С.А. МАРЗАН
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ ($\mathrm{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, §2.2 ,2.4]. В работе [2] доказана равносильность решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто [3] порядков $\alpha_s \in C$ $\left(\mathrm{Re}(\alpha_s) > 0\right)$

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha_s} y_s\right)(x) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s y_s(x)\,,\ y_s^{(l_s)}(a) = b_{l_s}\,,\ b_{l_s} \in C \tag{1}$$

$\left(l_s = 0,1,\ldots,n_s - 1, \quad n_s = \left[\mathrm{Re}(\alpha_s)\right] + 1, \quad s = 1,2,\ldots,k\right)$ системе интегральных уравнений

$$y_s(x) = \sum_{l_s=0}^{n_s-1} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\lambda_s}{\Gamma(\alpha_s)} \int_a^x \frac{y_s(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_s}}\,. \tag{2}$$

В работе [2] показано, что задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто положительных порядков $n_s - 1 < \alpha_s < n_s$ $\left(n_s \in N\right)$ и комплексных порядков $\alpha_s \in C$, $n_s - 1 < \mathrm{Re}(\alpha_s) < n_s$ $\left(n_s \in N\right)$ имеют одинаковые постановки. Ситуация изменяется для системы дифференциальных уравнений с производными Капуто комплексных порядков $\alpha_s = m_s + i\theta_s$ $\left(m_s \in N\,,\ \theta_s \neq 0\right)$:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{m_s+i\theta_s} y_s\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m_s+1} \left(I_{a+}^{1-i\theta_s} \left[y_s(t) - \sum_{j_s=0}^{m_s} \frac{(t-a)^{j_s}}{j_s!} y^{(j_s)}(a) \right] \right)(x).$$

Рассмотрим задачу Коши (1) с дробными производными Капуто комплексных порядков $\alpha_s = m_s + i\theta_s$ $\left(m_s \in N\,,\ \theta_s \neq 0, \quad s = 1,2,\ldots,k\right)$. Используем для решения уравнения (2) метод последовательных приближений. Пусть

$$y_{s0}(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s}\,,$$

$$y_{sv}(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s} + I_{a+}^{m_s+i\theta_s}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s y_{sv-1}\right](x),\ v = 1,2,\ldots$$

Отсюда при $\nu = 1,2,\dots$ находим

$$y_{s1}(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s} + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)} \left(I_{a+}^{m_s+i\theta_s} (x-a)^{l_s} \right)(x) =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s} + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(m_s+i\theta_s+l_s+1)}(x-a)^{m_s+i\theta_s+l_s},$$

$$y_{s2}(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(l_s+1)}(x-a)^{l_s} + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma(m_s+i\theta_s+l_s+1)}(x-a)^{m_s+i\theta_s+l_s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^2 \sum_{l_s=0}^{m_s} \frac{b_{l_s}}{\Gamma\left(2(m_s+i\theta_s)+l_s+1\right)}(x-a)^{2(m_s+i\theta_s)+l_s} =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{m_s} b_{l_s} \sum_{j=0}^{2} \sum_{s=1}^{k} \frac{\lambda_s^j (x-a)^{l_s+j(m_s+i\theta_s)}}{\Gamma\left(l_s+1+j(m_s+i\theta_s)\right)},$$

что в общем случае приводит к формуле

$$y_{s\nu}(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} b_{l_s} \sum_{j=0}^{m} \sum_{s=1}^{k} \frac{\lambda_s^j (x-a)^{l_s+j(m_s+i\theta_s)}}{\Gamma\left(l_s+1+j(m_s+i\theta_s)\right)}, \ \nu = 1,2,\dots$$

Переходя к пределу при $\nu \to \infty$, получаем следующее представление искомого решения:

$$y_s(x) = \sum_{l_s=0}^{m_s} b_{l_s} (x-a)^{l_s} E_{m_s+i\theta_s, l_s+1}\left[\sum_{s=1}^{k} \lambda_s (x-a)^{m_s+i\theta_s} \right] \ (s = 1,2,\dots,k),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг–Леффлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Марзан, С. А. Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с производной Капуто комплексного порядка / С.А. Марзан // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сборник материалов межфак. науч.-метод. конф., посвященной 90-летию со дня рождения М.Г. Маркевича, Брест, 25 марта 2011 г. : в 2 ч. / Брест. гос. ун-т им. А.С.Пушкина; под общ. ред. Н.Н. Сендера – Брест : БрГУ, 2011. Ч. 1. – С. 81–84.

3. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophis. J.R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.