МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПРОИЗВОДНАЯ π-ДЛИНА π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ КОТОРОЙ ЛИБО БИЦИКЛИЧЕСКИЕ, ЛИБО ИМЕЮТ ПОРЯДОК p^3

Д.В. Грицук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

DERIVED π-LENGTH OF A π-SOLVABLE GROUP IN WHICH THE SYLOW p-SUBGROUPS ARE EITHER BICYCLIC OR OF ORDER p^3

D.V. Gritsuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Доказывается, что производная π-длина конечной π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$ не превышает 7, а в случае, когда $2 \notin \pi$ не превышает 4.

Ключевые слова: *конечная группа, π-разрешимая группа, бициклическая группа, силовская подгруппа, производная π-длина.*

The group is called a bicyclic group if it is the product of two cyclic subgroups. It is proved that the derived π-length of the π-solvable groups in which the Sylow p-subgroups are either bicyclic or of order p^3 for any $p \in \pi$ is at most 7 and if $2 \notin \pi$ then the derived π-length is at most 4.

Keywords: *finite group, π-solvable group, bicyclic group, Sylow subgroup, derived π-length.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Бициклическая p-группа при нечетном p является метациклической, т.е. содержит нормальную циклическую подгруппу, фактор-группа по которой циклическая. Бициклическая 2-группа может быть не метациклической [2]. Инварианты (производная длина, нильпотентная длина, p-длина, ранг и т.д.) разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [3]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. Разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами в факторах, изучены в [4].

В.С. Монахов предложил новое понятие производной π-длины π-разрешимой группы [5]. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы G_i / G_{i+1} которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$ значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G. Начальные свойства производной π-длины и некоторые результаты, связанные с этим понятием, установлены в работах [5]–[8].

В настоящей заметке исследуется производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3. Доказывается, что в этом случае $l_\pi^a(G) \le 7$, а если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \le 4$.

1 Используемые понятия

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество из $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$.

Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$.

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы G, если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i. Фактор-группы G_i / G_{i+1} называют факторами ряда (0.1).

Группа называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

Поскольку π-факторы субнормального ряда (0.1) π-разрешимой группы G разрешимы, то каждая π-разрешимая группа обладает субнормальным рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если множество $\pi = \{p\}$ состоит из одного простого числа, то, очевидно, $l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_p(G)$ для каждой π-разрешимой группы. Равенство $l_\pi(G) = l_\pi^n(G)$ сохраняется также у π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой.

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G:

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_t \subseteq \ldots,$$

где $F_{i+1} / F_i = F(G / F_i)$. Здесь $F(X)$ подгруппа Фиттинга группы X. Если G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k = G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m, для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

Если G – неединичная p-разрешимая группа и p^n – наибольшая из степеней простого числа p, делящая порядок главных факторов группы G, то число $n = r_p(G)$ называется p-рангом группы G.

2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1 [5]. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:*

1) *если H – подгруппа группы G, то*

$$l_\pi^a(H) \le l_\pi^a(G);$$

2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то*

$$l_\pi^a(G/N) \le l_\pi^a(G), l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N);$$

3) *если N – нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;*

4) *если G и V – π-разрешимые группы, то $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$;*

5) *если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то*

$$l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}.$$

Через G_π обозначается π-холлова подгруппа группы G.

Лемма 2.2 [5]. *Если G – π-разрешимая группа, то $d(G_\pi) \le l_\pi^a(G) \le l_\pi(G) d(G_\pi)$.*

Лемма 2.3 [7]. *Если G – π-разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$,* то

$$l_\pi(G) \le l_{\pi_1}(G) + l_{\pi_2}(G).$$

Лемма 2.4 [9]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$. В частности, если $r_p(G) \ge 3$, то $l_p(G) \le r_p(G) - 1$.*

Лемма 2.5. *Пусть G – p-разрешимая группа, а G_p – ее силовская p-подгруппа. Тогда:*

1) *если G_p имеет порядок p или p^2, то $l_p^a(G) \le 1$;*

2) *если G_p имеет порядок p^3, то $l_p^a(G) \le 2$ для всех p и $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$;*

3) *если G_p имеет порядок p^4, то $l_p^a(G) \le 2$ для $p \ge 5$ и $l_p^a(G) \le 3$ для $p \in \{2,3\}$. Кроме того, $l_p(G) \le 2$ для всех p.*

Доказательство. 1. Так как силовская p-подгруппа G_p имеет порядок p или p^2, то G_p является абелевой. Поэтому по [2, VI.6.6] $l_p(G) \le 1$. Применяя лемму 2.2, получаем $l_p^a(G) \le 1$.

