Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»

Кафедра общей и теоретической физики

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФИЗИКА

**Электронный учебно-методический комплекс
для специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика»**

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2020

Автор-составитель:

Владимир Станиславович Секержицкий, доцент кафедры общей и теоретической физики Учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

Кафедра физики Учреждения образования «Брестский государственный технический университет»;
Олег Адольфович Котловский, доцент кафедры методики преподавания физико-математических дисциплин Учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», кандидат педагогических наук, доцент

Секержицкий, В. С.
Элементарная физика : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; автор-сост. В. С. Секержицкий. – Брест:БрГУ, 2020.

Электронный учебно-методический комплекс составлен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Элементарная физика (корректирующий курс)» и предназначен для студентов специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика». Комплекс содержит тематический план, лекционный материал, вопросы и задачи (с указаниями к решению) для практических занятий, задачи для самостоятельного решения и самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Начало
Содержание
Страница 2 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Факультативная учебная дисциплина «Элементарная физика (корректирующий курс)» предназначена для подготовки студентов университета по специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика», изучается в первом семестре первого курса и направлена повышение до необходимого уровня базовых знаний, умений и навыков по школьной физике, а также на ускорение адаптации студентов первого курса к условиям вузовской системы обучения.

Цель и задачи курса «Элементарная физика (корректирующий курс)»

Основная ***цель*** дисциплины – ликвидация пробелов в знаниях по основным разделам школьного курса физики, усвоение студентами общих методов анализа и решения задач курса физики средней школы базового и профильного уровней.

Для достижения поставленной цели решаются основные ***задачи***:

– углубление и систематизация знаний теоретического материала школьной программы по физике;

– углубление и систематизация знаний о методах и способах решения элементарных физических задач;

– развитие умений и навыков использования математического аппарата при изучении теоретического материала и решении физических задач;

– овладение навыками, необходимыми для адаптации студентов к условиям вузовской системы обучения.

В результате изучения дисциплины студенты должны ***знать***:

– основной теоретический материал школьного курса физики в объеме, необходимом для успешного усвоения таких вузовских разделов общей физики как «Механика» и «Молекулярная физика»;

– методы и способы решения элементарных физических задач;

должны ***уметь*** самостоятельно решать элементарные задачи по соответствующим темам школьного курса физики;

должны выработать ***навыки*** осмысленного восприятия рассматриваемого на занятиях учебного материала и самостоятельной работы с учебной литературой.

В соответствии с целями и задачами дисциплины основными методами (технологиями) обучения являются: иллюстративный, частично-поисковый и исследовательский методы; коммуникативные технологии, основанные на активных формах и методах обучения (дискуссия, учебные дебаты); мультимедийное сопровождение занятий. Для самостоятельной работы студентов предлагается система домашних заданий по изучаемым темам. На лекционных занятиях рассматриваются основные теоретические вопросы курса элементарной физики и теоретические аспекты решения физических задач. На практических занятиях отрабатываются навыки решения задач повышенной трудности.

Текущий контроль знаний и навыков студентов рекомендуется осуществлять с использованием задач для самостоятельного решения, а также непосредственно устным опросом во время практических занятий.

Структура ЭУМК «Элементарная физика»

Дисциплина «Элементарная физика (корректирующий курс)» изучается, как было сказано выше, студентами на первом курсе в первом семестре. Общее количество часов по дисциплине – 64, из них аудиторных часов – 32, в том числе 24 часа лекций и 8 часов практических занятий.

Предлагаемый электронный учебно-методический комплекс предназначен как для систематизации материала, изучаемого на лекциях и практических занятиях, так и для самоподготовки. При этом основное внимание уделяется первому разделу элементарной физики, который соответствует учебной дисциплине «Механика», изучаемой студентами-первокурсниками в первом семестре параллельно с элементарной физикой. Менее подробно рассматривается раздел элементарной физики, соответствующий учебной дисциплины второго семестра «Молекулярная физика». Другие разделы элементарной физики, соответствующие учебным дисциплинам, изучаемым студентами второго («Электричество и магнетизм» и «Оптика») и третьего («Физика атома и атомных явлений» и

«Физика ядра») курсов, не предусмотрены учебной программой дисциплины «Элементарная физика (корректирующий курс)» и в данном ЭУМК не рассматриваются. Последнее обусловлено как весьма ограниченным числом плановых учебных занятий, так и тем, что студенты второго и третьего курсов вполне адаптированы к условиям вузовской системы обучения. При этом теоретический материал по элементарной физике дается в данном ЭУМК (как и в процессе учебных занятий на первом курсе) лишь на уровне основных физических понятий, определений, законов и формул без математических выводов (отведенное учебным планом на изучение дисциплины сравнительно небольшое число часов не позволяет подробно повторять изученный в средних учебных заведениях материал).

Предусмотрено изучение двенадцати тем элементарной физики (в процессе учебных занятий это темы отдельных лекций): «Физика и физические задачи», «Основные понятия кинематики. Прямолинейное движение», «Сложение и относительность движений. Криволинейное движение», «Основные понятия и законы динамики», «Движение тел при наличии трения», «Силы в природе», «Законы сохранения в механике», «Векторные многоугольники в задачах», «Механические колебания», «Основные понятия и законы молекулярной физики», «Основные понятия и законы термодинамики», «Агрегатные состояния и тепловой баланс».

Значительная часть ЭУМК уделяется физическим задачам и способам их решения. Примеры решения задач являются составной частью теоретического материала. Кроме того, предусмотрены практические занятия (четыре), содержащие перечень теоретических вопросов и задач повышенной (с точки зрения школьного уровня) трудности; даны указания к решению этих задач. Приведены также условия и ответы 110 стандартных задач школьного уровня для самостоятельного решения и самопроверки.

Рекомендуемая литература включает пособия, методические указания и научно-методические статьи (в т. ч. автора-составителя).

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	Лк	Пр
	Элементарная физика (32 ч.)	24	8
	Лекционные занятия (24 ч.)	24	
1	Тема 1. Физика и физические задачи. Исходные физические понятия. Задачи по физике, их классификация, методы и способы решения.	2	
2	Тема 2. Основные понятия кинематики. Прямолинейное движение. Механическое движение, материальная точка, система отсчета, путь и перемещение, средняя и мгновенная скорости, ускорение. Описание прямолинейных равномерного и равноускоренного движений. Свободное падение и движение тела, брошенного вертикально вверх. Примеры решения задач по теме 2.	2	
3	Тема 3. Сложение и относительность движений. Криволинейное движение. Классический закон сложения скоростей. Относительность движения. Равномерное движения по окружности. Примеры решения задач по теме 3	2	
4	Тема 4. Основные понятия и законы динамики. Динамические характеристики частицы. Законы	2	

	Ньютона. Принцип относительности Галилея. Механическая концепция взаимодействий. Сила тяжести и вес тела. Примеры решения задач по теме 4.		
5	Тема 5. Движение тел при наличии трения. Законы сухого трения. Сила трения покоя в задачах. Сила трения скольжения в задачах.	2	
6	Тема 6. Силы в природе. Сила тяготения, закон тяготения Ньютона. Силы упругости, закон Гука. Законы гидростатики. Примеры решения задач по теме 6.	2	
7	Тема 7. Законы сохранения в механике. Теорема об изменении импульса и закон сохранения импульса. Механическая работа, мощность. Кинетическая и потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии. Условия равновесия тел. Примеры решения задач по теме 7.	2	
8	Тема 8. Векторные многоугольники в задачах. Векторные треугольники скоростей и перемещений в задачах. Векторные многоугольники сил в задачах. Векторные многоугольники импульсов в задачах.	2	
9	Тема 9. Механические колебания. Гармонические колебания. Маятники. Волны и их характеристики. Звук. Примеры решения задач по теме 9	2	
10	Тема 10. Основные понятия и законы молекулярной	2	

	физики. Основные положения и понятия молекулярно-кинетической теории. Основное уравнение МКТ для идеального газа. Температура. Уравнение состояния идеального газа и изопроцессы в идеальном газе. Примеры решения задач по теме 10.		
11	Тема 11. Основные понятия и законы термодинамики. Внутренняя энергия термодинамической системы. Работа и количество теплоты. Первый закон термодинамики и его применение к изопроцессам. Второй закон термодинамики. Тепловые двигатели и их коэффициенты полезного действия. Примеры решения задач по теме 11.	2	
12	Тема 12. Агрегатные состояния и тепловой баланс. Парообразование, кипение, влажность. Плавление и кристаллизация. Теплообмен и уравнение теплового баланса. Примеры решения задач по теме 12.	2	
	Практические занятия (8 ч.)		8
13	Занятие 1. Задачи кинематики		2
14	Занятие 2. Задачи динамики		2
15	Занятие 3. Задачи с использованием законов сохранения и условий равновесия тел		2
16	Занятие 4. Задачи молекулярной физики и термодинамики.		2

Тема 1.
Физика и физические задачи

1.1. Исходные физические понятия

Физика – экспериментальная наука: в ней для исследования объектов и явлений материального мира ставятся специальные научные опыты – *эксперименты*, в которых целенаправленно изучаются явления природы и материальные объекты в строго учитываемых условиях. При проведении эксперимента можно следить за изучаемым объектом, воздействовать на него другими объектами, воссоздать или вызвать явление или процесс, изменить условия протекания последнего. Добытые с помощью эксперимента сведения – это отдельные факты физической науки, т. е. эксперимент позволяет установить *частные законы*. По мере накопления экспериментальных фактов и частных законов возникает потребность теоретического обобщения с помощью некоторых новых положений – *исходных принципов* или *общих законов*, составляющих основу большой группы уже открытых частных законов, физических явлений, свойств, фактов и т. д.

Наиболее полно и последовательно теоретические обобщения физических знаний достигаются в физических теориях. Теоретическое

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 16 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

обобщение осуществляется путем выявления общности природы физических явлений и объектов, их сущности и исходного принципа; оно вообще возможно благодаря материальному единству мира. Теория – основная и ведущая форма знания для всех наук.

Объект всей физической науки – простейшие материальные структуры (элементарные частицы, атомы, молекулы, тела, поля, системы тел и полей), их строение, взаимодействие и движение.

Физика широко использует *абстракции* и *модели* – мысленно представляемые или материально реализуемые системы, способные заменить объекты исследования так, что их изучение дает новую информацию об этих объектах. Особенно важны так называемые *знаковые модели*, в которых объекты заменяются символами (знаками), например, математические модели, заменяющие реальные физические объекты.

Заметим, что математический объект (число, вектор, функция, уравнение и т. д.) не полностью адекватен заменяемому им физическому объекту, а отражает лишь его некоторые черты, связи, не охватывая всего многообразия свойств. Например, понятие материальной точки в механике как объекта бесконечно малых размеров применимо лишь до 10^{-8} м; для объектов меньших размеров понятие микрочастицы имеет другое содержание. Понятие непрерывности в механике и электродинамике (макроскопической) применимо лишь до тех пор, пока рассматриваются малые объекты с очень большим количеством дискретных микрочастиц, т. е. элемент объема dV в физике – это не математическая бесконечно малая величина, он может уменьшаться лишь до тех пор, пока не скажется дискретность вещества.

Математическое исследование модели имеет смысл при условии, что его выводы реализуются в материальных объектах, заменявшихся моделью. Конечным критерием истинности математического результата служит соответствие его данным опытов и наблюдений. Следует заметить, что точное решение математических задач, возникающих в физике, не всегда достижимо (а в ряде случаев не имеет большого практического значения). В то же время во многих задачах достигается высокая степень точности, недоступная эксперименту.

Итак, физика в отличие от математики имеет дело с материальными структурами, лишь на определенном этапе изучения заменяемыми математическими моделями. Потребности физики вызывают развитие целых математических отраслей. В свою очередь физика находит в математике готовый математический аппарат.

Пространство и время как формы существования материи являются исходными понятиями для физики. Основные свойства физического пространства отражает его геометрическая модель.

Остановимся на моделях материальных объектов и взаимодействий.

Классическая (механическая) модель материальных объектов применяется для изучения материи в макромире в виде вещества, т. е. тел. Классическая модель тела – *материальная точка* – тело, размеры которого пренебрежимо малы в условиях данной задачи. В классической модели вещества допускается его непрерывное распределение в пространстве, поэтому материальная точка может выступать как элемент объема тела. Положение материальной точки, как и скорость ее движения, можно определить (задать) в пространстве в любой момент времени. *Система материальных точек* (их совокупность, выделенная по какому-либо признаку) моделирует систему тел или одно протяженное тело. Для тела в классической модели имеет место *свойство непроницаемости* (в одном и том же месте пространства не могут одновременно находиться два тела конечных размеров). Взаимодействие между телами в механической модели передается на расстоянии мгновенно (*дальнодействие*). Результат взаимодействия состоит в непрерывном изменении импульса и кинетической энергии материальных точек при их движении, т. е. в сообщении материальным точкам ускорений. Механическая модель относится к макромиру и к нерелятивистской области скоростей ($v << c$, где c – скорость света в вакууме); применима только к гравитационному и, отчасти, к электромагнитному взаимодействиям.

Полевая модель_материальных объектов применяется для изучения материи в виде *макроскопического физического поля*. Массой поле не обладает, т. е. не сводится к системе материальных точек. Поле в пустом пространстве занимает большие области без четких границ, а энергия распределена в поле непрерывно. Существует два макроскопических поля – *гравитационное и электромагнитное*. Они свойством непроницаемости не обладают, т. е. могут одновременно находиться в одном и том же месте пространства. Моделируется физическое поле с помощью *математического поля физической величины*, принимающей в каждой точке пространства определенное значение. Полевая модель применяется к системе электрически заряженных тел и электромагнитного поля. Взаимодействие осуществляется посредством поля, т. е. на заряженные тела действует поле, создаваемое другими телами (а не сами тела), причем взаимодействие передается с конечной скоростью (*близкодействие*). В результате взаимодействия непрерывно изменяются как характеристики тел, так и характеристики поля. При этом движение тел может быть как нерелятивистским, так и релятивистским, а поле – предельно релятивистский объект (распространяется в пространстве со скоростью c).

Квантово-релятивистская модель применяется для изучения материи в микромире.

Первой и наиболее детально разработанной из фундаментальных физических теорий является *классическая механика* – наука о законах движения и равновесия макроскопических материальных тел. В классической механике используется механическая модель материальных объектов и взаимодействий. Рассматриваются области пространства с характерными размерами от $\sim 10^{-8}$ м до $\sim 10^{13}$ м. Решающее значение в макромире имеет гравитационное взаимодействие, определяющее движение небесных тел (а также их форму и макроскопическое строение) и движение тел на Земле (под действием силы тяжести). Все эти случаи движения изучаются в классической механике. В космическом пространстве и в земных условиях существуют макроскопические электромагнитные поля. В механике рассматривается движение под действием статических гравитационных и электромагнитных сил (например, определяемых законами всемирного тяготения, Кулона, Ампера). В механическую модель укладываются проявления типичных для механики сил упругости и трения, имеющих электромагнитное происхождение.

Итак, всю огромную совокупность механических движений определяют гравитационные и электромагнитные силы, вызывающие непрерывные изменения импульсов тел (т. е. их ускоренное движение). Основная *исходная модель всех объектов в механике – материальная точка* (понятие материальной точки и частицы здесь можно считать тождественными).

1.2. Задачи по физике, их классификация и способы решения

Физические задачи бывают экспериментальные и теоретические. Далее рассматриваются теоретические задачи. *Теоретическая задача* – это словесная модель физического явления с некоторыми известными и неизвестными физическими величинами, характеризующими это явление. Решить физическую задачу – значит найти (восстановить) неизвестные связи, физические величины и т. д.

Реальные объекты и явления зачастую очень сложны, и их количественное изучение с учетом всех сторон, взаимосвязей и взаимодействий представляет непреодолимые математические трудности. Важнейшим необходимым условием успешного решения физической задачи является ее разумная идеализация. *Поставленная физическая задача* – это задача об «идеализированном» явлении. Очень часто упрощающие условия и ограничения формулируются в условии задачи, но иногда они присутствуют в скрытом или неявном виде.

<u>Пример.</u> Мяч брошен со скоростью 20 м/с под углом $45°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти дальность полета мяча.

Задача поставлена и частично идеализирована (пренебрежение сопротивлением воздуха указано в условии явно). Но другие упрощения только подразумеваются:

а) мяч брошен с земной поверхности, кривизна которой не учитывается;

б) вращение Земли и движение ее вокруг Солнца не учитывается;

в) ускорение свободного падения в любой точке траектории мяча направлено вертикально вниз и равно по модулю 9,8 м/с^2;

г) мяч принимается за материальную точку.

Теперь задача полностью идеализирована. Учет всех перечисленных ограничений существенно упрощает решение, без учета же этих ограничений решение усложняется и выходит за рамки элементарной физики.

В разных задачах упрощающие условия разнообразны, но общее для всех способов идеализации задачи – пренебрежение второстепенными связями и взаимодействиями. При идеализации рассматриваются либо идеальные физические объекты (материальная точка, абсолютно упругое тело, идеальный газ и т. п.), либо идеальные физические процессы (движение без трения, равновесные термодинамические процессы и т. п.). Часто, решая конкретную задачу, пренебрегают возможным изменением какой-либо физической величины (в приведенном выше примере ускорение свободного падения постоянно).

Итак, все теоретические *физические задачи можно разделить на поставленные и непоставленные*. В поставленной задаче обеспечена полнота величин и их значений, необходимых для решения, и проведена идеализация. В непоставленной задаче не обеспечена совокупность необходимых данных и/или не проведена ее идеализация.

В процессе решения поставленной задачи можно выделить *три этапа: физический, математический и анализ решения.*

Физический этап начинается с ознакомления с условием задачи и заканчивается составлением замкнутой системы уравнений, в число неизвестных которых входят и искомые величины. После составления замкнутой системы уравнений задача считается физически решенной.

Математический этап начинается решением замкнутой системы уравнений и заканчивается получением числового ответа. Этот этап можно разделить на получение решения задачи в общем виде и на получение числового ответа задачи. В этом этапе почти отсутствует физический компонент, но этап нельзя считать второстепенным. С точки зрения практики задача решена правильно, если получен ее верный общий и числовой ответ. Без этого нельзя провести третий этап решения задачи – анализ решения.

На этапе анализа решения выясняют, как и от каких физических величин зависит найденная величина, при каких условиях осуществляется эта зависимость и т. д. При анализе числового ответа часто исследуют:

а) размерность полученной величины;

б) соответствие полученного числового ответа физически возможным значениям искомой величины;

в) соответствие полученных многозначных ответов условиям задачи.

Анализ решения задачи в какой-то степени является творческим процессом и может включать в себя не только перечисленные выше элементы.

Система этапов решения задачи непосредственно связана с системой методов решения. На каждом этапе решающий задачу должен осуществлять соответствующую этому этапу самостоятельную деятельность., и если не указать решающему общие способы (методы) его деятельности, то он будет действовать на основе метода проб и ошибок (по крайней мере, на первых порах, пока не приобретет достаточный опыт). Отсюда следует необходимость в системе общих методов для проведения всех этапов решения произвольной задачи по физике как способов самостоятельной деятельности того, кто эту задачу решает. Такая система общих методов должна обладать универсальностью (т. е. быть применимой к решению любой задачи по элементарной физике) и охватывать все этапы решения произвольной задачи. *К общим методам решения задачи* можно отнести*: метод постановки задачи, метод анализа физической ситуации задачи, метод применения физического закона, метод упрощения и усложнения, метод оценки, метод анализа решения и др*. Вполне понятно, что система общих методов не всегда гарантирует решение задачи (иногда задачу можно решить и без методов, так сказать интуитивно). Система общих методов не догма, не инструкция, а лишь система разумных советов, помогающая решать задачи.

В принципе большинство задач можно решать *аналитическим или синтетическим способами*. Первый основан на анализе физической ситуации задачи и последовательном движении от искомых величин к условию («чтобы ответить на главный вопрос задачи, надо знать…» и т. д.). При втором способе рассматриваются различные физические законы и формулы, которые могут иметь отношение к решению задачи, но выбираются и применяются лишь те, которые необходимы для рационального решения. Первый способ плохо алгоритмизируется и требует от решающего зачастую творческого подхода. Второй способ вполне алгоритмизируется и применяется для решения большинства задач школьного курса физики.

Все поставленные задачи можно условно разделить:

а) на *элементарные* (для решения необходимо и достаточно воспроизвести и применить лишь один физический закон);

б) на *стандартные* (для решения необходимо и достаточно привлечь лишь систему «обычных» знаний и «стандартных» методов и приемов);

в) на *нестандартные* (для решения «обычных» законов и методов недостаточно, остается неучтенным нечто, о чем нужно догадаться);

г) на *оригинальные* (для решения роль догадки является определяющей по сравнению с обычными знаниями и методами).

Последняя разновидность задач зачастую используется при проведении физических олимпиад и конкурсов.

Особый интерес представляют так называемые *оценочные задачи*. Зачастую результатов наблюдений недостаточно, а физика явления не вполне ясна. В этом случае можно говорить лишь об оценочных данных и зависимостях, для получения которых могут использоваться методы теории размерности и подобия физических величин, в частности, известная *П-теорема* (*теорема Бэкингема*).

Суть П-теоремы вкратце можно сформулировать следующим образом: если N физическим величинам соответствуют $N - 1$ независимых размерностей, то из этих величин можно единственным образом построить безразмерное произведение. Покажем это на простом примере (используя физические понятия, которые будут рассмотрены в следующих темах данной учебной дисциплины).

Допустим, необходимо оценить давление p в центре какой-либо звезды или планеты, если известны масса M и радиус R этого объекта. Поскольку давление определяется, в основном, гравитационным сжатием, то добавим еще постоянную тяготения G. Имеем четыре величины, предположительно связанные одной формулой. Выпишем единицы измерения этих величин: Н/м^2, кг, м, $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$. Единицы Н, кг, м независимы, независимы и соответствующие им размерности силы F, длины L и массы M. Четырем величинам $(N = 4)$ соответствуют три независимые размерности $(N - 1 = 3)$; основное условие П-теоремы выполняется. При этом каждая из независимых размерностей встречается не менее двух раз. Это также обязательное условие для решения задачи;

если оно не выполняется, то надо искать другие физические величины. Итак, в соответствии с П-теоремой,

$$p \cdot M^a \cdot R^b \cdot G^c = A, \tag{1.1}$$

где a, b, c – некоторые числа, A – безразмерная постоянная. Соответствующее (1.1) соотношение между размерностями имеет вид:

$$\frac{F}{L^2} \cdot M^a \cdot L^b \cdot \left(\frac{F \cdot L^2}{M^2}\right)^c = F^0 \cdot M^0 \cdot L^0 = 1. \tag{1.2}$$

Приравнивая показатели степеней у одинаковых размерностей из обеих частей выражения (1.2), получаем:

$$\begin{cases} 1 + c = 0, \\ a - 2c = 0, \\ -2 + b + 2c = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Решая систему (1.3) находим: $a = -2$, $b = 4$, $c = -1$. Тогда

$$p \cdot M^{-2} \cdot R^4 \cdot G^{-1} = A, \quad p = A \cdot G \cdot \frac{M^2}{R^4}. \qquad (1.4)$$

Расчетная формула для давления получена, A – безразмерный коэффициент. Анализ законов и формул физики показывает, что в большинстве случаев безразмерный коэффициент порядка единицы. Считая и здесь $A \sim 1$, получим формулу для оценки давления в центре звезды или планеты массой M и радиусом R:

$$p \sim G \cdot \frac{M^2}{R^4}. \qquad (1.5)$$

Для Земли $M \approx 6 \cdot 10^{24}$кг, $R \approx 6.4 \cdot 10^{6}$м. Учитывая, что постоянная тяготения $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$, находим $G \cdot \frac{M^2}{R^4} \approx 1{,}4 \cdot 10^{12}\ \text{Н}/\text{м}^2$, т. е. $p \sim 10^{12}\ \text{Н}/\text{м}^2$. Заметим, что оценка по этой формуле давления в центре Земли дает тот же порядок результата, что и самые современные геологические методы.

Изучение основ теории размерности и подобия физических величин в средней школе и в вузе вполне целесообразно. Умение школьников и студентов делать физические оценки, предваряющие сложные математические расчеты, способствует развитию их творческой активности и интереса к изучению физических явлений и процессов, и, несомненно, полезно участникам физических олимпиад. При этом желательно, чтобы содержание и решение оценочных задач были интересными для школьников и студентов, стимулировали бы их познавательную деятельность. В частности в этом плане могут быть использованы оценочные задачи по астрофизической тематике.

Основные понятия кинематики. Прямолинейное движение

2.1. Механическое движение, материальная точка, система отсчета, путь и перемещение, средняя и мгновенная скорости, ускорение

Механическое движение – перемещение физических тел (или их частей) друг относительно друга. Нет механического движения безотносительно к чему-либо: всегда должно быть тело, относительно которого в условиях данной задачи рассматривается движение других тел. Такое тело называют телом отсчета, выбор его произволен (зависит от условий конкретной физической задачи).

Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Одно и то же тело в одних задачах можно считать материальной точкой, в других – нет. Движение материальной точки (частицы) – изменение ее положения в пространстве относительно других тел с течением времени (перемещение в некоторой системе отсчета).

Система отсчета – совокупность тела (тел) отсчета, системы координат и инструментов для определения расстояний, углов, моментов и промежутков времени. Основные единицы измерения: времени – секунда [с], расстояния (длины) – метр [м], угла – радиан [рад].

Все системы координат (СК), связанные с одним и тем же телом отсчета, физически равноправны.

В теоретических рассуждениях часто используют не реальную систему отсчета, а лишь систему координат, которая в этом случае служит математической моделью системы отсчета.

В любой ортогональной системе координат (декартовой, сферической, цилиндрической и т. п.) определение всех возможных положений точек в пространстве приводит к множеству троек вещественных чисел, обозначающих множество геометрических точек. Это множество составляет *геометрическое пространство,* которое *трехмерно, непрерывно и односвязно*. В так называемых инерциальных системах отсчета пространство *однородно, изотропно и евклидово*. Перечисленные свойства геометрического пространства в классической механике постулируются.

Элементарное механическое событие – попадание частицы в точку с данными координатами в данный момент времени. Оно наблюдается во всех системах отсчета (в этом смысле инвариантно по отношению к системам отсчета), но его координаты в разных системах отсчета могут быть различными.

Механическое движение – непрерывная совокупность последовательных механических событий. Эта совокупность имеет смысл при *синхронизации часов* в данной системе отсчета. Синхронизация сводится к установке всех часов системы на нуль по сигналу, испускаемому из начала отсчета в нулевой момент времени (по часам, находящимся в начале отсчета). В классической механике полагается, что скорость распространения синхронизирующего сигнала бесконечно велика (много больше скорости движения любых тел).

С помощью синхронизации устанавливается единое время в системе отсчета. *Множество моментов времени* считается *одномерным, непрерывным и однородным.* Опыт показывает, что *время однонаправлено*, т. е. при любом выборе начала отсчета часы дают монотонно увеличивающиеся показания. Перечисленные свойство времени и возможность синхронизации часов мгновенно распространяющимися сигналами в классической механике постулируются.

Положение материальной точки в пространстве относительно известной системы отсчета можно задать (определить) *векторным и координатным способами*. Радиус-вектор – направленный отрезок, соединяющий начало координат с рассматриваемой точкой (рисунок 2.1).

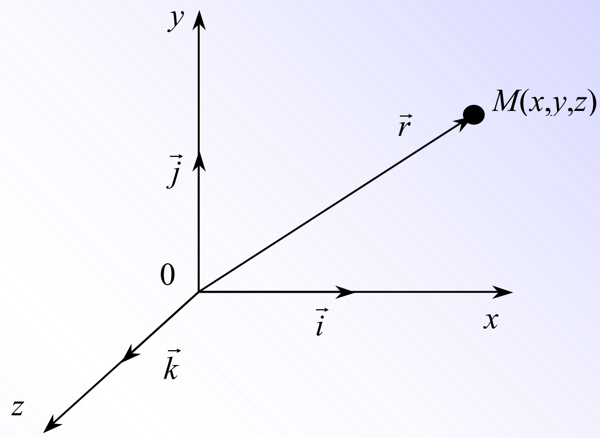


Рисунок 2.1

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты декартовой СК), то радиус-вектор $\vec{r}$ связан с координатами x, y, z точки M соотношениями:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z; \;\; r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.1}$$

При *векторном способе* местонахождение точки M определяется радиус-вектором (его модулем и ориентацией относительно координатных осей), при *координатном способе* – тремя числами (координатами).

Изменяя свое положение относительно системы отсчета, материальная точка описывает в пространстве траекторию, которая представляет собой геометрическое место концов радиус-вектора, соответствующих различным моментам времени (рисунок 2.2).

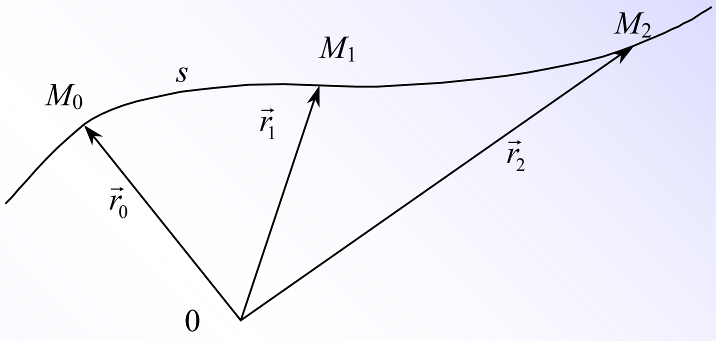


Рисунок 2.2

Если траектория и начальное положение материальной точки известны, то расстояние s, измеренное вдоль траектории, точно определяет ее положение в данный момент времени. Это расстояние – путь s (своего рода «естественная координата», отсчет которой производится вдоль траектории материальной точки).

С течением времени при движении материальной точки изменяется ее путь: $s = s(t)$, изменяется радиус-вектор: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, изменяются координаты: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$;. Записанные уравнения называют кинематическими уравнениями движения *(законами движения)*. Они соответствуют *трем способам описания движения: естественному,* *векторному и координатному.* Нахождение кинематических уравнений движения – одна из главных задач кинематики и механики в целом.

Перемещение – направленный отрезок, соединяющий начальное и конечное положения материальной точки в пространстве (изменение радиус-вектора):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (2.2)$$

Модуль этой величины не зависит от выбора системы отсчета и, как видно из рисунка 2.3, при криволинейной траектории не равен пройденному пути: $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s = s_2 - s_1$.

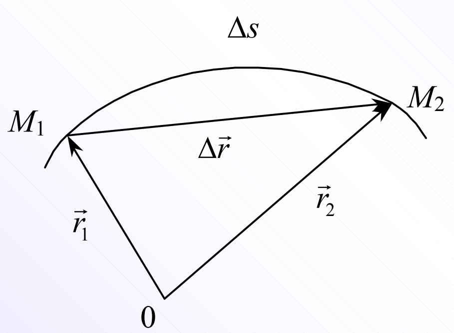


Рисунок 2.3

Скорость – физическая величина, характеризующая быстроту изменения радиус-вектора (или пути, или координаты – в зависимости от способа описания движения) с течением времени. Различают среднюю векторную и среднюю скалярную *скорости*:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \ \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Здесь $\Delta \vec{r}$ и Δs – перемещение и путь за время Δt. В общем случае $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$ и $|\langle \vec{v} \rangle| \neq \langle v \rangle$.

Для нахождения мгновенной скорости (скорости в данный момент времени) нужно устремить к нулю промежуток времени Δt. Тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}. \quad (2.4)$$

При $dt \to 0$ элементарное перемещение $d\vec{r}$ направлено вдоль элементарного участка траектории ds; следовательно, вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в данной точке (рисунок 2.4) и $|\vec{v}| = v$. Измеряется скорость в метрах в секунду [м/с].

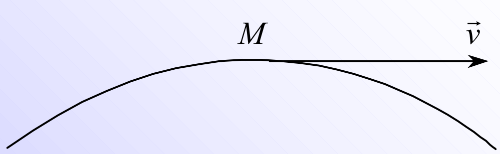


Рисунок 2.4

Легко видеть, что

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}; \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \qquad (2.5)$$

Физически разложение вектора скорости по трем некомпланарным ортам означает замену одного элементарного перемещения $d\vec{r} = \vec{v}dt$ совокупностью трех элементарных перемещений $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$, совершаемых независимо друг от друга в любой последовательности (проявление *принципа независимости движений*).

Ускорение – физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости с течением времени. Среднее и мгновенное (в данный момент) *ускорения* равны соответственно:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}, \quad \vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}. \qquad (2.6)$$

Измеряется ускорение в метрах на секунду в квадрате [м/с^2].

2.2. Описание прямолинейных равномерного и равноускоренного движений

Траектория прямолинейного движения – прямая. Для описания движения удобно направить вдоль этой прямой координатную ось, например, $0x$ (рисунок 2.5).

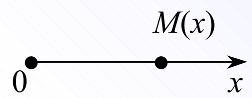


Рисунок 2.5

Тогда кинематическое уравнение движения материальной точки:

$$x = x(t). \tag{2.7}$$

$x > 0$, если точка смещена от начала отсчета в направлении оси $0x$.

Равномерным называют движение, при котором тело (частица) за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния (пути). При этом мгновенная скорость постоянна по величине: $v = \text{const}$. *Кинематическое уравнение равномерного прямолинейного движения* имеет вид:

$$x = x_0 + vt, \tag{2.8}$$

где x_0 – координата частицы в начальный момент времени (при $t = 0$).

Средняя скорость при таком движении равна мгновенной:

$$\langle v \rangle = v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.9}$$

Графики зависимостей скорости и координаты при равномерном движении представлены на рисунках 2.6 и 2.7 соответственно.

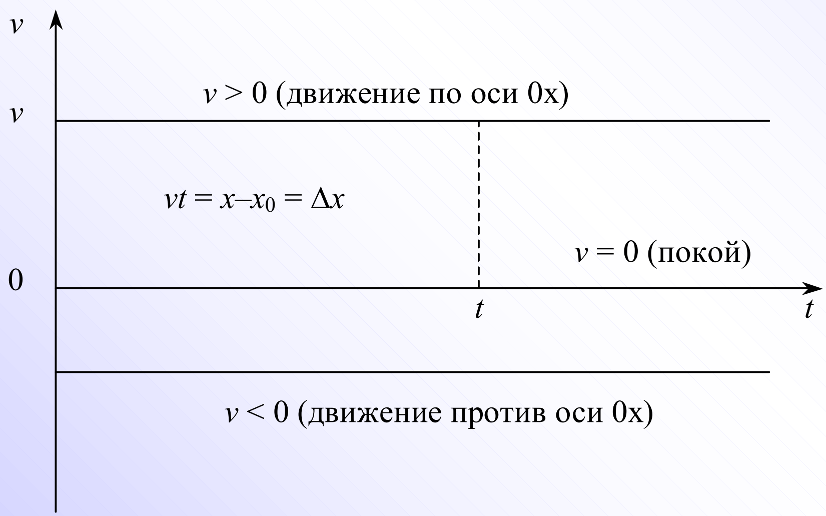


Рисунок 2.6

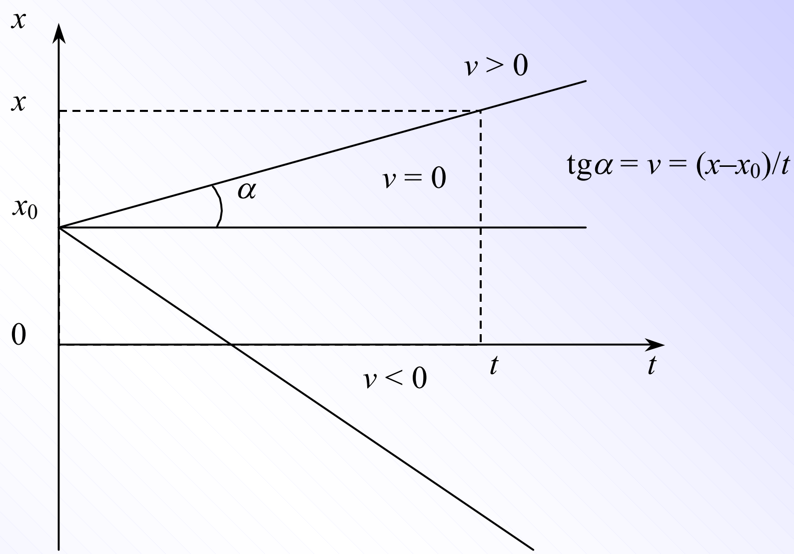


Рисунок 2.7

Равноускоренным называют движение, при котором скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковую величину. Для прямолинейного движения ускорение при этом постоянно по величине и направлению: $v = const$. Тогда скорость частицы в момент времени t

$$v = v_0 + at. \tag{2.10}$$

где v_0 – скорость частицы в начальный момент времени (при $t = 0$). Координата частицы в момент времени t

$$x = x_0 + v_0 t + at^2 / 2, \tag{2.11}$$

где x_0 – скорость частицы в начальный момент времени (при $t = 0$). Несложно показать, что

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = x_0 + \frac{v + v_0}{2} t\,, \tag{2.12}$$

т. е. средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v + v_0}{2}\,. \tag{2.13}$$

Графики зависимостей ускорения, скорости и координаты материальной точки от времени при равноускоренном движении представлены на рисунках 2.8, 2.9, 2.10 соответственно. На рисунке 2.11 показана возможность вычисления модуля перемещения с помощью графика скорости.

Рисунок 2.8

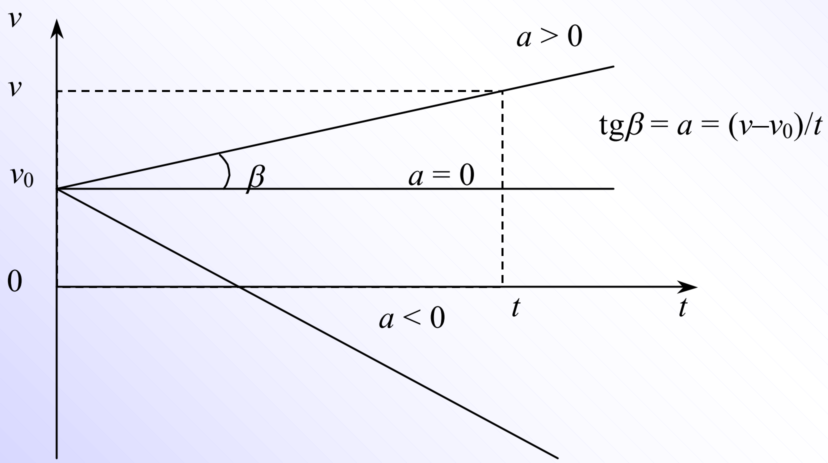


Рисунок 2.9

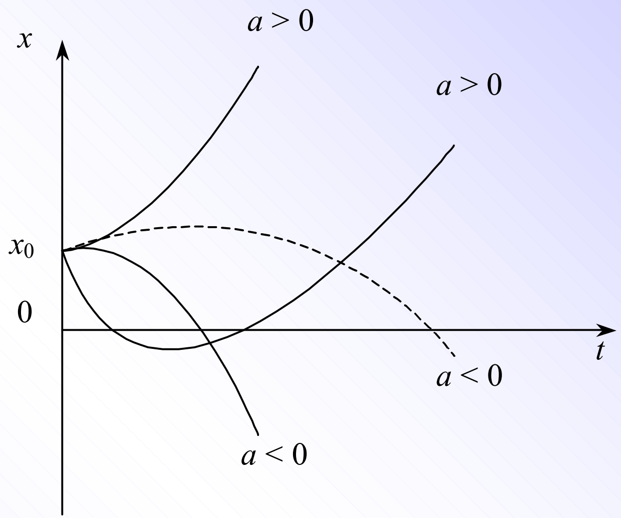


Рисунок 2.10

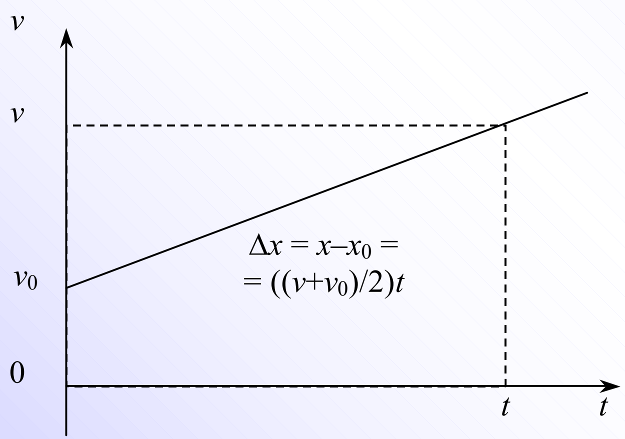


Рисунок 2.11

2.3. Свободное падение и движение тела, брошенного вертикально вверх

Свободным называют падение тела под действием притяжения к Земле в отсутствие сопротивления движению. *Галилей* установил, что все свободно падающие тела в данном месте на Земле имеют одно и то же ускорение. *Ускорение свободного падения* зависит от широты местности и принимает значения от 9,78 м/с^2 на экваторе до 9,83 м/с^2 на полюсе. Стандартное ускорение свободного падения принято равным 9,807 м/с^2; в задачах обычно считают $a = g = 9{,}8$ м/с^2.

Для описания движения свободно падающего тела применимы основные кинематические соотношения равноускоренного движение. Если направить координатную ось в соответствии с рисунком 2.12, то координата частицы в момент времени t

$$y = h + v_0 t + gt^2 / 2, \qquad (2.14)$$

а скорость

$$v = v_0 + gt. \qquad (2.15)$$

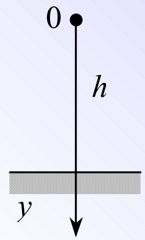


Рисунок 2.12

Если тело падает без начальной скорости ($v_0 = 0$) на землю ($h = 0$), то время падения $t = \sqrt{2h/g}$, а конечная скорость $v = gt = \sqrt{2gh}$.

Для тела, брошенного с земли вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$, запишем: $y = v_0 t - gt^2/2$, $v = v_0 - gt$ (координатная ось $0y$ направлена вертикально вверх). Тогда максимальная высота подъема $h = v_0^2/(2g)$, и время подъема на эту высоту $t = v_0/g = \sqrt{2h/g}$ равно времени свободного падения без начальной скорости с этой высоты.

2.4. Примеры решения задач по теме 2

Задача 2.1. Автобус проехал первую треть пути со скоростью $v_1 = 50$ км/ч, а вторую со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. С какой скоростью ему нужно проехать оставшуюся часть пути, чтобы средняя скорость движения автобуса на всем маршруте была $v_{cp} = 70$ км/ч? Возможна ли средняя скорость $v_{cp} = 90$ км/ч?

Решение. Средняя скорость $v_{cp} = S/t$, где S – длина всего маршрута, t – время его прохождения. Обозначим скорость автобуса на последней трети пути через v_3. Тогда $t = t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{S/3}{v_1} + \dfrac{S/3}{v_2} + \dfrac{S/3}{v_3}$.

Отсюда искомая скорость $v_3 = \dfrac{v_{cp} v_1 v_2}{3 v_1 v_2 - v_{cp}(v_1 + v_2)}$. Подставив в это выражение v_{cp}= 70 км/ч, получим $v_3 \approx 162$ км/ч. Полученное значение для скорости движения автобуса достаточное большое и, конечно же, противоречит правилам дорожного движения. Подставляя $v_{cp} = 90$ км/ч, получаем $v_3 = -300$ км/ч < 0. Результат противоречит здравому смыслу, так как автобус должен двигаться вперед. Проанализируем выражение для скорости v_3. Знаменатель обращается в нуль при

$v_{cp}^{*} = 3v_1v_2/(v_1+v_2) \approx 82$ км/ч. При этом $v_3 \to \infty$, т. е. это предельное значение средней скорости автобуса на всем маршруте, возможное при данных условиях движения. Даже мчась на последнем участке «со скоростью света», водитель не сможет превысить значение v_{cp}^{*}. Таким образом, скорости движения автобуса на первых двух участках маршрута ограничивают максимальное значение его средней скорости на всем пути. Заданное в условии значение $v_{cp} = 90$ км/час не может быть достигнуто ни при каких значениях v_3.

Задача 2.2. Путь тела разбит на равные отрезки. Тело начинает равноускоренно двигаться и проходит первый отрезок за время Δt_1. За какой промежуток времени будет пройден n-й отрезок?

Решение. Пусть Δs – длина одного отрезка, Δt – время всего движения, Δt_n – время прохождения n-го отрезка, a – ускорение. Тогда для первого отрезка $\Delta s = a(\Delta t_1)^2/2$, для всего пути $n\Delta s = a(\Delta t)^2/2$, для первых $(n-1)$ отрезков $(n-1)\Delta s = a(\Delta t - \Delta t_n)^2/2$. Решая полученную систему трех уравнений, находим: $\Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

Задача 2.3. По графику зависимости координаты частицы от времени (рисунок 2.13), состоящему из двух участков парабол, построить графики скорости и ускорения и объяснить характер движения на каждом участке.

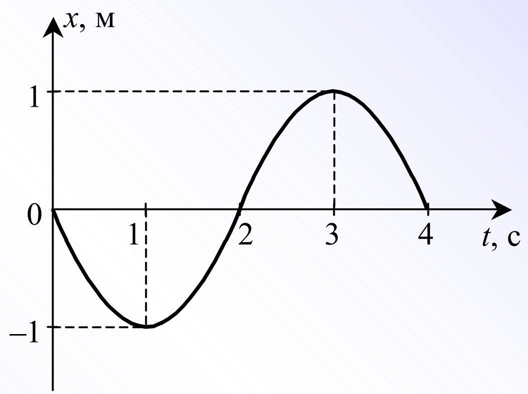


Рисунок 2.13

Решение. См. рисунки 2.14 и 2.15. В течение первых двух секунд материальная точка движется с постоянным положительным ускорением (ветви параболы на исходном графике зависимости координаты от времени направлены вверх), в течение следующих двух секунд ускорение такое же по модулю, но отрицательное.

