УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Электронный курс лекций по теме

«Диаметры и касательные линий второго порядка»

для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2015

Автор:

Силаева Зоя Николаевна – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

Рецензенты:

Трофимук Александр Александрович – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

Швычкина Елена Николаевна – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики факультета электронно-информационных систем БрГТУ

Редактор:

Силаева Зоя Николаевна – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры АГиММ БрГУ имени А.С. Пушкина

Настоящая методическая разработка содержит лекционный материал по теме «Диаметры и касательные линий второго порядка». В текст лекций включены интерактивные геометрические модели, созданные в программе «Математический конструктор». Для обеспечения работоспособности моделей на компьютере необходимо установить Java Browser Plug-in. В целях контроля знаний предусмотрен итоговый тест. Учебное издание предназначено для студентов I курса физико-математического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Цель данного электронного курса лекций – помочь студентам первого курса физико-математического факультета в усвоении темы «Диаметры и касательные линий второго порядка», направить их на самостоятельную работу с математической литературой, развивать самостоятельность мышления, умение рассуждать.

В разработке рассматриваются случаи взаимного расположения прямой и линии второго порядка, изучены понятия асимптотического направления и центра линии. Проводится классификация линий второго порядка по количеству асимптотических направлений и по количеству центров, детально изучены понятия диаметра и касательной, а также сопряженных диаметров и осей. Отдельный параграф посвящен оптическому свойству эллипса, гиперболы и параболы.

В текст лекций включены динамические модели с целью наглядного представления на экране компьютера свойств изучаемых фигур. Использование этих моделей дает студентам возможность экспериментально убедиться в справедливости изучаемых свойств линий, что может способствовать более глубокому и самостоятельному усвоению ими учебного материала. В целях проверки знаний по теме студенты могут пройти итоговый тест. Изложенная в разработке теория служит базой для изучения следующей темы «Поверхности второго порядка» курса аналитической геометрии.

§ 1. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления

Пусть дана линия второго порядка с общим уравнением

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \tag{1.1}$$

Обозначим $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{10}$, $\quad F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{20}$.
Пусть дана прямая l с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t, \\ y=y_0+\beta t, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $M_0(x_0,y_0)$– начальная точка, $\overline{a}=(\alpha,\beta)$– направляющий вектор.

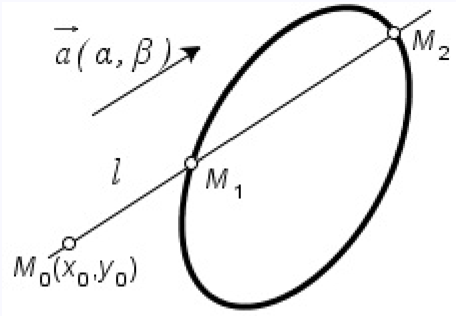

Рис. 1.1: Пересечение линии второго порядка с прямой

Поставим задачу: найти точки пересечения прямой l с данной линией второго порядка. Для этого решим систему, составленную из уравнений (1.1) и (1.2).

Получим:

$$a_{11}(x_0+\alpha t)^2+2a_{12}(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t)+a_{22}(y_0+\beta t)^2+$$
$$+2a_{10}(x_0+\alpha t)+2a_{20}(y_0+\beta t)+a_{00}=0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав относительно t, получим уравнение

$$Pt^2+2Qt+R=0, \tag{1.3}$$

где

$$P=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} Q&=a_{11}x_0\alpha+a_{12}x_0\beta+a_{12}y_0\alpha+a_{22}y_0\beta+a_{10}\alpha+a_{20}\beta=\\ &=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{10})\alpha+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{20})\beta=\\ &=F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$R=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{10}x_0+2a_{20}y_0+a_{00}=F(x_0,y_0). \tag{1.6}$$

Решив уравнение (1.3), найдем значения параметра t. Подставив их в уравнение (1.2), получим координаты точек пересечения линии второго порядка с прямой l. При этом возможны случаи:

1. $P\neq 0$.

   Уравнение (1.3) имеет 2 корня $t_{1,2}=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-PR}}{P}$.

   - Если $Q^2-PR>0$, корни уравнения (1.3) действительны и различны. В этом случае прямая l имеет две различные точки пересечения с линией второго порядка и называется *секущей*.

Кафедра
АГ и ММ

- Если $Q^2 - PR = 0$, то уравнение (1.3) имеет кратные корни. В этом случае прямая l имеет две совпавшие точки пересечения с линией второго порядка и называется *касательной*.
- Если $Q^2 - PR < 0$, то корни уравнения (1.3) мнимые комплексные числа. В этом случае прямая l не пересекает линию второго порядка и называется *внешней*.