2. Если G_p абелева, то $l_p(G) \le 1$ по [2, III.6.6]. Если G_p неабелева, то она изоморфна по [2, I.14.10] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \left\langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \right\rangle = \left[\langle a \rangle\right]\langle b \rangle,$$

Либо группе экспоненты p. В любом случае

$l_p(G) \le 2$ для любого p по [2, VI.6.6 b)]. Из [3, лемма 2] для метациклической группы имеем, что $l_p(G) \le 1$ при $p > 2$. Пусть G_p является группой экспоненты p и $l_p(G) = 2$. По [2, III.10.2] подгруппа G_p регулярна. Так как G_p неабелева, то $p > 2$ и p – простое число Ферма по [10, IX.4.8. b)]. Теперь из [10, IX.5.5 b)] вытекает, что $p > 3$.

При $l_p(G) = 1$ из леммы 2.2 получаем, что $l_p^a(G) \le 2$. Пусть $l_p(G) = 2$. Тогда существует (p', p)-ряд, в котором точно два *p*-фактора. Так как $|P| = p^3$, то порядки этих *p*-факторов не превышают p^2 и, следовательно, они абелевы. Поэтому $l_p^a(G) \le 2$.

3. Пусть G_p – силовская *p*-подгруппа, $r_p(G)$ – *p*-ранг группы *G*. Если $r_p(G) = 4$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \le 1$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда у главного ряда группы G точно два *p*-фактора: один имеет порядок p^3, другой – p. Так как главные *p*-факторы абелевы, то $l_p^a(G) \le 2$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных *p*-факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^2); (p, p^2, p); (p^2, p, p); (p^2, p^2).$$

Для последовательностей (p, p, p^2), (p^2, p, p) и (p^2, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовские *p*-подгруппы в K и G/K имеют порядки p^2. По первому пункту доказываемой леммы $l_p^a(K) \le 1$ и $l_p^a(G/K) \le 1$, а из леммы 2.1 следует $l_p^a(G) \le 2$. Остается рассмотреть последовательность (p, p^2, p). Если $l_p(G) = 1$, то $l_p^a(G) \le 2$ по лемме 2.2 поскольку $d(G_p) \le 2$ [2, III.7.2.(d)]. Пусть $l_p(G) > 1$. Так как $l_p(G) \le r_p(G) = 2$, то $l_p(G) = r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$ по лемме 2.4. Силовская p-подгруппа в $O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок p^3 и $l_p^a(O_{p',p,p',p}(G)) \le 2$ по второму пункту доказываемой леммы. Силовская *p*-подгруппа в фактор-группе $G/O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок *p*, поэтому $l_p^a(G/O_{p',p,p',p}(G)) \le 1$. Теперь $l_p^a(G) \le 3$ по лемме 2.1(2). Лемма доказана.

***Лемма* 2.6** [5]. *Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – ее π-холлова подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \le 1$;*

2) *если $2 \notin \pi$ и G_π метабелева, то $l_\pi^a(G) \le 3$.*

***Лемма* 2.7** *Пусть G – p-разрешимая группа с бициклической силовской p-подгруппой. Тогда:*

1) *если $p > 2$, то $l_p(G) \le 1$ и $l_p^a(G) \le 2$;*

2) *если $p = 2$, то $l_2^a(G) \le 3$ и $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3; в частности, $l_2(G) \le 2$.*

Доказательство. По условию в группе G силовская *p*-подгруппа G_p бициклическая, поэтому подгруппа $(G_p)'$ абелева [1, 1.9] и $d(G_p) \le 2$. Если $l_p(G) \le 1$, то $l_p^a(G) \le 2$ по лемме 2.6. Пусть $l_p(G) > 1$. Тогда по лемме из работы [3] число $p = 2$ и $G/O_{2',2}(G)$ изоморфна симметрической группе S_3. Из леммы 2.6 следует, что $l_2^a(G/O_{2',2}(G)) \le 1$. Поскольку $l_2(O_{2',2}(G)) \le 1$ и силовская 2-подгруппа из $O_{2',2}(G)$ имеет абелевый коммутант, то $l_2^a(O_{2',2}(G)) \le 2$ по лемме 2.2. Теперь из леммы 2.1 (2) получаем, что $l_2^a(G) \le 3$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.8** *Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(n, p)$. Тогда:*

1) *если $n = 2$, то подгруппа H циклическая и $|H|$ делит $p^2 - 1$;*

2) *если $n = 3$, то подгруппа H метабелева.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из [2, лемма VI.8.1], второе – из [11, теорема 4B].

***Лемма* 2.9** *Если G – неединичная π-разрешимая группа и $O_{\pi'}(G) = 1$, то $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$.*

Доказательство. Пусть G – неединичная π-разрешимая группа, $O_{\pi'}(G) = 1$ и $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа $G/\Phi(G)$ – неединичная π-разрешимая группа. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе $G/\Phi(G)$. Известно, что в этом случае $N/\Phi(G)$ либо элементарная абелевая *p*-группа, либо π'-группа.

Если $N/\Phi(G)$ – элементарная абелевая *p*-группа, то $N/\Phi(G)$ нильпотентна и, следовательно, N – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда, $N \le F(G)$ и лемма доказана. Если $N/\Phi(G)$ – π'-группа, то $N = [\Phi(G)]K$ по [2, 1.18.1]. Теперь по лемме Фраттини [1, лемма 1.66]

$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$

следовательно, K нормальна в G и $K \le O_{\pi'}(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

***Лемма* 2.10** *Пусть G – p-замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p-подгруппа G_p является группой порядка p^3 или бициклической. Если $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p)\subseteq G_p$, то $G_{p'}$ – метабелева группа.*

Доказательство. Поскольку G – разрешимая p-замкнутая группа, $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p)\subseteq G_p$, то $F(G)=G_p$ и $G=[G_p]G_{p'}$. Так как G_p нормальна в G, то $\Phi(G_p)\subseteq\Phi(G)=1$ и G_p элементарная абелева порядка не выше p^3.

Если $F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G, то подгруппа $G_{p'}$ действует неприводимо на $F(G)$ и $G_{p'}$ метабелева по лемме 2.8.

Пусть теперь $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой группы G. Тогда по [1, теорема 4.24] $F(G)$ будет прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G. Прямые сомножители будут элементарными абелевыми подгруппами порядка p или p^2 и их не более трех. Пусть F_i – прямой сомножитель подгруппы $F(G)$, $i\le 3$. Если $|F_i|=p$, то фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Если $|F_i|=p^2$, то по лемме 2.8 фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. По [1, лемма 2.33] фактор-группа

$$G/\cap_{i\le 3}C_G(F_i)$$

абелева. Так как

$$\cap_{i\le 3}C_G(F_i)\subseteq C_G(F(G))=F(G),$$

то $G_{p'}$ абелева. Лемма доказана.

***Лемма* 2.11** *Пусть G – p-замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p-подгруппа G_p является группой порядка p^2 или циклической группой. Если $C_G(G_p)\subseteq G_p$, то $G_{p'}$ – абелева группа.*

Доказательство. Если G_p – циклическая группа, то $G_{p'}$ – абелева, как ее группа автоморфизмов [1, теорема 2.16]. Если G_p нециклическая, то она элементарная абелева группа порядка p^2 и повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.10 получаем, что $G_{p'}$ абелева. Лемма доказана.

3 Оценка производной π -длины

***Теорема* 3.1** *Пусть G – π -разрешимая группа, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p\in\pi$. Тогда:*

1) *если* $2\notin\pi$, *то* $l_\pi^a(G)\le 4$;

2) *если* $2\in\pi$, *то* $l_\pi^a(G)\le 7$.

Доказательство. 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме 2.1 (3) можно считать, что $O_{\pi'}(G)=1$. Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные подгруппы группы G. Так как $|G/N_i|<|G|$, $i=1,2$, то по предположению индукции $l_\pi^a(G/N_i)\le 4$. По лемме 2.1(5) $l_\pi^a(G)\le 4$. Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N.

Так как группа G π-разрешима и $O_{\pi'}(G)=1$, то $O_\pi(G)\ne 1$. Подгруппа $O_\pi(G)$ разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга $F(O_\pi(G))$ отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G))\subseteq F(G).$$

Из того, что $O_{\pi'}(G)=1$ следует, что $F(G)$ является π -подгруппой, поэтому

$$F(G)\subseteq F(O_\pi(G)), F(G)=F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна и в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G)=F(O_\pi(G))=O_p(G)$$

для некоторого простого $p\in\pi$.

