

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ШИРОКИМИ ПОДГРУППАМИ

A subgroup H of a finite group G is called wide if each prime divisor of the order of G divides the order of H . We obtain a description of finite solvable groups without wide subgroups. It is shown that a finite solvable group with nilpotent wide subgroups contains a quotient group with respect to the hypercenter without wide subgroups.

Підгрупа H скінченної групи G називається широкою, якщо кожний простий дільник порядку G ділить порядок H . Отримано опис скінченних розв'язних груп, що не містять широких підгруп. Доведено, що у скінченній розв'язній групі з нільпотентними широкими підгрупами фактор-група по гіперцентру не містить широких підгруп.

Введение. В настоящей статье рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1, 2]. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G , а $|\pi(G)|$ — число всех различных простых делителей порядка группы G . Широкой подгруппой будем называть подгруппу H группы G , у которой $\pi(H) = \pi(G)$.

Пусть k — натуральное число. Группа, порядок которой делится точно на k различных простых чисел, будем называть k -примарной. При $k = 1, 2$ используются термины примарная и бипримарная группы. Группу G будем называть квази- k -примарной, если $|\pi(G)| > k$ и $|\pi(M)| \leq k$ для каждой максимальной подгруппы M из G . Квази-1-примарную группу называют квазипримарной, а квази-2-примарную группу — квазибипримарной [3].

Очевидно, что нильпотентная квазипримарная группа имеет порядок pq , где p и q — различные простые числа. Ненильпотентная квазипримарная группа $G = [E_{p^a}]Z_q$ является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой группы E_{p^a} порядка p^a и циклической группы Z_q порядка q , где a — показатель p по модулю q . Это следует из теоремы О. Ю. Шмидта [4] о группах, все подгруппы которых нильпотентны.

Квазибипримарные группы изучил С. С. Левищенко [3]. Разрешимая квазибипримарная группа G является полупрямым произведением $[P]M$ своей элементарной абелевой силовской p -подгруппы P и квазипримарной подгруппы M , являющейся максимальной подгруппой группы G [3] (теорема 3.1). В неразрешимой квазибипримарной группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ примарна [3] (теорема 2.2), а фактор-група $G/\Phi(G)$ является простой группой и все такие простые группы перечислены [3] (теорема 2.1).

Вполне естественно возникает задача изучения строения квази- k -примарной группы при любом k . Большая часть простых групп является квази- k -примарными. Простые группы, которые не являются квази- k -примарными, перечислены в [5, 3.8]. Тем самым дан исчерпывающий ответ на вопрос В. С. Монахова из Коуровской тетради [6] (11.64).

В настоящей статье получено описание разрешимых квази- k -примарных групп и разрешимых групп с нильпотентными широкими подгруппами.

1. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Разрешимая квази- k -примарная группа $(k + 1)$ -примарна.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая квази- k -примарная группа и M — ее максимальная подгруппа. По определению квази- k -примарной группы $|\pi(G)| \geq k + 1$, $|\pi(M)| \leq k$. В разрешимой группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы. Поэтому

$$|G : M| = p^\alpha, \quad p \in \pi(G), \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $|G| = |M| \cdot |G : M|$, то $|\pi(G)| \leq k + 1$ и $|\pi(G)| = k + 1$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если G — разрешимая квази- k -примарная группа и N — нормальная холлова подгруппа, то G/N — квази- l -примарная группа, где $l = k - |\pi(N)|$.

Доказательство. По лемме 1 группа G $(k + 1)$ -примарна, поэтому

$$|\pi(G/N)| = |\pi(G)| - |\pi(N)| = k + 1 - |\pi(N)| = l + 1.$$

Пусть M/N — произвольная максимальная подгруппа фактор-группы G/N . Тогда M — максимальная подгруппа группы G . Поэтому $|\pi(M)| < |\pi(G)|$. Поскольку N — холлова подгруппа группы G , то

$$|\pi(M/N)| = |\pi(M)| - |\pi(N)| < |\pi(G)| - |\pi(N)| = |\pi(G/N)| = l + 1.$$

Таким образом, фактор-группа G/N $(l + 1)$ -примарна, а любая ее максимальная подгруппа не более чем l -примарна. Следовательно, G/N квази- l -примарна.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [2], (IV.2.11). Если в группе G все силовские подгруппы циклические, то коммутант G' является циклической холловой подгруппой и фактор-группа G/G' циклическая.

2. Строение разрешимых квази- k -примарных групп.

Теорема 1. Пусть G — разрешимая группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G — квази- k -примарная группа;
- 2) каждая нормальная подгруппа группы G является холловой подгруппой;
- 3) каждая максимальная подгруппа группы G является холловой подгруппой;
- 4) $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G , а M — квази- $(k - 1)$ -примарная и максимальная подгруппа.

Доказательство. Проверим, что из утверждения 1 следует утверждение 2. Пусть G — разрешимая квази- k -примарная группа, N — нормальная подгруппа группы G , $\tau = \pi(G) \setminus \pi(N)$. Предположим, что N не является холловой подгруппой группы G . Поскольку G — квази- k -примарная группа и N — ее собственная подгруппа, то $|\pi(N)| \leq k$ и $\tau \neq \emptyset$. Далее, так как G — разрешимая группа, то в G существует τ -холлова подгруппа M . Теперь $(|M|, |N|) = 1$, а значит, $M \cap N = 1$ и $NM = [N]M < G$. Но

$$\pi([N]M) = \pi(N) \cup \pi(M) = \pi(N) \cup \tau = \pi(G), \quad |\pi(G)| = k + 1,$$

т. е. в квази- k -примарной группе G существует собственная $(k + 1)$ -примарная подгруппа $[N]M$. Пришли к противоречию. Таким образом, N — холлова подгруппа группы G и из утверждения 1 следует утверждение 2.

Проверим, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Допустим, что в разрешимой группе G каждая нормальная подгруппа является холловой. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G , а N — минимальная нормальная подгруппа. Тогда N — силовская подгруппа группы G . Если N не содержится в M , то $G = NM$, а так как N — абелева подгруппа группы G , то $N \cap M = 1$ и подгруппа M холлова. Пусть $N \subseteq M$. Тогда M/N — максимальная подгруппа фактор-группы G/N . Понятно, что в G/N каждая нормальная подгруппа является холловой и можно применить индукцию. По индукции M/N — холлова подгруппа фактор-группы G/N и M также холлова в группе G .

Проверим, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Допустим, что в разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа является холловой. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G и $|\pi(G)| = k + 1$. Поскольку M холлова, то $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1 = k$ и G — квази- k -примарная группа.

Таким образом, утверждения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Покажем, что из утверждения 1 следует утверждение 4. Пусть G — разрешимая квази- k -примарная группа и N — ее минимальная нормальная подгруппа. Из утверждения 2 следует, что N — силовская p -подгруппа группы G . По теореме Шура–Цассенхауза [1] (4.32) в группе G существует подгруппа M такая, что $G = [N]M$. По лемме 1 группа G $(k + 1)$ -примарна, поэтому подгруппа M k -примарна. Предположим, что в M существует собственная k -примарная подгруппа M_1 . Тогда в G существует собственная $(k + 1)$ -примарная подгруппа вида $[N]M_1$. Пришли к противоречию. Следовательно, M квази- $(k - 1)$ -примарна.

Осталось показать, что из утверждения 4 следует утверждение 1. Пусть $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G , а M — ее квази- $(k - 1)$ -примарная и максимальная подгруппа. Тогда по лемме 1

$$|\pi(M)| = k, \quad |\pi(G)| = |\pi([N]M)| = |\pi(N)| + |\pi(M)| = k + 1.$$

Покажем, что любая максимальная подгруппа K группы G не более чем k -примарна.

Пусть $NK = G$. Тогда $N \cap K = 1$ и $K \simeq M$. Так как M — квази- $(k - 1)$ -примарная разрешимая подгруппа группы G , то по лемме 1 подгруппа M , а значит и K , k -примарна.

