сячные данные по геомагнитной активности (магнитные бури на Земле) с 1987 г. по 2014 г.

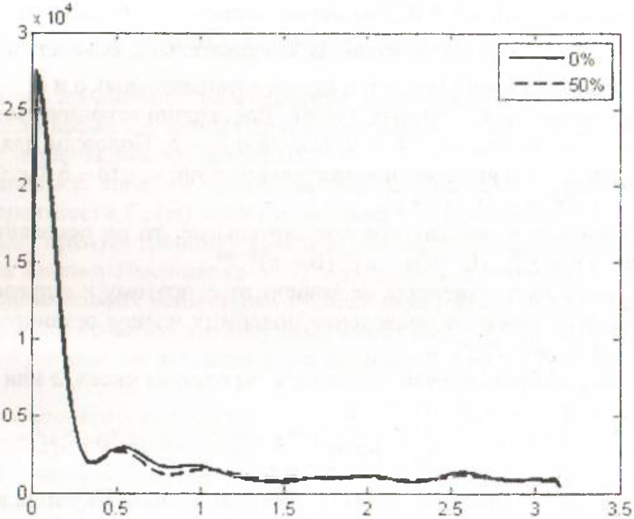

Рисунок 1 – Графики оценки спектральной плотности, построенные для временного ряда с использованием окна Ханна для пересечений 0 % и 50 %

Рассмотрим действительный многомерный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$ с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1),\ldots,X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T=S(N-M)+M$, где S – число пересекающихся интервалов разбиения длины N, где N и M принимают целочисленные значения, $0\le M<N$.

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ рассмотрим статистику, построенную по методу Уэлча

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{S}\sum_{S=1}^{S} I_{ab}^{S(N-M)}(\lambda). \qquad (1)$$

Показано, что оценка (1) является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса. Также доказана

Теорема 1. *Пусть взаимная спектральная плотность* $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$ *непрерывна в точках* $\lambda_1,\lambda_2 \in \Pi$ *и ограничена на* Π, *семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на* Π^3, *тогда оценка* $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, *задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{N\to\infty} D\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}f_{aa}(\lambda)f_{bb}(\lambda),\lambda\neq 0(\operatorname{mod}2\pi),\\ \dfrac{1}{S}\left[f_{aa}(0)f_{bb}(0)+f_{ab}^{2}(0)\right],\lambda=0(\operatorname{mod}\pi).\end{cases}$$

Построение оценки (1) производилось с помощью пакета MatLab .

Уменьшение дисперсии оценок достигается за счет увеличения перекрытия интервалов разбиения наблюдений.

Из графиков следует, что меньшей дисперсией обладает оценка, построенная с использованием пересечения 50 %.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15. – P. 70–73.

УДК 519.24

Е.И. МИРСКАЯ, Д.А. МУРИНА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, с $MX(t)=0$ неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0),X_a(1),...,X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предположим, что число наблюдений T представимо в виде $T=SN-(S-1)Q$, где S – число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а N, Q – целые числа, $0\le Q<N$.

Используя методику Д. Бриллинджера [1], в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности процесса исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda)=\frac{2\pi}{T}\sum_{l=1}^{T}W_{ab}\left(\lambda-\frac{2\pi l}{T}\right)\hat{f}_{ab}^{(T)}\left(\frac{2\pi l}{T}\right),v \quad (1)$$

где $W_{ab}(x)$, $x\in R$, $a,b=\overline{1,r}$ – спектральное окно, а оценка $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ задана выражением

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}I_{ab}(\lambda,s),$$

где $I_{ab}(\lambda,s)$ – модифицированная периодограмма.

В работе вычислена дисперсия оценки взаимной спектральной плотности, заданной соотношением (1), и исследовано ее асимптотическое поведение. Доказано, что оценка (1) является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинжер. – Минск : Мир, 1980. – 536 с.
2. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15. – P. 70–73.

УДК 517.958

С.Н. НАУМОВЕЦ
Брест, БрГТУ

О НАХОЖДЕНИИ ОДНОГО КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $x=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0{}^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}=f(x),\quad (x)\in\overline{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

$$\begin{gathered} a^{(0)}u(x_0,0)+a^{(1)}\partial_{x_1}u(x_0,0)+a^{(2)}\partial_{x_1}^2(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\\ u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $f:\overline{Q}\ni x\to f(x)$ – заданная функция на $\overline{Q}$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in\mathbb{R}$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in\mathbb{R}$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in\mathbb{R}$, $j=1,2$, заданные функции на $[0,\infty)$, $a^{(i)}\in\mathbb{R}$, причем числа $a^{(i)}\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$ удовлетворяют условию $\left(a^{(1)}\right)^2-4a^{(0)}a^{(2)}>0$.

Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^{\,2}}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}=0 \tag{4}$$

и частного решения v неоднородного уравнения (1).

Подробное описание нахождения функции v можно найти в [1].

Общее решение уравнения (4) представимо в виде

$$u^{(0)}(x)=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0), \tag{5}$$

где функции $g^{(j)}$, $j=1,2$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$ с соответствующими областями определения $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$.

Т.к. имеем частное решение v неоднородного уравнения (1), а общее решение u этого уравнения представимо в виде суммы $u(x)=u^{(0)}(x)+v(x)$, то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (4) относительно функции $u^{(0)}:\overline{Q}\ni x\to u^{(0)}(x)\in\mathbb{R}$. Решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям Коши

$$\begin{gathered} u^{(0)}(0,x_1)=\varphi(x_1),\\ \partial_{x_0}u^{(0)}(0,x_1)=\partial_{x_0}(u-v)=\partial_{x_0}u(0,x_1)-\partial_{x_0}v(0,x_1)=\psi(x_1),\ x_1\in[0,l] \end{gathered} \tag{6}$$

и граничным условиям

$$\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}\partial_{x_1}^{i}u^{(0)}(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0)-\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}\partial_{x_1}^{i}v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0), \tag{7}$$

$$u^{(0)}(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0). \tag{8}$$