С.А. МАРЗАН
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Рассмотрим модификацию аппроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка [1] для приближенного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто [2] порядков $\alpha_k > 1$ $(\alpha_k \notin N)$:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha_k} y_k\right)(x) = f_k\left[x, y_1(x), \ldots, y_p(x)\right] \ (k = 1, \ldots, p), \tag{1}$$

$$y_k^{(j_k)}(a) = b_{j_k} \in C, \ (k = 1, \ldots, p; \ j_k = 0, \ldots, n_k - 1, \ n_k = [\alpha_k] + 1). \tag{2}$$

Исследования основаны на равносильности задачи (1)–(2) и соответствующей системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$y_k(x) = \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \frac{b_{j_k}}{(j_k)!}(x-a)^{j_k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x \frac{f_k\left[t, y_1(t), \ldots, y_p(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha_k}} \ (k = 1, \ldots, p). \tag{3}$$

Обозначим через A_k $(k = 1, \ldots, p)$ интегральные операторы в правой части уравнения (3):

$$\left(A_k y_k\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x f_k\left[t, y_1(t), \ldots, y_p(t)\right] K_k(x,t) dt \ (k = 1, \ldots, p),$$

где $K_k(x,t) = \begin{cases} 0, & x \le t, \\ (x-t)^{\alpha_k - 1}, & x > t, \end{cases}$ $(k = 1, \ldots, p)$. Определим операторы (интерполяционные многочлены) $\widetilde{A}_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ формулами

$$\left(\widetilde{A}_k y_k\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \sum_{i_k=0}^{l_k} \int_a^{t_{i_k}^{(l_k)}} \sum_{j_k=0}^{m_k} f_k\left[t_{j_k}^{(m_k)}, y_1\left(t_{j_k}^{(m_k)}\right), \ldots, y_p\left(t_{j_k}^{(m_k)}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot K_k\left(t_{i_k}^{(l_k)}, t_{j_k}^{(m_k)}\right) l_{j_k}^{(m_k)}(t) dt \cdot l_{i_k}^{(l_k)}(x).$$

Здесь узлы $t_{i_k}^{(l_k)}$ и $t_{j_k}^{(m_k)}$ определяются по формуле вида

$$t_j^{(m)} = a + \frac{(b-a)\left(1 + \xi_j^{(m)}\right)}{2}, \ \xi_j^{(m)} = -\cos\frac{j\pi}{m} \ \ (j = 0, \ldots, m),$$

а $l_{i_k}^{(l_k)}$ и $l_{j_k}^{(m_k)}$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_{i_k}^{(l_k)}$ и $t_{j_k}^{(m_k)}$ $(k = 1, \ldots, p)$ соответственно.

Построим при помощи итерационного процесса по ν функции вида

$$\tilde{y}_{k,0}(x)=g_k(x),\ \tilde{y}_{k,\nu}(x)=\tilde{A}_k\tilde{y}_{k,\nu-1},\ \nu=1,2,\ldots;k=1,\ldots,p, \tag{4}$$

где $g_k(x)=\sum\limits_{j_k=0}^{n_k-1}\frac{b_{j_k}}{(j_k)!}(x-a)^{j_k}$.

Можно показать, что функции $\tilde{y}_{k,\nu}(x)$ являются алгебраическими многочленами вида

$$\tilde{y}_{k,\nu}(x)=g_k(x)+$$

$$+\frac{b-a}{2\Gamma(\alpha_k)}\sum_{i_k=0}^{l_k}\sum_{j_k=0}^{m_k}a_{i_k j_k}^{(l_k,m_k)}f\left[t_{j_k}^{(m_k)},\tilde{y}_{1,\nu-1}\left(t_{j_k}^{(m_k)}\right),\ldots,\tilde{y}_{p,\nu-1}\left(t_{j_k}^{(m_k)}\right)\right]K_k\left(x_{j_k}^{(m_k)},t_{j_k}^{(m_k)}\right)l_{i_k}^{(l_k)}(x),$$

где $l_{i_k}^{(l_k)}(x)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_{i_k}^{(l_k)}$, а

$$a_{i_k j_k}^{(l_k,m_k)}=\frac{\varepsilon_{j_k}}{m_k}\left\{1-C_{i_k}^{(l_k)}+\frac{1}{2}C_{j_k}^{(m_k)}\left(1-C_{2i_k}^{(l_k)}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu_k}^{m_k}\varepsilon_{\nu_k}^{(m_k)}\left[\frac{C_{(\nu_k-1)i_k}^{(l_k)}}{\nu_k-1}-\frac{C_{(\nu_k+1)i_k}^{(l_k)}}{\nu_k+1}-\frac{2}{\nu_k^2-1}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{0_k}=\varepsilon_{m_k}=\frac{1}{2},\ \varepsilon_{\nu_k}=1 \text{ при } \nu_k=1,\ldots,m_k-1 \text{ и } C_{r_k}^{(s_k)}=\cos\frac{r_k\pi}{s_k}.$$

