТВ для энергии невырожденного состояния с точностью до второго порядка имеет следующий вид:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)};$$

$$\hat{H}_0|\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle; E_n^{(1)} = \langle\psi_n^{(0)}|\hat{V}|\psi_n^{(0)}\rangle; E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle\psi_m^{(0)}|\hat{V}|\psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}. \quad (1)$$

Вычисление поправки первого порядка, как правило, не представляет трудностей. Однако при вычислении поправки второго порядка возникают трудности при суммировании по всему спектру возбужденных состояний невозмущенной задачи. Несмотря на то, что сумма по дискретному спектру может содержать как конечное, так и бесконечное (в случае кулоновского поля) число слагаемых, она сходится достаточно быстро. Основная вычислительная проблема связана с расчетом вклада состояний непрерывного спектра, который в общем случае является весьма существенным.

Эффективным способом преодоления указанных трудностей является метод функций Грина (ФГ) [9]. В случае одночастичной задачи ФГ в координатном представлении является решением уравнения

$$(\hat{H} - E)G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

которое может быть представлено в виде

$$G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_i \frac{\psi_i^*(\vec{r})\psi_i(\vec{r}')}{E_i - E}.$$

Здесь суммирование включает как сумму по дискретному спектру собственных функций, так и интегрирование по непрерывному спектру. Существенным является то обстоятельство, что для Гамильтониана  $\hat{H}_0$ , соответствующего движению одного электрона в поле ядра, хорошо известны аналитические выражения для кулоновской функции Грина (КФГ) (например, [10]). Приведем ее разложение по сферическим гармоникам  $Y_{l,m_l}(\Omega)$ :

$$G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l,m_l} \frac{1}{r r'} G_{E,l}(r, r') Y_{l,m_l}^*(\Omega) Y_{l,m_l}(\Omega');$$

$$G_{E,l}(r, r') = \frac{\nu}{Z} \frac{\Gamma(l+1-\nu)}{\Gamma(2l+2)} M_{\nu, l+1/2} \left( \frac{2Z}{\nu} r_{<} \right) W_{\nu, l+1/2} \left( \frac{2Z}{\nu} r_{>} \right).$$

Здесь  $\nu = Z/\sqrt{-2E}$ ;  $M, W$  – функции Уиттекера,  $r_{<}$  и  $r_{>}$  – соответственно минимальное и максимальное из  $r, r'$ .

Поскольку в сумме (1) исключено одно слагаемое, для вычисления поправок к основному состоянию применяется редуцированная КФГ, полученная в работе [11]:

$$\tilde{G}_{E_0}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i \neq 0} \frac{\psi_i^*(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}')}{E_i - E_0} = \sum_{l, m_l} \frac{1}{r r'} \tilde{G}_{E_0, l}(r, r') Y_{l, m_l}^*(\Omega) Y_{l, m_l}(\Omega').$$

$$\tilde{G}_{E_0, l \neq 0} = G_{E_0, l}; \quad \tilde{G}_{E_0, 0}(r, r') = -4Z r r' e^{-x} \left[ -f(x-z) + \ln(x+z) - \frac{1}{x+z} + x - \frac{5}{2} + \gamma \right].$$

Здесь  $x = Z(r+r')$ ,  $z = Z|r-r'|$ ,  $f(v) = 1 - \gamma + \frac{1}{v} - \frac{e^v}{v} + Ei(v) - \ln(v)$ ,  $v = x-z$ ;  $\gamma = 0,5772156649015329$  – константа Эйлера.

С помощью КФГ выражение для второй поправки к энергии основного состояния возмущенного одноэлектронного атома может быть записано в виде:

$$E_0^{(2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{\langle \psi_0^{(0)}(\vec{r}') | \hat{V}(\vec{r}') | \psi_m^{(0)}(\vec{r}') \rangle \langle \psi_m^{(0)}(\vec{r}) | \hat{V}(\vec{r}) | \psi_0^{(0)}(\vec{r}) \rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} = \int d\vec{r} \int d\vec{r}' \psi_0^{(0)}(\vec{r}') V(\vec{r}') \tilde{G}_{E_0}(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}) \psi_0^{(0)}(\vec{r}). \quad (2)$$

Таким образом, суммирование по всему спектру возбужденных состояний сводится к вычислению интегралов от аналитических функций. Такой подход носит название аналитической теории возмущений (АТВ) и эффективно используется для расчета характеристик одноэлектронного атома во внешних полях [12].

### Двухчастичная кулоновская функция Грина

Покажем, что АТВ можно построить и в применении к двухэлектронному атому. В нерелятивистком приближении и без учета движения ядра исходный гамильтониан атома имеет вид:

$$\hat{H} = \sum_{i=1,2} \left[ -\frac{\Delta_i}{2} - \frac{Z}{r_i} \right] + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (3)$$

Хорошо известно, что достаточно высокую точность для атома гелия в основном состоянии дает приближение эффективного заряда  $Z_e$ , что можно использовать для выделения модельного гамильтониана нулевого приближения для оператора (3):

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2} - \frac{Z_e}{r_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} - \frac{Z_e}{r_2}; \quad E_0^{(0)} = -Z_e^2.$$

и потенциала возмущения:

$$\hat{V} = -\frac{Z-Z_e}{r_1} - \frac{Z-Z_e}{r_2} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (4)$$

Отметим, что модельный Гамильтониан, который обеспечивает точность, сравнимую с результатами метода ХФ, с аналитическим выбором эффективных зарядов для электронов на различных оболочках можно построить и в случае многоэлектронных атомов [13].

Как и в одноэлектронном атоме, нетривиальным оказывается вычисление поправки второго порядка. Согласно ТВ, искомая величина определяется выражением

$$E_0^{(2)} = \sum_{\lambda=0} \sum_{\mu=0} \frac{|\langle \lambda\mu | \hat{V} | 00 \rangle|^2}{-Z_e^2 - E_\lambda^{(0)} - E_\mu^{(0)}} \quad (5)$$

Здесь символом  $|00\rangle = \psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2)$  обозначен вектор основного состояния. Штрих у знака суммы означает, что при суммировании следует пропустить слагаемое с  $|\lambda\mu\rangle = |00\rangle$ . Поскольку невозмущенный гамильтониан имеет собственные функции как дискретного ( $E < 0$ ), так и непрерывного ( $E > 0$ ) спектров, суммирование включает медленно сходящееся интегрирование по непрерывному спектру обоих электронов. Именно на этом основании обычно отказываются от прямого вычисления поправки второго порядка и переходят к ее вариационной оценке [6].

Покажем, однако, что применение АТВ в этой задаче позволяет выполнить необходимое суммирование. Для непосредственных вычислений разобьем выражение (5) на два слагаемых:

$$E_0^{(2)} = 2 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{|\langle \lambda 0 | \hat{V} | 00 \rangle|^2}{-Z_e^2/2 - E_\lambda^0} + \sum_{\lambda \neq 0} \frac{|\langle \lambda\mu | \hat{V} | 00 \rangle|^2}{-Z_e^2 - E_\lambda^{(0)} - E_\mu^{(0)}} \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (6)$$

Первое слагаемое можно вычислить по аналогии с (2):

$$\Sigma_1 = -2 \int \psi_0^*(\vec{r}_1)\psi_0^*(\vec{r}_2)\hat{V}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\tilde{G}_{-Z_e^2/2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1)\psi_0^*(\vec{r}_2) \cdot \psi_0^*(\vec{r}_2)\hat{V}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')\psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_1' d\vec{r}_2'$$

Учитывая, что  $\psi_0(\vec{r}) = \psi_0^*(\vec{r}) = \psi_0(r) Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \psi_0(r)$ , после интегрирования

по угловым переменным получим:

$$\Sigma_1 = -2 \int \psi_0(r_1)\psi_0^2(r_2)\hat{V}_0(r_1, r_2)\tilde{G}_{-Z_e^2/2, 0}(r_1, r_1)\psi_0(r_2)\psi_0^2(r_2)\hat{V}_0(r_1', r_2') dr_1 dr_2 dr_1' dr_2', \quad (7)$$

где  $V_0(r_1, r_2) = -(Z - Z_e) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{r_>}$ ;  $r_>$  есть наибольшее из  $r_1, r_2$ .

Для вычисления второй суммы в выражении (6) воспользуемся тождеством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(a+iv)(b-iv)} = \frac{2\pi}{a+b}.$$

Это позволяет «разделить» суммирование по квантовым числам отдельных электронов:

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{\lambda \neq 0} \sum_{\mu \neq 0} \frac{\langle \lambda\mu | \hat{V} | 00 \rangle \langle 00 | \hat{V} | \lambda\mu \rangle}{\left( -\frac{Z_e^2}{2} - E_\lambda^{(0)} + iv \right) \left( -\frac{Z_e^2}{2} - E_\mu^{(0)} - iv \right)} dv$$

Тогда каждое из суммирований можно выполнить с помощью КФГ, если использовать ее аналитическое продолжение по параметру  $E$  на комплексные значения  $Z_e^2/2 \pm iv$ :

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int \psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2)\psi_0(\vec{r}_1')\psi_0(\vec{r}_2')\hat{V}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\tilde{G}_{-Z_e^2/2+iv}(\vec{r}_1, \vec{r}_1') \cdot \tilde{G}_{-Z_e^2/2-iv}(\vec{r}_2, \vec{r}_2')\hat{V}(\vec{r}_1', \vec{r}_2') d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_1' d\vec{r}_2' \quad (8)$$

Величину



$$\sum_{\lambda=0} \sum_{\mu=0} \frac{|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|}{E - E_{\lambda} - E_{\mu}} = 2\tilde{G}_{E/2}(\vec{r}_1, \vec{r}'_1)\psi_0(\vec{r}_2)\psi_0(\vec{r}'_2) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{E/2+iv}(\vec{r}_1, \vec{r}'_1)\tilde{G}_{E/2-iv}(\vec{r}_2, \vec{r}'_2)dv$$

можно назвать двухчастичной редуцированной КФГ. Полной двухчастичной КФГ следует считать выражение:

$$\sum_{\lambda=0} \sum_{\mu=0} \frac{|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|}{E - E_{\lambda} - E_{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{E/2+iv}(\vec{r}_1, \vec{r}'_1)G_{E/2-iv}(\vec{r}_2, \vec{r}'_2)dv,$$

однако в дальнейших расчетах эта функция не используется.

Учитывая, что вклад в (8) от слагаемых  $-(Z - Z_e)/r_1 - (Z - Z_e)/r_2$  в операторе возмущения равен нулю в силу условий ортогональности, в результате интегрирования по угловым переменным в (7) находим:

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int \psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\psi_0(r'_1)\psi_0(r'_2) \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{r_{<}^{l'}}{r_{>}^{l'+1}} \cdot \tilde{G}'_{-Z_e^2/2+iv,l}(r_1, r'_1)\tilde{G}'_{-Z_e^2/2-iv,0}(r_2, r'_2) dr_1 dr_2 dr'_1 dr'_2 \quad (9)$$

Здесь

$$\tilde{G}'_{-Z_e^2/2+iv,l}(r_1, r'_1) = \begin{cases} G_{-Z_e^2/2+iv,0}(r_1, r'_1) \pm rr' \frac{\psi_0(r)\psi_0(r')}{iv}, & l=0 \\ G_{-Z_e^2/2+iv,l}(r_1, r'_1), & l>0 \end{cases}$$

### Численные результаты

Результат вычисления энергии основного состояния атома гелия с учетом первого порядка ТВ хорошо известен:

$$E_0^{(0)} = -Z_e^2; \quad E_0^{(1)} = -2Z_e(Z - Z_e) + \frac{5}{8}Z_e.$$

До выполнения численного расчета второй поправки найдем ее зависимость от эффективного заряда в аналитическом виде. Действительно, знаменатель дроби в выражении (5) может быть представлен в виде  $E_0^{(0)} - E_n^{(0)} = Z_e^2(\epsilon_0 - \epsilon_n)$ , где  $\epsilon_0, \epsilon_n$  – величины, соответствующие  $Z_e = 1$ . Представим оператор возмущения в виде

$$\hat{V}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -(Z - Z_e)V_1(r_1, r_2) + V_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2);$$

$$V_1(r_1, r_2) = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right); \quad V_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (10)$$

Матричные значения от произведений «приведенных» операторов также пропорциональны  $Z_e^2$ :  $|\langle V_1 \rangle|^2 \sim |\langle V_2 \rangle|^2 \sim \langle V_1 V_2 \rangle \sim Z_e^2 T$ ;  $T$  – величины этих матричных элементов, соответствующие  $Z_e = 1$ .

Отсюда следует общая структура зависимости от  $Z_e$  для поправки второго порядка:

$$E_2^{(0)} = -a(Z - Z_e)^2 + b(Z - Z_e) - c. \quad (11)$$

Здесь  $a, b, c$  – величины, не зависящие от  $Z$  и  $Z_e$ . Вычисляя их при некоторых фиксированных  $Z, Z_e$ , имеем возможность в дальнейшем находить  $E_2^{(0)}$  при произвольных  $Z$  и  $Z_e$ . Следует заметить, что полученные нами численные результаты при различных значениях величин зарядов полностью подтверждают выражение (11).

Процедура вычисления параметров  $a, b$  может быть значительно упрощена за счет возможности аналитического интегрирования по переменным  $r_2, r_2'$  в выражении

(7). В конечном итоге требуется численное интегрирование только по двум переменным, что не представляет существенных трудностей для современной вычислительной техники. Согласно нашим расчетам,  $a = 1$  и  $b = 5/8$  с погрешностью не более  $10^{-8}$ .

Наиболее сложным оказывается вычисление выражения (9) (и, соответственно, коэффициента  $c$  в (11)). При вычислении суммы по  $l$  мы ограничивались  $l_{max} = 10$ , поскольку, согласно нашим расчетам, данный ряд сходится лучше, чем  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ . Итоговое значение  $c$  составляет  $0,1575 \pm 0,0006$ .

Таким образом, энергия во втором порядке определяется выражением:

$$E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} = -Z^2 + \frac{5}{8}Z - 0,1575.$$

Полученный результат показывает, что энергия, вычисленная с учетом поправок второго порядка включительно, не зависит от выбора эффективного заряда и с рассматриваемой точностью совпадает с неасимптотической частью известного разложения по степеням  $Z^{-1}$  [7]. В частности, для основного состояния атома гелия, находим

$$E_0 \approx -2,9076.$$

Как было показано в ряде работ (например, [14; 15]), использование дополнительного параметра в Гамильтониане нулевого приближения  $-Z_e$  в операторе (4) – позволяет находить равномерно-пригодное аналитическое приближение для его собственных значений уже в низких порядках ТВ. Как следует из приведенных выше результатов, в рассматриваемой задаче зависимость от  $Z_e$  появляется в третьем порядке ТВ. Эту зависимость можно найти в общем виде, используя разложение (10) для оператора возмущений:

$$E_0^{(3)} = \left[ -\alpha(Z - Z_e)^3 + a(Z - Z_e)^2 - b(Z - Z_e) - c \right] \frac{1}{Z_e}. \quad (12)$$

При отсутствии взаимодействия электронов поправка  $E_0^{(3)}$  тождественно равна нулю, следовательно, коэффициент  $\alpha$  в этом разложении должен обращаться в нуль, и формулу (12) можно переписать в виде:

$$E_0^{(3)} = aZ_e + (b - 2aZ) + \frac{aZ^2 - bZ - c}{Z_e}.$$

Согласно [14; 15], условие для определения  $Z_e$  вытекает из требования, чтобы точные собственные значения не зависели от этого искусственно введенного параметра. С рассматриваемой точностью это условие приводит к уравнению:

$$\frac{\partial E_0}{\partial Z_e} \approx \frac{\partial E_0^{(3)}}{\partial Z_e} = 0; \quad Z_e = \sqrt{\frac{aZ^2 - bZ - c}{a}}.$$

В результате зависимость  $E_0^{(3)}$  находится в аналитической форме, но с тремя неопределенными пока параметрами:

$$E_0^{(3)} = 2aZ \left[ \sqrt{1 - \frac{b}{aZ} - \frac{c}{aZ^2}} - 1 \right] + b. \quad (13)$$

Значения этих параметров можно найти численно на основе АТВ при  $Z_e = 1$  с помощью КФГ, как и для поправки второго порядка. Однако в этом случае объем необходимых численных расчетов существенно возрастает. Поэтому мы вычислим эти параметры, используя известные результаты обычной ТВ, найденные в виде разложения по  $Z^{-1}$ :

$$E \approx -Z^2 + \frac{5}{8}Z - 0,15766 + \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z^2} + \frac{C}{Z^3} + \dots; \quad (14)$$

$A = 0,008698991; B = -0,000888587; C = -0,001036372$ ,  
 которое сходится при заряде ядра, большем некоторого критического значения  $Z > Z_{cr}$  [7]. Для этого достаточно сравнить аналитическую функцию (13) и ряд (14) в общей области применимости  $Z \gg 1$ . Учитывая 3 первых слагаемых в разложении функции (13), находим:

$$a = -\frac{1}{4} \frac{A^3}{AC - B} = -0,0088741216 ; \quad b = \frac{1}{2} \frac{A^2 B}{B^2 - AC} = -0,034289497 ;$$

$$c = -A + \frac{1}{4} \frac{AB^2}{AC - B^2} = 0,0167841769 .$$

В результате находим следующее аналитическое выражение для энергии основного состояния двухэлектронной системы в зависимости от заряда ядра:

$$E_0 \approx -Z^2 + \frac{5}{8} Z - 0,1575 + 2aZ \left[ \sqrt{1 - \frac{b}{aZ} - \frac{c}{aZ^2}} - 1 \right] + b \quad (15)$$

с указанными выше  $a, b, c$ .

В таблице 1 приведены результаты сравнения вариационных расчетов  $E_R$  стандартной ТВ с учетом 13 порядков и результатов АТВ, найденных с учетом второго порядка ( $\sum_{i=0}^2 E_0^{(i)}$ ) и по формуле (15), учитывающей поправку 3-го порядка ( $\sum_{i=0}^3 E_0^{(i)}$ ) для полной энергии двухэлектронных атомов и ионов.

Таблица – Величины полной энергии двухэлектронных атомов и ионов в различных приближениях АТВ

$Z$	$\sum_{i=0}^2 E_0^{(i)}$	$\sum_{i=0}^3 E_0^{(i)}$	$E_R$
1	-0,5325	-0,5253	-0,52759152
2	-2,9075	-2,9035	-2,90372433
3	-7,2825	-7,2797	-7,27991339
4	-13,657	-13,655	-13,65556622
5	-22,032	-22,031	-22,03097156
6	-32,407	-32,406	-32,40624658
7	-44,782	-44,781	-44,78144513
8	-59,157	-59,156	-59,15659510
9	-75,532	-75,532	-75,53171234
10	-93,907	-93,907	-93,90680649

### Заключение

Как видно из приведенных результатов, разработанный нами подход для вычисления бесконечных сумм по возбужденным состояниям во втором порядке ТВ для двухэлектронных систем позволяет получить величины, находящиеся в хорошем согласии с результатами вариационного подхода к стандартной ТВ и метода Ритца. Рассмотренный нами метод может быть использован в дальнейшем для учета двухэлектронных корреляций в многоэлектронных атомах, а также для описания возбужденных состояний.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Schwartz, C. Ground state of the helium atom / *Phys. Rev.* – 1962. – Vol. 128, № 3. – P. 1146–1148.
2. Frankowski, K. Logarithmic terms in the wave functions of the ground state of two-electron atoms / K. Frankowski, C.L. Pekeris // *Phys. Rev.* – 1966. – Vol. 146, № 1. – P. 46–49.
3. Fischer, F.C. The /Hartree – Fock method for atoms. / F.C. Fischer. – Wiley Interscience. – New York:1997. – 308 p.
4. Desclaux, J.P. Relativistic Dirac – Fock expectation values for atoms with  $Z = 1$  to  $Z = 20$  / J.P. Desclaux // *At. Data Nucl. Data Tables.* – 1973. – Vol. 12. – P. 311–406.
5. Ландау, Л.Д. Курс теоретической физики. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 800 с.
6. Scherr, C.W. Two-electron atoms III. A sixth-order perturbation study of the 11S ground state. / C.W. Scherr, R.E. Knight // *Rev. Mod. Phys.* – 1963. – Vol. 35, № 3. – P. 436–442.
7. Baker, J.D. Radius of convergence and analytic behavior of the  $1/Z$  expansion / J.D. Baker [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 1247–1273.
8. Dalgarno, A. The exact calculation of longrange forces between atoms by perturbation theory / A. Dalgarno, J.T. Lewis // *Proc. Roy. Soc.* – 1955. – Vol. 233A, № 1192. – P. 70–74.
9. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики. / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. В 2-х т. – т. 1. – М.: Изд. иностр. лит., 1958. – 930 с.
10. Веселов, М.Г. Теория атома: Строение электронных оболочек / М.Г. Веселов, Л.Н. Лабзовский. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
11. Hostler, L.C. Reduced Coulomb Green's function for bound state calculations / L.C. Hostler // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 178, № 1. – P. 126–131.
12. Маханек, А.Г. Аналитические методы в квантовой механике теории возмущений / А.Г. Маханек, В.Г. Корольков. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 327 с.
13. Тригук, В.В. О нулевом приближении для гамильтониана многоэлектронного атома / В.В. Тригук, И.Д. Феранчук // *Вєсцї НАН Беларусї. Сер. фїз.-мат. навук.* – 2009. – № 2. – С. 64–70.
14. Feranchuk, I.D. Operator Method in the Problem of Quantum Anharmonic Oscillator / I.D. Feranchuk [et al.] // *Ann. of Phys.* – 1995. – Vol. A 238. – P. 370–440.
15. Иванов, А.А. Квантовая механика систем без малого параметра: монография / А.А. Иванов, И.Д. Феранчук. – Минск: БНТУ, 2009. – 369 с.

***V.V. Triguk, I.D. Feranchuk. Analytic Perturbation Theory for Two-Electron Atoms***

The modification of perturbation theory which allows taking into account the two-electron correlation corrections is proposed in the article. The summation over infinite spectrum of excited states is accomplished by means of our analytic expression for two-particle Coulomb Green function. Ground state energy of helium and set of two-electron ions are calculated by means of this method. Our results are significantly more accurate than those of the Hartree – Fock method and are in good agreement with the results of multi-term Ritz variational method.