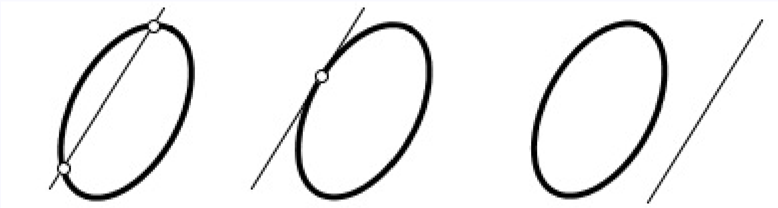

Рис. 1.2: Случаи взаимного расположения ЛВП и прямой при $P \neq 0$

2. $P = 0$.

   Уравнение (1.3) принимает вид $2Qt + R = 0$.

   - Если $Q \neq 0$, то уравнение (1.3) имеет единственный корень $t = -\frac{R}{2Q}$, прямая l пересекает линию (1.1) в одной точке.
   - Если $Q = 0$, $R \neq 0$, то уравнение (1.3) не имеет корней, прямая l не пересекает линию (1.1).
   - Если $Q = 0$, $R = 0$, то уравнение (1.3) имеет беконечно много решений, прямая l содержится в линии (1.1).

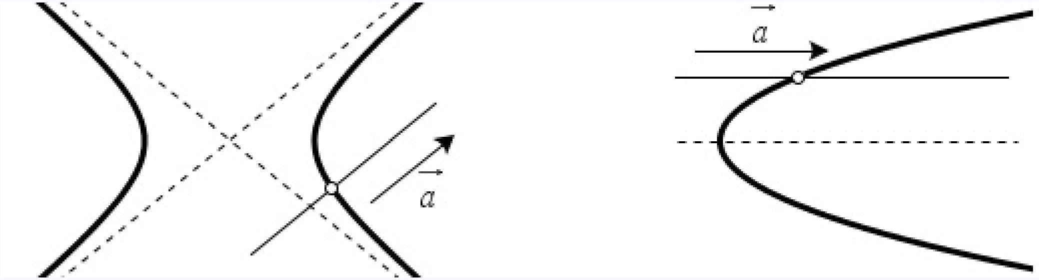

Рис. 1.3: Случаи взаимного расположения ЛВП и прямой при $P = 0$

Определение 1.1. *Прямая l, для которой $P = 0$, называется **прямой асимптотического направления** относительно данной линии второго порядка. Направляющий вектор этой прямой называется **вектором асимптотического направления**.*

Рассмотрим условие $P = 0$:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \tag{1.7}$$

Если вектор $\overline{a} = (\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию (1.7), то прямая с таким направляющим вектором либо пересекает линию (1.1) в одной точке, либо не пересекает ее, либо содержится в этой линии.

Выясним, сколько асимптотических направлений может существовать относительно данной линии второго порядка.

Возможны следующие случаи:

1. $a_{22} \neq 0$.

В этом случае $\alpha \neq 0$, т.к. при $\alpha = 0$ из (1.7) получили бы $\beta = 0$, т.е. $\overline{a} = (0, 0)$, а нуль-вектор не задает направления.

Разделим обе части уравнения (1.7) на α^2 и обозначим $\frac{\beta}{\alpha} = k-$ угловой коэффициент направления вектора $\overline{a}$. Получаем

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0.$$

Отсюда следует, что относительно линии (1.1) существует не более двух асимптотических направлений, угловые коэффициенты которых находят по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$. Обозначим

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Возможны случаи:

- $I_2 > 0$. У линии (1.1) нет действительных асимптотических направлений. Такие линии называются ***линиями эллиптического типа***.
- $I_2 < 0$. У линии (1.1) 2 разных асимптотических направления. Она относится к ***линиям гиперболического типа***.
- $I_2 = 0$. У линии (1.1) одно асимптотическое направление. Такие линии называются ***линиями параболического типа***.

2. $a_{22} = 0$.

В этом случае условие (1.7) примет вид

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta = 0 \text{ или}$$

$$\alpha(a_{11}\alpha + 2a_{12}\beta) = 0. \tag{1.8}$$

Покажем, что в этом случае линия (1.1) имеет одно или два асимптотических направления. В самом деле, условию (1.8) удовлетворяет вектор $\overline{a} = (0, \beta)$, где β– действительное число, $\beta \neq 0$. Это направление параллельно оси Oy.

Пусть теперь $a_{11}\alpha + 2a_{12}\beta = 0$. Этому условию удовлетворяет вектор $\overline{a} = (2a_{12}, -a_{11})$. Если $a_{12} \neq 0$, то полученное направление отличается от предыдущего, т.е. линия имеет 2 различных асимптотических направления. Если же $a_{12} = 0$, то полученное направление совпадает с предыдущим, тогда линия имеет единственное асимптотическое направление.

