С.А. Марзан
Беларусь, г. Брест, БрГУ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим алгоритм приближённого решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = g(x) + \int_a^x K(x-t)\, f[t, y(t)]dt, \tag{1}$$

где $g(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha - j}$, $K(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1}$, $x \in [a,b]$, $\alpha > 1$, $n = [\alpha] + 1$, основанный на методе аппроксимирующих полиномов В.К. Дзядыка [1].

Пусть $Y \subset R$ – конечный или бесконечный интервал действительной оси R, функция $f[x,y]:[a,b]\times Y \to R$ при фиксированном $y \in Y$ непрерывна по x на $[a,b]$,

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\bar{Y}} \left| f[x,y] \right| = M < \infty, \tag{2}$$

и удовлетворяет условию липшицевости относительно второй переменной:

$$\left| f[x,y] - f[x,Y] \right| \le L|y - Y| \ \ (L > 0). \tag{3}$$

В работе [2] было показано, что при выполнении условия (2) интегральное уравнение Вольтерра (1) равносильно задаче типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x)]$ с начальными условиями $(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k$, а при дополнительном условии (3) уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C^{n-1}[a,b]$.

Чтобы построить эффективный алгоритм получения полиномов, хорошо приближающих в равномерной метрике решение уравнения (1), рассмотрим сумматорные полиномиальные операторы U_m [1, 3]:

$$U_m(\psi; x) = \sum_{i=1}^{N} \psi(x_i)\pi_i(x) = \left(\{\psi(x_i)\}_{i=1}^{N}; x \right), \tag{4}$$

где $\pi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{ik}\varphi_k(x)$ – стандартные обобщённые полиномы по некоторой системе линейно независимых функций $\{\varphi_k(x)\}_0^m \in C[a,b]$.

Пусть для этих операторов справедливо равенство (3.21) из [4]:

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon(U_m,H^{\omega_1})=0,\ \ \varepsilon(U_m,H^{\omega_1})=\sup_{\psi\in H^{\omega_1}}\left\|\psi(x)-U_m(\psi;x)\right\|_C, \tag{5}$$

$$MH^{\omega_1}\overset{df}{=}\left\{\psi:\left|\psi(x')-\psi(x'')\right|\le M\omega_1;\forall x',x''\in[a,b]\right\},. \tag{6}$$

$$\omega_1(K,\delta)\overset{df}{=}\left[(b-a)\omega(K,\delta)+\delta\left\|K\right\|_C\right],\ \forall\delta\in[0,b-a], \tag{7}$$

$$\omega(K,\delta)\overset{df}{=}\sup_{a\le t\le b}\ \sup_{\substack{a\le x,x+h\le b\\ |h|\le\delta}}\left|K(x+h-t)-K(x-t)\right|, \tag{8}$$

для любых x', x'' таких, что $\left|x'-x''\right|\le\delta,\ \forall\delta\in[0,b-a]$.

Схема построения полиномиальных решений уравнения (1) состоит в следующем. Уравнение (1) заменяется согласно [1] и [4] операторным уравнением

$$y_m(x)=U_m(g(x);x)+U_m\left(\left\{\int_a^{x_i}K(x_i,t)\,f[t,y_m(t)]dt\right\}_{i=1}^{N};x\right) \tag{9}$$

с неизвестной функцией $y_m(x)$, где U_m – произвольный сумматорный оператор вида (4).

Каждый из интегралов в (9) вычисляется по квадратурным формулам

$$\int_a^{x_i}\Phi(x_i,t)dt=\frac{x_i-a}{2}\sum_{j=1}^{l}p_j\Phi(x_i,t_{ij})+R_{li}[\Phi], \tag{10}$$

где $\left\{p_j\right\}_1^l$ – веса «стандартных» квадратурных формул для отрезка $[-1;1]$, а t_{ij} – узлы подобных им [1] квадратурных формул на отрезке $[a,x_i]$, и через R_{li} обозначены остатки этих формул.

Это приводит уравнение (9) к уравнению [5, ст. 232]

$$y_m(x)=U_m(g(x);x)+U_m\left(\left\{\frac{x_i-a}{2}\sum_{j=0}^{l}p_jK(x_i,t_{ij})\,f\left[t_{ij},y_m(t_{ij})\right]\right\}_{i=1}^{N};x\right). \tag{11}$$

На основании формул (4) и (10) коэффициенты $\left\{C_k\right\}_0^m$ полинома

$$y_m(x)=\sum_{k=0}^{m}C_k\varphi_k(x), \tag{12}$$

являющегося решением уравнения (11), находятся методом последовательных приближений из следующей системы уравнений

$$C_k=\sum_{i=1}^{N}a_{ik}\left\{g(x_i)+\frac{x_i-a}{2}\sum_{j=0}^{l}p_jK(x_i,t_{ij})\,f\left[t_{ij},\sum_{\nu=0}^{m}C_\nu\varphi_\nu(t_{ij})\right]\right\}. \tag{13}$$