УДК 551.492

*А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов*

## О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна – Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание и моменты распределения вероятностей изменения речного стока. Эти параметры являются решением системы дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера – Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности. В отличие от использования численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений в работе получено решение, представленное в виде степенных рядов. Для этого были исследованы функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Приведен пример с использованием предлагаемого решения рассматриваемой модели стохастической гидрологии.

### Введение

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть  $\bar{V}$  – среднегодовой расход воды, а  $V_t$  – расход воды в момент времени  $t$ . Тогда, полагая  $X_t = (V_t - \bar{V}) / \bar{V}$ , процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна – Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

где  $W_t$  – стандартный винеровский процесс (так что  $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$  – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром  $\sigma = C_V \sqrt{2k}$ ),  $C_V$  – коэффициент вариации,  $k^{-1}$  – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса  $a(t, x) = -kx$  и диффузии  $\sigma(t, x) = \sigma^2$ , переходная плотность вероятности  $p(t, x, y)$  которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера – Планка (т. е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial y} (yp) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент  $k$  определяется по формуле  $k = -\ln r$ , так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид  $e^{-kr}$ , а  $r$  – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  сток равен  $x$ , а  $x_*$  – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение  $V$  будет находиться в полуинтервале  $[x_*, \infty)$  при условии, что  $x \in [x_*, +\infty)$ . Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = -kx \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Пусть  $T$  – момент времени, в который значение  $V$  покинет промежуток  $[x_*, +\infty)$ . Тогда

$$\text{prob}(T \geq t) = G(t, x), \quad G(t, x) = \int_{x_*}^{+\infty} p(t, x, y) dy.$$

Интегрируя (2) по  $y$  на интервале от  $x_*$  до  $+\infty$ , получаем

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = -kx \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке  $x = x_*$ , получим следующие краевые условия:

$$G(t, x)|_{x=x_*} = 0, \quad \left. \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} \right|_{x=+\infty} = 0.$$

Так как функция  $1 - G(t, x)$  является распределением случайной величины  $T$ , то моменты  $n$ -ого порядка времени достижения границы  $x_*$  определяются соотношениями

$$T_k = - \int_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} dt = \int_0^{+\infty} kt^{k-1} G(t, x) dt$$

Интегрируя по  $t$  на интервале от 0 до  $+\infty$  соотношение  $nt^{n-1} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = -kx \frac{\partial}{\partial x} (nt^{n-1} G(t, x)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} (nt^{n-1} G(t, x))$  и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} dt = G(+\infty, x) - G(0, x) = -1,$$

получаем следующие уравнения для  $T_1$  и  $T_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 T_1}{dx^2} - kx \frac{dT_1}{dx} &= -1, \quad \text{при } \frac{dT_1}{dx}(+\infty) = 0, \quad T_1(x)|_{x=x_*} = 0, \\ \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 T_n}{dx^2} - kx \frac{dT_n}{dx} &= -nT_{n-1}, \quad \text{при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0, \quad T_n(x)|_{x=x_*} = 0. \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1, \quad k^2T_2 = \theta_2, \\ x \frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi, \quad x_* \frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания  $T_1$  и среднего квадратичного отклонения  $\sqrt{T_2 - T_1^2}$ :

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0, \\ \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_2(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0. \quad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

### Решение уравнений модели.

Найдем точное решение первого уравнения системы (3).

Введем замену  $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$ , приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка  $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$  с начальным условием  $f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$ .

Тогда  $f_1(\xi) = (C - \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}$  – общее решение дифференциального уравнения  $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$ .

Заметим, что  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ . Тогда, учитывая начальное условие

$$f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0, \text{ имеем } f_1(\xi) = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Используя разложение функции  $e^z$  в ряд Маклорена, имеем:

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и } e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда  $\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$  и, следовательно,  $f_1(\xi)$  можно

$$\text{представить в виде } f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем следующее утверждение.

**Утверждение.**  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$  для любого натурального  $m$ .

Доказательство. Используя бином Ньютона,  $x^m(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k+m}$

и интегрируя, имеем

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k+m} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}.$$

Заметим, что, с другой стороны,

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x^2)^n = \frac{2n}{m+1} I_{m+2,n-1}.$$

$$\text{Тогда } I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^n (m+2k-1)} I_{m+2n,0}.$$

Учитывая, что  $I_{m+2n,0} = \int_0^1 x^{m+2n} dx = \frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+2n+1}$ , имеем

$$I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^{n+1} (m+2k-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!} \quad \text{для любого}$$

натурального  $m$  и  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ .

Заметим также, что значения  $I_{m,n}$  связаны с бета-функцией

$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$  соотношением:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции  $B(p, q)$  и гамма-функции

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  – интегралов Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{m,n} = I_{2i,n} = \frac{1}{2} B\left(i + \frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(i + \frac{1}{2} + n+1\right)} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{j=1}^i \left(i + \frac{1}{2} - j\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) n!}{2 \prod_{j=1}^{i+n+1} \left(i + \frac{1}{2} + n + 1 - j\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^i \prod_{j=1}^i \left(i + \frac{1}{2} - j\right) 2^n n!}{2^{i+n+1} \prod_{j=1}^{i+n+1} \left(i + \frac{1}{2} + n + 1 - j\right)} = \\
&= \frac{\prod_{j=1}^i (2i + 1 - 2j)(2n)!!}{\prod_{j=1}^{i+n+1} (2i + 1 + 2n + 2 - 2j)} = \frac{(2i - 1)!!(2n)!!}{(2i + 1 + 2n)!!} = \frac{(m - 1)!!(2n)!!}{(m + 1 + 2n)!!} \\
I_{m,n} = I_{2i-1,n} &= \frac{B(i, n + 1)}{2} = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n + 1)}{2\Gamma(i + n + 1)} = \frac{2^{i-1}(i - 1)!2^n n!}{2^{i+n}(i + n)!} = \\
&= \frac{(2i - 2)!!(2n)!!}{(2i + 2n)!!} = \frac{(m - 1)!!(2n)!!}{(m + 2n + 1)!!}.
\end{aligned}$$

**Утверждение доказано.**

Следовательно,  $f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n + 1)!!}$ .

Так как  $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$ , то

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n + 1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n + 1)!!(2n + 2)} + C -$$

решение уравнения  $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1$ .

Учитывая начальное условие  $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$ , получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \quad (4)$$

где  $S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n + 1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n + 1)!!(2n + 2)}$  или

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k - 1)!!k}, \text{ а } \{t\} - \text{дробная часть числа } t.$$

Используя предлагаемую методику, найдем решение уравнения:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} - \xi \frac{dG}{d\xi} = -S_1(\xi), \quad \left. \frac{dG}{d\xi} \right|_{\xi=+\infty} = 0, \quad G(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0.$$

Введя замену  $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$ , приходим к линейному дифференциальному

уравнению первого порядка  $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$ , с начальным условием

$$f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0.$$

Аналогично, как и для первого уравнения системы (3), получим  $f_2(\xi) = (C - \int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt) e^{\frac{\xi^2}{2}}$  – общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi).$$

Учитывая начальное условие  $f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$ , имеем

$$f_2(\xi) = \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt - \int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Учитывая, что  $S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k}{2} \right\}} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!! k}$ , найдем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k}{2} \right\}}}{(k-1)!! k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Заметим, что для любого  $n \geq 2$  выполняется

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = -t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-2} dt = (n-1) J_{n-2}.$$

Учитывая, что,  $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  и  $J_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t dt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1$ ,

имеем  $J_{2k} = (2k-1)!! J_0 = (2k-1)!! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  и  $J_{2k+1} = (2k)!! J_1 = (2k)!!$ , для любого натурального  $k$ .

Заметим, что значения  $J_n$  связаны с гамма-функцией соотношением:

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-p} (2p)^{\frac{n-1}{2}} dp = \sqrt{2^{n-1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Тогда, используя свойства гамма-функции, получим

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, J_1 = \Gamma(1) = 0! = 1 \text{ и}$$

$$J_{2k} = \frac{2^k}{\sqrt{2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{2}} \prod_{i=1}^k \left(i + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2k+1)!!,$$

$$J_{2k+1} = 2^k \Gamma(k+1) = 2^k k! = (2k)!!.$$

Следовательно,  $J_k = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k-1}{2} \right\}} (k-1)!!$  и

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \theta_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k}{(k-1)!!k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2, \text{ так как}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Таким образом,  $f_2(\xi) = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$  – решение дифференциального уравнения  $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$ , удовлетворяющее начальному условию  $f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$ .

Заметим, что

$$J_k(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int_0^{\frac{\xi^2}{2}} e^{-x} (2x)^{\frac{k-1}{2}} dx = \sqrt{2^{k-1}} \Gamma_{\frac{\xi^2}{2}} \left( \frac{k+1}{2} \right), \quad \text{где}$$

$\Gamma_z(p) = \int_0^z e^{-t} t^{p-1} dt$  – неполная гамма-функция.

Используя разложение функции  $e^z$  в ряд Маклорена, имеем

$$J_k(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int_0^{\xi} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^m m!} \right) t^k dt = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \xi^{2m+1+k}}{(2m)!!(2m+1+k)}$$

$$\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} \theta_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k} \int_0^{\xi} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi)}{(k-1)!!k}$$

$$\text{Тогда } f_2(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}.$$

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$J_m(\xi) \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1+m}}{2^n n! (2n+1+m)} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \xi^{2n+1+m}}{2^k k! (2k+1+m) 2^{n-k} (n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} \right) \frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!}.$$

Следовательно, используя утверждение, для любого натурального  $m$  выполняется  $J_m(\xi) \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} \right) \frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(m-1)!! \xi^{2n+1+m}}{(2n+1+m)!!}$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f_2(\xi) &= e^{\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}. \end{aligned}$$

Производя преобразования повторного ряда, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k} = \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

Тогда

$$f_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как  $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$ , то, учитывая начальное условие  $G(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$ ,

получаем, что  $G(\xi) = S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$ ,

$$\begin{aligned} \text{где } S_2(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)} \text{ или} \end{aligned}$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \left[ \ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}} \right] \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k},$$

а  $[t]$  и  $\{t\}$  – целая и дробная части числа  $t$  соответственно.

Так как, учитывая (4),  $H(\xi) = -S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)$  – решение уравнения

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - \xi \frac{dH}{d\xi} = S_1(\xi_*), \quad \frac{dH}{d\xi} (+\infty) = 0, \quad H(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0, \text{ то}$$

$$\theta_2(\xi) = 2(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)), \quad (5)$$

Таким образом, соотношения (4), (5) – решение системы дифференциальных уравнений (3).

### Примеры и выводы.

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги  $\bar{V} = 239 \text{ км}^3/\text{год}$  (объем выборки  $n = 113$ ), среднеквадратичное отклонение равно  $46 \text{ км}^3/\text{год}$ . Тогда  $C_v = 0,19$ . Если коэффициент корреляции  $r$  между смежными значениями стока равен  $0,42$ , тогда  $k = -\ln 0,42 \cong 0,9 \text{ год}^{-1}$ ,  $\sigma = 0,257 \text{ год}^{-0,5}$ ,

$\sigma^2 = 0,066$  год<sup>-1</sup>. Предположим, что в начальный момент времени  $V = 377$  км<sup>3</sup>/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км<sup>3</sup>/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км<sup>3</sup>/год)? В данном случае  $\xi_* = -3$  (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях  $C_V$ ), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует  $\xi = 3$ .

Таблица – Решение системы (3)

$\xi_*$	$\xi$					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5 (85,6)	84,8 (86,1)	86,9 (86,2)	87,8 (86,2)	88,4 (86,2)	<b>88,7 (86,2)</b>
-2		8,3 (10,0)	10,4 (10,3)	11,3 (10,3)	11,9 (10,3)	12,2 (10,3)
-1			2,1 (2,4)	3,0 (2,6)	3,5 (2,6)	3,9 (2,6)
0				0,9 (0,9)	1,4 (1,0)	1,8 (1,1)

В соответствии с таблицей 1, полученной с использованием решения системы (3),  $\theta_1 = 88,7$ , а размерное время составляет  $m_T = \frac{\theta_1}{k} = 88,7 : 0,9 \approx 99$  лет. Так как

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86,2 : 0,9 \approx 95,8, \quad \text{то} \quad \text{доверительный} \quad \text{интервал}$$

$(m_T - t \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}; m_T + t \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$  для оценки математического ожидания с надежностью

$$\gamma = 0,95 \quad (t = 1,96, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\gamma}{2}) \quad \text{определяется} \quad \text{неравенством}$$

$$81 < m < 117.$$

По известным значениям  $C_V$  и  $r$  можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии [1, 2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Т. 29, № 1. – М., 2002. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2006. – № 5 – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2008. – № 5 – С. 83–87.

**A.A. Volchek, L.P. Makhnist, V.S. Rubanov. About the Solution to the Set of Differential Equations, One of the Models of Several Years' Fluctuation of the River Flow**

The article deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein-Uhlenbeck. The process under

---

consideration is the homogeneous in terms of time Markov process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moment of frequency distribution of the river flow. The parameters are the solution to the set of second-order differential equations with boundary condition received by applying Fokker-Planck equation and by Kolmogorov's backward equation for transition probability density. In contrast to the use of numeric integration of the set of differential equations our article gives the solution presented in power series. For this purpose we have studied the functions of a special type related to Euler integrals of the first and second genus and incomplete gamma function. We give an example with the use of proposed solution to the model of stochastic hydrology.

УДК 517.5

**К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло****АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Тема данной работы касается одного из направлений теории приближения функций, а именно изучения аппроксимативных свойств линейных методов суммирования рядов Фурье на классах периодических функций. Такое направление образовалось и активно развивалось на протяжении всего XX века под влиянием работ А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, Б.Надя, И.П. Натансона, В.К. Дзядыка, С.Б. Стечкина, Н.П. Корнейчука, А.И. Степанца, В.П. Моторного и других математиков. В данной работе проведены исследования, которые касаются аппроксимативных свойств метода приближения интегралами Пуассона на сопряженных классах. С помощью методов, разработанных И.П. Натансоном, А.Ф. Тиманом, Б. Надем, получены точные равенства для верхних граней отклонений на классах  $\overline{W}_\infty^1$  сопряженных интегралов Пуассона.

Пусть  $C$  – пространство  $2\pi$ -периодических функций с нормой  $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$ ;  $L_\infty$  – пространство  $2\pi$ -периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t |f(t)|$ ;  $L_1$  – пространство  $2\pi$ -периодических суммируемых функций  $f(t)$  с нормой  $\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$ .

Если  $f \in L_1$  и  $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  – ее ряд Фурье, то ряд  $\overline{S}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$  является сопряженным с рядом  $S[f]$ . Тогда сопряженной с  $f(\cdot)$  называют функцию  $\overline{f}(\cdot)$  [1; 2], которая почти всюду определяется соотношением

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (1)$$

Пусть, далее,  $f \in L_1$ . Величину

$$P_\rho(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad 0 < \rho < 1, \quad (2)$$

где  $a_0, a_k, b_k$  – коэффициенты Фурье функции  $f$ , называют интегралом Пуассона (см., например, [2]). Соответственно через  $\overline{P}_\rho(f; x)$  обозначают сопряженный интеграл

$$\overline{P}_\rho(f; x) = P_\rho(\overline{f}; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Отметим (см., например, [2]) тот факт, что если функция  $f$  непрерывна на  $R$ , то для каждого  $x \in R$ :  $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \overline{P}_\rho(f; x) = \overline{f}(x)$ .

Обозначим через  $W_\infty^1$  множество  $2\pi$ -периодических, абсолютно непрерывных

функций  $f(\cdot)$ , для которых  $\|f'(x)\|_\infty \leq 1$ , а через  $\overline{W}_\infty^{-1}$  – множество функций, сопряженных с функциями множества  $W_\infty^1$ .

Главной целью работы является изучение асимптотического поведения величины

$$\varepsilon(\overline{W}_\infty^{-1}; P_\rho)_C = \sup_{f \in W_\infty^1} \|\overline{f}(\cdot) - \overline{P}_\rho(f; \cdot)\|_C, \quad \rho \rightarrow 1. \quad (3)$$

Если в явном виде найдена функция  $\varphi(\rho)$  такая, что

$$\varepsilon(\overline{W}_\infty^{-1}; P_\rho)_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

когда  $\rho \rightarrow 1-$ , то, следуя А.И. Степанцу [4, с. 198], скажем, что решена задача Колмогорова – Никольского (далее – К.– Н.) для сопряженного интеграла Пуассона  $\overline{P}_\rho(f; \cdot)$  на классе  $\overline{W}_\infty^{-1}$  в метрике пространства  $C$ .

Приведем некоторые результаты решения задачи К.– Н. для интеграла Пуассона и случая классов периодических функций. На классах Соболева  $W_\infty^1$  такая задача была решена В.П. Натансоном в работе [5]. Точные значения верхних граней отклонений интегралов Пуассона от функций с класса  $W_\infty^r$ ,  $r \in N$  получено в работе А.Ф. Тимана [6]. Решение задачи К.– Н. на классах Вейля – Нады найдено Л.И. Баусовым [7]. Следующим исследованиям аппроксимативных свойств метода приближения интегралами Пуассона на других классах дифференцируемых функций посвящены работы К.Н. Жигалло и Ю.И. Харкевича [8; 9].

Первые оценки величины (3) для сопряженного интеграла Пуассона были получены в работе Б. Нады [3], а именно:

$$\varepsilon(\overline{W}_\infty^{-1}; P_\rho)_C = \frac{4}{\pi} \int_\rho^1 \frac{\arctgt}{t} dt, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

$$\varepsilon(\overline{W}_\infty^{-1}; P_\rho)_C = (1 - \rho) + O((1 - \rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Позже, в работе К.Н. Жигалло и Ю.И. Харкевича [8] были получены полные асимптотические разложения величин типа (3) для классов  $\overline{W}_\infty^r$  по степеням  $(1 - \rho)$ , а в работе [9] найдены точные значения для этих же величин в равномерной и интегральной метриках. В данной статье получено полное разложение величины (3) по степеням  $\ln \frac{1}{\rho}$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Известно (см., например, [3]), что функцию  $\overline{P}_\rho(f; x)$  можно представить так:

$$\overline{P}_\rho(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(\rho, t) dt, \quad (4)$$

где  $K(\rho, t)$  – сопряженное ядро Пуассона вида

$$K(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt = \frac{\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \left( 1 - \frac{(1 - \rho)^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} \right).$$

Отсюда, согласно с (1) и (3), получаем

$$\overline{f}(x) - \overline{P}(f; x) = -\frac{(1 - \rho)^2}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} dt.$$

Если взять во внимание периодичность функции  $f(x)$ , то



$$\begin{aligned} \bar{f}(x) - \bar{P}_\rho(f; x) = & -\frac{(1-\rho)^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+t) - f(x-t)) \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt - \\ & -\frac{(1-\rho)^2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (f(x+t) - f(x-t+2\pi)) \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$  справедливо для функций  $f(x) \in W_\infty^1$ , то, воспользовавшись (5), находим

$$|\bar{f}(x) - \bar{P}_\rho(f; x)| \leq \frac{(1-\rho)^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt + \frac{(1-\rho)^2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{(\pi-t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt. \quad (6)$$

Далее: так как функция

$$f^*(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad (7)$$

принадлежит к классу  $W_\infty^1$  и, как следует из (3) и (5),

$$\begin{aligned} \varepsilon(\bar{W}_\infty^1; P_\rho)_C \geq \bar{f}(0) - \bar{P}_\rho(f^*; 0) = & -\frac{(1-\rho)^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt + \\ & + \frac{(1-\rho)^2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{(\pi-t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

то из (6) и (8) следует, что

$$\varepsilon(\bar{W}_\infty^1; P_\rho)_C = \frac{(1-\rho)^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f^*(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}}{1-2\rho \cos t + \rho^2} dt, \quad (9)$$

где  $f^*(t)$  – функция из (8).

Обозначим  $\ln \frac{1}{\rho} = \beta$  и для величины  $\varepsilon(\bar{W}_\infty^1; P_\rho)_C$  получаем теорему.

**Теорема.** При  $\beta < \frac{\pi}{2}$  имеет место точное равенство

$$\varepsilon(\bar{W}_\infty^1; P_\rho)_C = \beta + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t^{2k+3}} dt - \frac{1}{2k+1} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2k+1} \right) \beta^{2k+2}, \quad (10)$$

где  $[f^*(t)]_{2\pi}$  – нечетное  $2\pi$ -периодическое продолжение функции  $f^*(t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Доказательство.** Представим сопряженное ядро Пуассона следующим образом:

$$K(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt = \frac{1}{2} \varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k),$$

где  $\varphi_\rho(z) = \rho^z \sin zt$ , и преобразуем его, используя косинус-преобразование  $\Phi_\rho(\cdot)$  функции  $\varphi(\cdot)$ :

$$\Phi_\rho(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_\rho(z) \cos zudz.$$

Дважды интегрируя по частям, находим

$$\Phi_\rho(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \rho^z \sin zt \cos zudz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{t+x}{\beta^2 + (t+x)^2} + \frac{t-x}{\beta^2 + (t-x)^2} \right].$$

Далее, применяя формулу суммирования Пуассона [10, с. 82], получаем представление ядра Пуассона в таком виде:

$$K(\rho, t) = \frac{t}{\beta^2 + t^2} + \sum_{k=1}^\infty \left( \frac{t+2k\pi}{\beta^2 + (t+2k\pi)^2} + \frac{t-2k\pi}{\beta^2 + (t-2k\pi)^2} \right).$$

Беря во внимание последнюю формулу, а также (3), для любой  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$  получаем:

$$\bar{P}_\rho(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{\beta^2 + t^2} t dt.$$

Кроме этого, воспользуемся известным фактом, что в каждой точке, где  $\bar{f}(x)$  существует, она представима интегралом

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{t} dt.$$

Отсюда  $\bar{f}(x) - \bar{P}_\rho(f; x) = -\frac{\beta^2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t)}{t(\beta^2 + t^2)} dt.$

Используя это интегральное представление, аналогично, как и при строении соотношения (10), находим

$$\varepsilon \left( \bar{W}_\infty^1; P_\rho \right)_c = \frac{2\beta^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2 + t^2)} dt, \tag{11}$$

где  $[f^*(t)]_{2\pi}$  – непарное  $2\pi$ -периодическое продолжение функции  $f^*(t)$ , которая определена с помощью (7).