Замечание. *В случае $a_{22} = 0$ выражение $I_2 = -a_{12}^2 \leq 0$. Если $a_{12} \neq 0$, то $I_2 < 0$ и линия второго порядка имеет 2 асимптотических направления. Если же $a_{12} = 0$, то $I_2 = 0$ и у линии второго порядка 1 асимптотическое направление (сравните со случаем 1). Таким образом, и в случае 2 выражение I_2 позволяет выяснить, сколько асимптотических направлений имеет линия второго порядка.*

Вычислим выражение I_2 для всех видов линий второго порядка, заданных каноническими уравнениями.

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &2.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \\ &3.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \end{aligned}\right\} I_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}>0 - \text{ эллиптический тип,}$$

$$\left.\begin{aligned} &4.\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ &5.\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \end{aligned}\right\} I_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{a^2b^2}<0 - \text{ гиперболический тип,}$$

$$\left.\begin{aligned} &6.\ y^2=2px \\ &7.\ y^2=a^2 \\ &8.\ y^2=0 \\ &9.\ y^2=-a^2 \end{aligned}\right\} I_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 - \text{ параболический тип.}$$

§ 2. Центр линии второго порядка

Определение 2.1. *Точка C_0 называется* ***центром*** *линии второго порядка, если эта линия симметрична относительно точки C_0.*

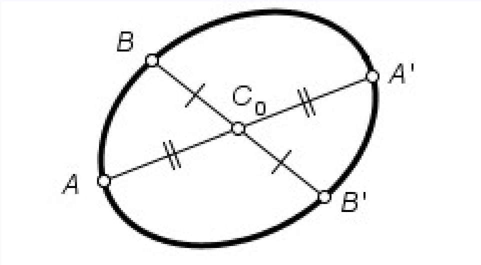

Рис. 2.1: Центр линии второго порядка

Определение 2.2. ***Хордой*** *линии второго порядка называется отрезок, соединяющий две ее точки.*

Если точка C_0 – центр линии второго порядка, то любая ее хорда, проходящая через точку C_0, делится в этой точке пополам.

Лемма 2.1. *Точка $C_0(x_0, y_0)$ является центром линии второго порядка, заданной уравнением (1.1) тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений:*

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы выяснить вопрос о наличии центра у линии второго порядка, нужно составить и решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

1. $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$. Система имеет единственное решение (x_0, y_0), линия второго порядка имеет единственный центр $C_0(x_0, y_0)$ и называется ***центральной***.

2. $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{10}}{a_{20}}$. Система не имеет решений, линия второго порядка не имеет центра.

3. $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{10}}{a_{20}}$. Система имеет бесконечное множество решений, это все точки прямой, заданной уравнением $a_{11}x+a_{12}y+a_{10} = 0$. Линия имеет бесконечно много центров, принадлежащих этой прямой.

В случаях 2 и 3 линия второго порядка называется ***нецентральной***.

Выясним вопрос о количестве центров линий второго порядка, используя их канонические уравнения.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $\quad \begin{cases} \frac{x}{a^2}=0, \\ \pm\frac{y}{b^2}=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ Центр линии в точке $C_0(0,0)$.

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

6. $y^2=2px$ $\quad \begin{cases} -p=0, \\ y=0. \end{cases}$ Решений нет, линия не имеет центра.

7. $y^2=a^2$

8. $y^2=0$ $\quad \begin{cases} 0=0, \\ y=0, \end{cases} \quad y=0.$ Множество центров — ось Ox.

9. $y^2=-a^2$

§ 3. Диаметры линии второго порядка

Пусть дана линия второго порядка с общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \qquad (3.1)$$

и вектор $\overline{s}$ неасимптотического направления относительно данной линии ($P \neq 0$). Прямая, для которой вектор $\overline{s}$ служит направляющим, пересекает линию второго порядка в двух точках (действительных или мнимых). Обозначим эти точки M_1 и M_2. Тогда отрезок M_1M_2– хорда линии второго порядка. Пусть точка M– середина этой хорды.

Если рассмотреть всевозможные хорды M_1M_2 линии (3.1), параллельные выбранному вектору $\overline{s}$, то множество их середин M образует прямую. **Показать динамическую иллюстрацию.**

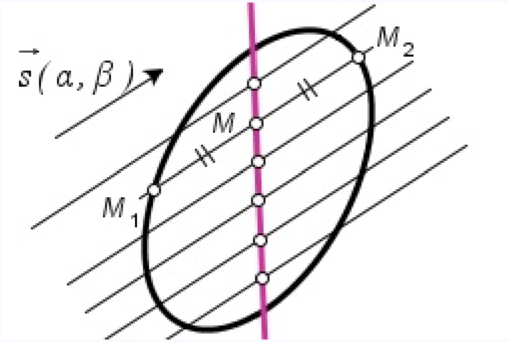

Рис. 3.1: Множество середин хорд линии, параллельных вектору $\overline{s}$

Определение 3.1. ***Диаметром*** *линии второго порядка, сопряженным неасимптотическому направлению* $\overline{s}$, *называется множество середин параллельных хорд направления* $\overline{s}$.

