УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

СОХОР
Ирина Леонидовна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ИЛИ ФОРМАЦИОННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ ПОДГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2017

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Монахов Виктор Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Официальные оппоненты: **Воробьев Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»;

Тихоненко Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики учреждения образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого».

Оппонирующая организация — Белорусский государственный университет.

Защита состоится 27 октября 2017 года в 15.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 26 сентября 2017 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, а $|\pi(G)|$ — число элементов в $\pi(G)$. Группа G называется примарной, если $|\pi(G)| = 1$, и бипримарной при $|\pi(G)| = 2$.

К арифметическим свойствам относят порядки группы, ее подгрупп и элементов, индексы подгрупп, свойства множества $\pi(G)$ и т. д. Формационные ограничения включают в себя принадлежность некоторых подгрупп наперед заданным классам групп, а также способы вложения подгрупп в группы, связанные с формациями, например, понятия $\mathfrak{F}$-субнормальности и $\mathfrak{F}$-абнормальности, здесь $\mathfrak{F}$ — некоторая формация.

Собственную подгруппу H группы G будем называть широкой, если $\pi(H) = \pi(G)$. Это понятие предложил В. С. Монахов. Ясно, что примарные группы, не содержащие широких подгрупп, исчерпываются группами простых порядков. Бипримарные группы без широких подгрупп исчерпываются циклическими группами порядка pq и неабелевыми группами порядка $p^m q$, силовская p-подгруппа которых является минимальной нормальной подгруппой, m — показатель числа p по модулю q для различных простых p и q.

Понятно, что в разрешимой группе без широких подгрупп каждая максимальная подгруппа будет холловой. В. С. Монахов[1] получил описание частично разрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами заданных индексов. Т. В. Тихоненко и В. Н. Тютянов[2] доказали, что простые группы с холловыми максимальными подгруппами исчерпываются группами $\mathrm{PSL}(2,7)$, $\mathrm{PSL}(2,11)$ и $\mathrm{PSL}(5,2)$. Н. В. Маслова[3] перечислила композиционные факторы неразрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами. В дальнейшем эти результаты нашли свое развитие в работах В. А. Ведерникова[4], Н. В. Масловой и Д. О. Ревина[5]. Отметим еще работу Чжан Циньхая и Ван Лифана[6], в которой перечислены все простые группы, содержащие широкую максимальную подгруппу. Многие фрагменты теории

[1]Монахов, В. С. Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84, № 3. — С. 390–394.

[2]Тихоненко, Т. В. Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами / Т. В. Тихоненко, В. Н. Тютянов // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2008. — № 5 (50). — С. 198–206.

[3]Маслова, Н. В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы / Н. В. Маслова // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 1065–1076.

[4]Ведерников, В. А. Конечные группы, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова / В. А. Ведерников // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 3. — С. 71–82.

[5]Маслова, Н. В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы нечетных индексов которой холловы / Н. В. Маслова, Д. О. Ревин // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 178–187.

[6]Zhang, Q. Finite non-abelian simple groups which contain a non-trivial semipermutable subgroup / Q. Zhang, L. Wang // Algebra Colloquium. — 2005. — Vol. 12, № 2. — P. 301–307.

групп, связанные с максимальными подгруппами, отражены в монографии М. В. Селькина[7].

С возникновением теории формаций стали исследоваться группы с формационными ограничениями для подгрупп. Обобщением теоретико-групповых понятий субнормальности и абнормальности являются $\mathfrak{F}$-субнормальность и $\mathfrak{F}$-абнормальность соответственно. Теория формационно субнормальных подгрупп представлена в монографиях Л. А. Шеметкова[8], Дёрка и Хоукса[9], Го Вэньбиня[10], Баллестера-Болинше и Эскуэрро[11].

$E_{\mathfrak{F}}$-группой называют группу G при условии, что каждая ее нетривиальная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна и $G \notin \mathfrak{F}$. Свойства таких групп для различных формаций $\mathfrak{F}$ изучались в работах Фаттахи, Эберта и Баумана, Фёрстера, В. Н. Семенчука, А. Н. Скибы и других авторов, см. литературу в[12]. Новые аспекты и открытые проблемы, относящиеся к $E_{\mathfrak{F}}$-группам, обсуждаются в статье А. Н. Скибы[12].

Естественным продолжением исследований $E_{\mathfrak{F}}$-групп стало изучение групп, некоторые примарные подгруппы которых $\mathfrak{F}$-субнормальны. Здесь имеется большое количество публикаций, среди которых выделим работы А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой, В. Н. Тютянова, В. С. Монахова, В. Н. Князиной и других авторов, см. литературу в[13].