Найдем значения интеграла с правой части (11) на каждом из промежутков  $[0; \pi/2]$  и  $(\pi/2; \infty)$ . Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2 + t^2)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\beta^2 + t^2} = \left( \int_0^\infty - \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \right) \frac{dt}{\beta^2 + t^2} := I_1 - I_2. \tag{12}$$

Так как  $I_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{\beta^2 + t^2} = \frac{\pi}{2\beta}$  \tag{13}

и при  $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dt}{\beta^2 + t^2} = \frac{1}{\beta} \int_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty \frac{dt}{u^2 + 1} = \frac{1}{\beta} \int_{\frac{\pi}{2\beta}}^\infty \left( \frac{1}{u^2} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{u^{2k}} \right) du = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{2\beta}{\pi} \right)^{2k+1}, \tag{14}$$

то с (12 – 14) следует, что 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2 + t^2)} dt = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{2\beta}{\pi} \right)^{2k+1} \right). \quad (15)$$

При  $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{[f^*(t)]_{2\pi}}{t(\beta^2 + t^2)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^{2k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{[f^*(x)]_{2\pi}}{t^{2k+3}} dt. \quad (16)$$

Объединяя соотношения (15–16) из (11), получаем (10). Теорема доказана.

*Робота виконана при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф25.1/043).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барии, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Барии. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 936 с.
2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.
3. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson / B. Sz.-Nagy // Acta Math. Acad. Sei Hungar. – 1950. – 1. – P. 183–188.
4. Степанец, А.И. Методы теории приближения / А.И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – ч. I. – 427 с.
5. Натансон, В. П. О порядке приближения непрерывной  $2\pi$ -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1. – С. 11–14.
6. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тимман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74, № 1. – С. 17–20.
7. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – 46, № 3. – С. 15–31.
8. Жигало, К.М. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 1. – С. 43–52.
9. Жигалло, К.М. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 1. – С. 73–82.
10. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М. – Л. : Гостехиздат, 1948. – 460 с.

#### ***K.N. Jigallo, T.V. Jigallo. Approximational Properties of Poisson's Integrals on the Classes of Conjured Functions***

The theme of this article concerns one of the directions of the theory of approximation of functions, namely, the study of approximational properties of linear methods of summing up Fourier series on the classes of periodical functions. Such direction appeared and was actively developed during the XX th century under the influence of A. N. Kolmogoroff, S.M. Nikolskiy, B. Nagy, I.P. Natanson, V.K. Dzyadyk, S. B. Stechkin, N. P. Korneychuk, A.I. Stepanets, V.P. Motorny and other mathematicians works. The researches concerning the approximational properties of the method of approximation by Poisson's integrals on conjured classes are described in this work. Using the methods developed by I.P. Natanson, A. F. Timan, B. Nagy we have got exact equalities for the upper bounders of defluxions on the classes  $\overline{W}_{\infty}^{-1}$  of the conjured integrals of Poisson.

УДК 517.5

*И.В. Кальчук, Т.А. Степанюк, У.З. Грабова*

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

В работе проведено исследование вопросов о приближении дифференцируемых в смысле Вейля – Нады функций, которые удовлетворяют условию Липшица порядка  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ), с помощью бигармонических интегралов Пуассона. Решена задача Колмогорова – Никольского на классах  $W_\beta^r H^\alpha$  при приближении бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике.

**1. Постановка задачи и некоторые дополнительные утверждения.** Пусть  $C$  – пространство  $2\pi$ -периодических функций, в котором норма определена равенством  $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$ ;  $L_\infty$  – пространство  $2\pi$ -периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t |f(t)|$ ;  $L$  – пространство  $2\pi$ -периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством  $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$ .

Величину

$$B_\rho(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (1)$$

где

$$\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k \cos kt,$$

принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции  $f$ . Положив  $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$ , бигармонический интеграл Пуассона запишем в виде

$$B_\delta(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \delta > 0, \quad (2)$$

где

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Пусть  $r > 0$  и  $\beta$  – фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[ a_k \cos \left( kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left( kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right]$$

есть рядом Фурье некоторой суммируемой функции  $\varphi$ , то такую функцию называют  $(r, \beta)$ -производной функции  $f$  в смысле Вейля – Нады и обозначают  $f_\beta^r(\cdot)$ . Множество функций, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через  $W_\beta^r$ .

Если  $f \in W_\beta^r$  и при этом  $f_\beta^r \in H^\alpha$ , то есть  $f_\beta^r$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha$ :

$$|f_{\beta}^r(x+h) - f_{\beta}^r(x)| \leq |h|^{\alpha}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то говорят, что  $f$  принадлежит классу  $W_{\beta}^r H^{\alpha}$ . При  $\alpha = 0$  полагают, что  $W_{\beta}^r H^0 = W_{\beta}^r$ .

Через  $W^r$  обозначают множество  $2\pi$ -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до  $(r-1)$ -го порядка включительно и  $\|f^{(r)}(t)\|_{\infty} \leq 1$ . А  $\overline{W}^r$  – класс функций, сопряженных к функциям из класса  $W^r$ .

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = \sup_{f \in W_{\beta}^r H^{\alpha}} \|f(x) - B_{\delta}(f, x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

Если в явном виде найдена функция  $g(\delta) = g(B_{\delta}; \delta)$ , такая что при  $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(W_{\beta}^r H^{\alpha}; B_{\delta})_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [1], будем говорить, что решена задача Колмогорова – Никольского для бигармонического интеграла Пуассона  $B_{\delta}$  на классе  $W_{\beta}^r H^{\alpha}$  в равномерной метрике.

Аппроксимативные свойства метода приближения бигармоническими интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

В 1963 г. С. Каниев в работе [2] установил асимптотическое равенство для величины  $\mathcal{E}(W^1; B_{\rho})_C$  при  $\rho \rightarrow 1-$ . В этой же работе он установил и точные значения аппроксимативных характеристик  $\mathcal{E}(W^r; B_{\rho})_C$ ,  $0 \leq \rho < 1$ .

В 1968 г. Р. Руч [3] уточнила результаты Каниева для величины  $\mathcal{E}(W^1; B_{\rho})_C$ , получив асимптотическое равенство с более точным порядком остаточного члена.

Позже эти исследования были продлены в работе Л.П. Фалалеева [4], где было получено полное асимптотическое разложение для величины  $\mathcal{E}(W^1; B_{\rho})_C$  по степеням  $1 - \rho$ ,  $\rho \rightarrow 1-$ .

В работе Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова [5] было найдено полное асимптотическое разложение для величины  $\mathcal{E}(W^1; B_{\delta})_C$ , которое формулируется как в терминах  $\frac{1}{\delta}$ , так и в терминах  $1 - \rho$ .

В работе К.М. Жигалла, Ю.И. Харкевича [6] были найдены полные асимптотические разложение величин  $\mathcal{E}(W^r; B_{\rho})_C$  по степеням  $1 - \rho$ ,  $\rho \rightarrow 1-$ . Позже в работе этих же авторов [7] были получены точные значения верхних граней приближений бигармоническими интегралами Пуассона на классах сопряженных дифференцируемых функций в равномерной и интегральной метриках.

Параллельно проводились исследования величин приближений функций с классов  $W_{\beta}^r H^{\alpha}$  линейными методами суммирования рядов Фурье. А именно: в 1966 г. Л.И. Баусов [8] получил асимптотическое равенство для точной верхней грани приближения функций из класса  $W_{\beta}^r H^{\alpha}$  при помощи интегралов Абеля – Пуассона по степеням  $1 - \rho$ ,  $\rho \rightarrow 1-$ .

К этому времени аппроксимативные свойства бигармонического интеграла Пуассона на классах  $W_{\beta}^r H^{\alpha}$  не были исследованы. Поэтому возник вопрос об

отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней приближений функций с классов  $W_\beta^r H^\alpha$  бигармоническими интегралами Пуассона.

Для бигармонического интеграла Пуассона введем функцию

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})\delta^r, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\delta}, \\ (1 - [1 + \gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}, \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\gamma = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \delta$ , преобразование Фурье которой

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos \left( ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \quad (4)$$

суммируемо на всей числовой оси (этот факт доказан в работе [9]).

Рассмотрим функцию

$$F_{\beta,\delta}^r(x) = \int_{-\infty}^\infty \left( f_\beta^r \left( x + \frac{t}{\delta} \right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\tau}_\beta(t) dt, \quad \delta > 0, x \in R,$$

где интеграл следует понимать как разность интегралов по симметричным промежуткам, которые расширяются. Эта функция периодическая и суммируемая. Повторяя рассуждения, приведенные в работе [8, с. 9], несложно убедиться в том, что коэффициенты Фурье функции  $F_{\beta,\delta}^r(x)$  можно представить в виде

$$a_k(F_{\beta,\delta}^r(x)) = k^r \tau \left( \frac{k}{\delta} \right) a_k(f), \quad b_k(F_{\beta,\delta}^r(x)) = k^r \tau \left( \frac{k}{\delta} \right) b_k(f)$$

(тут  $a_k(f)$  и  $b_k(f)$  – коэффициенты Фурье функции  $f$ ). Тогда

$$S[F_{\beta,\delta}^r(x)] = S \left[ \int_{-\infty}^\infty \left( f_\beta^r \left( x + \frac{t}{\delta} \right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\tau}_\beta(t) dt \right] = \sum_{k=0}^\infty k^r \tau \left( \frac{k}{\delta} \right) A_k(f, x), \quad (5)$$

где

$$A_k(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Учитывая формулу (5), для  $\forall f \in W_\beta^r H^\alpha$  получаем:

$$S \left[ \int_{-\infty}^\infty \left( f_\beta^r \left( x + \frac{t}{\delta} \right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\tau}_\beta(t) dt \right] = \delta^r S[f(x) - B_\delta(f; x)], \quad (6)$$

где  $B_\delta(f; x)$  – бигармонический интеграл Пуассона вида (2). Из равенства (6) следует, что для  $\forall f \in W_\beta^r H^\alpha$  в каждой точке  $x \in R$  имеет место равенство

$$f(x) - B_\delta(f; x) = \frac{1}{\delta^r} \int_{-\infty}^\infty \left( f_\beta^r \left( x + \frac{t}{\delta} \right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\tau}_\beta(t) dt, \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Приведем некоторые дополнительные определения и утверждения, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы.

**Определение 1 [8].** Пусть функция  $\tau(u)$  задана на  $[0; \infty)$ , абсолютно непрерывна,  $\tau(\infty) = 0$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Говорят, что функция  $\tau(u) \in \mathcal{E}_\alpha$ , если производную  $\tau'(u)$  в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, чтобы существовали интегралы:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|.$$

Далее договоримся через  $K, K_i, i=1,2,\dots$  – обозначать постоянные, вообще говоря, не одни и те же в разных соотношениях.

**Теорема 1 [7].** Пусть  $\tau(u) \in \mathcal{E}_\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ),  $\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(0) = 0$  и

$$\xi(A, B) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} |A|, & |B| \leq |A|, \\ |A| \arcsin \left| \frac{A}{B} \right|, & |B| > |A|. \end{cases}$$

Для сходимости интеграла  $A(\alpha, \tau)$  вида

$$A(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left| \int_0^{\infty} \tau(u) \cos \left( ut + \frac{\beta\pi}{2} \right) du \right| dt \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы сошлись интегралы

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\tau(u)}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du; \right.$$

при этом справедливы оценки:

$$\begin{aligned} & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \xi \left( \sin \frac{\beta\pi}{2} \tau(u), |\tau(a+u) - \tau(a-u)| \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right| \leq KH(\alpha, \tau); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \right| \leq K \left( \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right); \\ & \left| A(\alpha, \tau) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du \right| \leq K \left( \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}} du + H(\alpha, \tau) \right| \right); \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$H(\alpha, \tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\tau'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\tau'(u)|.$$

## 2. Приближение функций из классов $W_\beta^r H^\alpha$ бигармоническими интегралами Пуассона.

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема:

**Теорема.** При  $r > 2$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  и  $\delta \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right\|_C + O \left( \frac{1}{\delta^{r+\alpha}} + \frac{1}{\delta^3} \right), \quad (10)$$

где  $f_0^{(1)}(x)$  и  $f_0^{(2)}(x)$  – соответственно  $(1,0)$ -производная и  $(2,0)$ -производная в смысле Вейля – Нады.

**Доказательство.** Представим функцию  $\tau(u)$ , заданную при помощи соотношения (3), в виде  $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$ , где

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right) \delta^r, & 0 \leq u < \frac{1}{\delta}, \\ \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \left(1 - [1 - \gamma u] e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}\right) \delta^r, & 0 \leq u < \frac{1}{\delta}, \\ \left(1 - [1 - \gamma u] e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}\right) u^{-r}, & u \geq \frac{1}{\delta}. \end{cases} \quad (12)$$

Для сходимости интеграла  $A(\alpha, \varphi)$  согласно теореме 1' достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)|, \quad (13)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (14)$$

Оценим первый интеграл из (13). Так как при  $u \in \left[0; \frac{1}{\delta}\right]$

$$\varphi'(u) = \delta^r \left(u + \frac{1}{\delta}\right), \quad \varphi''(u) = \delta^r > 0,$$

то

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = \int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha} d\varphi'(u) = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

При  $u \in \left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$ , учитывая, что  $r > 2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= \frac{2-r}{2} u^{1-r} + \frac{1-r}{\delta} u^{-r}, \\ \varphi''(u) &= \frac{(2-r)(1-r)}{2} u^{-r} - \frac{(1-r)r}{\delta} u^{-r-1} > 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} d\varphi'(u) = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

Итак,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \quad (16)$$

Оценим второй интеграл из (13). Так как на  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  подынтегральная функция непрерывная, а значит, ограниченная, то



$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| = O(1). \quad (17)$$

Оценим третий интеграл из (13). Учитывая (15), а также то, что  $r > 2$ , получаем:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\varphi'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u d\varphi'(u) = O(1).$$

Для того, чтобы оценить первый интеграл из (14), разобьем промежуток  $[0; \infty)$  на три части:  $\left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{\delta}; 1\right]$  и  $[1; \infty)$ . Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \quad (18)$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2} + \frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \quad (19)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{u^{2-r}}{2} + \frac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}} du = O(1). \quad (20)$$

Учитывая (18) – (20), получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \quad (21)$$

Оценим второй интеграл из (14). Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{\varphi(1+u) - \varphi(1-u)}{u^{1+\alpha}} du = O\left(\frac{1}{\delta^{1-(r+\alpha)}}\right).$$

Таким образом, в силу теоремы 1' преобразование Фурье функции  $\varphi(u)$ , заданной в виде (11), суммируемо на всей числовой оси.

Для того, чтобы оценить величину  $A(\alpha, \mu)$ , согласно сформулированной выше теореме 1', достаточно найти оценку следующих интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)|, \quad (22)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du, \quad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du. \quad (23)$$

Для этого сначала покажем, что

$$d\mu'(u) \leq 0, \quad \mu(u) \leq 0. \quad (24)$$

Обозначим

$$\bar{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u}{\delta} - \frac{u^2}{2}.$$

Учитывая, что имеют место неравенства

$$\gamma < 1, \quad 1 - \gamma < \frac{1}{\delta}, \quad -1 + \gamma + \frac{1}{\delta} < \frac{2}{3\delta^2}, \quad (25)$$

$$1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} < \frac{u}{\delta} + u^2, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad e^{-u} \geq 1 - u, \quad u \geq 0, \quad (26)$$

получим:

$$|\bar{\mu}(u)| < \frac{2}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{u^3}{2},$$

$$|\bar{\mu}'(u)| < \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta}u + \frac{3}{2}u^2,$$

$$|\bar{\mu}''(u)| < \frac{2}{\delta} + 3u.$$

Учитывая то, что при  $u \in \left[0; \frac{1}{\delta}\right]$   $\mu(u) = \delta^r \bar{\mu}(u)$ , получим неравенства (24)

в случае  $u \in \left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ .

Для доказательства неравенств (24) при  $u \geq \frac{1}{\delta}$  исследуем функцию

$$\tilde{\mu}(u) = \frac{1}{u^2} - \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u\delta}.$$

Так как

$$\tilde{\mu}(u) = \frac{\bar{\mu}(u)}{u^2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}'(u) &= -\frac{2}{u^3} + \frac{2e^{-u}}{u^3} + \frac{e^{-u}}{u^2} + \gamma \frac{e^{-u}}{u^2} + \gamma \frac{e^{-u}}{u} + \frac{1}{u^2\delta} = \\ &= \frac{1}{u^3} \left( -2 + 2e^{-u} + (1 + \gamma)ue^{-u} + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}''(u) &= \frac{6}{u^4} - \frac{6e^{-u}}{u^4} - \frac{4e^{-u}}{u^3} - \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma \frac{2e^{-u}}{u^3} - 2\gamma \frac{e^{-u}}{u^2} - \gamma \frac{e^{-u}}{u} - \frac{2}{u^3\delta} = \\ &= \frac{1}{u^4} \left( 6 - 6e^{-u} - (4 + 2\gamma)ue^{-u} - (1 + 2\gamma)u^2 e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta} \right), \end{aligned}$$

то, учитывая, что  $\gamma > \frac{1}{\delta}$  и  $e^{-u} \geq 1 - u$ , получим:

$$\tilde{\mu}(u) < 0,$$

$$\tilde{\mu}'(u) > \frac{1}{u^3} \left( -2 + 2 - 2u + \left(1 + 1 - \frac{1}{\delta}\right)(u - u^2) + \gamma u^2 e^{-u} + \frac{u}{\delta} \right) =$$

$$= \frac{1}{u^3} \left( \frac{u^2}{\delta} + \gamma u^2 e^{-u} \right) > 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}''(u) &< \frac{1}{u^4} \left( 6 - 6 + 6u - \left( 4 + 2 - \frac{2}{\delta} \right) (u - u^2) - (1 + 2\gamma) u^2 e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} - \frac{2u}{\delta} \right) = \\ &= \frac{1}{u^4} \left( -\frac{2u^2}{\delta} - (1 + 2\gamma) u^2 e^{-u} - \gamma u^3 e^{-u} \right) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $u \geq \frac{1}{\delta}$  имеем

$$\mu''(u) = \left( u^{2-r} \tilde{\mu}(u) \right)'' = (2-r)(1-r)u^{-r} \tilde{\mu}(u) + 2(2-r)u^{1-r} \tilde{\mu}'(u) + u^{2-r} \tilde{\mu}''(u) < 0.$$

Отсюда делаем вывод, что неравенства (24) справедливы при всех  $u \geq 0$ .

Используя первое неравенство из (24), оценим интегралы из (22):

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| < \int_0^{\frac{1}{2}} |d\mu'(u)| = -\int_0^{\frac{1}{2}} d\mu'(u) = O(1), \quad (27)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |d\mu'(u)| = -\mu'(u) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = O(1), \quad (28)$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| \leq \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} |d\mu'(u)| = -u\mu'(u) \Big|_{\frac{3}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \mu'(u) du = O(1). \quad (29)$$

Для того, чтоб оценить первый интеграл из (23), разобьем промежуток  $[0; \infty)$  на три части:  $\left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{\delta}; 1\right]$  и  $[1; \infty)$ . Учитывая сначала равенство (12) и второе неравенство из (24), а потом (25), (26), получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du &= -\int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\mu(u)}{u^{1+\alpha}} du = \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left( -1 + e^{-u} - \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \leq \\ &\leq \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left( \frac{1}{\delta} + \gamma - 1 + (1-\gamma)u + \frac{\gamma}{2} u^2 \right) \frac{du}{u^\alpha} \leq \delta^r \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left( \frac{2}{3\delta^2} + \frac{u}{\delta} + \frac{u^2}{2} \right) \frac{du}{u^\alpha} = O\left( \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}} \right), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du \leq \int_{\frac{1}{\delta}}^1 \left( \frac{1}{\delta} + \gamma - 1 + (1-\gamma)u + \frac{\gamma}{2} u^2 \right) u^{-r-\alpha} du = O\left( 1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}} \right), \quad (31)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \left( e^{-u} - 1 + \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} \right) \frac{du}{u^{1+r+\alpha}} \leq \int_1^{\infty} \left( -1 + u + \gamma + \frac{1}{\delta} \right) \frac{du}{u^{r+\alpha}} = O(1). \quad (32)$$

Из (30) – (32) получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}} du = \left( 1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}} \right). \quad (33)$$

Для того, чтобы оценить второй интеграл из (23), отметим, что при  $\bar{\lambda}(u) = [1 + \gamma u]e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}$  и  $\delta \rightarrow \infty$  имеет место равенство:

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = \int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du + \left( |\mu(0) + \mu(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} |d\mu'(u)| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1) |d\mu'(u)| \right).$$

И так как

$$\int_0^1 \frac{|\bar{\lambda}(1-u) - \bar{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1),$$

то, учитывая соотношения (27) – (29), получаем

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}} du = O(1). \quad (34)$$

Подставляя (27) – (29), (33) – (34) в (9), получим:

$$A(\alpha, \mu) = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \quad (35)$$

Учитывая интегральное представление (7) и то, что  $f(x) \in W_\beta^r H^\alpha$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\beta^r(x + \frac{t}{\delta}) - f_\beta^r(x)) \hat{\tau}_\beta(t) dt \right\|_C = \\ &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\beta^r(x + \frac{t}{\delta}) - f_\beta^r(x)) (\hat{\varphi}_\beta(t) + \hat{\mu}_\beta(t)) dt \right\|_C \leq \\ &\leq \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\beta^r(x + \frac{t}{\delta}) - f_\beta^r(x)) \hat{\varphi}_\beta(t) dt \right\|_C + \frac{1}{\delta^{r+\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha |\hat{\mu}_\beta(t)| dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда, учитывая (8), будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C &= \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\beta^r(x + \frac{t}{\delta}) - f_\beta^r(x)) \hat{\varphi}_\beta(t) dt \right\|_C + \\ &+ O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \mu)\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно соотношению (5), ряд Фурье функции

$$f_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\delta}\right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\varphi}(t) dt$$

имеет вид:

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^2}{2\delta^{2-r}} + \frac{k}{\delta^{2-r}} \right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Поэтому

$$f_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( f_\beta^r\left(x + \frac{t}{\delta}\right) - f_\beta^r(x) \right) \hat{\varphi}_\beta(t) dt = \frac{1}{\delta^{2-r}} \left( \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right). \quad (38)$$

Подставляя (38) в (37), получаем, что при  $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right\|_C + O\left( \frac{1}{\delta^{r+\alpha}} A(\alpha, \mu) \right). \quad (39)$$

Учитывая также оценку (35), получим (10). Теорема 1 доказана.

*Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф25.1/043).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – Киев : Наук. Думка, 1987. – 268 с.
2. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
3. Pych, P. On a biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203–213.
4. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из  $Lip_1$  от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения: материалы всесоюзного симп. – Алма-Ата : «Наука» КазССР, 1976. – С. 163–167.
5. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976): Тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
6. Жигало, К.М. Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 9. – С. 1213–1219.
7. Жигало К.М. Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонійними інтегралами Пуассона / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 3 – С. 333–345.
8. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II/ Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – 46, № 3. – С.15–31.
9. Жигало, К.М. Наближення бігармонійними інтегралами Пуассона класів  $(\psi, \beta)$ - диференційовних функцій в інтегральній метриці / К.М. Жигало, Ю.І. Харкевич // Проблеми теорії наближення та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2004. – 1, № 1. – С. 144–170.

#### ***I.V. Kalchuk, T.A. Stepaniuk, U.Z. Grabova. Approximation of Differentiable Functions by Poisson's Biharmonic Integrals***

The article focuses on the problem of approximation of Weyl-Nagy differentiable functions, which obey Lipschitz's conditions of  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) order by biharmonic integrals of Poisson.

The problem of Kolmogoroff-Nikolsky on the classes  $W_\beta^r H^\alpha$  on approximation of Poisson's biharmonic integrals in uniform metrics is solved.

УДК 517.9

*Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский*

## **СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

В работе рассматриваются неавтономные системы стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов. Исследуются процессы, ассоциированные с решениями систем в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Для этого рассматривается предельное поведение представителей указанных решений. Доказано, что пределом решений систем конечно-разностных уравнений являются решения систем стохастических интегральных уравнений с  $\theta$ -интегралами, причем  $\theta \in [0, 1/2]$ . Если  $\theta \in [1/2, 1]$ , то решения систем стохастических уравнений могут быть приближены решениями систем конечно-разностных уравнений с опережением. Доказанные теоремы носят необходимый и достаточный характер. Также даны оценки скорости сходимости.

При исследовании аппроксимаций случайного процесса броуновского движения возникают трудности, связанные с тем, что соответствующие «приближенные» интегралы не сходятся к стохастическому интегралу Ито, если даже предел существует. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений. Предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует, как правило, является решением некоторого другого уравнения. Учитывая подобную неустойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито, которая впервые была отмечена Вонгом и Закаем [1], можно понять, почему в задачах подобного типа уравнения обычно рассматриваются в симметризованной форме. Важной оказывается «согласованность» симметризованных стохастических и обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [2] было предложено избавиться от вышеуказанных сложностей введением запаздывания. С другой стороны, было показано, что стохастические уравнения в смысле Ито могут быть аппроксимированы при помощи конечно-разностных уравнений.

На основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов в статье [3] предложен единый подход к аппроксимации стохастических дифференциальных уравнений, который позволяет исследовать довольно широкий класс уравнений. Используя этот подход, например, в работах [4; 5] исследованы стохастические уравнения, содержащие интегралы Ито, Стратоновича и стохастические  $\theta$ -интегралы, где  $\theta \in [0, 1]$ .

В данной работе рассматриваются неавтономные системы стохастических дифференциальных уравнений в указанной алгебре. В этом случае приходится исследовать процессы, ассоциированные с решениями систем в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Для этого необходимо рассматривать предельное поведение представителей указанных решений. В статье [6] показано, что эти решения удовлетворяют конечно-разностным уравнениям с осреднением. В настоящей работе доказывается, что пределом решений систем конечно-разностных уравнений являются решения систем стохастических интегральных уравнений с  $\theta$ -интегралами, причем  $\theta \in [0, 1/2]$ . Если  $\theta \in [1/2, 1]$ , то решения систем стохастических уравнений могут быть приближены решениями систем конечно-разностных уравнений

с опережением. Доказанные теоремы носят необходимый и достаточный характер. Также даны оценки скорости сходимости.

На полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dX^i(t) = f^i(t, X(t))dB(t) + g^i(t, X(t))dt, \quad i = \overline{1, r}, \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

с начальным условием  $X^i(0) = x^i$ .

В алгебре обобщенных случайных процессов  $G(T, \Omega)$  [6] ей будет соответствовать следующая задача Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{X}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^m \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{X}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{B}^j(\tilde{t}) + \tilde{g}^i(\tilde{t}, \tilde{X}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{t}, \\ \tilde{X}^i(\tilde{t})|_{[\tilde{0}, \tilde{h}]} = \tilde{X}^{0i}(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tilde{0} = [(0)]$ ,  $\tilde{h} = [(h_n)] \in \tilde{T}$ ,  $\tilde{f}^{ij} = [(f_n^{ij})] \in G(\tilde{\mathbb{R}}^{r+1})$  и  $\tilde{g}^i = [(g_n^i)] \in G(\tilde{\mathbb{R}}^{r+1})$  ассоциируют функции  $f^{ij}$  и  $g^i$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$  соответственно, а  $\tilde{B}^j = [(B_n^j)] \in G(\tilde{T}, \Omega)$  – обобщенный процесс броуновского движения и «начальное условие»  $\tilde{X}^{0i} = [(X_n^{0i})] \in G(\tilde{T}, \Omega)$  – ассоциирует  $x^i \in \mathbb{R}$ .

На уровне представителей задача (2) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^m f_n^{ij}(t, X_n(t)) [B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t)) h_n, \\ X_n^i(t)|_{[0, h_n]} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1, r}, \quad t \in [0; T], \end{cases} \quad (3)$$

где  $\bar{B}_n^j(t) = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s) \rho_n^j(s) ds$ ,  $\rho_n^j(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho_n^j \geq 0$ ,  $\text{supp } \rho_n^j(t) \subset [0, 1/n]$ ,  $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s) ds = 1$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $B(t) = (B^1(t), \dots, B^m(t))$  –  $m$ -мерный стандартный процесс броуновского движения,  $f_n^{ij} = (f^{ij} * \bar{\rho}_n)$ ,  $g_n^i = (g^i * \bar{\rho}_n)$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ , а  $\bar{\rho}_n$  – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в  $[0, 1/n]^{r+1}$  и  $\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \bar{\rho}(s, s_1, \dots, s_r) ds ds_1 \dots ds_r = 1$ .

Система уравнений, ассоциированных системе (3), имеет вид:

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4)$$

где  $X(t) = (X^1(t), X^2(t), \dots, X^r(t))$ ,  $x = (x^1, x^2, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , стохастические интегралы в правой части (4) – это стохастические  $\theta$ -интегралы,  $\theta \in [0, 1]$ .

Пусть  $t$  – произвольная фиксированная точка из отрезка  $T$ . Тогда имеют место следующие представления:  $t = \tau'_i + k_i h_n = \tau_i + m_i \delta$ ,  $\delta_i = \lambda h_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $1/n \leq \delta_i \leq 1/n + h_n$ , где  $\tau_i = \tau'_i + k'_i h_n$ ,  $0 \leq \tau_i < \delta$ ,  $1/n < \delta = l h_n < 1$ ,  $l, m_i, k_i, k'_i \in \mathbb{N}$ .

Используя эти обозначения, решение системы (3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} X_n^i(t) = & X_n^{0i}(\tau'_i) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k_i-1} f_n^{ij}(\tau'_i + k h_n, X_n(\tau'_i + k h_n)) \times \\ & \times [B_n^j(\tau'_i + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_i + k h_n)] + \sum_{k=0}^{k_i-1} g_n^i(\tau'_i + k h_n, X_n(\tau'_i + k h_n)) h_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение последовательности  $K^i(n, h_n)$  [7], с помощью которых будут сформулированы необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей  $X_n^i$  к решениям системы (4):

$$K^i(n, h_n) = \int \int_{\substack{0 \leq s, \tau \leq 1/n, \\ |s-\tau| \leq h_n}} \left(1 - \frac{|s-\tau|}{h_n}\right) \rho_n^i(s) \rho_n^i(\tau) ds d\tau.$$

Можно показать справедливость следующих лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , тогда для решения задачи (3)  $X_n(t)$  и всех  $t \in T$  справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta)] - \sum_{j=1}^m (I) \int_{\tau_t}^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) \right] \leq \\ \leq \frac{C}{n^4 \delta^2 h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta + C\delta \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} E [X_n^j(\tau_t + k\delta) - X^j(\tau_t + k\delta)]^2. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любого  $t \in T$  справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta)]^2 - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \int_{\tau_t}^t f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds \right]^2 \leq \frac{C}{n\delta} + C\delta + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E (X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta))^2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.** Пусть  $X_n(t)$  решение задачи (3), причем  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$  и  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ . Тогда для всех  $t \in T$  будет справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \times \right. \\ \left. \times ([B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)]^2 - h_n K^j(n, h_n)) \right]^2 \leq C\delta + \frac{C}{n^2 \delta^2}. \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Пусть выполняются условия предыдущих лемм. Тогда для всех  $t \in T$  будет справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{p=0}^{l-1} g_n^i(\tau_t + k\delta + ph_n, X_n(\tau_t + k\delta + ph_n)) h_n - \int_{\tau_t}^t g^i(s, X(s)) ds \right]^2 \leq \\ \leq \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E [X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta)]^2. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть  $\theta_j \in [0; 1/2]$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$  и  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ , «начальное условие» задачи Коши (3)  $X_n^{0i}(t)$  принадлежит  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  и является  $\mathcal{F}_{t+1/n}$  измеримым для любого  $t \in [0, h_n)$ . Тогда для решения задачи Коши (3)  $X_n^i(t)$  и решения системы (4)  $X(t)$  справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{t \in T} E \|X_n(t) - X(t)\|^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n)} E \|X_n^0(t) - x\|^2 + C\gamma_n + C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2,$$

где  $\gamma_n = 1/(n^{3/2} h_n)$  если  $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$ ,  $\gamma_n = 1/(n^{2/3} h_n^{1/3})$  если  $1/n^{5/4} \leq h_n \leq 1/n^{1/2}$ ,  $\gamma_n = h_n$  если  $1/n^{1/2} \leq h_n$ .



**Доказательство.** В дальнейших выкладках воспользуемся тем, что система уравнений (4) с  $\theta$ -интегралами эквивалентна следующей системе уравнений с интегралами Ито (см., например, [8]):

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^m (I) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_0^t f^{\alpha j}(s, X(s)) \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds + \\ + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, \quad i = \overline{1, r}.$$

Используя эту связь и формулу (5), представим разность  $X_n^i(t) - X^i(t)$  в следующем виде:

$$X_n^i(t) - X^i(t) = X_n^{0i}(\tau'_t) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k'_j-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) \times \\ \times [B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n)] + \sum_{k=0}^{k'_j-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) h_n - \\ - x^i - \sum_{j=1}^m (I) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_0^t f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds - \int_0^t g^i(s, X(s)) ds = \\ = [X_n^{0i}(\tau'_t) - x^i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k'_j-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) \times \\ \times [B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n)] - \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^{\tau'_t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \\ + \sum_{k=0}^{k'_j-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) h_n - \int_0^{\tau'_t} g^i(s, X(s)) ds] + \\ + [\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) [B_n^j(\tau + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau + k\delta)] - \\ - \sum_{j=1}^m (I) \int_{\tau_t}^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s)] + \\ + [\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{p=0}^{l-1} (f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + ph_n, X(\tau_t + k\delta + ph_n))) - f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))] \times \\ \times [B_n^j(\tau + k\delta + (p+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + ph_n)] - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_{\tau_t}^t f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds + \\ + [\sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{p=0}^{l-1} g_n^i(\tau_t + k\delta + ph_n, X_n(\tau_t + k\delta + ph_n)) h_n - \int_{\tau_t}^t g^i(s, X(s)) ds] = \\ = H_0(t) + H_1(t) + H_2(t) + H_3(t).$$

Рассмотрим  $H_0(t)$ . Несложно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$H_0(t) = [X_n^{0i}(\tau'_t) - x^i] + \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{k'_j-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) \times \right. \\ \left. \times [B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n)] \right\} - \left\{ \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^{\tau'_t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \sum_{k=0}^{k'_t-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n)) h_n \right\} - \left\{ \int_0^{\tau'_t} g^i(s, X(s)) ds \right\} = \\
 & = \left[ X_n^{0i}(\tau'_t) - x^i \right] + A_1(t) - A_2(t) + A_3(t) - A_4(t).
 \end{aligned}$$

Используя ограниченность функций  $f^{ij}$ , а так же представления  $h_n$  и  $\delta$ , можно показать, что для слагаемого  $A_1(t)$  справедлива оценка:

$$E(A_1(t))^2 \leq \frac{C\delta^2}{h_n}. \quad (6)$$

Для оценки  $A_2(t)$  воспользуемся связью между  $\theta$ -интегралом и интегралом Ито, а также свойствами интеграла Ито.

$$E(A_2(t))^2 = E \left[ \sum_{j=1}^m (I) \int_0^{\tau'_t} f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_{\tau'_t}^t f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds \right] \leq C\delta. \quad (7)$$

Исходя из ограниченности функций  $g^i$ , получим оценки для  $A_3(t)$  и  $A_4(t)$ :

$$E(A_3(t))^2 = E \left[ \sum_{k=0}^{k'_t-1} \int_0^{1/n} \int_0^{1/n} g(\tau'_t + kh_n + s, X_n(\tau'_t + kh_n) + u) \rho(s, u) ds du \cdot h_n \right]^2 \leq C\delta^2. \quad (8)$$

$$E(A_4(t))^2 = E \left[ \int_0^{\tau'_t} g^i(s, X(s)) ds \right]^2 \leq C\delta^2. \quad (9)$$

Из оценок (6) – (9) получим оценку для  $H_0(t)$ :

$$E(H_0(t))^2 \leq C \left( X_n^{0i} - x^i \right)^2 + \frac{C\delta^2}{h_n}. \quad (10)$$

По лемме 1 для слагаемого  $H_1(t)$  имеем:

$$E(H_1(t))^2 \leq \frac{C}{n^4 \delta^2 h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta + C\delta \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_t-1} E \left[ X_n^j(\tau_t + k\delta) - X^j(\tau_t + k\delta) \right]^2. \quad (11)$$

Для оценки слагаемого  $H_2(t)$  воспользуемся видом  $X_n(t)$  из равенства (5).

$$\begin{aligned}
 H_2(t) = & \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{q=0}^{l-2} (f_n^{ij})'_i(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) h_n \times \right. \\
 & \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \left. \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) \times \right. \\
 & \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] [B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)] - \\
 & - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \theta_j \int_{\tau_t}^t f^{\alpha j} \partial_\alpha f^{ij}(s, X(s)) ds \left. \right\} + \\
 & - \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r [f_n^{\alpha \gamma} \partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) - \right. \\
 & - f_n^{\alpha \gamma} \partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n - \delta_1, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n - \delta_1))] \times \\
 & \times [B_n^\gamma(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^\gamma(\tau_t + k\delta + qh_n)] [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \left. \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) \times \right. \\
& \times [B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)] [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \left. \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r g_n^i \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) \right. \\
& \quad \left. [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} (f_n^{ij})''_{uu}(\tilde{s}, X(\tilde{s})) h_n^2 [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r \partial_{\alpha} (f_n^{ij})'_t(\tilde{s}, X_n(\tilde{s})) h_n (X_n^{\alpha}(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - X_n^{\alpha}(\tau_t + k\delta + qh_n)) \times \right. \\
& \quad \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r \partial_{\alpha, \beta}^2 f_n^{ij}(\tilde{s}, X(\tilde{s})) (X_n^{\alpha}(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - \right. \\
& \quad - X_n^{\alpha}(\tau_t + k\delta + qh_n)) (X_n^{\beta}(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - X_n^{\beta}(\tau_t + k\delta + qh_n)) \times \\
& \quad \left. \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \right\} = \\
& = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) + J_5(t) + \frac{1}{2} J_6(t) + \frac{1}{2} J_7(t) + \frac{1}{2} J_8(t),
\end{aligned}$$

где  $\tilde{s}$  принадлежат полуинтервалу  $[\tau_t + k\delta + qh_n, \tau_t + k\delta + (q+1)h_n)$ .

Рассмотрим слагаемое  $J_1(t)$ . Для его оценки воспользуемся ограниченностью функции  $(f_n^{ij})'_t$  и тем, что (см. например, [7]) для процесса  $B_n(t)$  и любых  $t_1, t_2 \in T$  и  $n \in \mathbb{N}$  справедливы неравенства  $E(B_n(t_1) - B_n(t_2))^{2p} \leq C |t_1 - t_2|^p$ ;  $E(B_n(t) - B(t))^{2p} \leq C/n^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Тогда:

$$E(J_1(t))^2 \leq C m m_t (l-1) h_n^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} E[B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)]^2 \leq C \delta. \quad (12)$$

Представим слагаемое  $J_2(t)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J_2(t) & = \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \times \right. \\
& \quad \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] \times \\
& \quad \times [B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)] - \sum_{j=1}^m \theta_j \sum_{\alpha=1}^r \int_{\tau_t}^t f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(s, X(s)) ds \left. \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r [f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) - f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))] \times \right. \\
& \quad \times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n)] [B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)] \left. \right\} = \\
& = J_{21}(t) + J_{22}(t).
\end{aligned}$$

Для оценки  $J_{21}(t)$  воспользуемся тождеством:

$$[B_n(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n(\tau_t + k\delta + ph_n)]^2 - \sum_{j=p+1}^l [B_n(\tau_t + k\delta + jh_n) - B_n(\tau_t + k\delta + (j-1)h_n)]^2 =$$

$$= 2 \sum_{j=p+1}^l [B_n(\tau_t + k\delta + jh_n) - B_n(\tau_t + k\delta + (j-1)h_n)][B_n(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n(\tau_t + k\delta + jh_n)]. \quad (13)$$

Применяя тождество (13) при  $p=0$ , преобразуем выражение  $J_{21}(t)$  к виду:

$$J_{21}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \times \right.$$

$$\times [B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta)]^2 - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \int_{\tau_t}^t f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(s, X(s)) ds \left. \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \times \right.$$

$$\times ([B_n^j(\tau_t + k\delta + (q+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)]^2 - h_n K^j(n, h_n)) \left. \right\} -$$

$$- \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{K^j(n, h_n)}{2} \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{\alpha=1}^r f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta)) \delta - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^r \int_{\tau_t}^t f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(s, X(s)) ds \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \frac{1 - 2\theta_j - K^j(n, h_n)}{2} \sum_{\alpha=1}^r \int_{\tau_t}^t f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(s, X(s)) ds = J_{211}(t) + J_{212}(t) + J_{213}(t) + J_{214}(t).$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$E(J_{211}(t))^2 \leq \frac{C}{n\delta} + C\delta + C\delta \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} E(X_n^j(\tau_t + k\delta) - X^j(\tau_t + k\delta))^2. \quad (14)$$

Лемма 3 дает следующую оценку для слагаемого  $J_{212}(t)$ :

$$E(J_{212}(t))^2 \leq C\delta + \frac{C}{n^2\delta^2}. \quad (15)$$

Используя теорему Лагранжа и представление  $f_n^{ij}$ , получим оценку для слагаемого  $J_{213}(t)$ :

$$E(J_{213}(t))^2 \leq \frac{C}{n^2} + C\delta + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E(X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta))^2. \quad (16)$$

Т.к.  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ , то для слагаемого  $J_{214}(t)$  справедливо:

$$E(J_{214}(t))^2 \leq C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2. \quad (17)$$

Таким образом, из формул (14) – (17) вытекает, что

$$E(J_{21}(t))^2 \leq \frac{C}{n\delta} + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E(X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta))^2 +$$

$$+ \frac{C\delta^2}{h_n} + C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2. \quad (18)$$

Рассмотрим слагаемое  $J_{22}(t)$ . Для его оценки применим теорему Лагранжа о конечных приращениях, неравенство Коши – Буняковского и тождество (13).

$$\begin{aligned}
E(J_{22}(t))^2 &= \frac{1}{4} E \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{m_j-1} \sum_{q=0}^{l-2} \sum_{\alpha=1}^r [f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) - \right. \\
&\quad \left. - f_n^{\alpha j} \partial_{\alpha} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))] ([B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{s=q}^{l-1} [B_n^j(\tau_t + k\delta + (s+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + sh_n)]^2 \right\} \leq \frac{C\delta^2}{h_n}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Окончательная оценка для  $H_2(t)$  получается из оценок (18) и (19).

$$\begin{aligned}
E(H_2(t))^2 &\leq \frac{C}{n\delta} + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E(X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta))^2 + \\
&\quad + \frac{C\delta^2}{h_n} + C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2. \quad (20)
\end{aligned}$$

Лемма 4 дает оценку слагаемого  $H_3(t)$ :

$$E(H_3(t))^2 \leq \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E[X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta)]^2. \quad (21)$$

Окончательно из формул (10), (11), (20), (21) следует неравенство:

$$\begin{aligned}
E(X_n^i(t) - X^i(t))^2 &\leq C(X_n^{0i} - x^i)^2 + \frac{C\delta^2}{h_n} + \frac{C}{n^4\delta^2h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta + \\
&\quad + C\delta \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} E[X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta)]^2 + C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2.
\end{aligned}$$

Применив дискретный аналог неравенства Гронуола к предыдущему неравенству, получаем:

$$E \| X_n(t) - X(t) \|^2 \leq C \| X_n^0 - x \|^2 + \frac{C\delta^2}{h_n} + \frac{C}{n^4\delta^2h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta + C(K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2. \quad (22)$$

Если  $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$ , то, положив в (22)  $\delta = h_n n^{1/2}$ , получим первое неравенство из условия теоремы, если  $1/n^{5/4} \leq h_n \leq 1/n^{1/2}$ , тогда выбрав  $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$ , получим второе неравенство, при  $1/n^{1/2} \leq h_n$  взяв  $\delta = h_n$ , получим третье неравенство.

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если  $\sup_{t \in [0, h_n]} E[X_n^{0i}(t) - x^i]^2 \rightarrow 0$  для любого  $i = \overline{1, r}$  и  $K^j(n, h_n) \rightarrow (1 - 2\theta_j)$ , при  $\theta_j \in [0, 1/2]$ ,

$j = \overline{1, m}$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$ , так что  $1/n^{3/2} = o(h_n)$ , то  $\sup_{t \in T} E \| X_n(t) - X(t) \|^2 \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Получается предельным переходом в неравенстве (22).

