Кофакторы субнормальных подгрупп и инварианты конечной разрешимой группы

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Запись $H \lhd \lhd G$ означает, что H — субнормальная подгруппа группы G, $|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G, $|G|$ — порядок группы G, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$. Кроме того, $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини, $r_p(G)$ — p-ранг, $r(G)$ — ранг, $l_p(G)$ — p-длина, $n(G)$ — нильпотентная длина, $d(G)$ — производная длина разрешимой группы G, а $\rho(n)$ — максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,p)$.

С каждой подгруппой H группы G связаны две нормальные в G подгруппы — нормальная оболочка H^G и ядро H_G. Нормальная оболочка H^G является наименьшей нормальной в G подгруппой, содержащей H, а ядро H_G — наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H. Фактор-группа H/H_G называется кофактором подгруппы H.

В работе [**1**] исследовались инварианты (нильпотентная и производная длина, p-длина и ранг) разрешимой группы G в зависимости от значений числовой функции $t(G)$, которая определялась следующим образом:

$$t_p(G) = \max_{H \lhd \lhd G} \{j \mid p^j \top |H^G : H|\}, \ t(G) = max_{p\in\pi(G)} t_p(G).$$

Запись $p^m \top |H^G : H|$ означает, что p^m делит $|H^G : H|$, а p^{m+1} не делит $|H^G : H|$.

Естественно возникает задача изучения инвариантов конечных разрешимых групп в зависимости от канонических разложений $|H : H_G|$.

Введем следующие функции на множестве всех разрешимых групп:

$$u_p(G) = \max_{H \lhd \lhd G} \{j \mid p^j \top |H : H_G|\}, \ u(G) = \max_{p\in\pi(G)} u_p(G).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $r_p(G) \le 1 + u_p(G)$ *и* $r(G) \le 1 + u(G)$;
2) $l_p(G) \le 1 + u_p(G)$;
3) $n(G) \le d(G/\Phi(G)) \le 1 + \rho(1 + u(G)) \le 4 + u(G)$.

Список литературы

[1] *Guo W., Hu B., Monakhov V. S.* On indices of subnormal subgroups // Comm. Algebra. 2004. Vol. 33. P. 855–863.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com