Часто в подобных задачах формационные ограничения присутствуют в симбиозе с арифметическими. Так, В. С. Монахов[14] изучил группы со сверхразрешимыми подгруппами непримарного индекса. В. А. Ковалева и А. Н. Скиба[15] описали строение разрешимых групп, n-максимальные подгруппы которых формационно субнормальны, при дополнительном ограничении количества простых делителей порядков таких групп.

Отметим, что данные направления исследований успешно развиваются и в классе бесконечных групп, см., например, работу Л. А. Курдаченко и

[7]Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. — Минск : Бел. навука, 1997. — 145 с.

[8]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М. : Наука, 1978. — 271 с.

[9]Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

[10]Guo, W. The theory of classes of groups / W. Guo. — Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2000. — 258 p.

[11]Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. — Dordrecht : Springer, 2006. — 381 p.

[12]Skiba, A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A. N. Skiba // Commun. Math. Stat. — 2016. — Vol. 4, № 3. — P. 281–309.

[13]Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 2. — С. 447–462.

[14]Монахов, В. С. Конечные группы со сверхразрешимыми подгруппами непримарного индекса / В. С. Монахов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры : сб. науч. ст. — Киев : Ин-т матем. АН Украины, 1993. — С. 195–209.

[15]Kovaleva, V. A. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V. A. Kovaleva, A. N. Skiba // J. Group Theory. — 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 273–290.

Смита[16] и литературу в ней.

Приведенный краткий обзор свидетельствует о том, что вопрос влияния арифметических и формационных ограничений на строение групп актуален и значим в современной теории групп. В данной диссертационной работе выделенные направления исследований получили дальнейшее развитие.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в период с 2014 по 2017 год в соответствии со следующими научными темами:

— «Развитие теории инвариантов конечных частично разрешимых групп и ее приложений», номер гос. регистрации — 20111160. Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы «Конвергенция», подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук».

— «Инварианты частично разрешимых конечных групп и их приложения», номер гос. регистрации — 20161494. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание групп с заданными арифметическими или формационными ограничениями для подгрупп.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

— исследование строения групп, все широкие подгруппы которых нильпотентны;

— описание структуры групп с не более чем бипримарными подгруппами четного порядка;

— получение критерия принадлежности всех собственных нормальных подгрупп разрешимой группы некоторому радикальному классу или формации всех сверхразрешимых групп;

— исследование строения групп, все примарные подгруппы которых формационно субнормальны или самонормализуемы.

---

[16] Kurdachenko, L. A. Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing / L. A. Kurdachenko, H. Smith // J. Pure Appl. Algebra. — 2005. — Vol. 196, № 2–3. — P. 271–278.

Объектом исследования являются группы с заданными арифметическими или формационными ограничениями для подгрупп. Предметом исследования является структура групп с ограничениями для собственных подгрупп.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем. Описана структура групп с ограниченным числом делителей порядков некоторых подгрупп или их кофакторов. Найдены верхние оценки инвариантов разрешимых групп в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп. Для разрешимых групп получен критерий сверхразрешимости всех собственных нормальных подгрупп или принадлежности их некоторому радикальному классу. Описано строение групп с формационно субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами, а также найдены новые свойства групп с формационно субнормальными примарными подгруппами.

Положения, выносимые на защиту

1. В разрешимой группе, все широкие подгруппы которой нильпотентны, фактор-группа по гиперцентру не содержит широких подгрупп.

2. Структура групп с не более чем бипримарными подгруппами четного порядка.

3. Критерий принадлежности всех собственных нормальных подгрупп разрешимой группы некоторому радикальному классу или формации всех сверхразрешимых групп.

4. Строение групп, все примарные подгруппы которых формационно субнормальны или самонормализуемы.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Виктора Степановича Монахова. Научным руководителем были поставлены задачи и цель исследования. В совместных работах основные идеи и выбор методов доказательства принадлежат научному руководителю, а их реализация проводилась соискателем. Две работы [1, 5] выполнены без соавторов.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации апробированы на

— Гомельском алгебраическом семинаре (учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»);

— XVIII–XX Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 23–25 марта 2015 г.; 21–23 марта 2016 г.; 20–22 марта 2017 г.);

— Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (Брест, 22–23 октября 2015 г.; 20–21 октября 2016 г.);

— Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 14–18 сентября 2015 г.);

— Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 3–7 мая 2015 г., 21–25 ноября 2016 г.);

— Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 24–29 июля 2016 г.);

— Международной XI школе-конференции «Теория групп» (Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.);

— Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–10 сентября 2016 г.);

— Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Нальчик, 17–21 мая 2017 г.);

— XI Международной алгебраической конференции (Киев, 3–7 июля 2017 г.);

— Международной конференции «Математика в современном мире» (Новосибирск, 14–19 августа 2017 г.).

Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов по теории групп и их классов для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 23.05.2016, 12.12.2016, 15.06.2017).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано 6 статей в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (объемом 5,12 авторского листа), 14 материалов и тезисов докладов конференций (объемом 0,91 авторского листа).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 90 наименований использованных источников и 20 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 83 страницы, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Соискатель выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Виктору Степановичу Монахову за оказанные им внимание и помощь при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. В этой главе также сформулирован ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 2 и 3.

В главе 2 описывается строение групп с ограниченным числом простых делителей некоторых собственных подгрупп. В разделе 2.1 рассматриваются группы с нильпотентными широкими подгруппами.

Пусть k — натуральное число. Группу G будем называть квази-k-примарной, если G не содержит широких подгрупп и

$$k = \max_{M \lessdot G} |\pi(M)|.$$

Понятно, что квази-k-примарная группа не менее чем $(k+1)$-примарна.

Теорема 2.1.1 [2] *Пусть G — разрешимая группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G — квази-k-примарная группа;*

(2) *каждая нормальная подгруппа группы G холлова;*

(3) *каждая максимальная подгруппа группы G холлова;*

(4) *$G = N \rtimes M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G, а M — квази-$(k-1)$-примарная и максимальная подгруппа.*

С. С. Левищенко[17] описал строение квазибипримарных групп. В разрешимом случае его результат является частным случаем теоремы 2.1.1 при $k = 2$.

Напомним определение гиперцентра. Пусть G — неединичная группа,

$$Z_0(G) = 1, \quad Z_1(G) = Z(G), \quad Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G)), \ldots,$$

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G)), \ldots.$$

[17] Левищенко, С. С. Конечные квазибипримарные группы / С. С. Левищенко // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп : сб. науч. тр. — Киев : Ин-т матем. АН УССР, 1979. — С. 83–97.

Подгруппа

$$Z_\infty(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i(G)$$

называется гиперцентром группы G.

Теорема 2.1.2 [2] *Если в разрешимой группе G каждая широкая максимальная подгруппа нильпотентна, то фактор-группа $G/Z_\infty(G)$ не содержит широких подгрупп. В частности, $G/Z_\infty(G)$ квази-k-примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$ и ее строение описано в теореме* 2.1.1.

Теорема 2.1.2 не допускает обращения, о чем свидетельствует следующий

Пример 2.1.1 Обозначим через S_n симметрическую группу степени n, а через Z_m — циклическую группу порядка m. В группе $G = S_3 \times Z_6$ гиперцентр $Z_\infty(G) = Z_6$, а фактор-группа $G/Z_\infty(G) \simeq S_3$ не содержит широких подгрупп. При этом группа G содержит ненильпотентную широкую максимальную подгруппу $M \simeq S_3 \times Z_2$.

Перечисленные результаты распространены на частично разрешимые группы. В частности, описано строение π-разрешимых групп с неширокими или π-специальными максимальными подгруппами, индекс которых есть π-число.

В разделе 2.2 исследуются pd-группы, каждая максимальная pd-подгруппа которых не более чем k-примарна для фиксированного натурального k и простого p. В частности, доказана

Теорема 2.2.1 [5] *Пусть в группе G каждая максимальная подгруппа четного порядка примарна или бипримарна. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G разрешима и либо G имеет нечетный порядок, либо G не более чем бипримарна, либо $G = N \rtimes M$, где N — минимальная нормальная и силовская q-подгруппа для некоторого $q \in \pi(G)$, M — квазипримарная максимальная подгруппа;*

(2) *группа G неразрешима, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ примарна и фактор-группа $G/\Phi(G)$ изоморфна одной из следующих групп:*

(2.1) $\mathrm{PSL}(3,3)$*;*

(2.2) $\mathrm{Sz}(2^p)$*, где $p = 3$ или $p = 5$;*

(2.3) $\mathrm{SL}(2,2^p)$*, где $p = 2$ или $p = 3$;*

(2.4) $\mathrm{PSL}(2,3^p)$*, где p — нечетное простое число, причем $3^p - 1 = 2 \cdot q^a$ для целого $a \geq 1$, простого $q > 3$, а $3^p + 1 = 4 \cdot r^b$ для целого $b \geq 1$, простого $r > 3$, $r \neq q$;*