**Теорема 2.** Пусть  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Если  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$  так, что  $1/n^{3/2} = o(h_n)$ , причем  $\sup_{t \in [0, h_n]} E[X_n^{0i}(t) - x^i]^2 \rightarrow 0$ , то для сходимости последовательности  $X_n(t)$  решений задачи Коши (3) в  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  и равномерно по  $t \in T$  необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности  $K^j(n, h_n)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (5) в случае когда  $\theta \in [1/2, 1]$ , рассмотрим следующую задачу Коши с опережением:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^m f_n^{ij}(t+h_n, X_n(t+h_n)) [B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t+h_n, X_n(t+h_n)); \\ X_n^i(t)|_{[0, h_n]} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1, r}, t \in [0; T]. \end{cases} \quad (23)$$

С помощью принципа сжимающих отображений несложно показать, что данная задача имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Но, и в этом случае справедлива теорема, аналогичная предыдущей.

**Теорема 3.** Пусть  $\theta_j \in [1/2, 1]$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$  и  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ , «начальное условие» задачи Коши (3)  $X_n^{0i}(t)$ , принадлежит  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  и является  $F_{t+1/n}$  измеримым для любого  $t \in [0, h_n)$ . Тогда для решения задачи Коши (3)  $X_n(t)$  и решения уравнения (4)  $X(t)$  справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{t \in T} E \|X_n(t) - X(t)\|^2 \leq C \sup_{t \in [0, h_n)} E \|X_n^0(t) - x\|^2 + C\gamma_n + C \sum_{j=1}^m (K^j(n, h_n) - (1 - 2\theta_j))^2,$$

где  $\gamma_n = 1/(n^{3/2}h_n)$ , если  $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$ ,  $\gamma_n = 1/(n^{2/3}h_n^{1/3})$ , если  $1/n^{5/4} \leq h_n \leq 1/n^{1/2}$ ,  $\gamma_n = h_n$  если  $1/n^{1/2} \leq h_n$ .

**Теорема 4.** Пусть  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Если  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$  так, что  $1/n^{3/2} = o(h_n)$ , причем  $\sup_{t \in [0, h_n)} E [X_n^{0i}(t) - x^i]^2 \rightarrow 0$ , то для сходимости последовательности  $X_n(t)$  решений задачи Коши (3) в  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  и равномерно по  $t \in T$  необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности  $K^j(n, h_n)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wong, E. On the relationship between ordinary and gap between deterministic and stochastic ordinary and stochastic differential equations / E. Wong, M. Zakai // Internat.J.Engin.Sci. – 1965. – Vol. 3. – P. 213–229.
2. Мацкявичюс, В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений / В. Мацкявичюс // Литовский математический сборник. – 1978. – Т. 18, № 3. – С. 101–108.
3. Лазакович, Н.В. Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений конечно-разностными / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 20–22.
4. Русина, Т.И. Аппроксимация стохастических интегралов в неоднородном случае / Т.И. Русина, О.Л. Яблонский // Весці НАН Беларусі. – 2004. – № 1. – С. 21–26.
5. Lazakovich, N.V. On the approximation of solutions of stochastic equations with  $\theta$ -integrals / N.V. Lazakovich, A.L. Yablonski // Stochastics and Stoch. Rep. – 2004. – V. 76, № 2. – P. 135–145.
6. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.
7. Яблонский, О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов / О.Л. Яблонский // Доклады НАН Беларусі. – 2000. – Т. 44, № 2. – С. 22–26.

8. Пугачев, В.С. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. / В. С. Пугачев, И. Н. Сеницын – М., 1990.

***T.I. Karimava, A.L. Yablonski. System of Nonautonomous Stochastic Differentials Equations in Algebra of Generalized Stochastic Processes***

The paper deals with stochastic differential equations in the algebra of generalized stochastic processes. According to this approach one has to investigate limiting behavior of solutions of corresponding finite difference equations with averaging. The main goal of the article is to find necessary and sufficient conditions implying convergence of solutions of nonautonomous multidimensional finite difference equations with averaging. The rate of convergence is estimated.

УДК 517.925.6

*И.Н. Климашевская, Д.В. Грицук*

## УСЛОВИЯ АЛГЕБРОИДНОСТИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАНЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматриваются автономные системы двух дифференциальных уравнений. Найдены достаточные условия отсутствия у таких систем решений с заданным предельным свойством и трансцендентными компонентами. Эти условия легко проверяются на практике. Полученные результаты могут быть применены как в самой аналитической теории дифференциальных уравнений, так и в многочисленных ее приложениях.

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P(x, y)}{R(x, y)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Q(x, y)}{S(x, y)}, \quad (1)$$

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – комплексные переменные,  $P$ ,  $R$ ,  $Q$  и  $S$  – многочлены по  $x$  и  $y$  с постоянными коэффициентами. Пусть представления многочленов  $P$ ,  $R$ ,  $Q$  и  $S$  имеют вид

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{p_1} P_i(y)x^{p_1-i}, \quad R(x, y) = \sum_{i=0}^{r_1} R_i(y)x^{r_1-i},$$

$$Q(x, y) = \sum_{i=0}^{q_1} Q_i(y)x^{q_1-i}, \quad S(x, y) = \sum_{i=0}^{s_1} S_i(y)x^{s_1-i},$$

где  $P_i(y) = \sum_{j=0}^{l_i} p_{ij}y^{l_i-j}$ ,  $R_i(y) = \sum_{j=0}^{t_i} r_{ij}y^{t_i-j}$ ,  $Q_i(y) = \sum_{j=0}^{k_i} q_{ij}y^{k_i-j}$ ,  $S_i(y) = \sum_{j=0}^{d_i} s_{ij}y^{d_i-j}$ .

Обозначим  $\max\{l_i\} = p_2$  ( $i = \overline{0, p_1}$ ),  $\max\{t_i\} = r_2$  ( $i = \overline{0, r_1}$ ),  $\max\{k_i\} = q_2$  ( $i = \overline{0, q_1}$ ),  $\max\{d_i\} = s_2$  ( $i = \overline{0, s_1}$ ).

Ставится задача: найти условия, при выполнении которых система (1) имеет только алгеброидные решения  $(x(z), y(z))$  со свойством

$$x(z) \rightarrow \infty, \quad y(z) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0. \quad (2)$$

Разделив первое уравнение системы (1) на второе, получим уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left( \sum_{i=0}^{p_1} \left( \sum_{j=0}^{l_i} p_{ij}y^{l_i-j} \right) x^{p_1-i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{s_1} \left( \sum_{j=0}^{d_i} s_{ij}y^{d_i-j} \right) x^{s_1-i} \right)}{\left( \sum_{i=0}^{r_1} \left( \sum_{j=0}^{t_i} r_{ij}y^{t_i-j} \right) x^{r_1-i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{q_1} \left( \sum_{j=0}^{k_i} q_{ij}y^{k_i-j} \right) x^{q_1-i} \right)}, \quad (3)$$

решение  $x(y)$  которого обладает свойством

$$x(y) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Сделав в уравнении (3) замену  $y = \frac{1}{v}$ , приведем его к виду:



$$\frac{dx}{dv} = - \frac{\left( \sum_{i=0}^{p_1} \left( \sum_{j=0}^{l_i} p_{ij} v^{p_2-l_i+j} \right) x^{p_1-i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{s_1} \left( \sum_{j=0}^{d_i} s_{ij} v^{s_2-d_i+j} \right) x^{s_1-i} \right)}{\left( \sum_{i=0}^{r_1} \left( \sum_{j=0}^{t_i} r_{ij} v^{r_2-t_i+j} \right) x^{r_1-i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{q_1} \left( \sum_{j=0}^{k_i} q_{ij} v^{q_2-k_i+j} \right) x^{q_1-i} \right)} \cdot v^{q_2+r_2-p_2-s_2-2} \equiv \frac{M(x,v)}{N(x,v)}, \quad (5)$$

где  $M$  и  $N$  многочлены по  $x$  и  $v$ .

Пусть

$$M = \sum_{i=0}^m M_i(v) x^{m-i}, \quad N = \sum_{j=0}^n N_j(v) x^{n-j},$$

$M_i(v) = v^{m_i} \bar{M}_i(v)$ ,  $N_j(v) = v^{n_j} \bar{N}_j(v)$ , где  $m_i \geq 0$ ,  $n_j \geq 0$  – целые числа, а  $\bar{M}_i(v)$  и  $\bar{N}_j(v)$  – многочлены по  $v$ , причем  $\bar{M}_i(0) \neq 0$ ,  $\bar{N}_j(0) \neq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ).

Очевидно, что если имеют место соотношения

$$p_1 + s_1 \geq q_1 + r_1 + 2, \quad q_2 + r_2 \geq p_2 + s_2 + 2, \quad (6)$$

то будут выполнены условия

$$m \geq n + 2, \quad N(x, 0) = 0. \quad (7)$$

В работе [1] доказано, что при выполнении условий (7), уравнение (5) всегда имеет решение  $x(v)$ , обладающее свойством

$$x(v) \rightarrow \infty \text{ при } v \rightarrow 0, \quad (8)$$

причем для этого решения точка  $v = 0$  является полюсом, обычным или критическим. В следствие этого система (1) всегда имеет решение  $(x(z), y(z))$  со свойством (2), для функций  $x(z)$  и  $y(z)$  которого точка  $z_0$  является полюсом, обычным или критическим [2].

Для построения решений уравнения (5) со свойством (8) используется диаграмма Пьюизо, суть которой заключается в следующем. В прямоугольной декартовой системе координат  $xOy$  отметим точки  $A_i(i, m_i + 1)$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $B_j(m - n - 1 + j, n_j)$  ( $j = \overline{0, n}$ ). Если выполнены условия (7), то самой левой из отмеченных точек будет точка  $A_0(0, m_0 + 1)$ , расположенная на оси  $Oy$ , и все остальные точки  $A_i$  будут находиться в первом квадранте. Кроме того, существует число  $k$  – первое в ряду чисел  $0, 1, \dots, n$ , для которого  $n_k = 0$ , поэтому точка  $B_k$  будет находиться на оси  $Ox$ . Все остальные точки  $B_j$  будут расположены на оси  $Ox$  правее точки  $B_k$ , или в первом квадранте. Чтобы получить диаграмму Пьюизо, надо соединить точки  $A_0$  и  $B_k$  ломаной, выпуклой к началу координат и с вершинами в отмеченных точках так, чтобы никакая другая из точек  $A_i$  и  $B_j$  не была ниже этой ломаной.

Построенная ломаная может содержать звенья только следующих трех типов:

- 1) звенья, на которых есть как точки  $A_i$ , так и точки  $B_j$ ;
- 2) звенья, на которых расположены только точки  $B_j$ ;
- 3) звенья, на которых расположены только точки  $A_i$ .

Очевидно, что в частном случае диаграмма Пьюизо может состоять из одного звена первого типа  $\overline{A_0 B_k}$ . При выполнении условий (7) диаграмма Пьюизо будет содержать хотя бы одно звено, на котором есть как точки  $A_i$ , так и точки  $B_j$ .

Известно [1], что только звенья первого типа диаграммы Пьюизо для уравнения (5) дают полярные решения этого уравнения, которые порождают алгеброидные решения системы (1), обладающие свойством (2). Однако при выполнении условий (6) система (1), вообще говоря, может иметь решения  $(x(z), y(z))$  со свойством (2), для которых точка  $z_0$  будет являться подвижной трансцендентной особой точкой. Это возможно лишь в тех случаях, когда диаграмма Пьюизо кроме звеньев первого типа будет содержать звенья второго или третьего типа. Если же диаграмма Пьюизо состоит лишь из одного звена  $\overline{A_0 B_k}$  или только из звеньев первого типа, то система (1) при выполнении соотношений (6) всегда будет иметь только алгеброидные решения, обладающие свойством (2).

Укажем условия, при которых диаграмма Пьюизо для уравнения (5) будет состоять только из одного звена  $\overline{A_0 B_k}$ .

Имеют место

Теорема 1. Если выполнены условия

$$l_0 = p_2, \quad d_0 = s_2, \quad (9)$$

$$p_1 + s_1 \geq q_1 + r_1 + 2, \quad (10)$$

$$q_2 + r_2 = p_2 + s_2 + 2, \quad (11)$$

то система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

Доказательство. Предположим, что условия (9) имеют место, тогда многочлены  $P(x, y)$  и  $S(x, y)$  имеют доминирующие члены  $p_{00}x^{p_1}y^{p_2}$  и  $s_{00}x^{s_1}y^{s_2}$  соответственно. Если выполнено условие (11), то в числителе правой части уравнения (5) имеется член  $p_{00}s_{00}x^{p_1+s_1}$ . Этому члену на координатной плоскости будет соответствовать точка  $A_0(0,1)$ . Все остальные точки  $A_i$  ( $i = \overline{1, p_1 + s_1}$ ) будут лежать правее на прямой  $y = 1$  или выше нее. Пусть первой из точек  $B_j$  ( $j = \overline{0, q_1 + r_1}$ ) на оси  $Ox$  находится точка  $B_k$ . Все точки  $B_j$  ( $j = \overline{0, k-1}$ ) лежат выше звена  $\overline{A_0 B_k}$ . В нашем случае диаграмма Пьюизо состоит из одного звена  $\overline{A_0 B_k}$ . При выполнении условий (9), (10) и (11) система (1) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для обеих компонент которого точка  $z_0$  является полюсом. Но так как диаграмма Пьюизо состоит только из одного звена  $\overline{A_0 B_k}$ , то других решений, отличных от полярных, система (1) не имеет. Следовательно, при выполнении условий теоремы система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

Теорема 2. Если выполнены условия

$$k_0 = q_2, \quad t_0 = r_2, \quad (12)$$

$$q_2 + r_2 \geq p_2 + s_2 + 2, \quad (13)$$

$$p_1 + s_1 = q_1 + r_1 + 2, \quad (14)$$

то система (1) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

Доказательство. Будем считать, что условия (12) выполнены. Это значит, что функции  $Q(x, y)$  и  $R(x, y)$  имеют доминирующие члены  $q_{00}x^{q_1}y^{q_2}$  и  $r_{00}x^{r_1}y^{r_2}$  соответственно. Тогда после замены  $y = \frac{1}{v}$  уравнение (5) будет иметь в знаменателе

правой части член  $q_{00}r_{00}x^{q_1+n}$ . Этому члену на координатной плоскости будет соответствовать точка  $B_0(p_1 + s_1 - r_1 - q_1 - 1, 0)$ . Таким образом, первой из точек  $B_j$  ( $j = \overline{0, q_1 + r_1}$ ) на оси  $Ox$  будет находиться точка  $B_0$ . При выполнении условия (14) точка  $B_0$  имеет координаты  $(1, 0)$ . Все остальные точки  $B_j$  ( $j = \overline{1, q_1 + r_1}$ ) будут лежать либо на оси  $Ox$ , но правее точки  $B_0$ , либо правее и выше нее. Все точки  $A_i$  ( $i = \overline{1, p_1 + s_1}$ ) будут лежать выше и правее точки  $B_0$  ( $A_i$  находится на одной прямой, но выше). Итак, при выполнении условий (12), (13) и (14) система (1) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для обеих компонент которого точка  $z_0$  является полюсом. Кроме того, диаграмма Пьюизо в нашем случае будет состоять только из одного звена  $\overline{A_0B_0}$ . Поэтому других решений, обладающих свойством (2), кроме полярных, у системы (1) не будет. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай системы (1), а именно систему вида

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P(x, y)}{R(x, y)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}. \quad (15)$$

Уравнение (5) в этом случае имеет вид:

$$\frac{dx}{dv} = - \frac{\sum_{i=0}^{p_1} \left( \sum_{j=0}^{l_i} p_{ij} v^{p_2 - l_i + j} \right) x^{p_1 - i}}{\sum_{i=0}^{q_1} \left( \sum_{j=0}^{k_i} q_{ij} v^{q_2 - k_i + j} \right) x^{q_1 - i}} \cdot v^{q_2 - p_2 - 2}. \quad (16)$$

Имеют место

Теорема 3 [3]. При выполнении условий (7) и

$$\begin{aligned} m_i &\geq m_0 - iR \quad (i = \overline{0, m}), \\ n_j &\geq (k - j)R \quad (j = \overline{0, k - 1}), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $R = \frac{m_0 + 1}{m - n - 1 + k}$  ( $k$  – первое в ряду чисел  $0, 1, \dots, n$ , для которого  $n_k = 0$ ),

диаграмма Пьюизо для уравнения (5) состоит только из одного звена  $\overline{A_0B_k}$ .

Применяя теорему 3 к уравнению (16), для системы (15) получим следующее утверждение:

Теорема 4. Если выполнены условия:

$$\begin{aligned} p_1 &\geq q_1 + 2, \quad q_2 \geq p_2 + 2, \\ l_i &\leq l_0 + iR \quad (i = \overline{0, p_1}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$q_2 - k_i \geq (k - j)R \quad (i = \overline{0, q_1}, \quad j = \overline{0, k - 1}), \quad (19)$$

где  $R = \frac{p_2 - l_0 + 1}{p_1 - q_1 - 1 + k}$  ( $k$  – наименьшее значение индекса  $i$ , при котором  $q_2 - k_i = 0$ ),

то система (15) имеет только алгеброидные решения со свойством (2).

Доказательство. Если выполнены условия (18), то система (15) всегда имеет хотя бы одно решение со свойством (2), для компонент  $x(z)$  и  $y(z)$  которого точка  $z_0$  является полюсом. При выполнении соотношений (19) диаграмма Пьюизо для

уравнения (16) состоит из звена  $\overline{A_0 B_k}$ . Следовательно, других решений со свойством (2), кроме полярных, у системы (15) нет.

Таким образом, в теоремах 1, 2 и 4 выделены классы автономных систем вида (1) и (15), не имеющих решений со свойством (2), для которых точка  $z_0$  являлась бы подвижной трансцендентной особой точкой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратеня, С.Г. К вопросу о существовании полярных решений у дифференциальных уравнений первого порядка / С.Г. Кондратеня, Е.Г. Пролиско, Т.И. Шило // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1824–1826.

2. Кондратеня, С.Г. Существование и построение полярных решений автономной системы двух дифференциальных уравнений / С.Г. Кондратеня, И.Н. Климашевская, Т.И. Шило // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 12. – С. 2170–2172.

3. Грицук, Д.В. Существование полярных решений у дифференциальных уравнений первого порядка / Д.В. Грицук // Волинь очима молодих науковців: минуле, сучасне, майбутнє: матеріали III міжнародної науч.-практ. Конф. аспірантів і студентів: в 3 т. / РВВ «Вежа» Волин. Нац. ун-та ім. Леси Українки. – Луцк, 2009. – Т. 2. – С. 235–237.

#### ***I.N. Klimashevskaya, D.V. Gritsuk. Conditions of the Algebraic Solutions with Given Limit Properties for Autonomous Systems of Two Differential Equations***

Autonomous systems of two differential equations are considered. Sufficient conditions of absent solutions with given limit property and transcendental components for such systems are obtained. These conditions are easy to be tested on practice. The obtained results can be used in the analytic theory of differential equations as well as in its numerous applications.

УДК 519.24

*И.И. Комаров, Чэнь Хайлун***О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА DPR ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНДЕКСА УСТОЙЧИВОСТИ**

Анализ взаимосвязей экономических данных, представленных в виде временных рядов, является необходимой составной частью современных исследований. В ряде задач экономики и её приложениях, где необходимо оценивать лишь хвост распределения, основное внимание направлено на оценивание хвостового индекса, который называют индексом устойчивости. В данной статье рассматривается DPR метод. Исследуется возможность его применения для оценки индекса устойчивости на примере смоделированных устойчивых случайных величин.

Класс устойчивых распределений является одним из важнейших в теории вероятностей прежде всего потому, что эти распределения удовлетворяют обобщенной центральной предельной теореме и являются предельным распределением, при условии его существования, нормированных сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Известно [1], что случайная величина  $\xi$  будет устойчивой тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции  $\varphi_\xi(t)$ ,  $t \in R$  представим в виде:

$$\ln \varphi_\xi(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t \omega(t, \alpha, \beta), \quad (1)$$

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1, \\ -2\beta \ln |t| / \pi, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где  $\alpha \in (0; 2]$ ,  $\beta \in [-1; 1]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in R$ .

Из представления (1) видно, что класс устойчивых случайных величин представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ . Если характеристическая функция случайной величины  $\xi$  удовлетворяет (1), то будем писать  $\xi \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ . При  $\sigma = 1$  и  $\mu = 0$  устойчивую случайную величину называют стандартной.

Для оценки  $\alpha$ , которую называют индексом устойчивости, используется ряд методов. Наиболее известные – это методы В. Золотарева и Б.М. Хилла. Наряду с этими методами для оценки индекса устойчивости  $\alpha$  рассматривается метод, предложенный в Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas (DPR-метод) [2].

Пусть  $X^n = \{X_1, \dots, X_n\}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины с тяжело-хвостовой функцией распределения  $F(x)$ . Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas [2] предложили рассматривать оценку, которая использует независимые отношения вторых наибольших порядковых статистик к наибольшим порядковым статистикам в подгруппах наблюдений.

Согласно этой оценке, выборка делится на  $l$  групп  $V_1, \dots, V_l$ , каждая из которых содержит  $m$  случайных величин, т.е.  $n = l \cdot m$ . На практике выбирается  $m$  и  $l = \lceil n/m \rceil$ , где  $\lceil \cdot \rceil$  обозначает целую часть числа.

Пусть

$$M_{li}^{(1)} = \max_{j=1, m} \{X_j : X_j \in V_i\}, \quad i = \overline{1, l}$$

и  $M_{li}^{(2)}$  – второй наибольший элемент в той же группе  $V_i$ . Обозначим

$$k_{li} = \frac{M_{li}^{(2)}}{M_{li}^{(1)}},$$

$$z_l = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l k_{li}.$$

Пусть функция распределения  $F(x)$  удовлетворяет, при  $x \rightarrow \infty$ , следующему условию:

$$1 - F(x) \sim Cx^{-\alpha} \tag{2}$$

с параметром  $0 < \alpha < \infty, C = const.$

Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas доказали в [2], что для  $l = m = [\sqrt{n}]$

$$z_l \xrightarrow{n.n.} \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Тогда оценив  $z_l$ , найдём  $\alpha$  как

$$\alpha = \frac{z_l}{1 - z_l}. \tag{3}$$

Смоделируем устойчивую случайную величину и применим DPR-метод для оценки параметра  $\alpha$ .

