УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ГРИЦУК
Дмитрий Владимирович

ПРОИЗВОДНАЯ π-ДЛИНА КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2014

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Монахов Виктор Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии.

Официальные оппоненты: **Пальчик Эдуард Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, учреждение образования «Полоцкий государственный университет», научно-исследовательский сектор;

Сафонов Василий Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, начальник, Министерство образования Республики Беларусь, управление науки и инновационной деятельности.

Оппонирующая организация — учреждение образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Защита состоится 12 декабря 2014 года в 16^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 11 ноября 2014 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах[1,2].

Ряд подгрупп

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \qquad (1)$$

называется субнормальным (нормальным), если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i-1} (нормальна в группе G). Фактор-группы G_{i-1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число n называется длиной ряда.

Производная (нильпотетная) длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми (нильпотентными) факторами. Эти длины обозначаются через $d(G)$ и $n(G)$ соответственно. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы. К. Дёрк[3] доказал, что $n(G) - n(M) \leq 2$, где G — произвольная разрешимая группа, M — ее максимальная подгруппа. По аналогии с этим результатом В.С. Монахов предложил следующую задачу (Коуровская тетрадь[4], № 17.91): существует ли такая абсолютная константа k, что $d(G) - d(M) \leq k$ для любой разрешимой группы G и любой ее максимальной подгруппы M? Данный вопрос открыт до сих пор.

Пусть p — простое число. Если порядок фактора G_{i-1}/G_i является степенью числа p (не делится на p), то фактор G_{i-1}/G_i называется p-фактором (p'-фактором). Если каждый фактор ряда (1) является либо p-фактором, либо p'-фактором, то ряд (1) называется (p', p)-рядом. Если группа G имеет (p', p)-ряд, то она называется p-разрешимой, а наименьшее число p-факторов среди всех (p', p)-рядов называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн[5] в 1956 году и установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. А.Г. Анищенко и В.С. Монахов[6] эти результаты перенесли на центральные силовские пересечения. В 1967 г.

---

[1] Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006. — 207 с.

[2] Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967. — 792 s.

[3] Doerk, K. Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen / K.Doerk // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 91. — P. 19–21.

[4] Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп, 18-е издание. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева, 2014.

[5] Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside′s problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. 3, № 7. — P. 1–42.

[6] Анищенко, А.Г. Центральные пересечения и p-длина p-разрешимых групп / А.Г. Анищенко, В.С. Монахов // Докл. АН БССР. — 1977. — Т. XXI, № 11. — С. 968–971.

Л.А. Шеметков[7] распространил понятие p-длины на произвольные группы и доказал, что p-длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовской p-подгруппы. Элементарная теория p-длины изложена в монографии Б. Хупперта[2]. Новые оценки p-длины были получены в работах А.Х. Журтова и С.А. Сыскина[8], В.С. Монахова и О.А. Шпырко[9,10], А.А. Трофимука[11,12,13]. В частности, Е.Г. Брюханова[14] доказала, что p-длина p-разрешимой группы не превышает производную длину силовской p-подгруппы.

В 2013 году Е.И. Хухро и П.В. Шумятский[15] предложили понятия неразрешимой и не-p-разрешимой длин. Любая группа G имеет нормальный ряд, в котором каждый фактор является либо разрешимой (p-разрешимой) группой, либо прямым произведением неабелевых простых групп. Наименьшее число неразрешимых факторов среди всех таких нормальных рядов называется неразрешимой (не-p-разрешимой) длиной группы G. Е.И. Хухро и П.В. Шумятский доказали, что не-p-разрешимая длина группы не превышает наибольшую из p-длин ее p-разрешимых подгрупп.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, а $\pi(a)$ — множество простых чисел, делящих натуральное число a. Дополнение к π во множестве всех простых чисел $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Если $\pi(m) \subseteq \pi$ ($\pi(m) \subseteq \pi'$), то натуральное число m называется π-числом (π'-числом). Если порядок фактора G_{i-1}/G_i является π-числом (π'-числом), то фактор G_{i-1}/G_i называется π-фактором (π'-фактором). Если каждый фактор ряда (1) является либо разрешимым π-фактором, либо π'-фактором, то ряд (1) называется (π', π^s)-рядом. Если группа имеет (π', π^s)-ряд, то она называется π-разрешимой.

Для π-разрешимых групп аналогом p-длины p-разрешимой группы явля-

[7] Шеметков, Л.А. О частично разрешимых конечных группах / Л.А. Шеметков // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114), № 1. — С. 97–107.

[2] Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967. — 792 s.

[8] Журтов, А.Х. О группах Шмидта / А.Х. Журтов, С.А. Сыскин // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 2. — С. 74–78.

[9] Монахов, В.С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. — 2001. — Т. 13, Вып. 3. — С. 145–152.

[10] Монахов, В.С. О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2009. — № 6. — С. 3–8.

[11] Монахов, В. С. Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых, либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15, № 2. — P. 121–131.

[12] Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, № 5. — С. 1123–1137.

[13] Monakhov, V.S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. — 2011. — V. 39, № 9. — P. 3178–3186.

[14] Брюханова, Е.Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е.Г. Брюханова // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 2. — С. 161–170.

[15] Khukhro, E.I. Nonsoluble and non-p-soluble length of finite groups / E.I. Khukhro, P. Shumyatsky // ArXiv: 1310.2434v1 [math.GR] 9 oct 2013.

ется понятие π-длины. Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным (π', π^s)-рядом. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных (π', π^s)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

С понятием π-длины связана следующая задача Л.А. Шеметкова (Коуровская тетрадь[4], № 11.119): верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел π-длина π-разрешимой группы ограничена сверху производной длиной ее π-холловой подгруппы? Эта проблема рассматривалась в работе Л.С. Казарина[16], где получен положительный ответ, в случае, когда $2 \notin \pi$. Результаты, связанные с понятием π-длины π-разрешимой группы, можно найти в монографии А. Баллестера-Болинше, Р. Эстабан-Ромеро, М. Ассада[17].

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс[18] ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Они доказали, что класс всех разрешимых групп ограниченной нильпотентной π-длины является наследственной насыщенной формацией и описали ее локальный экран.

Для π-разрешимой группы аналогом нильпотентой длины является понятие нильпотентной π-длины. Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным (π', π^n)-рядом, т. е. субнормальным рядом (1), факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо π'-группами, либо нильпотентными π-группами. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных (π', π^n)-рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^n(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G.

Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья М. Нумата[19], в которой она ограничена числом классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп, чьи индексы принадлежат π. В.С. Монахов и О.А. Шпырко[10] для нильпотентной π-длины получили

[4]Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп, 18-е издание. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева, 2014.

[16]Kazarin, L.S. Soluble products of groups / L.S. Kazarin // Infinite groups 94. — New-York-Berlin: Walter de Gruyter, 1995. — P. 111–123.

[17]Ballester–Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester–Bolinches, R. Estaban–Romero, M. Asaad. — De Gruyter Expositions in Mathematics, 2010. — 334 p.

[18]Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J.Algebra. — 1968. — V. 9, № 3. — P. 285–313.

[19]Numata, M. On the π-nilpotent length of π-solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. — 1971. — V. 8. — P. 447–451.

[10]Монахов, В.С. О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2009. — № 6. — С. 3–8.

аналог отмеченного выше результата К. Дёрка[3]. Другие оценки нильпотентной π-длины π-разрешимой группы получены в работах[20,9]. Обзор результатов по нильпотентной π-длине и другим инвариантам частично разрешимых групп по состоянию на 2012 год приведен в статье В.С. Монахова и А.А. Трофимука[21].

Аналог производной длины для π-разрешимой группы до сих пор не рассматривался. В.С. Монахов [22] предложил следующее определение. Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным (π', π^a)-рядом, то есть субнормальным рядом (1), факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами для всех i. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных (π', π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

Из приведенного небольшого обзора можно сделать вывод о том, что задача получения новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы вполне актуальна.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Представленная работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2010 по 2014 в соответствии со следующей научной темой: «Развитие теории инвариантов конечных частично разрешимых групп и ее приложений», научный руководитель — В.С. Монахов. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук». («Математические методы»).

[3]Doerk, K. Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen / K.Doerk // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 91. — P. 19–21.

[20]Черников, Н.С. О π-длине конечных π-разрешимых групп / Н.С. Черников, А.П. Петравчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. Института математики АН Украины. Киев. — 1993. — С. 393–405.

[9]Монахов, В.С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. — 2001. — Т. 13, Вып. 3. — С. 145–152.

[21]Monakhov, V.S. Invariants of finite solvable groups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Algebra and Discrete Mathematics. — 2012. — Vol. 14, N. 1. — P. 107–131.

[22]Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов. // Математические заметки — 2006. — Т. 80, № 4. — Р. 573–581.

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы — получение новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы.

Реализация цели подразумевает решение следующих задач.

— Нахождение новых оценок производной p-длины p-разрешимой группы с заданной силовской p-подгруппой.

— Установление новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой.

— Нахождение новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения силовских p-подгрупп для $p \in \pi$.

— Получение новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения максимальной подгруппы ее π-холловой подгруппы.

Объектом исследования являются инварианты π-разрешимых групп с ограничениями на π-холлову подгруппу. Предмет исследования — производная p-длина p-разрешимых групп, нильпотентная и производная π-длины π-разрешимых групп.

Научная новизна

В диссертации получены новые оценки производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения либо силовских p-подгрупп для $p \in \in \pi$, либо π-холловой подгруппы, либо некоторой максимальной подгруппы π-холловой подгруппы. В частности, дальнейшее развитие получили отмеченные выше результаты Ф. Холла, Г. Хигмена, Л.А. Шеметкова, В.А. Ведерникова, Е.Г. Брюхановой, Н.С. Черникова, А.П. Петравчука, Л.С. Казарина, В.С. Монахова, О.А. Шпырко, И. Сяолан, А.А. Трофимука и др.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение у специалистов при исследованиях классов конечных групп, а также при чтении спецкурсов и написании курсовых, дипломных проектов и магистерских диссертаций на математических факультетах высших учебных заведений.

Положения, выносимые на защиту

1. Оценки производной p-длины p-разрешимой группы с заданной силовской p-подгруппой:

1.1) если силовская p-подгруппа экстраспециальная, то $l_p^a(G) \leq 2$;

1.2) если силовская p-подгруппа имеет порядок p^n, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ при $p \notin \{2, 3\}$ и $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$ при $p \in \{2, 3\}$.

2. Оценка производной π-длины π-разрешимой группы с заданным коммутантом π-холловой подгруппы:

2.1) если G — π-разрешимая группа, у которой коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен, то $l^a_\pi(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l^a_r(G)$;

2.2) если π-холлова подгруппа π-разрешимой группы сверхразрешима, то $l^a_\pi(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l^a_r(G)$.

3. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы, с заданными силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$:

3.1) если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы бициклические для всех $p \in \pi$, то $l^a_\pi(G) \leq 6$, а в случае, если $2 \notin \pi$, то $l^a_\pi(G) \leq 3$;

3.2) если в π-разрешимой группе G все силовские p-подгруппы либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$, $l^a_\pi(G) \leq 7$, а в случае, если $2 \notin \pi$, то $l^a_\pi(G) \leq 4$.

4. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы с ограничениями на некоторую максимальную подгруппу M из π-холловой подгруппы:

4.1) если подгруппа M абелева, то $l^a_\pi(G) \leq 3$;

4.2) если подгруппа M нильпотентна, то $l^a_\pi(G) \leq \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G))$.

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством профессора, доктора физико-математических наук Монахова Виктора Степановича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. Две работы [7–А, 8–А] подготовлены самостоятельно и опубликованы без соавторов. Совместные работы [1–А, 2–А, 3–А, 4–А, 5–А, 6–А] выполнены в нераздельном сотрудничестве.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались:

на семинарах кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;

на XIV–XVII Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 21–23 марта 2011 г.; 26–27 марта 2012 г.; 25–27 марта 2013 г.; 24–26 марта 2014 г.);

на международной научно-практической конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам» (Витебск, 21–22 июня 2011 г.);

на Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–9 ноября 2012 г.);

на Республиканской научно-практическая конференции «Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты» (Брест, 17-18 апреля 2014 г.);

на Республиканской научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (при поддержке ИООО «Эрикполь Брест», Брест, 15–16 октября 2014 г.).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано восемь статей в научных журналах из списка ВАК. Общий объем опубликованных материалов составляет 5,66 авторский листа, в том числе: статьи в журналах — 3,81, тезисы докладов и статьи в материалах и трудах конференций — 1,85.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 58 наименования использованных источников и 24 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 90 страниц, из них 7 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Виктору Степановичу Монахову за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке.

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации.

В главе 2 «Предварительные сведения» собраны некоторые известные понятия и результаты, которые наиболее часто используются в диссертационной работе.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3 и 4.