Теорема. *Пусть* $\alpha > 1$, *функция* $f[x,y]:[a,b]\times Y \to R$ *при фиксированном* $y \in Y$ *непрерывна по x на* $[a,b]$, *выполняются условия* (2), (3) *и неравенство*

$$\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{l}|p_j|\left[\varepsilon(U_m;H^{\omega_1}) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right] = d < 1. \qquad (14)$$

Тогда операторное уравнение (11) *имеет единственное решение и этим решением является полином вида* (12), *коэффициенты которого находятся методом последовательных приближений из системы* (13).

Доказательство. Определим на классе $C[a,b]$ оператор A по формуле

$$Au = U_m\left(\left\{\frac{x_i - a}{2}\sum_{j=0}^{l} p_j K(x_i - t_{ij}) f[t_{ij},u]\right\}_{i=1}^{N};x\right); \forall u \in C[a,b]. \qquad (15)$$

Докажем, что A – оператор сжатия на $C[a,b]$. Пусть u_1 и u_2 – произвольные функции из $C[a,b]$. Тогда, согласно формулам (7)–(8), получим:

$$\|Au_1 - Au_2\|_C = \left\|U_m\left(\left\{\frac{x_i - a}{2}\sum_{j=0}^{l} p_j K(x_i - t_{ij})\big(f[t_{ij},u_1] - f[t_{ij},u_2]\big)\right\}_{i=1}^{N};x\right)\right\|_C. \qquad (16)$$

Положим в (16)

$$F(x) = \frac{x-a}{2}\sum_{j=0}^{l} p_j K(x - t_{ij})\big(f[t_{ij},u_1] - f[t_{ij},u_2]\big). \qquad (17)$$

Оценим модуль непрерывности функции $F(x)$.

$$|F(x+\delta) - F(x)| =$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{l} p_j\left[\frac{x+\delta-a}{2}K(x+\delta-t_{ij}) - \frac{x-a}{2}K(x-t_{ij})\right]\big(f[t_{ij},u_1] - f[t_{ij},u_2]\big)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{l}|p_j|\Big|\big\{(x-a)\big[K(x+\delta-t_{ij}) - K(x-t_{ij})\big] + \delta K(x+\delta-t_{ij})\big\}\big(f[t_{ij},u_1] - f[t_{ij},u_2]\big)\Big| \le$$

$$\le \frac{L}{2}\sum_{j=0}^{l}|p_j|\left[\omega(K,\delta)(b-a) + \delta\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]\|u_1 - u_2\|_C \le A_1\omega_1(K,\delta),$$

где $A_1 = \frac{L}{2}\sum_{j=0}^{l}|p_j|\|u_1 - u_2\|_C$.

Таким образом, согласно (6), $F(x) \in A_1 H^{\omega_1}$. В силу этого, учитывая линейность оператора U_m, (16), (17), (5) и (14), получаем:

$$\|Au_1 - Au_2\|_C \le \|U_m(F;x) - F(x)\|_C + \|F(x)\|_C \le$$

$$\leq \frac{L}{2}\sum_{j=0}^{l}\left|p_j\right|\left[\varepsilon(U_m;H^{\omega_1})+\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right]\left\|u_1-u_2\right\|_C \leq d\left\|u_1-u_2\right\|_C .$$

Отсюда, используя принцип сжимающих отображений [33], получаем утверждение теоремы.

Используя (10), (11) и (3.1) можно показать, что полином $y_m(x)$, являющийся решением уравнения (11), приближает решение $y(x)$ уравнения (1) таким образом, что выполняется оценка:

$$\left\|y(x)-y_m(x)\right\|_C \leq (1-(b-a)^{n-\alpha}d)^{-1}\left(\left\|y(x)-U_m(y;x)\right\|_C + R_{lm}\right),$$

где $R_{lm} \overset{df}{=} \left\|U_m\right\|_C \max\limits_{1\leq i\leq N}\left\|R_{li}\left[K(x_i-t)f[t,y(t)]\right]\right\|_C$, R_{li} – остатки применяемых квадратурных формул (10), а величина d определена неравенством (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В.К. О применении линейных операторов к приближённому решению обыкновенных дифференциальных уравнений // В.К. Дзядык. – Теория приближения функций и её приложения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 61–97.
2. Нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 1. – С. 29–35.
3. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций. М. : Гостехиздат, 1949. – 688 с.
4. О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений Гаммерштейна / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР. – 1970. – Т. 34, № 4. – С. 827–848.
5. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др. ; М. : Наука, 1969. – 688 с.