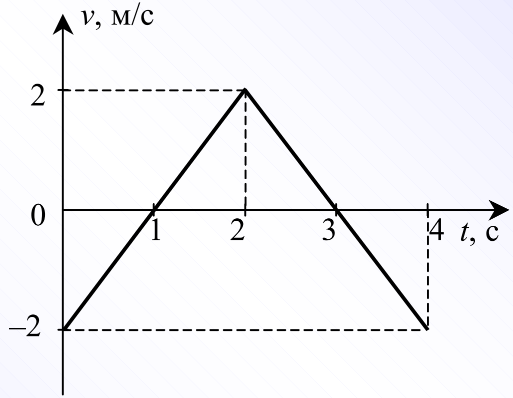


Рисунок 2.14

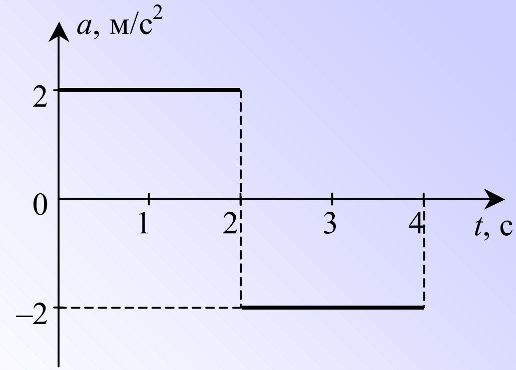


Рисунок 2.15

Легко видеть, что скорость равна нулю при $t = 1$ с и $t = 3$ с; это соответствует вершинам парабол. Для разметки оси ординат на графике зависимости скорости от времени использована известная формула равноускоренного движения $|\Delta x| = |v|\Delta t\,/\,2$, где Δx – изменение координаты (путь) за время Δt, v – скорость в конце этого пути (если скорость в начале равна нулю) или в начале (если скорость в конце равна нулю). Модуль ускорения для того же пути $|a| = |v|\,/\,\Delta t$. В течение первой секунды материальная точка перемещается на 1 м, т. е. $|v|$ = 2 м/с, $|a|$ = 2 м/с^2.

Задача 2.4. С какой скоростью нужно бросить вертикально вверх тело, чтобы оно прошло путь 100 м за 6 с? Сопротивлением движению пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным 10 м/с^2.

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 50 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

Примечание. *В данной и других задачах сопротивлением движению со стороны воздуха пренебречь, если это специально не оговорено.*

Решение. Предположим, что тело проходит путь $s = 100$ м за время $t = 6$ с, поднимаясь вверх. Его конечная скорость $v = v_0 - gt$, где v_0 – искомая начальная скорость. Пусть $s = v_0 t - gt^2/2 = vt + gt^2/2$. Решая это уравнение и подставляя численные значения, получим $v < 0$, что противоречит исходному предположению. Тогда $s = v_0^2/(2g) + gt_1^2/2$, где $t_1 = t - v_0/g$ – время движения вниз. Отсюда находим: v_{01} = 40 м/с и v_{02} = 20 м/с. В первом случае конечное положение тела на 60 м выше первоначального, во втором случае – на 60 м ниже, так как изменения координаты соответственно равны: $\Delta x_1 = v_{01}t - gt^2/2 = 60$ м, $\Delta x_2 = v_{02}t - gt^2/2 = -60$ м.

Тема 3.
Сложение и относительность движений. Криволинейное движение

3.1. Классический закон сложения скоростей

Сложение скоростей основано на *принципе независимости движений*, согласно которому любое движение можно представить как результат нескольких движений, происходящих независимо друг от друга. Если, например, тело участвует одновременно в двух движениях со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ относительно некоторой системы отсчета, то результирующее движение происходит со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (рисунок 3.1).

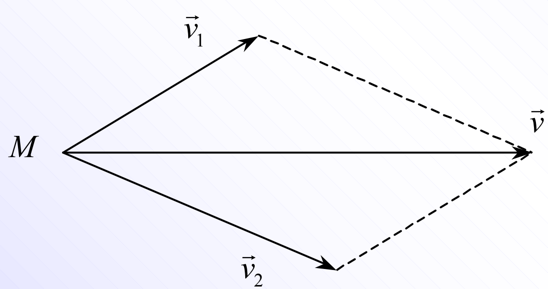


Рисунок 3.1

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 52 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

Рассмотрим две системы отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ так, что соответственные оси координат параллельны. Если в момент времени $t_0 = 0$ их начала совпадали, то в момент t расстояние между началами определяется модулем радиус-вектора $\vec{v}_0 t$ (рисунок 3.2).

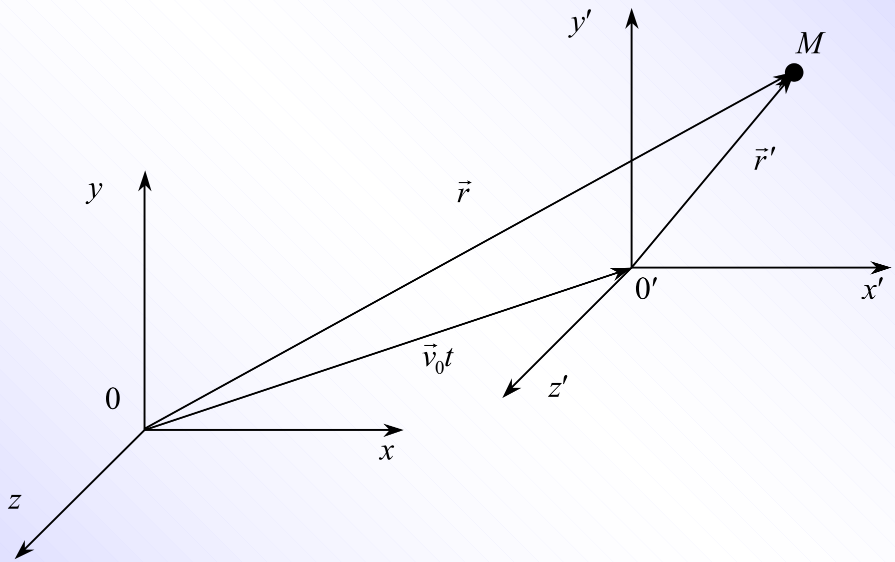


Рисунок 3.2

Пусть $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ – радиус-векторы материальной точки M относительно начал 0 и $0'$ соответственно,

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}'. \qquad (3.1)$$

Физически это равенство далеко не тривиально, т. к. величины $\vec{r}, \vec{v}_0 t, \vec{r}'$ измеряются в разных системах отсчета. Равенство основано на допущении о том, что длина и направление отрезка не зависят от скорости и характера его движения в данной системе отсчета. Это вытекает из постулата о бесконечно быстрых сигналах и возможной синхронизации с их помощью часов в движущихся системах. Все дальнейшие рассуждения основаны на допущении, что момент времени, в который происходит какое-либо событие, одинаков во всех системах отсчета, а значит и одинаковы промежутки времени между двумя событиями в разных системах отсчета:

$$t = t', \;\; \Delta t = \Delta t'. \qquad (3.2)$$

Тогда длина данного отрезка (расстояние между одновременно определенными положениями его концов) во всех системах отсчета одинакова. В рассматриваемой нами задаче r – модуль (длина) вектора $\vec{r}$ как в подвижной, так и в неподвижной системах отсчета; равенство (3.1) можно рассматривать в проекциях на оси обеих систем координат. В силу этого равенство (3.1) служит основанием для всех кинематических соотношений сложного движения частицы в нерелятивистской классической механике.

Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \tag{3.3}$$

где $\vec{v}$ – скорость материальной точки M относительно начала 0, $\vec{v}'$ – скорость ее относительно начала $0'$, $\vec{v}_0$ – скорость начала $0'$ относительно 0. Выражение (3.3) – *формула сложения скоростей Галилея,* она служит для вычисления скорости тела в некоторой системе отсчета, если известны его скорость в другой системе и относительная скорость движения систем. В силу изотропности пространства без ограничения общности можно выбрать направления осей $0'x'$ и $0x$ совпадающими со скоростью $\vec{v}_0$ движения точки $0'$ в системе $0xyz$, а за начальный момент времени принять момент совпадения точек 0 и $0'$. Тогда в координатном представлении имеем:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'; \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v'_x + v_0, \\ v_y = v'_y, \\ v_z = v'_z. \end{cases} \tag{3.4}$$

Это формулы преобразований Галилея для координат и скоростей. Ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{3.5}$$

Принцип независимости движений широко используется при решении задач о движении частицы, брошенной вблизи земной поверхности горизонтально или под углом к горизонту. В обоих случаях рассматриваются независимые движения вдоль горизонтальной и вертикальной координатных осей: первое равномерное, второе с ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Из системы соответствующих кинематических уравнений движения несложно найти все искомые величины, а также получить уравнение траектории (параболы).

3.2. Относительность движения

При движении двух тел (материальных точек), зная их перемещения $\Delta\vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}_2$ относительно некоторой системы отсчета, можно вычислить перемещение второго тела относительно первого:

$$\Delta\vec{r}_{21} = \Delta\vec{r}_2 - \Delta\vec{r}_1. \qquad (3.6)$$

Разность скоростей тел (относительная скорость) определяется при этом выражением

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \left(-\vec{v}_1\right), \qquad (3.7)$$

соответствующим закону сложения скоростей Галилея:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}, \qquad (3.8)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости первого и второго тел в неподвижной системе отсчета («неподвижность» системы относительна), $\vec{v}_{21}$ – скорость второго тела относительно первого. Векторные треугольник и параллелограммы скоростей, соответствующие формулам (3.7) и (3.8), представлены на рисунке 3.3.

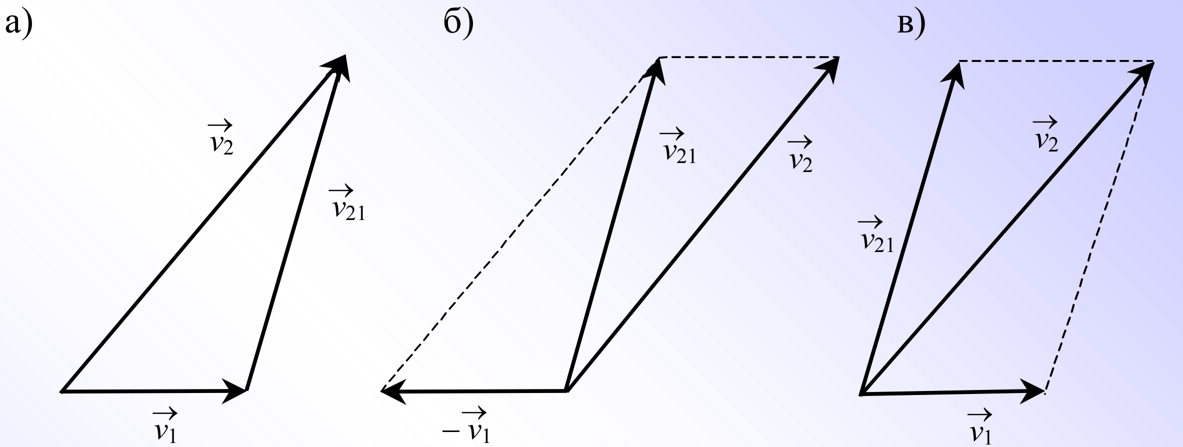


Рисунок 3.3

Заметим, что в задачах об одновременном движении двух или нескольких тел целесообразно, как правило, связывать систему отсчета с одним из этих тел и использовать понятия относительных скорости и перемещения.

3.3. Равномерное движения по окружности

Рассмотрим движение материальной точки по окружности радиусом R. Положение ее в любой момент времени можно определить, зная угол поворота φ радиус-вектора $\vec{R}$ относительно заданной оси $0x$, т. е. угол φ имеет смысл координаты (его называют *угловой* или *полярной координатой)*. Кинематическое уравнение движения в этом случае:

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (3.9)$$

угловое перемещение

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad (3.10)$$

На рисунке 3.4 $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$. Угловая скорость – физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой координаты с течением времени. Средняя и мгновенная угловые скорости равны соответственно:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \;\; \omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}. \qquad (3.11)$$

где $d\varphi$ – угловое перемещение за время dt.

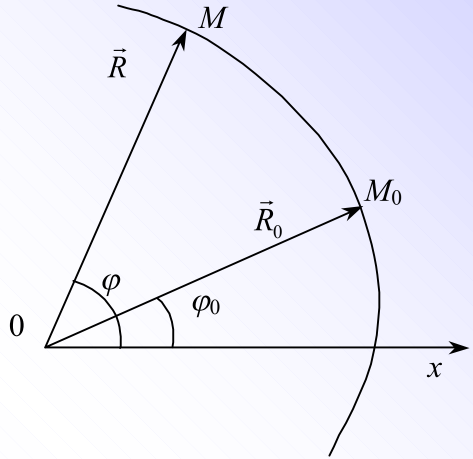


Рисунок 3.4

Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду [рад/с].

При равномерном движении по окружности радиус-вектор материальной точки, проведенный из центра окружности, за *любые равные* промежутки времени поворачивается на одинаковый угол:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{3.12}$$

Частота n – число полных оборотов в единицу времени; период T – время одного полного оборота;

$$\omega = 2\pi n = 2\pi / T; \;\; T = 1/n. \tag{3.13}$$

За время Δt материальная точка проходит по окружности путь $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$. (рисунок 3.4). Скорость ее равномерного движения $v = \omega R$. Вектор $\vec{v}$ в данной точке направлен по касательной к окружности.

Такая же связь между линейной и угловой скоростями и при неравномерном движении.

При равномерном движении скорость частицы изменяется по направлению, и ускорение частицы направлено к центру окружности (*центростремительное или нормальное*) и равно по модулю

$$a_n = \omega^2 R = v^2 / R. \qquad (3.14)$$

При неравномерном движении скорость частицы изменяется и по модулю и имеет место касательное к окружности (*тангенциальное*) ускорение, модуль которого $a_\tau = \dot{v}$. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (3.15)$$

3.4. Примеры решения задач по теме 3

Задача 3.1. Две частицы брошены одновременно из одной точки с одинаковыми по модулю скоростями v: первая – вертикально вверх, вторая – горизонтально. Найти расстояние между ними спустя время t.

Решение. Ускорения частиц одинаковы и равны $\vec{g}$ (движение под действием силы тяжести). Следовательно, относительное движение равномерное и прямолинейное, т. е. вторая частица движется относительно первой с постоянной скоростью, модуль которой $v_{21} = v\sqrt{2}$ (рисунок 3.5). Искомое расстояние $s = v_{21}t = vt\sqrt{2}$.

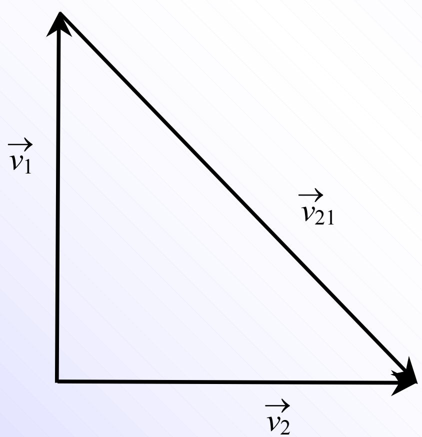


Рисунок 3.5

Задача 3.2. Две частицы, находящиеся на одной высоте на расстоянии l друг от друга (рисунок 3.6), брошены одновременно с одинаковыми по модулю скоростями: одна вниз, другая горизонтально. Найти наименьшее расстояние между частицами, если они движутся в одной вертикальной плоскости.

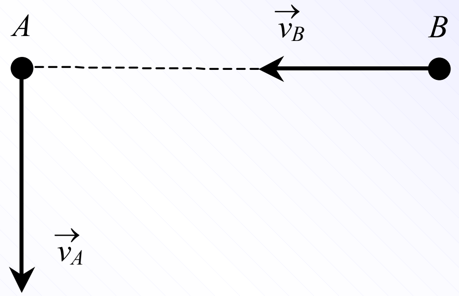


Рисунок 3.6

Решение. Свяжем систему отсчета с частицей A. Тогда (рисунок 3.7) скорость частицы B относительно частицы A равна $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$; при этом $v_A = v_B = v$ и $v_{BA} = v\sqrt{2}$. Ускорения обеих частиц одинаковы и равны $\vec{g}$ в системе отсчета, связанной с землей. Следовательно, относительная скорость $\vec{v}_{BA}$ постоянна по модулю и по направлению, траектория относительного движения – прямая. Искомое наименьшее расстояние

Начало

Содержание

Назад

Во весь экран

Закрыть

между частицами (между точкой A и траекторией относительного движения на рисунке 3.7) $s_{\min} = s/\sqrt{2}$.

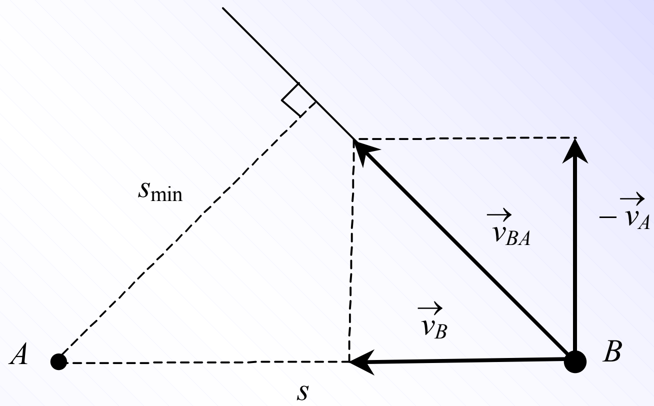


Рисунок 3.7

Задача 3.3. В точках A и B находятся два тела, движущиеся с заданными скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в направлениях, показанных на рисунке 3.8. Определить графически наименьшее расстояние между телами в процессе их движения.

Рисунок 3.8

Решение. Скорость тела B относительно тела A $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ (рисунок 3.9). Длина перпендикуляра, опущенного из точки A на направление вектора $\vec{v}_{BA}$, и есть искомое наименьшее расстояние между телами.

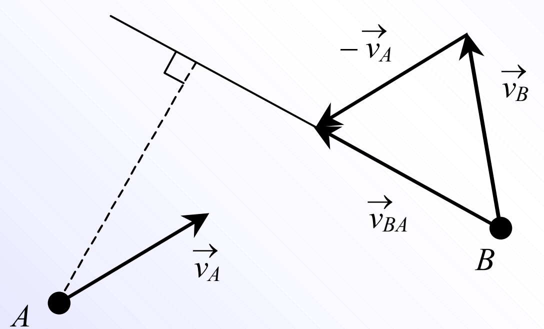


Рисунок 3.9

Задача 3.4. По двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения движутся две частицы с постоянными по модулю скоростями v_1 и v_2. В начальный момент они находились от точки пересечения на расстояниях s_1 и s_2 соответственно. Через сколько времени расстояние между частицами будет наименьшим? Найти это расстояние.

Решение. Скорость второй частицы относительно первой $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ постоянна по величине и направлению, траектория движения второй частицы относительно первой – прямая линия (рисунок 3.10).

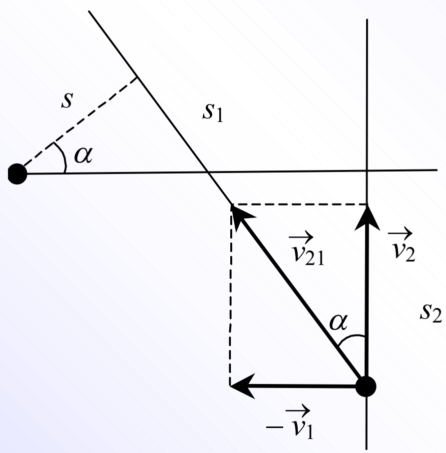


Рисунок 3.10

Тогда искомые расстояние s и время t можно найти из уравнений

$$s_1 - \frac{s}{\cos\alpha} = s_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha; \qquad v_{21}t = \frac{s_2}{\cos\alpha} + s \cdot \mathrm{tg}\alpha, \qquad \text{где} \qquad v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

$\mathrm{tg}\alpha = v_1 / v_2$, $\cos\alpha = v_2 / v_{21}$. Решая уравнения, получаем: $t = \dfrac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$;

$s = \dfrac{|s_1 v_2 - s_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$. Разность в последнем выражении берется по модулю, т. к. величина s должна быть неотрицательной при любых значениях s_1, s_2, v_1, v_2.

Задача 3.5. Пешеход, находящийся на расстоянии S от прямолинейного участка шоссе, выходит встречать автобус, движущийся по шоссе с постоянной скоростью v_0. Исходное расстояние между автобусом и пешеходом L. Найти минимальную скорость пешехода, а также пути, пройденные до встречи участниками движения.

Решение. На рисунке 3.11 представлены векторные треугольники скоростей и перемещений, соответствующие условию задачи и равенству $\vec{v}_0 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}$. Здесь $\vec{v}_{отн}$ – скорость автобуса относительно пешехода, $\vec{v}$ – искомая скорость пешехода, модуль которой имеет минимальное значение при $\vec{v} \perp \vec{v}_{отн}$. Учитывая подобие всех изображенных на рисунке 3.11 треугольников, находим скорость $v = v_0 \cdot \sin\alpha = v_0 S / L$ и пройденные пути

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Назад
Во весь экран
Закрыть

$$S_{авт} = L/\cos\alpha = L^2/\sqrt{L^2 - S^2}\,,\; S_{пеш} = L\cdot \mathrm{tg}\alpha = LS/\sqrt{L^2 - S^2}\,.$$

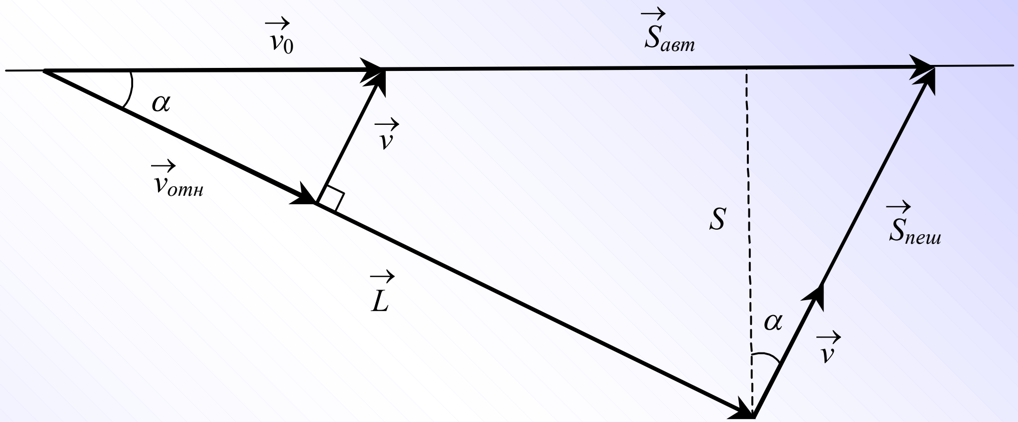


Рисунок 3.11

Задача 3.6. Частица движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным (касательным) ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через сколько времени после начала движения центростремительное ускорение частицы будет равно $a_n = 10$ см/с^2?

Решение. Скорость частицы спустя время t после начала движения $v = a_\tau t$, центростремительное ускорение $a_n = v^2 / R$, откуда $v = \sqrt{a_n R}$. Тогда искомое время $t = v / a_\tau = \sqrt{a_n R} / a_\tau$. Подставляя численные значения, находим $t = 2$ с.

4.1. Динамические характеристики частицы. Законы Ньютона

Основные принципы классической механики были сформулированы в 1687 г. И. Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии». Законы Ньютона в авторской формулировке (перевод А. Н. Крылова):

I закон: Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II закон: Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

III закон: Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Три закона составляют основу динамики. В качестве первого из них *Ньютон* взял закон инерции Галилея, согласно которому всякое тело, не подверженное внешним воздействиям, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. Такое тело называют свободным, а его движение – *свободным движением или* движением по инерции. Таким образом, инерция – явление равномерного и прямолинейного движения свободного тела (покой – частный случай при скорости $v = 0$).

Собственно свободных тел в природе нет, но можно тело поставить в такие условия, при которых внешние воздействия на него пренебрежимо малы. Такое тело будет вести себя как свободное. В некоторых случаях этому способствует правильный выбор системы отсчета. Например, если вблизи Земли система отсчета движется **с** ускорением свободного падения $\vec{g}$ вниз, то относительно этой системы все свободно падающие тела движутся равномерно или покоятся.

Дадим законам Ньютона современную трактовку. *Первый закон Ньютона* – это постулат (аксиома; положение, принятое без доказательства, опирающееся на результаты наблюдений и экспериментов Галилея и Ньютона). *Первый закон постулирует существование инерциальной системы отсчета* (ИСО), т. е. такой системы отсчета, в которой все изолированные (свободные, не подверженные внешним воздействиям) материальные точки движутся равномерно и прямолинейно (или покоятся). Понятие ИСО – идеализация. В ИСО имеет место *явление инерции* – равномерное и прямолинейное движение свободного тела (частицы).

Второй закон описывает движение материальной точки относительно ИСО, в том числе и несвободной (подверженной воздействию). Любое физическое тело обладает *инертностью* – свойством препятствовать изменению его скорости относительно ИСО. Физическая величина, характеризующая инертность – *масса*: чем тело более инертно, тем больше его масса. Единица измерения массы – килограмм [кг]. В классической механике масса – аддитивная величина (масса тела равна сумме масс его частей).

Величина, определяемая произведением массы тела на его скорость – *импульс (количество движения)*:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.1}$$

Единица измерения импульса – килограмм-метр в секунду [кг·м/с].

Импульс свободной частицы в ИСО не изменяется с течением времени (сохраняется), т. к. свободная частица движется по инерции, а масса частицы в классической механике неизменна. Для изменения импульса частицы в ИСО необходимо воздействие на нее других материальных объектов. Такое воздействие характеризуется векторной физической величиной – *силой*. Чем больше сила, тем быстрее изменяется импульс частицы в ИСО.

Современная формулировка II закона: производная импульса материальной точки по времени равна силе, действующей на материальную точку в ИСО:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \tag{4.2}$$

Второй закон Ньютона – также постулат, опирающийся на наблюдения и эксперименты.

При $m = \mathrm{const}$ из (4.2) имеем:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \vec{F}. \tag{4.3}$$

Тогда *II закон Ньютона можно переформулировать*: ускорение материальной точки относительно ИСО прямо пропорционально действующей силе, обратно пропорционально массе *и направлено в сторону действия силы*. В соответствующей системе единиц

$$\vec{a} = \vec{F} / m. \tag{4.4}$$

Заметим, что с помощью (4.4) можно определить силу и массу независимо друг от друга, задавая эталоны этих величин и измеряя ускорения кинематически.

Из (4.4) следует, что $F = ma$, откуда можно получить единицу измерения силы: $[F] = [m][a] = [\text{кг}\cdot\text{м/с}^2] = [\text{Н}]$ – *ньютон*. 1 Н – сила, которая телу массой 1 кг в ИСО сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

Дополнением к законам Ньютона служит *принцип суперпозиции сил:* ускорение, получаемое частицей при одновременном действии на нее нескольких сил, определяется геометрической суммой ускорений, получаемых частицей при действии каждой из этих сил в отдельности:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (4.5)$$

Если речь идет об одной частице, подверженной действию нескольких сил, то величина

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (4.6)$$

называется *равнодействующей силой*. В этом случае под «силой» в формулировке второго закона Ньютона следует понимать именно равнодействующую силу. Заметим, что при $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ ускорение тела $\vec{a} = 0$, т. е. в ИСО тело ведет себя как свободное, хотя таковым не является. Поэтому недопустимо трактовать первый закон Ньютона как следствие второго закона: первый закон постулирует существование ИСО, а второй закон определяет характер движения тела в ИСО.

Рисунок 4.1

Геометрически сложение сил показано на рисунке 4.1. Возможна и обратная операция – разложение силы $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. В частности, силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно разложить единственным образом, если: а) известны направления составляющих; б) известны величина и направление одной из составляющих; в) известны величины составляющих (в каждом случае строится параллелограмм с диагональю F и сторонами F_1 и F_2).

В первом и втором законах говорится об отдельно взятом теле (частице); воздействие на него других тел рассматривается без анализа последствий этого воздействия для последних. В *третьем законе* рассматривается система из двух тел: силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по прямой, проходящей через эти точки.

Математически:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad F_{12} = F_{21}. \tag{4.7}$$

Эти силы не имеют равнодействующей, т. к. приложены к разным телам (рисунок 4.2).

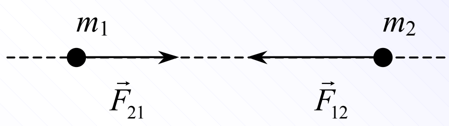


Рисунок 4.2

Третий закон Ньютона утверждает, что всякому действию есть противодействие. Например, на тело, лежащее на столе, действует сила тяжести $m\vec{g}$, под действием этой силы тело давит на стол с силой $\vec{P}$, а стол, в соответствии с третьим законом Ньютона, действует на тело с силой реакции $\vec{N} = -\vec{P}$.

Если расстояние между взаимодействующими частицами неизменно, то силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ не могут заставить эти тела двигаться ускоренно – необходимо взаимодействие с третьим телом.

4.2. Принцип относительности Галилея. Механическая концепция взаимодействий

Обратимся к преобразованиям Галилея для координат и скоростей. Легко видеть, что частица, движущаяся в СК $0xyz$ с постоянной скоростью $\vec{v}$, в СК $0'x'y'z'$ также движется с постоянной скоростью $\vec{v}'$, хотя и иной по величине. Следовательно, если одна из систем отсчета инерциальная, то и любая другая, движущаяся относительно нее равномерно, прямолинейно и поступательно, также инерциальная. Свойства симметрии пространства и времени, постулированные для одной из ИСО справедливы для пространства и времени в любой другой ИСО, в силу линейности преобразований Галилея. Все ИСО геометрически эквивалентны.

Оказывается, что все ИСО эквивалентны и физически. В классической механике постулируется, что *все ИСО* эквивалентны для механических взаимодействий. Это утверждает *принцип относительности Галилея*, суть которого в том, что любой механический процесс происходит во всех ИСО по одним и тем же законам, имеющим инвариантную форму. Имеются также неизменные величины – *инварианты преобразований Галилея* (ускорение, масса, сила). Они особенно существенны при изучении движения, т. к. выражают одинаковые во всех ИСО свойства тел и движений.

II закон Ньютона не только сохраняет свою форму во всех ИСО, но и связывает инвариантные величины. III закон Ньютона и принцип независимого действия сил также справедливы во всех ИСО.

В классической механике все ИСО равноправны, привилегированной или абсолютно неподвижной системы отсчета нет.

Остановимся подробнее на концепции взаимодействия в механике. Заметим, что изучение природы сил не входит в задачи механики и выполняется в других разделах физики. По данному вопросу можно высказать лишь самые общие соображения, вытекающие из моделей материальных объектов и взаимодействий между ними, принятых в механике.

Исходной для механики является система материальных точек в пустоте, связанных мгновенно передающимся взаимодействием. Силы взаимодействия между любыми двумя частицами центральные и подчиняются III закону Ньютона.

Силы, действующие на частицу со стороны других частиц, могут зависеть от относительных расстояний, а эти расстояния – от положения рассматриваемой частицы в пространстве. Поэтому равнодействующая сила – функция координат частицы, а также времени, поскольку частицы могут двигаться: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$. Таким образом, мы приходим к понятию *силового поля* – области пространства, в каждой точке которого на частицу действует сила, зависящая от координат и времени. Такое понятие силового поля полностью согласуется с механической моделью материальных объектов и концепцией взаимодействия. Но такое поле не материальный объект, входящий в механическую систему, а просто удобное вспомогательное математическое понятие, позволяющее вместо подробного рассмотрения всех попарных взаимодействий использовать выражение вида $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$. В рамках рассматриваемой механической концепции равнодействующая сила может быть также функцией скорости данной частицы, поэтому в общем случае

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \qquad (4.8)$$

К механическим силам относят также *контактные силы* (упругости и трения), возникающие при соприкосновении макроскопических тел. Задача о подробном рассмотрении взаимодействия на уровне микрочастиц в механике не ставится, а рассматривается и эмпирически определяется суммарный макроскопический эффект. Для двух тел, взаимодействующих посредством контактных сил, справедлив третий закон Ньютона.

В рамки механической концепции укладываются основные известные проявления гравитационного взаимодействия и частично электромагнитного. Сильное и слабое взаимодействия не соответствуют механической концепции в главном: для них исключено применение модели дальнодействия.

Однако, механическая концепция, несмотря на привлекательную математическую простоту, не может быть положена в основу физической картины всего материального мира. Главный ее недостаток – отсутствие в системе материальных тел материальных полей, взаимодействующих с телами. Поля передают взаимодействие между телами с большой, но не бесконечной скоростью, действуя на частицу там, где она находится в поле (близкодействие).

Движение макроскопических тел с нерелятивистскими скоростями происходит в сравнительно слабых и медленно изменяющихся полях (гравитационном и электромагнитном), поэтому данное движение можно изучать в механике без применения понятия материального поля. В физике же микромира механическая концепция взаимодействия не применима из-за возможности существования нецентральных сил взаимодействия между частицами, из-за релятивистских скоростей, из-за взаимопревращений частиц и т. д.

Состояние механической системы считается в данный момент заданным, если известны массы каждой частицы, координаты и скорости. Можно утверждать, что состояние в данный момент времени предопределяет (причем однозначно) состояние данной системы в любой другой момент времени. Такая однозначная связь причины и следствия носит название *динамической закономерности*. Классическая механика относится к теориям с динамической закономерной связью между причинами и следствиями. *Принцип механической причинности* в классической механике: состояние системы материальных точек однозначно определяется их взаимодействием и начальными условиями.

4.3. Сила тяжести и вес тела

Вблизи поверхности Земли на материальную точку действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. Под действием этой силы материальная точка притягивается к Земле. Если тело не точечное, то каждая его часть притягивается к Земле с силой $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$,. Для небольшого тела все силы $\vec{F}_i$ между собой практически параллельны, и их действие можно заменить действием одной силы $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{g}$, где m – масса тела. Точка приложения силы $\vec{F}$ – центр тяжести. Его можно найти опытным путем. Например, подвешивая плоскую фигуру в разных ее точках, уравновешивая и проводя линии отвеса, определяют центр тяжести как точку пересечения этих линий.

Ускорение свободного падения (а значит и сила тяжести) зависит от высоты h местонахождения тела над поверхностью Земли.

Вес $\vec{P}$ – сила, с которой тело давит на опору или растягивает нить подвеса, препятствующие его свободному падению. Эта сила приложена к опоре (подвесу). В соответствии с третьим законом Ньютона, опора (подвес) действует на тело с *силой реакции* $\vec{N}$, равной по модулю весу и направленной в противоположную сторону: $\vec{N} = -\vec{P}$. На тело действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции $\vec{N}$ (рисунок 4.3).

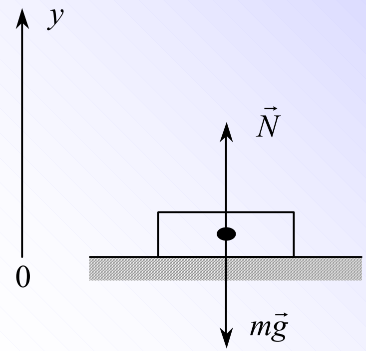


Рисунок 4.3

Если тело и опора покоятся, то $N = mg$. Если тело движется вместе с опорой с ускорением $\vec{a}$, то $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. При этом:

а) если $\vec{a}$ направлено вверх, то $ma = N - mg$; $N = m(g + a)$ – имеет место перегрузка: $N = P > mg$;

б) если $\vec{a}$ направлено вниз, то $ma = N + mg$; $N = m(g - a)$; $N = P < mg$; при $\vec{a} = \vec{g}$ (свободное падение опоры) $P = 0$ невесомость; при $a > g$ $N < 0$ – тело отрывается от опоры.

Если на тело действует только сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, то тело движется с ускорением $\vec{g}$ (свободное падение или движение тела, брошенного вертикально вверх, горизонтально с некоторой высоты, под углом к горизонту). При этом тело находится в состоянии невесомости. Очевидно, состояние невесомости будет наблюдаться и у тел, подверженных действию силы тяготения вдали от земной поверхности (сила тяжести – частное проявление силы тяготения).

4.4. Примеры решения задач по теме 4

Задача 4.1. Тело с массой m соскальзывает без трения с неподвижной плоскости, наклоненной к горизонту под углом α, и за некоторое время изменяет значение своей скорости от v_1 до v_2. Найти это время и среднюю силу, с которой тело действует на плоскость.

Решение. Несложно убедиться, что $ma = mg \cdot \sin\alpha$, т. е. ускорение тела $a = g \cdot \sin\alpha$. Тогда искомое время $t = (v_2 - v_1)/a = (v_2 - v_1)/(g \cdot \sin\alpha)$. Сила, с которой тело действует на плоскость (сила давления), $P = mg \cdot \cos\alpha$.

Задача 4.2. Автомобиль массой $m = 1000$ кг едет со скоростью $v = 36$ км/ч по выпуклому мосту с радиусом кривизны $R = 20$ м. Найти силу, с которой он давит на мост в верхней точке.

Решение. Используя второй закон Ньютона, запишем: $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$, где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение, в верхней точке моста направленное вертикально вниз, $a = v^2 / R$; $m\vec{g}$ – направленная вертикально вниз сила тяжести; $\vec{N}$ – направленная вертикально вверх сила реакции, равная по модулю искомой силе давления. Тогда

$N = mg - ma = m(g - v^2 / R)$. Подставляя численные значения, находим $N = 4{,}8$ кН.

Задача 4.3. В установке на рисунке 4.4 масса левого груза вчетверо больше массы правого ($m_1 = 4m_2$), левый груз находится на высоте h над полом. На какую максимальную высоту поднимется правый груз, если его отпустить? Массами блоков и нитей, растяжением нитей и трением пренебречь.

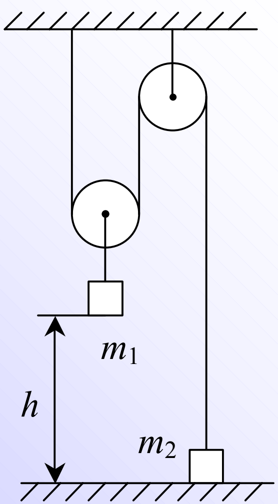


Рисунок 4.4

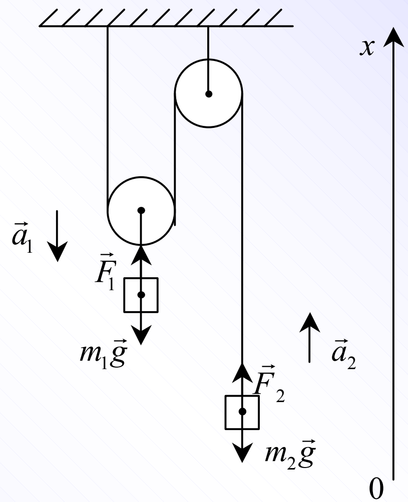


Рисунок 4.5

Решение. В тот момент, когда левый груз достигает пола, правый находится на высоте $2h$ и имеет направленную вверх скорость $v = \sqrt{2a_2 \cdot 2h}$, где a_2 – ускорение правого груза на пути $2h$. Далее правый груз движется как тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v, и поднимается еще на высоту $h_1 = v^2 / (2g) = 2a_2 h / g$. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению ускорения a_2. На рисунке 4.5 изображены силы тяжести грузов и силы, с которыми нить действует на грузы, а также направления ускорений движущихся грузов. Несложно убедиться, что $a_2 = 2a_1$ (за одно и то же время правый груз проходит вдвое большее расстояние, чем левый). Используя второй закон Ньютона, в проекциях на координатную ось (рисунок 4.5) запишем: $-m_1 a_1 = F_1 - m_1 g$, $m_2 a_2 = F_2 - m_2 g$. При этом $F_1 = 2F_2$. Решая полученную систему уравнений, находим: $a_2 = g / 2$, $h_1 = h$. Искомая максимальная высота подъема правого груза $2h + h_1 = 3h$.

Тема 5.
Движение тел при наличии трения

5.1. Законы сухого трения

Любое сопротивление движению одних тел со стороны других может рассматриваться как трение. Различают *сухое и вязкое (жидкое) трение*. В первом случае взаимодействуют только твердые тела, во втором – по крайней мере, одно из взаимодействующих тел жидкое или газообразное. Причина трения – силы межмолекулярного взаимодействия,

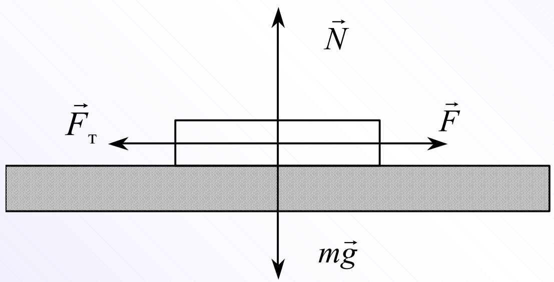


Рисунок 5.1

Сила сухого трения покоя уравновешивает силу, стремящуюся сдвинуть тело с места (рисунок 5.1): $\vec{F}_T = -\vec{F}$, $F_T = F$. С ростом приложенной силы F сила трения покоя F_T увеличивается до тех пор, пока тело не начинает скользить. Этому моменту соответствует максимальная сила трения покоя $F_{T\max}$. Таким образом, $0 < F_T < F_{T\max}$. По закону Амонтона, максимальная сила трения покоя прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{T\max} = \mu N. \tag{5.1}$$

Здесь учтено, что сила реакции опоры N равна по модулю силе давления P тела на опору; μ – коэффициент трения покоя. Его величину можно определить экспериментально с помощью наклонной плоскости (рисунок 5.2).

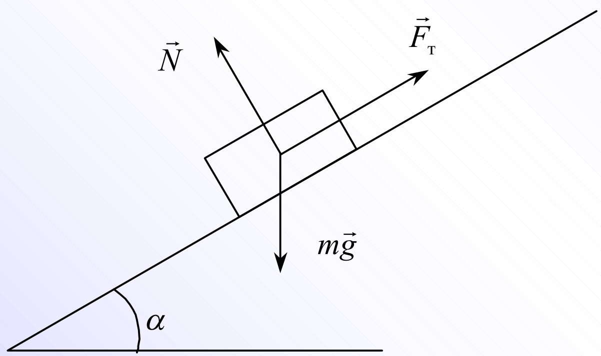


Рисунок 5.2

Тело покоится, если $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T = 0$, т. е. если $F_T = mg \cdot \sin\alpha$. Началу скольжения соответствует предельный угол α_0, для которого $F_T = F_{T\max} = \mu N = \mu mg \cdot \cos\alpha_0$. Отсюда $mg \cdot \sin\alpha_0 = \mu mg \cdot \cos\alpha_0$; $\mathrm{tg}\alpha_0 = \mu$. Определив угол α_0, при котором тело начинает скользить, определим и коэффициент трения μ.

Для скольжения выполняется *закон Кулона*: при малых скоростях сипа трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_T = \mu N, \;\; \vec{F}_T = \mu N \vec{v} / v. \qquad (5.2)$$

Сила трения скольжения направлена противоположно скорости $\vec{v}$ тела. При малых скоростях коэффициент трения скольжения μ совпадает с коэффициентом трения покоя; при больших скоростях первый несколько меньше. Примерный график зависимости силы сухого трения от скорости скольжения представлен на рисунке 5.3.

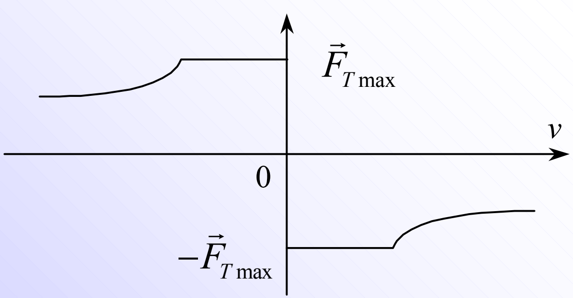


Рисунок 5.3

Начало
Содержание
Страница 88 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

При описании движения тела по плоской поверхности обычно наряду с активными силами тяги и тяжести рассматриваются сила нормальной реакции и сила трения (сила тангенциальной реакции). При координатном способе решения задачи это вполне закономерно, т. к. проводится проецирование сил на координатные оси, одну из которых целесообразно направить по плоскости, а вторую – нормально этой плоскости. Но в ряде случаев решение упрощается при замене нормальной и тангенциальной сил реакции их равнодействующей. На рисунке 5.4 представлена равнодействующая $\vec{R}$ сил $\vec{N}$ и $\vec{T}$. Если $\vec{T}$ – максимальная сила трения покоя или сила трения скольжения, то коэффициент трения $\mu = T / N = \mathrm{tg}\varphi$.

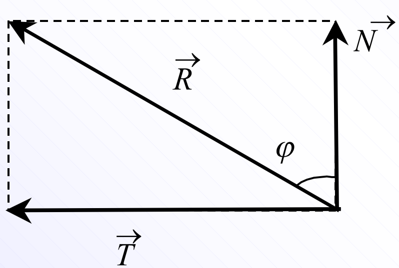


Рисунок 5.4

Начало
Содержание
Страница 89 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

5.2. Сила трения покоя в задачах

Сила трения покоя равна по модулю приложенной силе, стремящейся привести тело в движение, и направлена в противоположную сторону. Поскольку сила трения покоя приложена к неподвижной точке тела, то ее механическая работа равна нулю. При качении тела по твердой поверхности из-за трения покоя часть кинетической энергии тела приходится на вращательное движение (в отсутствие трения движение было бы только поступательным). Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 5.1. Найти минимальную силу, с которой нужно толкать кубик (рисунок 5.5), чтобы он начал двигаться. Масса кубика m, коэффициент трения $\mu = 2\operatorname{tg}\alpha$, сила $\vec{F}$ горизонтальна и перпендикулярна направлению спуска с наклонной плоскости.

