TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI A MATEMATICKÁ STATISTIKA

К. ф.-м. н. Мирская Е.И., к. ф.-м. н. Марзан С.А.
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Республика Беларусь

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ ОДНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, теории распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными.

Одним из методов спектрального оценивания, позволяющих получить оценку спектральной плотности непосредственно по исходному набору данных, является метод Уэлча [1], в котором осреднение производится по множеству периодограмм, получаемых по непересекающимся интервалам исходной последовательности данных, и вводится окно просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Рассмотрим многомерный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\}$, $t \in Z$, с $MX_a(t) = 0$, $a = \overline{1,r}$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $a, b = \overline{1,r}, \lambda \in \Pi = [-\pi,\pi]$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1) - T$ наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a, b = \overline{1,r}$ и $T = LN$, где L – число непересекающихся интервалов разбиения длины N.

Используя метод Уэлча, в работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1} I_{ab}^{lN}(\lambda), \tag{1}$$

где

$$I_{ab}^{lN}(\lambda) = d_a^{lN}(\lambda)\overline{d_b^{lN}(\lambda)},$$

$l = \overline{0,L-1}$, $\lambda \in \Pi, a, b = \overline{1,r}$ – модифицированная периодограмма на l-м интервале разбиения, а $d_a^{lN}(\lambda)$ – модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений на l-м интервале разбиения, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_N(t), t \in Z$.

Исследованы некоторые статистические свойства оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi, a, b = \overline{1,r}$. Найдена дисперсия построенной оценки. Исследовано ее асимптотическое поведение.

Теорема 1. Дисперсия оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda), \lambda \in \Pi, a, b = \overline{1, r}$, *задаваемой соотношением (1), имеет вид*

$$D\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{2\pi}{L}\left[\sum_{z=0}^{N-1} h_T^4(z)\right]\left[\sum_{z=0}^{N-1} h_T^2(z)\right]^{-2} \times$$

$$\times \iiint\limits_{\Pi^3} f_{abab}(\mu_1 + \lambda, \mu_2 - \lambda, \mu_3 - \lambda)\Phi_N(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \times$$

$$\times P_L[N(\mu_1 + \mu_2)]d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 +$$

$$+\frac{1}{L}\iint\limits_{\Pi^2} f_{aa}(v) f_{bb}(\mu)\Phi_N(v - \lambda)\Phi_N(\mu + \lambda)P_L[N(v + \mu)]dv d\mu +$$

$$+\frac{1}{L}\iint\limits_{\Pi^2} f_{ab}(\alpha) f_{ba}(\gamma)\Phi_N(\alpha - \lambda, \alpha + \lambda)\Phi_N(\gamma + \lambda, \gamma - \lambda)P_L[N(\alpha + \gamma)]d\alpha d\gamma,$$

где функции

$$\Phi_N(x, y) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_N^2(t)\right]^{-1} \varphi_N(x)\overline{\varphi_N(y)},$$

$$\varphi_N(x) = \sum_{t=0}^{N-1} h_N(t) e^{itx},$$

$$\Phi_N(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left[(2\pi)^3\sum_{t=0}^{T-1} h_N^2(t)\right]^{-1} \varphi_N(\mu_1)\varphi_N(\mu_2)\varphi_N(\mu_3)\overline{\varphi_N(\mu_1, \mu_2, \mu_3)},$$

$$P_L[N(x + y)] = \frac{1}{L}\frac{\sin^2\frac{N(x+y)L}{2}}{\sin^2\frac{N(x+y)}{2}}.$$

Проведен сравнительный анализ дисперсии оценки (1) для различных окон просмотра данных для конкретного временного ряда. Уменьшение дисперсии оценок достигается за счет выбора функции окна просмотра данных либо за счет увеличения числа интервалов разбиения исходной последовательности наблюдений.

Построение оценки производилось с помощью пакета MatLab. Показано, что наиболее эффективным является использование окна Бартлетта.