Глава 3 посвящена нахождению новых оценок производной p-длины p-разрешимых групп. Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо p'-группами, либо абелевыми p-группами. Наименьшее число абелевых p-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p-длиной группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что у p-группы производная p-длина совпадает с производной длиной. В разделе 3.1 приведены начальные свойства производной p-длины p-разрешимой группы.

В разделе 3.2 находятся новые оценки производной p-длины p-разрешимой группы, связанные со строением силовской p-подгруппы. В работе Л.А. Шеметкова и И. Сяолан[23] исследовалась p-длина p-разрешимой группы с экстраспециальной силовской p-подгруппой, изоморфной нормальной силовской подгруппе минимальной не $\mathfrak{F}$-группы. Развивая результаты этой работы, доказана следующая теорема.

3.2.5 Теорема [2–А]. *Если G — p-разрешимая группа с экстраспециальной силовской p-подгруппой, то $l_p(G) \leqslant l_p^a(G) \leqslant 2$. Кроме того, если $l_p(G) = 2$, то $p \in \{2, 3\}$ и группа G имеет секцию, изоморфную знакопеременной группе A_4.*

В теореме 3.2.9 установлена зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы.

3.2.9 Теорема [8–А]. *Пусть G — p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой порядка p^n. Если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$. Если $p \in \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$.*

При доказательстве результатов, связанных с p-длиной p-разрешимых групп, довольно часто возникает ситуация, когда для некоторого натурального t выполняются следующие неравенства: $l_p(G) > k$, $l_p(H) \leq k$, $l_p(G/K) \leq k$ для всех собственных подгрупп H из G и всех неединичных нормальных в G подгрупп N. Такая ситуация, в частности, возникала при доказательстве классических теорем Холла-Хигмена[5]. В разделе 3.3 получены общие свойства p-разрешимой группы с отмеченными выше значениями p-длин, которые находят приложение в дальнейшем.

В 1986 году В. А. Ведерников[24] доказал следующий результат:

Если H — ненормальная максимальная подгруппа разрешимой группы G, то $N_G(Q) \subseteq H$ для некоторой силовской подгруппы Q группы G.

Вполне естественно возникает следующий вопрос: *нормализатор какой силовской подгруппы содержит ненормальная максимальная подгруппа разрешимой группы?*

Ответ на этот вопрос получен в разделе 3.4: *если H — ненормальная максимальная подгруппа разрешимой группы G и $q \in \pi(F(H/\mathrm{Core}_G H))$, то в группе G существует силовская q-подгруппа Q такая, что $N_G(Q) \subseteq H$.* Кроме того, теорема В.А. Ведерникова распространена на π-разрешимые группы, что в дальнейшем используется в главе 4.

---

[23]Shemetkov, L.A. On the p-length of a finite p-solvable groups / L.A. Shemetkov, Yi Xiaolan // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2008. — Т. 16, № 1. — С. 93–96.

[5]Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside′s problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. 3, № 7. — P. 1–42.

[24]Ведерников, В.А. О π-свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. — Мн.: Наука и техника, 1986. — С. 13 –19.

Глава 4 посвящена нахождению новых оценок производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения либо π-холловой подгруппы, либо от силовских p-подгрупп для $p \in \pi$. Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным (π', π^a)-рядом (1). Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных (π', π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$ значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G. В разделе 4.1 приводятся начальные свойства производной π-длины π-разрешимой группы.

Раздел 4.2 посвящен получению новых оценок производной π-длины в зависимости от строения π-холловой подгруппы.

4.2.13 Теорема [6–А]. *Если G — π-разрешимая группа, у которой коммутант π-холловой подгруппы нильпотентен, то $l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$.*

4.2.17 Следствие [6–А]. *Если G — π-разрешимая группа со сверхразрешимой π-холловой подгруппой, то $l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$.*

Заметим, что теорема 4.2.13 охватывает случай, когда силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, а также случаи, когда π-холлова подгруппа является либо группой Шмидта, либо группой Миллера-Морено.

4.2.21 Теорема [6–А]. *Если G — π-разрешимая группа и все собственные подгруппы в G_π сверхразрешимы, то $l_\pi^a(G) \leq 2 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$.*

В разделе 4.3 получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения силовских p-подгрупп, $p \in \pi$. Основными результатами данного раздела являются следующие две теоремы.