Таблица 1 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины  $\xi \sim S_{0,4}(0, l, 0)$  для различных  $n$  и  $m$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	0,25	<b>0,40</b>	0,32	0,59	0,43	0,59	0,14	0,14	0,26	0,26
900	0,33	0,38	<b>0,40</b>	0,37	0,42	0,45	0,83	0,50	0,72	0,36
1600	0,25	0,36	0,37	<b>0,39</b>	0,33	0,35	0,38	0,43	0,25	0,42
2500	0,29	0,30	0,32	0,35	<b>0,40</b>	0,30	0,31	0,35	0,33	0,50
3600	0,34	0,43	0,33	0,38	0,34	<b>0,39</b>	0,38	0,28	0,37	0,29
4900	0,29	0,31	0,34	0,36	0,35	0,43	<b>0,38</b>	0,32	0,41	0,37
6400	0,34	0,39	0,39	0,41	0,42	0,41	0,47	<b>0,39</b>	0,40	0,37

Таблица 2 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины  $\xi \sim S_l(0, l, 0)$  для различных  $n$  и  $m$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	0,96	<b>1,04</b>	1,24	0,98	0,98	1,20	1,58	0,43	0,58	0,83
900	0,76	0,96	<b>0,98</b>	1,44	1,43	0,90	1,26	0,94	0,88	1,34
1600	0,73	0,86	0,90	<b>1,04</b>	1,10	0,90	1,18	1,13	1,24	0,88
2500	0,78	0,96	1,04	0,94	<b>0,99</b>	1,15	1,11	1,44	1,25	1,42
3600	0,89	0,88	0,94	0,90	0,79	<b>1,03</b>	1,07	1,12	0,76	0,83
4900	0,81	1,00	1,01	1,07	0,96	0,90	<b>1,01</b>	0,95	1,00	0,96
6400	0,87	1,02	1,01	1,08	1,09	1,06	1,05	<b>1,00</b>	1,23	1,07

Таблица 3 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины  $\xi \sim S_{l,3}(0, l, 0)$  для различных  $n$  и  $m$ 

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	1,24	<b>1,30</b>	0,94	0,95	0,86	0,96	1,17	0,85	0,68	0,63
900	0,94	1,24	<b>1,30</b>	1,04	1,22	1,14	1,05	1,13	1,42	1,14
1600	1,09	1,45	1,29	<b>1,32</b>	1,15	1,43	1,05	1,00	0,91	0,81
2500	1,18	1,28	1,31	1,36	<b>1,33</b>	1,43	1,51	1,65	1,37	1,54
3600	1,19	1,36	1,54	1,27	1,22	<b>1,29</b>	1,57	1,14	1,50	1,32
4900	1,05	1,18	1,35	1,35	1,43	1,33	<b>1,31</b>	1,15	1,38	1,31
6400	1,09	1,38	1,23	1,36	1,23	1,17	1,29	<b>1,31</b>	1,23	1,23

Таблица 4 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины  $\xi \sim S_{l,9}(0, l, 0)$  для различных  $n$  и  $m$ 

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	1,70	<b>1,94</b>	2,25	2,98	5,78	1,80	6,57	4,61	1,21	3,58
900	2,30	2,60	<b>2,50</b>	2,43	2,55	1,92	2,00	1,85	2,41	2,25
1600	2,01	2,67	3,31	<b>2,80</b>	3,04	3,07	3,28	3,77	3,72	3,43
2500	1,81	2,28	2,72	3,00	<b>2,80</b>	2,73	3,17	3,50	3,15	3,23
3600	1,70	2,95	3,38	3,32	3,19	<b>3,00</b>	2,88	3,30	4,00	3,18
4900	1,81	2,86	3,33	3,77	4,20	4,08	<b>4,62</b>	4,89	4,50	4,72
6400	1,85	3,12	3,56	3,96	3,87	3,91	3,61	<b>3,78</b>	3,70	3,78

Таблица 5 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины  $\xi \sim S_{l,95}(0, l, 0)$  для различных  $n$  и  $m$ 

	7	8	9	10	11
400	1,12	1,43	1,86	1,89	1,96
900	1,56	1,63	1,40	1,77	1,92
1600	1,33	1,54	1,68	1,82	1,98
2500	1,25	1,49	1,62	1,88	1,92
3600	1,30	1,63	1,83	1,99	2,01
4900	1,12	1,72	1,87	1,96	2,08
6400	1,23	1,63	1,85	1,92	1,99

Проанализировав результаты, можно сделать следующие выводы:

1) При  $0 < \alpha < 1,5$

а) оценка индекса устойчивости достаточно близка к истинному значению для случая  $l = m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

б) в случае большого количества смоделированных данных, когда  $0 < \alpha < 1$ , оценка индекса устойчивости демонстрирует постоянство при различных значениях  $m$ .

2) При  $1,5 < \alpha < 2$

а) применять DPR-метод при оценивании индекса устойчивости становится затруднительным для случая  $l = m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

б) для оценивания индекса устойчивости лучше делить выборку на  $l$  групп по  $m$  элементов в каждой таким образом, чтобы значение  $m$  было близким к десяти.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zolotarev, V. Stable distributions and their applications. VSP / V. Zolotarev, V. Uchaikin. – M., 1999.
2. Davydov, Yu. More on P-stable convex sets in Banach spaces / Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas // J. Theoret. Probab. – 2000. – 13, № 1. – 39–64.

***I.I. Komarov, Chen Hailong. The Applicability of DPR Method to the Estimation of Stability Index***

The analysis of the economic data interrelation, presented in the form of time series, is a necessary part of modern research. In the number of economic objectives and its supplements, where it is necessary to estimate only the tail of the distribution, the focus is directed to the estimation of the tail index, which is called stability index. This article deals with the DPR method. The possibility to apply the method to the estimation of stability index by the example of modeled stable random quantities is considered.



УДК 519.6 + 517.983.54

**О.В. Матысик, В.Ф. Савчук**

## О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и несамосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по соседним приближениям, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истощаемости представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

**1. Постановка задачи.** В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным несамосопряжённым оператором  $A$ , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что  $y \in R(A)$ , т. е. при точной правой части  $y$  уравнение имеет единственное решение  $x$ . Будем искать его, используя неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = \left( E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left[ \left( E - \alpha(A^*A)^k \right) x_n + 2\alpha(A^*A)^{k-1} A^* y \right], \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , метод итераций (2) примет вид:

$$z_{n+1} = \left( E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left[ \left( E - \alpha(A^*A)^k \right) z_n + 2\alpha(A^*A)^{k-1} A^* y_\delta \right] + \left( E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left( E - \alpha(A^*A)^k \right) u_n, \quad z_0 = 0, \quad k \in N, \quad (3)$$

где  $u_n$  – ошибки в вычислении итераций, причём  $\|u_n\| \leq \beta$ . Обозначим через

$$C = \left( E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \left( E - \alpha(A^*A)^k \right), \quad B = 2 \left( E + \alpha(A^*A)^k \right)^{-1} \alpha(A^*A)^{k-1} A^*.$$

Тогда метод (3) примет вид  $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$ .

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора  $A$ . Там доказано, что при условии  $\alpha > 0$  метод (3) сходится, и в предположении, что точное решение  $x$  уравнения (1) истощаемо, получена оценка погрешности.

**2. Правило останова по соседним приближениям.** В том случае, когда истощаемость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать

эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2–4]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент останова  $m$  определим неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [4] доказываются леммы.

**Лемма 1.** Пусть приближение  $\omega_n$  определяется условиями

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Тогда справедливо неравенство  $\sum_{k=0}^n \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ .

**Лемма 2.** При  $\forall \omega_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$ .

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$$

в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ .

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (6)$$

При  $n = 1$  из  $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$  имеем  $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$ , из (6) получим то же самое, т. е. при  $n = 1$  формула (6) верна. Предположим, что (6) верна при  $n = p$ ,

т. е.  $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1})$ , и докажем её справедливость при  $n = p + 1$ .

Имеем

$$\begin{aligned}
z_{p+1} &= C^p z_p + B y_\delta + C u_p = C \left( C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + B y_\delta + C u_p = \\
&= C^{p+1} z_0 + C^2 (C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + \\
&\quad + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1} u_0) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + C (B y_\delta + C u_{p-1} + \\
&\quad + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p) = \\
&= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k})
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\begin{aligned}
\omega_n &= C^n \omega_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y + u_{n-k-1}) = C^n \omega_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) B y + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_0 = \omega_0$ , получим

$$\begin{aligned}
z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 + A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = \\
&= C^n \omega_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \\
&\quad + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} \omega_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y + A^{-1} (E - C^{n+1}) y - A^{-1} (E - C^n) y_\delta - \\
&\quad - C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1} (E - C) (y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B (y - y_\delta).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n B (y - y_\delta)\|. \quad (7)$$

Обозначим  $\sigma = B(y - y_\delta)$ , тогда

$$\begin{aligned}
\|C^n B (y - y_\delta)\| &= \|C^n \sigma\| = \left\| \int_0^{\|A^* A\|} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| + \\
&\quad + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A^* A\|} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \leq \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| + q^n \|\sigma\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

так как при  $\alpha > 0$ ,  $\lambda \in (0, \|A^* A\|]$  имеем  $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^k}{1 + \alpha \lambda^k} \right| \leq q < 1$ .

Поэтому (см. лемму 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta$ .

Следовательно, условием  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$  момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$  и  $u_n, \|u_n\| \leq \beta$ .

б) Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова  $m'$  условием

$$\left. \begin{aligned} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| &> \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| &\leq \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (7) следует, что  $m \leq m'$ . Из леммы 1 при  $n = m'$  получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2, \text{ поэтому справедливо записать}$$

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2. \text{ Отсюда получим}$$

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при  $n < m'$  имеем  $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$ , то  $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$ . Учитывая, что  $\omega_0 = z_0$  и  $m \leq m'$ , из последнего неравенства получим оценку для момента останова:

$$m \leq m' \leq \|z_0 - x\|^2 ((\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta))^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \quad (9)$$

Предположим, что (9) верно, тогда  $x - C^n x = B(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y$ ,  $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1}y$ ,  $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax$ ,  $(E - C^n)x = (E - C^n)x$ . Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана. Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]. \quad (10)$$

Отсюда  $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}]$ , где  $\Delta_n = z_n - x$  и  $\Delta_0 = z_0 - x$ .

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (11)$$

В частности, (11) справедливо и при  $n = m$ . Если  $m \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$ , тогда, как показано ранее,  $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ . Поэтому для доказательства  $\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  достаточно показать, что  $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ . Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (12)$$

Так как спектр оператора  $C = \left( E + \alpha(A^* A)^k \right)^{-1} \left( E - \alpha(A^* A)^k \right)$  принадлежит  $[0, 1]$ ,

то можно доказать, что

$$\|C^n (E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (13)$$

Поэтому из (12) получим при  $n = m - 1$ :

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} B(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \\ &+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как  $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$  [5].

Так как по условию теоремы  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ ,  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то при всех достаточно малых  $\delta, \beta$  выполняется неравенство  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , поэтому

из б) получим  $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$ . Поскольку  $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$ , то

$$\varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta. \text{ Отсюда получим, что } m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на  $\|B\|\delta + \|C\|\beta$ , получим

$$m \left( \|B\|\delta + \|C\|\beta \right) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \left( \|B\|\delta + \|C\|\beta \right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}. \text{ При } m \rightarrow \infty \text{ множитель}$$

$$2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0, \text{ а } \frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$$

ограничена при  $\delta, \beta \rightarrow 0$ . Поэтому  $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$ , при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$ . Отсюда и из неравенства (11) при  $m \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \left( \|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Итак, доказано, что  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , т. е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 1(30). – С. 15–21.
2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 2(31). – С. 11–18.
5. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

***O.V. Matysik, V.F. Savchuk. On the Convergence of the Implicit Iteration Method with the Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems***

In the Hilbert space for solving linear operator equations with affirmative limited and non self-conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of the rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes the viewed iteration method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

УДК 512.542

**В.С. Монахов, А.А. Трофимук**

## КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ПОРЯДКАМИ ФАКТОРОВ НОРМАЛЬНОГО РЯДА, СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ

Натуральное число  $n$  называется свободным от кубов, если  $p^3$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . Группа называется  $A_4$ -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе  $A_4$ . Изучено строение конечных разрешимых групп с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов. В частности, исследованы группы нечетного порядка и  $A_4$ -свободные группы с таким свойством. Получены точные оценки производной длины и  $p$ -длины таких групп.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения соответствуют [1–2].

Пусть  $n$  и  $m$  – натуральные числа. Говорят, что  $n$  свободно от  $m$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m=2$  говорят, что  $n$  свободно от квадратов, а при  $m=3$  – от кубов.

Если порядок группы  $G$  свободен от квадратов, то в  $G$  существует циклическая холлова подгруппа  $N$  такая, что  $G/N$  циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности,  $G$  сверхразрешима и ее производная длина не превосходит 2.

Группы порядков, свободных от кубов, могут быть неразрешимыми. В работе [3] перечислены все такие группы:

*если  $G$  – неразрешимая группа порядка, свободного от кубов, то  $G = A \times B$ , где  $A$  – разрешимая подгруппа,  $B \cong PSL(2, r)$ ,  $r$  – простое число,  $r \equiv \pm 3 \pmod{8}$  и числа  $r-1$  и  $r+1$  свободны от кубов.*

Для разрешимой группы  $G$  порядка, свободного от кубов, в работе [3] доказаны следующие утверждения:

- а) производная длина  $G$  не превышает 3;
- б)  $G$  – дисперсивная группа;
- в)  $\{2, 3\}'$ -холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;
- г)  $2'$ -холлова подгруппа метабелева;
- д) если  $G$  не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа  $N$  такая, что  $G/N$  изоморфна знакопеременной группе  $A_4$ .

Нормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа  $G_i$  нормальна в группе  $G$  для всех  $i$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами нормального ряда (1).

Вполне естественно возникает следующая задача: исследовать строение разрешимой группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда.

Несложно проверить, что если у группы  $G$  имеется нормальный ряд, факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то  $G$  сверхразрешима (см. лемму 6 настоящей статьи). В случае, когда факторы имеют порядки, свободные от кубов, доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Пусть разрешимая группа  $G$  обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина  $G$  не превышает 4, а производная длина  $G/\Phi(G)$  не превышает 5.

2. Группа  $G$  содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу  $N$  такую, что  $G/N$  сверхразрешима.

3.  $l_2(G) \leq 2$ ,  $l_3(G) \leq 2$  и  $l_p(G) \leq 1$  для всех простых  $p > 3$ .

4. Группа  $G$  содержит нормальную дисперсивную по Оре  $\{2,3\}'$ -холлову подгруппу.

5. Если  $G$   $A_4$  свободна, то:

5.1)  $l_p(G) \leq 1$  для любого простого  $p$ ;

5.2) производная длина  $G/\Phi(G)$  не превышает 3;

5.3)  $G$  дисперсивна по Оре.

6. Если  $G$  имеет нечетный порядок, то коммутант  $G$  нильпотентен. В частности,  $G/\Phi(G)$  метаболева.

Здесь  $\Phi(G)$  – подгруппа Фраттини группы  $G$ , а  $l_p(G)$  – ее  $p$ -длина. Группа  $G$  называется  $A_4$ -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе  $A_4$ .

Построены примеры, показывающие, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

### Определения и вспомогательные результаты

Говорят, что группа  $G$  дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называют группу  $G$  порядка  $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ , где  $p_1 > p_2 > \dots > p_k$ , у которой имеется нормальный ряд (1) такой, что  $m = k$  и для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  фактор  $G_i/G_{i-1}$  изоморфен силовской  $p_i$ -подгруппе группы  $G$ .

Если все факторы ряда (1) абелевы и  $m$  – наименьшее среди всех нормальных рядов с абелевыми факторами, то значение  $m$  называют производной длиной группы  $G$  и обозначают через  $d(G)$ .

Если все факторы ряда (1) нильпотентны и  $m$  – наименьшее среди всех нормальных рядов с нильпотентными факторами, то значение  $m$  называют нильпотентной длиной группы  $G$  и обозначают через  $n(G)$ .

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 4]. Пусть  $F$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^F$  –  $F$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in F$ . Произведение  $FN = \{G \in G \mid G^H \in F\}$  формаций  $F$  и  $H$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $H$ -корадикал принадлежит формации  $F$ . Как обычно,  $F^2 = FF$ . Формация  $F$  называется насыщенной, если из условия  $G/\Phi(G) \in F$  следует, что  $G \in F$ . Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через  $N$  и  $A$  соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.



*Лемма 1.* [5, леммы 4,5] Пусть  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(n, p)$ . Тогда:

1. Если  $n = 2$ , то  $H \in \mathbf{N}_2 \mathbf{U} \cap \mathbf{A}^4$ .
2. Если  $n = 3$ , то  $H \in \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{U} \cap \mathbf{A}^5$ .

*Лемма 2.* Если  $H$  – подгруппа группы  $GL(3, 2)$ , то  $H \in \{1, GL(3, 2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$ .

*Доказательство.* По теореме II.6.14. [2] группа  $GL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$ , а по теореме II.8.27 [2] подгруппа  $H$  из заключения леммы.

*Лемма 3.* Пусть  $H$  –  $A_4$ -свободная  $p'$ -подгруппа группы  $GL(2, p)$ . Тогда  $H$  метабелева.

*Доказательство.* В теореме 3.4 [6] перечислены все виды подгрупп группы  $GL(2, p)$ . Согласно этой теореме любая подгруппа в группе  $GL(2, p)$  сопряжена с подгруппой  $G$  одного из следующих типов:

- 1)  $G$  циклическая;
- 2)  $G = QM$ , где  $Q$  –  $p$ -подгруппа,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \right\rangle,$$

$M \subseteq N_G(Q)$  и  $M$  – подгруппа группы  $D$  всех диагональных матриц;

3)  $G = \langle Z_u, s \rangle$ , где  $u$  делит  $q^2 - 1$ ,  $y^s = y^q$  для всех  $y \in Z_u$ , и  $s^2$  – скалярный 2-элемент в  $Z_u$ ;

4)  $G = \langle M, s \rangle$ , где  $M \subseteq D$  и  $|G : M| = 2$ ;

5)  $G = \langle SL(2, p^\beta), V \rangle$  или  $G = \langle SL(2, p^\beta), V, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \varepsilon b \end{pmatrix} \rangle$ ,

где  $V$  – скалярная матрица,  $\varepsilon$  – образующий элемент  $(GF(p^\beta))^*$ ,  $p^\beta > 3$ ,  $\beta$  делит  $\alpha$ . Во втором случае  $|G : \langle SL(2, p^\beta), V \rangle| = 2$ ;

6)  $G/\langle -E \rangle$  изоморфна  $S_4 \times Z_u$ ,  $A_4 \times Z_u$  или  $A_5 \times Z_u$ , если  $p \neq 5$ , где  $Z_u$  – скалярная подгруппа  $GL(2, q)/\langle -E \rangle$ , а  $E$  – единичная матрица;

7)  $G$  не является группой из пункта (6), но  $G/\langle -E \rangle$  содержит  $A_4 \times Z_u$  в качестве подгруппы индекса 2 и  $A_4$  в качестве подгруппы с циклической фактор-группой,  $Z_u$  – группа такая, как в пункте (6), где  $u$  – четное число.

Подгруппа из п. 1 абелева. Порядок подгруппы из п. 2 делится на  $p$ . Учитывая, что группа всех диагональных матриц является абелевой, получим, что в пп. 3–4 подгруппа  $H$  метабелева. Подгруппа из пп. 5–7 не является  $A_4$ -свободной. Итак, если  $H$  –  $A_4$ -свободная  $p'$ -подгруппа группы  $GL(2, p)$ , то  $H$  метабелева. Лемма доказана.

*Лемма 4.* Если  $G$  – метанильпотентная группа, то  $l_p(G) \leq 1$  для любого простого  $p$ .

*Доказательство.* Пусть  $N$  – нильпотентная нормальная подгруппа группы  $G$ , фактор-группа по которой нильпотентна. Для любого простого  $p$  группа  $N = N_p \times N_{p'}$ , где  $N_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $N$ , а  $N_{p'}$  – ее дополнение. Так как  $N_{p'} \triangleleft G$ ,

то  $G_p N_{p'} \triangleleft G$ , где  $G_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , поэтому  $l_p(G) \leq 1$ . Лемма доказана.

*Лемма 5.* Пусть  $n$  – натуральное число и группа  $G$  обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от  $n$ -х степеней.

1. Если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то  $H$  обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от  $n$ -х степеней.

2. Если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $G/N$  обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от  $n$ -х степеней.

*Доказательство.* Доказательство – простая проверка.

*Лемма 6.* Если у группы  $G$  имеется нормальный ряд с факторами порядков, свободных от квадратов, то  $G$  сверхразрешима. В частности,  $G$  дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, нильпотентная длина группы  $G$  не выше 2, а производная длина  $G/\Phi(G)$  не выше 2.

*Доказательство.* Пусть ряд (1) является нормальным рядом с силовскими подгруппами простого порядка в факторах. Согласно теореме Цассенхауза [2, теорема IV.2.11], коммутант каждого фактора ряда (1) является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Поэтому ряд (1) можно уплотнить до нормального ряда с циклическими факторами. Теперь  $G$  сверхразрешима, а из свойств сверхразрешимых групп следует дисперсивность по Оре группы  $G$  и нильпотентность ее коммутанта. Последнее также означает, что нильпотентная длина группы  $G$  не выше 2. Так как коммутант  $G'$  нильпотентен, то он содержится в подгруппе Фиттинга  $F(G)$  и  $G/F(G) \cong (G/G')/(F(G)/G')$  абелева группа. Но в любой группе  $F(G)/\Phi(G)$  абелева и  $(G/\Phi(G))/(\Phi(G)/\Phi(G)) \cong G/F(G)$ . Теперь  $G/\Phi(G)$  имеет производную длину не выше 2.

### *Доказательство теоремы*

Пусть ряд (1) является нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Без ограничения общности можно считать, что  $G_1 \neq 1$ . Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$  и покажем, что  $G \in \mathcal{F} = \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2 \mathcal{U} \cap \mathcal{N} \mathcal{A}^4$ . Здесь  $\mathcal{N}_2$  – формация всех нильпотентных групп нечетного порядка,  $\mathcal{N}_2$  – формация всех 2-групп, а  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{U}$  – формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Хорошо известно, что формационные произведения  $\mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2 \mathcal{U}$  и  $\mathcal{N} \mathcal{A}^4$  являются насыщенными формациями, поэтому  $\mathcal{F}$  – насыщенная формация. В силу леммы 5 собственные подгруппы и фактор-группы группы  $G$  обладают нормальными рядами с факторами порядков, свободных от кубов. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат  $\mathcal{F}$ . Значит, можно считать, что  $\Phi(G) = 1$  и  $F = F(G)$  является единственной минимальной нормальной подгруппой группы  $G$ . Кроме того,  $F = C_G(F)$ . Ясно, что  $F \subseteq G_1$ , поэтому  $F$  является подгруппой некоторой силовской  $p$ -подгруппы группы  $G_1$  и порядок  $F$  равен  $p$  или  $p^2$  для некоторого простого  $p$ .