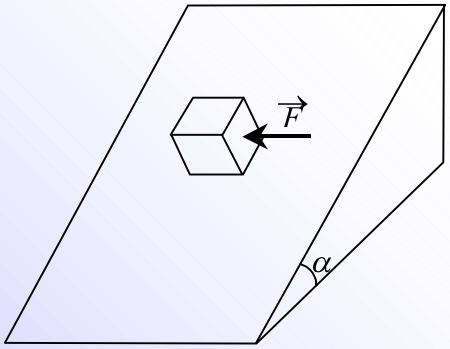


Рисунок 5.5

Решение. На кубик в плоскости поверхности, на которой он находится, действуют взаимно перпендикулярные силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ (рисунок 5.6), где $\vec{F}_1$ – скатывающая сила (составляющая силы тяжести), $F_1 = mg \cdot \sin\alpha$. Пока кубик покоится, равнодействующая сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ уравновешивается силой трения покоя $\vec{T}$, максимальное значение которой $T_{\max} = \mu N = \mu mg \cdot \cos\alpha$, $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры. Таким образом, движение возможно при $\sqrt{F^2 + F_1^2} \geq T$ или при $F \geq F_{\min} = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \sqrt{3}mg \cdot \sin\alpha$.

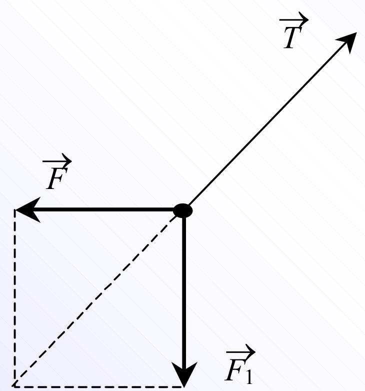


Рисунок 5.6

Начало
Содержание
Страница 91 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

Задача 5.2. Объяснить, почему при повороте передних колес движущийся автомобиль поворачивает.

Решение. Мотор автомобиля заставляет вращаться так называемые ведущие колеса независимо от того, взаимодействуют они с землей или нет. При взаимодействии ведущего колеса с землей возникает сила трения, препятствующая его проскальзыванию относительно земли и вызывающая движение автомобиля в направлении ее действия. Практически это и есть сила тяги автомобиля. Заметим, что движение под действием силы тяги было бы только ускоренным, если бы не препятствующая ему сила трения качения, обусловленная деформацией колес и покрытия дороги при движении автомобиля. Таким образом, если передние колеса ведущие, то поворот автомобиля при их повороте вполне понятен.

Несколько иначе обстоит дело, если передние колеса автомобиля не являются ведущими. При прямолинейном движении за счет силы тяги, обеспечиваемой ведущими колесами автомобиля, в точке соприкосновения переднего колеса с землей возникает сила трения покоя, роль которой сводится к преобразованию поступательного движения колеса во вращательное. Поскольку эта сила всегда приложена к точкам, которые в данный момент времени покоятся относительно земли, ее работа равна нулю. При повороте переднего колеса возникает сила трения, направленная под углом к его плоскости в сторону, противоположную направлению силы тяги (рисунок 5.7). Если при этом сила тяги $F \le \mu N$, где μ – коэффициент трения покоя, N – сила нормальной реакции опоры, то возникает сила трения покоя, составляющая которой, перпендикулярная плоскости колеса, и обеспечивает поворот автомобиля (рисунок 5.7). Если же $F > \mu N$, то имеет место скольжение – автомобиль заносит на повороте.

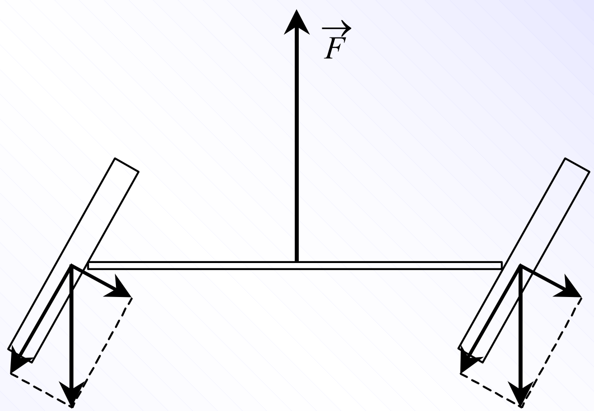


Рисунок 5.7

Задача 5.3. Автомобиль движется с постоянным тангенциальным (касательным к траектории) ускорением a_t по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиусом R. Коэффициент трения μ. В начальный момент скорость равна нулю. Какой путь пройдет автомобиль без скольжения?

Решение. Пока скольжения нет, сила тяги автомобиля $F = ma = T$, где m – масса автомобиля, a – его ускорение, T – сила трения, препятствующая скольжению. Полное ускорение автомобиля $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$, где $a_t=v^2/(2s)$– тангенциальное ускорение, $a_n=v^2/R$ – нормальное (центростремительное) ускорение, v – скорость, s – пройденный путь, R – радиус траектории. Легко видеть, что с ростом v увеличиваются a_n и a. Максимальное ускорение при движении без скольжения соответствует максимальной силе трения покоя: $ma_{\max}=\mu mg$. Тогда $\mu g=a_t\sqrt{1+\frac{4s^2}{R^2}}$,

$$s=\frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{a_t}\right)^2-1}.$$

5.3. Сила трения скольжения в задачах

Сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную скорости движения тела. Это диссипативная сила, ее действие связано с рассеянием (диссипацией) механической энергии движущегося тела, т. е. механическая работа силы трения скольжения при движении тела по замкнутой траектории отрицательна. Для относительного движения с достаточно малой скоростью коэффициент трения скольжения можно считать равным коэффициенту трения покоя. Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 5.4. Два малых бруска с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, расположены на наклонных плоскостях (рисунок 5.8). Определить ускорения брусков и силу натяжения нити, если коэффициенты трения брусков о поверхности наклонных плоскостей равны μ_1 и μ_2. Массой блока и трением в нем пренебречь.

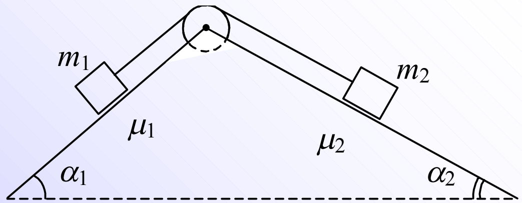


Рисунок 5.8

Решение. Направления сил трения брусков о наклонную плоскость здесь не заданы. Но вполне очевидно, что при наличии трения бруски будут либо покоиться, либо двигаться в ту же сторону, что и при отсутствии трения. Силы, действующие в отсутствие трения, показаны на рисунке 5.9. Элементарный анализ показывает, что при $m_1 \sin\alpha_1 > m_2 \sin\alpha_2$ бруски движутся с ускорением влево, при $m_1 \sin\alpha_1 < m_2 \sin\alpha_2$ – с ускорением вправо, при $m_1 \sin\alpha_1 = m_2 \sin\alpha_2$ ускорения брусков равны нулю.

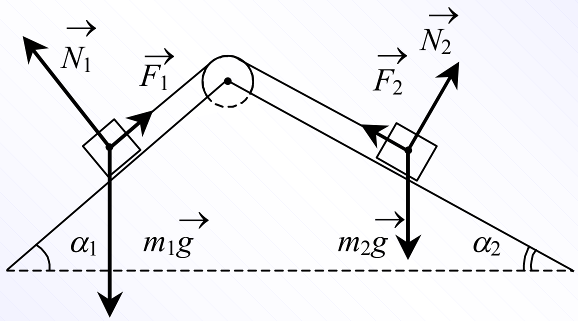


Рисунок 5.9

Пусть $m_1 \sin\alpha_1 > m_2 \sin\alpha_2$. Предположим, что бруски движутся и при наличии трения. Силы, действующие в системе, показаны на рисунке 5.10; $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы трения.

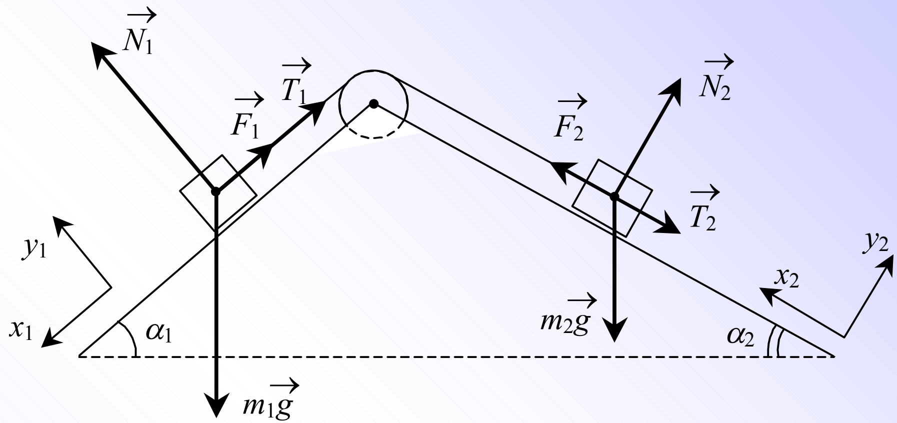


Рисунок 5.10

Уравнения движения брусков записываются в виде: $m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{T}_1$ и $m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{T}_2$. При этом $a_1 = a_2 \equiv a$, $F_1 = F_2 \equiv F$. Вводя для каждой наклонной плоскости свою систему координат (рисунок 5.10) и проецируя уравнения движения на соответствующие координатные оси, получаем:

$$m_1 a = m_1 g \cdot \sin\alpha_1 - F - T_1,\; N_1 - m_1 g \cdot \cos\alpha_1 = 0;$$
$$m_2 a = F - m_2 g \cdot \sin\alpha_2 - T_2,\; N_2 - m_2 g \cdot \cos\alpha_2 = 0.$$

При движении брусков для модулей сил трения скольжения запишем: $T_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cdot \cos\alpha_1$ и $T_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cdot \cos\alpha_2$. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \cdot \sin\alpha_1 - \mu_1 m_1 g \cdot \cos\alpha_1 - F, \\ m_2 a = F - m_2 g \cdot \sin\alpha_2 - \mu_2 m_2 g \cdot \cos\alpha_2, \end{cases}$$

решая которую относительно a, находим:

$$a = \frac{m_1 g \cdot \sin\alpha_1 - \mu_1 m_1 g \cdot \cos\alpha_1 - m_2 g \cdot \sin\alpha_2 - \mu_2 m_2 g \cdot \cos\alpha_2}{m_1 + m_2}. \qquad (*)$$

Если после подстановки численных значений всех величин получится $a > 0$, то бруски действительно движутся и при наличии трения, причем модуль их ускорения дается формулой (*). Сила натяжения нити в этом случае

$$F = \frac{m_1 m_2 (\sin\alpha_1 - \mu_1 \cdot \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \mu_2 \cdot \cos\alpha_2)}{m_1 + m_2} g. \qquad (**)$$

Несложно убедиться, что это выражение дает правильный результат в предельном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi / 2$, который соответствует грузам, подвешенным на нити, перекинутой через неподвижный блок (машина Атвуда).

Если окажется, что $a<0$, то это означает, что бруски в действительности неподвижны: $a_1=a_2=0$. Силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ в этом случае – силы трения покоя, но их модули $T_1<\mu_1 N_1$ и $T_2<\mu_2 N_2$. Более того, при $m_1 \sin\alpha_1 > m_2 \sin\alpha_2$ направление силы $\vec{T}_1$ обязательно соответствует рисунку 5.10, а направление силы $\vec{T}_2$ может как совпадать, так и быть противоположным показанному на рисунке 5.10.

Даже если направление силы $\vec{T}_2$ известно (например, соответствует рисунку 5.10), то при неподвижных грузах однозначно определить силу натяжения нити невозможно. В самом деле, расчетная система двух уравнений

$$\begin{cases} m_1 g\cdot\sin\alpha_1 - T_1 - F = 0, \\ F - m_2 g\cdot\sin\alpha_2 - T_2 = 0 \end{cases}$$

содержит три неизвестных. Поскольку значения модулей сил трения лежат в интервалах $0 \le T_1 \le \mu_1 N_1$ и $0 \le T_2 \le \mu_2 N_2$, то можно только указать интервал возможных значений силы натяжения нити. Однозначно же определить силу натяжения нити при неподвижных грузах можно лишь в том случае, когда формула (∗) дает $a=0$. При этом значение F определяется формулой (∗∗), и происходит это потому, что ускорение a обращается в нуль, когда модули сил трения покоя достигают своих максимальных значений.

Задача 5.5. На неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежат одна на другой две доски (рисунок 5.11). Можно ли подобрать такие значения масс досок m_1 и m_2, а также коэффициентов трения досок о плоскость μ_1 и друг о друга μ_2, чтобы нижняя доска выскользнула из-под верхней? В начальный момент доски покоятся.

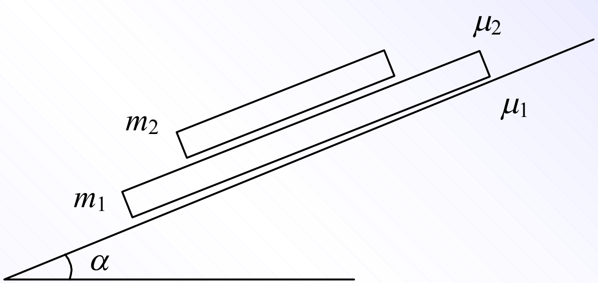


Рисунок 5.11

Решение. Направления сил трения досок друг от друга зависят от их относительной скорости, т. е. от того, ускорение соскальзывания которой из досок больше. В данной задаче требуется выяснить, возможно ли движение нижней доски с большим ускорением. Предположим, что это возможно; все параметры выбраны таким образом, что $a_1 > a_2$. Тогда направления всех сил определяются однозначно и указаны на рисунке 5.12.

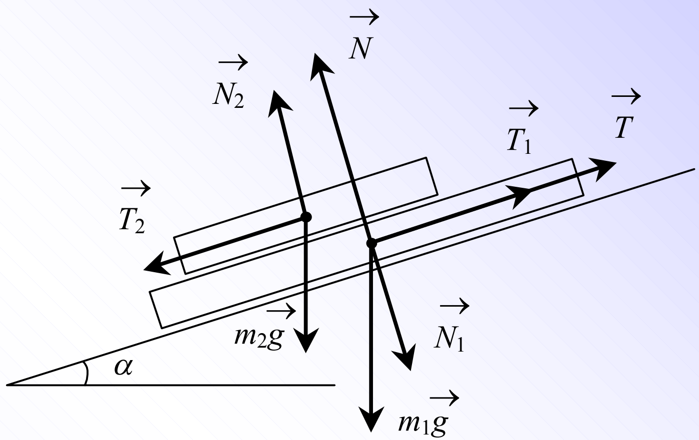


Рисунок 5.12

Здесь $\vec{T}$ – сила трения нижней доски о наклонную плоскость, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы трения досок друг о друга $(\vec{T}_1 = -\vec{T}_2)$, $\vec{N}$ – нормальная сила реакции наклонной плоскости, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные к поверхностям силы взаимодействия досок $(\vec{N}_1 = -\vec{N}_2)$. Составляя уравнения движения досок и проецируя их на направление вдоль наклонной плоскости, имеем: $m_1 a_1 = m_1 g \cdot \sin\alpha - T - T_1$, $m_2 a_2 = m_2 g \cdot \sin\alpha + T_2$. Отсюда видно, что при любых массах и коэффициентах трения $a_1 < g \cdot \sin\alpha$, $a_2 > g \cdot \sin\alpha$, т. е. $a_1 < a_2$. Итак, имеет место противоречие: предполагая изначально $a_1 > a_2$, из уравнений динамики мы получили, что $a_1 < a_2$. Это означает, что нижняя доска не может выскользнуть из-под верхней.

Задача 5.6. Лента транспортера движется горизонтально с постоянной скоростью v_0. На ленту положили кирпич с массой m. Какую горизонтальную силу необходимо приложить к кирпичу, чтобы он двигался перпендикулярно направлению вектора $\vec{v}_0$ со скоростью $\vec{v}_1$ в неподвижной системе отсчета (рисунок 5.13)? Коэффициент трения кирпича о ленту μ.

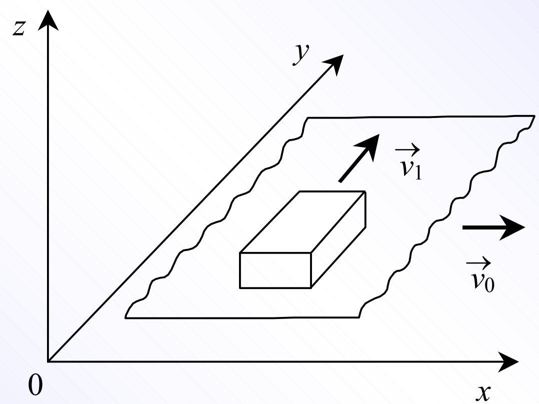


Рисунок 5.13

Решение. Скорость кирпича относительно ленты транспортера $\vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ (рисунок 5.14). Т. к. скорости $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$ постоянны, то и скорость $\vec{v}_{10}$ постоянная, т. е. приложенная сила $\vec{F}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе трения $\vec{T}$, препятствующей относительному движению. Тогда $F = \left|\vec{T}\right| = \mu mg$ и $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{v_1}{v_0}$.

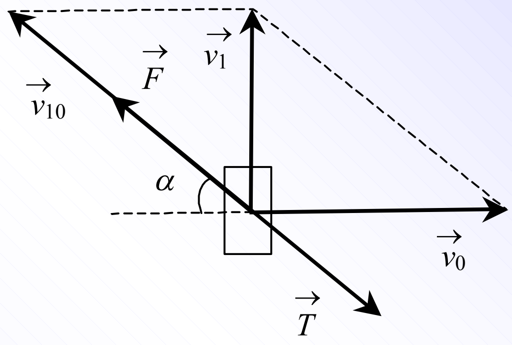


Рисунок 5.14

Тема 6.
Силы в природе

6.1. Сила тяготения, закон тяготения Ньютона

Всякое тело, обладающее массой, создает вокруг себя гравитационное поле (поле тяготения) – особую материальную среду, которая действует на помещенные в нее материальные объекты, притягивая их к источнику поля. Для любого поля характерна способность передачи взаимодействий от одних тел к другим с конечной скоростью. На тело со стороны другого тела действует гравитационная сила (сила тяготения).

Закон всемирного тяготения Ньютона: две материальные точки притягиваются с стой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними;

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad \vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (6.1)$$

где G – гравитационная постоянная (постоянная тяготения), m_1 и m_2 – массы материальных точек, $\vec{r}$ – радиус-вектор одной из них относительно другой. Формулы (6.1) справедливы и для тел со сферически симметричным распределением масс; в этом случае r – расстояние между их центрами. $G = F$ при $m_1 = m_2 = 1$ кг, $r = 1$ м – постоянная тяготения численно равна силе притяжения двух материальных точек единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга. Ее размерность: $[G] = [\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2]$.

Опыты Кавендиша, Жолли и др. позволили определить численное значение постоянной тяготения: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Это постоянная, значение которой одинаково (в рамках классических представлений) в разных точках пространства.

При движении тела по окружности вокруг Земли сила тяготения $F = G\dfrac{mM}{(R+h)^2}$ сообщает ему центростремительное ускорение $a = \dfrac{v^2}{R+h}$. Тогда $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$. Это скорость движения спутника Земли на высоте h по окружности; M и R – масса и радиус Земли. Все предметы в кабине спутника движутся относительно Земли практически с такой же скоростью и находятся в состоянии невесомости, т. к. другие силы, кроме силы тяготения к Земле, пренебрежимо малы. Если $h << R$, то $v = \sqrt{GM/R}$. На поверхности Земли $mg = GmM/R^2$ и

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (6.2)$$

Это первая космическая скорость, с которой вблизи Земли по круговой орбите движется искусственный спутник. Численное значение этой скорости: $v = 7{,}9$ км/с.

6.2. Силы упругости, закон Гука

Деформация – *изменение формы и/или объема тела под действием внешних* (*деформирующих*) *сил.* В деформированном теле возникают силы упругости, препятствующие деформации. Их происхождение – межатомное (межмолекулярное) взаимодействие. Деформация увеличивается до тех пор, пока деформирующие силы не уравновесятся силами упругости. Различают упругие и пластичные деформации; первые исчезают после прекращения действия деформирующих сил.

Усилие – внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела. Нормальная (перпендикулярная поверхности) составляющая усилия, направленная к телу – давление. Единица измерения усилия – ньютон на метр квадратный [Н/м^2]. Усилие обычно обозначают буквой p, как и давление. Внутренняя сила, действующая на единицу площади сечения деформированного тела – напряжение σ. Размерность: $[\sigma]=[\text{Н/м}^2]$.

Основные *типы деформаций: линейные* (растяжение, сжатие), *изгиб, сдвиг, кручение.* Все малые деформации, в конечном счете, сводятся к линейным.

Рассмотрим удлинение тела под действием силы F (рисунок 6.1). Абсолютная линейная деформация – величина, измеряемая разностью конечного и начального размеров тела:

$$\Delta l = l - l_0. \qquad (6.3)$$

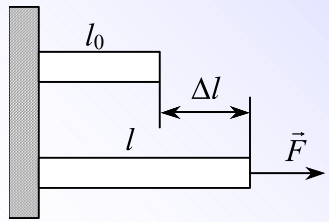


Рисунок 6.1

При растяжении $\Delta l > 0$, при сжатии $\Delta l < 0$. Относительная деформация – величина, определяемая отношением абсолютной деформации к первоначальному размеру тела:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0. \qquad (6.4)$$

ε – безразмерная величина, зависящая, как и Δl, от усилия p, приложенного к телу. В результате деформации в теле возникает *сила упругости* F_y, направленная противоположно деформирующей силе F, т. е. в любом сечении деформированного тела возникает напряжение σ, зависящее от ε и равное по модулю усилию p. На рисунке 6.2 приведена экспериментальная зависимость напряжения от относительной деформации (вид аналогичен для большинства твердых тел).

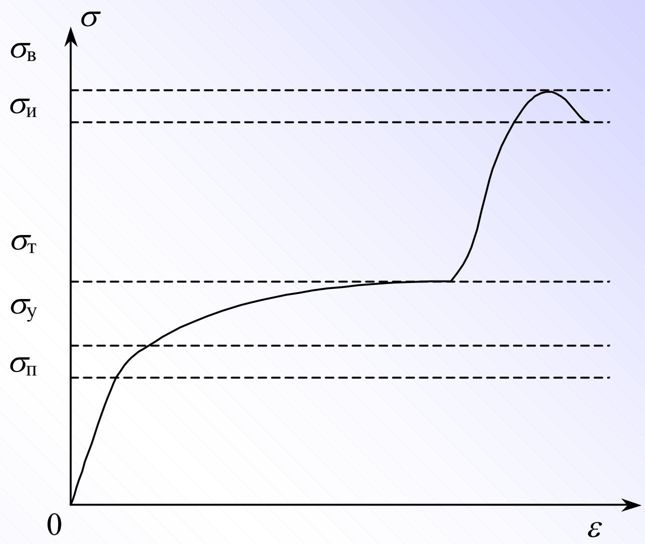


Рисунок 6.2

Обозначениям на рисунке 6.2 соответствуют: $\sigma_в$ – предел временного сопротивления разрыву (предел прочности). $\sigma_и$ – предел истинного сопротивления разрыву, σ_m – предел текучести, σ_y – предел упругости, σ_n – предел пропорциональности. Для многих тел $\sigma_y \approx \sigma_n$.

Закон Гука: напряжение, возникающее в упруго деформированном теле, прямо пропорционально величине относительной деформации:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (6.5)$$

Здесь E – модуль Юнга – постоянная, зависящая от материала тела и его физического состояния. $E=\sigma$ при $\varepsilon=1$, т. е. при $l-l_0=l_0$, $l=2l_0$ – модуль Юнга равен напряжению в теле, линейные размеры которого увеличены вдвое (при условии упругости деформации).

Другая формулировка закона Гука: в пределах упругости относительная деформация прямо пропорциональна приложенному усилию:

$$\varepsilon=\alpha p;\ \ \alpha=1/E. \tag{6.6}$$

Возможна и *следующая формулировка закона Гука*: при малых деформациях сила упругости прямо пропорциональна деформации и направлена в сторону, противоположную деформации,

$$F_y=-kx, \tag{6.7}$$

где x – величина деформации (смещение), k – *коэффициент упругости* (для пружины – коэффициент жесткости или жесткость).

6.3. Законы гидростатики

Давление – сила, действующая нормально на единицу площади поверхности тела. В общем случае давление $p = \frac{dF}{dS}$. Если сила равномерно распределена по площадке S, то $p = F / S$. Единица измерения давления – паскаль [Па]; 1 Па = 1 Н/м^2.

Закон Паскаля: *давление, производимое на жидкость (газ), передается жидкостью {газом) во всех направлениях без изменения. Другими словами, в данной точке жидкость давит одинаково во все стороны..*

Сила давления столба жидкости плотностью ρ на дно сосуда (вес столба) равна (рисунок 6.3):

$$P = mg = \rho V g = \rho S g h; \qquad (6.8)$$

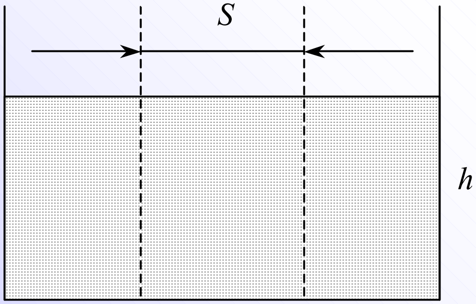


Рисунок 6.3

Давление

$$p = P / S = \rho g h. \qquad (6.9)$$

Это так называемое гидростатическое давление, которое, в соответствии с законом Паскаля, одинаково во всех направлениях на данной глубине h , а также одинаково во всех точках жидкости на одинаковой глубине h.

В *сообщающихся сосудах* однородная жидкость устанавливается на одном уровне – закон сообщающихся сосудов. На одном и том же уровне в сообщающихся сосудах давления однородной жидкости одинаковы. Это свойство лежит в основе конструкции гидравлического пресса (рисунок 6.4). Если на поршень площадью S_1, действует сила F_1, то давление под поршнем $p = F_1 / S_1$. Это давление передается жидкостью к поршню площадью S_2, т. е. на второй поршень действует сила $F_2 = pS_2 = F_1 S_2 / S_1$ – использование гидравлического пресса дает выигрыш в силе в S_2 / S_1 раз.

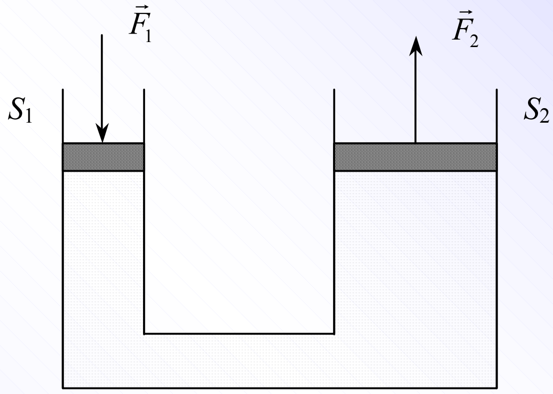


Рисунок 6.4

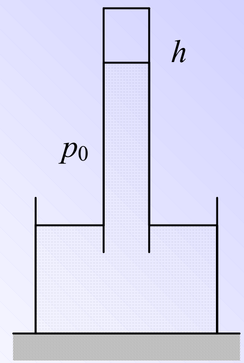


Рисунок 6.5

Ученики Галилея *Торричелли и Вивиани* экспериментально доказали существование *атмосферного давления*. Суть опыта: запаянную с одного конца и заполненную ртутью стеклянную трубку опрокидывают в чашку со ртутью; при этом часть ртути вытекает из трубки, а часть остается (рисунок 6.5). Если бы давление воздуха не было, то вся ртуть вылилась бы в чашку. Давление ρgh столбика ртути уравновешивается атмосферным давлением p_0 в соответствии с законом сообщающихся сосудов, В опыте Торричелли и Вивиани было $h = 760$ мм (в переводе на современные единицы длины); давление p_0, соответствующее давлению такого столбика ртути, называют *нормальным атмосферным давлением:* $p_0 = 760$ мм. рт. ст. = 1 атм. – *физическая атмосфера*. Миллиметр ртутного столба и *физическая атмосфера* – внесистемные единицы давления; 1 мм. рт. ст. = 133,3 Па.

Сосуд и трубка с ртутью могут служить для измерения атмосферного давления и представляют собой простейший ртутный барометр. Анероид (металлический барометр) состоит из жесткой коробки, одна из стенок которой – пружинная мембрана; воздух изнутри откачан. Чем больше атмосферное давление, тем больше прогибается внутрь коробки мембрана. Связанная с мембраной стрелка и шкала служат для отсчета давления. Анероид компактнее и прочнее ртутного барометра, но менее точен. В отличие от барометра, прибор, называемый манометром, показывает величину разности между давлением внутри какого-либо сосуда и атмосферным давлением.

Давление воздуха уменьшается с увеличением высоты подъема над землей. Это обусловлено, во-первых, уменьшением высоты воздушного столба, а во-вторых, уменьшением плотности воздуха по мере подъема.

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости (газа), вытесненной телом. *Например, для цилиндрического тела* (рисунок 6.6) *выталкивающая сила (*сила Архимеда*) равна:*

$$F_a = F_2 - F_1 = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g h S = \rho g V, \qquad (6.10)$$

где ρ – плотность жидкости, V – объем вытесненной телом жидкости. Сила Архимеда приложена к центру тяжести той части жидкости (газа), которую вытесняет и замещает собой тело. Это точка называется центром плавучести. *Если тело* неоднородное, а жидкость однородная, то центр тяжести тела и центр плавучести могут не совпадать.

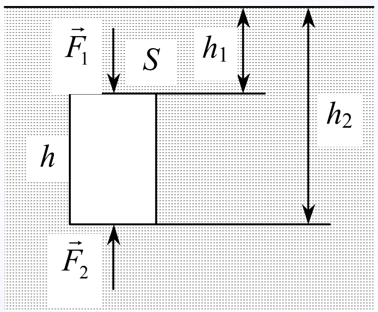


Рисунок 6.6

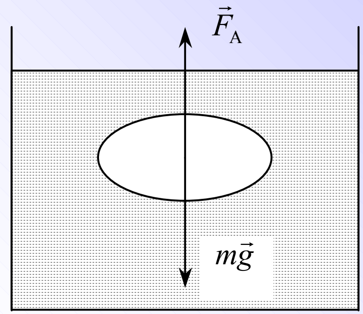


Рисунок 6.7

На тело, погруженное в жидкость (газ), действуют силы тяжести и Архимеда (рисунок 6.7). Тело всплывает, если $F_A > mg$, т. е. $\rho g V = \rho_Т g V$; $\rho > \rho_Т$ – плотность жидкости больше плотности тела. Это продолжается до тех пор, пока часть тела не окажется над поверхностью жидкости; при этом объем его погруженной в жидкость части уменьшается, и сила Архимеда уравновесится силой тяжести. Тело тонет, если $F_A < mg$; $\rho < \rho_Т$. Тело находится в безразличном равновесии в жидкости (не всплывает и не тонет), если $F_A = mg$; $\rho = \rho_Т$.

Для покоящейся жидкости применим *принцип Стевина*, согласно которому любую часть жидкости можно заменить твердым телом с теми же плотностью и объемом, при этом геометрическая сумма сил, действующих на это тело равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: любую часть однородного тела, находящегося в безразличном равновесии внутри жидкости, можно заменить жидкостью с теми же плотностью и объемом.

Условия плавания тел необходимо учитывать при кораблестроении. Воздухоплавание на «аппаратах легче воздуха» (воздушные шары, дирижабли) также основано на использовании выталкивающей силы. Для этого внутри оболочки шара газ (воздух или другой наполнитель) должен иметь меньшую плотность, чем окружающий воздух, чтобы выполнялось условие $F_A \geq mg$.

6.4. Примеры решения задач по теме 6

Задача 6.1. На какой высоте ускорение свободного падения в 4 раза меньше, чем на поверхности Земли? Радиус Земли R.

Решение. Из условия равенства силы тяжести и силы тяготения, запишем: $mg(0) = GmM / R^2$ и $mg(h) = GmM / (R+h)^2$. Согласно условию задачи $g(0) / g(h) = (R+h)^2 / R^2 = 4$. Отсюда находим $h = R$.

Задача 6.2. На каком расстоянии от поверхности Земли движется ее стационарный искусственный спутник, находящийся все время над одним и тем же пунктом экватора?

Решение. Период обращения стационарного спутника равен периоду вращения Земли: T = 24 ч = $8{,}64 \cdot 10^4$ с. При движении по круговой орбите центростремительное ускорение спутника: $a = \omega^2 (R+h) = 4\pi^2 (R+h) / T^2$ где ω – угловая скорость вращения Земли, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, h – искомая высота. При этом $ma = GMm / (R+h)^2$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – постоянная тяготения. На поверхности Земли $mg = GMm / R^2$, поэтому $a = gR^2 / (R+h)^2$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Тогда $4\pi^2 (R+h) / T^2 = gR^2 / (R+h)^z$, отсюда

$h = \sqrt[3]{gR^2T^2/(4\pi^2)} - R$. Подставляя численные значения, получаем $h \approx 3{,}5 \cdot 10^7$ м.

Задача 6.3. Вертикальная пружина соединяет два груза. Масса нижнего m_1 = 3 кг, масса верхнего m_2 = 2 кг. Если система подвешена за верхний груз, то длина пружины l_1 = 10 см. Если система стоит на полу, то длина пружины l_2 = 4 см. Найти длину нерастянутой пружины.

Решение. Пусть искомая длина l_0, коэффициент жесткости k. По закону Гука в первом случае $m_1 g = k(l_1 - l_0)$; во втором случае $m_2 g = k(l_0 - l_2)$; g – ускорение свободного падения. Отсюда находим: $m_2/m_1 = (l_0 - l_2)/(l_1 - l_0)$; $l_0 = (m_1 l_2 + m_2 l_1)/(m_1 + m_2)$. Подставляя численные значения, получаем $l_0 = 6{,}4$ см.

Задача 6.4. В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, притянутая нитью ко дну. Когда лед растаял, уровень воды изменился на Δh. Какова была сила натяжения нити? Площадь дна стакана S.

Решение. Сила давления на дно стакана при таянии льда не меняется, поэтому $\rho g h_1 S - F = \rho g h_2 S$, где ρ – плотность воды, h_1 и h_2 – высоты

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

Во весь экран

Закрыть

начального и конечного уровней воды. Тогда искомая сила $F = \rho g\left(h_1 - h_2\right)S = \rho gS \cdot \Delta h$.

Задача 6.5. Шар радиусом R плавает в жидкости, практически полностью погрузившись в нее. Найдите силу давления жидкости на нижнюю половину поверхности шара. Плотность жидкости ρ.

Решение. Рассечем мысленно шар на две половины: верхнюю и нижнюю (рисунок 6.8). Заменим верхнюю половину жидкостью (шар плавает, его плотность равна плотности жидкости). Сила Архимеда, действующая на нижнюю половину, равна по определению $F_A = \rho gV = \rho g \cdot 2\pi R^3 / 3$. С другой стороны, сила Архимеда равна разности сил давления на нижнюю и верхнюю поверхности полушария $F_A = F_\uparrow - F_\downarrow$. Сила давления на верхнюю поверхность $F_\downarrow = PS = \rho gR\pi R^2$. Тогда искомая сила давления на нижнюю поверхность шара $F_\uparrow = F_A + F_\downarrow = 5\pi\rho gR^3 / 3$.

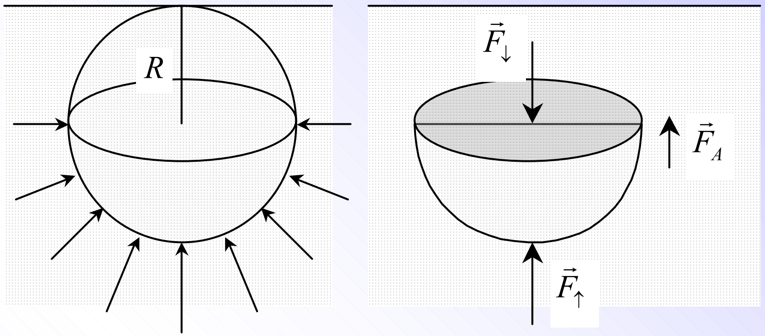


Рисунок 6.8

Тема 7.
Законы сохранения в механике

7.1. Теорема об изменении импульса и закон сохранения импульса

Согласно второму закону Ньютона производная импульса материальной точки по времени равна силе, действующей на материальную точку в ИСО:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{7.1}$$

Отсюда элементарное изменение импульса частицы равно элементарному импульсу действующей на частицу силы – теорема об изменении импульса для материальной точки:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \tag{7.2}$$

При $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$ из (7.2) получим:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t, \tag{7.3}$$

где $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ – изменение импульса тела, $\Delta t = t_2 - t_1$ – промежуток времени, в течение которого произошло это изменение, $\vec{F}\Delta t$ – импульс силы.

Если $\vec{F} = 0$, то $d\vec{p} = 0$ и $\vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}$ – в инерциальной системе отсчета импульс тела сохраняется, если равнодействующая (геометрическая сумма) приложенных к частице сил равна нулю.

Рассмотрим систему из n материальных точек (частиц). На частицу системы действуют внутренние (со стороны других частицы) и внешние (со стороны тел, не входящих в систему) силы. Для i-ой частицы можно записать:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \ldots + \vec{F}_{i-1,i} + \vec{F}_{i+1,i} + \ldots + \vec{F}_{n,i} + \vec{F}_i, \qquad (7.4)$$

где $\vec{F}_{j,i}$ – внутренние силы, $\vec{F}_i$ – равнодействующая внешних сил. Суммируя выражения (7.4) для всех частиц системы с учетом того, что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$, получим:

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} d\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i dt = \vec{F}dt, \qquad (7.5)$$

где $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ – импульс системы, $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ – *главный вектор* (геометрическая сумма) *внешних сил системы*.

Итак, элементарное изменение импульса системы частиц равно элементарному импульсу главного вектора внешних сил – теорема об изменении *импульса механической системы*.

Если $\vec{F}=0$, то $d\vec{p}=0$ и $\vec{p}=\overrightarrow{\text{const}}$ – *суммарный импульс системы тел сохраняется, если* главный вектор *внешних сил, действующих на тела системы, равен нулю.* Это закон сохранения импульса, справедливый для системы с любым числом частиц. В частности, он выполняется для *замкнутой системы* тел, т. е. для системы, на тела которой не действуют внешние силы.

Одно из проявлений закона сохранения импульса – реактивное движение, например, движение ракеты. В отсутствие внешних сил (вдали от Земли и других космических тел) ракета представляет собой замкнутую систему, т. е. ее суммарный импульс в заданной ИСО сохраняется. Если в начальный момент относительно этой ИСО ракета неподвижна, а затем из сопла ракеты практически мгновенно выбрасывается масса m_1 газа со скоростью $\vec{v}_1$, то ракета массой m приобретает скорость $\vec{v}$ в соответствии с законом сохранения импульса: $m_1\vec{v}_1+m\vec{v}=0$, Т. к. $\vec{v}_1\uparrow\downarrow\vec{v}$, то $m_1v_1-mv=0$ и $v=m_1v_1/m$ – скорость ракеты тем больше, чем больше скорость газа и чем больше отношение массы газа к массе ракеты.

В действительности же, мгновенный выброс газа из ракеты нереален: с течением времени масса ракеты с топливом меняется постепенно. Формулу, позволяющую рассчитывать скорость ракеты при известном запасе топлива, получил *Циолковский*. Он разработал также принцип конструкции многоступенчатой ракеты и предложил использовать в качестве экономичного ракетного топлива водородно-кислородную смесь, писал о возможности и целесообразности создания орбитальных космических комплексов. Идеи Циолковского нашли практическое осуществление.

7.2. Механическая работа, мощность

Элементарная механическая работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ – величина, определяемая скалярным произведением векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr \cdot \cos\alpha = F_{dr}dr. \qquad (7.6)$$

Здесь α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, F_{dr} – проекция вектора $\vec{F}$ на направление $d\vec{r}$. Т. к. модуль элементарного перемещения $d\vec{r}$ равен элементарному пути ds, то

$$dA = F_{ds}ds. \qquad (7.7)$$

Если $F = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то механическая работа

$$A = Fs \cdot \cos\alpha. \qquad (7.8)$$

Легко видеть, что $A = 0$ при: 1) $F = 0$; 2) $s = 0$; 3) $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \pi / 2$.

Единица измерения работы – джоуль [Дж]. 1 Дж – работа, производимая силой 1 Н при перемещении тела на 1 м в направлении действия силы; 1 Дж = 1 Н·м.

Примеры вычисления работы:

а) работа силы тяжести при перемещении тела из положения 1 в положение 2 (рисунок 7.1):

$$A_{12} = mgl \cdot \cos\alpha = mg(h_1 - h_2); \qquad (7.9)$$

при этом работа не зависит от формы траектории:

$$A_{132} = A_{13} + A_{32} = mg(h_1 - h_2) = A_{12}; \qquad (7.10)$$

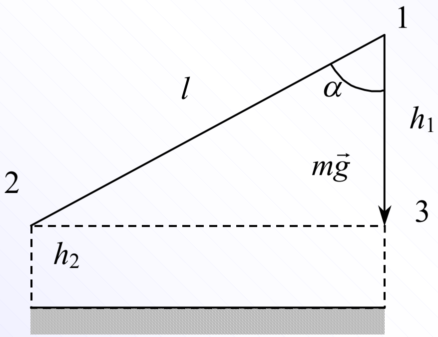


Рисунок 7.1

б) работа силы упругости:

$$F = -kx; \quad A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{7.11}$$

Мощность – физическая величина, характеризующая быстроту изменения (совершения) работы (работа в единицу времени):

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \tag{7.12}$$

Если работа с течением времени меняется равномерно, то

$$P = A / t. \tag{7.13}$$

Единица измерения мощности – ватт [Вт]; 1 Вт = 1 Дж/с.

7.3. Кинетическая и потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии

Механическая энергия – физическая величина, характеризующая способность тела (или системы тел) совершать механическую работу. Если какое-либо состояние тела характеризуется величиной E_1, а другое состояние – величиной E_2, и работа по переходу тела из одного состояния в другое определяется разностью этих величин, то величина E имеет смысл энергии.

Пусть сила, действующая на тело, направлена по касательной к его траектории в любой точке, т. е. $\alpha = 0$. Тогда

$$dA = Fds = \frac{dp}{dt}ds = mv \cdot dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT; \qquad (7.14)$$

$$A_{12} = T_2 - T_1, \qquad (7.15)$$

где $T = mv^2/2$ – кинетическая энергия, которой обладает тело (материальная точка), находящееся в движении.

Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, т. к. скорость в разных системах разная. Механическая работа равна изменению кинетической энергии – *теорема об изменении кинетической энергии.*

Если в каждой точке пространства на частицу действует сила, то говорят, что частица находится в силовом поле. При этом может оказаться так, что работа сил поля по перемещению тела из одного положения в другое не зависит от формы траектории, а определяется координатами тела в начальном и конечном положениях. Поля (и силы), обладающие таким свойством, называют консервативными. Пример – однородное поле силы тяжести (в каждой точке величина и направление силы, действующей на одно и то же тело, одинаковы).

Любой точке консервативного поля можно поставить в соответствие такое значение некоторой функции координат $U(x, y, z)$, что разность значений U в первой и второй точках равна работе по перемещению тела из первой точки во вторую: $A_{12} = U_1 - U_2$. В этом случае функция имеет смысл энергии и называется потенциальной энергией. Значение U определяется с точностью до постоянной, связанной с выбором нулевого состояния, для которого принимается $U = 0$. Разность потенциальных энергий ΔU от выбора нулевого состояния не зависит. Итак, для консервативных сил

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U. \tag{7.16}$$

Для механической системы кинетическая энергия определяется суммой кинетических энергий тел, образующих систему: $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

Изменение кинетической энергии системы равно работе внешних и внутренних сил, действующих на тела системы: $\Delta T = A_{12}$. Аналогично определяется и потенциальная энергия системы тел; ее уменьшение равно работе консервативных сил, действующих на тела системы: $A_{12}^{конс.} = -\Delta U$.

Рассмотрим замкнутую консервативную систему, на тела которой действуют только внутренние консервативные силы. Работа этих сил:

$$A_{12}^{конс.} = U_1 - U_2 = T_2 - T_1, \tag{7.17}$$

где T и U кинетическая и потенциальная энергии системы. Тогда

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \tag{7.18}$$

Величина, определяемая суммой кинетической и потенциальной энергий тела (системы тел) в данном состоянии, называется полной механической энергией *тела* (системы тел): $E = T + U$. Из (7.18) следует, что $E_1 = E_2$ или $E = \text{const}$ – полная механическая энергия неизменна. Закон сохранения механической энергии: *полная механическая энергия замкнутой консервативной системы тел сохраняется, т. е. остается неизменной при любых движениях тел системы.*

При наличии неконсервативных сил $T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{неконс.}$. Отсюда $\Delta E = E_2 - E_1 = A_{12}^{неконс.}$ – изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил, действующих на ее тела.

Каждый вид энергии может превратиться полностью в любой другой вид энергии. Однако во всех реальных энергетических машинах, кроме преобразований энергии, для которых эти машины применяются, происходят потери энергии.

Чем меньше потери энергии, тем более совершенная машина. Степень совершенства машины, механизма характеризуется коэффициентом полезного действия (КПД).

Коэффициентом полезного действия машины называется отношение полезно используемой энергии к затраченной энергии, подводимой к данной машине:

$$\eta = A_{полез.} / A_{затрач.} \qquad (7.19)$$

7.4. Условия равновесия тел

Основным признаком взаимодействия тел в динамике является возникновение ускорений. Однако часто бывает нужно знать, при каких условиях тело, на которое действует несколько различных сил, не движется с ускорением, а находится в состоянии равновесия. Под равновесием понимают состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения или равномерного вращения.

Раздел механики, изучающий усло*вия* равновесия сил, называется *статикой*.

Различают следующие виды равновесия: *неустойчивое, устойчивое и безразличное* (рисунок 7.2). *Условием равнове*сия является экстремальное значение потенциальной энергии: максимальное для неустойчивого равновесия и минимальное для устойчивого.