4.3.11 Теорема [4–А]. *Пусть G — π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi(G) \leq 2$, $l_\pi^n(G) \leq 2$ и $l_\pi^a(G) \leq 3$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_\pi(G) \leq 4$, $l_\pi^n(G) \leq 4$ и $l_\pi^a(G) \leq 6$.

С учетом того, что $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G)$ и $n(G_\pi) \leq l_\pi^n(G)$ при $\pi = \pi(G)$ из теоремы 4.3.11 вытекают оценки производной и нильпотентной длин, полученные в 2001 году В.С. Монаховым и Е.Е. Грибовской[25].

4.3.14 Теорема [7–А]. *Пусть G — π-разрешимая группа, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$. Тогда:*

1) *если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 4$.*

[25]Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 603–612.

2) *если* $2 \in \pi$, *то* $l_{\pi}^{a}(G) \leq 7$.

В разделе 4.4 найдены оценки производной π-длины π-разрешимой группы G в зависимости от строения некоторой максимальной подгруппы M из G_{π}. Рассматривается ситуация, когда в M все собственные подгруппы абелевы или нильпотентны.

4.4.4 Теорема [5–А]. *Пусть* G *—* π*-разрешимая группа,* G_{π} *—* π*-холлова подгруппа и* M *— максимальная подгруппа в* G_{π}*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если подгруппа* M *абелева, то* $l_{\pi}^{n}(G) \leq 2$ *и* $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$;

2) *если подгруппа* M *абелева и холлова, то* $l_{\pi}^{a}(G) \leq 2$;

3) *если подгруппа* M *нильпотентна, то* $l_{\pi}^{n}(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)$ *и*

$$l_{\pi}^{a}(G) \leqslant \max_{r \in \pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G));$$

4) *если подгруппа* M *нильпотентна и холлова, то*

$$l_{\pi}^{a}(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi(M)} l_r(G) \cdot \max_{r \in \pi(M)} d(G_r).$$

4.4.5 Следствие [5–А]. *Если в группе* G *некоторая максимальная подгруппа* M *абелева, то коммутант* G' *нильпотентен, а второй коммутант* G'' *содержится в* $M \cap Z(G)$.

4.4.6 Следствие [5–А]. *Если в группе* G *некоторая максимальная подгруппа является абелевой холловой подгруппой, то коммутант* G' *абелев.*

4.4.8 Пример. Коммутант группы Шмидта с неабелевой силовской подгруппой неабелев, и в этой группе имеется абелева непримарная максимальная подгруппа. Поэтому в следствии 4.4.5 коммутант G' может быть неабелевым.

4.4.9 Пример. Симметрическая группа S_4 имеет производную длину, равную 3, и в ней силовская 2-подгруппа неабелева и максимальна. Это означает, что в следствии 4.4.6 условие абелевости холловой максимальной подгруппы убрать нельзя.

4.4.10 Пример. Группа $SL(2,3)$ является группой Шмидта с нормальной силовской 2-подгруппой, изоморфной группе кватернионов порядка 8, и ненормальной силовской 3-подгруппой порядка 3. Группа $SL(2,3)$ имеет производную длину, равную 3, и в ней имеется циклическая максимальная подгруппа порядка 6. Это означает, что в следствии 4.4.6 нельзя убрать холловость.

Заметим, что примеры 4.4.8–4.4.10 подтверждают точность числовых оценок, полученных в теореме 4.4.4.

4.4.11 Теорема. [5–А] *Пусть G — π-разрешимая группа, G_π — π-холлова подгруппа и M — максимальная подгруппа из G_π. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если M — группа Миллера-Морено, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^n(G) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant 3$;*

2) *если M — группа Шмидта, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 5$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^n(G) \leqslant 3$, $l_\pi^a(G) \leqslant 4$.*

4.4.12 Следствие. [5–А] *Если G — p-разрешимая группа и в ее силовской p-подгруппе все вторые максимальные подгруппы абелевы, то $l_p(G) \leq 3$, а $l_p^a(G) \leq 4$.*

Отметим, что теорема 4.4.11 охватывает также случай, когда в G_π все вторые максимальные подгруппы нильпотентны и G_π не является силовской подгруппой. Используя результаты работы В. А. Белоногова[26] можно дать точные оценки производной π-длины π-разрешимой группы с такой π-холловой подгруппой.