Пусть сначала  $|F| = p$ . Тогда  $G/F$  – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка  $p$  и  $G$  сверхразрешима. Отсюда следует, что  $G \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ .

Пусть теперь  $|F| = p^2$ . Тогда  $G/F$  изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы  $GL(2, p)$ . Из п. 1 леммы 1 следует, что  $G/F \in N_2U \cap A^4$ , поэтому  $G \in NA^4$ . Если  $p = 2$ , то из включения  $G/F \in N_2U$  следует, что  $G \in N_2U \subseteq N_2N_2U$ . Если  $p \neq 2$ , то из включения  $G/F \in N_2U$  следует, что  $G \in N_2N_2U$ . Итак, в любом случае  $G \in N_2N_2U \cap NA^4$ .

1. Поскольку сверхразрешимые группы имеют нильпотентный коммутант, то из включения  $G \in N_2N_2U$  следует, что нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4. Из включения  $G \in NA^4$  получаем, что производная длина  $G/F(G)$  не превышает 4. Но в любой разрешимой группе  $G$  фактор-группа  $F(G)/\Phi(G)$  абелева. Значит, производная длина  $G/\Phi(G)$  не превышает 5.

2. Из включения  $G \in N_2N_2U$  следует, что сверхразрешимый корадикал  $G^U$  принадлежит формации  $N_2N_2$ . Поэтому  $G^U = [H]P$ , где  $H$  –  $2'$ -холлова подгруппа,  $P$  – силовская 2-подгруппа. Так как  $H \in N_{2'}$ , то  $H$  нильпотентна нечетного порядка и  $G^U$  будет дисперсивной по Оре.

3. Из леммы 4 получаем, что  $l_p(G) \leq 2$  для любого простого  $p \in \pi(G)$ . Докажем, что  $l_p(G) \leq 1$  для любого простого  $p > 3$ . Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$ . По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что  $O_{p'}(G) = \Phi(G)$ , а подгруппа Фиттинга  $F = F(G) = C_G(F)$  – единственная минимальная нормальная  $p$ -подгруппа, обладающая дополнением  $M$  в группе  $G$ . Поэтому силовская  $p$ -подгруппа  $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$ , где  $M_p$  – некоторая силовская  $p$ -подгруппа в  $M$ . Если  $M_p = 1$ , то  $F = G_p$  и  $l_p(G) \leq 1$ . Пусть  $M_p \neq 1$ . Так как  $F \leq G_1$ , то  $F$  является подгруппой силовской  $p$ -подгруппы группы  $G_1$  и порядок  $F$  равен  $p, p^2$ . Если  $|F| = p$ , то фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов  $Aut(F)$  группы  $F$ , порядок которой равен  $p-1$ . Отсюда  $G_p = F$ , противоречие. Пусть  $|F| = p^2$ . Тогда фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p)$ , порядок которой равен  $(p^2 - p)(p^2 - 1)$ . Поэтому порядок силовской подгруппы  $G_p$  равен  $p^3$ . Так как  $F = C_G(F)$ , то  $G_p$  неабелева и изоморфна по теореме I.14.10 [2] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle,$$

либо группе экспоненты  $p$ . Поскольку подгруппа  $\Omega_1(M_3(p))$ , порожденная элементами порядка  $p$ , является элементарной абелевой подгруппой порядка  $p^2$ , то она не дополняема в  $M_3(p)$ . Поэтому изоморфизм  $G_p$  с подгруппой  $M_3(p)$  исключается, и  $G_p$  является подгруппой экспоненты  $p$ . Если порядок группы нечетен или  $p$  – не простое число Ферма, то по теореме IX.4.8 [7]  $l_p(G) \leq 1$ . Но теперь, согласно утверждению b) теоремы IX.5.5 [7],  $l_p(G) \leq 1$  для  $p > 3$ .

4. Пусть  $p$  – наибольший простой делитель порядка группы, а  $G_p$  – её силовская  $p$ -подгруппа. Предположим, что  $p > 3$ . Используя индукцию по порядку

группы, покажем, что подгруппа  $G_p$  нормальна в группе  $G$ , т. е.  $G \in \mathbf{N}_p \mathbf{E}_{p'}$ . Здесь  $\mathbf{N}_p$  – формация всех  $p$ -групп, а  $\mathbf{E}_{p'}$  – формация всех  $p'$ -групп. Хорошо известно, что  $\mathbf{N}_p \mathbf{E}_{p'}$  – насыщенная формация, поэтому можно считать, что  $\Phi(G) = 1$  и в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа  $F = F(G)$ . Кроме того,  $F = C_G(F)$ , фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе группы автоморфизмов  $F$ . Так как  $F$  является подгруппой силовской  $p$ -подгруппы группы  $G_1$ , то порядок  $F$  равен  $q$ ,  $q^2$ , где  $q$  – некоторое простое число. При  $p = q$  с учетом утверждения из п. 3, получаем, что  $G_p$  нормальна в  $G$ . Поэтому считаем, что  $p > q$ . Пусть сначала  $|F| = q$ , тогда  $G/F$  – циклическая группа порядка, делящего  $q-1$ . Ввиду того, что  $p$  – наибольший простой делитель порядка группы  $G$ , этот случай исключается. Пусть теперь  $|F| = q^2$ . Тогда фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе полной линейной группы  $GL(2, q)$ , порядок которой равен  $(q^2 - q)(q^2 - 1)$ . Поэтому, учитывая  $p > q$ , получим, что  $p$  делит  $q+1$ , что возможно только при  $p = 3$ , а  $q = 2$ . Противоречие.

Итак мы доказали, что силовская подгруппа  $G_p$  нормальна в группе  $G$  для наибольшего простого  $p \in \pi(G)$  при условии, что  $p > 3$ .

Теперь положим  $\pi = \pi(G) \setminus \{2, 3\}$  и покажем, что  $\pi$ -холлова подгруппа  $G_\pi$  нормальна в группе  $G$ . Так как класс всех  $\pi$ -замкнутых групп является насыщенной формацией, то по индукции  $O_\pi(G) = 1$  и подгруппа Фиттинга  $F = C_G(F)$  является минимальной нормальной подгруппой, которая будет элементарной абелевой  $p$ -подгруппой порядка, делящего  $2^2$  или  $3^2$ . Фактор-группа  $G/F$  изоморфна подгруппе  $GL(n, p)$  для  $p \in \{2, 3\}$  и  $n \leq 2$ . Так как  $\pi(GL(n, p)) \subseteq \{2, 3\}$  для этих значений  $n$  и  $p$ , то  $G$  –  $\pi'$ -группа.

Итак мы доказали, что  $\pi$ -холлова подгруппа  $G_\pi$  нормальна в группе для  $\pi = \pi(G) \setminus \{2, 3\}$ . Если  $p$  – наибольшее из  $\pi$ , то  $G_p$  нормальна в  $G_\pi$  по доказанному. По индукции фактор-группа  $G_\pi/G_p$  дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа  $G_\pi$  дисперсивна по Оре.

5.1. Пусть  $G$   $A_4$ -свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что  $l_p(G) \leq 1$  для  $p \in \{2, 3\}$ . По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что  $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ , а подгруппа Фиттинга  $F = F(G)$  – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка  $p^\alpha$ , где  $\alpha \leq 2$  для  $p = 2$  и  $p = 3$ , так как  $F \leq G_1$ . В частности,  $C_G(F) = F$ . Если  $|F| = p$ , то  $G/F$  имеет порядок  $p-1$  и  $l_p(G) \leq 1$ .

Если  $|F| = 4$ , то  $\text{Aut}(F) \cong GL(2, 2) \cong S_3$  и либо  $G/F \cong Z_3$ , либо  $G/F \cong S_3$ . Если  $G/F \cong Z_3$ , то  $G \cong A_4$ . Если  $G/F \cong S_3$ , то  $G \cong S_4$ . В любом случае группа не  $A_4$ -свободна. Противоречие.

Пусть  $|F| = 9$ . Тогда  $G/F$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, 3)$  и  $O_3(G/F) = 1$ . Известно, что  $H \in \{1, Z_2, Z_4, Z_8, Z_2 \times Z_2, D_8, Q_8, SD_{16}, SL(2, 3), GL(2, 3)\}$ . Во всех случаях, кроме  $G/F \cong SL(2, 3)$  и  $G/F \cong GL(2, 3)$ , подгруппа  $F$  является силовской 3-подгруппой в  $G$ . Поэтому  $l_3(G) \leq 1$ . Так как  $SL(2, 3)$  и  $GL(2, 3)$  не являются  $A_4$ -свободными, то они из рассмотрения исключаются.

Итак,  $l_p(G) \leq 1$  для  $p \in \{2,3\}$ . Из п. 3 следует, что  $l_p(G) \leq 1$  для  $p > 3$ . Утверждение 5.1. доказано полностью.

5.2. Пусть  $G$   $A_4$ -свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$  и докажем, что  $G \in \text{NA}^2$ . Можно считать, что  $\Phi(G) = 1$  и в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга  $F$ . Ввиду п. 5.1.  $l_p(G) \leq 1$  для всех  $p \in \pi(G)$ , поэтому  $F$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Кроме того,  $F = C_G(F)$ . Так как  $F \leq G_1$ , то порядок  $|F|$  равен  $p$  или  $p^2$ , где  $p$  – простое число.

Если  $|F| = p$ , то  $G/F$  – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка  $p$ , поэтому  $G/F$  абелева. Пусть  $|F| = p^2$ . Тогда  $G/F$  изоморфна некоторой неприводимой разрешимой  $p'$ -подгруппе  $H$  группы  $GL(2, p)$ . По лемме 3 подгруппа  $H$  метабелева, т. е.  $G/F \in \text{A}^2$ .

Итак, в любом случае  $G/F \in \text{A}^2$ . Так как  $F/\Phi(G)$  абелева и  $(G/\Phi(G))/(\Phi(G)/\Phi(G)) \cong G/F$ , то  $G/\Phi(G) \in \text{A}^3$  и производная длина  $G/\Phi(G)$  не превышает 3.

5.3. Предположим, что  $G$  не является  $\{2,3\}$ -группой. По доказанному в п. 4  $\pi$ -холлова подгруппа  $G_\pi$  нормальна в  $G$  и дисперсивна по Оре для  $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3\}$ . Пусть  $R$  – силовская  $r$ -подгруппа в  $G$  для наибольшего простого  $r \in \pi(G)$ . Тогда  $r > 3$ ,  $R \leq G_\pi$  и  $R$  нормальна в  $G$ . Для фактор-группы  $G/R$  условия теоремы выполняются и  $G/R$  дисперсивна по Оре по индукции. Из того, что  $r$  – наибольший простой делитель порядка группы  $G$  следует, что группа  $G$  дисперсивна по Оре.

Пусть теперь  $G$  –  $\{2,3\}$ -группа. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то группа  $G$  примитивна, а по теоремам 4.40–4.42 [1]  $G = [F(G)]H$ , где  $F(G)$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – максимальная подгруппа. Так как по п. 5.1.  $l_2(G) \leq 1$ , то  $F(G)$  – силовская 2-подгруппа группы  $G$ . Теперь  $|F(G)| = 4$  и  $H$  – подгруппа группы  $GL(2,2) \cong S_3$ . Поскольку  $F(G)$  – силовская 2-подгруппа группы  $G$ , то  $|H| = 3$  и  $G \cong A_4$ , противоречие. Утв. 5.3. доказано.

6. Пусть  $G$  имеет нечетный порядок. Проверим, что коммутант группы  $G$  нильпотентен. Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\Phi(G) = 1$  и в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга  $F = F(G)$  и является элементарной абелевой  $p$ -подгруппой для некоторого простого числа  $p$ . Так как  $F \leq G_1$ , то порядок  $|F|$  равен  $p$  или  $p^2$ . В силу п. 5.1.  $l_p(G) = 1$ , поэтому  $F$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  и  $G/F$  является  $p'$ -подгруппой. В разрешимых группах подгруппа Фиттинга содержит свой централизатор, поэтому фактор-группа  $G/F$  является группой автоморфизмов группы  $F$ . Если  $|F| = p$ , то  $G/F$  – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка  $p$  и коммутант  $G' \subseteq F$ . Пусть  $|F| = p^2$ . Тогда  $G/F$  изоморфна некоторой неприводимой разрешимой  $p'$ -подгруппе нечетного порядка группы  $GL(2, p)$ . По теореме 3.4 [6]  $G/F$  абелева и  $G' \subseteq F$ . Итак, в любом случае коммутант группы  $G$  нильпотентен. Поскольку  $F/\Phi(G)$  абелева, то  $G/\Phi(G)$  метабелева. Теорема доказана полностью.

Следующие примеры показывают, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

*Пример 1.* Пусть  $E_{7,2}$  – элементарная группа порядка  $7^2$ . Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа  $GL(2,7)$  с циклическим центром  $Z = Z(GL(2,7))$  порядка 6. Выберем в группе  $Z$  подгруппу  $C$  порядка 2. Очевидно, что  $C$  нормальна в  $GL(2,7)$ . Вычисления в компьютерной системе GAP показывают, что в  $GL(2,7)$  существует подгруппа  $S$  порядка 48 такая, что фактор-группа  $S/C$  изоморфна симметрической группе  $S_4$  степени 4. Полупрямое произведение  $G = [E_{7,2}]S$  является группой порядка  $2352 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3$ , причем  $\Phi(G) = 1$ . Нильпотентная длина группы  $G$  равна 4, производная длина равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{7,2} \subset [E_{7,2}]Z_2 \subset [E_{7,2}]Q_8 \subset [E_{7,2}]SL(2,3) \subset [E_{7,2}]S = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{7,2}, ([E_{7,2}]Z_2)/(E_{7,2}) \cong Z_2, ([E_{7,2}]Q_8)/([E_{7,2}]Z_2) \cong E_4,$$

$$([E_{7,2}]SL(2,3))/([E_{7,2}]Q_8) \cong Z_3, (G/[E_{7,2}]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина данной группы равна 2.

*Пример 2.* Пусть  $S$  – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа  $[E_{3,2}]GL(2,3)$ . Полупрямое произведение  $G = [S]GL(2,3)$  является группой порядка  $1296 = 2^4 \cdot 3^3$  с подгруппой Фраттини  $\Phi(G) \cong Z_3$ . Производная длина группы  $G$  равна 6, а производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$Z_3, S/Z_3 \cong E_{3,2}, ([S]Z_2)/S \cong Z_2, ([S]Q_8)/([S]Z_2) \cong E_{2,2},$$

$$([S]SL(2,3))/([S]Q_8) \cong Z_3, G/([S]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

*Пример 3.* Пусть  $E_{5,2}$  – элементарная абелева группа порядка  $5^2$ . Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа  $GL(2,5)$ , в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе  $S_3$  степени 3. Полупрямое произведение  $G = [E_{5,2}]S_3$  является  $A_4$ -свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы  $G$  равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5,2} \subset [E_{5,2}]Z_3 \subset [E_{5,2}]S_3 = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{5,2}, ([E_{5,2}]Z_3)/(E_{5,2}) \cong Z_3, ([E_{5,2}]S_3)/([E_{5,2}]Z_3) \cong Z_2.$$

Кроме того, группа  $G$  является дисперсивной по Оре, а  $p$ -длина данной группы равна 1 для произвольного  $p \in \{2,3,5\}$ .

*Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф 08P-230).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
3. Монахов, В.С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка  $p^2$  / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, № 2. – С. 139–145.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Bloom, D. The subgroups of  $PSL(3, q)$  for odd  $q$  / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 127, № 1. – P. 150–178.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1982.

***V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk. Finite Solvable Groups with Cube-Free Orders of Factors of Normal Series***

The natural number  $n$  is called cube-free if  $p^3$  does not divide  $n$  for all prime  $p$ . The group is called  $A_4$ -free if it does not contain the section isomorphic to the alternating group  $A_4$ . We consider the structure of finite solvable groups with cube-free orders of factors of normal series. In particular, we investigated groups of odd order and  $A_4$ -free groups with this property. Exact estimations of the derived length and  $p$ -length of such groups are obtained.

УДК 512.542

*С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук*

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ПРИМАРНЫЕ ПОДГРУППЫ ЛИБО $\mathfrak{F}$ -СУБНОРМАЛЬНЫ, ЛИБО $\mathfrak{F}$ -АБНОРМАЛЬНЫ

Одним из важнейших направлений теории конечных групп является изучение строения конечных групп, у которых некоторая система подгрупп обладает некоторыми заданными свойствами. В данной работе исследуются строение конечных групп, у которых все примарные подгруппы обладают некоторыми заданными свойствами. Получено полное описание произвольных конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна в случае, когда  $\mathfrak{F}$  – класс всех нильпотентных групп, класс всех  $p$ -нильпотентных групп, класс всех  $p$ -замкнутых групп. Найдены общие свойства произвольных конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна для произвольной локальной наследственной формации  $\mathfrak{F}$ .

Рассматриваются только конечные группы.

В работе [1] было получено описание конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественным обобщением субнормальности и абнормальности является понятие  $\mathfrak{F}$ -субнормальности и  $\mathfrak{F}$ -абнормальности.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Подгруппу  $K$  группы  $G$  назовем  $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо  $K = G$ , либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_n = K$$

такая, что  $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Подгруппу  $H$  группы  $G$  назовем  $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если либо  $H = G$ , либо любая максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_m = H$$

такая, что  $H_i(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} = H_{i-1}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

В работе [2] было исследовано строение конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна для произвольной наследственной локальной формации  $\mathfrak{F}$ . Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, где  $\mathfrak{F}$  – произвольная наследственная локальная формация. В частности, получено описание таких групп в случае, когда  $\mathfrak{F}$  – класс всех нильпотентных, всех  $p$ -нильпотентных, всех  $p$ -замкнутых групп.

Напомним, что группа, порядок которой есть степень некоторого простого числа, называется примарной. Формация  $\mathfrak{F}$  – класс групп замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Локальная формация – формация замкнутая относительно фраттиниевых расширений. Подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  есть пересечение всех таких подгрупп  $N$  группы  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Обозначим через  $\pi(\mathfrak{F})$  характеристику формации  $\mathfrak{F}$ , то есть множество всех простых чисел, делящих порядки групп из  $\mathfrak{F}$ .



Все необходимые определения и обозначения можно найти в [3].

**Лемма 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная наследственная формация. Если в  $G$  все примарные подгруппы  $\mathfrak{F}$ -субнормальны, то  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1)  $G \in \mathfrak{F}$ ;
- 2)  $|G| = p$ , где  $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ ;
- 3)  $|G : G^{\mathfrak{F}}|$  делится не менее, чем на два различных простых числа.

Напомним, что  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная наследственная формация. Пусть  $G$  – группа такая, что  $G \notin \mathfrak{F}$ ,  $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$  и любая примарная подгруппа из  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна в  $G$ . Тогда  $G^{\mathfrak{F}} \subset G$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная наследственная формация и  $G$  – группа такая, что  $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда и только тогда любая примарная подгруппа из  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна в  $G$ , когда  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1) любая примарная подгруппа из  $G$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ ;
- 2)  $G = G^{\mathfrak{F}} G_p$ , где  $G^{\mathfrak{F}}$  – собственная подгруппа группы  $G$ , а силовская  $p$ -подгруппа  $G_p$  группы  $G$   $\mathfrak{F}$ -абнормальна в  $G$  и является добавлением к  $G^{\mathfrak{F}}$  в  $G$ , все другие примарные подгруппы  $G$   $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $G$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная наследственная разрешимая формация. Если в группе  $G$  ( $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ ) любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, то  $G$  – разрешимая группа.

**Лемма 5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная наследственная разрешимая формация. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  ( $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ ) либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна в  $G$ , когда  $G$  – разрешимая группа одного из следующих видов:

- 1) любая примарная подгруппа группы  $G$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ ;
- 2)  $G = G_p \lambda G_p$ , где  $G_p$  –  $\mathfrak{F}$ -проектор группы  $G$ ,  $G_p' = G^{\mathfrak{F}}$  и любая примарная подгруппа группы  $G_p$   $\mathfrak{F}$ -абнормальна в  $G$ .

**Лемма 6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация всех сверхразрешимых групп. Если все силовские подгруппы группы  $G$   $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $G$ , то  $G$  – дисперсивная по Оре группа одного из следующих типов:

- 1)  $G$  – сверхразрешимая группа;
- 2)  $|G : G^{\mathfrak{F}}|$  делится не менее, чем на два различных простых числа.

**Лемма 7.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная наследственная сверхрадикальная формация. Пусть  $G$  – группа, у которой любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна. Тогда любая разрешимая  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа  $H$  такая, что  $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ , принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

Произведением классов групп  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{X}$  называется класс групп  $\mathfrak{F}\mathfrak{X}$ , который состоит из всех групп  $G$  таких, что в  $G$  найдется нормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа  $N$  с условием  $G/N \in \mathfrak{X}$ .

Группа  $G$  называется  $p$ -замкнутой ( $p$ -нильпотентной), если ее силовская  $p$ -подгруппа (силовское  $p$ -дополнение) нормальна в  $G$ . Группа  $G$  называется  $p$ -разложимой, если она одновременно  $p$ -замкнута и  $p$ -нильпотентна.

Пусть  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Через  $\pi'$  обозначим дополнение к  $\pi$  во множестве всех простых чисел, если  $\pi = \{p\}$ , то вместо  $\pi'$  будем просто писать  $p'$ . Тогда  $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_p$  – класс всех  $p$ -нильпотентных групп,  $\mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_{p'}$  – класс всех  $p$ -замкнутых групп,  $\mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_{p'}$  – класс всех  $p$ -разложимых групп,  $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_p$  — класс всех нильпотентных групп, где  $p$  пробегает все простые числа.

