С.А. МАРЗАН, И.В. МОРОЗ
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ

Пусть $I_{a+}^{\alpha} g$ и $D_{a+}^{\alpha} y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, §2.2, 2.4]:

$$(I_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1.$$

Обозначим через ${}^{c}D_{a+}^{\alpha} y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right)(x), \qquad (1)$$

$\alpha \in C$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1, 2, \ldots\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \le n$ $(n \in N)$ и $y(x) \in C^n[a,b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^{c}D_{a+}^{\alpha} y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(D^n y\right)(x) \quad \left(n \in N; D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n - 1 < \alpha < n$ оператор ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) \left(n - 1 < \alpha < n, n \in N; \, D = \frac{d}{dx}\right). \qquad (2)$$

Конструкция (2) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вискоэластичности ([2]–[3]), и поэтому выражения (1) и (2) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in C$.

Обозначим через $C_\gamma[a,b]$ $(\gamma \in C)$ класс функций $g(x)$, заданных на $[a,b]$ и таких, что $(x-a)^\gamma g(x) \in C[a,b]$.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто (1) порядков $\alpha_i \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha_i) > 0)$, $\alpha_i \notin N$ $(i = 1,2,\ldots,m)$:

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha_i} y_i\right)(x) = \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x) + h_i(x),\ \lambda_i \in C,\ h_i \in C_{\gamma_i}[a,b], \quad (3)$$

$\gamma_i \in C$, $0 \le \mathrm{Re}(\gamma_i) < 1$,

$$y_i^{k_i}(a) = b_{k_i},\ b_{k_i} \in C\ \ (k_i = 0,1,\ldots,n_i - 1;\ n_i = [\mathrm{Re}(\alpha_i)] + 1,\ i = 1,2,\ldots,m), \quad (4)$$

в банаховом пространстве вида

$$\overline{C}_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha},\bar{n}-1}[a,b] = C_{\gamma_1}^{\alpha_1,n_1-1}[a,b] \times C_{\gamma_2}^{\alpha_2,n_2-1}[a,b] \times \ldots \times C_{\gamma_m}^{\alpha_m,m_1-1}[a,b],$$

где $C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b] = \left\{y \in C_{n-\alpha}[a,b] : D_{a+}^{\alpha} y \in C_\gamma[a,b]\right\}$, $C_\gamma^\alpha[a,b] \equiv C_{0,\gamma}^\alpha[a,b]$.

В работе [4] было показано, что задача Коши (3)–(4) равносильна системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$y_i(x) = \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \frac{b_{k_i}}{\Gamma(k_i+1)}(x-a)^{k_i} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\lambda_1 y_1(t) + \ldots + \lambda_m y_m(t)}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt + \left(I_{a+}^{\alpha_i} h_i\right)(x), \quad (5)$$

$(i = 1,2,\ldots,m)$.

Используя для решения системы уравнений (5) метод последовательных приложений и специальную функцию Миттаг–Лефлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in C, \alpha, \beta \in C, \mathrm{Re}(\alpha) > 0)$$

можно показать справедливость следующих утверждений.

Теорема. *Пусть* $\alpha_i \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha_i > 0))$, $\alpha_i \notin N$, $\lambda_i \in C$, $\gamma_i \in C$ $\left(0 \le \mathrm{Re}(\gamma_i) < 1\right)$, $h_i \in C_{\gamma_i}[a,b]$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. *Задача Коши* (3)–(4) *имеет в пространстве* $\overline{C}_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha},\bar{n}-1}[a,b]$ *единственное решение, определяемое формулой*

$$y_i(x) = \sum_{k_i=0}^{n_i-1} b_{k_i}(x-a)^{k_i} E_{\alpha_i,k_i+1}\left(\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right) +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{\alpha_i - 1} E_{\alpha_i,\alpha_i}\left[\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right] h_i(t)dt \ \ (i = 1,2,\ldots,m).$$

В частности, единственное решение задачи Коши для системы однородных уравнений

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha_i} y_i\right)(x) = \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x),\ y_i^{k_i}(a) = b_{k_i} \in C,$$

$k_i = 0,1,\ldots,n_i - 1;\ n_i = [\mathrm{Re}(\alpha_i)] + 1,\ i = 1,2,\ldots,m$, *дается формулой*

$$y_i(x) = \sum_{k_i=0}^{n_i-1} b_{k_i}(x-a)^{k_i} E_{\alpha_i, k_i+1}\left(\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right)\ (i = 1,2,\ldots,m).$$

Следствие. *При* $0 < \mathrm{Re}(\alpha_i) < 1$ *задача Коши*

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha_i} y_i\right)(x) = \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x) + h_i(x),\ y_i(a) = b_{0i} \in C\ \ (i = 1,2,\ldots,m)$$

имеет в $\overline{C}_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}[a,b] \equiv \overline{C}_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha},\bar{0}}[a,b]$ *единственное решение*

$$y_i(x) = b_{0i} E_{\alpha_i}\left[\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right] +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{\alpha_i - 1} E_{\alpha_i, \alpha_i}\left[\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right] h_i(t)\,dt\ \ (i = 1,2,\ldots,m),$$

$$E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

В частности, $y_i(x) = b_{0i} E_{\alpha_i}\left[\lambda_1(x-a)^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_1(x-a)^{\alpha_1}\right]$ *– единственное решение задачи Коши*

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha_i} y_i\right)(x) = \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x),\ y_i(a) = b_{0i} \in C\ \ (i = 1,2,\ldots,m).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost freguancy independent / M. Caputo // Geophis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mcinardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.

4. Марзан, С. А. Нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка с дробной производной Капуто в пространстве непрерывных функций // Труды Ин-та мат-ки, Минск. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 99–103.