При $\pi = \pi(G)$ из теоремы 4.4.11 вытекают еще два следствия.

4.4.13 Следствие. [5–А] *Если в разрешимой группе G некоторая максимальная подгруппа является группой Миллера-Морено, то $d(G) \leq 4$.*

4.4.14 Следствие. [5–А] *Если в разрешимой группе G некоторая максимальная подгруппа является группой Шмидта, то $d(G) \leq 5$.*

4.4.15 Пример. [5–А] В библиотеке SmallGroups компьютерной системы GAP[27] под номером 2293 указана группа $G = SR$ порядка 1944, где $R = [Z_3 \times Z_3]Z_3$ — нормальная подгруппа порядка 27, $S = [Q_8]Z_{27}$ — максимальная подгруппа группы G, являющаяся группой Шмидта, $|S \cap R| = 3$. Здесь Q_8 — группа кватернионов порядка 8. Группа G имеет производную длину, равную 5.

[26] Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Мат. заметки. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 21–32.

[27] Система компьютерной алгебры GAP 4.4.12 [Электронный ресурс]. — 2009. — Режим доступа: http://www.gap–system.org/ukrgap/gapbook/manual.pdf.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа выполнена в рамках темы: «Развитие теории инвариантов конечных частично разрешимых групп и ее приложений», которая входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 гг., ГПНИ «Конвергенция».

Основные научные результаты диссертации

Предложена методика исследования нового понятия современной теории групп — производная π-длина π-разрешимой группы. Получены новые оценки производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения либо π-холловой подгруппы, либо от силовских p-подгрупп для $p \in \pi$.

Установлено, что p-разрешимые группы с экстраспециальной силовской p-подгруппой имеют производную p-длину не выше 2 [2–А]. Кроме того, если p-длина равна 2, то $p \in \{2, 3\}$ и группа имеет секцию, изоморфную знакопеременной группе A_4.

Доказано, что производная p-длина $l_p^a(G)$ p-разрешимой группы G с силовской p-подгруппой порядка p^n не превышает $1 + \frac{n}{2}$, а если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ [8–А].

Теорема В. А. Ведерникова о максимальных подгруппах разрешимых групп конкретизирована и распространена на π-разрешимые группы [3–А]. Получено решение его проблемы 1986 года в случае, когда подгруппа Фиттинга кофактора максимальной подгруппы неединична.

Доказано, что производная π-длина π-разрешимой группы со сверхразрешимой π-холловой подгруппой не превышает $1 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$, где $l_r^a(G)$ — производная p-длина группы G [6–А]. Если в π-холловой подгруппе все собственные подгруппы сверхразрешимы, то производная π-длина группы не превышает $2 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$.

Установлено, что производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$, не превышает 7 [5–А], а в случае, когда $2 \notin \pi$, не превышает 4.

Найдены новые оценки нильпотентной π-длины и производной π-длины π-разрешимой группы G в зависимости от строения максимальной подгруппы M из π-холловой подгруппы [5–А]. Рассмотрена ситуация, когда все собственные подгруппы в M абелевы или нильпотентны. В частности, доказано, что производная π-длина не превышает 5 для π-разрешимой группы G, у которой подгруппа M является минимальной ненильпотентной группой.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в различных областях современной теории групп. Также полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, а также в исследованиях по теории конечных групп, в том числе при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных журналах

1–А. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Сер. 1. — 2012. — № 3. — С. 90–95.

2–А. Грицук, Д.В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальны / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2012. — Т. 20, № 2. — С. 3–9.

3–А. Gritsuk, D.V. About maximal subgroup of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, № 2. — P. 129–134.

4–А. Грицук, Д.В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 1(15). — С. 61–66.

5–А. Монахов, В.С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 3. — С. 215–223.

6–А. Monakhov, V.S. On derived π-length of a finifte π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. — 2013. — Vol. 16, № 2. — С. 233–241.

7–А. Грицук, Д.В. Производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. — 2014. — № 2(19). — С. 54–58.

8–А. Грицук, Д.В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. — 2014. — № 3(20). — С. 58–60.

Препринты

9–А. Gritsuk, D.V. On maximal subgroups of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // Cornell University Library. arXiv: 1105.1054 [math.GR] 5 May 2011. — 5 p.

Статьи в трудах и материалах конференций

10–А. Грицук, Д.В. Подгруппы Шмидта и p-длина p-разрешимой группы / Д.В. Грицук // Творчество молодых '2011: сборник научных работ студентов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины»: в 2 ч. / отв.