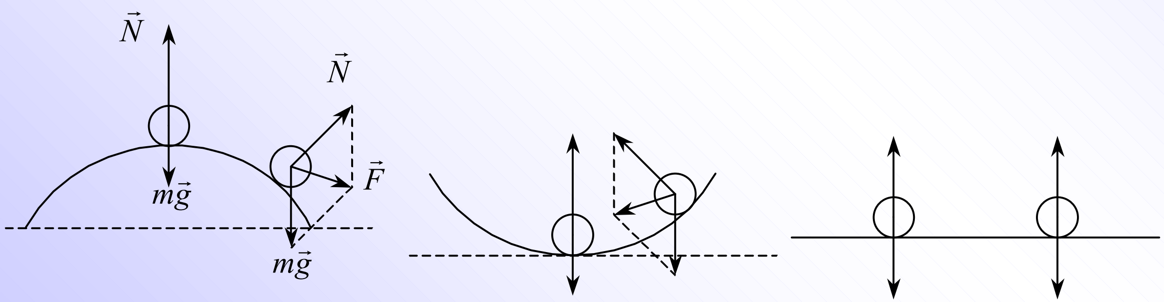


Рисунок 7.2

Для равновесия тела необходимо в общем случае выполнение двух условий:

1) геометрическая сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \tag{7.20}$$

где n – число сил;

2) алгебраическая сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0, \tag{7.21}$$

где n – число моментов сил.

Момент силы M *относительно оси* определяется произведением силы F на плечо l (*плечо* – перпендикуляр, опущенный от оси вращения на линию действия силы):

$$M = F\,l. \qquad (7.21)$$

При суммировании учитывается, что моменты сил, вращающие тело по и против часовой стрелки имеют разные знаки.

Если тело не вращается, то для равновесия достаточно выполнения первого условия.

При выполнении общего условия равновесия тело необязательно находится в покое. Согласно второму закону Ньютона при равенстве нулю равнодействующей всех сил ускорение тела равно нулю и оно может находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно.

Равенство нулю алгебраической суммы моментов сил не означает также, что при этом тело обязательно находится в покое – возможно равномерное вращение.

7.5. Примеры решения задач по теме 7

Задача 7.1. Две одинаковые лодки с одинаковыми грузами плывут навстречу параллельными курсами с одинаковыми скоростями v. Когда лодки поравнялись, произошел одновременный обмен грузами. Найти скорости лодок после этого обмена. Масса лодки M, масса груза m.

Решение. Слово «одновременный» означает, что в тот момент, когда из одной лодки выбрасывается груз, другой груз попадает в эту же лодку (одновременное нахождение одного и того же груза в разных лодках физически невозможно). Таким образом, достаточно рассматривать одну лодку и взаимодействующие с ней два груза. До обмена лодка и груз в ней двигались со скоростью v, другой груз двигался со скоростью v навстречу. После обмена лодка с попавшим в нее грузом имеют искомую скорость u, а выброшенный груз движется в ту же сторону со скоростью v. По закону сохранения импульса, в проекциях на направление движения лодки, $(M+m)v - mv = (M+m)u + mv$. Отсюда $u = v(M-m)/(M+m)$.

Задача 7.2. Резиновый мяч с массой m летит горизонтально и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время Δt мяч сжимается на Δl, такое же время затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча при отскоке. Найти среднюю силу, действующую на стенку за время удара.

Решение. В системе отсчета, связанной с летящим к стенке мячом, изменение импульса мяча $2mv = F \cdot 2\Delta t$, изменение кинетической энергии мяча $m(2v)^2/2 = F \cdot 2\Delta l$. Тогда искомая сила $F = m \cdot \Delta l / (\Delta t)^2$.

Примечание. Если решать задачу в системе отсчета, связанной со стенкой, то необходимо учесть, что величина сжатия мяча Δl не равна смещению его центра масс за то же время.

Задача 7.3. Санки скатываются с ледяной горы высотой h. На каком расстоянии по горизонтали, считая от вершины горы, остановятся санки, если коэффициент трения на склоне и на горизонтальном участке пути равен μ?

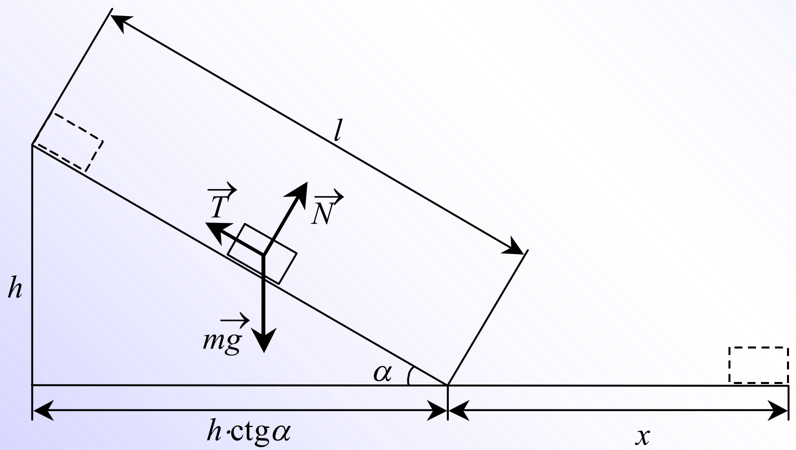


Рисунок 7.3

Начало
Содержание
Страница 135 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

Решение. Проведем сначала динамическое решение. Под действием сил, указанных на рисунке 7.3, санки при соскальзывании с горы имеют ускорение $a = g \cdot \sin\alpha - \mu g \cdot \cos\alpha$. У подножия горы их скорость $V = \sqrt{2al} = \sqrt{2g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh(1 - \mu \cdot \mathrm{ctg}\alpha)}$. Далее санки движутся равнозамедленно, модуль их ускорения μg, а путь до остановки $x = \dfrac{V^2}{2\mu g} = \dfrac{h}{\mu} - h \cdot \mathrm{ctg}\alpha$. Расстояние по горизонтали от вершины горы до места остановки $s = x + h \cdot \mathrm{ctg}\alpha = h / \mu$.

К этому же результату можно прийти иначе, если воспользоваться тем, что изменение кинетической энергии тела равно работе всех действующих на него сил. В начальном и конечном положениях санки покоятся, следовательно, полное изменение кинетической энергии равно нулю. Работа силы тяжести $A_1 = mg\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgh$, работа силы трения $A_2 = -\mu mg \cdot \cos\alpha \cdot l - \mu mgx = -\mu mg(h \cdot ctg\alpha + x)$. Из условия $A_1 + A_2 = 0$ находим $x = \dfrac{h}{\mu} - h \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ и $s = h / \mu$.

Наконец, можно учесть, что изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил, т. е. в нашем случае убыль потенциальной энергии санок $(-mgh)$ равна работе сил трения A_2. Отсюда получим тот же результат. Очевидно, последний вариант решения наиболее компактный.

Задача 7.4. Массивный груз малых размеров, подвешенный на легкой нерастяжимой длинной нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найти максимальный угол отклонения нити от вертикали, если ускорения груза в крайнем и нижнем положениях равны по модулю. Сопротивлением движению пренебречь.

Решение. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции нити $\vec{N}$ (в разных точках различная). В крайнем положении $ma_1 = mg \cdot \sin\varphi$ (рисунок 7.4), где m – масса, a_1 – ускорение груза, g – ускорение свободного падения. Таким образом, $a_1 = g \cdot \sin\varphi$. В нижнем положении ускорение груза центростремительное: $a_2 = v^2 / l$, где l – длина нити. Скорость v найдем из закона сохранения механической энергии: $mv^2 / 2 = mgl(1 - \cos\varphi)$. Тогда $a_2 = g\left(1 - \cos\varphi\right)$. По условию задачи $a_1 = a_2$, $\sin\varphi = 2(1 - \cos\varphi)$. Решая уравнение, получаем $\cos\varphi = 0{,}6$ или $\varphi = 53°$ (другие решения уравнения не соответствуют условию задачи).

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Назад
Во весь экран
Закрыть

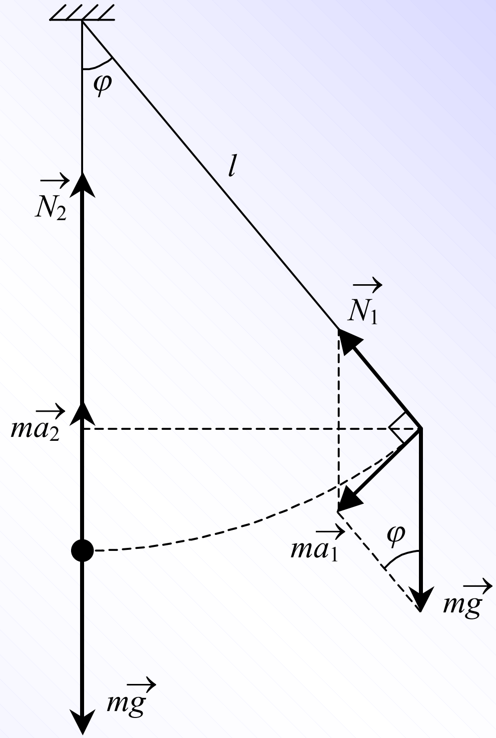


Рисунок 7.4

Задача 7.5. Если к пружине поочередно подвешивать грузы массами m_1 и m_2, то ее длина оказывается, соответственно, l_1 и l_2. Какую работу необходимо совершить при растяжении пружины от l_1до l_2?

Решение. Пусть l_0 – длина нерастянутой пружины, k – ее жесткость. Тогда $m_1 g = k(l_1 - l_0)$, $m_2 g = k(l_2 - l_0)$, и искомая работа

$A = 0{,}5k\left(l_2 - l_0\right)^2 - 0{,}5k\left(l_1 - l_0\right)^2$. Исключая из уравнений k и l_0, находим: $A = 0{,}5g\left(m_1 + m_2\right)\left(l_2 - l_1\right)$.

Задача 7.6. Льдина с площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой H = 40 см плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы утопить льдину? Плотность льда составляет 90% плотности воды.

Решение. Поскольку плотность льда составляет 0,9 плотности воды, то над водой находится 0,1 часть льдины ($h = 4$ см по высоте). Сила F, препятствующая погружению льдины, равна разности сил Архимеда и тяжести и зависит от глубины погружения линейно. Тогда средняя сила, препятствующая погружению, $\overline{F} = (F_{\max} + F_{\min})/2 = (\rho_{воды} - \rho_{льда})gHS/2$, где $\rho_{воды} = 1000$ кг/м^3 и $\rho_{льда} = 900$ кг/м^3 – плотности воды и льда соответственно, $g \approx 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Искомая работа численно равна работе силы F на пути h: $A = \overline{F}h = (\rho_{воды} - \rho_{льда})gHSh/2 \approx 8$ Дж.

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 139 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

Тема 8.
Векторные многоугольники в задачах

Межпредметные связи физики и математики вполне естественны: физика не только экспериментальная, но и точная наука, широко применяющая различные математические методы. Однако, разрабатывая и используя новый математический аппарат, физики иногда незаслуженно забывают о ранее найденных и веками эффективно служивших делу физической науки математических способах. В механике есть ряд задач повышенной для школьников трудности, которые решаются сравнительно просто при использовании несложных геометрических приемов. Примером может служить «забытый» в современной средней школе метод решения задач кинематики и динамики, основанный на построении так называемых *векторных многоугольников перемещений, скоростей, сил, импульсов*.

Многоугольники, соответствующие, например, векторным равенствам $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ и $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$ приведены на рисунках 8.1-8.3. Для их построения необходимо знать модули и направления векторов, входящих в данные равенства. Если какие-либо элементы многоугольника неизвестны, то для их определения используются необходимые геометрические понятия и теоремы. Так, например, треугольник на рисунке 8.1 может быть легко построен, если известны длины отрезков b и c, а также угол между этими отрезками. Длина стороны a треугольника и остальные углы легко вычисляются с помощью теорем синусов или косинусов (или еще проще, если рассматриваемый треугольник прямоугольный или равнобедренный).

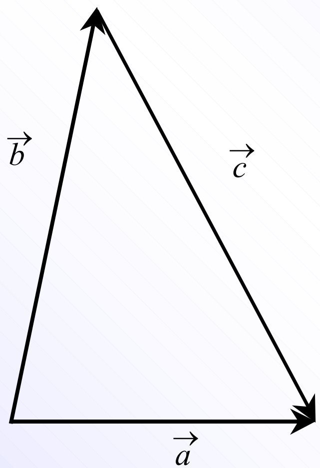


Рисунок 8.1

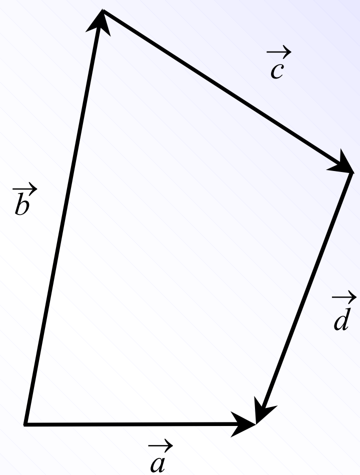


Рисунок 8.2

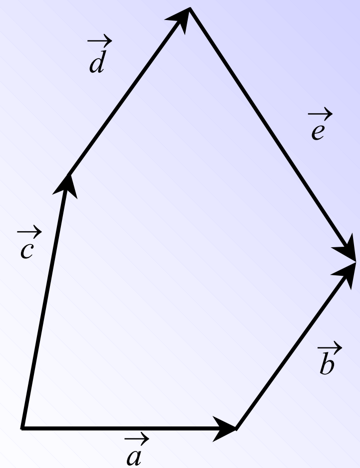


Рисунок 8.3

Итак, алгоритм решения задачи векторным методом несложный: записать соответствующее условию задачи векторное равенство (векторное соотношение между заданными и искомыми величинами), построить соответствующий этому равенству векторный многоугольник и решить его геометрически (т. е. найти неизвестные элементы многоугольника). В ряде случаев данный метод оказывается более простым, чем используемый в современном школьном курсе физики координатный метод решения задач.

8.1. Векторные треугольники скоростей и перемещений в задачах

При движении тела (материальной точки) его перемещение можно рассматривать как геометрическую сумму нескольких последовательных перемещений, например,

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2. \qquad (8.1)$$

Соответствующий (8.1) векторный многоугольник (треугольник) перемещений представлен на рисунке 8.4.

Изменение скорости тела

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1; \qquad (8.2)$$

этому соответствует векторный треугольник скоростей (рисунок 8.5).

При движении тела с постоянным по модулю и направлению ускорением $\vec{a}$ выражение для скорости в любой момент t времени имеет вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \qquad (8.3)$$

Начало
Содержание
◄ ►
◄◄ ►►

Назад
Во весь экран
Закрыть

где $\vec{v}=\vec{v}_0$ при $t=0$. В общем случае направления векторов начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ могут не совпадать. Векторный треугольник скоростей, соответствующий выражению (8.3), приведен на рисунке 8.6. Вектор перемещения при этом определяется следующим образом:

$$\Delta\vec{r}=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}\,t^2}{2}=\vec{v}t-\frac{\vec{a}\,t^2}{2}=\frac{\vec{v}+\vec{v}_0}{2}t. \qquad (8.4)$$

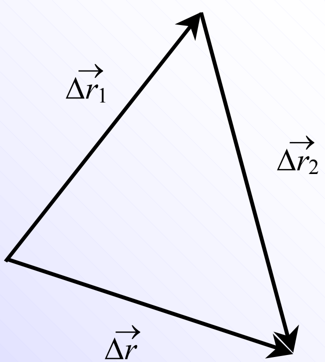


Рисунок 8.4

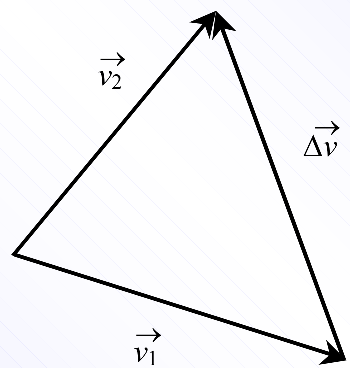


Рисунок 8.5

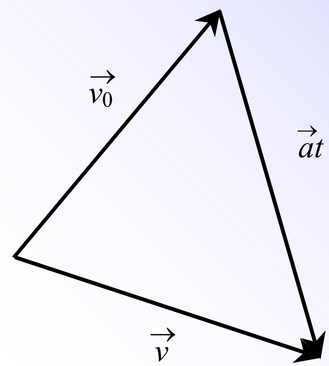


Рисунок 8.6

Векторные треугольники перемещений представлены на рисунках 8.7-8.9.

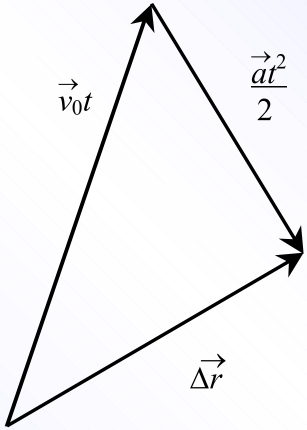


Рисунок 8.7

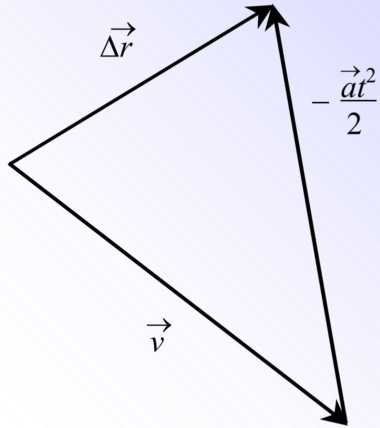


Рисунок 8.8

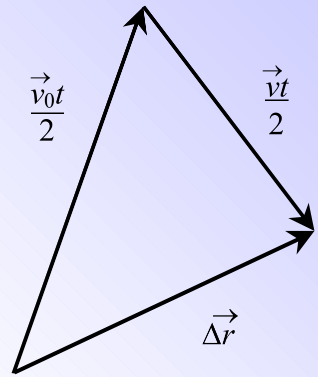


Рисунок 8.9

Наиболее эффективно применение векторного способа, основанного на построении векторных треугольников скоростей и перемещений, в тех случаях, когда известны направления векторов ускорения и одной из скоростей (например, начальной). Это относится, в частности, к задачам о движении тела под действием силы тяжести. Рассмотрим примеры.

Задача 8.1. Под каким углом к горизонту брошен камень, если спустя время t он имел скорость v ? Начальная скорость v_0 .

Решение. Исходное векторное равенство $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ направлен вертикально вниз. Возможные векторные треугольники скоростей представлены на рисунке 8.10.

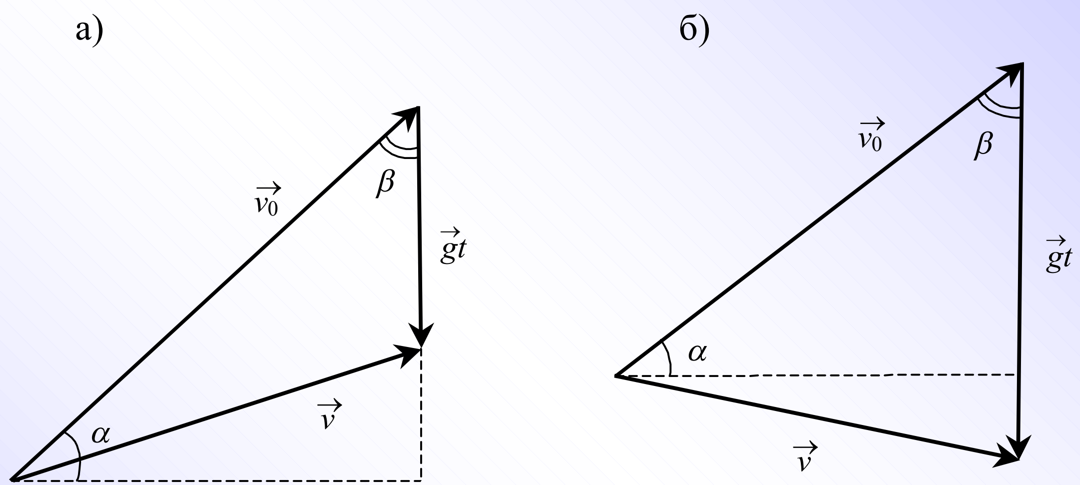


Рисунок 8.10

В обоих случаях угол между векторами $\vec{v}_0$ и $\vec{g}t$ равен $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Тогда по теореме косинусов находим: $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{v_0^2 + g^2t^2 - v^2}{2v_0gt}$.

Задача 8.2. С плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, брошено небольшое тело с начальной скоростью v_0 под углом β к горизонту. Через сколько времени и на каком расстоянии от места броска тело упадет на наклонную плоскость?

Решение. На рисунке 8.11 приведены векторные треугольники перемещений для возможных случаев данной задачи, соответствующие векторному равенству $\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$. Из рисунков видно, что

$$v_0 t\cdot\cos\beta = \Delta r\cdot\cos\alpha\,;\ \frac{gt^2}{2} = \begin{cases} \Delta r\cdot\sin\alpha + v_0 t\cdot\sin\beta, \\ \Delta r\cdot\sin\alpha - v_0 t\cdot\sin\beta, \\ -\Delta r\cdot\sin\alpha + v_0 t\cdot\sin\beta. \end{cases}$$

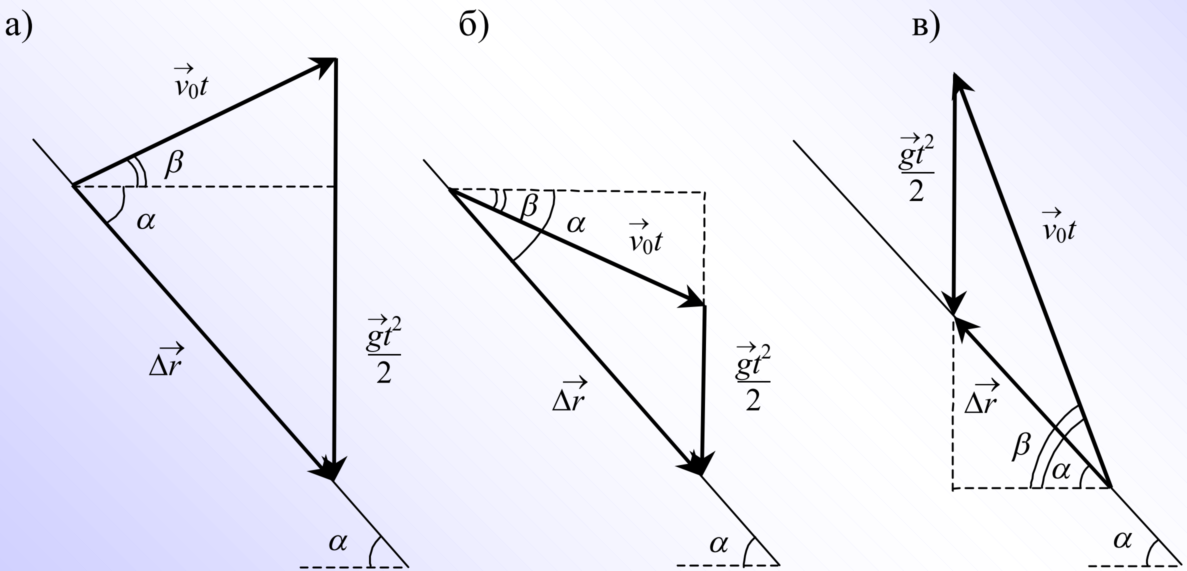


Рисунок 8.11

После несложных преобразований получаем:

$$t = \pm\frac{2v_0 \cdot \sin\left(\alpha \pm \beta\right)}{g \cdot \cos\alpha};\ \Delta r = \pm\frac{2v_0^2 \cdot \cos\beta \cdot \sin\left(\alpha \pm \beta\right)}{g \cdot \cos^2\alpha}.$$

Здесь знаки (+,+) соответствуют рисунку 8.11(а), знаки (+,–) – рисунку 8.11(б), знаки (–,–) – рисунку 8.11(в).

8.2. Векторные многоугольники сил в задачах

Основное уравнение динамики материальной точки является математическим выражением второго закона Ньютона и имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (8.5)$$

где m – масса материальной точки, $\vec{a}$ – ее ускорение, $\vec{F}$ – действующая на материальную точку сила (или равнодействующая нескольких сил, определяемая их геометрической суммой).

Таким образом, при наличии нескольких складываемых сил можно построить их векторный многоугольник. При этом ускорение равно нулю, если равнодействующая сила равна нулю. Рассмотрим примеры.

Задача 8.3. Небольшой кубик с массой m лежит на неподвижной плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Коэффициент трения покоя кубика о плоскость равен μ. Под каким углом к наклонной плоскости и какую по величине минимальную силу нужно приложить к кубику, чтобы сдвинуть его с места вверх по склону?

Решение. Считаем кубик малым, и все силы, действующие на него, прикладываем к одной точке (рисунок 8.12). Здесь $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ –

нормальная сила реакции, $\vec{T}$ – сила трения (в момент начала движения $T = \mu N$), $\vec{F}$ и β – искомые сила и угол. Для покоящегося тела $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}=0$. Для дальнейших расчетов введем равнодействующую $\vec{R}$ сил $\vec{N}$ и $\vec{T}$ (рисунок 8.13). Несложно убедиться, что $\text{tg}\varphi = T/N = \mu$ – величина, известная из условия задачи. Векторный треугольник, соответствующий выражению $m\vec{g}+\vec{R}+\vec{F}=0$, представлен на рисунке 8.14.

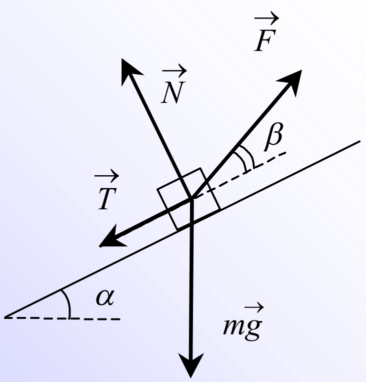


Рисунок 8.12

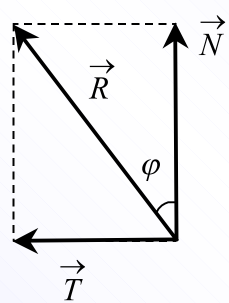


Рисунок 8.13

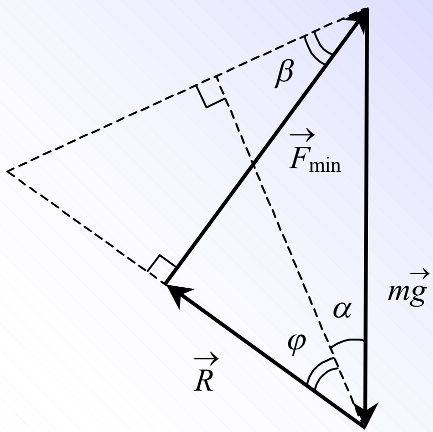


Рисунок 8.14

Легко видеть, что $\vec{F}=\vec{F}_{\min}$ при $\vec{F}\perp\vec{R}$. Тогда $\beta=\varphi=\text{arctg}\,\mu$. Заметим, что при больших значениях угла α (значения μ и, следовательно, $\beta=\varphi$ обычно малы) может оказаться $\alpha+\varphi>\pi/2$, т. е. сила $\vec{F}$ направлена так, что не может сдвигать тело вверх по склону, и условие задачи не выполняется. При $\alpha+\varphi=\pi/2$ сила $\vec{F}$ направлена вертикально вверх и равна по модулю силе тяжести. В этом случае сила реакции $\vec{R}$ равна нулю, и тело просто удерживается на месте. Таким образом, задача имеет решение лишь при условии $\alpha+\varphi<\pi/2$. В этом случае из рисунка 8.14 легко видеть, что $F_{\min}/\cos\beta = mg\cdot\sin\alpha + mg\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, откуда окончательно получаем $F_{\min} = mg\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\right) = mg(\sin\alpha+\mu\cdot\cos\alpha)/\sqrt{1+\mu^2}$.

Задача 8.4. Для условия предыдущей задачи найти минимальную силу, необходимую для сообщения телу ускорения $\vec{a}$, направленного вверх по склону. Коэффициент трения скольжения принять равным μ.

Решение. Векторный многоугольник сил, соответствующий уравнению $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{R}+\vec{F}$, приведен на рисунке 8.15. Здесь также $\vec{F}=\vec{F}_{\min}$ при $\vec{F}\perp\vec{R}$, $\beta=\varphi=\operatorname{arctg}\mu$.

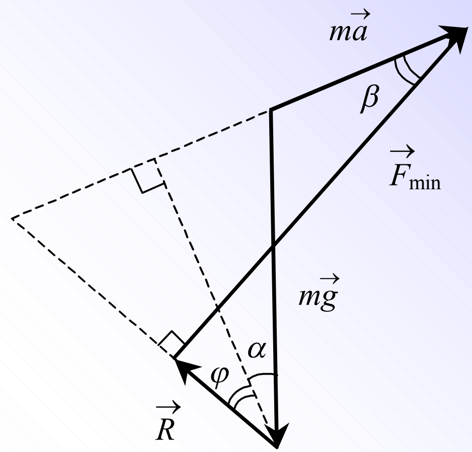


Рисунок 8.15

Тогда получим соотношение: $\dfrac{F_{\min}}{\cos\beta} = ma + mg\cdot\sin\alpha + mg\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta.$

Отсюда $F_{\min} = m\dfrac{a + g\left(\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha\right)}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Это решение справедливо для ускорения a, не превышающего некоторое значение a_0, которому соответствует условие $F\cdot\sin\beta = mg\cdot\cos\alpha$. В последнем случае обращаются в нуль как сила нормальной реакции N, так и сила трения T. При $a > a_0$ для того, чтобы кубик не отрывался от плоскости, направление силы $\vec{F}$ должно меняться с увеличением ускорения так, чтобы выполнялось указанное условие; при этом $ma = F\cdot\cos\beta - mg\cdot\sin\alpha$. Итак,

$F=\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{g^2+2ag\cdot\sin\alpha+a^2}$. Из равенства $\operatorname{tg}\beta=\frac{g\cdot\cos\alpha}{g\cdot\sin\alpha+a_0}=\mu$ предельное ускорение $a_0=g\left(\frac{\cos\alpha}{\mu}-\sin\alpha\right)$.

8.3. Векторные многоугольники импульсов в задачах

Как известно, одна из форм записи второго закона Ньютона имеет вид:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t, \tag{8.6}$$

где $\vec{p}$ – импульс тела (материальной точки), $\Delta\vec{p}$ – его изменение за время Δt, $\vec{F}$ – средняя за время Δt сила, действующая на тело.

Формула (8.6) представляет собой математическое выражение так называемой теоремы об изменении импульса: изменение импульса тела равно импульсу средней силы, приложенной к телу. Аналогичные формула и теорема имеют место и для системы тел, но в этом случае $\vec{p}$ – суммарный импульс тел системы, $\vec{F}$ – средняя за время Δt геометрическая сумма внешних сил, действующих на тела системы (так называемый главный вектор внешних сил). При $\vec{F} = 0$ импульс тела (или системы тел) сохраняется: $\Delta\vec{p} = 0$, $\vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}$.

Рассмотрим примеры.

Задача 8.5. На две частицы – одну с массой *m*, летящую со скоростью $v_1 = v$, другую с массой 2*m*, летящую со скоростью $v_2 = v/2$ перпендикулярно к первой (рисунок 8.16), – в течение некоторого времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица начинает двигаться со скоростью $v' = v_1$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. С какой скоростью будет двигаться при этом вторая частица?

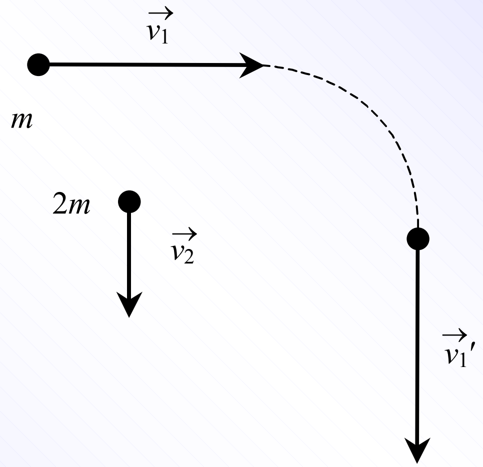


Рисунок 8.16

Решение. Векторная разность конечного и начального импульсов первой частицы равна импульсу $\vec{J}$ действовавшей силы (рисунок 8.17). Его модуль $J = mv\sqrt{2}$. Такой же импульс силы $\vec{J}$ подействовал на вторую частицу. Ее конечный импульс равен векторной сумме начального импульса и импульса силы (рисунок 8.18): $2m\vec{v}_2' = 2m\vec{v}_2 + \vec{J}$. Используя теорему косинусов, находим конечный импульс $2mv_2' = \sqrt{m^2v^2 + J^2 + 2mvJ \cdot \cos\frac{\pi}{4}}$ и конечную скорость второй частицы $v_2' = \sqrt{5}v / 2$.

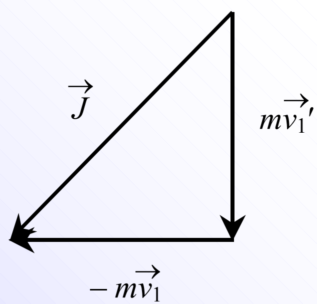


Рисунок 8.17

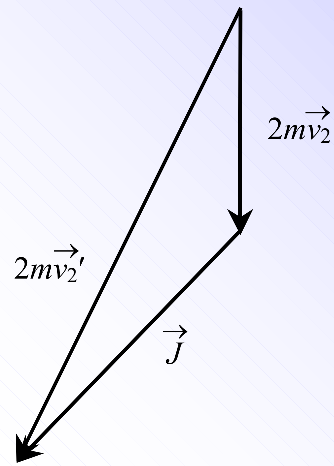


Рисунок 8.18

Задача 8.6. Заряженное орудие с массой m соскальзывает с гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В момент, когда скорость орудия была равна $\vec{v}$, произвели выстрел, в результате которого орудие остановилось, а вылетевший в горизонтальном направлении снаряд «унес» импульс $\vec{p}$. Продолжительность выстрела τ. Найти среднее за это время значение силы реакции $\vec{N}$ со стороны наклонной плоскости.

Решение. Система орудие–снаряд незамкнутая. За время τ эта система получает приращение импульса $\vec{p}-m\vec{v}$, которое обусловлено действием двух внешних сил: направленной вертикально вниз силы тяжести $m\vec{g}$ и перпендикулярной наклонной плоскости силы реакции $\vec{N}$. Поэтому можно записать $\vec{p}-m\vec{v}=\langle\vec{N}\rangle\tau+m\vec{g}\tau$ или $\vec{p}=m\vec{v}+\langle\vec{N}\rangle\tau+m\vec{g}\tau$, где $\langle\vec{N}\rangle$ – среднее за время τ значение силы $\vec{N}$. Векторный многоугольник импульсов представлен на рисунке 8.19, из которого видно, что значение модуля силы $\langle\vec{N}\rangle$ определяется формулой $\langle N\rangle=(p\cdot\sin\alpha+mg\tau\cdot\cos\alpha)/\tau$.

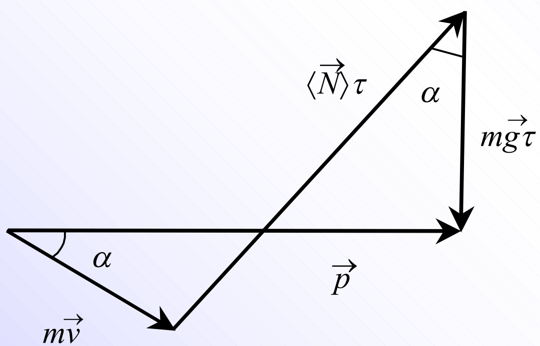


Рисунок 8.19

Задача 8.7. Малое тело брошено горизонтально с большой начальной скоростью v_0. На расстоянии l от точки бросания находится вертикальная шероховатая стена. После удара о стену тело отскакивает в горизонтальном направлении со скоростью v_1. Найти коэффициент трения тела о стену.

Решение. Тело подлетает к стене со скоростью $v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$ (рисунок 8.20), где время полета до стены $t=l/v_0$, $\cos\alpha=v_0/v$, $\sin\alpha=gt/v$. Согласно теореме об изменении импульса, $m\vec{v}_1-m\vec{v}=\left(m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}\right)\tau$. Здесь τ – продолжительность соударения, $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$ – силы тяжести, нормальной реакции и трения соответственно; $T=\mu N$.

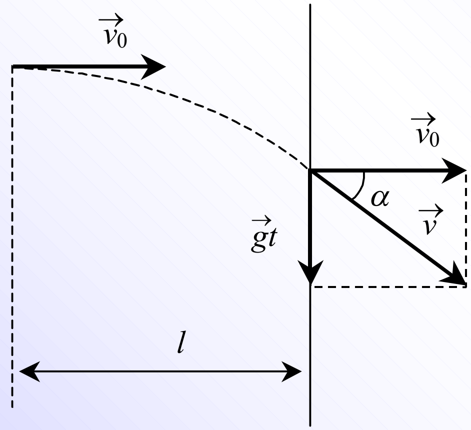


Рисунок 8.20

В тех случаях, когда рассматривается движение легкого тела, движущегося с большой скоростью, импульс силы тяжести можно считать пренебрежимо малым по сравнению с импульсами других сил (нормальной реакции и трения). Из условия данной задачи следует, что импульсом силы тяжести можно пренебречь (тело малое, но движется с большой скоростью). Тогда $m\vec{v}_1 = m\vec{v} + \vec{N}\tau + \vec{T}\tau$. Векторный многоугольник импульсов представлен на рисунке 8.21.

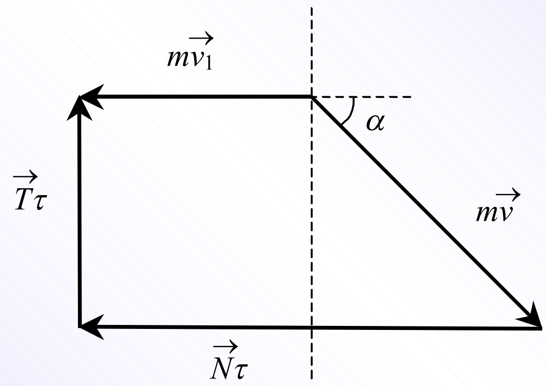


Рисунок 8.21

Легко видеть, что $N\tau = mv \cdot \cos\alpha + v_1$, $\mu N\tau = mv \cdot \sin\alpha$, откуда несложно выразить коэффициент трения: $\mu = \dfrac{v \cdot \sin\alpha}{v_1 + v \cdot \cos\alpha} = \dfrac{gt}{v_1 + v_0} = \dfrac{gl / v_0}{v_1 + v_0}$.

Заметим, что, используя силу реакции $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ (см. решение задачи 8.3) и построив векторный треугольник импульсов (рисунок 8.22), соответствующий теореме об изменении импульса $m\vec{v}_1 = m\vec{v} + \vec{R}\tau$, можно сразу, не решая систему уравнений, записать выражение $\mu = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{v \cdot \sin\alpha}{v_1 + v \cdot \cos\alpha}$.

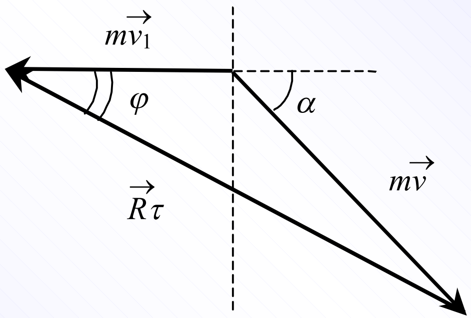


Рисунок 8.22

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Назад
Во весь экран
Закрыть

Тема 9.
Механические колебания

9.1. Гармонические колебания

Колебания (колебательное движение) – процесс, отличающийся той или иной степенью повторяемости. *Колебательной* называется система, которая может совершать колебания; *свободные колебания* происходят под действием внутренних сил колебательной системы. Колебания, характеризующиеся величинами, описываемыми периодическими функциями времени $f(t) = f(t+T)$, называются *периодическими*.

Из множества различных колебаний, встречающихся в природе, особо выделяют *гармонические колебания*, при которых смещение тела от некоторого фиксированного положения происходит по закону косинуса (или синуса): $x = A\cos\varphi$, где $\varphi = \varphi(t)$. В качестве простейшей модели гармонических колебаний можно рассмотреть движение проекции материальной точки, равномерно движущейся по окружности, на ось $0x$ (рисунок 9.1).

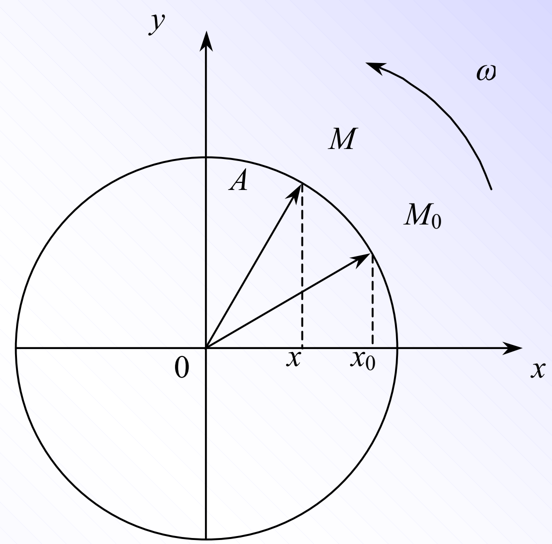


Рисунок 9.1

Угловая координата материальной точки (угол поворота ее радиус-вектора, проведенного из центра окружности) изменяется с течением времени по закону: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где ω – угловая скорость, φ – угол поворота в начальный момент времени. Тогда

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (9.1)$$

Это *кинематическое уравнение гармонического колебательного движения*, происходящего вдоль оси $0x$ декартовой системы координат (при проецировании на ось 0y получаем: $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. В (9.1) x – координата (*смещение*), A – *амплитуда* (максимальное смещение от начала координат), φ – *фаза* (величина, характеризующая положение колеблющейся материальной точки и направление ее движения), φ_0 – *начальная фаза* ($\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$), ω – *циклическая* (круговая) *частота*; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, где ν – частота (число колебаний в единицу времени), T – *период* (время одного полного колебания). Единицы измерений: [x] = [A] = [м]; [φ] = [рад/с]; [T] = [с]; [ν] = [$с^{-1}$] = [Гц] – *герц*. График зависимости смещения от времени при гармонических колебаниях представлен на рисунке 9.2; $x_0 = A\cos\varphi_0$. Гармонические колебания описываются дифференциальным уравнением:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (9.2)$$

где x'' – вторая производная координаты по времени (ускорение). (9.1) – решение этого уравнения, в чем несложно убедиться, продифференцировав (9.1) дважды и подставив выражения для $x'(t)$ и $x(t)$ в (9.2).

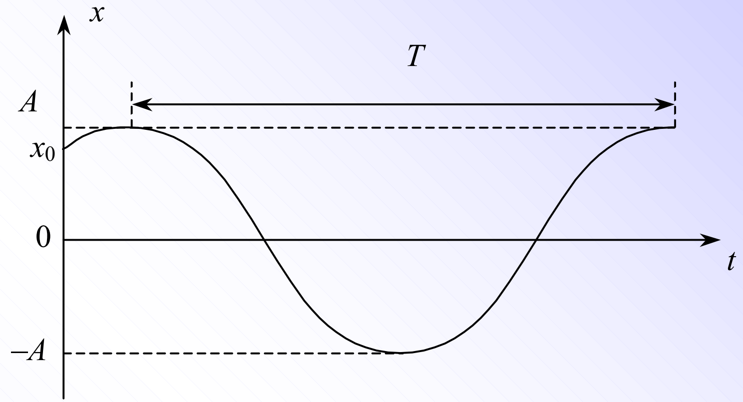


Рисунок 9.2

9.2. Маятники

Простейшими колебательными системами являются *маятники*. *Математический маятник* состоит из материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити и совершающей малые колебания относительно положения равновесия в вертикальной плоскости (рисунок 9.3). Хорошее приближение к этой модели – небольшой тяжелый шарик на длинной нити. На тело массой m (рисунок 9.3) действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Применяя второй закон Ньютона, получаем в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$\begin{cases} ma_x = -T\sin\alpha, \\ ma_y = T\cos\alpha - mg. \end{cases} \qquad (9.3)$$

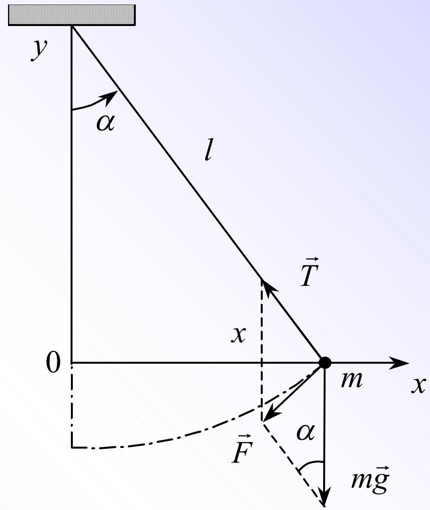


Рисунок 9.3

При малом угле α можно считать, что равнодействующая сила $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$, направленная по касательной к дуге окружности, описываемой колеблющимся телом, практически равна по величине своей проекции на ось $0x$: $T\sin\alpha \approx F = mg\sin\alpha = mgx/l$. Тогда $T \approx mg$, $\cos\alpha \approx 1$, $a_y = 0$ и $ma_x = -mgx/l$. Учитывая, что $a_x = x''$, получаем уравнение:

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0. \tag{9.4}$$

При $g/l=\omega^2$ (9.4) совпадает с (9.2), т. е. малые колебания математического маятника – гармонические, частота и период которых определяются *формулами Гюйгенса*:

$$\omega=\sqrt{g/l},\ \ \nu=\sqrt{g/l}\,/\,(2\pi),\ \ T=2\pi\sqrt{l/g}. \qquad (9.5)$$

Легко видеть, что период малых колебаний математического маятника не зависит от его массы и амплитуды.