Группа  $G$  называется  $\pi$ -нильпотентной ( $\pi$ -разложимой), если она  $p$ -нильпотентна ( $p$ -разложима) для любого простого числа  $p$  из  $\pi$ . Класс всех  $\pi$ -нильпотентных ( $\pi$ -разложимых) групп можно записать в виде

$$\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_p \quad \left( \bigcap_{p \in \pi} (\mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_{p'}) \right).$$

Группа  $G$  называется  $\pi$ -замкнутой, если она имеет нормальную  $\pi$ -холлову подгруппу. Тогда  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$  — класс всех  $\pi$ -замкнутых групп.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел. Обозначим через  $I$  любое подмножество из  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Пусть  $\pi_i, \pi_j$  – некоторые множества простых чисел, а  $\mathfrak{S}_{\pi_i}, \mathfrak{S}_{\pi_j}$  – классы всех разрешимых  $\pi_i$ - и  $\pi_j$ -групп соответственно. Обозначим через

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}, \text{ где } (i, j) \text{ пробегает все пары из } I.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_j}$ . Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  ( $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ ) либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, когда  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1)  $G \in \mathfrak{F}$ ;
- 2)  $G = G_q \lambda G_q$ , где  $G_q = G^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{F}$ ,  $G_q$  –  $\mathfrak{F}$ -проектор группы  $G$ ,  $G_q$  – циклическая подгруппа,  $G_q \times G_q^*$  – нормальная максимальная подгруппа группы  $G$ ,  $G_q^*$  – максимальная подгруппа из  $G_q$ .

**Следствие 1.** Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  субнормальна либо абнормальна в  $G$ , когда  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1)  $G$  нильпотентна;
- 2)  $G = G_q \lambda G_q$ , где  $G_q$  нильпотентна, а  $G_q$  – циклическая подгруппа Картера.

**Лемма 8.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Если в группе  $G$  силовская  $p$ -подгруппа  $G_p$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , где  $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ , то  $G$  –  $p$ -замкнутая группа.

**Лемма 9.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая наследственная формация. Пусть  $G$  – группа, у которой любая примарная подгруппа либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна,

а  $H$  – собственная  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа  $G$ . Тогда  $H$  –  $p$ -замкнутая группа для любого  $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ ,  $|H_p| = p$ , причем либо  $\pi(H) \cap \pi'(\mathfrak{F}) = \emptyset$ , либо  $\pi(H) \cap \pi'(\mathfrak{F}) = \{p\}$ .

Напомним, что группа  $G$  называется минимальной не  $\mathfrak{F}$ -группой, если она не принадлежит некоторому классу группы  $\mathfrak{F}$ , а любая её собственная подгруппа принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

**Лемма 10.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая наследственная формация,  $G$  – разрешимая минимальная не  $\mathfrak{F}$ -группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда любая примарная подгруппа из  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j) \in I} \mathfrak{O}_{\pi_i} \mathfrak{O}_{\pi_j}$ . Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, когда  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1)  $G \in \mathfrak{F}$ ;
- 2)  $G = G_q \lambda G_q$ , где  $G_q = G^{\delta} \in \mathfrak{F}$ ,  $G_q$  –  $\mathfrak{F}$ -проектор группы  $G$ ,  $G_q$  – циклическая подгруппа,  $G_q \times G_q^*$  – нормальная максимальна подгруппа группы  $G$ ,  $G_q^*$  – максимальная подгруппа из  $G_q$ ;
- 3)  $G = G_p \lambda G_{p'}$ , где  $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ ,  $G_p$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы  $G$ ,  $|G_p| = p$ ,  $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$  и  $G_{p'}$  – группа из пункта 2), причем  $\mathfrak{F}$ -проектор из  $G_{p'}$  является  $\mathfrak{F}$ -проектором группы  $G$ ;
- 4)  $G$  –  $\pi'(\mathfrak{F})$ -группа;
- 5)  $G = G_p G_{p'}$ , где  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ ,  $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ ,  $|G_p| = p$ ,  $G_p$  –  $\mathfrak{F}$ -проектора группы  $G$ ,  $N_G(K)$  –  $p'$ -группа, где  $K$  – любая  $p'$ -группа из  $G$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация всех  $p$ -замкнутых групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, когда  $G$  группа одного из следующих типов:

- 1)  $G$  –  $p$ -замкнутая группа;
- 2)  $G = G_p \lambda G_p$ , где  $G_p$  – циклическая подгруппа Картера,  $G_p = G^{\delta}$ , любая максимальная подгруппа из  $G_p$  нормальна в  $G$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация всех  $p$ -нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы  $G$  либо  $\mathfrak{F}$ -субнормальна, либо  $\mathfrak{F}$ -абнормальна, когда  $G$  – группа одного из следующих типов:

- 1)  $G$  –  $p$ -нильпотентная группа;
- 2)  $G = G_p \lambda G_q$ , где  $q \neq p$ ,  $G_q$  – циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из  $G_q$  нормальна в  $G$ ,  $G_p = G^{\delta}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ebert, G. A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert, S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – V. 36, № 2. – P. 287–293.

2. Семенчук, В.Н. Конечные группы с  $\mathfrak{F}$ -абнормальными или  $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1994. – Т. 56, № 6. – С. 111–115.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

***S.N. Shevchuk, V.N. Semenchuk. Finite Groups Every Primary Subgroup of which is Either  $\mathfrak{F}$ -subnormal or  $\mathfrak{F}$ -abnormal***

We have studied finite groups in which every primary subgroups is either  $\mathfrak{F}$ -subnormal or  $\mathfrak{F}$ -abnormal. In particular, the full description of such groups in the case  $\mathfrak{F} = \mathcal{N}$   $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$ ,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$  is obtained.

УДК 513.82

*А.А. Юдов, Е.Е. Гурская*

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ В РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе изучаются канонические связности в редуктивных однородных пространствах  $G/G_i$ , где  $G$  – группа Ли движений пространства  ${}^2R_4$ ,  $G_i$  – подгруппа Ли группы Ли вращений этого пространства. Строятся модели таких пространств и находятся геодезические линии канонической связности. Построенные геодезические линии полностью характеризуют каноническую связность.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры – пространство  ${}^2R_4$  и группу Ли  $G$  движений этого пространства.

Представим пространство  ${}^2R_4$  в виде однородного  $\varphi$ -пространства В.И. Ведерникова.

Рассмотрим следующий эндоморфизм  $\varphi$  группы  $G$ :

$$\varphi: G \rightarrow G: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

При помощи эндоморфизма  $\varphi$  построим  $\varphi$ -пространство  $X$  по правилу:

$$X = \{a\varphi(a^{-1}) \mid a \in G\}$$

В этом множестве  $X$  транзитивно действует группа  $G$ :

$$(G, X) \rightarrow X: (g, a\varphi(a^{-1})) \rightarrow g a\varphi(a^{-1})\varphi(g^{-1})$$

Следовательно,  $X$  становится однородным пространством со структурной группой  $G$ . Непосредственным вычислением получаем, что множество  $X$  состоит из элементов вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа стационарности  $H$  элемента  $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $O \in X$ , совпадает

с множеством всех  $\varphi$ -неподвижных элементов группы  $G$ , т.е. с множеством:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \right\}.$$

Имеет место

**Теорема 1.**  $G$  – пространства  ${}^2R_4$   $X$ ,  $G/H$  изоморфны, причём  $G$ -изоморфизм задаётся отображениями:

$$\delta, \psi : \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H.$$

Рассмотрим для модели  $\phi$ -пространства  $X$  формулы канонической проекции:

$$\pi : G \rightarrow X \equiv G/H : a \rightarrow aH,$$

$$\pi : G \rightarrow G/H \equiv X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & E \end{pmatrix} H \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & E \end{pmatrix} \in X$$

и её дифференциал:

$$d\pi_{|e} : \bar{G} \rightarrow T_{\pi(e)}(G/H) : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем следующую теорему А.С. Понтрягина:

**Теорема 2.** [3, с. 156]. Пусть  $G$  – непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства  $\Gamma$  и  $\alpha$  – некоторая фиксированная точка пространства  $\Gamma$ . Обозначим через  $\psi(\xi)$  множество всех элементов  $x \in G$ , удовлетворяющих условию  $x^*(\alpha) = \xi$ . Оказывается, что  $H_\alpha = \psi(\alpha)$  есть подгруппа топологической группы  $G$ ,  $\psi$  есть взаимно однозначное отображение множества  $\Gamma$  на множество  $G/H_\alpha$  левых смежных классов. Оказывается, что  $\psi^{-1}$  есть непрерывное отображение пространства  $G/H$  на пространство  $\Gamma$ . Пусть  $\phi$  – тождественное отображение группы  $G$  на себя. Если пространства  $G$  и  $\Gamma$  локально бикомпактны и пространство  $G$  представимо как сумма счётного множества своих бикомпактных подмножеств, то пара  $\phi, \psi$  есть подобие пары  $G, \Gamma$  на пару  $G, G/H_\alpha$ .

Введем следующие определения.

**Определение 1.** Образом стационарности подгруппы  $K$  группы  $G$  называется совокупность  $D$  фигур пространства  ${}^2R_4$  и ему соответствующего векторного пространства  ${}^2E_4$  таких, что группе  $K$  принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности  $D$  инвариантна.

**Определение 2.** Упорядоченная совокупность фигур пространства  ${}^2R_4$  называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются  $k$ -плоскостями ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) пространства  ${}^2R_4$ , причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Флаг выписывается в порядке убывания размерности элементов.

Все подгруппы Ли группы Ли  $H$ , имеющие флаговые образы стационарности, перечислены в работе [2].

Ниже приведены все такие подгруппы Ли группы Ли  $H$ , причем подгруппы Ли задаются своими алгебрами Ли:

$$\bar{G}_1 = \{i_{10}\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная евклидова плоскость } \overset{\circ}{R}_2 .$$

$$\bar{G}_2 = \{i_5\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная мнимоевклидова плоскость } \overset{\circ}{R}_2 .$$

$$\bar{G}_3 = \{i_6\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная псевдоевклидова плоскость } \overset{\circ}{R}_2 .$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_4 &= \{i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная полуевклидова плоскость } R_2^1. \\ \bar{G}_5 &= \{i_5 - i_7\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная полумнимоевклидова плоскость } R_2^1. \\ \bar{G}_6 &= \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная изотропная плоскость } R_2^2. \\ \bar{G}_{14} &= \{i_5, i_{10}\}, \text{ о.с. – обобщенный флаг } \{R_2, R_0\}. \\ \bar{G}_{15} &= \{i_6, i_9\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2, R_0\}. \\ \bar{G}_{16} &= \{i_9, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2^1, R_1, R_0\}. \\ \bar{G}_{17} &= \{i_9, i_5 - i_7\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2^1, R_1, R_0\}. \\ \bar{G}_{18} &= \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2^1, R_1^1, R_0\}. \\ \bar{G}_{27} &= \{i_8, i_9, i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_1, R_0\}. \\ \bar{G}_{28} &= \{i_5, i_7, i_9\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_1, R_0\}. \\ \bar{G}_{29} &= \{i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – точечно-неподвижная изотропная прямая } R_1^1. \\ \bar{G}_{30} &= \{i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2^1, R_0\}. \\ \bar{G}_{36} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_1^1, R_0\}. \\ \bar{G}_{40} &= \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. – флаг } \{R_2^2, R_0\}. \\ H &= \{i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}, \text{ о.с. – точка } R_0. \end{aligned}$$

Будем рассматривать каноническую связность на редуцированном однородном пространстве [1, гл.11]. Следующая теорема обосновывает существование связности, инвариантной под действием левых сдвигов группы Ли  $G$  на редуцированном однородном пространстве  $G/H$ .

**Теорема 3.** [1, с. 104]. Пусть  $G$  – связная группа Ли, а  $H$  – её замкнутая подгруппа. Пусть  $\bar{G}$  и  $\bar{H}$  – алгебры Ли для  $G$  и  $H$  соответственно.

(1) Если существует подпространство  $t$  в  $\bar{G}$  такое, что  $\bar{G} = \bar{H} + t$  (прямая сумма) и  $ad(H)t = t$ , то  $\bar{H}$ -компонента  $\omega$  канонической 1-формы  $\theta$  в  $G$  по отношению к разложению  $\bar{G} = \bar{H} + t$  определяет связность в расслоении  $G$  ( $G/H$ ,  $H$ ), инвариантную под действием левых сдвигов из  $G$ .

(2) Обратное, любая связность в  $G$  ( $G/H$ ,  $H$ ), инвариантная под действием левых сдвигов из  $G$  (если она существует), определяет такое разложение  $\bar{G} = \bar{H} + t$  и может быть получена так, как это описано в (1).

Инвариантная связность в главном расслоении  $P(M, G) = G$  ( $G/H$ ,  $H$ ), заданная теоремой 3, называется канонической связностью.

Согласно теореме Понтрягина, однородное пространство задается как множество точек-образов начальной точки (опорного элемента). В качестве опорного элемента для пространства  $G/G_i$  будем брать образ стационарности подгруппы Ли  $G_i$ .

Имеет место теорема.

**Теорема 4.** [1, с.180]. Пусть  $G/H$  редуцированное однородное пространство и  $t$  – редуцированное дополнение. Для канонической связности этого пространства выполняются следующие условия:

- 1) для каждого  $X \in \mathfrak{m}$  пусть  $f_t = \exp(t) X$  в  $G$  и  $x_t = f_t(o)$ , где  $o$  – начальный элемент однородного пространства  $G/H$ . Тогда параллельный перенос касательных векторов в  $o$  вдоль кривой  $x_t$ ,  $0 \leq t \leq s$ , совпадает с дифференциалом от  $f_s$ , действующим на  $G/H$ ;
- 2) для каждого  $X \in \mathfrak{m}$  кривая  $x_t = f_t(o)$  есть геодезическая. Обратно, каждая геодезическая, исходящая из  $o$ , имеет вид  $f_t(o)$  для некоторого  $X \in \mathfrak{m}$ ;
- 3) каноническая связность полна.

Среди однородных редуктивных пространств с двумерными группами стационарности флаговый образ стационарности имеют группы  $G_{14}$  и  $G_{15}$ :  $(R_2, R_0)$  и  $({}^1R_2, R_0)$  соответственно. Будем задавать  ${}^2R_4$  как  $\phi$ -пространство. Тогда евклидова плоскость, точка  $R_0$  (начало координат) и псевдоевклидова плоскость будут задаваться соответственно матрицами:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим редуктивные однородные пространства  $G/G_{14}$ ,  $G/G_{15}$ . Редуктивные дополнения для них имеют соответственно вид:  $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_6, i_7, i_8, i_9\}$ ;  $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$ .

Однопараметрическая группа Ли, соответствующая оператору  $i_k$  ( $k=1, 2, 3 \dots 10$ ), состоит из элементов вида:

$$e^{ti_k} = E + ti_k + \frac{t^2 i_k^2}{2!} + \frac{t^3 i_k^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

Приведем пример нахождения геодезических линий на примере оператора  $i_5$ .

$$i_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; i_5^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; i_5^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; i_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Исходя из формулы (1) получим:

$$\begin{aligned} e^{ti_5} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots & t - \frac{t^3}{6} + \dots & 0 & 0 \\ -t + \frac{t^3}{6} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ e^{-ti_5} &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ – обратная матрица.} \end{aligned}$$



Начальную точку однородного пространства  $G/G_{15}$  будем задавать с помощью

матрицы вида 
$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$
 где левый верхний блок задает точку  $R_0$ ,

а правый нижний блок при произвольных  $\lambda, \mu$  задает псевдоевклидову плоскость. Элемент группы  $e^{t i_5}$  действует одновременно на точку и плоскость и определяет таким образом траекторию флага (геодезическую линию).

Геодезические линии, соответствующие оператору  $i_5$ , имеют, таким образом, вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \times \\ & \times \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \cos t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \sin t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Аналогично получаем геодезические линии, соответствующие остальным операторам:

$$i_7 = i_7^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i_7^2 = i_7^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad e^{t i_7} = \begin{bmatrix} \operatorname{cht} & 0 & 0 & \operatorname{sht} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sht} & 0 & 0 & \operatorname{cht} \end{bmatrix}; \quad e^{-t i_7} = \begin{bmatrix} \operatorname{cht} & 0 & 0 & -\operatorname{sht} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sht} & 0 & 0 & \operatorname{cht} \end{bmatrix}.$$

Геодезические линии, соответствующие операторам  $i_7, i_8, i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4$ , имеют вид:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \operatorname{cht} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \operatorname{sht} & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \operatorname{sht} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \operatorname{cht} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \sin t & 0 & 0 \end{array} \right]$$



$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{соответственно.}$$

Геодезические линии, соответствующие линейным комбинациям базисных векторов из редуктивного дополнения, получаются в соответствии со свойствами отображения  $\exp$  в результате перемножения матриц, полученных для базисных операторов. Таким образом, получены всевозможные геодезические линии рассматриваемых редуктивных однородных пространств (Теорема 3, усл. 2).

Аналогичные задачи решены для редуктивных однородных пространств с одномерной, трехмерной и четырехмерной группами стационарности О.Н. Курочкой, Н.В. Пугач.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** *Параметр  $t$  на вышеопределенных геодезических линиях является каноническим.*

**Доказательство.**

Параметр  $t$  на геодезической  $x_i = x_i(t)$ , для которого  $\frac{dx_i}{dt}$  есть параллельно переносимый касательный вектор, называется каноническим параметром. Согласно теореме Номидзу и Кобаяси (Теорема 3, усл.1), параллельный перенос касательных векторов вдоль кривой  $x(t)$  совпадает с дифференциалом от  $T_s$ , где  $T_s$  – движение в рассматриваемом однородном пространстве, индуцированное левыми сдвигами фундаментальной группы. Имеет место формула  $\pi^* L_s = T_s \circ \pi$  и, соответственно, для дифференциалов:  $d\pi^* dL_s = dT_s \circ d\pi$ . Для однопараметрической подгруппы  $e^{t i_k}$  вектор  $i_k$  является параллельно переносимым при помощи  $dL_s$  касательным вектором. Касательный вектор геодезической линии  $x_i = x_i(t) = \pi(e^{t i_k})$  также переносится параллельно вдоль геодезической в силу задания движений в однородном пространстве. Теорема 5 доказана.

Имеют место теоремы.

**Теорема 6.** [4, с. 424]. *Линейная связность без кручения полностью определяется заданием геодезических линий и канонических параметров на них.*

Тензоры кручения  $T$  канонической связности в однородных пространствах  $G/G_{14}$ ,  $G/G_{15}$  равны нулю. Учитывая теорему 6, получаем следующую теорему:

**Теорема 7.** *Геодезические линии, полученные выше, полностью характеризуют каноническую связность в редуктивных однородных пространствах  $G/G_{14}$ ,  $G/G_{15}$ .*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Курочка, О. Н. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдо-евклидова пространства  ${}^2R_4$  нулевой сигнатуры, имеющие флаговый образ стационарности / О. Н. Курочка // Вестник БрГУ. – 2002. – № 6. – С. 18–28.

3. Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.

4. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

***A.A. Yudov, H.H. Gurskaya. The Geodetic Lines of Canonical Connectednesses in Reductive Homogeneous Spaces***

In the article the canonical connectednesses in reductive homogeneous spaces  $G/G_i$ ,  $G$ , where Lie group of motions of space  ${}^2R_4$ ,  $G_i$  – subgroup of Lie rotation group of space  ${}^2R_4$  are studied. The models of such spaces are built and the geodetic lines of the canonical connectedness are found. It is proved that these geodetic lines completely characterize the canonical connectedness.

## ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

*Андрусевіч П.П.* – аспірант кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта БДУ  
*Волчак А.А.* – доктар геаграфічных навук, прафесар, дэкан факультэта водазабеспячэння і гідрамеліярацыі БрДТУ

*Грабава У.З.* – аспірант кафедры дыфірынцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Україна)

*Грыцук Д.У.* – студэнт матэматычнага факультэта БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Гурская А.Я.* – асістэнт кафедры інфармацыйных тэхналогій БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Жыгала К.М.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, дактарант кафедры дыфірынцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Україна)

*Жыгала Т.В.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры дыфірынцыяльных ураўненняў і матэматычнай фізікі Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Україна)

*Кальчук І.У.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Україна)

*Камароў І.І.* – аспірант кафедры тэорыі імавернасцей і матэматычнай статыстыкі БДУ

*Карымава Т.І.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі БрДТУ

*Клімашэўская І.М.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу і дыфірынцыяльных ураўненняў БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Косараў В.М.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Львоў А.І.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік Фізічнага Інстытута РАН (Расія)

*Ляўчук М.І.* – доктар фізіка-матэматычных навук, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута фізікі НАНБеларусі

*Макаед І.І.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі, дэкан фізічнага факультэта БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Манахаў В.С.* – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры алгебры і геаметрыі ГДУ імя Ф. Скарыны

*Матысік А.В.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Махніст Л.П.* – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі БрДТУ

*Плецюхоў У.А.* – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Равінскі А.Ф.* – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Радзькоў В.М.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы навуковы супрацоўнік Інстытута фізікі НАНБеларусі

*Рубанаў У.С.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, прарэктар па навуковай працы БрДТУ

*Саўчук В.Ф.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі БрДУ імя А.С. Пушкіна

*Секержыцкі У.С.* – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі БрДУ імя А.С. Пушкіна

**Семянчук У.М.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі ГДУ імя Ф. Скарыны

**Серы А.І.** – асістэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі БрДУ імя А.С. Пушкіна

**Стражсаў В.І.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта БДУ

**Сцепанюк Т.А.** – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (Україна)

**Трафімук А.А.** – аспірант кафедры алгебры і геаметрыі ГДУ імя Ф. Скарыны

**Трыгук В.У.** – аспірант кафедры тэарэтычнай фізікі БДУ

**Феранчук І.Д.** – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі БДУ

**Хайлун Чэнь** – аспірант кафедры тэорыі імавернасцей і матэматычнай статыстыкі БДУ, дацэнт Харбінскага навукова-тэхнічнага ўніверсітэта (Кітай)

**Шаўчук С.М.** – аспірант кафедры алгебры і геаметрыі ГДУ імя Ф. Скарыны

**Юдаў А.А.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі БрДУ імя А.С. Пушкіна

**Яблонскі А.Л.** – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры функцыянальнага аналізу БДУ

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
- бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
- рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падроздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаванне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Карэктары *М.М. Аляшчэня, Л.М. Калілец, Ж.М. Селюжыцкая*  
Камп'ютэрнае макетаванне *А.Я. Кулай, С.М. Мініч*

Подписано в печать 25.06.2010. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Гарнітура Таймс. Ризографія. Усл. печ. л. 16,51. Уч.-изд. л. 10,57.  
Тираж 100 экз. Заказ № 411.

Издатель и полиграфическое исполнение  
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».  
ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.  
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.