ред. О.М. Демиденко; редкол.: Р.В. Бородич и [др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. — Ч. 1. — С. 94–97.

Тезисы докладов конференций

11–А. Грицук, Д.В. О π-разрешимой группе с нильпотентной π-холловой подгруппой / Д.В. Грицук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XIV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 21–23 марта 2011 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. — Ч. 2 — С. 7–8.

12–А. Грицук, Д.В. О влиянии p-длин собственных подгрупп на p-длину p-разрешимой группы / Д.В. Грицук // Дни студенческой науки: материалы XL студенческой научно-практической конференции, Гомель, 4–5 мая 2011 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.), Р.В. Бородич (зам. гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. — Ч. 1. — С. 49.

13–А. Грицук, Д.В. О максимальных подгруппах конечных разрешимых групп / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы международ. науч.-практ. интернет-конф., Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: Л.А. Шеметков (гл. ред.) и [др.]. — Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова» , 2011. — С. 29–30.

14–А. Грицук, Д.В. О конечной π-разрешимой группе, в которой π-холлова подгруппа является t-группой / Д.В. Грицук // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты: материалы Межфакультетской научно-практическая конференции, посвященной 75-летию С.Г. Кондратени, Брест, 23 марта 2012 г. / Брест. гос. ун-т. имени А.С. Пушкина; под общ. ред. Н.Н. Сендера. — Брест: БрГУ, 2012. — С. 34.

15–А. Грицук, Д.В. Оценка производной π-длины конечной π-разрешимой группы с цикличискими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 26–27 марта 2012 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. — Ч. 2. — С. 30–31.

16–А. Грицук, Д.В. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, О.А. Шпырко // Алгебра и линейная оптимизация: тезисы Международной конференции, Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г. — Екатеринбург: издательство «УМЦ–УПИ» , 2012. — С. 57–58.

17–А. Грицук, Д.В. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. — Ч. 5. — С. 21.

18–А. Грицук, Д.В. О π-разрешимых группах с нильпотентным обобщенным коммутантом / Д.В. Грицук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2013 г.: в 2 ч. / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2013. — Ч. 1. — С. 60–61.

19–А. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы, π-холлова подгруппа которой имеет абелеву максимальную подгруппу / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Алгебра и комбинаторика: тезисы Международной конференции, Екатеринбург, 3–7 июня 2013 г. — Екатеринбург: издательство «УМЦ–УПИ» , 2013. — С. 46–47.

20–A. Gritsuk, D.V. On π-solvable group in which some maximal subgroup of π-Hall subgroup is Schmidt group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // The 9$^{\text{th}}$ International Algebraic Conference in Ukraine: Book of abstracts, July 8 –13, 2013. — L'viv, 2013. — P. 69.

21–A. Gritsuk, D.V On π-solvable group in which some maximal subgroup of π-Hall subgroup is minimal non-abelian group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts, September 16–20, 2013. — Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine & Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, 2013. — P. 13.

22–А. Грицук, Д.В. Производная π-длина конечных π-разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Материалы Научной конференции «Ломоносовские чтения» 2013 года и Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013» / под ред. М.Э. Соколова и др. — Севастополь: ООО «Экспресс-печать» , 2013. — С. 55.

23–А. Грицук, Д.В О производной π-длине / Д.В. Грицук // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты: сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 17-18 апреля 2014 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. Н.Н. Сендера. — Брест: БрГУ, 2014. — С. 75–76.

24–А. Грицук, Д.В. О производной p-длине p-разрешимой группы с заданной силовской p-подгруппой / Д.В. Грицук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 24–26 марта 2014 г.: в 2 ч. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2014. — Ч. 1. — С. 75–76.

РЭЗЮМЭ

Грыцук Дзмітрый Уладзіміравіч

Вытворная π-даўжыня канечных π-вырашальных групп

Ключавыя словы: канечная група, π-вырашальная група, холава падгрупа, біцыклічная группа, звышвырашальная група, максімальная падгрупа.

