Подставляя E_1 в уравнение (3), находим

$$E_{01} = \frac{\Omega^2 \chi E_0^2}{c^2 K^2(\Omega) - \varepsilon(\omega)\Omega^2}.$$

Полученное частное решение E_1 необходимо дополнить решением E_2 однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \qquad (4)$$

которое будем искать также в виде экспоненты $E_2 = E_{02} e^{i\left[k(\omega)z - \omega t\right]}$.

Подстановка E_2 в уравнение (4) позволяет определить волновое число сигнала частоты ω: $k(\omega) = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)/c}$. Произвольную постоянную E_{02} удобно считать равной $-E_{01}$, при этом полное решение неоднородного уравнения (3) $E = E_1 + E_2$ обращается в нуль в точке $z = 0$ (на границе кристалла). Следовательно, напряженность электрического поля сигнала удвоенной частоты $\omega = 2\Omega$ определяется выражением

$$E = -\frac{4\Omega^2 \chi E_0^2}{c^2\left[4K^2(\Omega) - k^2(\omega)\right]}\left\{1 - e^{i\left[2K(\Omega) - k(\omega)\right]z}\right\} e^{i\left[k(\omega)z - \omega t\right]}$$

(5)

Отметим, что при условии

$$2K(\Omega) = k(\omega) \text{ или } \varepsilon(\Omega) = \varepsilon(\omega) \qquad (6)$$

в выражении (5) имеет место неопределенность вида $0/0$. Вычисляя предел

$$\lim_{2K\to k}\frac{1 - e^{i(2K-k)z}}{4K^2 - k^2} = \lim_{2K\to k}\frac{-i(2K-k)z}{(2K-k)(2K+k)} = -\frac{iz}{2k}$$

получаем

$$E = \frac{i\omega\chi E_0^2}{2\sqrt{\varepsilon(\omega)c}} z e^{i\left[k(\omega)z - \omega t\right]}. \qquad (7)$$

Таким образом, при выполнении условия (6) амплитуда электромагнитного поля удвоенной частоты (7) увеличивается внутри кристалла пропорционально расстоянию z от его границы за счет передачи энергии от лазерного излучения. Следовательно, в кристалле имеет место эффективное преобразование частоты электромагнитного поля, или генерация второй гармоники. Поскольку условие (6) означает равенство фазовых скоростей лазерного излучения и волны удвоенной частоты, то оно называется условием фазового согласования. ►

УДК 519.24

М.И. ЗАНЕВСКАЯ, Е.И. МИРСКАЯ
Брест, БрГУ им. А.С. Пушкина

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПЕРВОГО МОМЕНТА ПЕРИОДОГРАММНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа стационарных случайных процессов. Причина в широком применении анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в экономике, технике, теории распознавания образов и др. Часто данные являются многомерными. Это особенно характерно для экономических данных.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\}$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с $MX(t) = 0$, $t \in Z$, ковариационной матрицей $R(\tau) = \{R_{ab}(\tau), a, b = \overline{1,r}\}, \tau \in Z$, и матрицей спектральных плотностей , $\lambda \in \Pi = [-\pi; \pi]$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса

$$X(t), t \in Z$$

В работе [1, с.122] исследованы первый и второй моменты статистики вида

$$I_{ab}^T(\lambda) = d_a^T(\lambda)\overline{d_b^T(\lambda)}, \qquad (1)$$

$\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, где $d_a^T(\lambda)$ – конечное преобразование Фурье наблюдений.

В данной работе исследовано асимптотическое поведение первого момента статистики (1). Также исследована скорость сходимости математического ожидания оценки (1).

Доказана

Теорема. *Пусть функция* $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ *, ограничена на множестве П и непрерывна в точке , функция является ядром на П, тогда*

$$\lim_{N \to \infty} MI_{ab}^T(\lambda) = f_{ab}(\lambda),$$

где $\lambda \in \Pi, a, b = \overline{1, r}$.

Таким образом, $I_{ab}^T(\lambda)$ является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Минск : БГУ, 1998. – 218 с.

УДК 330.43:334.716

В.В. КОНОНЧУК
Брест, Полесский аграрно-экологический институт НАН Беларуси

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СБАЛАНСИРОВАННОГО РАЗВИТИЯ СЕЛЬХОЗПРЕДПРИЯТИЙ

Эффективное использование ресурсов предприятий и отраслей сельского хозяйства является ключевым аспектом обоснования и разработки сбалансированной программы развития с помощью методов математического моделирования. Сбалансированная программа развития сельхозпредприятий предусматривает определение наиболее рационального сочетания отраслей, обеспечивающих эффективное использование и максимальную окупаемость имеющихся ресурсов. Эффективность различных отраслей многоотраслевых предприятий не одинакова, поэтому важно определить такое развитие хозяйства, которое обеспечивает максимальную экономическую эффективность функционирования предприятия в целом по заданному критерию оптимальности.

Моделирование прогноза сбалансированного развития аграрного производства было реализовано с помощью оптимизационной экономико-математической модели в стохастическом виде на примере ОАО «Дружба народов» Кобринского района. Стохастическая оптимизационная экономико-математическая модель описывает важнейшие технолого-экономические параметры производства типичного многоотраслевого аграрного предприятия с учетом возможных сценариев влияния погодных и иных случайных факторов.