

где  $(x_0, y_0, z_0)$  – обыкновенная точка системы (8), то это решение обладает свойством (14) и совпадает в окрестности точки  $z = z_0$  с решением, описанным в теореме 1.

Теоремы 1 и 2 обобщают известные теоремы Коши и Пенлеве о существовании и единственности решений, в которых аналогичные утверждения доказываются для правильной точки системы.

Далее рассмотрим существенно особые точки аналитической функции и разобьем их на два класса. К первому классу относим все те существенно особые точки аналитической функции  $w = f(z)$ , в которых множество неопределенности этой функции не более чем счетно. Все остальные существенно особые точки функции  $w = f(z)$  относим ко второму классу. Тогда можно установить справедливость следующих утверждений:

1. Существенно особые точки первого класса аналитической функции всегда расположены на ее особых линиях.

2. Если  $z_0$  есть существенно особая точка первого класса аналитической функции  $w = f(z)$ , то в окрестности  $|z - z_0| < r$  существует не более чем счетное число областей, примыкающих к этой точке, в каждой из которых существует при  $z \rightarrow z_0$  вполне определенный предел  $f(z)$ , конечный или бесконечный, и по крайней мере в двух этих областях указанные пределы различны.

3. Если  $z_0$  есть существенно особая точка второго класса аналитической функции  $w = f(z)$ , то в области ее аналитичности обязательно существует путь  $L$ , вдоль которого  $z \rightarrow z_0$ , что  $\lim f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$  ( $z \in L$ ) не существует, т.е. множество неопределенности функции  $w = f(z)$  в точке  $z_0$  вдоль пути  $L$  будет множеством мощности континуума.

Используя эти утверждения, можно провести классификацию систем вида (8), которые не имеют решений с подвижными существенно особыми точками. При этом к истинности окончательного результата можно прийти методом исключения систем из рассмотренных систем вида (8), которые имеют решения хотя бы с одной неопределенной компонентой.

#### Список использованной литературы

1. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 3-е изд. – Минск : Наука и техника, 1979. – 572 с.

2. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.

3. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 717 с.

УДК 519.24

Е.И. Мирская

Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВТОРОГО  
МОМЕНТА ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Причина в широком применении анализа временных рядов к анализу данных, возникающих в технике, физике, экономике, медицине.

Основные результаты в этой области получены Парзенем, Розенблатом, Уиттлом, Колмогоровым, Бриллинджером, Журбенко и др.

Колмогоров и Журбенко предложили оценки спектральной плотности, в которых эффект разбиения данных на блоки комбинируется с эффектом специального взвешивания. В данной работе использованы произвольные окна просмотра данных.

Рассмотрим  $r$ -мерный стационарный случайный процесс  $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}$ ,  $t \in Z$ , с  $MX_a(t) = 0$ ,  $a = \overline{1, r}$  с неизвестной взаимной спектральной плотностью  $f_{ab}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ .

Пусть  $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1)$  —  $T$  последовательных наблюдений за составляющей  $X_a(t)$  процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$ ,  $a = \overline{1, r}$ , и  $T = LN$ , где  $L$  — число непересекающихся интервалов разбиения длины  $N$ .

В качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{ab}(\lambda, l), \quad (1)$$

где

$$I_{ab}(\lambda, l) = \frac{1}{2\pi \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} H_a(\lambda, l) \overline{H_b(\lambda, l)},$$

$l = \overline{1, L}$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ ,  $\lambda \in \Pi$ , модифицированная периодограмма на  $l$ -ом интервале разбиения, а  $H_a(\lambda, l)$  задано выражением

$$H_a(\lambda, l) = \sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t) X_a(t + (l-1)(N-K)) e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))},$$

$l = \overline{1, L}$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ ,  $\lambda \in \Pi$ , причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных  $h_a^N(t)$ ,  $t \in Z$ .

В работе исследовано асимптотическое поведение второго момента оценки  $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ .

**Теорема 1.** Если взаимная спектральная плотность  $f_{ab}(x)$ ,  $a, b = \overline{1, r}$  непрерывна в точках  $\lambda_1, \lambda_2$  и ограничена на  $\Pi$ , семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на  $\Pi^3$ , окна просмотра данных  $h_a^N(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a = \overline{1, r}$  ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию и выполняется соотношение

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3} |\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3)| dy_1 dy_2 dy_3 \leq C_1, \quad (2)$$

то для оценки  $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ ,  $\lambda \in \Pi$ , заданной выражением (1), имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}\{\hat{f}_{a_1 b_1}^{(T)}(\lambda_1), \hat{f}_{a_2 b_2}^{(T)}(\lambda_2)\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi}, \\ \frac{C_1}{L} f_{a_1 a_2}(\lambda_1) f_{b_1 b_2}(-\lambda_2), & \text{если } \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \pmod{2\pi}, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \pmod{\pi}, \\ \frac{C_2}{L} f_{a_1 b_2}(\lambda_1) f_{b_1 a_2}(\lambda_2), & \text{если } \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \pmod{2\pi}, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \pmod{\pi}, \\ \frac{C_3}{L} f_{a_1 a_2}(0) f_{b_1 b_2}(0) + \frac{C_2}{L} f_{a_1 b_2}(0) f_{b_1 a_2}(0), & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \pmod{\pi}, \end{cases}$$

где  $C_1, C_2, C_3$  - некоторые постоянные,  $a_i, b_i = \overline{1, r}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ .

**Доказательство.** На основании работы [1] ковариация оценки  $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ ,  $a, b = \overline{1, r}$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых  $A_1, A_2$  и  $A_3$ . Рассмотрим каждое из слагаемых.

$$|A_1| \leq \frac{(2\pi)^3 \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \iiint_{\Pi^3} |\Phi_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3)| \times \\ \times |P_L[(N-K)(y_1 + y_2)]| |f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1 + \lambda_1, y_2 - \lambda_1, y_3 - \lambda_2)| dy_1 dy_2 dy_3.$$

Учитывая, что семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, выполняется соотношение (2), и т.к.

$$P_L[(N - K)(x + y)] \leq \frac{L}{(2\pi)^2} \quad (3)$$

для любых  $x, y \in \Pi$  и произвольных целочисленных  $N, K$ , то можно показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_1 = 0.$$

Рассмотрим случай  $\lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ . Обозначим

$$I = \frac{(2\pi)^2}{L} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \iint_{\Pi^2} \Phi_{a_1 b_2}(x - \lambda_1, x + \lambda_2) \times \\ \times \Phi_{b_1 a_2}(y + \lambda_1, y - \lambda_2) P_L[(N - K)(x + y)] dx dy.$$

Рассмотрим выражение

$$|A_2 - I f_{a_1 b_2}(\lambda_1) f_{b_1 a_2}(\lambda_2)|.$$

Сделаем замену переменных интегрирования  $z = x - \lambda_1, \beta = y - \lambda_2$ , получим

$$|A_2 - I f_{a_1 b_2}(\lambda_1) f_{b_1 a_2}(\lambda_2)| \leq \\ \leq \left| \frac{(2\pi)^2}{L} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \iint_{\Pi^2} \Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2) \times \right. \\ \times \Phi_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2, \beta) P_L[(N - K)(z + \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \times \\ \times \{ (f_{a_1 b_2}(z + \lambda_1) - f_{a_1 b_2}(\lambda_1))(f_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_2) - f_{b_1 a_2}(\lambda_2)) + f_{a_1 b_2}(\lambda_1) \times \\ \left. \times (f_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_2) - f_{b_1 a_2}(\lambda_2)) + f_{b_1 a_2}(\lambda_2)(f_{a_1 b_2}(z + \lambda_1) - f_{a_1 b_2}(\lambda_1)) \} dz d\beta \right| \leq \\ \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|.$$

Рассмотрим каждый из интегралов

$$|I_1| \leq \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\Pi} |\Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2)| |f_{a_1 b_2}(z + \lambda_1) - f_{a_1 b_2}(\lambda_1)| dz \times \\ & \times \int_{\Pi} |\Phi_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2, \beta)| |f_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_2) - f_{b_1 a_2}(\lambda_2)| d\beta. \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность взаимной спектральной плотности  $f_{ab}(x)$  в точке  $x = \lambda_2$ , используя неравенство Гельдера, и так как  $f_{ab}(x)$  ограничена на  $\Pi$ , получим, что  $|I_1| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим  $|I_2|$ . Используя (3), получим

$$\begin{aligned} |I_2| & \leq \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} |f_{a_1 b_2}(\lambda_1)| \times \\ & \times \int_{\Pi} |\Phi_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2, \beta)| |f_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_2) - f_{b_1 a_2}(\lambda_2)| d\beta \times \\ & \times \int_{\Pi} |\Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2)| dz. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера, можно показать, что

$$\int_{\Pi} |\Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2)| dz \leq \frac{\left( \sum_{p=0}^{N-1} [h_{a_1}^N(p)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{p=0}^{N-1} [h_{b_2}^N(p)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p)}$$

для  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ . Откуда  $|I_2| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Аналогично можно показать, что  $|I_3| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Откуда следует, что  $|A_2 - I f_{a_1 b_2}(\lambda_1) f_{b_1 a_2}(\lambda_2)| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Значит,  $|A_2| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Аналогично можно показать, что  $|A_3| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Остальные случаи доказываются аналогично.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** При выполнении условий теоремы 1 для оценки  $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ , заданной выражением (1), справедливо соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D \hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{L} C f_{aa}(\lambda) f_{bb}(\lambda), & \text{при } \lambda \neq 0(\text{mod } \pi), \\ \frac{1}{L} (f_{ab}(0) f_{ba}(0) + C f_{aa}(0) f_{bb}(0)), & \text{при } \lambda = 0(\text{mod } \pi), \end{cases}$$

где  $C$  – некоторая постоянная,  $a, b = \overline{1, r}$ ,  $\lambda \in \Pi$ .

Доказательство следует из теоремы 1, полагая  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $b_1 = b_2 = b$ ,  $a_1 = a_2 = a$ .

Для временного ряда, представляющего собой данные по солнечной активности (число солнечных пятен) с 1814 г. по 2015 г., проведен сравнительный анализ оценки (1) в зависимости от окон просмотра данных и числа интервалов наблюдений (рисунок).

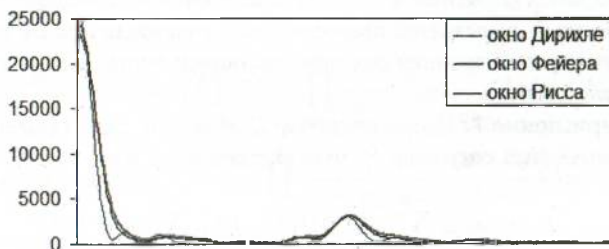


Рисунок – Графики оценки спектральной плотности, построенные для временного ряда с использованием окон Дирихле, Фейера, Рисса для числа разбиений  $L = 40$ .

Таким образом, наиболее эффективным является использование окон просмотра данных Дирихле и Рисса.

#### Список использованной литературы

1. Мирская, Е. И. Вычисление моментов одной оценки спектральной плотности / Е. И. Мирская, С. А. Марзан // Мат. и физ. методы исследований : научный и методический аспекты : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея, Брест, 17–18 апр. 2014 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2014. – С. 152–153.