Если $O_{p'}(G)\ne 1$, то в группе G будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы: p-подгруппа из $O_p(G)$ и p' -подгруппа из $O_{p'}(G)$. Имеем противоречие. Поэтому $O_{p'}(G)=1$ и

$$C_G(O_p(G))\le O_p(G), C_G(F(G))\le F(G).$$

Возможны два случая.

Случай 1: $F(G)=G_p$. По лемме 2.9 $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в G_p, а по [1, лемма 4.2] $F(G/\Phi(G))=G_p/\Phi(G)$. Из [12] следует, что

$$G_p\cap\Phi(G)=\Phi(G_p)=G_p\cap\Phi(G_\pi).$$

Так как $C_G(F(G))\le F(G)$, то $\Phi(G_\pi)$ – p-группа и $\Phi(G)=\Phi(G_p)=\Phi(G_\pi)$.

Если G_p бициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p или p^2. Если G_p небициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p^2 или p^3. Таким образом подгруппа $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка не выше p^3. В любом случае $d(G_p)\le 2$.

Если $|G_p/\Phi(G)|=p^3$, то $\Phi(G)=1$ и подгруппа G_p – абелева. Из леммы 2.10 следует, что группа G_π/G_p является метабелевой. Тогда по лемме 2.6 $l_\pi^a(G/G_p)\le 3$. Так как G_p абелева, то $l_\pi^a(G)\le 4$ по лемме 2.1 (2). Если $G_p/\Phi(G)$ имеет порядок p или p^2, то по лемме 2.11 группа G_π/G_p является абелевой группой. По лемме 2.6 $l_\pi^a(G/G_p)\le 1$. Так как $d(G_p)\le 2$, то по лемме 2.1 (2) получаем $l_\pi^a(G)\le 3$.

Случай 2: $F(G)\subset G_p$. Если G_p – бициклическая группа, то по лемме 2.7 $l_p(G)\le 1$. Так как $O_{p'}(G)=1$, то $F(G)=G_p$, противоречие. Пусть $|G_p|=p^3$. Тогда порядок $F(G)$ равен либо p либо p^2. Если $|F(G)|=p$, то $G/F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому по лемме 2.6 (1) $l_\pi^a(G/F(G))\le 1$ и по лемме 2.1(2) получаем $l_\pi^a(G))\le 2$. Если $|F(G)|=p^2$, то либо $F(G)$ – циклическая группа порядка p^2, либо $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p. Если $F(G)$ – циклическая группа, то $G/F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому $l_\pi^a(G/F(G))\le 1$ и $l_\pi^a(G)\le 2$ по лемме 2.1 (2). Пусть $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p. Так как $|F(G)|=p^2$ и $|G_p|=p^3$, то $l_p(G)>1$. Поэтому из леммы 2.5 следует, что $p=3$. Тогда фактор-группа $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$ порядка $2^4\cdot 3$. Так как $2\notin\pi$, то $\pi=\{3\}$ и $|G_\pi|=3^3$. Тогда по лемме 2.5 $l_\pi^a(G)=l_p^a(G)\le 2$.

2. Пусть $\pi_1=\pi/\{2\}$. Тогда по лемме 2.3 $l_\pi^a(G)\le l_{\pi_1}^a(G)+l_2^a(G)$. По первому пункту доказываемой теоремы $l_{\pi_1}^a(G)\le 4$, а $l_2^a(G)\le 3$ либо по лемме 2.5 (2), либо по лемме 2.7. Поэтому $l_\pi^a(G)\le 7$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

3. *Монахов*, *В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки – 2001. – Том 70, № 4. – С. 603–612.

4. *Monakhov*, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.

5. *Грицук*, *Д.В.* О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

6. *Грицук*, *Д.В.* О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы математики, физики и техники. – 2013. – №1 (14). – С. 61–66.

7. *Грицук*, *Д.В.* О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальные / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Труды института математики НАН Беларуси. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.

8. *Монахов*, *В.С.* О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.

9. *Монахов*, *В.С.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

10. *Huppert*, *B.* Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1982.

11. *Palfy*, *P.P.* Bounds for liner groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, Suppl. 23. – P. 253–263.

12. *Baer*, *R.* Supersoluble immersion / R. Baer // Canad. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

Поступила в редакцию 11.02.14.