Пусть $\alpha_k>1$ $(\alpha_k\notin N)$, $r_k>1$ и $m_k\in N$ $(k=1,\ldots,p)$. Введем следующие обозначения:

$$\delta_{l_k m_k}=S(l_k,\alpha_k)+\left(\frac{2}{\pi}\ln l_k+1\right)S(m_k,r_k),$$

$$S(m,r)=\frac{r(\ln m+\pi)}{m+1}\left(1+\frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}.$$

Обозначим через $W^rC[a,b]$ $(r>1)$ класс функций $F:[a,b]\to R$, представимых в виде дробного интеграла Римана–Лиувилля

$$W^rC[a,b]=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^x(x-t)^{r-1}h(t)dt,\ \max_{a\le t\le b}|h(t)|=\mu<\infty.$$

С использованием свойств дробных производных и интегралов Римана–Лиувилля, можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть $i==1,\ldots,m$, $\alpha_i>1$, $K_{H_i}=\{y_i\in R,|y_i|<H_i,H_i>0\}$, а функции $f_i[t,y_1,\ldots,y_m]:[a,b]\times K_{H_1}\times\ldots\times K_{Hm}\to R$ удовлетворяют условию

$$\max_{(x,y_1,\ldots,y_m)\in[a,b]\times\ddot{R}^m}|f_i[x,y_1,\ldots,y_m]|=M_i<\infty,$$

а также условию липшицевости относительно переменной y_i:

$$|f_i[x,y_1,\ldots,y_m]-f_i[x,y_1',\ldots,y_m']|\le L_i|y_i-y_i'|,\ L_i>0, \tag{5}$$

и при любых фиксированных $x \in [a,b]$, $y_i \in K_{H_i}$, и некоторых $r_i > 1$, $\mu_i > 0$

$$f_i\left[t, y_1, \ldots, y_m\right](x-t)^{\alpha_i - 1} \in W^{r_i} C[a,b].$$

Пусть $q_i = \dfrac{L_i (b-a)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} < 1$, где L_i определяются условием (5), и для некоторых $\varepsilon_i > 0$

$$\max\left\{ \frac{M_i (b-a)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}(1+\varepsilon_i), \frac{\mu_i (b-a)^{r_i + 1}}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(r_i + 1)}(1+\varepsilon_i) \right\} \le H_i .$$

Тогда последовательность многочленов $\tilde{y}_{i,\nu}(x)$ (4) приближает решение $y_i(x)$ задачи Коши (1)–(2) таким образом, что при всех натуральных l_i и m_i, таких, что $\delta_{l_i m_i} < \varepsilon_i$, выполняются неравенства

$$\left\| y_i(x) - \tilde{y}_{i,\nu}(x) \right\|_C \le D_i \frac{q_i^\nu + \delta_{l_i m_i}(1 - q_i^\nu)}{1 - q_i},$$

$$D_i = \max\left\{ \frac{M_i (b-a)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}; \frac{\mu_i (b-a)^{r_i + 1}}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(r_i + 1)} \right\}.$$

В качестве численного примера рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \left({}^c D_{0+}^{3/2} y_1 \right)(x) = y_2(x) - x y_1(x) + \dfrac{8}{\sqrt{\pi}} x^{3/2}, & y(0) = y'(0) = 0, \\ \left({}^c D_{0+}^{5/2} y_2 \right)(x) = y_1^2(x) - x^2 y_2(x) + \dfrac{32}{\sqrt{\pi}} x^{3/2}, & y(0) = y'(0) = y''(0) = 0; \end{cases} \qquad (6)$$

$x \in \left[0; \dfrac{1}{100} \right]$.

В результате применения рассмотренного выше метода получены следующие полиномы, приближающие точные решения $y_1(x) = x^3$ и $y_2(x) = x^4$ задачи Коши (6):

$$\tilde{y}_1(x) = -8{,}42651 \cdot 10^{-7} x + 0{,}000585149\, x^2 + 0{,}90675 x^3 + 4{,}2998 x^4,$$

$$\tilde{y}_2(x) = -6{,}85271 \cdot 10^{-10} x + 8{,}21175 \cdot 10^{-7} x^2 - 0{,}000176987\, x^3 + 1{,}01017\, x^4,$$

которые приближают точное решение задачи Коши с точностью до 10^{-7}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев : Наук. думка, 1988. – 302 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.