Пружинный маятник состоит из груза массой m, совершающего колебания под действием силы упругости $\vec{\mathrm{F}}$ прикрепленной к нему пружины жесткостью k и длиной x_0 в недеформированном состоянии (рисунок 9.4). По закону Гука, $\vec{F}=-k\vec{x}$, где x – деформация пружины (смещение груза от положения равновесия). По второму закону Ньютона, в проекциях на координатную ось $0x$ запишем:

$$ma_x=-kx \ \text{ или } \ x''+\frac{k}{m}x=0. \qquad (9.6)$$

Это также уравнение гармонических колебаний, частота и период которых:

$$\omega=\sqrt{k/m},\ \ \nu=\sqrt{k/m}\,/\,(2\pi),\ \ T=2\pi\sqrt{m/k}. \qquad (9.7)$$

Как и в случае математического маятника, период малых колебаний пружинного маятника не зависит от амплитуды.

Заметим, что все силы вида $\vec{F} = -k\vec{x}$, независимо от их природы, называют *квазиупругими*. Колебания частицы под действием квазиупругой силы происходят по гармоническому закону.

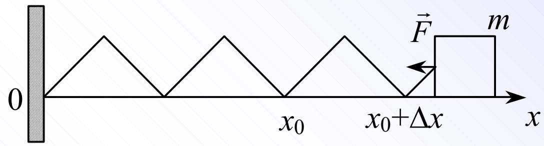


Рисунок 9.4

Как видно из приведенных выше выражений, периоды колебаний пружинного и математического маятников зависят от параметров этих колебательных систем, и не изменяются с течением времени. Это позволяет применять маятники для изготовления часовых механизмов. Зависимость периода колебаний математического маятника от ускорения свободного падения лежит в основе гравиметрии.

Механическая энергия E колебательной системы определяется суммой кинетической T и потенциальной U энергий элементов, составляющих систему. Для энергии тела массой m, колеблющегося под действием силы упругости пружины жесткостью k, можно записать в виде:

$$E = T + U = mv^2/2 + kx^2/2. \tag{9.8}$$

Т. к. колебания происходят по гармоническому закону, то скорость тела $v = x' = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \\ &= kA^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)/2 = \frac{kA^2}{2}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Здесь учтено, что $\omega^2 = k/m$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Таким образом, полная механическая энергия колебательной системы при отсутствии внешних сил остается величиной постоянной. Возможен лишь переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. При максимальном отклонении от положения равновесия система обладает максимальной потенциальной энергией $U_{\max} = kA^2/2$; при этом кинетическая энергия равна нулю. При прохождении колеблющимся телом положения равновесия его кинетическая энергия максимальна: $T_{\max} = m\omega^2 A^2 / 2 = kA^2 / 2 = E$, а потенциальная энергия равна нулю (если отсчет величины потенциальной энергии ведется от положения равновесия).

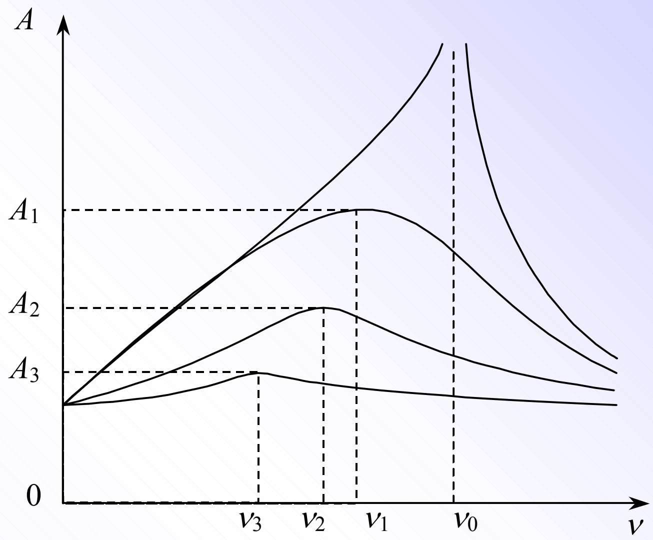


Рисунок 9.5

Если на колеблющееся тело действует сила трения, то *колебания затухают*: их амплитуда с течением времени уменьшается. Для предотвращения затухания колебаний, что немаловажно во многих технических приложениях, необходимо сообщать колебательной системе энергию извне.

Вынужденными называются колебания, происходящие под воздействием на систему внешней периодически изменяющейся силы. При этом на собственные колебания системы накладываются колебания, вызванные внешней силой, частота которых равна частоте изменения внешней (вынуждающей) силы. Если собственные колебания затухают, то через некоторое время устанавливаются колебания, амплитуда которых определяется амплитудой и частотой вынуждающей силы. При этом можно подобрать частоту вынуждающей силы так, чтобы амплитуда колебаний была максимальной.

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды колебаний при соответствующем подборе частоты ν вынуждающей силы. Максимальное значение амплитуды A тем больше, чем меньше силы сопротивления, действующие в колебательной системе (рисунок 9.5). При малых силах сопротивления амплитуда колебаний при резонансе может иметь огромную величину (в идеальном случае отсутствия сил сопротивления резонансное значение амплитуды стремится к бесконечности, а соответствующее резонансное значение частоты – к значению ν_0 частоты собственных колебаний системы). При большом сопротивлении резонанс не наблюдается.

Явление резонанса может быть причиной разрушения механизмов и сооружений, если собственные частоты их колебаний совпадут с частотой внешней силы, поэтому, например, воинским подразделениям при движении по мосту запрещается идти в «ногу». Резонанс может быть и полезным, например, использоваться для усиления звучания музыкальных инструментов и т. д.

9.3. Волны и их характеристики

Волна (*волновой процесс*) – распространение колебаний в пространстве. Если область пространства заполнена частицами, взаимодействующими между собой, т. е. представляет упругую среду, то распространение колебаний от одной частицы к другим называется упругой волной. При этом каждая частица упругой среды колеблется около своего положения равновесия.

Если колебания происходят вдоль направления распространения волны, то волна продольная, если перпендикулярно направлению распространения волны, то волна поперечная. Существование поперечных волн возможно только при наличии сильных связей между частицами (атомами и молекулами) среды. Поэтому поперечные волны могут распространяться только в твердых телах, а также на поверхностях жидкостей, где велики силы поверхностного натяжения. Внутри жидкостей и в газах поперечные волны не распространяются. Продольные волны могут быть в твердых, жидких и газообразных телах.

Основные *характеристики волны*: *амплитуда* A (равная амплитуде колебаний отдельной частицы среды, в которой распространяется волна), *частота* ν и *период* T (равные частоте и периоду колебаний отдельной частицы), *длина волны* λ (расстояние между двумя ближайшими частицами, колеблющимися с разностью фаз 2π), *скорость* c (величина, характеризующая быстроту распространения колебаний в пространстве).

Зависимость смещения частиц среды y в данный момент времени от их местонахождения (координаты x) называется графиком волны (рисунок 9.6).

Длина волны λ показана на графике. Скорость волны

$$c = \lambda / T = \lambda \nu . \qquad (9.10)$$

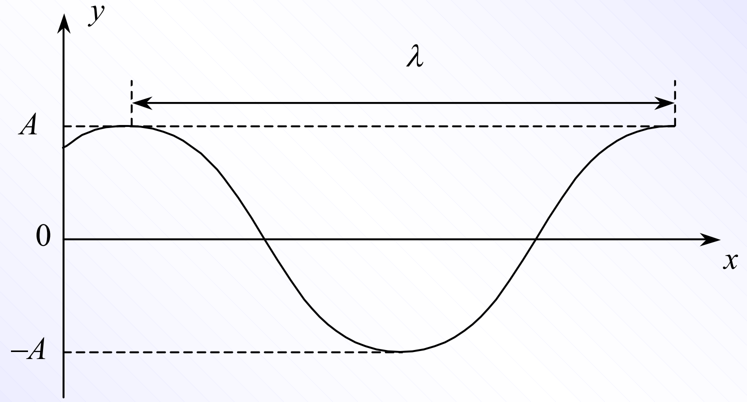


Рисунок 9.6

9.4. Звук

Звуком или *звуковыми волнами* называют упругие волны в диапазоне частот примерно $(16 \div 20000)$ Гц, т. к. они вызывают у людей специфическое ощущение – звук. Следует заметить, что упругие волны с частотами порядков $(1 \div 10^{13})$ Гц имеют одинаковую физическую природу и являются предметом изучения особого раздела физики – *акустики*. Волны с частотой ниже 16 Гц называются *инфразвуковыми*, в диапазоне $20\,\text{кГц} \div 1\,\text{ГГц}$ – *ультразвуковыми*, выше 1 ГГц – гиперзвуковыми.

Объективными характеристиками звука являются: *частота*, *звуковое давление* (при распространении в среде продольной звуковой волны возникают сгущения и разрежения частиц, т. е. перепад давлений) и *интенсивность* (количество энергии, переносимое звуковой волной в единицу времени через поверхность единичной площадки, перпендикулярной направлению распространения волны). Поскольку энергия колебаний $E = kA^2/2$ зависит от амплитуды, то интенсивность звука, при прочих равных условиях, также зависит от амплитуды волны.

Субъективными характеристиками звука являются: *высота* (связана с частотой волны: выше звуки большей частоты), *тембр* (музыкальная окраска, характеризующаяся набором частот складываемых звуковых волн), *громкость* (субъективное ощущение, зависящее от интенсивности или звукового давления, длительности звучания и, отчасти, от частоты). Человеческое ухо может воспринимать звуковые волны, если звуковое давление превышает 10^{-5} Па (порог слышимости). Выше 200 Па (порог болевого ощущения) звук воспринимается как боль. Громкость звука измеряется в децибелах [дБ] (например, разговор средней громкости – 60 дБ, крик –80 дБ, шум винтов самолета превышает 120 дБ).

Скорость звука определяется как скорость любой волны: $c = \lambda \nu = \lambda / T$. При этом следует учитывать, что в твердых телах распространяются продольные и поперечные волны, скорости которых различны (например, в стали скорость продольной волны 6100 м/с, а поперечной – 3600 м/с). В воздухе распространяются только продольные звуковые волны, скорость которых зависит от температуры, влажности и наличия примесей. При комнатной температуре и средней влажности скорость звука в воздухе примерно 340 м/с. Для определения скорости звука определенной частоты измеряют длину звуковой волны, используя для этого обычно, явление акустического резонанса, при котором амплитуда вынужденных звуковой волной колебаний тела (резонатора) максимальна.

Наиболее широкое применение в технике получили ультразвуковые волны, частота которых $\nu \geq 20$ кГц. Малая длина волны ультразвука обусловливает легкость получения направленных ультразвуковых пучков (для получения направленного звукового пучка необходимо, чтобы размеры источника звука существенно превышали длину волны). Пропуская пучок ультразвуковых лучей через металлическую деталь, можно обнаружить в ней внутренние дефекты по характерному рассеянию пучка. На этом принципе основана ультразвуковая дефектоскопия. Ультразвук применяется также при гидролокации, при механической обработке твердых тел, в медицине и т. д.

9.5. Примеры решения задач по теме 9

Задача 9.1. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный математический маятник за время $t = 150$ с совершил $n = 100$ колебаний?

Решение. По условию, период колебаний маятника в неподвижной кабине лифта $T = 1$ с, период колебаний маятника в движущейся кабине $T_1 = t / n = 1{,}5$ с. По формуле Гюйгенса $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g_1}$. Отсюда $g_1 = gT^2 / T_1^2 < g$,, т. е. кабина лифта движется вниз с ускорением $a = g - g_1 = g(1 - T^2 / T_1^2)$. Подставляя численные значения, находим $a = 0{,}56g \approx 5{,}5\ \text{м}/\text{с}^2$.

Задача 9.2. На какую высоту над Землей надо поднять математический маятник, чтобы период его колебаний увеличился на 1% ?

Решение. Период колебаний математического маятника определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l / g}$, где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения, зависящее от высоты тела над поверхностью Земли: $g(h) = GM / (R + h)^2$, M и R – масса и радиус Земли, G – постоянная тяготения. Пусть у поверхности Земли период колебаний маятника T, а на высоте h – T_1. Тогда $T_1/T=\sqrt{g(0)/g(h)}=(R+h)/R$ и согласно условию задачи, $T_1/T=1{,}01$. Отсюда находим $h=0{,}01R\approx 63{,}7$ км..

Задача 9.3. Груз массой $m=400$ г, прикрепленный к пружине, жесткость которой $k=250$ Н/м, совершает колебания с амплитудой $A=10$ см. Найти максимальное значение скорости груза.

Решение. Координата колеблющегося на пружине груза определяется из уравнения: $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$,, где $\omega=\sqrt{k/m}$. Скорость груза находим как первую производную координаты по времени: $v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$. Тогда $v_{\max}=A\omega=A\sqrt{k/m}$. Подставляя численные значения, находим: $v_{\max}=2{,}5$ м/с.

Задача 9.4. Между двумя стенками с помощью легких горизонтальных пружин жесткостями k_1 и k_2 закреплен груз массой m. Найти период его горизонтальных колебаний.

Решение. При смещении шарика из положения равновесия на расстояние x на него действуют со стороны пружин силы, направленные в стороны, противоположные смещениям, и равные по модулю k_1x и k_2x. По второму закону Ньютона в проекциях на направление смещения шарика имеем: $ma_x=-k_1x-k_2x$. Учитывая, что ускорение $a_x=x''$, получаем уравнение гармонических колебаний: $x'' + \omega^2 x = 0$, где циклическая частота $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. Тогда период $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$.

Задача 9.5. В некоторой среде распространяется волна. За время t, в течение которого частица среды совершает $n = 140$ колебаний, волна распространяется на расстояние $L = 110$ м. Найти длину волны.

Решение. Длина волны $\lambda = cT$, где скорость $c = L/T$, а период $T = t/n$. Тогда $\lambda = L/n$; $\lambda = 110/140 = 0{,}79$ (м).

10.1. Основные положения и понятия молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ): 1) вещество состоит из молекул; 2) молекулы непрерывно хаотически движутся; 3) между молекулами существует взаимодействие.

Молекула – наименьшая частица вещества, обладающая основными его химическими свойствами и состоящая из атомов, соединенных между собой химическими связями. Понятия молекулы и атома совпадают, если молекула состоит из одного атома. В кристаллах между атомами (ионами) столь сильное взаимодействие, что выделить одну молекулу зачастую нельзя: весь кристалл представляет собой как бы одну молекулу.

Подтверждают существование молекул и их движение следующие факты: возможность механического дробления вещества, смешивание жидкостей, растворение твердого вещества в жидком растворителе, сжатие и расширение газов, стремление газа занимать весь предоставленный ему объем, существование давления газа на стенки сосуда, увеличение давления газа при увеличении плотности или температуры, диффузия, броуновское движение. С помощью современных методов получены фотографии наиболее крупных молекул.

Силы взаимодействия между молекулами обусловлены электрическим притяжением или отталкиванием их составных частей, имеющих электрические заряды (ионов и электронов). При сближении двух атомов или молекул сначала преобладают силы притяжения. Но на некотором расстоянии (приблизительно равном диаметру молекулы) между их центрами силы отталкивания возрастают настолько, что становятся равными по модулю силам притяжения. При дальнейшем сближении силы отталкивания превосходят силы притяжения. Наличие сил взаимодействия между молекулами подтверждается сопротивлением твердых тел разрыву, «слипанием» прижатых друг к другу отшлифованных пластин, поверхностным натяжением жидкостей, явлением смачивания (или несмачивания) жидкостями твердых поверхностей, сопротивлением тел сжатию.

Наиболее наглядное экспериментальное подтверждение представлений молекулярно-кинетической теории о хаотическом движении атомов и молекул дает *броуновское движение* – беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее из-за ударов молекул окружающей среды. Интенсивность броуновского движения возрастает с уменьшением размеров взвешенных частиц. Это связано с тем, что удары молекул по малой частице не компенсируют друг друга, и суммарный импульс, сообщаемый частице молекулами, оказывается достаточным для ее заметного движения. Интенсивность броуновского движения возрастает также при увеличении температуры жидкости (газа), т. к. при этом увеличивается кинетическая энергия молекул, т. е. увеличиваются их скорости и импульсы. Впервые броуновское движение наблюдал английский ботаник Броун; количественную теорию броуновского движения разработал Эйнштейн.

Точно определить массу и размеры молекулы довольно сложно, для этого существуют специальные методы. Но оценить эти величины можно даже в простейшем опыте, используя свойство маслянистых жидкостей растекаться по поверхности воды. Зная объем V жидкости и площадь S пятна, которое образуется на поверхности воды, можно вычислить толщину слоя жидкости, приблизительно равную диаметру молекулы: $d = V / S$. Тогда масса молекулы $m_0 \sim \rho d^3$, где ρ – плотность исследуемой жидкости. Расчеты, проведенные на основе таких измерений, показывают, что $d \sim 10^{-10}$ м, $m_0 \sim 10^{-26}$ кг. Порядки величин d и m_0 характерны для молекул различных веществ (кроме гигантских молекул полимеров).

При расчетах удобно использовать не абсолютные значения масс молекул, а относительные. *Относительной молекулярной* (или атомной) *массой* вещества называют отношение массы молекулы (атома) данного вещества к 1/12 массы атома углерода: $M_r = m_0 / \left(m_{0C} / 12\right)$.

Под *количеством вещества* ν понимают отношение числа молекул в данном теле к числу атомов в 0,012 кг углерода: $\nu = N / N_A$. Единица измерения количества вещества – моль. В одном моле любого вещества

Начало
Содержание
◄ ►
◄◄ ►►

Назад
Во весь экран
Закрыть

содержится столько же молекул (атомов), сколько и в 0,012 кг углерода. Эту постоянную называют числом Авогадро: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Молярной массой называют массу вещества, взятого в количестве одного моля: $M = m_0 N_A = 10^{-3} M_r$ кг/моль.

Тепловым движением называется хаотическое (беспорядочное) движение молекул, атомов и ионов в веществе. Характер теплового движения зависит от агрегатного состояния вещества и определяется силами межмолекулярного взаимодействия. В зависимости от особенностей строения и характера теплового движения молекул различают твердые тела, жидкости и газы.

Твердыми называются тела, которые отличаются постоянством формы и объема. Силы взаимодействия частиц в твердых телах велики. Частицы не могут удаляться от своих соседей на значительные расстояния, и их тепловое движение представляет собой хаотические колебания частиц относительно их положений равновесия – узлов кристаллической решетки.

Жидкостями называются тела, которые имеют определенный объем, но не имеют своей формы, принимая форму сосуда, в котором находятся. В жидкости молекулы не только колеблются около положения равновесия, но и совершают перескоки из одного положения в соседнее. Эти перескоки молекул являются причиной текучести жидкости. Жидкости не сопротивляются изменению их формы, однако отличаются малой сжимаемостью.

Газы, в отличие от твердых тел и жидкостей, имеют малую плотность, большую сжимаемость, большую скорость диффузии, способны занимать любой предоставленный им объем. Молекулы газа находятся на расстояниях, средние значения которых значительно превышают размеры самих молекул. Поэтому силы взаимодействия между молекулами газа невелики. При описании многих свойств газов можно использовать теоретическую модель идеального газа, в которой не учитывается взаимодействие между молекулами на расстоянии (молекулы представляются материальными точками, которые могут взаимодействовать лишь при упругих столкновениях). Одноатомные газы при давлении, близком к атмосферному, и температурах от –200 °С до нескольких тысяч градусов можно считать идеальными с достаточной степенью точности.

10.2. Основное уравнение МКТ для идеального газа

Рассмотрим газ в кубическом сосуде. Каждая молекула газа, подлетающая к стенке со скоростью $\vec{v}$, проекция которой на координатную ось 0x, перпендикулярную стенке, равна v_x, передает стенке за время упругого столкновения импульс $2m_0 v_x$. Если число столкновений со стенкой в единицу времени равно z, то переданный стенке импульс равен $2m_0 v_x z$. Число z пропорционально концентрации молекул n, скорости v_x и площади стенки S. При этом надо учитывать, что к стенке движется только половина молекул. Тогда $z = nv_x S/2$ и $2m_0 v_x z = m_0 v_x^{\,2} S$. По второму закону Ньютона, изменение импульса в единицу времени равно силе: $F_x = m_0 n v_x^{\,2} S$. Поскольку скорости v_x молекул разные, то можно говорить лишь о средней силе $< F_x >= m_0 n < v_x^{\,2} > S$. Т. к. все направления движения молекул равноправны, то $< v_x^{\,2} >=< v^2 > /3$, где $< v^2 >$ – средний квадрат скорости молекулы. Тогда $< F >= m_0 n < v^2 > S/3$, и давление газа на стенку сосуда

$$p =< F > /S = m_0 n < v^2 > /3. \qquad (10.1)$$

Это и есть *основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа*. Если средняя кинетическая энергия молекулы $< E >= m_0 < v^2 > /2$, то

$$p = 2n < E > /3. \qquad (10.2)$$

10.3. Температура

Газ может находиться в различных состояниях, т. е. некоторая его масса может занимать разный объем, иметь различное *давление* и различную *температуру*. Эти величины характеризуют состояние газа без учета его молекулярного строения и называются *термодинамическими параметрами* (макроскопическими параметрами).

Любое макроскопическое тело (или группа тел) при неизменных внешних условиях переходит в состояние теплового равновесия, при котором все термодинамические параметры сколь угодно долго остаются неизменными. При таком состоянии в термодинамической системе (макроскопическом теле или группе тел) не меняются давление и объем, не происходит теплообмен (передача внутренней энергии от тела к телу без совершения работы), нет взаимных превращений газов, жидкостей и твердых тел и т. д. Если тела находятся в состоянии теплового равновесия, то говорят, что они имеют одинаковую температуру. Разность температур указывает направление теплообмена между телами: энергия передается при теплообмене от более нагретого тела (с большей температурой) к менее нагретому. Таким образом, *температура характеризует степень нагретости тела* (по сравнению с другим телом, принятым за эталон). Для измерения температуры применяют *термометры*, в устройстве которых используется свойство тел изменять свой объем при нагревании или охлаждении. При установлении теплового равновесия термометра сначала с одним телом, а затем с другим, можно судить о том, температура какого тела выше: большей температуре соответствует большая длина столбика жидкости в трубке термометра. Если за начало отсчета принять температуру таяния льда, а второй фиксированной точкой считать температуру кипения воды при нормальном атмосферном давлении, и разделить этот температурный интервал на 100 равных частей, то получаем шкалу Цельсия, наиболее распространенную в технике и в быту. По такой шкале единица измерения температуры – *градус Цельсия* $[°\mathrm{C}]$. Перемещение столбика жидкости в трубке термометра на одно деление соответствует изменению температуры на $1\,°\mathrm{C}$. Различные жидкости расширяются при нагревании по-разному, поэтому шкала зависит отчасти от свойств жидкости, находящейся в термометре. Этот недостаток отсутствует у идеальной газовой шкалы температур: разреженные газы при нагревании расширяются одинаково, если давление постоянно.

Опыт показывает, что для всех газов в состоянии теплового равновесия величина $p/n = \Theta$ одинакова, т. е. одинаковы средние кинетические энергии молекул разных масс. Поэтому температуру можно считать мерой средней кинетической энергии хаотического движения молекул; величина $\Theta = 2 < E > /3$ является естественной мерой температуры и измеряется в энергетических единицах.

Температура Θ в джоулях должна быть прямо пропорциональна температуре T в градусах: $\Theta = kT$. Определенная таким равенством температура называется *абсолютной*. При этом

$$p = n\Theta = nkT. \tag{10.3}$$

Из (10.3) следует, что $T = 0$ при $p = 0$. Предельную температуру, при которой давление идеального газа обращается в нуль при фиксированном объеме, называют абсолютным нулем температуры. Это самая низкая из возможных температур, т. к. при $p = 0$ средняя энергия $< E >= 0$, т. е. нет движения молекул.

Абсолютная температурная шкала была введена английским физиком Кельвином и носит его имя. Нулевая температура (начало отсчета) по шкале Кельвина соответствует абсолютному нулю, а каждая единица температуры равна градусу Цельсия. Для этого необходимо, чтобы коэффициент в (10.3) был равен $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; $[\text{К}]$ – обозначение градуса Кельвина (*кельвин*), k – *постоянная Больцмана*, связывающая температуру в энергетических единицах с температурой T в кельвинах. Температуре $t = 0\,°\text{C}$ соответствует абсолютная температура, т. е. связь шкал Кельвина и Цельсия имеет вид: $T = t + 273{,}15$. При этом изменения температур $\Delta T = \Delta t$. Из (10.2) и (10.3) получаем:

$$< E >= 3kT / 2, \tag{10.4}$$

т. е. средняя кинетическая энергия молекул идеального газа пропорциональна абсолютной температуре.

Из (10.3) следует также, что при одинаковых давлениях и температурах концентрации молекул разных идеальных газов одинаковы. Отсюда следует *закон Авогадро*: в равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул.

Из формулы $<E>=3kT/2=m_0<v^2>/2$ можно найти средний квадрат скорости молекул: $<v^2>=3kT/m_0$. Квадратный корень из этой величины определяет среднюю квадратичную скорость:

$$\sqrt{<v^2>}=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{3kN_AT}{M}}, \qquad (10.5)$$

где M – молярная масса, $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ моль – *число Авогадро*.

Опыт Штерна и другие опыты доказали справедливость этой формулы. Вычисляя по формуле (10.5) среднюю квадратичную скорость молекул, например, азота ($M=0{,}028$ кг/моль) при $t=0\,°\mathrm{C}$, получим $\sqrt{<v^2>}=500$ м/с. Скорости отдельных молекул могут принимать как меньшие, так и существенно большие значения.

10.4. Уравнение состояния идеального газа и изопроцессы в идеальном газе

Уравнение состояния идеального газа можно получить из формулы (10.3), если учесть, что концентрация молекул $n = \nu N_A / V$, где ν – число молей, V – объем газа. Тогда $pV = \nu k N_A T$. Величина $kN_A = R$ – газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$K). Учитывая, что $\nu = m / M$, где m – масса газа, получаем:

$$pV = (m / M) RT. \tag{10.6}$$

От разновидности газа в этом уравнении зависит только молярная масса *M*. Легко видеть, что для различных состояний данной массы газа имеет место соотношение:

$$p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2 = \ldots = (m / M) R = \text{const}. \tag{10.7}$$

Уравнение состояния идеального газа в форме (10.7) – *уравнение Клапейрона*, в форме (10.6) – *уравнение Менделеева–Клапейрона*.

Уравнение состояния позволяет определить одну из величин, характеризующих состояние газа, при известных двух других величинах и установить, как меняется состояние газа при совершении работы или теплообмене.

Изопроцессы протекают в газе при неизменном значении одного из термодинамических параметров. Изопроцесс – идеализированная модель реального процесса, приближенно отражающая действительность.

Изотермический – процесс изменения состояния термодинамической системы макроскопических тел при постоянной температуре. Для поддержания постоянной температуры газа необходимо, чтобы он мог обмениваться теплотой с большой системой – *термостатом* (например, с атмосферным воздухом). При $m = \text{const}$ и $T = \text{const}$ из (10.6) получаем:

$$pV = \text{const}. \tag{10.8}$$

Закон Бойля-Мариотта: для газа данной массы произведение давления на объем постоянно при неизменной температуре. На рисунке 10.1 приведены изотермы – линии, соответствующие уравнению (10.8) при разных температурах.

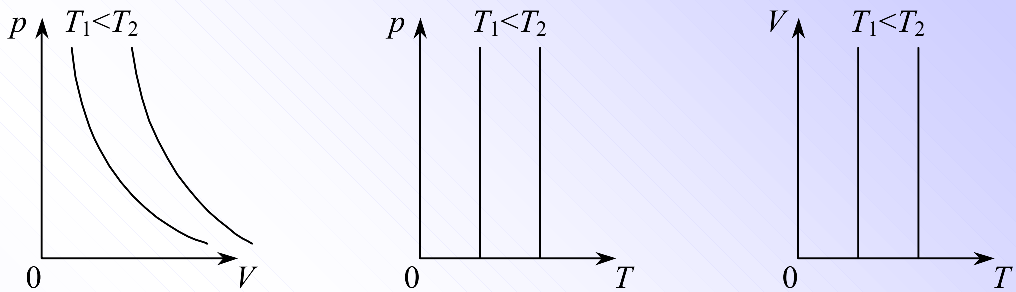


Рисунок 10.1

Изобарный – процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном давлении. При $m = \text{const}$ и $p = \text{const}$ из (10.6) получаем:

$$V\,/\,T = \text{const}. \qquad (10.9)$$

Закон Гей-Люссака: для газа данной массы отношение объема газа к абсолютной температуре постоянно при неизменном давлении. На рисунке 10.2 приведены изобары.

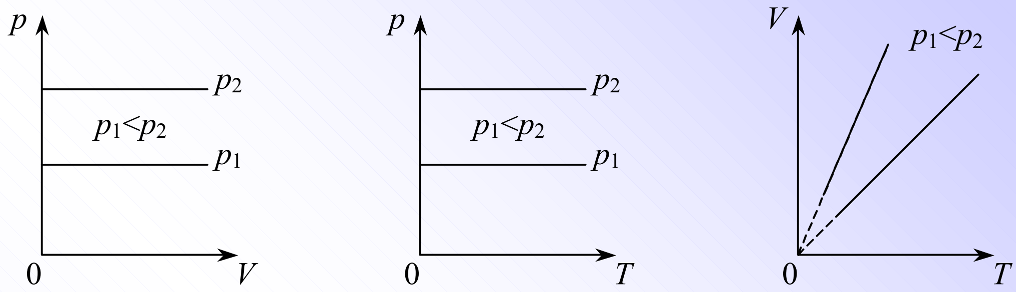


Рисунок 10.2

Изохорный – процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном объеме. При $m = \text{const}$ и $V = \text{const}$ из (10.6) получаем:

$$p / T = \text{const}. \qquad (10.10)$$

Закон Шарля: для газа данной массы отношение давления к абсолютной температуре постоянно при неизменном объеме. На рисунке 10.3 приведены изохоры.

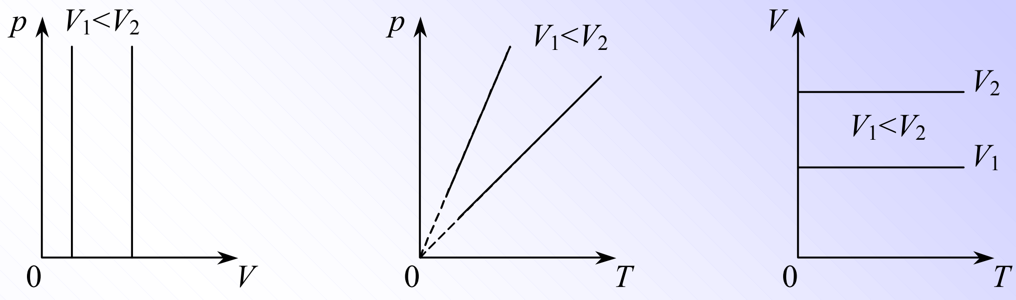


Рисунок 10.3

Если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, то давление смеси равно сумме парциальных давлений ее компонентов – *закон Дальтона*. *Парциальным* называют давление одного компонента смеси, которое было бы в сосуде в отсутствие других компонентов.

10.5. Примеры решения задач по теме 10

Задача 10.1. Воздушный шар (баллон постоянного объема, наполненный гелием) поднимается до максимальной высоты h_1. Через отверстие в нижней части шар сообщается с атмосферой. Как изменится максимальная высота подъема, если гелий нагреть до температуры T и поддерживать ее постоянной во время полета? Температуру атмосферы считать постоянной и равной T_0, а давление – изменяющимся по закону $p = p_0(1 - ah)$, где a – постоянная, h – высота подъема, p_0 – давление у поверхности Земли.

Решение. Давления на высотах h_1 и h_2:

$$p_1 = p_0(1 - ah_1) = \frac{\rho_1 R T_0}{M} = \frac{\rho_1' R T_0}{M'}$$

и

$$p_2 = p_0(1 - ah_2) = \frac{\rho_2 R T_0}{M} = \frac{\rho_2' R T_0}{M'},$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности воздуха на высотах h_1 и h_2, ρ_1' и ρ_2' – соответствующие плотности гелия, M и M' – молярные массы воздуха и гелия, R – газовая постоянная.

Условия равновесия шара на соответствующих высотах: $\rho_1 Vg = \rho_1' Vg + mg$, $\rho_2 Vg = \rho_2' Vg + mg$, где m – масса оболочки шара, V – объем, g – ускорение свободного падения. Решая приведенные выше уравнения, получаем:

$$h_2 = \frac{1}{a} - \frac{(1/a - h_1)(M - M')}{M - M' T_0 / T}.$$

При этом $h_2 > h_1$, т. е. максимальная высота подъема увеличивается.

Задача 10.2. При расширении идеального газа его давление прямо пропорционально объему. Во сколько раз изменится объем газа при повышении температуры от T_1 = 200 К до T_2 = 400 К ?

Решение. По уравнению Менделеева–Клапейрона, $pV = \nu RT$ или $p = \nu RT / V$. По условию задачи $p_1 / p_2 = V_1 / V_2$. Таким образом, $p_1 / p_2 = V_1 / V_2 = T_1 V_2 / T_2 V_1$ и $V_2 / V_1 = \sqrt{T_2 / T_1} = \sqrt{2}$.

Задача 10.3. С идеальным газом проведен замкнутый процесс, состоящий из трех этапов. На первом этапе объем газа увеличивался по закону $V = \alpha \sqrt{T}$, на втором – давление газа уменьшалось по закону

$p=\beta T$, а на третьем – состояние газа изменялось по закону $V=\gamma T$, где α, β и γ – постоянные коэффициенты. Первое, второе и третье состояния газа – это начальные его состояния в соответствующих этапах процесса. Постройте диаграмму этого процесса в координатах p,V. Определите температуру T_3 газа в третьем состоянии, если температуры T_1 и T_2 газа в первом и во втором состояниях известны.

Решение. Закон изменения состояния газа на первом этапе представим в виде $V^2=\alpha^2 T$, уравнение Менделеева–Клапейрона $pV=\nu RT$. Из этих двух уравнений получим $p=\nu RV/\alpha^2=kV$, где $k=\nu R/\alpha^2$ – постоянная величина. Значит, на первом этапе давление газа изменялось пропорционально его объему. Графиком этого процесса в p,V-координатах является участок 1–2 прямой (рисунок 10.4), проходящей через начало координат, угловой коэффициент которой k. По условию задачи на втором этапе давление газа изменялось пропорционально его температуре, следовательно, соответствующий процесс был изохорным. Его график – участок прямой 2–3. Аналогично установим, что график третьего (изобарного) процесса – участок прямой 3–1. Для первого процесса $p_1/p_2=V_1/V_2$, а для второго $p_3/p_2=T_3/T_2$. При этом $p_1=p_3$, и левые части записанных уравнений равны. Значит, равны и правые части: $V_1/V_2=T_3/T_2$. Так как $V_2=V_3$, то $V_1/V_3=T_3/T_2$. Для третьего процесса

$V_1 / V_3 = T_1 / T_3$. Из двух последних уравнений следует, что $T_3 / T_2 = T_1 / T_3$, и ответ задачи: $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$.

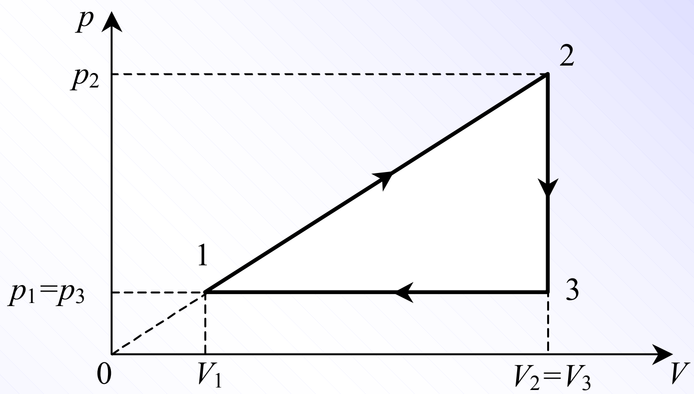


Рисунок 10.4

Тема 11.
Основные понятия и законы термодинамики

11.1. Внутренняя энергия термодинамической системы. Работа и теплообмен

Внутренняя энергия макроскопического тела определяется суммой кинетических энергий всех молекул (атомов) относительно центра масс тела и потенциальных энергий взаимодействия молекул между собой (но не с молекулами других тел). Во внутреннюю энергию входит также энергия движения и взаимодействия частиц в молекулах и атомах, но она практически постоянна при небольших изменениях температуры.

Для идеального газа, молекулы которого одноатомные, средняя кинетическая энергия молекулы $<E>=3kT/2$, число молекул $N=\nu N_A = mN_A/M$, потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю. Тогда внутренняя энергия

$$U=<E>N=(3kT/2)\cdot(m/M)N_A=(3/2)(m/M)RT. \qquad (11.1)$$

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре. Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = (3/2)(m/M)RT. \tag{11.2}$$

Если молекулы газа многоатомные, то внутренняя энергия также прямо пропорциональна абсолютной температуре, но коэффициент пропорциональности изменяется, т. к. наряду с поступательным движением, молекулы могут вращаться. Для двухатомного газа $U = (5/2)(m/M)RT$, для многоатомного газа $U = 3(m/M)RT$.

У реальных газов, жидкостей и твердых тел средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул отлична от нуля (для жидкостей и твердых тел сравнима со средней кинетической энергией).

Т. к. при изменении объема меняются расстояния между молекулами, то средняя энергия взаимодействия молекул зависит от объема вещества. В общем случае внутренняя энергия макроскопических тел однозначно определяется параметрами, характеризующими состояние этих тел: температурой T и объемом V.

Различают следующие *два способа изменения внутренней энергии* – теплопередачу и совершение механической работы. Совершение механической работы является макроскопическим способом передачи (изменения) энергии, а теплопередача – микроскопическим.

Процесс перехода внутренней энергии от одного тела к другому без совершения работы называют *теплообменом* или *теплопередачей*. Различают следующие основные виды теплопередачи: *теплопроводность*, *конвекция*, *излучение*. *Количество теплоты* – энергия, переданная от тела к телу путем теплообмена. Единица количества теплоты – *джоуль*. Для нагревания тела массой m от температуры t_1 до температуры t_2 необходимо передать ему количество теплоты

$$Q = cm\left(t_2 - t_1\right). \tag{11.3}$$

При остывании тела $t_2 < t_1$ и $Q < 0$. Коэффициент c – *удельная теплоемкость* – количество теплоты, которое получает или отдает тело массой $1\,\text{кг}$ при изменении его температуры на $1\,°\text{C}$ (или на $1\,\text{K}$). Величина c зависит от свойств вещества и от того, при каком процессе происходит теплопередача. Для газов различают удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p ($c_p > c_V$). Для жидкостей и твердых тел $c_p = c_V$. Единица измерения удельной теплоемкости – *джоуль на килограмм-кельвин* $\left[\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\right]$. Величина $C = cm$ – *теплоемкость*, единица ее измерения – *джоуль на кельвин* $\left[\text{Дж/К}\right]$; величина $C_M = C/\nu = cM$ – *молярная теплоемкость*, единица ее измерения – *джоуль на моль-кельвин* $\left[\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\right]$.

В механике работа совершается при действии силы на движущееся тело и равна изменению его кинетической энергии. В термодинамике речь идет о перемещении частей макроскопической системы друг относительно друга, в результате чего меняется объем. Если поршень сжимает газ, то передает молекулам часть своей механической энергии, в результате газ нагревается. Если газ расширяется, то после столкновения с удаляющимся поршнем скорости молекул газа уменьшаются, и газ остывает.

Пусть поршень действует на газ с силой $\vec{F}$ (рисунок 11.1).

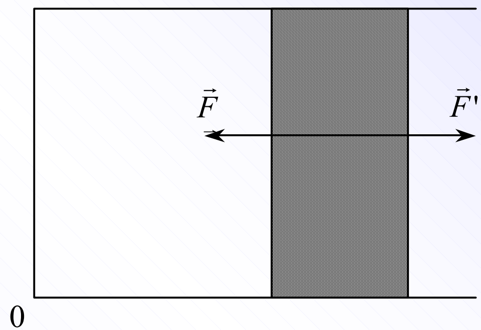


Рисунок 11.1

По третьему закону Ньютона, газ действует на поршень с силой $\vec{F}' = -\vec{F}$. При перемещении поршня в направлении силы $\vec{F}'$ на элементарное расстояние dh, работа силы $\vec{F}'$ равна:

$$dA' = F'dh = pSdh = pdV, \tag{11.4}$$

где dV – элементарное изменение объема газа, p – давление. Если $p = \text{const}$, то

$$A' = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \qquad (11.5)$$

Работа внешней силы над газом: $A = -A' = -p\Delta V$.. При расширении газа $A' > 0$, $A < 0$; при сжатии газа $\Delta V < 0$, $A' < 0$, $A > 0$. При $p \neq \mathrm{const}$ (в общем случае)

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} p dV; \qquad p = p(V). \qquad (11.6)$$

На рисунке 11.2 работа газа **A′** численно равна площади заштрихованной фигуры.

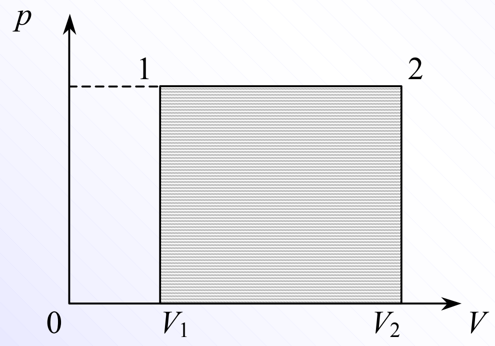


Рисунок 11.2

11.2. Первый закон термодинамики и его применение к изопроцессам

Закон сохранения и превращения энергии, распространенный на тепловые явления, носит название *первого закона термодинамики*: изменение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, переданного системе:

$$\Delta U = A + Q. \qquad (11.7)$$

Система называется *изолированной*, если над ней не совершается работа (A = 0), и она не обменивается теплотой с окружающими телами (Q = 0), В этом случае $\Delta U = 0$, $U_1 = U_2 = \text{const}$ – внутренняя энергия изолированной системы сохраняется.

Другая формулировка первого закона термодинамики: количество теплоты, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии системы и совершение системой работы над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A'. \qquad (11.8)$$

Из первого закона термодинамики следует невозможность создания *вечного двигателя первого рода* – устройства, способного совершать неограниченное количество работы без затрат топлива и других материалов. В самом деле, если к системе не поступает теплота, то $Q = 0$ и $A' = -\Delta U$ – работа совершается за счет убыли внутренней энергии, запасы которой ограничены.

Рассмотрим применение первого закона термодинамики к изопроцессам. При изохорном процессе $V = \text{const}$, следовательно,

$$\Delta V = 0; A = 0; \Delta U = Q. \qquad (11.9)$$

При нагревании газа $Q > 0$, $\Delta U > 0$ – внутренняя энергия увеличивается; при охлаждении газа $Q < 0$, $\Delta U < 0$ – внутренняя энергия уменьшается. Для одноатомного газа $\Delta U = (3/2)(m/M)R\Delta T$, теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = Q/(\Delta T) = (3/2)(m/M)R$, молярная теплоемкость $C_{VM} = 3R/2$.

При изобарном процессе $p = \text{const}$, и для одноатомного газа

$$A' = p\Delta V = (m/M)R\Delta T; Q = \Delta U + A' = (5/2)(m/M)R\Delta T. \qquad (11.10)$$

Теплоемкость газа при постоянном давлении $C_p = (5/2)(m/M)R$, молярная теплоемкость $C_{pM} = 5R/2 = C_{VM} + R$.

При изотермическом процессе $T = \text{const}$, следовательно,

$$\Delta T = 0; \Delta U = 0; Q = A'. \qquad (11.11)$$

Если газ получает теплоту ($Q > 0$), то он совершает положительную работу (расширяется); если газ отдает теплоту ($Q < 0$), то его работа отрицательна (сжимается). Для малого изменения объема

$$dA' = pdV = (m/M)RT(dV/V). \qquad (11.12)$$

Тогда

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (11.13)$$

или, учитывая, что $p_1V_1 = p_2V_2 = (m/M)RT$, получим:

$$A' = p_1V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_2V_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1V_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = p_2V_2 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \qquad (11.14)$$

Адиабатным называется процесс в теплоизолированной системе.

При $Q = 0$ и $\Delta U = A$ – изменение внутренней энергии системы происходит за счет совершения над газом работы. В реальных условиях процесс, близкий к адиабатному, отличается быстротой протекания. В теории идеального газа выводится уравнение адиабаты $pV^{\gamma} = \text{const}$, где

$\gamma = C_p / C_V$ – *постоянная адиабаты*. Для одноатомных газов $\gamma = 5/3$. Адиабатные процессы широко используются в технике. Например, нагревание воздуха при быстром сжатии применяется в двигателях Дизеля.

11.3. Второй закон термодинамики

Все макроскопические процессы в природе имеют определенную направленность, не отраженную в первом законе термодинамики. Необратимыми называются процессы, которые самопроизвольно могут протекать только как звенья более сложных процессов. Так при остывании нагретых тел их энергия путем теплообмена передается более холодным окружающим телам; при затухании колебаний маятника механическая энергия переходит во внутреннюю и т. п. Процессы, обратные приведенным, не противоречат первому закону термодинамики, но самопроизвольно не протекают.

Направление возможных энергетических превращений указывает второй закон термодинамики: невозможно перевести теплоту от более холодной системы к более горячей при отсутствии других одновременных изменений в обеих системах или окружающих телах (*формулировка Клаузиуса*). Важность этого закона состоит в том, что из него следует заключение о необратимости не только процесса теплопередачи, но и других процессов в природе, т. к. если бы теплота в каких-либо случаях могла передаваться самопроизвольно к более нагретым телам, то это позволило бы сделать обратимыми и другие процессы. *Второй закон термодинамики* запрещает построение *вечных двигателей второго рода*, т. е. двигателей, для которых первый закон термодинамики выполняется, но теплота передается от менее нагретых тел к более нагретым телам, совершая при этом полезную работу.