Если NK — собственная подгруппа группы G , то $N \subseteq K$ и $K = N(K \cap M)$ по тождеству Дедекинда. Поскольку M квази- $(k - 1)$ -примарна, то $L \cap M$ не более чем $(k - 1)$ -примарна. Поэтому $K = [N](K \cap M)$ не более чем k -примарна. Таким образом, утверждения 4 и 1 эквивалентны.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что π -разрешимые группы с некоторыми холловыми максимальными подгруппами изучены в [7].

Следствие 1. *В разрешимой квази- k -примарной группе подгруппа Фраттини единична.*

Доказательство. Подгруппа Фраттини любой группы не может быть холловой [1] (4.33). Остается применить утверждение 2 теоремы 1.

Следствие 2. В разрешимой квази- k -примарной группе подгруппа Фиттинга является холловой и каждая ее силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой.

Доказательство. По утверждению 2 теоремы 1 подгруппа Фиттинга холлова, а значит, каждая ее силовская подгруппа является силовской подгруппой самой группы. Кроме того, так как подгруппа Фиттинга нильпотентна, то каждая ее силовская подгруппа является характеристической и, следовательно, нормальной в группе. При этом по утверждению 2 теоремы 1 минимальная нормальная подгруппа разрешимой квази- k -примарной группы является силовской подгруппой.

Следствие 3. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Если G — разрешимая квази- k -примарная группа, то фактор-группа G/N является разрешимой квази- l -примарной группой для $l = k - |\pi(N)|$.

Доказательство. Необходимо применить утверждение 2 теоремы 1 и лемму 2.

Если группа G имеет нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам, то говорят, что группа G имеет силовскую башню.

Следствие 4. Разрешимая квази- k -примарная группа имеет силовскую башню.

Доказательство. Применим индукцию по k . Пусть G — разрешимая квази- k -примарная группа. Тогда по утверждениям 2 и 4 теоремы 1 группа G представима в виде $G = [P_1]M_1$, где P_1 — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G , а M_1 — квази- $(k-1)$ -примарная и максимальная подгруппа. По индукции подгруппа M_1 имеет силовскую башню, поэтому группа G имеет силовскую башню.

Будем говорить, что натуральное число n свободно от квадратов, если p^2 не делит n для любого простого p . Сверхразрешимой называют группу, у которой все главные факторы имеют простые порядки.

Следствие 5. Порядок группы G свободен от квадратов тогда и только тогда, когда G — сверхразрешимая квази- k -примарная группа для $k = |\pi(G)| - 1$. В частности, сверхразрешимая квази- k -примарная группа метациклическая.

Доказательство. Пусть порядок группы G свободен от квадратов и $k = |\pi(G)| - 1$. Тогда все силовские подгруппы в G циклические и по лемме 3 группа G сверхразрешима и метациклическая. Понятно, что $|\pi(X)| < |\pi(G)|$ для каждой собственной подгруппы X группы G , т. е. G квази- k -примарна.

Обратно, пусть G — сверхразрешимая квази- k -примарная группа. Применим индукцию по k . По утверждению 4 теоремы 1 группа G представима в виде $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G , а M — квази- $(k-1)$ -примарная и максимальная подгруппа. Согласно [1] (4.48) минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок, поэтому $|N| = p$, $p \in \pi(G)$. Подгруппа M сверхразрешима и квази- $(k-1)$ -примарна. По индукции порядок M свободен от квадратов, поэтому порядок группы G свободен от квадратов. По лемме 3 группа G метациклическая.

Следствие 6. Производная длина разрешимой квази- k -примарной группы G не превышает

$$\min \{ |\pi(G)|, \max \{ 1 + a_i \mid i = 1, 2, \dots, t \} \},$$

где $|F(G)| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$.

Доказательство. Пусть $d(G)$ и $r(G)$ — производная длина и ранг разрешимой квази- k -примарной группы G соответственно. По утверждению 4 теоремы 1 в группе G все силовские подгруппы элементарные абелевы и главный ряд группы G имеет длину, равную $|\pi(G)|$. Отсюда следует, что $d(G) \leq |\pi(G)|$. Разрешимым группам с абелевыми силовскими подгруппами посвящен § VI.14 [2]. Поэтому все утверждения этого параграфа, касающиеся A -групп (разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами), справедливы для разрешимой квази- k -примарной группы. В частности, $d(G) \leq 1+r(G)$ по [2] (VI.14.18) и $r(G) \leq u$ по [2] (VI.14.31), где u — максимум числа образующих силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга $F(G)$. Поскольку силовские подгруппы в группе G элементарные абелевы, то $u = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, t\}$. Отсюда следует, что

$$d(G) \leq \min \{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, \dots, t\}\}.$$

При $k = 2$ теорема 1 превращается в результат С. С. Левищенко:

Следствие 7 [3], теорема 3.1. *Разрешимая квазибипримарная группа G является полупрямым произведением $[P]M$ своей элементарной абелевой силовской p -подгруппы P и квазипримарной подгруппы M , являющейся максимальной подгруппой группы G .*

3. Разрешимые группы с нильпотентными широкими подгруппами. Напомним определение гиперцентра. Пусть G — неединичная группа, $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$, $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G))$, ..., $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$, ... Подгруппа $Z_\infty(G) = \bigcup_{i=1}^\infty Z_i(G)$ называется гиперцентром группы G .

Очевидно, что $Z(G/Z_\infty(G)) = 1$.

Теорема 2. *Если в разрешимой группе G нильпотентна каждая максимальная подгруппа M , у которой $\pi(M) = \pi(G)$, то фактор-группа $G/Z_\infty(G)$ квази- k -примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$.*

Доказательство. Предположим, что фактор-группа $\bar{G} = G/Z_\infty(G)$ не квази- k -примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$. Тогда в \bar{G} существует такая максимальная подгруппа $\bar{M} = M/Z_\infty(G)$, что $\pi(\bar{M}) = \pi(\bar{G})$. Подгруппа M максимальна в G и $\pi(M) = \pi(G)$. По условию M нильпотентна, поэтому \bar{M} нильпотентна. Так как \bar{M} — максимальная подгруппа разрешимой фактор-группы \bar{G} , то $|\bar{G} : \bar{M}| = p^\alpha$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и натурального α . Пусть \bar{M}_p — силовская p -подгруппа из \bar{M} , а \bar{G}_p — силовская p -подгруппа фактор-группы \bar{G} , содержащая \bar{M}_p . Тогда \bar{M}_p — собственная подгруппа в \bar{G}_p , поэтому \bar{M}_p нормальна в \bar{G} . Теперь неединичный элемент \bar{x} из $\bar{M}_p \cap Z(\bar{G}_p)$ принадлежит центру фактор-группы \bar{G} . Это противоречит тому, что $Z(G/Z_\infty(G)) = 1$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 8. *Если в группе G все широкие подгруппы нильпотентны, то $G/Z_\infty(G)$ квази- k -примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$.*

Теорема 2 не допускает обращения. Примером является группа $G = S_3 \times Z_6$. Здесь S_3 — симметрическая группа степени 3, Z_6 — циклическая группа порядка 6. У этой группы $Z_\infty(G) = Z_6$, фактор-группа $G/Z_\infty(G) \simeq S_3$ — квазипримарна, а широкая максимальная подгруппа $M = S_3 \times Z_2$ не нильпотентна.

Вполне естественно возникает следующая задача: описать разрешимые группы, у которых все широкие подгруппы сверхразрешимы.

Литература

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйш. шк., 2006. – 207 с.
2. *Huppert B.* *Endliche Gruppen I.* Berlin ect., 1967. – 796 p.
3. *Левиценко С. С.* Конечные квазипрimary группы // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 83–97.
4. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**. – С. 366–372.
5. *Zhang Qin Hai, Wang Li Fang.* Finite non-abelian simple groups which contain a non-trivial semipermutable subgroup // Algebra Colloq. – 2005. – **12**. – P. 301–307.
6. Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп, 18-е издание. – Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2014.
7. *Монахов В. С.* Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. – 2008. – **84**, № 3. – С. 390–394.

Получено 17.02.15