Теорема. *Диаметр линии второго порядка (3.1), сопряженный неасимптотическому направлению* $\overline{s} = (\alpha, \beta)$, *есть прямая с уравнением*

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{10}\alpha + a_{20}\beta = 0.$$

Доказательство. Пусть точка $M(x, y)$– середина произвольной хорды M_1M_2, параллельной $\overline{s}$. Найдем связь между переменными x и y.

Уравнение прямой M_1M_2 имеет вид

$$\begin{cases} X = x + \alpha t, \\ Y = y + \beta t. \end{cases} \tag{3.2}$$

Координаты точек M_1 и M_2 пересечения прямой с линией второго порядка найдем, решив систему уравнений (3.1) и (3.2). Получим

$$M_1(x + \alpha t_1, y + \beta t_1), \quad M_2(x + \alpha t_2, y + \beta t_2),$$

где t_1 и t_2– корни уравнения $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Но точка $M(x, y)$– середина хорды M_1M_2, поэтому

$$\begin{cases} \frac{x+\alpha t_1+x+\alpha t_2}{2} = x, \\ \frac{y+\beta t_1+y+\beta t_2}{2} = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(t_1 + t_2) = 0, \\ \beta(t_1 + t_2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, то из последней системы получаем $t_1+t_2=0$. По теореме Виета $t_1+t_2=-\frac{2Q}{P}$, поэтому

$$Q=0.$$

Запишем последнее равенство в развернутом виде:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})\alpha+(a_{12}x+a_{22}y+a_{20})\beta=0. \tag{3.3}$$

Покажем, что (3.3) есть уравнение прямой. Сгруппируем левую часть относительно переменных x и y:

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x+(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)y+a_{10}\alpha+a_{20}\beta=0. \tag{3.4}$$

Покажем, что в уравнении (3.4) коэффициенты при x и y не равны нулю одновременно. Предположим противное:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha+a_{12}\beta=0,\\ a_{12}\alpha+a_{22}\beta=0.\end{cases}$$

Умножив обе части первого равенства на α, второго на β и сложив результаты, получим $a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0$, то есть $P=0$, что противоречит тому, что $\overline{s}(\alpha,\beta)-$ вектор неасимптотического направления. Следовательно, (3.3) и (3.4) суть уравнения прямой.

Мы доказали, что координаты любой точки $M(x,y)$, принадлежащей диаметру, удовлетворяют уравнению прямой (3.4). Докажем теперь, что если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (3.4), то $M-$ точка диаметра. В самом деле, уравнение (3.4) равносильно условию $Q=0$, откуда следует, что $t_1=-t_2$, значит, точка $M-$ середина хорды направления $\overline{s}=(\alpha,\beta)$, то есть точка, принадлежащая диаметру. $\square$

Таким образом, мы получили уравнение диаметра в форме (3.3) и (3.4). Учитывая обозначения, принятые в §1, уравнение (3.3) можно записать и в следующем виде:

$$F_1(x,y)\alpha+F_2(x,y)\beta=0$$

или, если $\alpha\neq 0$,

$$F_1(x,y)+k_{\text{хорд}}F_2(x,y)=0. \qquad (3.5)$$

Из уравнения (3.4) найдем угловой коэффициент диаметра:

$$k_{\text{диам}}=-\frac{a_{11}\alpha+a_{12}\beta}{a_{12}\alpha+a_{22}\beta}\ \text{или}$$

$$k_{\text{диам}}=-\frac{a_{11}+k_{\text{хорд}}a_{12}}{a_{12}+k_{\text{хорд}}a_{22}} \qquad (3.6)$$

Выразим из уравнения (3.6) $k_{\text{хорд}}$:

$$k_{\text{хорд}}=-\frac{a_{11}+k_{\text{диам}}a_{12}}{a_{12}+k_{\text{диам}}a_{22}}. \qquad (3.7)$$

Диаметры центральных и нецентральных линий. Сопряженные диаметры

Рассмотрим диаметры центральных линий. Для центральных линий имеет место условие

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но при этом условии числитель и знаменатель формулы (3.6) не обращаются в нуль одновременно. В самом деле, из условия

$$\begin{cases} a_{11} + k_{\text{хорд}} a_{12} = 0, \\ a_{12} + k_{\text{хорд}} a_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{следует, что} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad \text{при этом } I_2 = 0.$$

Значит, для центральных линий существует диаметр, сопряженный любому неасимпотическому направлению.

Так как в центре $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, то из уравнения (3.5) заключаем, что всякий диаметр центральной линии второго порядка проходит через ее центр.

Рассмотрим диаметры нецентральных линий. Из условия $I_2 = 0$ следует, что $a_{11} = \lambda a_{12}$, $a_{12} = \lambda a_{22}$. Подставив в (3.6), получим

$$k_{\text{диам}} = -\frac{\lambda a_{12} + k_{\text{хорд}} \lambda a_{22}}{a_{12} + k_{\text{хорд}} a_{22}} = -\lambda.$$

Таким образом, для линий нецентрального типа все диаметры, сопряженные различным неасимптотическим направлениям хорд, имеют одно и то же направление:

$$k_{\text{диам}} = -\lambda = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Вычислим коэффициент P для этого направления:
$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = a_{11}{a_{22}}^2 - 2a_{12}^2 a_{22} + a_{22}{a_{12}}^2 = a_{11}{a_{22}}^2 - a_{12}^2 a_{22} =$
$= a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{22}I_2 = 0$. Отсюда следует, что направление $k_{\text{диам}}$ – асимптотическое.

Итак, у нецентральных линий все диаметры параллельны между собой. Они имеют асимптотическое направление.

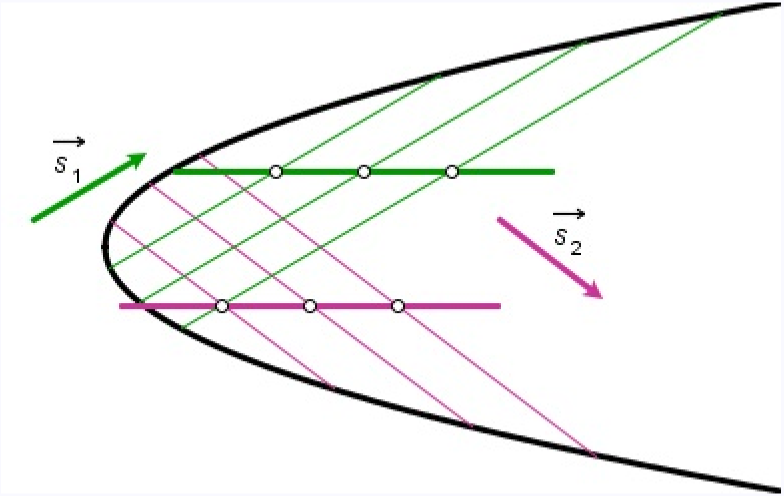

Рис. 3.2: Диаметры нецентральных линий

Показать динамическую иллюстрацию.

Определение 3.2. ***Два диаметра*** *линии второго порядка называются* ***сопряженными****, если каждый из них проходит через середины хорд, параллельных другому диаметру.*

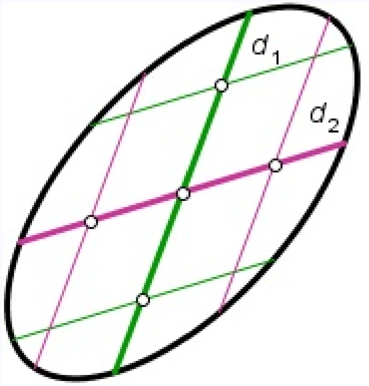

Рис. 3.3: Сопряженные диаметры

Понятие сопряженности диаметров может применяться только для центральных линий, так как для нецентральных линий любой диаметр имеет асимптотическое направление, и потому не может задавать направление хорд для другого диаметра.

Если k_1 и k_2– угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то они связаны формулой

$$k_2 = -\frac{a_{11} + k_1 a_{12}}{a_{12} + k_1 a_{22}}.$$

§ 4. Главные направления. Оси линии второго порядка

Определение 4.1. *Направление диаметра линии второго порядка называется* ***главным направлением*** *относительно данной линии второго порядка, если оно перпендикулярно хордам, с направлениями которых сопряжен этот диаметр.*

Определение 4.2. ***Осью*** *линии второго порядка называется ее диаметр, имеющий главное направление относительно данной линии.*

Из определения следует, что ось линии второго порядка является ее осью симметрии.

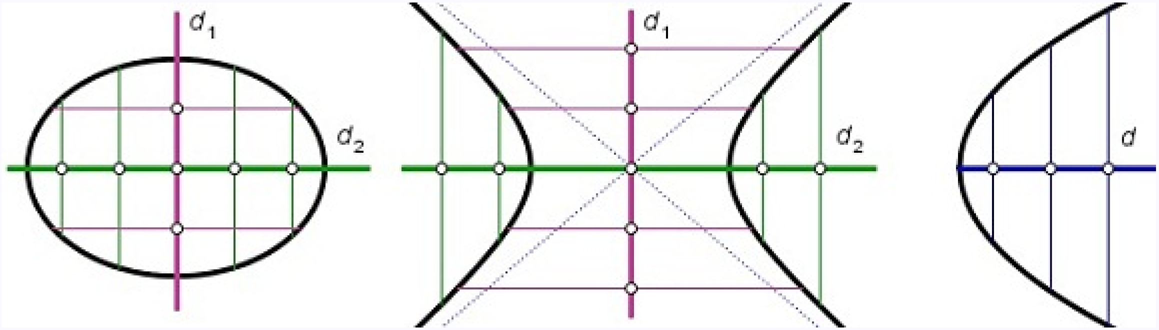

Рис. 4.1: Оси линий второго порядка

Уравнения осей линии второго порядка

Пусть диаметр линии второго порядка имеет главное направление. Тогда $k_{\text{хорд}} \cdot k_{\text{диам}} = -1$. По формуле (3.6),

$$k_{\text{диам}} = -\frac{a_{11} + a_{12}k_{\text{хорд}}}{a_{12} + a_{22}k_{\text{хорд}}}, \text{ откуда следует}$$

$$a_{12}k_{\text{диам}} + a_{22}k_{\text{диам}}k_{\text{хорд}} = -a_{11} - a_{12}k_{\text{хорд}},$$

$$a_{12}k_{\text{диам}} - a_{22} = -a_{11} + a_{12} \cdot \frac{1}{k_{\text{диам}}},$$

$$a_{12}k^2_{\text{диам}} + (a_{11} - a_{22})k_{\text{диам}} - a_{12} = 0- \tag{4.1}$$

уравнение для нахождения угловых коэффициентов осей линии второго порядка.

1. Если $a_{12} \neq 0$, то уравнение (4.1) квадратное. Его дискриминант $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2_{12} \geq 0$, поэтому уравнение имеет 2 различных или совпадающих действительных корня.

   В случае $I_2 \neq 0$ (для центральных линий) из уравнения (3.5) получаем уравнения осей в виде:

$$F_1(x, y) - \tfrac{1}{k}F_2(x, y) = 0,$$
$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0,$$

   где $k-$ один из корней уравнения (4.1).

В случае $I_2 = 0$ (для нецентральных линий) все диаметры имеют асимптотическое направление $k_{\text{диам}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$. Хорды, перпендикулярные этому направлению, имеют угловой коэффициент $k_{\text{хорд}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ и уравнение оси (она единственна):

$$F_1(x,y) + \frac{a_{12}}{a_{11}} F_2(x,y) = 0.$$

2. Если $a_{12} = 0$, то уравнение (4.1) принимает вид $(a_{11} - a_{22})k_{\text{диам}} = 0$, которое в случае $a_{11} - a_{22} = 0$ имеет бесконечно много решений, а в случае $a_{11} - a_{22} \neq 0$– единственное решение $k = 0$. В первом случае всякая прямая, проходящая через центр линии второго порядка, будет ее осью. Во втором случае уравнение оси: $F_2(x,y) = 0$.

§ 5. Касательная к линии второго порядка

Определение 5.1. ***Касательной*** *к линии второго порядка называется прямая, имеющая с этой линией две совпадающие общие точки.*

Пусть дана линия второго порядка с общим уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (5.1)$$

и прямая l с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Тогда, если l— касательная к линии (5.1), то в уравнении

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (5.3)$$

дискриминант $Q^2 - PR = 0$. В качестве начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой l возьмем точку касания. Так как точка M_0 принадлежит линии второго порядка (5.1), то в уравнении (5.3) коэффициент

$$R = F(x_0, y_0) = 0.$$

Отсюда и из условия $Q^2 - PR = 0$ получаем, что $Q = 0$. При этом $P \neq 0$, так как в противном случае прямая l принадлежала бы линии второго порядка всеми своими точками.

В итоге мы получили, что если $l-$ касательная к линии (5.1) в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в уравнении (5.3) $P \neq 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Верно и обратное: если для некоторой прямой l и линии (5.1) имеют место условия $P \neq 0$, $Q = 0$, $R = 0$, то в уравнении (5.3) корни $t_1 = t_2 = 0$, следовательно, $l-$ касательная.

Уравнение касательной

Пусть $k-$ угловой коэффициент касательной. Тогда ее уравнение можно записать в виде:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5.4}$$

Так как для касательной $Q = 0$, то есть $F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta = 0$, то $k = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{F_1(x_0,y_0)}{F_2(x_0,y_0)}$. Подставив k в уравнение (5.4), получим уравнение касательной

$$y - y_0 = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}(x - x_0), \text{ или}$$

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{5.5}$$

Получим из уравнения (5.5) уравнение касательной к эллипсу, гиперболе и параболе в любой их точке.

1. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   Коэффициенты $F_1(x_0, y_0) = \frac{1}{a^2}x_0$, $F_2(x_0, y_0) = \frac{1}{b^2}y_0$. Подставив их в уравнение (5.5), получим

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0; \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2};$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

2. Уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   Аналогично первому случаю получаем уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

3. Парабола $y^2 = 2px$.

   Для параболы $F_1(x_0, y_0) = -p$, $F_2(x_0, y_0) = y_0$. Подставив в уравнение (5.5), получим

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0; \quad -px + px_0 + yy_0 - 2px_0 = 0;$$

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

§ 6. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы

Оптическое свойство эллипса

Теорема. *Касательная к эллипсу в произвольной его точке M_0 является биссектрисой внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, имеющего своими вершинами фокусы F_1 и F_2 эллипса и данную точку M_0.*

Показать динамическую иллюстрацию.

Доказательство. Определим расстояния F_1A_1 и F_2A_2 от фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ до касательной l в точке M_0.

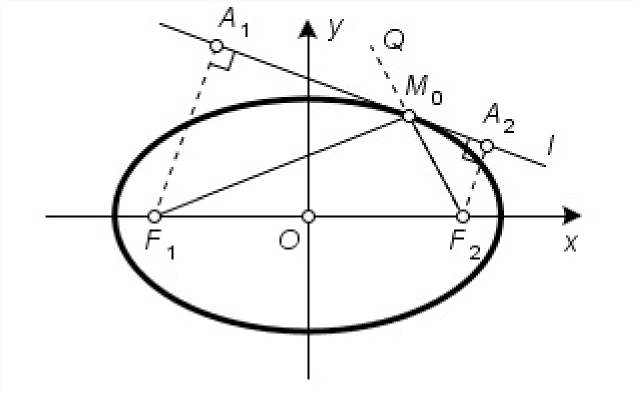

Рис. 6.1: Касательная к эллипсу в точке M_0

Уравнение касательной к эллипсу в точке M_0 имеет вид $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

По формуле расстояния от точки до прямой получаем

$$F_1A_1 = \rho(F_1, l) = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}(-c) - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}, \qquad F_2A_2 = \rho(F_2, l) = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}c - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Рассмотрим отношение этих расстояний

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{\left|\frac{-cx_0}{a^2} - 1\right|}{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|} = \frac{\left|-\frac{c}{a}x_0 - a\right|}{\left|\frac{c}{a}x_0 - a\right|} = \frac{|-\varepsilon x_0 - a|}{|\varepsilon x_0 - a|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0}.$$

Отсюда следует, что треугольник $F_1A_1M_0$ подобен треугольнику $F_2A_2M_0$, поэтому $\angle F_1M_0A_1 = \angle F_2M_0A_2$, и, следовательно, $\angle F_1M_0A_1 = \angle A_1M_0Q$, где точка Q лежит на продолжении отрезка F_2M_0 за точку M_0, что и требовалось доказать. $\square$

Очевидно, что перпендикуляр к касательной в точке касания, называемый *нормалью к кривой*, будет биссектрисой внутреннего угла треугольника $F_1M_0F_2$. Пользуясь этим свойством, легко построить касательную и нормаль к эллипсу в данной точке.

Доказанной теореме можно дать следующую физическую интерпретацию: если поместить в один из фокусов эллипса источник света, то лучи после отражения от эллипса соберутся в другом фокусе, так как световой луч отражается от эллипса, как от касательной, проведенной к эллипсу в точке падения луча.

Показать динамическую иллюстрацию.

Оптическое свойство гиперболы

Теорема. *Касательная к гиперболе в произвольной ее точке M_0 является биссектрисой внутреннего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, имеющего своими вершинами фокусы гиперболы и данную точку M_0.*

Показать динамическую иллюстрацию.

Доказательство. Опустим из фокусов F_1 и F_2 перпендикуляры F_1A_1 и F_2A_2 на касательную.

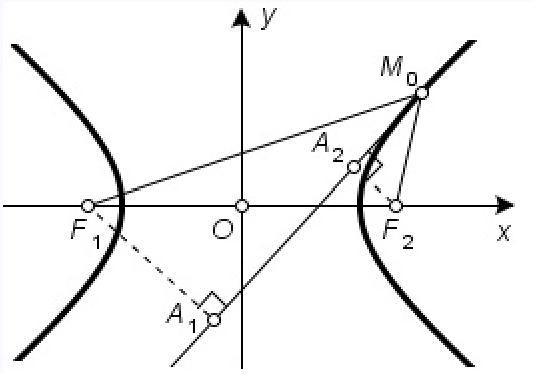

Рис. 6.2: Касательная к гиперболе в точке M_0

Так же, как для эллипса, доказывается, что

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0},$$

поэтому треугольник $F_1M_0A_1$ подобен треугольнику $F_2M_0A_2$, и, следовательно, $\angle F_1M_0A_1 = \angle F_2M_0A_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Указанное геометрическое свойство позволяет построить касательную к гиперболе в произвольной точке M_0: точку M_0 соединяем с фокусами F_1 и F_2 гиперболы и угол $F_1M_0F_2$ делим пополам; биссектриса этого угла является касательной к гиперболе в точке M_0.

Доказанной теореме можно дать оптическое истолкование, аналогичное тому, которое было дано для эллипса.

Показать динамическую иллюстрацию.

Оптическое свойство параболы

Если парабола задана уравнением $x^2 = 2py$, то уравнение касательной к ней в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$xx_0 = p(y + y_0).$$

Полагая в последнем уравнении $x = 0$, находим точку $B(0, -y_0)$ пересечения касательной к параболе с ее осью симметрии.

Отсюда вытекает следующий способ построения касательной к параболе в данной на ней точке M_0. Опускаем из точки M_0 перпендикуляр M_0P на ось симметрии параболы и откладываем на оси симметрии параболы отрезок $OB = OP$ (рис. 6.3). Прямая M_0B- касательная к параболе в точке M_0.

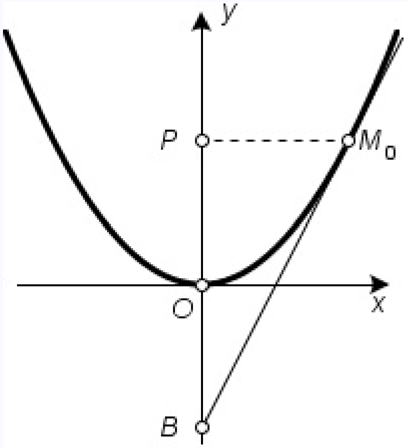

Рис. 6.3: Построение касательной к параболе в данной на ней точке

Теорема. *Касательная к параболе является биссектрисой угла FMD между фокальным радиусом MF точки касания и перпендикуляром MD, опущенным из нее на директрису.*

Показать динамическую иллюстрацию.

Доказательство. По определению параболы имеем $MD = FM$ (рис. 6.4),

$$MD = MQ + QD = y_0 + QD.$$

Но $y_0 = OB$, $QD = OF$, следовательно,

$$MD = OB + OF = FB.$$

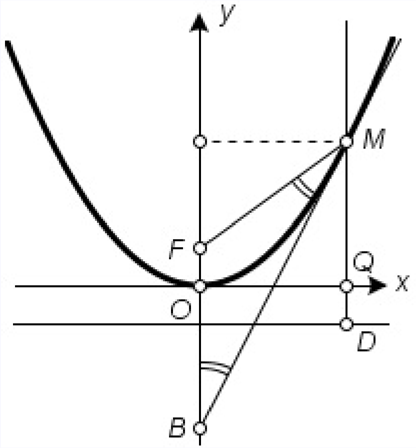

Рис. 6.4: Касательная к параболе в точке M_0

Поэтому треугольник BFM равнобедренный, и значит, $\angle FMB = \angle FBM$. Но $\angle FBM = \angle BMD$, следовательно, $\angle FMB = \angle BMD$, что и требовалось доказать. □

Эта теорема имеет следующее оптическое истолкование: если в фокусе F параболического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись от зеркала, образуют пучок параллельных лучей. Указанное свойство параболического зеркала применяется при устройстве зеркальных прожекторов.

Показать динамическую иллюстрацию.

Итоговый тест.

Литература

1. Бахвалов, С.В. Аналитическая геометрия / С.В. Бахвалов, Л.И. Бабушкин, В.П. Иваницкая. – М.: Просвещение, 1970. – 376 с.

2. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. – 698 с.

3. Петрукoвіч, А.М. Курс лекцый па геаметрыі. Частка II. Элементы вектарнай алгебры ў прасторы. Метад каардынат на плоскасці. Пераўтварэнні плоскасці / А.М. Петрукoвіч, А.В. Чычурын. – Брэст, 1994. – 55 с.

4. Петрукович, А.М. Задания для самостоятельной работы по теме: "Элементы векторной алгебры в пространстве. Метод координат на плоскости"и методические указания к ним/ А.М. Петрукович, С.М. Агеев. – Брест, 1998. – 31 с.