11.4. Тепловые двигатели и их коэффициенты полезного действия

Тепловые двигатели предназначены для превращения внутренней энергии топлива в механическую. Для того, чтобы двигатель работал, необходимо создать разность давлений по обе стороны его поршня (или лопастей турбины). Во всех тепловых двигателях эта разность давлений достигается за счет повышения температуры рабочего тела (газа) при сгорании топлива. У любого теплового двигателя есть нагреватель с температурой T_1 и холодильник с более низкой температурой T_2 (холодильником может служить, в частности, атмосфера). Получив от нагревателя количество теплоты Q_1, рабочее тело (газ) совершает при расширении работу A' и передает холодильнику количество теплоты Q_2 $(Q_2 < Q_1)$. Таким образом, $A' = Q_1 - Q_2$.

Коэффициентом полезного действия (КПД) называют отношение работы A' двигателя к количеству теплоты Q_1, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (11.15)$$

При этом $\eta < 1$.

В любом тепловом двигателе состояние рабочего тела изменяется циклически; циклы повторяются. Все тепловые машины (тепловые двигатели, теплосиловые установки, компрессоры, холодильные установки) работают по круговым процессам или циклам. Для термодинамического анализа работы таких машин важно знать условия, при которых осуществляется процесс преобразования теплоты в работу. *Циклом* называют круговой замкнутый процесс, совершающийся в тепловой машине, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. Состояние цикла характеризуется начальным и конечным значениями параметров.

На графике зависимости давления от объема термодинамический цикл представляет собой замкнутую фигуру, состоящую из ряда линий, каждая из которых отражает термодинамический процесс. Точки пересечения линий процессов называют характерными точками цикла. Характерная точка графически изображает конечное состояние газа одного процесса и начальное состояние следующего процесса.

Циклы, совершаемые идеальным газом, можно разбить на процессы расширения и сжатия. Работа расширения положительна, работа сжатия отрицательна. Работа, совершаемая за цикл определяется площадью, охваченной замкнутой кривой. Если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по часовой стрелке), то этот цикл называется прямым. Если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется обратным.

Каждый цикл тепловой машины состоит из разных процессов: получения энергии от нагревателя, рабочего хода (расширения газа и превращения части полученной энергии в механическую работу), передачи неиспользованной части энергии холодильнику. Французский инженер Карно показал, что максимальный КПД имеет тепловая машина, цикл которой состоит из двух изотерм и двух адиабат. Такую тепловую машину называют *идеальной*; ее КПД выше, чем КПД реального теплового двигателя, и равен

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (11.16)$$

Так, для T_1 = 800 К и T_2 = 300 К $\eta_{\max} = 0,62$, в то время как КПД реальных двигателей при тех же значениях T_1 и T_2 $\eta < 0,4$.

Тепловые двигатели относятся к наиболее распространенным устройствам для получения механической энергии (которая преобразуется, в случае необходимости, в другие виды энергии): паровые турбины, турбины атомных электростанций, двигатели внутреннего сгорания автомобилей, поршневые, турбореактивные и реактивные авиадвигатели и т. п. Применение тепловых двигателей связано с отводом большого количества теплоты в окружающую среду, что приводит к постепенному повышению средней температуры на Земле. При этом существует угроза таяния ледников и повышения уровня Мирового океана. Атмосфера загрязняется углекислым газом и ядовитыми (токсичными) соединениями.

На АЭС есть проблема захоронения радиоактивных отходов; с увеличением мощности электростанций возрастает потребность в воде. Поэтому необходимо не только повышать КПД двигателей, но и разрабатывать новые экологически более безопасные их типы.

Общий алгоритм решения задач о вычислении КПД циклов достаточно простой. КПД любого прямого цикла определяется выражением $\eta = A / Q_1$, где $A = Q_1 - Q_2$ – работа, совершаемая рабочим телом за цикл, Q_1 – количество теплоты, получаемое от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, передаваемое холодильнику. Для идеального газа работа численно равна площади фигуры, изображающей цикл на графике зависимости давления от объема, а количество теплоты на каждом этапе цикла вычисляется на основании первого закона термодинамики: $Q_{ik} = A_{ik} + \Delta U_{ik}$, *где* A_{ik} – работа, а ΔU_{ik} – изменение внутренней энергии на данном этапе. При этом $A_{ik} = 0$ только для изохорного процесса, а $\Delta U_{ik} = 0$ как для изотермического процесса, так и для любого другого, если температуры в начальном и конечном состоянии одинаковы; $Q_{ik} = 0$ как для адиабатного процесса, так и для любого другого при $A_{ik} = -\Delta U_{ik}$. Таким образом, основная проблема решения соответствующих задач учащимися связана с умением правильно вычислять величины Q_1 и Q_2. Рассмотрим такие задачи.

11.5. Примеры решения задач по теме 11

Задача 11.1. ν киломолей идеального газа расширяются так, что квадрат объема пропорционален абсолютной температуре. Определить работу газа при повышении температуры от T_1 до T_2.

Решение. По условию $V^2 = \alpha T$, где $\alpha = \text{const} > 0$ – неизвестный коэффициент пропорциональности. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ находим температуру T и, подставляя в исходное уравнение, получаем $p = \nu RV / \alpha$, т. е. давление прямо пропорционально объему. График представлен на рисунке 11.3. Работа соответствует площади заштрихованной фигуры:

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{\nu R}{2\alpha}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1).$$

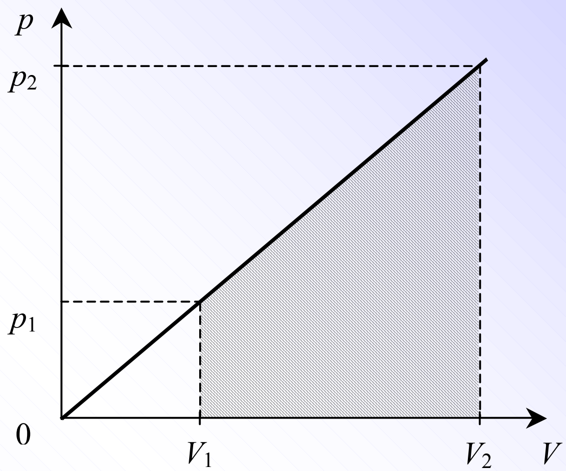


Рисунок 11.3

Задача 11.2. Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из изохоры, адиабаты и изобары (рисунок 11.4). Найти работу газа за цикл и КПД цикла, если $p_1 = 0{,}320 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 2{,}43 \cdot 10^5$ Па, $V_1 = 80$ л, $V_3 = 270$ л.

Решение. На участке 1–2 (рисунок 11.4) газ получает количество теплоты $|Q_1| = 1{,}5\nu R(T_2 - T_1) = 1{,}5V_1(p_2 - p_1)$. На участке 3–1 газ отдает количество теплоты $|Q_2| = p_1(V_3 - V_1) + 1{,}5\nu R(T_3 - T_1) = 2{,}5p_1(V_3 - V_1)$.

Здесь ν – число молей газа, R – газовая постоянная. Отсюда находим работу газа за цикл $A = |Q_1| - |Q_2| = p_1V_1 + 1{,}5p_2V_1 - 2{,}5p_1V_3 = 2{,}02 \cdot 10^4$ Дж и КПД цикла $\eta = 1 - \dfrac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \dfrac{5p_1(V_3 - V_1)}{3V_1(p_2 - p_1)} = 0{,}4.$

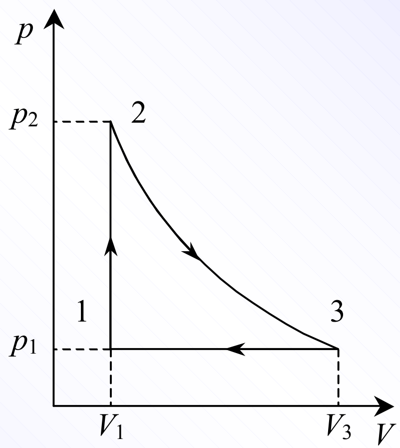


Рисунок 11.4

Задача 11.3. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок 11.5) и КПД этого цикла. Сравнить его с КПД цикла Карно, у которого температуры нагревателя и холодильника равны максимальной и минимальной температурам данного цикла. Давление p_0 и объем V_0 известны.

Решение. Из рисунка 11.5 видно, что на участке ABC работа газа положительная, на участке CDA – отрицательная (работа над газом). Изменение внутренней энергии на участке AB положительное, на участке CD отрицательное, на участках BC и DA – нулевое. Газ получает количество теплоты $Q_1 = Q_{ABC} = A_{ABC} + \Delta U_{ABC} = 5p_0V_0 + 1,5R\left(T_B - T_A\right) = 11p_0V_0$. Здесь использовано уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = RT$. Работа численно равна площади цикла: $A = 2p_0V_0$. КПД цикла $\eta = A / Q_1 = 2/11$ или $\eta \approx 18\%$. Максимальная температура соответствует середине участка BC и равна $T_1 = 2,5p_0 \cdot 2,5V_0 / R$; минимальная температура $T_2 = T_A = T_D = 2p_0V_0 / R$. Тогда КПД соответствующего цикла Карно $\eta = 1 - T_2 / T_1 = 0,68$ или $\eta \approx 68\%$.

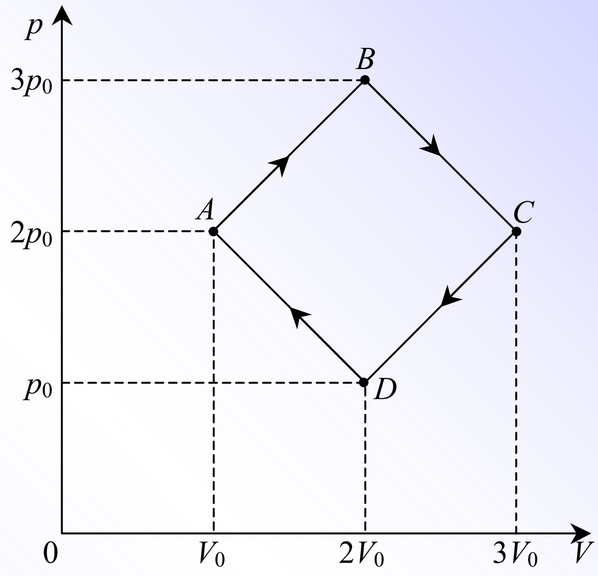


Рисунок 11.5

Задача 11.4. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, в пределах которого температура изменяется в n раз (рисунок 11.6). Найти КПД цикла.

Решение. Работа A численно равна площади цикла: $A = 0{,}5(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$. Газ получает на участке 1–2 количество теплоты $Q = 1{,}5\nu R(T_2 - T_1) + 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$; ν – число молей газа, T_i – температура в данном состоянии. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует: $p_1V_1 = \nu RT_1$, $p_2V_2 = \nu RT_2$, $p_3V_3 = p_1V_2 = \nu RT_3$; при этом

$p_1 / V_1 = p_2 / V_2$, т. е. $p_1 V_2 = p_2 V_1$, а также $T_3 / T_1 = V_2 / V_1$, $T_3 / T_2 = p_1 / p_2$, откуда $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$. Так как $T_2 = nT_1$, то $T_3 = T_1\sqrt{n}$, $A = 0{,}5\nu RT_1\left(n + 1 - 2\sqrt{n}\right)$, $Q = 2\nu RT_1(n-1)$ и $\eta = \dfrac{\sqrt{n}-1}{4\left(\sqrt{n}+1\right)}$.

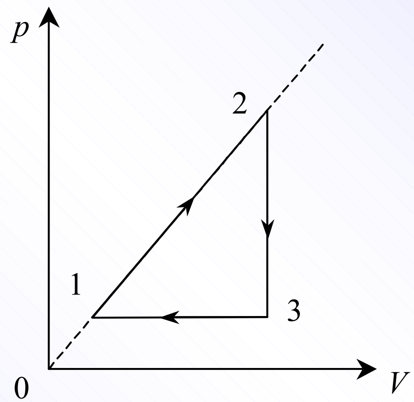


Рисунок 11.6

Задача 11.5. Над молем одноатомного идеального газа совершают цикл из двух изобар и двух изохор (рисунок 11.7). Температуры в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_3. Определить количество теплоты, полученное газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

Решение. Используя газовые законы, запишем $p_2 / T_2 = p_1 / T_1$; $V_2 / T_2 = V_3 / T_3$; $p_3 V_1 = p_2 V_2 = p_4 V_4 = p_1 V_3$. Отсюда находим: $p_2 V_2 / T_2^2 = p_1 V_3 / T_1 T_3$ и $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$. Согласно первому началу термодинамики, искомое количество теплоты определяется суммой изменения внутренней энергии при переходе из состояния 1 через состояние 2в состояние 3 $\Delta U_{123} = 1{,}5R(T_3 - T_1)$ и работой при том же переходе $A_{123} = p_2(V_3 - V_2)$. Итак,

$$Q = Q_{123} = \Delta U_{123} + A_{123} = R\left(2{,}5T_3 - 1{,}5T_1 - \sqrt{T_1 T_3}\right).$$

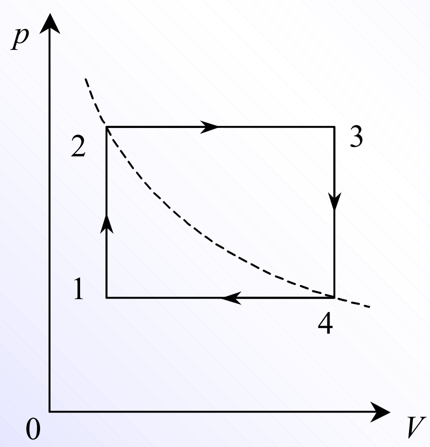


Рисунок 11.7

Тема 12.
Агрегатные состояния и тепловой баланс

12.1. Парообразование, кипение, влажность

В школьном курсе молекулярной физики и термодинамики рассматриваются различные *агрегатные состояния вещества:* твердое, жидкое и газообразное. Одно и то же вещество при определенных условиях может находиться в любом из этих состояний, а также переходить из одного состояния в другое.

Отдельные молекулы жидкости могут иметь кинетические энергии, превышающие среднюю кинетическую энергию, соответствующую данной температуре. Такие молекулы способны преодолеть притяжение остальных молекул и вылететь из жидкости. В этом и состоит процесс *испарения*, который происходит при любой температуре, но тем интенсивнее, чем больше открытая поверхность жидкости и выше температура. При испарении жидкость покидают более быстрые молекулы, и температура жидкости понижается. Вылетевшая молекула, участвуя в тепловом движении газа, может вернуться в жидкость. Такой процесс называется конденсацией.

Если число молекул, вылетающих из жидкости, равно числу молекул, возвращающихся в нее, то говорят о *динамическом равновесии* между жидкостью и ее паром. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным*. Концентрация молекул насыщенного пара при постоянной температуре не зависит от его объема, т. к. число молекул, покидающих жидкость в единицу времени, зависит только от температуры. Также не зависит от объема и давление насыщенного пара ($p = nkT$). С ростом температуры давление насыщенного пара растет, но растет и его концентрация. И только когда вся жидкость испарится, и концентрация пара станет неизменной, давление с увеличением температуры растет практически линейно (рисунок 12.1).

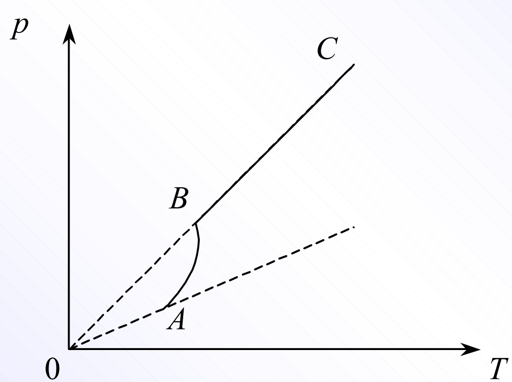


Рисунок 12.1

Если при неизменной температуре газ простым сжатием можно превратить в жидкость, то его называют *ненасыщенным паром* (насыщенным пар становится, как только начинается его превращение в жидкость). При увеличении температуры плотность насыщенного пара увеличивается, а плотность жидкости уменьшается (рисунок 12.2). Критической называют температуру, при которой исчезают различия между жидкостью и ее насыщенным паром. При $T > T_K$ газ нельзя превратить в жидкость ни при каком давлении.

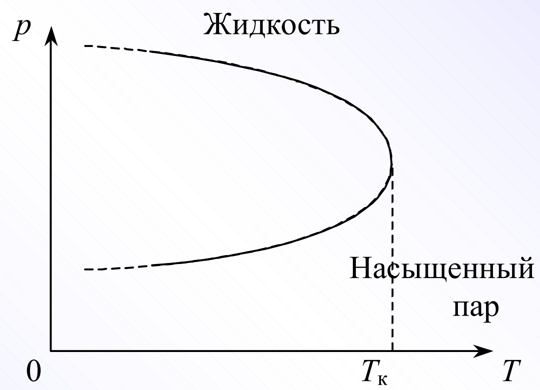


Рисунок 12.2

Кипение – процесс парообразования, который происходит одновременно с поверхности и внутри жидкости. В жидкости всегда есть растворенные газы, которые образуют пузыри на стенках и дне сосуда и на взвешенных частицах (пылинках). Пары жидкости внутри пузырьков насыщенные. С ростом температуры давление внутри пузырьков растет, пузырьки увеличиваются и, под действием выталкивающей силы, всплывают. Если верхние слои холоднее (нагрев жидкости снизу), то происходит конденсация пара в пузырьках, давление падает, и пузырьки «захлопываются». Этим обусловлен характерный шум нагревающейся жидкости. Когда жидкость достаточно нагреется, пузырьки достигают поверхности, и пар из них вырывается наружу – жидкость кипит (шум при этом затихает). Температура кипения зависит от внешнего давления, препятствующего образованию пузырьков внутри жидкости. Кипение начинается при температуре, при которой давление насыщенного пара в пузырьках сравнивается с давлением в жидкости. У каждой жидкости своя температура кипения, которая неизменна, т. к. вся подводимая к жидкости энергия расходуется на превращение ее в пар:

$$Q = rm, \tag{12.1}$$

где r – удельная теплота парообразования, единица измерения которой – *джоуль на килограмм* [Дж/кг].

Содержание водяного пара в воздухе (*влажность воздуха*) характеризуется парциальным давлением водяного пара – давлением, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали. *Относительной влажностью* воздуха φ называется отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению насыщенного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$\varphi = \left(p / p_0\right) \cdot 100\,\%. \tag{12.2}$$

Влажность измеряют с помощью *психрометров* и *гигрометров*. Психрометр состоит из двух термометров: сухого и увлажненного. По разности их показаний при помощи специальных таблиц находят относительную влажность воздуха. Если показания одинаковы, то $\varphi = 100\,\%$. Устройство гигрометра основано на свойстве обезжиренного волоса изменять длину при изменении относительной влажности воздуха. От влажности зависит интенсивность испарения.

12.2. Плавление и кристаллизация

Кристаллы – твердые тела, атомы (ионы) которых колеблются около фиксированных положений равновесия. При этом имеет место так называемый «дальний порядок» – положения равновесия атомов во всем кристалле расположены упорядоченно. Физические свойства кристаллов (теплопроводность, электропроводность, оптические свойства) зависят от выбранного направления. Это свойство кристалла – *анизотропия*. Одиночные кристаллы – *монокристаллы*. Твердое тело, состоящее из большого числа монокристаллов – *поликристалл* (например, большинство металлов). Из-за хаотического расположения отдельных монокристаллов поликристаллические тела могут быть изотропными (физические свойства не зависят от направления).

Для того, чтобы разорвать связи между ионами кристаллической решетки и перевести вещество в жидкое состояние, требуется затратить дополнительную энергию, равную

$$Q = \lambda m, \tag{12.3}$$

где λ – *удельная теплота плавления*, единица измерения которой – *джоуль на килограмм* [Дж/кг].

Плавление (переход из твердого состояния в жидкое) и кристаллизация_(превращение расплава в твердое тело) происходят всегда при строго определенной температуре, называемой температурой плавления (кристаллизации).

У аморфных тел только ближайшие друг к другу атомы располагаются в некотором порядке (так называемый «ближний порядок» – нет строгой повторяемости по всем направлениям одного и того же элемента структуры, характерной для кристаллов); при повышении температуры они текут подобно жидкостям.

Твердое тело подвержено деформациям под действием внешних сил (см. подраздел 6.2 темы 6).

12.3. Теплообмен и уравнение теплового баланса

Если несколько тел с различными температурами привести в соприкосновение, то между ними происходит теплообмен, который приводит к выравниванию температур тел. По закону сохранения энергии количество теплоты, отдаваемое телом с более высокой температурой, равно количеству теплоты, приобретаемому телом с более низкой температурой. Если c_1, m_1, t_1 и c_2, m_2, t_2 – удельные теплоемкости, массы и температуры тел 1 и 2, а t – конечная температура обоих тел, то

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2). \qquad (12.4)$$

Это так называемое *уравнение теплового баланса*. Заметим, что в уравнении (12.4) вместо температуры t °C можно использовать абсолютную температуру T К.

Если в теплообмене участвует более двух тел или если при этом происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, то уравнение теплового баланса имеет вид:

$$c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + \ldots = t(c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots). \qquad (12.5)$$

или, поскольку $C = cm$,

$$C_1t_1 + C_2t_2 + \ldots = t\left(C_1 + C_2 + \ldots\right). \qquad (12.6)$$

При этом необходимо учитывать все тела, участвующие в теплообмене, в том числе сосуды (например, калориметр). Калориметр используют в тех случаях, когда нужно установить тепловое равновесие между твердыми и жидкими телами: их помещают в калориметр. Чтобы устранить тепловые потери, калориметры изготавливают с двойными стенками, между которыми вакуум. Поскольку температура калориметра изменяется в процессе теплообмена, то его теплоемкость необходимо учитывать при расчетах.

Если в процессе теплообмена изменяется агрегатное состояние одного из компонентов, то высвободившееся при этом количество теплоты (см. (12.1) или (12.3)) следует добавить в левую часть уравнения (12.6) (или отнять, если теплота поглощается).

12.4. Примеры решения задач по теме 12

Задача 12.1. Нагретый алюминиевый куб положили на лед, и куб полностью погрузился в лед. До какой температуры был нагрет куб? Температура льда $t = 0°C$, потерями тепла можно пренебречь. Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость алюминия $c = 0{,}88$ кДж/(кг·К).

Решение. Если верхняя грань куба окажется на уровне льда, то объем выплавленной во льду ямки будет равен объему куба V. Тогда уравнение теплового баланса примет вид: $\lambda \rho_л V = c \rho_а V t$. Отсюда искомая температура $t = \dfrac{\lambda \rho_л}{c \rho_а} = 125°C$. При более высокой температуре верхняя грань куба окажется ниже поверхности льда.

Задача 12.2. В калориметр, содержащий $m_1 = 100$ г льда при температуре $t_1 = -5°C$ налили $m_2 = 150$ г воды при температуре $t_2 = 50°C$. Пренебрегая нагреванием калориметра, определить установившуюся в системе температуру. Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}09$ кДж/(кг·К), воды $c_2 = 4{,}19$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 332$ кДж/кг.

Решение. При остывании воды до температуры $t_0 = 0°C$ выделяется количество теплоты, равное $c_2 m_2 \left(t_2 - t_0\right) = 3{,}14 \cdot 10^4$ Дж, которого хватает с избытком для нагревания льда до $t_0 = 0°C$ ($c_1 m_1 \left(t_0 - t_1\right) = 1{,}045 \cdot 10^3$ Дж), но недостаточно для плавления всего льда ($\lambda m_1 = 3{,}32 \cdot 10^4$ Дж). Таким образом, в системе установится температура $t_0 = 0°C$, при этом масса Δm льда растает. Уравнение теплового баланса: $c_1 m_1 \left(t_0 - t_1\right) + \lambda \cdot \Delta m = c_2 m_2 \left(t_2 - t_0\right)$. Отсюда находим: $\Delta m = 91{,}5$ г. В калориметре при $t_0 = 0°C$ будет находиться 241,5 г воды и 8,5 г льда.

Задача 12.3. В теплоизолированном сосуде находится вода при температуре 60°C. Для измерения температуры воды используют термометр, теплоемкость которого равна 10 Дж/К. Определить ошибку измерения температуры, если теплоемкость сосуда с водой равна 500 Дж/К, начальная температура термометра 20°C.

Решение. Ошибка в измерении температуры возникает вследствие того, что термометр имеет собственную теплоемкость C_1 и его начальная температура t_1 меньше, чем температура воды в сосуде t_0. Следовательно, какая-то часть теплоты пойдет на нагревание термометра, что приведет к уменьшению температуры воды. Пусть установившаяся температура после того, как в воду опустим термометр, равна $\left(t_0 - \Delta t\right)$, тогда уравнение

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 229 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

теплового баланса имеет вид $C_0\Delta t = C_1\left(t_0 - \Delta t - t_1\right)$, где C_0 – теплоемкость воды. Отсюда $\Delta t = \dfrac{C_1\left(t_0 - t_1\right)}{C_0 + C_1}$. Эта величина и определяет ошибку измерения $\Delta t\ \approx 0{,}8$°C.

Задача 12.4. На плите стоит кастрюля с водой. При нагревании температура воды увеличилась от 90°C до 95°C за 1,0 мин. Какая доля количества теплоты, получаемая водой при нагревании, рассеивается в окружающее пространство, если известно, что время остывания этой же воды от 95°C до 90°C равно 9,0 мин.?

Решение. Пусть q_1 – количество теплоты, получаемое водой в единицу времени при нагревании, q_2 – количество теплоты, отдаваемое водой в единицу времени окружающей среде. Тогда $\left(q_1 - q_2\right)\tau_1 = q_2\tau_2$, где $\tau_1 = 1{,}0$ мин., $\tau_2 = 9{,}0$ мин. Отсюда находим: $q_2 / q_1 = \tau_1 / \left(\tau_1 + \tau_2\right) = 0{,}1$.

Задача 12.5. Капельку воды (ее температура $t = 0\ °\mathrm{C}$) поместили в вакуум. При интенсивном испарении часть воды замерзла. Оцените, какая из масс – замерзшей или испарившейся воды – больше и во сколько раз. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3 \cdot 10^3$ кДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

Решение. Обозначим массу капельки m, массу испарившейся воды m_1. Тогда масса замерзшей воды $m_2 = m - m_1$. На испарение воды требуется количество теплоты $Q_1 = Lm_1$, а при замерзании выделяется количество теплоты $Q_2 = \lambda m_2$, При очень быстром процессе теплообмен с внешней средой пренебрежимо мал. Поэтому уравнение теплового баланса запишется в виде $Q_1 = Q_2$ или $Lm_1 = \lambda\left(m - m_1\right)$. Отсюда $m_1 = \lambda m / (L + \lambda)$ и $m_2 = m - m_1 = \; = Lm / (L + \lambda)$. Так как $L > \lambda$, то $m_2 > m_1$. Отношение $m_2 / m_1 = L / \lambda \approx 7$, т. е. масса замерзшей воды больше в семь раз.

Задача 12.6. При соблюдении некоторых мер предосторожности воду можно переохладить, т. е. охладить до температуры ниже 0°С. Пробирка, содержащая 12 г воды, помещается в охлаждающую смесь, где вода переохлаждается до –5°С. Затем пробирка вынимается и встряхивается, причем часть воды замерзает. Найти массу замерзшей воды, пренебрегая теплообменом между водой и стенками пробирки. Величина отношения удельной теплоты плавления льда к удельной теплоемкости воды численно равна 80°С.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до 0°С, выделяется при замерзании части воды: $cm \cdot \Delta t = \Delta m \cdot \lambda$, где $m = 12$ г, $\Delta t = 5°\text{C}$, c и λ – удельная теплоемкость воды и удельная теплота плавления льда соответственно. Масса замерзшей воды $\Delta m = cm \cdot \Delta t / \lambda = 0,75$ г.

Примечание. *В приведенном решении реальный процесс идеализирован: сначала вся вода нагревается до 0°C, «беря взаймы» некоторую энергию, а затем часть воды замерзает, выделяя такую же энергию. С точки зрения закона сохранения энергии такой идеализированный процесс эквивалентен реальному процессу.*

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие 1. Задачи кинематики

Вопросы теории

1. Материальная точка, система отсчета, путь и перемещение.
2. Средняя и мгновенная скорости, ускорение.
3. Описание прямолинейных равномерного и равноускоренного движений.
4. Свободное падение и движение тела, брошенного вертикально вверх
5. Классический закон сложения скоростей. Относительность движения.
6. Векторные треугольники скоростей и перемещений в задачах.

Задачи

1. Собственная скорость пловца в n раз $(n>1)$ меньше скорости течения. Под каким углом к течению он должен плыть, чтобы при переправе через реку снос был минимальным?

2. Частица движется вдоль оси X. График зависимости ее ускорения от времени представлен на рисунке 1. В момент времени $t = 0$ частица

покоилась. Найдите среднюю скорость движения частицы за время, значительно большее τ .

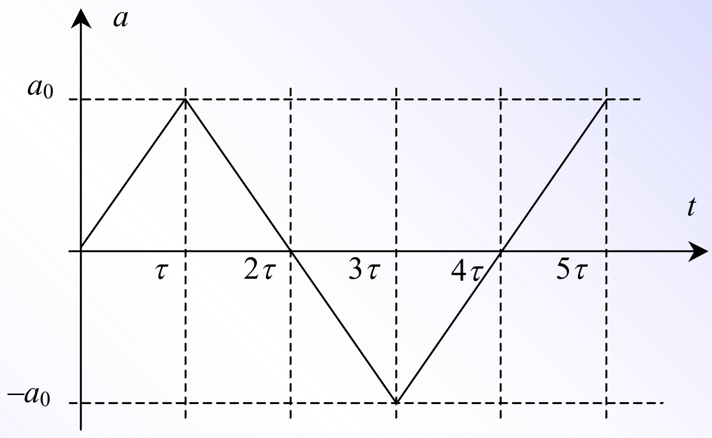


Рисунок 1

3. Мяч брошен с земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту и прыгает по горизонтальной поверхности. Отношение скорости до удара к скорости после удара постоянно и равно k ($k > 1$). Считая углы падения мяча на землю равными углам отражения, найти время движения мяча и расстояние, пройденное им по горизонтали до остановки.

4. С какой наименьшей скоростью нужно бросить с земли камень, чтобы попасть в цель, удаленную от точки бросания на расстояние s по горизонтали и находящуюся на высоте h?

5. На наклонную плоскость с углом α свободно падает мяч без начальной скорости. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места удара мяч упадет на плоскость вторично? Определить величину и направление его скорости в этот момент.

6. Лучник стреляет в горизонтально летящую птицу, причем в момент выстрела стрела была направлена на птицу и под углом α к горизонту. Скорость полета птицы u. Начальная скорость стрелы v. На какой высоте летела птица, если стрела попала в нее? На восходящем или нисходящем участке траектории это произошло?

Занятие 2. Задачи динамики

Вопросы теории

1. Динамические характеристики частицы.
2. Законы Ньютона.
3. Сила тяжести и вес тела.
4. Законы сухого трения. Сила трения покоя и скольжения.
5. Векторные многоугольники сил.

Задачи

7. В системе, представленной на рисунке 2, массы грузов m_1, m_2, m_3 и ускорение свободного падения g известны, блоки и нити невесомы, нити нерастяжимы, трение отсутствует. Найти ускорения грузов.

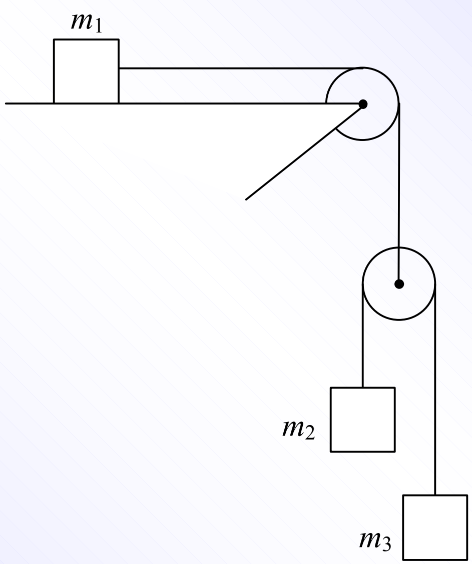


Рисунок 2

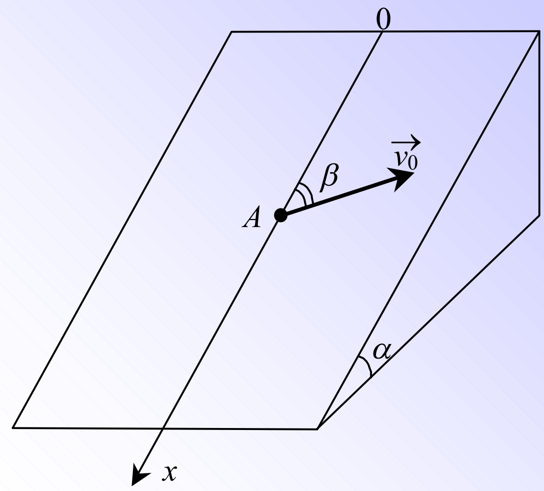


Рисунок 3

8. По плоскости с углом α наклона к горизонту под углом β к направлению подъема толкнули шайбу А со скоростью v_0 (рисунок 3). Коэффициент трения $\mu = \mathrm{tg}\alpha$. Найти установившуюся скорость шайбы.

9. На малое тело с массой m, лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила $\vec{F}$ $(F < mg)$ под углом α к горизонту (рисунок 4). Построить график зависимости силы трения от угла α $(0 \le \alpha \le 90^\circ)$. Коэффициент трения μ $(\mu < 1)$.

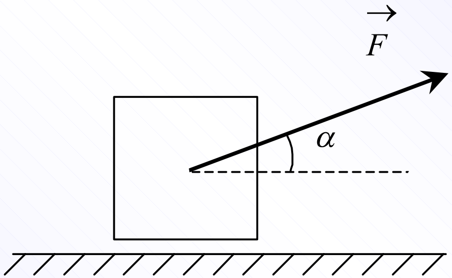


Рисунок 4

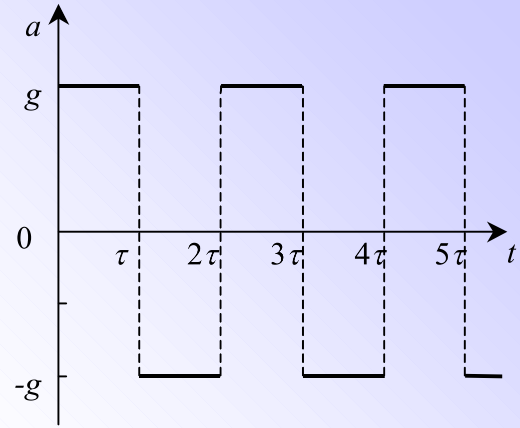


Рисунок 5

10. На доске лежит брусок; коэффициент трения между ними μ ($\mu < 1$). Доску перемещают по прямой в горизонтальной плоскости с ускорением, график зависимости которого от времени представлен на рисунке 5. Построить график зависимости ускорения бруска от времени.

11. Мотоциклист едет по внутренней поверхности вертикального полого цилиндра радиусом R со скоростью v. Траектория мотоциклиста представляет собой винтовую линию с шагом h (рисунок 6). Каким может быть коэффициент трения покоя между покрышками мотоцикла и поверхностью цилиндра? Размеры мотоцикла много меньше R.

Начало
Содержание
Страница 238 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

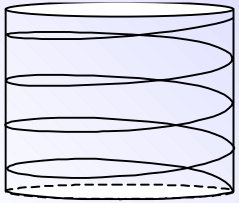


Рисунок 6

12. На наклонной плоскости находится брусок, к которому приложена сила, равная удвоенной силе тяжести бруска и направленная вверх вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость равен $\mu = 1$. При каком угле наклона плоскости к горизонту ускорение бруска будет минимальным и чему оно равно?

Занятие 3. Задачи с использованием законов сохранения и условий равновесия тел

Вопросы теории

1. Теорема об изменении импульса и закон сохранения импульса.
2. Механическая работа, мощность.
3. Кинетическая и потенциальная энергия.
4. Закон сохранения полной механической энергии.
5. Условия равновесия тел.
6. Векторные многоугольники импульсов.

Задачи

13. На две частицы – одну с массой m, летящую со скоростью $v_1 = v$, другую с массой $2m$, летящую со скоростью $v_2 = 2v$ перпендикулярно к первой (рисунок 7), – в течение некоторого времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица начинает двигаться со скоростью $v_1' = 2v$ в обратном направлении. Найти, с какой скоростью будет двигаться при этом вторая частица.

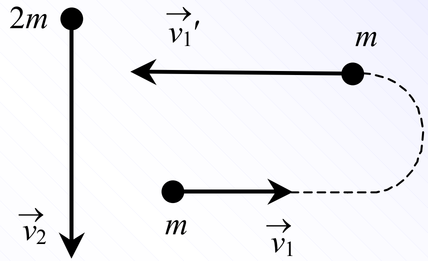


Рисунок 7

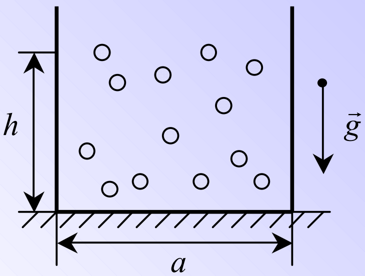


Рисунок 8

14. Лыжник съезжает без трения с горы с углом наклона к горизонту α и при скорости движения v_0 стреляет из ракетницы. Ракета летит вертикально вверх с начальной скоростью v_1. Найти скорость лыжника после выстрела, если отношение массы ракеты к массе лыжника η, а время выстрела τ.

15. Мяч падает на горизонтальный шероховатый пол со скоростью v_1, вектор которой направлен под углом α к горизонту, и отскакивает в обратном направлении со скоростью v_2. Найти коэффициент трения мяча о пол, если длительность соударения τ.

16. На горизонтальной плоскости покоится тонкостенная коробка в форме куба с ребром $a = 1{,}0$ м, изготовленная из упругого материала. В нее с некоторой высоты h аккуратно без начальной скорости высыпают $N = 1000$ маленьких одинаковых упругих шариков массой $m = 5{,}0$ г

каждый. Определите среднее давление хаотически прыгающих шариков на дно коробки (рисунок 8).

17. С горки высотой h скатывается пустая бочка, начальная скорость которой равна нулю, а скорость внизу у основания горки v. Найти скорость у основания горки точно такой же бочки, заполненной невязкой жидкостью (трения между бочкой и жидкостью нет) с массой, вдвое большей массы бочки. Проскальзыванием бочек по поверхности горки и сопротивлением их движению пренебречь.

18. На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых цилиндрических бревна. Сверху между ними кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся? По земле бревна не скользят.

Занятие 4. Задачи молекулярной физики и термодинамики

Вопросы теории

1. Уравнение состояния идеального газа,
2. Изопроцессы в идеальном газе.
3. Внутренняя энергия термодинамической системы.
4. Работа и количество теплоты.
5. Первый закон термодинамики и его применение к изопроцессам.
6. Второй закон термодинамики.
7. Тепловые двигатели и их коэффициенты полезного действия.
8. Парообразование.
9. Плавление и кристаллизация.
10. Теплообмен и уравнение теплового баланса.

Задачи

19. На рисунке 9 изображены два замкнутых цикла: 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Оба цикла проведены с одноатомным идеальным газом. У какого из циклов КПД выше и во сколько раз?

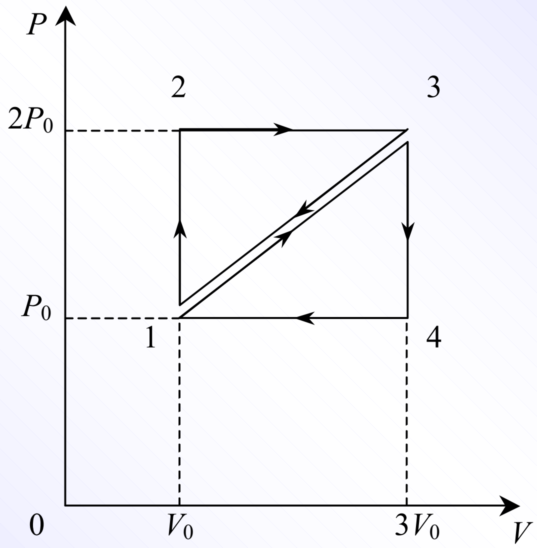


Рисунок 9

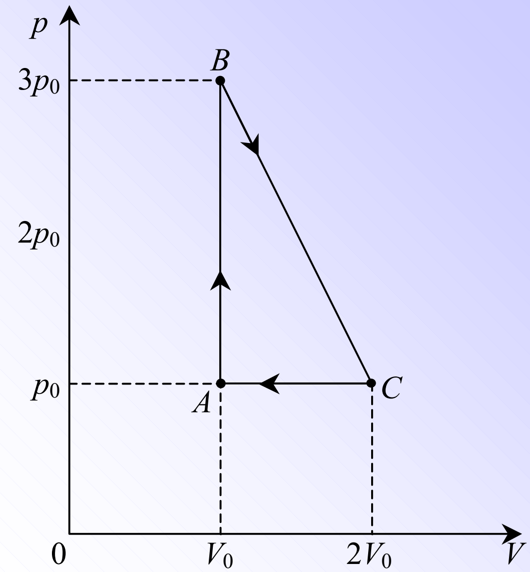


Рисунок 10

20. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок 10) и КПД этого цикла. Давление P_0 и объем V_0 известны.

21. В тепловой машине в качестве рабочего тела используется одноатомный идеальный газ. В процессе работы объем газа V и его температура T изменяются со временем t по законам: $V = V_0(1-\alpha\cos\beta t)$; $T = T_0(1-\alpha\cos\beta t)(1+\alpha\sin\beta t)$, где V_0, T_0, α, β – постоянные величины, $\alpha < 1$. Найти работу за один цикл и КПД этого цикла. Считать известными величины α и T_0, а также число молей ν газа.

22. Теплоемкости двух тел зависят от температуры по закону $C = C_0(1+\alpha t)$, где C_0 и α – известные величины. Тела привели в тепловой контакт. Определить установившуюся температуру тел, если их начальные температуры были больше нуля и равны t_1 и t_2. Потери теплоты не учитывать.

23. Имеются три цилиндрических сосуда, отличающиеся только высотой. Емкости сосудов равны 1 л, 2 л и 4 л. Все сосуды заполнены водой до краев. Воду в сосудах греют с помощью кипятильника. Мощности кипятильника не хватает для того, чтобы вскипятить воду. В первом сосуде воду можно нагреть до 80°C, во втором – до 60°C. До какой температуры можно нагреть воду в третьем сосуде, если комнатная температура 20°C? Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур воды и окружающей среды. Вода в сосуде прогревается равномерно.

24. Для отопления дома горячая вода с температурой t_1 подается в радиаторы по трубе площадью поперечного сечения S_1 со скоростью v_1. При ремонте старую трубу заменили на новую с площадью поперечного сечения S_2. Какой должна быть скорость движения воды температурой t_2 по новой трубе, чтобы температура t_0 в доме не изменилась?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И САМОПРОВЕРКИ

Задачи к теме 2

1. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью v_1, вторую половину пути – со скоростью v_2. Найти среднюю скорость.

2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью v_0, половину оставшегося времени ехал со скоростью v_1 последний участок пути – со скоростью v_2. Найти среднюю скорость.

3. Автомобиль начинает двигаться по прямой с ускорением 5 м/с^2, затем движется равномерно и, наконец, замедляясь с тем же по абсолютной величине ускорением, останавливается. Все время движения 25 с, средняя скорость за это время 25 м/с. Найти время равномерного движения.

4. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую – равнозамедленно. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти: 1) величину ускорения, считая его равным замедлению; 2) время движения поезда между станциями.

5. Тело начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением. Через 30 мин ускорение меняется на противоположное по направлению, оставаясь тем же по величине. Через сколько времени от начало движения тело вернется в исходную точку?

6. С какой высоты и сколько времени падает свободно без начальной скорости тело, если за последнюю секунду движения оно проходит половину всего пути?

7. Первый вагон тронувшегося с места поезда прошел мимо неподвижного наблюдателя, стоящего у начала этого вагона, за время t_1. последний – за время t_2. Считая движение поезда равноускоренным, поезд длинным, а вагоны одинаковыми, найти время движения мимо наблюдателя всего поезда.

8. С крыши здания высотой 27 м через равные промежутки времени падают капли. Первая ударяется о землю в тот момент, когда четвертая отделяется от крыши. Найти для этого момента времени расстояния между каплями.

9. Камень брошен вертикально вверх со скоростью 30 м/с. На какой высоте и через сколько времени скорость камня по модулю будет равна 10 м/с?

10. По наклонной доске снизу вверх пустили шарик. На расстоянии 30 см от начала пути он побывал дважды: через 1с и через 2 с после начала движения. Найти начальную скорость и ускорение шарика.

Задачи к теме 3

11. Катер, двигаясь вниз по реке, теряет в пункте А спасательный круг. Через 1 ч после этого он поворачивает, движется вверх по реке и встречает круг в 6 км от пункта А. Найти скорость течения, если мотор катера все время работал одинаково.

12. Два поезда движутся навстречу со скоростями 72 км/ч и 54 км/ч. Второй поезд проходит мимо пассажира первого за 16 с. Найти длину второго поезда.

13. Эскалатор поднимает неподвижного пассажира за 1 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 3 мин. Сколько времени будет подниматься пассажир, идущий вверх по движущемуся эскалатору?

14. Лодка движется перпендикулярно берегу реки. Ее скорость относительно воды равна v_1. Определить время переправы, если ширина реки b, а скорость течения v_2.

15. Пловец переплывает реку по прямой, перпендикулярно берегу. Определить скорость течения, если она в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости пловца в стоячей воде. Скорость пловца относительно берега 0,5 м/с.

16. С какой скоростью и в каком направлении должен курс самолет, чтобы за 2 ч пролететь точно на север 300 км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом 30º к меридиану со скоростью 27 км/ч?