Атрыманы новыя ацэнкі вытворнай π-даўжыні $l_{\pi}^{a}(G)$ канечнай π-вырашальнай группы у залежнасці ад будынка альбо яе π-холавай падгрупы G_{π}, альбо некаторай максімальнай падгрупы M з G_{π}. У прыватнасці, даказана:

— калі G_{π} звышвырашальная, то $l_{\pi}^{a}(G) \leqslant 1 + \max_{r\in\pi} l_{r}^{a}(G)$;

— калі ў G_{π} усе ўласныя падгрупы звышвырашальныя, то $l_{\pi}^{a}(G) \leqslant 2 + + \max_{r\in\pi} l_{r}^{a}(G)$;

— калі M абелева, то $l_{\pi}^{a}(G) \leqslant 3$;

— калі M нільпатэнтная, то $l_{\pi}^{a}(G) \leqslant \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G))$.

Тэарэма В.А. Вядзернікава аб максімальных падгрупах вырашальных груп канкрэтызавана і распаўсюджана на π-вырашальныя групы. Атрымана рашэнне яго праблемы 1986 года у выпадку, калі падгрупа Фіцінга кафактара максімальнай падгрупы неадзінкавая.

Устаноўлена, што вытворная π-даўжыня π-вырашальнай групы, сілоўскія p-падгрупы якой альбо біцыклічныя, альбо маюць парадак p^3 для ўсіх $p \in \pi$ не перавышае 7, а ў выпадку, калі $2 \notin \pi$ не перавышае 4.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарастаны ў даследваннях па сучаснай тэорыі канечных груп, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Грицук Дмитрий Владимирович

Производная π-длина конечных π-разрешимых групп

Ключевые слова: конечная группа, π-разрешимая группа, холлова подгруппа, бициклическая группа, сверхразрешимая группа, максимальная подгруппа.

Получены новые оценки производной π-длины $l_\pi^a(G)$ конечной π-разрешимой группы в зависимости от строения либо ее π-холловой подгруппы G_π, либо некоторой максимальной подгруппы M из G_π. В частности, доказано:

— если G_π сверхразрешима, то $l_\pi^a(G) \leqslant 1 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$;

— если в G_π все собственные подгруппы сверхразрешимы, то $l_\pi^a(G) \leqslant 2 + \max_{r\in\pi} l_r^a(G)$;

— если M абелева, то $l_\pi^a(G) \leqslant 3$;

— если M нильпотентна, то $l_\pi^a(G) \leqslant \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G))$.

Теорема В. А. Ведерникова о максимальных подгруппах разрешимых групп конкретизирована и распространена на π-разрешимые группы. Получено решение его проблемы 1986 года в случае, когда подгруппа Фиттинга кофактора максимальной подгруппы неединична.

Установлено, что производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$ не превышает 7, а в случае, когда $2 \notin \pi$ не превышает 4.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по современной теории конечных групп, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Gritsuk Dmitry Vladimirovich

The derived π-length of a finite π-solvable groups

Keywords: finite group, π-solvable group, Hall Subgroup, bicyclic group, supersolbable group, maximal subgroup.

New estimates for the derived π-length $l^a_\pi(G)$ of a finite π-solvable group G depending on the structure of the π-Hall subgroup G_π or some maximal subgroup M of G_π have been obtained. In particular, it is proved that:

— if G_π is supersolvable, then $l^a_\pi(G) \leqslant 1 + \max_{r\in\pi} l^a_r(G)$;

— if every proper subgroup of G_π is supersolvable, then $l^a_\pi(G) \leqslant 2 + + \max_{r\in\pi} l^a_r(G)$;

— if M is abelian, then $l^a_\pi(G) \leqslant 3$;

— if M is nilpotent, then $l^a_\pi(G) \leqslant \max_{r\in\pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r\in\pi} l_r(G))$.

Theorem of V.A. Vedernikov on the maximal subgroups of solvable groups have been rendered concrete and extended to π-solvable groups. The solution to his problem in 1986 in the case, when the Fitting subgroup of the cofactor of a maximal subgroup is nontrivial, have been given.

It is established that the derived π-length of the π-solvable groups in which the Sylow p-subgroups are either bicyclic or of order p^3 for any $p \in \pi$ is at most 7, and if $2 \notin \pi$, then derived π-length is at most 4.

All main results of the dissertation are new. They are theoretical and can be used in reseaches concerning the modern theory of finite groups. They also can be used in reading specialized courses at universities.

Научное издание

ГРИЦУК Дмитрий Владимирович

ПРОИЗВОДНАЯ π-ДЛИНА КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 10.11.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 60 экз. Заказ №580.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий №1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель