Конечные группы с формационно субнормальными циклическими подгруппами

Сохор И.Л.
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемые терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1]– [2].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если $H = G$ или существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\ H_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Включение $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$. Здесь $(H_{i-1})_{H_i} = \cap_{h\in H_i} H_{i-1}^h$ — ядро подгруппы H_{i-1} в группе H_i, а $H_i^{\mathfrak{F}}$ — $H_i^{\mathfrak{F}}$-корадикал подгруппы H_i. Запись $H_i <\cdot\ H_{i+1}$ означает, что H_i — максимальная в H_{i+1} подгруппа.

В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно $\mathfrak{U}$-субнормальна и самонормализуема, $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Поэтому $\mathfrak{F}$-субнормальность и самонормализуемость не являются взаимоисключающими понятиями, что затрудняет исследования групп с формационно субнормальными или самонормализуемыми подгруппами.

В. С. Монахов [3] описал строение групп с $\mathfrak{U}$-субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами. Развивая данное направление исследований, мы описываем строение групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или самонормализуемыми примарными циклическими подгруппами для наследственной насыщенной решеточной формации $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда для разрешимой группы $G \notin \mathfrak{F}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или самонормализуема;*
(2) *каждая неабнормальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна и принадлежит $\mathfrak{F}$;*
(3) $G = G' \rtimes P$, *где*
  (3.1) $G^{\mathfrak{N}} = G' \in \mathfrak{F}$;
  (3.2) $P = \langle x\rangle = N_G(P)$ — *циклическая силовская p-подгруппа группы G, $p \in \pi(G)$;*
  (3.3) $G' \rtimes \langle x^p\rangle \in \mathfrak{F}$.

Напомним, формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Формация всех нильпотентных групп является наследственной насыщенной решеточной формацией. Поэтому для этой формации применима доказанная теорема. В частности, справедливо следствие.

Следствие. *Для ненильпотентной группы G следующие утверждения эквивалентны:*
(1) *каждая примарная циклическая подгруппа субнормальна или самонормализуема;*
(2) *каждая неабнормальная подгруппа субнормальна и нильпотентна;*
(3) $G = G' \rtimes P$, *где*
  (3.1) $G^{\mathfrak{N}} = G'$ *нильпотентна;*
  (3.2) $P = \langle x\rangle = N_G(P)$ — *циклическая силовская p-подгруппа группы G, $p \in \pi(G)$;*
  (3.3) $Z(G) = \langle x^p\rangle$ *и x индуцирует регулярный автоморфизм на G'.*

Список литературы

[1] В.С. Монахов, Введение в теорию конечных групп и их классов. *Минск: Вышэйшая школа,* 2006.

[2] K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups.*Berlin, New York: Walter de Gruyter,* 1992.

[3] В.С. Монахов, Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами. *Сиб. матем. журн.* **57** (2016), 447–462.