17. Камень брошен вертикально вверх с высоты h со скоростью v_0. Одновременно с земли со скоростью u_0 бросают вертикально вверх другой камень. Через сколько времени камни окажутся на одной высоте? Чему она равна?

18. Две частицы бросили одновременно из одной точки: одну вертикально вверх, другую под углом 60^{o} к горизонту вверх. Найти расстояние между частицами через 1,7 с, если начальная скорость каждой 25 м/с.

19. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точки, лежащей на ободе, в два с половиной раза больше линейной скорости точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

20. Определить линейную скорость и центростремительное ускорение точек земной поверхности на широте 60^{o}, вызванное суточным вращением Земли.

Задачи к теме 4

21. Вагон массой 20 т движется равнозамедленно с ускорением, равным по модулю 0,3 м/с^2, и начальной скоростью 54 км/ч. Найти силу торможения, действующую на вагон, время движения вагона до остановки и перемещение вагона.

22. К нити подвешена гиря. Если поднимать эту гирю с ускорением 2 м/с^2, то сила натяжения нити будет вдвое меньше силы, необходимой для разрыва. При каком ускорении подъема гири нить разрывается?

23. Человек массой 70 кг поднимается в лифте, движущемся равнозамедленно вертикально вверх с ускорением, равным по модулю 1 м/с^2. Определить силу давления человека на пол кабины лифта.

24. Масса лифта с пассажирами 800 кг. Найти ускорение лифта и его направление, если сила натяжения троса, на котором подвешена кабина лифта, такая же, как у неподвижного лифта массой 600 кг.

25. К одному концу невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый неподвижный блок, подвешен груз массой 10 кг. С какой силой нужно тянуть вниз за другой конец нити, чтобы груз поднимался с ускорением 1 м/с^2?

26. Два груза с массами 300 г и 200 г соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, подвешенный на пружинных весах. Определить, ускорение грузов, показание пружинных

весов и силу натяжения нити. Трением в оси блока и его массой пренебречь.

27. Найти ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке. Массами блоков и нити, трением и растяжением нити пренебречь. Проанализировать результат, рассмотрев возможные случаи.

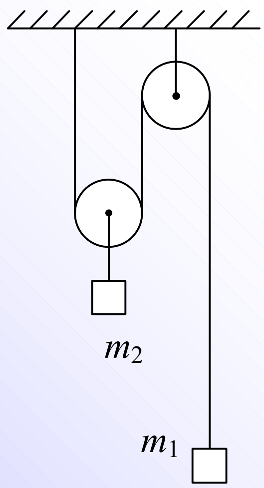


Рисунок к задаче 27

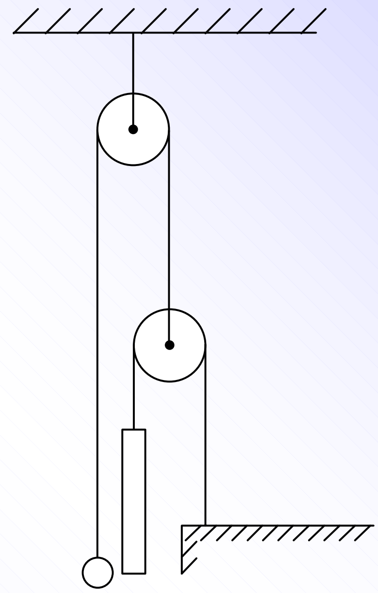


Рисунок к задаче 28

28. В системе, изображенной на рисунке, масса шарика в 1,8 раза больше стержня длиной 1 м; массы других тел пренебрежимо малы. Шарик установили на одном уровне с нижним концом стержня и отпустили. За

сколько времени он пройдет мимо стержня? Трением и растяжением нитей пренебречь.

29. Гирька массой m, привязанная к нити длиной l, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом R ($R < 1$). Найти частоту вращения и силу натяжения нити.

30. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом R с постоянной скоростью v. Найти силу давления летчика массой m на сидение в точке траектории, отстоящей от нижней точки на расстояние, соответствующее дуге с углом φ.

31. На горизонтальном столе расположен брусок массой m. К противоположным граням бруска привязаны длинные невесомые нити, переброшенные через неподвижные невесомые блоки (рисунок). К левой нити подвесили груз m и определили, что брусок начинает двигаться вправо при малейшем толчке, если к правой нити подвесить груз массой $2m$. Какой груз необходимо подвесить к правой нити, чтобы брусок стал двигаться с ускорением a?

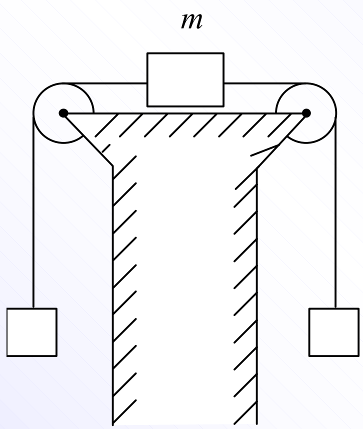


Рисунок к задаче 31

Начало
Содержание
Страница 253 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

32. Груз массой 50 кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы 300 Н, направленной под углом 30° к горизонту вверх. Коэффициент трения 0,1. Найти ускорение груза.

33. Два тела с массами m_1 и m_2 соединены нерастяжимым шнуром с пренебрежимо малой массой, который разрывается при силе натяжения F, пытаются перемещать по горизонтальному столу, прикладывая горизонтальную силу к одному из них. Найти максимальное значение этой силы как без учета, так и с учетом трения. Коэффициенты трения тел о стол одинаковы.

34. От поезда массой M, движущегося с постоянной скоростью по прямому горизонтальному участку пути, отрывается последний вагон массой m, который проходит путь s и останавливается. На каком расстоянии от вагона в момент его остановки будет находиться поезд, если тяга тепловоза постоянная, а сила трения каждой части поезда не зависит от скорости и пропорциональна ее весу?

35. Брусок массой m поместили на неподвижную плоскость, наклоненную под углом α к горизонту. С какой силой, направленной перпендикулярно к плоскости, нужно прижать брусок, чтобы он не соскользнул? Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ.

36. Тело соскальзывает равномерно с наклонной плоскости с углом наклона 40º. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

37. Два соединенных невесомой нерастяжимой нитью бруска с одинаковыми массами m скользят вниз по наклонной плоскости,

образующей угол α с горизонтом. Какова сила натяжения нити, если коэффициент трения нижнего бруска о плоскость μ_1, а верхнего μ_2?

38. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити в системе, изображенной на рисунке, при $m=1$ кг, $\alpha=60^{\circ}$, $\beta=30^{\circ}$. Массами блока и нити, трением и растяжением нити пренебречь. Коэффициент трения грузов о плоскости равен 0,1.

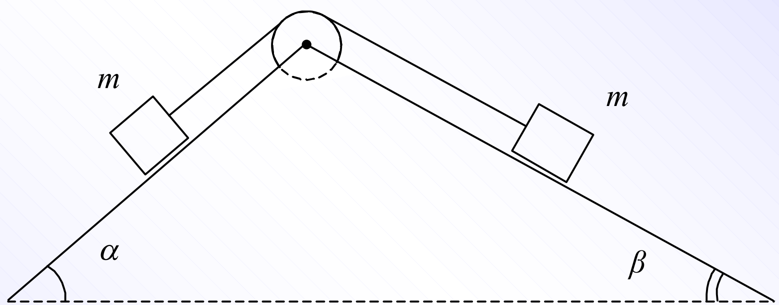


Рисунок к задаче 38

39. Тело пустили вверх по наклонной плоскости с углом 15º. Время подъема в 2 раз меньше времени спуска. Найти коэффициент трения.

40. Коэффициент трения тела о наклонную плоскость μ ($\mu<1$), масса тела m. Построить график зависимости силы трения от угла а наклона плоскости к горизонту.

Задачи к теме 6

41. Средняя плотность планеты ρ, радиус R. Найти ускорение свободного падения на ее поверхности.

42. Считая первую космическую скорость для Земли равной 8 км/с, найти первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли, а радиус в 2 раза больше.

43. Определить среднюю плотность планеты, если длительность суток на ней составляет 6 часов, а вес тела на экваторе на 10% меньше чем на полюсе.

44. Две пружины с жесткости, которых k_1 и k_2, соединены последовательно. Определить жесткость полученной системы пружин.

45. Гирька массой 0,5 кг, привязанная к резиновому шнуру, описывает к горизонтальной плоскости окружность, двигаясь равномерно со скоростью, соответствующей частоте 2 об/с. Угол отклонения шнура от вертикали 30º. Найти длину нерастянутого шнура, если для растяжения его на 1 см требуется сила 6 Н.

46. В цилиндрическом сосуде с водой плавает льдинка с вмороженным в нее стальным шариком. Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает?

47. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен водой. С какой силой вода давит на стенку аквариума, если длина стенки 0,8 м, а высота 0,6 м?

48. В вертикальном сосуде между двумя горизонтальными поршнями с массами m_1 и m_2 и площадями S_1 и S_2 соответственно (площадь S_1 верхнего поршня больше, чем S_2 нижнего), связанными нитью длиной l, находится жидкость плотностью ρ. Определить силу натяжения нити, если оба конца сосуда открыты.

49. Какой массы груз плотностью ρ_1 нужно прицепить к поплавку плотностью ρ_2 и массой m, чтобы поплавок с грузом плавал внутри жидкости плотностью ρ? ($\rho_2 < \rho < \rho_1$).

50. Дно лодки-плоскодонки можно залить битумом изнутри или снаружи. В каком случае дополнительная глубина погружения лодки больше и во сколько раз? Плотность битума составляет 1,1 плотности воды.

Задачи к теме 7

51. Человек массой 60 кг стоит на неподвижной тележке массой 120 кг. С какой скоростью относительно земли будет двигаться тележка, если человек начнет перемещаться по ней со скоростью 3 км/ч относительно тележки?

52. Снаряд, летящий горизонтально на высоте $h = 1620$ м со скоростью $v = 300$ м/с, разорвался на два равных осколка. Первый упал через $t = 2$ с под местом взрыва. Найти величину и направление скорости второго осколка.

53. Найти КПД при забивании гвоздя массой m_1 молотком массой m_2 в стену. Удар считать неупругим.

54. В воде с глубины 5 м поднимают до поверхности камень объемом 0,6 м’ и плотностью 2500 кг/м^3. Найти работу по подъему камня.

55. К пружине подвесили груз массой m_1 ее длина стала l_1; при подвешивании груза массой m_2 длина пружины l_2. Найти работу по растяжению пружины от l_1 до l_2.

56. Акробат прыгает в сетку с высоты $H_1 = 1$ м; сетка прогибается на $h_1 = 0,5$ м. Найти прогиб h_2 сетки при прыжке с высоты $H_2 = 8$ м и статический прогиб (акробат стоит в сетке).

57. Малое тело скользит без начальной скорости с вершины неподвижной сферы радиусом R без трения. На какой высоте (считая от вершины по вертикали) оно оторвется от поверхности с сферы?

58. Санки съезжают с горы и останавливаются, проехав по горизонтальной плоскости путь, равной длине склона горы. Начальная скорость равна нулю, угол наклона горы α. Найти коэффициент трения, считая его одинаковым на всем пути.

59. Найти мощность мотора автомобиля массой $m = 1000$ кг при движении с постоянной скоростью $v = 54$ км/ч в гору с уклоном $h = 4$ м на $s = 100$ м пути. С горы автомобиль съезжает с той же скоростью при выключенном моторе.

60. Частица с кинетической энергией T_0 упруго сталкивается с такой же покоящейся частицей и отклоняется от первоначального направления на угол 60°. Определить кинетические энергии частиц после соударения.

Задачи к теме 8

61. С наклонной плоскости с углом α брошено горизонтально небольшое тело с начальной скоростью v_0. Через сколько времени и на каком расстоянии от места броска оно упадет на плоскость?

62. Тело брошено вверх перпендикулярно плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, с начальной скоростью v_0. Через сколько времени и на каком расстоянии от места броска тело упадет на наклонную плоскость?

63. Под каким углом к горизонту брошено с земли тело, если на высоте h (на восходящей части траектории) его скорость направлена под углом 45° к горизонту? Начальная скорость v_0. Какой путь по горизонтали прошло тело к рассматриваемому моменту времени?

64. На наклоненную под углом α к горизонту плоскость из точки, находящейся на высоте h на одной вертикали с нижним краем плоскости, бросили горизонтально упругое тело. Найти его начальную скорость, если после первого удара о наклонную плоскость тело вернулось в исходную точку.

65. С какой минимальной горизонтальной силой F надо действовать на брусок с массой m, находящийся на плоскости с углом α наклона к горизонту (рисунок), чтобы он покоился? Коэффициент трения покоя бруска о плоскость равен μ.

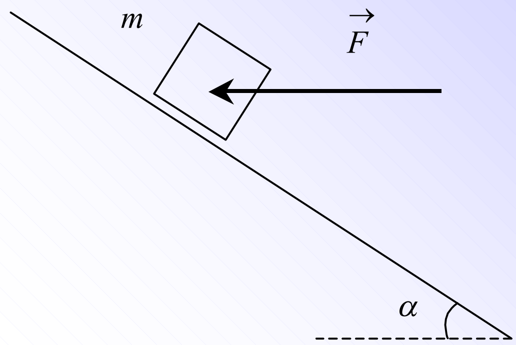


Рисунок к задаче 65

66. Груз с массой m подвешен на двух легких нерастяжимых нитях к потолку (рисунок). Угол α известен. При каком значении угла β сила натяжения нити BC наименьшая? Найти силы натяжения обеих нитей.

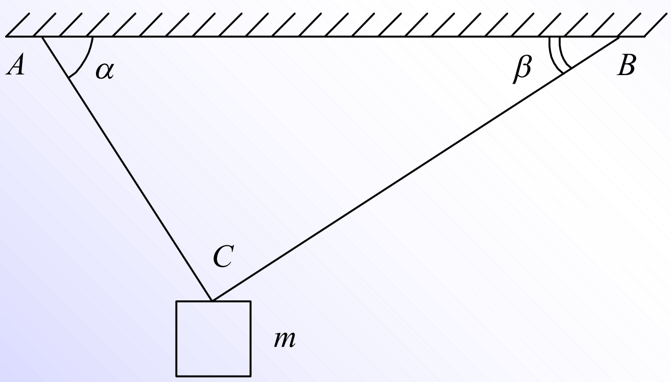


Рисунок к задаче 66

67. Небольшой кубик с массой m лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения покоя кубика о плоскость равен μ. Под каким углом β к горизонту и какую по модулю минимальную силу нужно приложить к кубику, чтобы сдвинуть его с места?

68. Для условия предыдущей задачи найти минимальную силу, необходимую для сообщения телу горизонтального ускорения a. Коэффициент трения скольжения принять равным μ.

69. Мяч с массой m подлетает к вертикальной неподвижной шероховатой стене под углом α сверху со скоростью v_0 и отскакивает в горизонтальном направлении. Найти скорость отскока мяча и среднюю за время соударения τ силу давления мяча на стену, если коэффициент трения μ.

70. Мяч с массой m падает на горизонтальный шероховатый пол со скоростью v_1, вектор которой направлен под углом α к горизонту, и отскакивает вертикально вверх со скоростью v_2. Найти время продолжительности удара и среднюю силу давления мяча на пол, если коэффициент трения равен μ.

Задачи к теме 9

71. Два математических маятника с периодами колебаний 6 с и 5 с соответственно одновременно начинают колебания в одинаковых фазах. Через какое наименьшее время фазы их колебаний снова будут одинаковыми?

72. Один из двух математических маятников совершил 10 колебаний, другой за это же время – 6 колебаний. Разность длин маятников 16 см. Определить длины маятников и периоды их колебаний.

73. Два математических маятника имеют периоды колебаний T_1 и T_2. Какой период колебаний будет у математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

74. Период колебаний математического маятника на Земле равен 1с. Чему будет равен период колебаний этого маятника на Луне?

75. На Марсе время падения тела, отпущенного без начальной скорости с некоторой высоты, на поверхности планеты в 2,6 раза больше времени падения с той же высоты на Земле. Во сколько раз период колебаний математического маятника на Марсе отличается от периода колебаний на Земле?

76. Спиральная пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на 6,5 см. Если груз оттянуть вниз, а затем отпустит, то он начнет колебаться вдоль вертикальной оси. Определить период этих колебаний.

77. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если медный шарик заменить алюминиевым того же радиуса?

78. Смещение гармонически колеблющейся частицы от положения равновесия составляет половину амплитуды колебаний. Найти отношение кинетической энергии частицы к ее потенциальной энергии частицы для этого момента.

79. На озере в безветренную погоду с лодки бросили якорь, от места бросания которого пошли волны. Человек, стоящий на берегу, заметил, что волна дошла до него через 50 с, расстояние между соседними горбами волн 0,5 м , а за время 5 с было 20 всплесков о берег. Как далеко от берега находилась лодка?

80. Звуковые волны из воздуха распространились в воду. Длина волны звука в воздухе 1 м, скорость звука в воде в 4 раза больше, чем в воздухе. Найти длину волны звука в воде.

Задачи к теме 10

81. Сколько молекул содержится в 1 $мм^3$ газа при температуре 27°С и давлении 10^{-11} мм. рт. ст.?

82. Найти среднюю кинетическую энергию молекул идеального одноатомного газа при температуре 27°С.

83. Газ нагрели от температуры 27°С до температуры 39°С. На сколько процентов увеличился объем газа, если давление осталось неизменным?

84. Открытая с обоих концов трубка длиной 0,76 м до половины погружена в ртуть. Сколько ртути останется в трубке, если плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути? Атмосферное давление 760 мм. рт. ст.

85. В запаянной с одного конца узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной 307 мм, запертый столбиком ртути длиной 216 мм. Какой будет длина воздушного столбика, если трубку поставить вертикально: отверстием вверх? отверстием вниз? Атмосферное давление 747 мм. рт. ст. Трубка длинная, ртуть из трубки не выливается.

86. Определить плотность идеального газа при температуре 100°С и давлении 10^5 Па. Определить также массу одной молекулы этого газа, если его молярная масса $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

87. В баллоне объемом 10 л содержится водород при температуре 20°С под давлением 10^7 Па. Какую массу водорода выпустили из баллона, если при полном сгорании оставшегося газа образовалось 50 г воды?

88. В сосуде объемом 7 л находится газ под давлением 50 кПа; в сосуде объемом 15 л – газ под давлением 100 кПа. Какое давление установится в сосудах после их соединения? Температура неизменна.

89. В сосуде находится 14 г азота и 9 г водорода при температуре 10°С и давлении 1 МПа. Найти молярную массу смеси и объем сосуда.

90. В сосуде находится углекислый газ. При некоторой температуре степень диссоциации его молекул на кислород О и окись углерода СО равна 25%. Во сколько раз давление в сосуде в этих условиях больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были бы диссоциированы?

Задачи к теме 11

91. Найти работу при изобарном нагревании 2 кг воздуха от 20°С до 120°С. Молярная масса воздуха 29 г/моль.

92. Найти работу при изотермическом расширении 100 г азота. Температура 280 К, объем увеличивается в 3 раза.

93. Одноатомный идеальный газ массой 5 кг (молярная масса 4 г/моль) нагревают на 150 К при постоянном объеме. Найти количество теплоты, сообщенное газу.

94. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя 527°С и холодильника 47°С, если от нагревателя получено количество теплоты, равное 20 кДж?

95. Идеальная тепловая машина совершает за один цикл работу 73,5 кДж. Температура нагревателя 100°С, температура холодильника 0°С. Найти: КПД машины; количество теплоты, полученное за один цикл от нагревателя; количество теплоты, отданное за один цикл холодильнику.

96. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок) и КПД этого цикла. Величины p_0 и V_0 известны

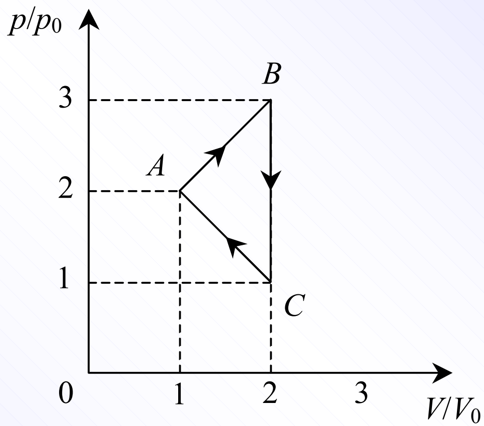


Рисунок к задаче 96

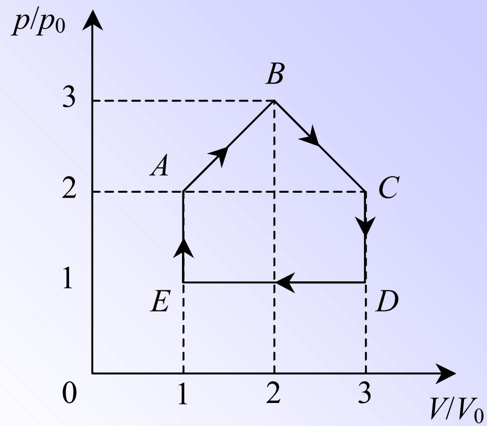


Рисунок к задаче 97

97. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок) и КПД этого цикла. Величины p_0 и V_0 известны

98. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок) и КПД этого цикла. Величины p_0 и V_0 известны

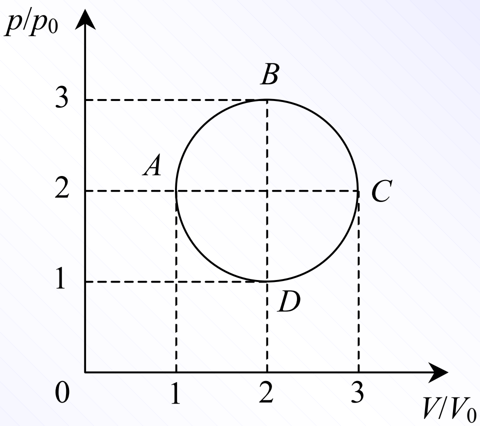


Рисунок к задаче 98

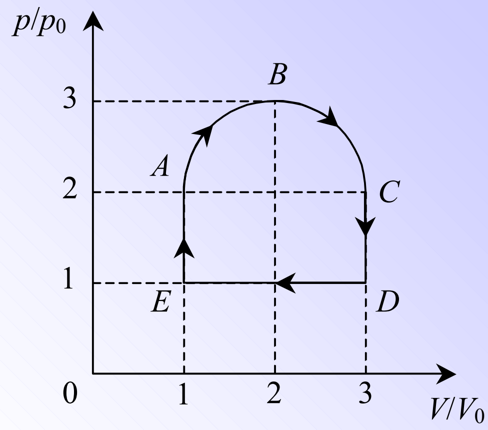


Рисунок к задаче 99

99. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок) и КПД этого цикла. Величины p_0 и V_0 известны

100. Найти работу, совершаемую молем одноатомного идеального газа за цикл (рисунок) и КПД этого цикла. Температуры T_1, T_2 и T_3 известны.

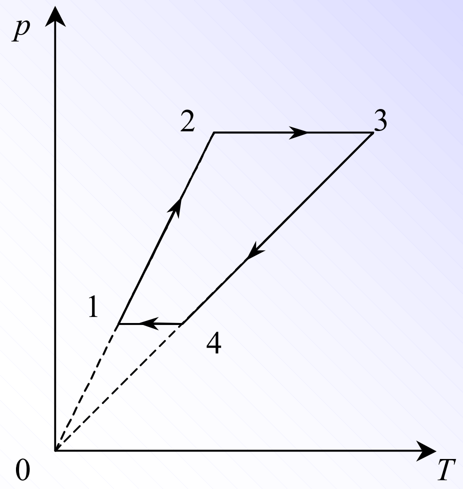


Рисунок к задаче 100

Задачи к теме 12

101. С какой высоты должны были бы падать свободно дождевые капли, чтобы при ударе о землю от них не осталось мокрого места? Начальная температура капель 20°С.

102. Оценить, с какой высоты должен был бы выпадать град с температурой 0°С, чтобы градинки при неупругом ударе о землю расплавились? Сопротивлением воздуха пренебречь.

103. Кусок свинца ударяется о препятствие при скорости 350 м/с. Какая часть свинца расплавилась, если все тепло, выделяемое при ударе, поглощается свинцом? Температура свинца перед ударом 27°С.

104. Нагретая железная болванка массой 3,3 кг ставится на поверхность льда, имеющего температуру 0°С. После охлаждения болванки до 0°С под ней расплавилось 460 г льда. Пренебрегая рассеянием тепла в окружающую среду, найти начальную температуру нагретой болванки.

105. В сосуд, содержащий 0,6 кг воды при температуре 10°С, опускают 0,8 кг льда, взятого при –20°С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью сосуда, определить установившуюся температуру и состав содержимого сосуда.

106. В калориметр, содержащий 0,5 кг воды и 0,5 кг льда при 0°С, вливают 0,5 кг воды при температуре 50°С. Какая температура установится в нем? Каково при этом содержимое калориметра? Удельная теплоемкость

воды $c = 4190$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

107. В стакан, содержащий $m = 200$ г воды, опускают нагреватель мощностью $P = 50$ Вт. После длительного нагревания температура воды устанавливается равной 75°С. Оценить время остывания воды на один градус после выключения нагревателя. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

108. В теплоизолированном сосуде находится переохлажденная вода при температуре $t = -5{,}0°\mathrm{C}$. В сосуд бросают небольшой кусочек льда, который становится центром кристаллизации. Какая часть воды в сосуде превратится в лед? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}33 \cdot 10^5$ Дж/кг.

109. Автомобиль расходует $m = 5{,}67$ кг бензина на $s = 50$ км пути. Определить мощность N, развиваемую двигателем, если скорость движения $v = 90$ км/ч и КПД двигателя $\eta = 22\%$. Удельная теплота сгорания бензина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.

110. Определить КПД нагревателя, расходующего 0,08 кг керосина на нагревание 3 кг воды на 90°С. Удельная теплота сгорания керосина $4{,}2 \cdot 10^7$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Пособия

1. Балаш, В. А. Задачи по физике и методы их решения / В. А. Балаш. − М. : Просвещение, 1983. − 238 с.

2. Беликов, Б. С. Решение задач по физике. Общие методы : учеб. пособие для студентов вузов. – М. : Высш. школа, 1986. – 256 с.

3. Бутиков, Е. И. Физика в задачах : учеб. пособие / Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев. – Изд. 2-е, испр. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1976. – 160 с.

4. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука. – 1985. – 381 с.

5. Гельфгат, И. М. 1001 задача по физике с ответами, указаниями, решениями / И. М. Гельфгат, Л. Э. Генденштейн, Л. А. Кирик. – Изд. 3-е, перераб. – М. ; Харьков : Илекса, Гимназия, 1997. – 351 с.

6. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – М. : БИНОМ, 2010. – 431с.

7. Капельян, С. Н. Физика. Пособие для подготовки к централизованному тестированию : пособие для учащихся / С. Н. Капельян, В. А. Малашонок. – 11 – е изд. – Минск : Аверсэв, 2013. – 416 с.

8. Кембровский, Г. С. Задачи физических олимпиад / Г. С. Кембровский. – Минск : Жасскон, 2000. – 176 с.

9. Кембровский, Г. С. Олимпиады по физике: от школьных до международных / Г. С. Кембровский, Л. Г. Маркович, А. И. Слободянюк. – Минск : Красико-принт, 2003. – 208 с.

10. Кембровский, Г. С. Олимпиады по физике: победить и поступить / Г. С. Кембровский, Л. Г. Маркович, А. И. Слободянюк. – Минск : Красико-принт, 2004. – 128 с.

11. Кембровский, Г. С. Олимпиады школьников по физике / Г. С. Кембровский, Л. Г. Маркович, А. И. Слободянюк. – Минск : Красико-принт, 2002. – 128 с.

12. Козел, С. М. Сборние задач по физике : учеб. пособие / С. М. Козел, Э. И. Рашба, С. А. Славатинский. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Наука, 1987. – 304 с.

13. Кондратьев, А. С. Физика. Сборник задач / А. С. Кондратьев, В. М. Уз-дин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 392 с. : ил.

14. Лавриненко, А. В. Олимпиады по физике / А. В. Лавриненко, Л. Г. Маркович, А. И. Слободянюк. – Минск : Экоперспектива, 2000. – 295 с.

15. Плетюхов, В. А. Сборник олимпиадных задач по физике / В. А. Плетюхов, А. Ф. Ревинский, В. С. Секержицкий. – 2-е изд., перераб. и дополн. – Брест : Изд-во БрГУ, 2000. – 144 с. : ил.

16. Сборник задач по физике : учеб. пособие / Д. Л. Баканина [и др.] ; под ред. С. М. Козела. – Изд. 2-е, испр. – М. : Наука, 1990. – 352 с.

17. Секержицкий, В. С. Задачи физических олимпиад : пособие / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2018. – 77 с.

18. Слободянюк, А. И. Олимпиады по физике / А. И. Слободянюк, Л. Г. Маркович, А. В. Лавриненко. – Минск : Аверсэв, 2003. – 272 с.

19. Физика. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В. А. Бондарь [и др.] ; под общей ред. В. А. Яковенко. − Минск : ТетраСистемс, 2003. − 560 с.

20. Физика: полный курс подготовки к централизованному тестированию и экзамену / В. А. Бондарь [и др.] ; под общей ред. В. А. Яковенко. − Минск : ТетраСистемс, 2008. − 576 с.

21. Элементарный учебник физики : в 3 т. – Под. ред. академика Г. С. Ландсберга. – Изд. 14-е – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – Т. 1 : Механика. Теплота. Молекулярная физика. – 612 с.

22. Физика в 9 классе: учеб.-метод. пособие для учителей / Л. А. Исаченкова [и др.]. – Минск : Аверсэв, 2010. – 352 с.

Методические указания

23. Векторные многоугольники в задачах механики: метод. указ. для студ. физич. спец. вузов и учащихся классов с углубл. изуч. физики / Брест. гос. ун-т ; сост. В. С. Секержицкий, С. Ю. Токменина. – Брест : БрГУ, 1998. – 17 с.

24. Законы сухого трения в задачах механики: метод. указ. для студ. физич. спец. вузов, учителей и учащихся классов с углубл. изуч. физики / Брест. гос. ун-т ; сост. В. С. Секержицкий, Ю. И. Дементей, И. В. Секержицкий. – Брест : БрГУ, 1999. – 18 с.

25. Избранные задачи механики и их решение с применением векторных способов : метод. указ. для студ. физич. спец. вузов и уч. классов с углубл. изуч. физики / Брест. гос. ун-т ; сост. В. С. Секержицкий, Н. В. Петрукович. – Брест : БрГУ, 1996. – 14 с.

26. Колебания и волны : метод. указания для слушателей ф-та доуниверситетской подготовки / Брест. гос. ун-т ; сост. В. С. Секержицкий, И. И. Макоед. – Брест : 2002. – 25 с.

27. Механика : метод. указания для слушателей ф-та доуниверситетской подготовки / Брест. гос. ун-т ; сост. И. И. Макоед, В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2001. – 42 с.

28. Молекулярная физика. Тепловые явления : метод. указания для слушателей ф-та доуниверситетской подготовки / Брест. гос. ун-т ; сост. И. И. Макоед, В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2001. – 26 с.

29. Брук, Ю. Метод размерностей помогает решать задачи / Ю. Брук, А. Стасенко // Квант. – 1981. – № 6. – С. 11–19.

30. Величко, Л. А. Рациональный выбор системы отсчета при решении задач механики о движении связанных тел / Л. А. Величко, В. С. Се-кержицкий, Э. В. Чугунова // Физика. – 2017. – № 6 (119). – С. 19–22.

31. Койфман, Ю. Г. Кинематика: о векторном способе решения избранных задач / Ю. Г. Койфман, В. С. Секержицкий // Фокус. – 1993. – № 4. – С. 61–68.

32. Костючик, Э. С. Силы реакции и векторные многоугольники в задачах о движении при наличии трения / Э. С. Костючик, В. С. Секержицкий // Фізіка. – 2017. – № 2 (115). – С. 18–20.

33. Петрукович, Н. В. Динамика: теорема об изменении импульса и многоугольник импульсов в задачах / Н. В. Петрукович, В. С. Секержицкий // Фокус. – 1997. – № 2. – С. 19–23.

34. Секержицкий, В. С. Кинематика: относительность движения / В. С. Секержицкий // Фокус. – 1995. – № 2. – С. 77–80.

35. Секержицкий, В. С. К расчету коэффициента полезного действия циклического процесса / В. С. Секержицкий // Фізіка. – 2019. – № 2. – С. 36–38.

36. Секержицкий, В. С. О векторных способах решения избранных задач кинематики / В. С. Секержицкий // Фізіка: праблемы выкладання. – 1997. – Вып. 6. – С. 111–116.

37. Секержицкий, В. С. Об одном «нестандартном» способе решения избранных задач динамики / В. С. Секержицкий // Фізіка: праблемы выкладання. – 1997. – Вып. 6. – С. 116–119.

38. Слободецкий, И. Ш. Сухое трение / И. Ш. Слободецкий // Квант. – 1970. – № 1. – С. 37–43.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Решение задачи 1. В соответствии с галилеевским законом сложения скоростей $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}$. Здесь $\vec{v}_1$ – скорость течения, $\vec{v}_{21}$ – собственная скорость пловца (относительно воды), $\vec{v}_2$ – скорость пловца относительно неподвижной системы отсчета (берега). Так как $\vec{v}_1 > \vec{v}_{21}$, то снос будет иметь место при любом направлении вектора $\vec{v}_{21}$ (при движении пловца по течению или против течения снос максимальный). Геометрическое место концов вектора $\vec{v}_{21}$ для всевозможных его направлений представляет собой полуокружность (рисунок). Снос минимальный, если вектор $\vec{v}_2$ направлен по касательной к этой полуокружности; $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_{21}$, $\cos\alpha = v_{21} / v_1 = 1/n$. Искомый угол $\varphi = \pi - \arccos(1/n)$.

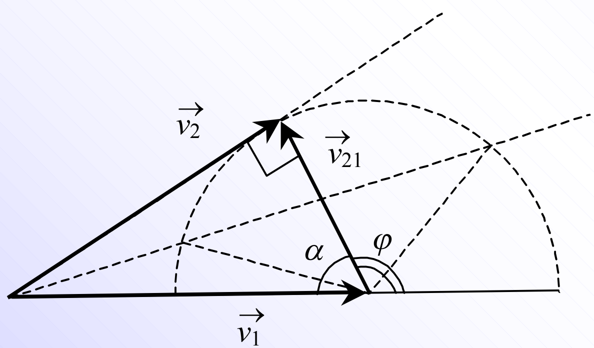


Рисунок к задаче 1

Решение задачи 2. Площадь под графиком зависимости $a(t)$ (рисунок) численно равна изменению скорости. Учитывая, что при $t = 0,\ v = 0,$ заметим, что скорость максимальна при $t = 2\tau\left(v_{\max} = a_0\tau\right)$ и уменьшается до $v = 0$ при $t = 4\tau$ (т. е. точка 4τ в тех же условиях, что и $\tau = 0$). Следовательно, достаточно вычислить v_{cp} за время 4τ Построив зависимость $v(t)$ (четыре участка параболы), видим, что площадь под кривой $v(t)$ численно равна $S = 0,5 \cdot 4\tau a_0\tau = 2a_0\tau^2$ (можно легко подсчитать как площадь треугольника, обозначенного пунктиром): $v_{cp} = S/(4\tau) = a_0\tau/2.$

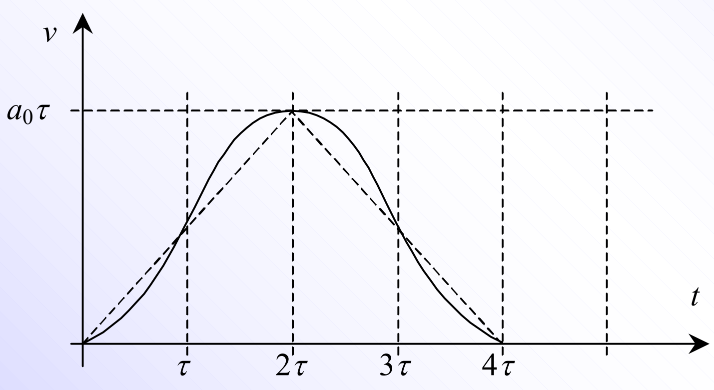


Рисунок к задаче 2

Решение задачи 3. Векторные треугольники перемещений представлены на рисунке. Легко видеть, что $v_0 t_0 \sin\alpha = g t_0^2/2$; $v_1 t_1 \sin\alpha = g t_1^2/2$; $v_2 t_2 \sin\alpha = g t_2^2/2$; ..., откуда $t_0 = \dfrac{2v_0}{g}\sin\alpha$; $t_1 = \dfrac{2v_1}{g}\sin\alpha = \dfrac{t_0}{k}$; $t_2 = \dfrac{t_0}{k^2}$; ... Суммарное время движения

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots = t_0\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right) = t_0\left(1 + \frac{1/k}{1-1/k}\right) = t_0\frac{k}{k-1} = \frac{2v_0 k \cdot \sin\alpha}{g(k-1)}.$$

Здесь использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Расстояние, пройденное по горизонтали:

$$\Delta r = \Delta r_0 + \Delta r_1 + \Delta r_2 + \ldots = v_0 t_0 \cdot \cos\alpha + v_1 t_1 \cdot \cos\alpha + v_2 t_2 \cdot \cos\alpha + \ldots =$$

$$= \Delta r_0\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \ldots\right) = \Delta r_0 \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{v_0^2 k^2 \cdot \sin 2\alpha}{g(k^2-1)}.$$

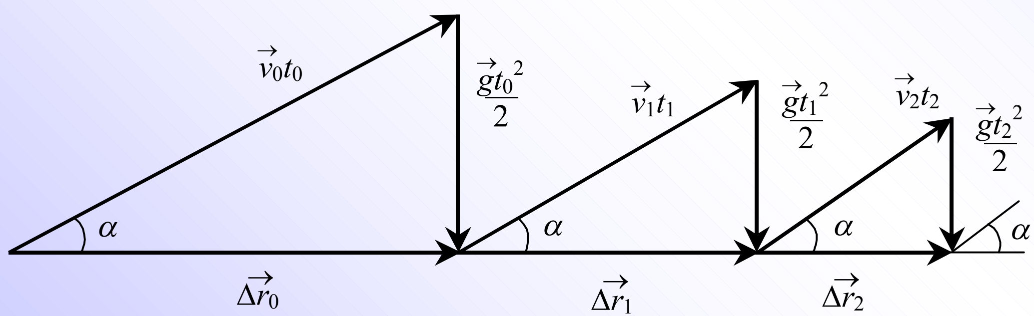


Рисунок к задаче 3

Решение задачи 4. Несложные рассуждения приводят к выводу, что цель находится на нисходящей ветви траектории, если речь идет о траектории, соответствующей минимальной начальной скорости. В самом деле, условие задачи должно выполняться при любом значении h, в том числе и при $h=0$. В последнем случае достаточно просто добросить мяч до цели. Пусть камень брошен под углом α к горизонту со скоростью v_0 и попал в цель. Векторный треугольник перемещений, соответствующий кинематическому уравнению движения $\Delta\vec{r}=\vec{v}_0 t+\vec{g}t^2/2$, представлен на рисунке. Легко видеть, что $s=v_0 t\cdot\cos\alpha$, $h+gt^2/2=v_0 t\cdot\sin\alpha$, откуда получаем $h+\dfrac{gs^2}{2v_0^2\cdot\cos^2\alpha}=s\cdot\mathrm{tg}\alpha$. Учитывая, что $1/\cos^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha$, находим уравнение $gs^2\cdot\mathrm{tg}^2\alpha-2v_0^2 s\cdot\mathrm{tg}\alpha+gs^2+2v_0^2 h=0$, решение которого $\mathrm{tg}\alpha=\left(v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-g\left(gs^2+2v_0^2 h\right)}\right)$. Для $\mathrm{tg}\alpha$ физический смысл имеют только вещественные решения, поэтому дискриминант должен быть неотрицательным: $v_0^4-2ghv_0^2-g^2s^2\geq 0$. Минимальное значение v_0^2, при котором это соотношение справедливо, соответствует случаю равенства. Итак, $v_{0\,\min}^2=g\left(h+\sqrt{h^2+s^2}\right)$ (второй корень $v_{0\,\min}^2=g\left(h-\sqrt{h^2+s^2}\right)$ не имеет физического смысла, т. к. квадрат скорости – положительная величина).

Ответ задачи: $v_{0\min} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + s^2}\right)}$. Соответствующий минимальной скорости угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v_{0\min}^2}{gs} = \operatorname{arctg}\dfrac{h + \sqrt{h^2 + s^2}}{s}$.

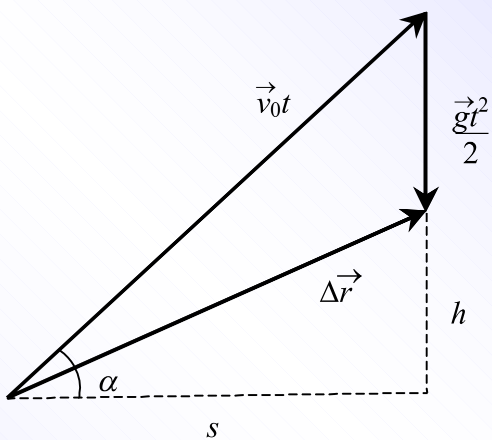


Рисунок к задаче 4

Решение задачи 5. При упругом ударе угол падения равен углу отражения, и скорость v_0 равна конечной скорости падения с высоты h: $v_0 = \sqrt{2gh}$. Векторный треугольник перемещений BCD (рисунок), соответствующий кинематическому уравнению движения $\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$, равнобедренный. Тогда $v_0 t = gt^2/2$, $t = 2v_0/g$, искомое расстояние

$\Delta r = 2v_0 t \cdot \sin\alpha = 4v_0^2 (\sin\alpha)/g = 8h \cdot \sin\alpha$. Уравнению $\Delta\vec{r} = (\vec{v}_0 + \vec{v})t/2$ соответствует векторный треугольник перемещений *BED* (рисунок), из которого по теореме синусов находим: $\sin\beta = \frac{v_0}{v}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{v_0}{v}\cos\alpha$.

Величину скорости v можно определить по теореме косинусов из треугольника *ECD*: $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 t \cdot \cos 2\alpha} = v_0\sqrt{5 - 4\cdot\cos 2\alpha} = v_0\sqrt{1 + 8\cdot\sin^2\alpha}$. Тогда $\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 8\cdot\sin^2\alpha}}$ или $\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{3}$. Итак, мяч вторично падает на наклонную плоскость со скоростью $v = v_0\sqrt{1 + 8\cdot\sin^2\alpha}$, вектор которой направлен к плоскости под углом $\beta = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{3}$.

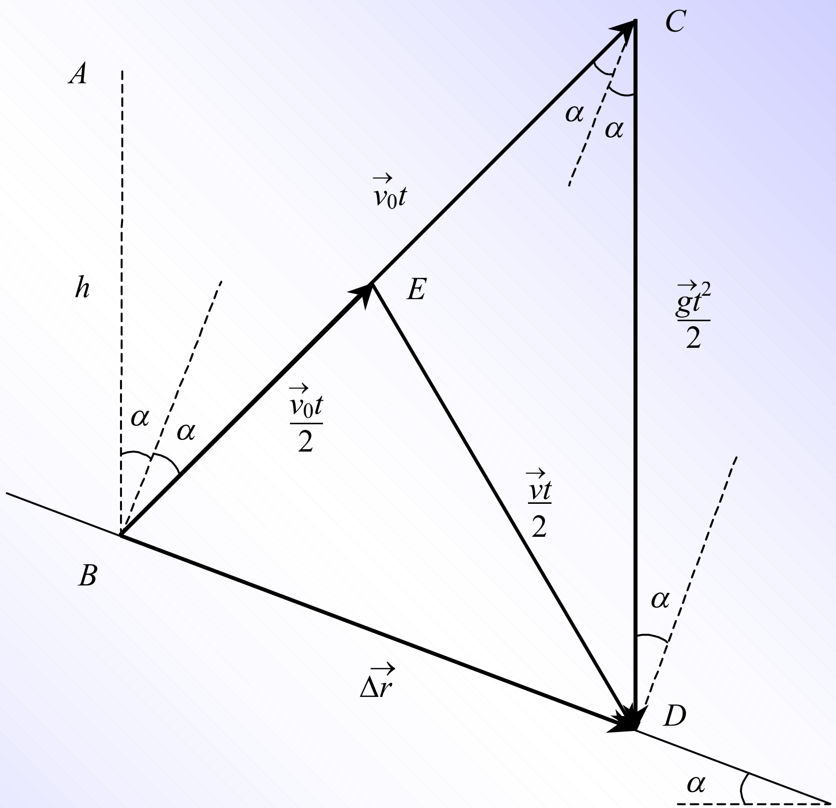


Рисунок к задаче 5

Решение задачи 6. Векторный многоугольник перемещений представлен на рисунке, из которого несложно убедиться, что $gt^2/2 = ut \cdot \text{tg}\alpha = vt \cdot \sin\alpha - h$.

Начало

Содержание

Страница 285 из 320

Назад

Во весь экран

Закрыть

Отсюда находим время полета стрелы $t = (2u/g)\cdot \mathrm{tg}\alpha$ и искомую высоту полета птицы $h = (2u/g)(v\cdot\cos\alpha - u)\cdot \mathrm{tg}^2\alpha$. Для ответа на второй вопрос задачи из уравнения $gt^2/2 - vt\cdot\sin\alpha + h = 0$ также находим время полета стрелы: $t = \frac{v}{g}\sin\alpha \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2}\sin^2\alpha - \frac{2h}{g}}$. Приравнивая правые части обоих выражений для времени, получим: $v\cdot\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\cdot\sin^2\alpha - 2gh} = 2u\cdot \mathrm{tg}\alpha$. Знак (+) соответствует восходящей ветви траектории; в этом случае $v < 2u/\cos\alpha$. Знак (–) соответствует нисходящей ветви траектории ($v > 2u/\cos\alpha$). При $v = 2u/\cos\alpha$ стрела попадает в птицу в верхней точке своей траектории.

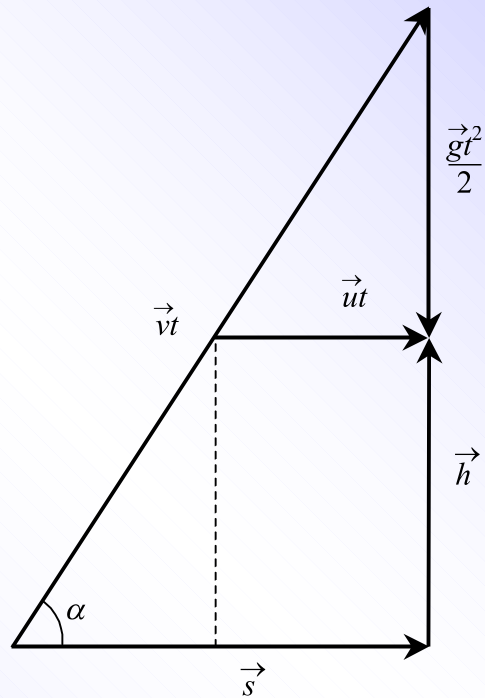


Рисунок к задаче 6

Решение задачи 7. На рисунке изображены все действующие на грузы силы и естественная координатная «ось» Ox. Длины нитей неизменны, поэтому $x - x_1 = \mathrm{const}_1$ и $x_2 - x + x_3 - x = \mathrm{const}_2$. Отсюда $\ddot{x} - \ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x} = 0$ и $\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x}_1 = 0$ – уравнение, связывающее ускорения грузов. Добавляя к нему уравнения движения грузов и подвижного блока в проекциях на координатную «ось» $m_1\ddot{x}_1 = F_1$,

Начало

Содержание

Страница 287 из 320

Назад

Во весь экран

Закрыть

$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + F_2$, $m_3\ddot{x}_3 = m_3 g + F_3$, $F_2 + F_3 - F_1 = 0$ и вполне очевидное $F_2 = F_3$, получаем систему шести уравнений. Решая эту систему, находим:

$$\ddot{x}_1 = g\frac{4m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)},$$

$$\ddot{x}_2 = g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_2-m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)},$$

$$\ddot{x}_3 = g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3-m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}.$$

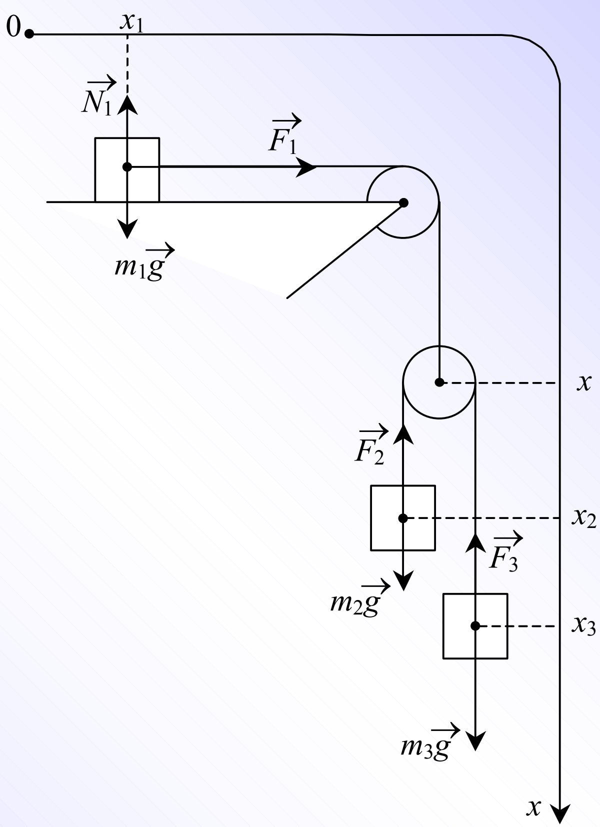


Рисунок к задаче 7

Решение задачи 8. В любой точке траектории на шайбу в плоскости движения действуют две силы (рисунок): скатывающая сила $\vec{F}$, направленная вниз по склону, и сила трения $\vec{T}$, направленная противоположно скорости движения $\vec{v}$. При этом $F = mg \cdot \sin\alpha$, где m –

масса шайбы, g – ускорение свободного падения, а $T = \mu mg \cdot \cos\alpha$. По условию задачи $\mu = \mathrm{tg}\alpha$, следовательно, $T = F$. Из уравнения движения шайбы $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$ следует, что ускорение равно нулю, если $\vec{F} = -\vec{T}$; при этом скорость шайбы постоянная (движение установившееся). Этому условию соответствует угол $\varphi = \pi$. Проецируем уравнение движения на две координатные «оси», одна из которых совпадает по направлению со скатывающей силой, а другая направлена по траектории движения (в каждой точке траектории скорость шайбы направлена по касательной ко второй «оси»): $ma_x = F + T \cdot \cos\varphi$, $ma_y = -T - F \cdot \cos\varphi$. Учитывая равенство модулей сил $\vec{F}$ и $\vec{T}$, получаем $a_x = -a_y$. Это, очевидно, характерное соотношение для движения по наклонной плоскости при $\mu = \mathrm{tg}\alpha$: проекции ускорения на направления скатывающей силы и скорости отличаются только знаком. Тогда соответствующее соотношение между скоростями имеет вид: $v_x = -v_y + \mathrm{const}$ или $-v \cdot \cos\varphi = -v + \mathrm{const}$, $v = \dfrac{\mathrm{const}}{1 - \cos\varphi}$. В начальный момент времени $v_0 = \dfrac{\mathrm{const}}{1 - \cos\beta}$, тогда $v = v_0 \dfrac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\varphi}$. При $\varphi = \pi$ получаем искомую установившуюся скорость $v_{уст.} = v_0(1 - \cos\beta)/2$.

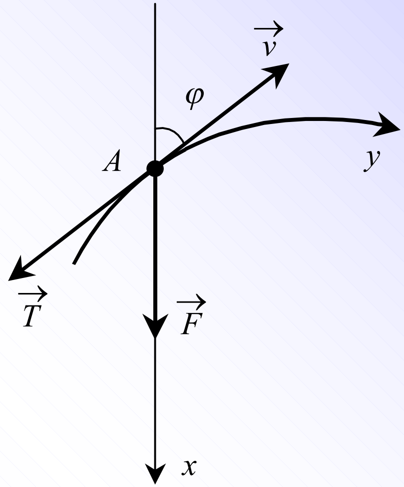
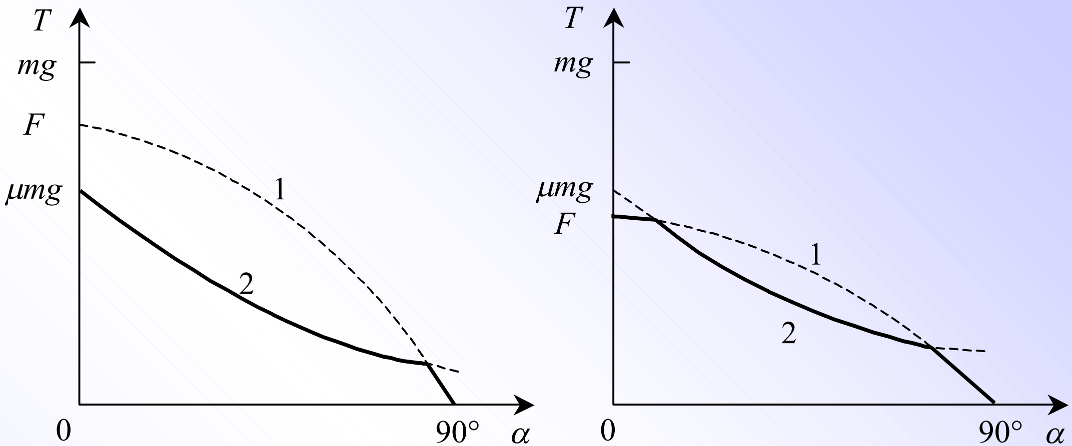


Рисунок к задаче 8

Решение задачи 9. Если тело покоится, то сила трения покоя $T = F \cdot \cos\alpha$, если тело движется, то сила трения скольжения $T = \mu\left(mg - F \cdot \sin\alpha\right)$. Если $\mu mg \le F < mg$, то при малых значениях α тело скользит, а при больших – покоится (рисунок а). Если $F < \mu mg$ (рисунок б), то при малых значениях угла α тело покоится, при увеличении α может иметь место скольжение (при малых F графики сил трения покоя и скольжения не пересекутся, и скольжения не будет), а при близких к 90° значениях α тело опять покоится.

а) $\mu mg \le F < mg$ б) $F \le \mu mg$



$$1 - T = F \cdot \cos\alpha\, ; 2 - T = \mu\left(mg - F \cdot \sin\alpha\right).$$

Рисунок к задаче 9

Решение задачи 10. Ускорение бруску сообщает сила трения, действующая на него со стороны доски. Абсолютная величина этой силы $T = \mu mg$, где m – масса бруска. Тогда абсолютная величина ускорения бруска равна μg. При этом ускорение положительно, если скорость доски больше скорости бруска (брусок ускоряется за счет силы трения), и отрицательно, если скорость доски меньше скорости бруска. Графики зависимостей скоростей доски и бруска от времени представлены на рисунке (внизу). Тогда несложно построить соответствующий график зависимости ускорения бруска от времени – см. рисунок (вверху).

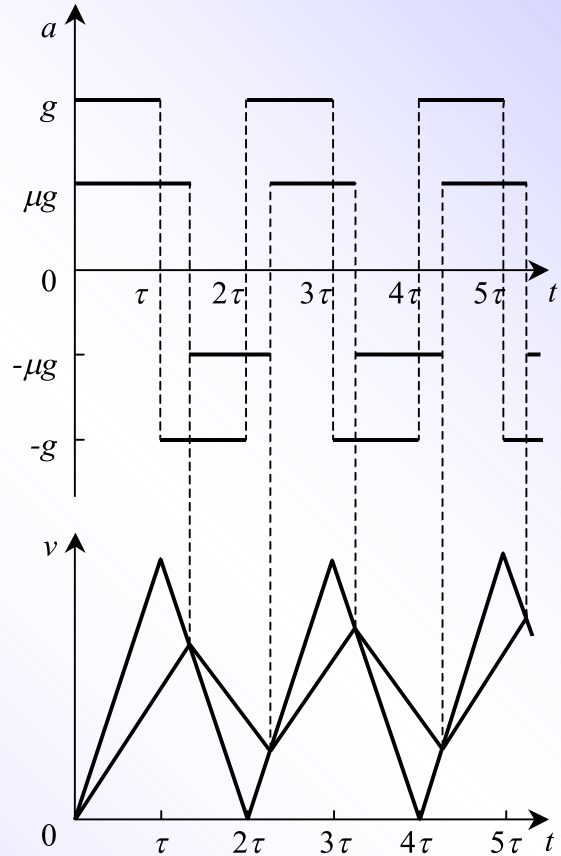


Рисунок к задаче 10

Решение задачи 11. На мотоциклиста действует три силы: сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная к оси цилиндра, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $\vec{T}$. Учитывая, что $\vec{N}$ направлена горизонтально, получим $T = mg$, и при этом $T \le \mu N$. Сила N придает мотоциклисту центростремительное ускорение $a = \dfrac{v^2 \cos^2 \alpha}{R}$, где α – угол наклона траектории мотоциклиста к горизонту. Следовательно, $N = m\dfrac{v^2 \cos^2 \alpha}{R}$, и $\mu \ge \dfrac{gR}{v^2 \cos^2 \alpha}$. Учитывая, что $\cos^2 \alpha = \dfrac{4\pi^2 R^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}$, получим $\mu \ge \dfrac{g}{v^2}\left(R + \dfrac{h^2}{4\pi^2 R}\right)$. Данное условие является достаточным, когда мотоцикл едет без проскальзывания. Иначе может потребоваться большее значение μ.

Решение задачи 12. К бруску приложены: направленная вертикально вниз сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вверх вдоль наклонной плоскости сила $\vec{F}$ и направленная под углом $\varphi = \mathrm{arctg}\mu = \pi/4$ к нормали (а, значит, и к плоскости) сила реакции $\vec{R}$. Векторный многоугольник сил, соответствующий уравнению $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}$, представлен на рисунке. Легко видеть, что минимальному значению ускорения соответствует максимальное значение величины $(F - ma)$, которую выразим с помощью теоремы синусов:

$$(F - ma) = mg\frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\varphi}.$$

Учитывая, что $\varphi=\pi/4$, получаем, что $(F-ma)=(F-ma)_{\max}$ (или $a=a_{\min}$) при $\alpha=\varphi=\pi/4$. При этом

$$a_{\min}=\frac{F-2mg\cdot\sin\alpha}{m}=2g\left(1-\sin\frac{\pi}{4}\right)\approx 0{,}6g\,.$$

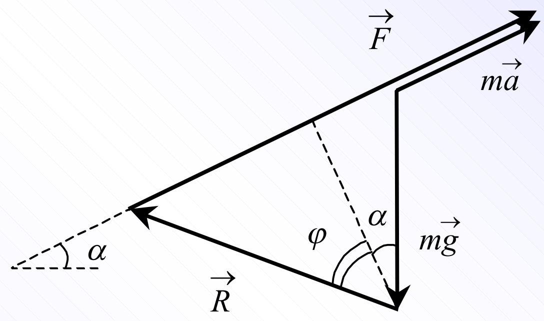


Рисунок к задаче 12

Решение задачи 13. Векторная разность конечного и начального импульсов первой частицы равна импульсу $\vec{J}$ действовавшей силы. Его модуль $J=3mv$. Такой же импульс силы $\vec{J}$ подействовал на вторую частицу. Ее конечный импульс равен векторной сумме начального импульса и импульса силы: $2m\vec{v}_2'=2m\vec{v}_2+\vec{J}$ (рисунок). Легко видеть, что $2mv_2'=5mv$, и конечная скорость второй частицы $v_2'=5v/2$.

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

Во весь экран

Закрыть

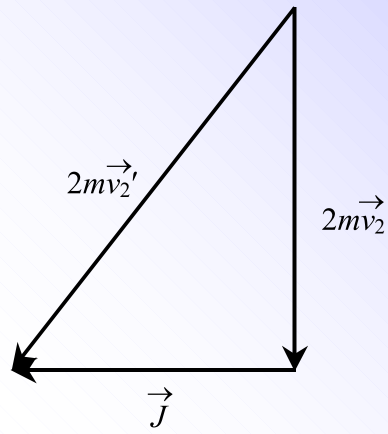


Рисунок к задаче 13

Решение задачи 14. Изменение суммарного импульса системы тел «лыжник–ракета» равно суммарному импульсу внешних сил, действующих на тела системы: $M\vec{v}+m\vec{v}_1-(M+m)\vec{v}_0=\left((M+m)\vec{g}+\vec{N}\right)\tau$. Здесь M – масса лыжника, m – масса ракеты, $m/M=\eta$, v – искомая скорость, N – средняя сила нормальной реакции опоры за время выстрела. Соответствующий равенству $M\vec{v}+m\vec{v}_1=(M+m)\vec{v}_0+(M+m)\vec{g}\tau+\vec{N}\tau$ векторный многоугольник импульсов представлен на рисунке. Легко видеть, что

$$Mv-(M+m)v_0=\left(mv_1+(M+m)g\tau\right)\cdot\sin\alpha\,,$$

откуда

$$v = (1+\eta)(v_0 + g\tau \cdot \sin\alpha) + \eta v_1 \cdot \sin\alpha\,.$$

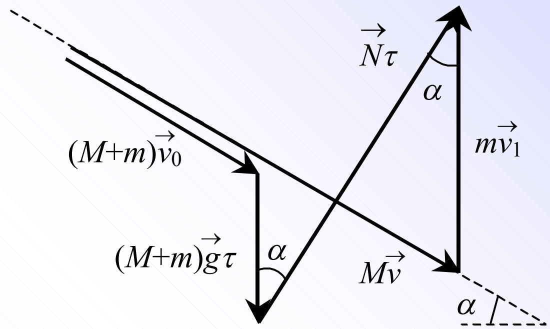


Рисунок к задаче 14

Решение задачи 15. На мяч действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$, составляющая с вертикалью угол $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$, где μ – искомый коэффициент трения. Векторный многоугольник импульсов, соответствующий теореме об изменении импульса $m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + m\vec{g}\tau + \vec{R}\tau$, представлен на рисунке. Несложно определить $\mu = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{(v_1 + v_2)\cdot\cos\alpha}{mg\tau + (v_1 + v_2)\cdot\sin\alpha}$. Для легкого и быстро летящего мяча можно пренебречь импульсом силы тяжести; в этом случае сила $\vec{R}$ направлена вдоль скорости $\vec{v}_2$ и $\mu = \operatorname{ctg}\alpha$.

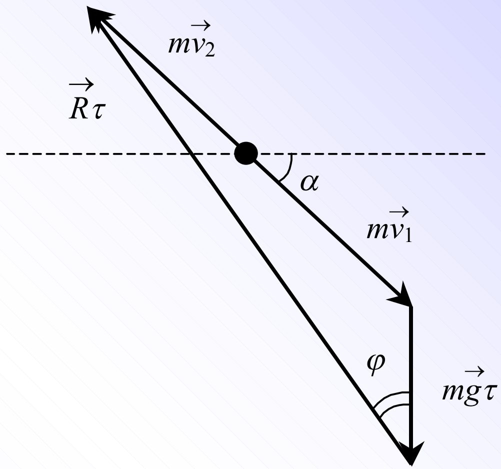


Рисунок к задаче 15

Решение задачи 16. Будем считать, что хаотически прыгающие шарики движутся вертикально. Столкновения можно не принимать во внимание, так как они не изменяют распределение скоростей шариков. Рассмотрим систему за время τ, равное времени полета вниз и вверх некоторого фиксированного шарика $\tau = 2\sqrt{2h/g}$. Воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме, учитывая, что за время τ соударения с дном испытывают все шарики системы. Импульс шарика у дна $p = m\sqrt{2gh}$. Изменение импульса системы за время τ. $\Delta p = N \cdot 2p = 2Nm\sqrt{2gh}$. Тогда искомое среднее давление определим из равенства $P_{ср}a^2\tau = \Delta p$, т. е. $P_{ср} = \Delta p / (a^2\tau) = Nmg / a^2 = 49$ Па.

Примечание. *Получить тот же результат можно из следующих рассуждений. Так как в среднем положение центра масс всех шариков не изменяется, то сумма внешних сил, действующих на все шарики равна нулю. Такими внешними силами являются сила тяжести Nmg и сила реакции дна сосуда, которая по третьему закону Ньютона равна силе давления (естественно, средней) шариков на дно Pa^2, приравнивая эти выражения, сразу получим окончательный результат.*

Решение задачи 17. Если бы бочка массой m двигалась поступательно, то ее кинетическая энергия при скорости v была бы равна $mv^2/2$. Но здесь бочка скатывается, т. е. участвует одновременно в поступательном и вращательном движениях. Из соображений размерности естественно считать ее кинетическую энергию равной $kmv^2/2$, где k – неизвестный безразмерный коэффициент. По закону сохранения энергии $kmv^2/2 = mgh$, где g – ускорение свободного падения. В случае наполненной бочки невязкая жидкость не вовлекается катящейся бочкой во вращение и движется только поступательно, поэтому $kmv_1^2/2 + 2mv_1^2/2 = 3mgh$. Исключая из уравнений массу m и коэффициент k, находим скорость бочки с жидкостью: $v_1 = \sqrt{3gh/(1+gh/v^2)}$..

Решение задачи 18. На рисунке показаны силы, действующие на правое нижнее бревно, которые имеют ненулевой вращающий момент

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

Во весь экран

Закрыть

относительно оси вращения O. Условие равновесия этого бревна можно записать следующим образом: $OB \cdot P = AB \cdot T$. Сила нормального давления $\vec{P}$ образует с вертикалью угол 30°, сила трения $\vec{T}$ – угол 60°. Тогда $AB = R(1+\cos 60°)$, $OB = R \cdot \sin 30°$, где R – радиус бревна. Отсюда находим коэффициент трения: $\mu = T / P \approx 0{,}27$.

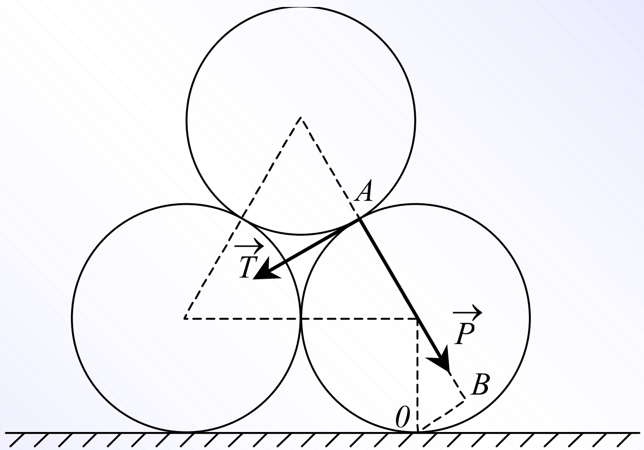


Рисунок к задаче 18

Решение задачи 19. В цикле 1–2–3–1 газ получает теплоту на изохоре 1–2 и на изобаре 2–3; полное количество этой теплоты для одного моля одноатомного газа $Q_1 = 1{,}5R(T_3 - T_1) + P_2(V_3 - V_2) = 11{,}5RT_0$ (здесь мы воспользовались уравнением Менделеева–Клапейрона $P_0V_0 = RT_0$). Работа равна площади треугольника 1–2–3: $A = 0{,}5P_0 \cdot 2V_0 = RT_0$; КПД

$\eta_1 = A / Q_1 = 2/23$. Из анализа первого цикла можно найти количество теплоты, отданное холодильнику на участке 3–1: $Q_{31} = Q_1 - A = 10{,}5RT_0$. Но в цикле 1–3–4–1 газ получает теплоту на том же участке, проходя его в противоположном направлении, а на остальных участках отдает теплоту. Значит, во втором цикле всего получено от нагревателя количество теплоты $Q_2 = 10{,}5RT_0$; работа в этом цикле равна $A = RT_0$; КПД $\eta_2 = A / Q_2 = 2/21$. Отношение КПД циклов $\eta_2 / \eta_1 = 23/21$.

Решение задачи 20. Из рисунка видно, что на участке BC работа газа положительная, на участке CA – отрицательная. Изменение внутренней энергии на участке AB положительное, на участке CD – нулевое, а далее отрицательное. Существует участок DE, на котором работа равна убыли внутренней энергии и $Q_{DE} = A_{DE} + \Delta U_{DE} = 0$. Положение точки E определяется из системы уравнений $0{,}5(P_E + P_D)(V_E - V_D) = 1{,}5R(T_D - T_E)$, $(P_B - P_E)/(V_E - V_B) = (P_B - P_A)(V_C - V_B)$, которая легко преобразуется в систему $(P_E + 2P_0)(V_E - 1{,}5V_0) = 3(3P_0V_0 - P_EV_E)$, $(3P_0 - P_E)V_0 = 2P_0(V_E - V)$. Решая эти уравнения, находим: $P_E = 1{,}75P_0$, $V_E = 1{,}625V_0$. Впрочем, для получения ответов на поставленные в условии задачи вопросы эти данные не нужны. Работа численно равна площади цикла: $A = P_0V_0$. За один цикл газ получает от нагревателя количество теплоты

$$Q_1 = Q_{ABDE} = Q_{ABD} = A_{BD} + \Delta U_{AB} =$$
$$= 0,5(P_B + P_D)(V_D - V_B) + 1,5R(T_B - T_A) = 4,25 P_0 V_0.$$

Тогда КПД цикла $\eta = A / Q_1 \approx 0,235$ или $\eta \approx 23,5\,\%$.

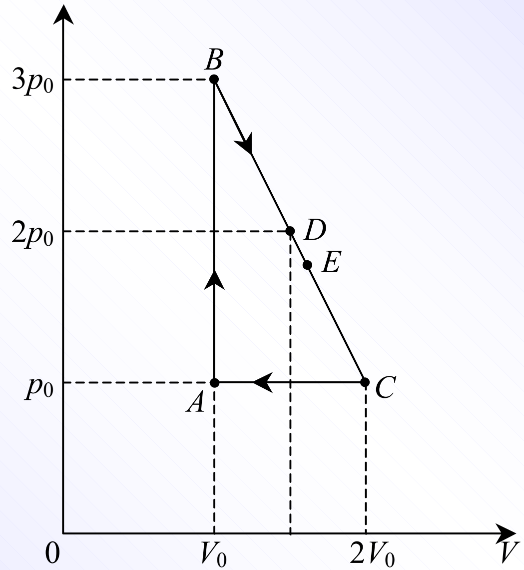


Рисунок к задаче 20

Решение задачи 21. Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, запишем:

$$\nu R = \frac{PV}{T} = \frac{PV_0(1-\alpha\cos\beta t)}{T_0(1-\alpha\cos\beta t)(1+\alpha\sin\beta t)} \equiv \frac{P_0V_0}{T_0}.$$

Величина P_0 введена здесь формально; давление газа P_0 и объем V_0 соответствуют разным моментам времени. Из уравнений $V = V_0(1-\alpha\cos\beta t)$ и $P = P_0(1+\alpha\sin\beta t)$ получаем $(P/P_0)^2 + (V/V_0)^2 = \alpha^2$. Соответствующий график представлен на рисунке. Цикл прямой, т. к. в момент времени $t = 0$ имеем $V = V_0(1-\alpha)$ и $P = P_0$ (точка A на рисунке), а при $t = \pi/(2\beta)$ (спустя четверть периода) $V = V_0$ и $P = P_0(1+\alpha)$ (точка B), Из рисунка легко видеть, что на участке ABC работа газа положительная, на участке CDA – отрицательная. Изменение внутренней энергии на участке AB положительное, на участке CD – отрицательное, на участках BC и DA – нулевое. За один цикл газ получает от нагревателя количество теплоты

$$Q_1 = A_{ABC} + \Delta U_{AB} = (0{,}5\pi\alpha^2 + 2\alpha)P_0V_0 + 1{,}5\nu R(T_B - T_A) =$$
$$= (0{,}5\pi\alpha^2 + 5\alpha)P_0V_0 = (0{,}5\pi\alpha^2 + 5\alpha)\nu RT_0.$$

Работа газа за цикл определяется площадью цикла: $A = \pi\alpha^2 P_0 V_0 = \pi\alpha^2 \nu RT_0$. Тогда КПД цикла $\eta = A / Q_1 = 2\pi\alpha / (\pi\alpha^2 + 10)$. Поскольку $\alpha < 1$, то $\eta < 48\,\%$.

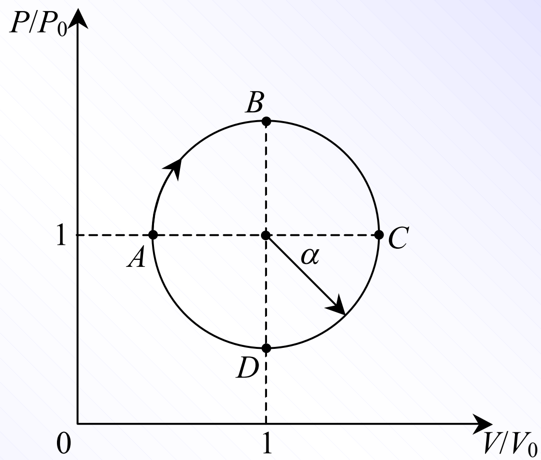


Рисунок к задаче 21

Решение задачи 22. Для температур возможны два случая: $t_1 < t_2$ и $t_1 > t_2$. Рассмотрим сначала первый из них. Обозначим искомую температуру буквой θ и запишем уравнение теплового баланса. При этом учтем, что теплоемкости тел с изменением температур изменяются линейно и воспользуемся их средними значениями:

Начало
Содержание
Страница 304 из 320
Назад
Во весь экран
Закрыть

$$\frac{C_0(1+\alpha t_1)+C_0(1+\alpha\theta)}{2}(\theta-t_1)=\frac{C_0(1+\alpha\theta)+C_0(1+\alpha t_2)}{2}(t_2-\theta).$$

Отсюда следует квадратное уравнение

$$\theta^2+\frac{2}{\alpha}\theta-\left(\frac{t_1+t_2}{\alpha}+\frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)=0.$$

Его корни

$$\theta_{1,2}=-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{t_1+t_2}{\alpha}+\frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)}.$$

Отрицательный корень не соответствует условию задачи ($t_1>0$ и $t_2>0$, а $\theta>t_1$).

Ответ задачи: $\theta=\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{(1+\alpha t_1)^2+(1+\alpha t_2)^2}{2}}-1\right).$

Заметим, что температуры t_1 и t_2 в полученное выражение для θвходят симметрично, т. е. для второго случая, когда $t_1>t_2$, ответ задачи будет тем же и от величины C_0 не зависит.

Решение задачи 23. Теплоотдача складывается из потока тепла через боковые стенки, дно и поверхность. Отношение мощности теплоотдачи через дно и свободную поверхность воды к разности температур воздуха и окружающей среды во всех случаях одинаково. Обозначим его *A*. Мощность теплоотдачи через боковые стенки пропорциональна их площади, следовательно, их высоте, а значит и объему сосуда, а так же разности температур воздуха и окружающей среды. Коэффициент пропорциональности обозначим *B*. Суммарная мощность теплоотдачи равна $P=(A+BV)(t-t_{комн})$. В установившемся режиме она равна мощности кипятильника, и, следовательно, одинакова во всех случаях. Поэтому: $60(A+B)=40(A+2B)=X(A+4B)$, где $X=t_3-t_{комн}$. Решение системы: $A=B$, $X=24 \Rightarrow t_3=44°C$.

Решение задачи 24. Будем считать, что протекая по отопительным радиаторам, вода остывает до комнатной температуры. Для того, чтобы температура в комнате осталась неизменной, необходимо, чтобы после ремонта вода приносила в единицу времени такое же количество теплоты, что выражается уравнением $c\rho v_1 S_1(t_1-t_0)=c\rho v_2 S_2(t_2-t_0)$, где ρ – плотность воды, *c* – ее удельная теплоемкость. Из этого уравнения определяем скорость движения воды по новой трубе $v_2=v_1\dfrac{S_1(t_1-t_0)}{S_2(t_2-t_0)}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И САМОПРОВЕРКИ

1. $2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$.
2. $2\,v_0(v_1 + v_2)/(2v_0 + v_1 + v_2)$.
3. 11 с.
4. 0,13 м/с^2; 3,6 мин.
5. 102 мин.
6. 57 м; 3,4 с.
7. $(t_1^2 + t_2^2) / (2t_2)$.
8. 15 м; 9 м; 3 м.
9. 40 м; 2 с; 4 с.
10. 45 см/с; 30 см/с^2.
11. 3 км/ч.
12. 560 м.
13. 45 с.
14. $b / \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$.
15. 0,5 м/с.
16. 174 км/ч; 4,3° к меридиану на северо-запад.
17. $h / (u_0 - v_0)$; $h(u_0^2 - u_0v_0 - gh/2) / (u_0 - v_0)^2$.
18. 22 м.
19. 8,3 см.

20. 232 м/с; $1,68 \cdot 10^{-2}$ м/с^2.

21. 6 кН; 50 с; 375 м.

22. 13,8 м/с^2.

23. 616 Н.

24. 2,45 м/с^2; ускорение направлено вниз.

25. 108 Н.

26. 1,96 м/с^2; 4,7 Н; 2,35 Н.

27. $a_1 = a_2$; $a_2 = g(m_2 - 2m_1)/(m_2 + 4m_1)$.

28. 1,4 с.

29. $\sqrt{g\sqrt{l^2 - R^2}} / (2\pi)$; $mgl / \sqrt{l^2 - R^2}$.

30. $m(v^2 / R + g \cdot \cos\varphi)$.

31. $m\dfrac{2a}{g-a}$.

32. 4,5 м/с^2.

33. Сила тяги $F\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}$ максимальна, если приложена к более массивному телу; результат от трения не зависит.

34. $sM / (M - m)$.

35. $F \geq mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) / \mu$.

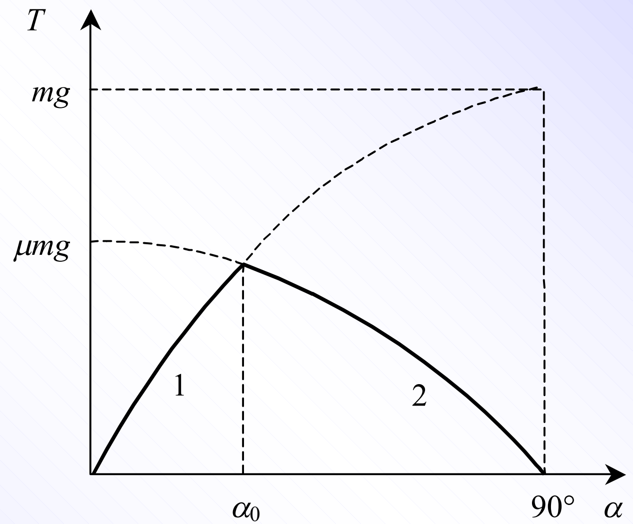
36. 0,84.

37. $(\mu_1 + \mu_2)/2 \leq \mathrm{tg}\,\alpha$ при $\mu_1 \leq \mu_2$; 0 при $\mu_1 \geq \mu_2$.

38. 1,1 м/с^2; 7,4 Н.

39. $0{,}6\operatorname{tg}15^\circ \approx 0{,}16$.

40. См. рисунок.



$1 - T = mg\cdot\sin\alpha$; $2 - T = \mu mg\cdot\cos\alpha$.

41. $4\pi G\rho R/3$.

42. 9,8 км/с.

43. $3\cdot10^3$ кг/м^3.

44. $k_1k_2/(k_1+k_2)$.

45. 6,3 см.

46. Понизится.

47. $1{,}4\cdot10^3$ Н.

48. $g(m_2S_1 - m_1S_2 + \rho lS_1S_2)/(S_1 - S_2)$.

49. $m(\rho / \rho_2 - 1) / (1 - \rho / \rho_1)$.

50. $\Delta h_1 / \Delta h_2 = 11$.

51. 1 км/ч.

52. 1000 м/с; 53° к горизонту вверх.

53. $1/(1 + m_1/ m_2)$.

54. 44,1 кДж.

55. $(m_1 + m_2)(l_2 - l_1)g / 2$.

56. 1,24 м; 0,08 м.

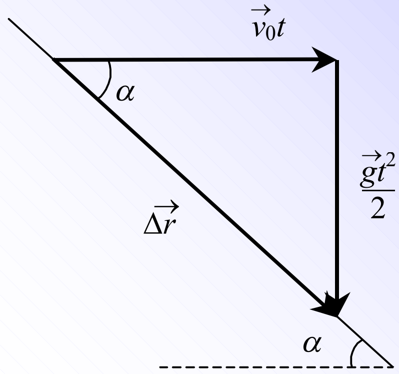
57. $R/3$.

58. $(\sin\alpha) / (1 + \cos\alpha)$.

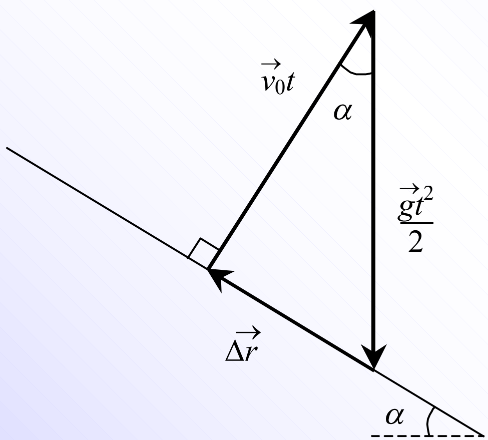
59. 12 кВт.

60. $T_0/4$; $3T_0/4$.

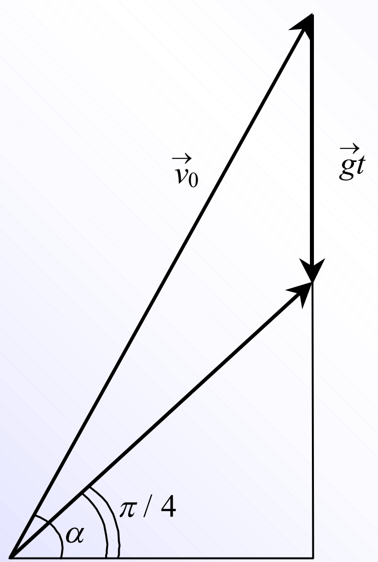
61. $\dfrac{2v_0 \cdot \mathrm{tg}\alpha}{g}$; $\dfrac{2v_0^2 \cdot \sin\alpha}{g \cdot \cos^2\alpha}$. Векторный треугольник перемещений представлен на рисунке.

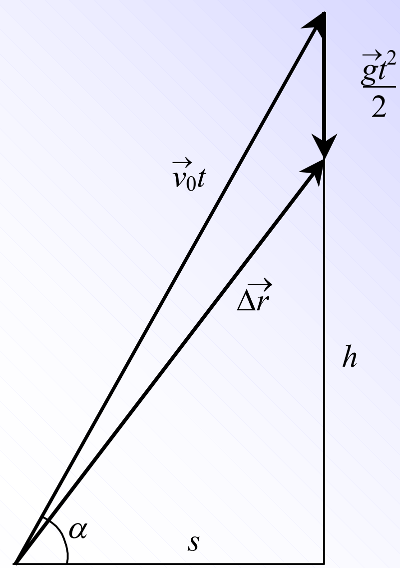


62. $\dfrac{2v_0}{g\cdot\cos\alpha}$; $\dfrac{2v_0^2\cdot\sin\alpha}{g\cdot\cos^2\alpha}$. Векторный треугольник перемещений представлен на рисунке.

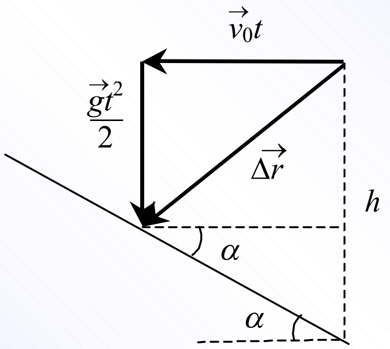


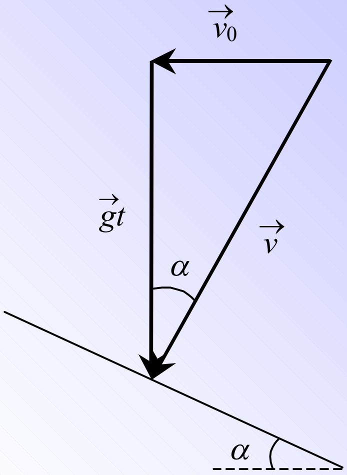
63. $\arccos\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{gh}{v_0^2}}$;. $\sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2}-h^2}+h-\frac{v_0^2}{2g}$. Векторные треугольники скоростей и перемещений представлены на рисунках.



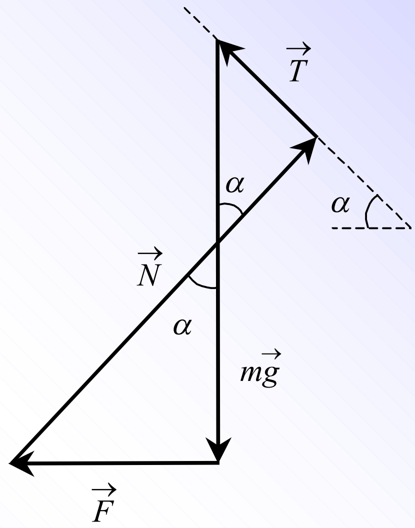


64. $\sqrt{\frac{2gh}{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$. Векторные треугольники перемещений и скоростей представлены на рисунках.

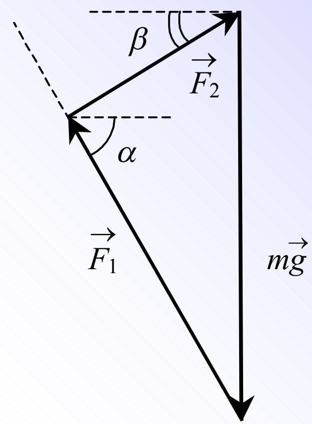




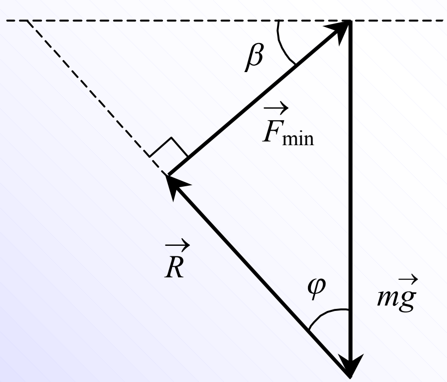
65. $mg\dfrac{\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha}$. Векторный многоугольник сил представлен на рисунке.



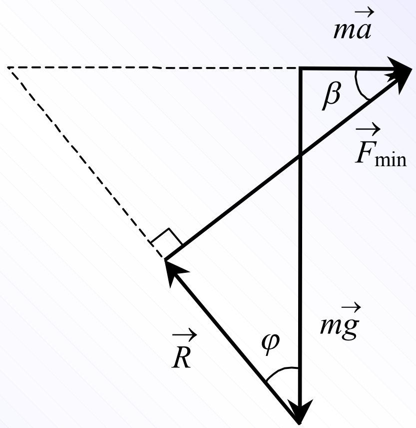
66. $\beta = \pi/2 - \alpha$; $F_1 = \dfrac{mg}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$; $F_2 = \dfrac{mg\cdot\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$. Векторный треугольник сил представлен на рисунке.



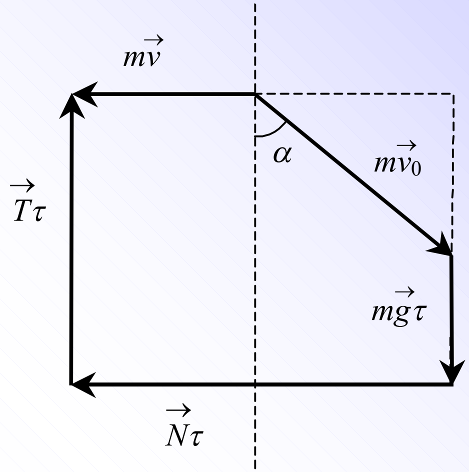
67. $\beta = \varphi = \operatorname{arctg}\mu$; $F_{\min} = mg\cdot\sin\varphi = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Векторный треугольник сил представлен на рисунке.



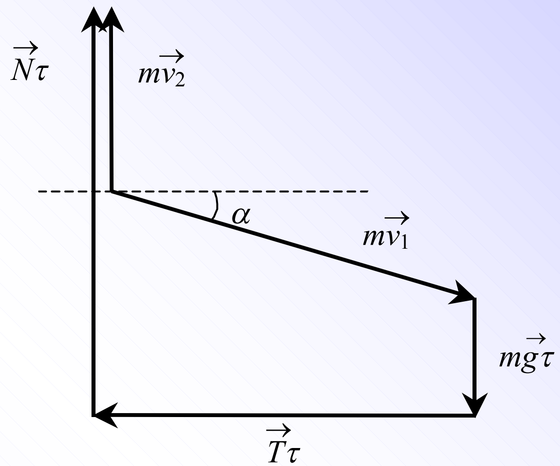
68. $\beta = \varphi = \mathrm{arctg}\mu;.$ $F_{\min} == \dfrac{m(\mu g + a)}{\sqrt{1+\mu^2}}.$ Решение справедливо для ускорения, не превышающего значение g/μ. Векторный многоугольник сил представлен на рисунке.



69. $\dfrac{v_0(\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha) + g\tau}{\mu}$; $\dfrac{m}{\mu}\left(g + \dfrac{v_0}{\tau}(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\sin\alpha)\right).$ Векторный многоугольник импульсов представлен на рисунке.



70. $\frac{v_1(\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha)-\mu v_2}{\mu g}$; $mg\frac{v_1\cdot\cos\alpha}{v_1(\cos\alpha-\mu\cdot\sin\alpha)-\mu v_2}$. Векторный многоугольник импульсов представлен на рисунке.



71. 30 с.

72. 25 см, 0,1 с; 9 см, 0,06 с.

73. $\sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

74. 2,4 с.

75. В 2,6 раза.

76. 0,5 с.

77. Уменьшится в 1,8 раза.

78. Кинетическая энергия в 3 раза больше потенциальной.

79. 100 м.

80. 4 м.

81. 320.

82. $6{,}2 \cdot 10^{-21}$ Дж.

83. На 40%.

84. 30 см.

85. 238 мм; 432 мм.

86. 1 кг/м^3; $5{,}4\cdot 10^{-26}$ кг.

87. 77 г.

88. 84 кПа.

89. $4{,}6\cdot 10^{-3}$ кг/моль; $11{,}7\cdot 10^{-3}$ м^3.

90. В 1,25 раза.

91. $5{,}7\cdot 10^4$ Дж.

92. 9,1 кДж.

93. 2,3 МДж.

94. 12 кДж.

95. 26,8%; 274,1 кДж; 200,6 кДж.

96. $A = p_0V_0$; $\eta = 2/11 \approx 0{,}18$.

97. $A = 3p_0V_0$; $\eta = 0{,}25$.

98. $A = \pi p_0V_0$; $\eta = 2\pi/(20+\pi) \approx 0{,}22$.

99. $A = (2+\pi/2)p_0V_0 = 3{,}57\,p_0V_0$; $\eta = 2(2+\pi/2)/(20+\pi) \approx 0{,}31$.

100. $A = R(T_3 - T_2 + T_1 - T_1T_3/T_2)$. $\eta = 2\dfrac{T_3 - T_2 + T_1 - T_1T_3/T_2}{5T_3 - 3T_1 - 2T_2}$.

101. 265 км.

102. 33 км.

103. 0,89.

104. 100°C.

105. 0°C; 575 г воды и 825 г льда.

106. 0°C; 1,32 кг воды и 0,18 кг льда.

107. $cm \cdot \Delta T / P \approx 16{,}8$ с.

108. 6%.

109. 28 кВт.

110. 33,7%.