(2.5) $\mathrm{PSL}(2,p)$*, где p — простое число, причем $p > 5$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ и $p - 1 = 2 \cdot 3^a$ для целого $a \geq 1$, а $p + 1 = 2^b \cdot q^c$ для целых $b \geq 2$ и $c \geq 0$*

(если $c = 0$, то $b \geq 3$), простого $q > 3$, или $p - 1 = 2 \cdot q^a$ для целого $a \geq 1$, простого $q > 3$, а $p + 1 = 2^b \cdot 3^c$ для целых $b \geq 2$ и $c \geq 1$, или $p - 1 = 2^a$ для целого $a > 2$, а $p + 1 = 2 \cdot 3^b$ для целого $b > 1$.

Теорема 2.2.1 охватывает как разрешимые, так и неразрешимые квазибипримарные группы, описанные С. С. Левищенко[17].

Раздел 2.3 содержит приложения полученных в предыдущем разделе результатов к кофакторам.

Теорема 2.3.1 [5] *Зафиксируем натуральное число k и простое p. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Если в разрешимой pd-группе G кофактор каждой собственной pd-подгруппы принадлежит $\mathfrak{F}$ или не более чем k-примарен, то либо $G/F(G) \in \mathfrak{F}$, либо $|\pi(G/F(G))| \leq k$, либо группа G p-замкнута.*

Теорема 2.3.2 [5] *Если в группе G кофакторы ненильпотентных подгрупп четного порядка примарны или бипримарны, то разрешимый радикал $R(G)$ группы G либо 2-замкнут, либо метанильпотентен, либо $|\pi(R(G)/F(G))| \leq 2$ и фактор-группа $G/R(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(H/R(G))$, где $H/R(G)$ — нормальная в $G/R(G)$ подгруппа, изоморфная одной из групп $(2.1)-(2.5)$ теоремы 2.2.1.*

Теорема 2.3.2 пополняет список неразрешимых групп, все собственные подгруппы которых имеют примарные или бипримарные кофакторы, полученный Е. Т. Огарковым[18].

В главе 3 исследуются группы с формационными ограничениями для некоторых собственных подгрупп. В разделе 3.1 найдены верхние оценки инвариантов разрешимых групп в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп. Проведенные здесь исследования двойственны исследованиям Го Вэньбиня, Ху Биня и В. С. Монахова[19].

В разделе 3.2 для разрешимой группы найден признак принадлежности всех собственных нормальных подгрупп некоторому радикальному классу или формации всех сверхразрешимых групп.

Теорема 3.2.1 [4] *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс и G — разрешимая группа, $G \notin \mathfrak{F}$. Каждая собственная нормальная в G подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие утверждения:*

(1) $\pi_{ind}(G) = \{p\}$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G = G'\langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — минимальное добавление к G' в группе G и $x \in G_p$;

(2) $G' = G^{\mathfrak{N}}$, $G_{\mathfrak{F}} = G'\langle x^p \rangle$ и $|G : G_{\mathfrak{F}}| = p$.

Здесь $\pi_{ind}(G)$ — множество всех простых чисел p, для которых в группе G

[18]Огарков, Е. Т. Конечные группы с определенными свойствами кофакторов / Е. Т. Огарков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. — 1974. — № 3.— С. 118–120.

[19]Guo, W. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups / W. Guo, B. Hu, V. S. Monakhov // Commun. Algebra. — 2004. — Vol. 33, № 3. — P. 855–863.

существует нормальная подгруппа индекса p, а G_p — силовская p-подгруппа группы G.

Теорема 3.2.2 [4] *Если в разрешимой несверхразрешимой группе G каждая собственная нормальная подгруппа сверхразрешима, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *если фактор-группа $G/G^{\mathfrak{N}}$ нециклическая, то*

(1.1) $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes G_p$ *для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(1.2) $F(G) = G^{\mathfrak{N}} \times O_p(G)$*;*

(1.3) *все собственные подгруппы в $G_p/O_p(G)$ абелевы;*

(1.4) *подгруппа $G^{\mathfrak{N}} \rtimes P$ сверхразрешима для всех $P < G_p$;*

(2) *если фактор-группа $G/G^{\mathfrak{N}}$ циклическая, то*

(2.1) $\pi_{ind}(G) = \{p\}$ *для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G = G^{\mathfrak{N}}\langle x\rangle$, где $\langle x\rangle$ — минимальное добавление к $G^{\mathfrak{N}}$ в G и $x \in G_p$;*

(2.2) $G^{\mathfrak{N}} = G'$ *и $G^{\mathfrak{N}}\langle x^p\rangle$ сверхразрешима.*

Обратно, если для группы G выполняются утверждения (1.1) *и* (1.4) *или* (2.1) *и* (2.2), *то каждая собственная нормальная в G подгруппа сверхразрешима.*

Теорема 3.2.2 поглощает результат Г. А. Маланьиной и Г. С. Шевцова[20] о строении групп с нильпотентным коммутантом и сверхразрешимыми собственными нормальными подгруппами.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Напомним, подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\ H_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ H_n = G$$

такая, что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i, что равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$.

В разделе 3.3 исследуются группы с формационно субнормальными примарными подгруппами. В частности, установлено, что в любой разрешимой группе каждая примарная подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна, а каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна. Для многих формаций $\mathfrak{F}$ доказано, что в разрешимой группе каждая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда каждая ее метанильпотентная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Данные утверждения развивают результаты А. Ф. Васильева и Т. И. Васильевой[21], В. Н. Княгиной и В. С. Монахова[22].

[20]Маланьина, Г. А. Одно обобщение конечных минимальных несверхразрешимых групп / Г. А. Маланьина, Г. С. Шевцов // Изв. вузов. Матем. — 1973. — № 7. — С. 59–62.

[21]Васильев, А. Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. — 2011. — № 4 (9). — С. 86–91.

[22]Monakhov, V. S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ric. Mat. — 2013. — Vol. 62. — P. 307–322.

Если формация $\mathfrak{F}$ содержит все нильпотентные группы, то каждая подгруппа, содержащая некоторую $\mathfrak{F}$-абнормальную подгруппу, самонормализуема. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно $\mathfrak{U}$-субнормальна и самонормализуема. Поэтому $\mathfrak{F}$-субнормальность и самонормализуемость не являются взаимоисключающими понятиями, что затрудняет исследования групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или самонормализуемыми системами подгрупп. В. С. Монахов[13] показал, что класс групп с $\mathfrak{U}$-субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами значительно шире класса $E_{\mathfrak{U}}$-групп.

Пример 3.3.4 Положим $\mathfrak{F} = \mathfrak{NA}$. Обозначим через E_{p^n} элементарную абелеву группу порядка p^n для простого p и натурального n.

Библиотека SmallGroup в системе GAP[23] содержит группу

$$G = (S_3 \times S_3 \times A_4) \rtimes Z_2 \quad (\texttt{GAP}\ \mathit{SmallGroup\ ID}\ [864, 4670]).$$

В группе G силовская 3-подгруппа $G_3 \simeq E_{3^3}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна, силовская 2-подгруппа $G_2 \simeq E_{2^4} \rtimes Z_2$ самонормализуема, не $\mathfrak{F}$-субнормальна и не $\mathfrak{F}$-абнормальна, а каждая собственная подгруппа из G_2 $\mathfrak{F}$-субнормальна. Кроме того,

$$G^{\mathfrak{F}} = F(G) \simeq E_{3^2} \times E_{2^2} < G^{\mathfrak{N}} \simeq E_{3^2} \times A_4.$$

Таким образом, класс групп, в которых примарные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны или самонормализуемы, шире класса групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или $\mathfrak{F}$-абнормальными примарными подгруппами, изученного В. Н. Семенчуком и С. Н. Шевчуком[24], даже в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{NA}$.

Теорема 3.3.7 [6] *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В разрешимой группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или самонормализуема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$*;*

(2) $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, *где* $\langle x \rangle$ *— самонормализуемая силовская* p*-подгруппа для некоторого* $p \in \pi(G)$ *и* $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$*;*

(3) $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \backslash \mathrm{w}\mathfrak{F}$, *подгруппой Картера является нециклическая силовская* p*-подгруппа* P *для некоторого* $p \in \pi(G)$ *и каждая собственная подгруппа из* P $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, $G = G^{\mathfrak{N}}P$ *и* $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ *для всех* $G^{\mathfrak{N}} \le H < G$.

Здесь $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — класс групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна; $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — класс групп, в которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

[23] A system for computational discrete algebra GAP 4.8.7 [Electronic resource]. — Mode of access: https://www.gap-system.org. — Date of access: 03.04.2017.

[24] Семенчук, В. Н. Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны / В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 8. — С. 46–55.

Следствие 3.3.7.1 *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и в каждой бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой. В разрешимой группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или самонормализуема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *каждая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$;*

(2) $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, *где* $\langle x \rangle$ — *самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$;*

(3) $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \backslash \mathrm{w}\mathfrak{F}$, *подгруппой Картера является нециклическая силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ и каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $G = G^{\mathfrak{N}}P$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для всех $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$.*

Напомним, нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Следствие 3.3.7.2 *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная сверхрадикальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то для разрешимой группы $G \notin \mathfrak{F}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *каждая примарная циклическая подгруппа в группе G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна;*

(2) *каждая собственная подгруппа в группе G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна;*

(3) $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, *где* $\langle x \rangle$ — *самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 3.3.7 и ее следствия развивают результаты В. С. Монахова[13], В. Н. Семенчука[24] и А. Н. Скибы[25,26].

---

[25] Семенчук, В. Н. О конечных группах, в которых каждая подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна / В. Н. Семенчук, А. Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. — 2015. — № 2 (23). — С. 72–74.

[26] Semenchuk, V. N. On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V. N. Semenchuk, A. N. Skiba // J. Algebra Appl. — 2016. — Vol. 15, № 4. — P. 1650063-1–1650063-11.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации исследованы группы с заданными арифметическими или формационными ограничениями для отдельных подгрупп.

Доказано, что в разрешимой группе, все широкие максимальные подгруппы которой нильпотентны, фактор-группа по гиперцентру не содержит широких подгрупп [2]. Этот результат распространен на частично разрешимые группы. В частности, описано строение π-разрешимых групп с π-специальными широкими максимальными подгруппами, индекс которых есть π-число [1].

Изучены группы с ограниченным числом делителей порядков некоторых максимальных подгрупп [5]. В частности, разрешимая группа, каждая максимальная подгруппа четного порядка которой примарна или бипримарна, либо имеет нечетный порядок, либо не более чем бипримарна, либо трипримарна и не содержит широких подгрупп. В неразрешимых группах с не более чем бипримарными максимальными подгруппами четного порядка подгруппа Фраттини примарна, а фактор-группа по подгруппе Фраттини простая и все возможности для фактор-группы перечислены. Результаты С. С. Левищенко (1979) о строении квазибипримарных групп являются частными случаями доказанных утверждений.

Разработаны приложения полученных результатов к кофакторам. В частности, дополнен полученный Е. Т. Огарковым (1974) список групп, в которых все собственные подгруппы имеют примарные или бипримарные кофакторы [5]. Найдены верхние оценки инвариантов разрешимых групп в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп [3]. Проведенные исследования являются двойственными исследованиям Го Вэньбиня, Ху Биня и В. С. Монахова (2005).

Получен критерий принадлежности всех собственных нормальных подгрупп разрешимой группы некоторому радикальному классу или формации всех сверхразрешимых групп [4], поглощающий результат Г. А. Маланьиной и Г. С. Шевцова (1973) о строении групп с нильпотентным коммутантом и сверхразрешимыми собственными нормальными подгруппами.

Описано строение разрешимых групп с формационно субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами, а также получены новые свойства групп с формационно субнормальными примарными подгруппами [6]. Доказанные утверждения развивают результаты А. Ф. Васильева и Т. И. Васильевой (2011), В. Н. Княгиной (2013) и В. С. Монахова (2016), В. Н. Семенчука (2011) и А. Н. Скибы (2016).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании групп с ограниченным числом простых делителей порядков отдельных подгрупп или их кофакторов, а также групп с некоторыми подгруппами из заданного класса или формационно вложенными в группу. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций. Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов «Теория групп» и «Классы групп» для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 23.05.2016, 12.12.2016, 15.06.2017).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи

1 Сохор, И. Л. О конечных π-разрешимых группах без широких подгрупп / И. Л. Сохор // Проблемы физики, математики и техники. — 2016. — № 1 (26). — С. 63–67.

2 Монахов, В. С. Конечные разрешимые группы с нильпотентными широкими подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Украинский математический журнал. — 2016. — Т. 68, № 7. — С. 957–962. Английская версия: Monakhov, V. S. Finitely solvable groups with nilpotent wide subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 68, № 7. — P. 1091–1096.

3 Monakhov, V. S. On cofactors of subnormal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. — 2016. — Vol. 15, № 9. — P. 1650169-1–1650169-9.

4 Monakhov, V. S. Finite groups with restrictions on normal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Publicationes Mathematicae Debrecen. — 2016. — Vol. 89, № 1–2. — P. 243–252.

5 Sokhor, I. L. On groups with biprimary subgroups of even order / I. L. Sokhor // Algebra and Discrete Mathematics. — 2017. — Vol. 23, № 2. — P. 312–330.

6 Монахов, В. С. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, № 4. — С. 851–863. Английская версия: Monakhov, V. S. Finite groups with formation subnormal primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Siberian Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 58, № 4. — P. 663–671.

Материалы конференций

7 Сохор, И. Л. Разрешимые квази-k-примарные группы / И. Л. Сохор // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XVIII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2015 г. : в 2 ч. / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. — Ч. 1. — С. 62–63.

8 Сохор, И. Л. О группах, все собственные нормальные подгруппы которых сверхразрешимы / И. Л. Сохор // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. О. В. Матысика. — Брест : БрГУ, 2015. — С. 78–79.

9 Сохор, И. Л. Конечные π-разрешимые группы без широких подгрупп / И. Л. Сохор // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XIX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 21–23 марта 2016 г. : в 2 ч. / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. — Ч. 1. — С. 59–60.

10 Сохор, И. Л. Неразрешимые группы с ограниченным числом делителей порядков максимальных подгрупп / И. Л. Сохор // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / ред.: С. Г. Красовский. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 5. — С. 48–49.

11 Сохор, И. Л. Группы с обобщенно субнормальными примарными подгруппами / И. Л. Сохор // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2016 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. О. В. Матысика. — Брест : БрГУ, 2016. — С. 118.

12 Сохор, И. Л. Формационно субнормальные свойства силовских подгрупп разрешимых групп [Электронный ресурс] / И. Л. Сохор // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 20–22 марта 2017 г. : в 2 ч. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. — Ч. 1. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

13 Монахов, В. С. Группы с формационными ограничениями на силовские подгруппы / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : материалы Междунар. науч. конф., Нальчик–Терскол, 17–21 мая 2017 г. — Нальчик, 2017. — С. 154.

Тезисы докладов

14 Монахов, В. С. Кофакторы субнормальных подгрупп и инварианты конечной разрешимой группы / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Мальцевские чтения : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 75-летию Ю. Л. Ершова, Новосибирск, 3–7 мая 2015 г. — Новосибирск, 2015. — С. 112.

15 Сохор, И. Л. Конечные группы с нильпотентными нормальными подгруппами / И. Л. Сохор // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академика Д. А. Супруненко, Минск, 14–18 сент. 2015 г. — Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2015. — С. 46–47.

16 Монахов, В. С. Неразрешимые группы с бипримарными кофакторами ненильпотентных подгрупп / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Алгебра и логика: теория и приложения : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения В. М. Левчука, Красноярск, 24–29 июля 2016 г. — Красноярск, 2016. — С. 49–50.

17 Сохор, И. Л. Разрешимые группы с ограниченным числом делителей порядков собственных подгрупп / И. Л. Сохор // Теория групп : тез. докл. Междунар. XI школы-конф., посвящ. 70-летию со дня рождения А. Ю. Ольшанского, Красноярск, 27 июля – 2 авг. 2016 г. — Красноярск, 2016. — С. 54.

18 Монахов, В. С. Группы с формационно субнормальными подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Мальцевские чтения : тез. докл. Международ. конф., Новосибирск, 21–25 нояб. 2016 г. — Новосибирск, 2016. — С. 99.

19 Monakhov, V. S. Groups with $\mathfrak{A}^2$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko : abstracts, Kyiv, July 3-7, 2017. — Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — С. 88.

20 Монахов, В. С. Группы с $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальными силовскими подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Математика в современном мире : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 14–19 авг. 2017 г. / под ред. Г. В. Демиденко. — Новосибирск : Изд-во Института математики, 2017. — С. 88.

РЭЗЮМЭ

Сохар Ірына Леанідаўна

Канечныя групы з арыфметычнымі ці фармацыйнымі абмежаваннямі для падгруп

Ключавыя словы: канечная група, парадак групы, кафактар, радыкальны клас, фармацыя, субнармальная падгрупа, саманармалізуемая падгрупа, гіперцэнтр, нільпатэнтная група, звышвырашальная група.

Мэта працы: апісанне груп з зададзенымі арыфметычнымі ці фармацыйнымі абмежаваннямі для падгруп.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп і метады тэорыі лікаў, метады класаў груп, у прыватнасці, метады тэорыі фармацый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Апісана структура груп з абмежаванай колькасцю дзельнікаў парадкаў некаторых падгруп ці іх кафактараў. У прыватнасці, атрымана апісанне вырашальных груп з нільпатэнтнымі шырокімі падгрупамі: у такіх групах фактар-група па гіперцэнтры не змяшчае шырокіх падгруп. Знойдзены верхнія ацэнкі інварыянтаў вырашальных груп у залежнасці ад кананічных раскладанняў парадкаў кафактараў субнармальных падгруп. Для вырашальных груп атрыманы крытэрый звышвырашальнасці ўсіх уласных нармальных падгруп ці прыналежнасці іх да некаторага радыкальнага класа. Апісана будова груп з фармацыйна субнармальнымі ці саманармалізуемымі прымарнымі падгрупамі, а таксама знойдзены новыя ўласцівасці груп з фармацыйна субнармальнымі прымарнымі падгрупамі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі носяць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў сучаснай тэорыі канечных груп і іх класаў пры даследаванні груп з абмежаванай колькасцю простых дзельнікаў парадкаў асобных падгруп ці іх кафактараў, а таксама груп з некаторымі падгрупамі з зададзенага класа груп ці фармацыйна ўкладзенымі ў групу. Матэрыялы дысертацыі будуць таксама карысныя пры чытанні спецкурсаў па тэорыі груп для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, пры падрыхтоўцы курсавых і дыпломных прац, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Вобласць прымянення: сучасная тэорыя груп і тэорыя фармацый.

РЕЗЮМЕ

Сохор Ирина Леонидовна

Конечные группы с арифметическими или формационными ограничениями для подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, порядок группы, кофактор, радикальный класс, формация, субнормальная подгруппа, самонормализуемая подгруппа, гиперцентр, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа.

Цель работы: описание групп с заданными арифметическими или формационными ограничениями для подгрупп.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп и методы теории чисел, методы классов групп, в частности, методы теории формаций.

Полученные результаты и их новизна. Описана структура групп с ограниченным числом делителей порядков некоторых подгрупп или их кофакторов. В частности, получено описание разрешимых групп с нильпотентными широкими подгруппами: в таких группах фактор-группа по гиперцентру не содержит широких подгрупп. Найдены верхние оценки инвариантов разрешимых групп в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп. Для разрешимых групп получен критерий сверхразрешимости всех собственных нормальных подгрупп или принадлежности их некоторому радикальному классу. Описано строение групп с формационно субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами, а также найдены новые свойства групп с формационно субнормальными примарными подгруппами.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании групп с ограниченным числом простых делителей порядков отдельных подгрупп или их кофакторов, а также групп с некоторыми подгруппами из заданного класса групп или формационно вложенными в группу. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория групп и теория формаций.

SUMMARY

Sokhor Irina Leonidovna

Finite groups with arithmetical or formational restrictions on subgroups

Keywords: finite group, group order, cofactor, radical class, formation, subnormal subgroup, self-normalizing subgroup, hypercenter, nilpotent group, supersoluble group.

Research aim: the description of groups with given arithmetical or formational restrictions on subgroups.

Research methods: methods of the abstract group theory and methods of the number theory, methods of the class theory, in particular, methods of the formation theory.

Obtained results and their novelty. We describe the structure of groups in which the orders of some subgroups or their cofactors have a limited number of prime divisors. In particular, we obtain the description of soluble groups with nilpotent wide subgroups: in such groups, the quotient group by the hypercenter has no wide subgroups. We find the upper bound on invariants of soluble groups depending on canonical decompositions of orders of subnormal subgroups cofactors. For soluble groups, we receive a criterion of supersolvability of all proper normal subgroups or belonging them to a Fitting class. We describe the structure of groups with formational subnormal or self-normalizing primary subgroups, and we also obtain new properties of groups with formational subnormal primary subgroups.

Recommendations for use. The obtained results are theoretical. They can be used in the modern theory of finite groups and their classes in the study of groups in which the orders of some subgroups or their cofactors have a limited number of prime divisors, and groups in which some subgroups belong to a given group class or are formational embedded in groups. The dissertation materials are also useful in reading special courses on the group theory for students of mathematical specialities, preparing of terms and diploma papers, master of philosophy and doctor of philosophy dissertations.

Application field: the modern group theory and the formation theory.

Научное издание

Сохор Ирина Леонидовна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ИЛИ ФОРМАЦИОННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ ПОДГРУПП

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 21.09.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,16.
Уч.-изд. л. 1,27. Тираж 60 экз. Заказ 693.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель