УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, В.А. ГОРДИЕНКО
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ

Одним из проявлений увлеченности математикой является желание узнать, нет ли кроме изученных других подходов к решению задачи, доказательству теоремы, выводу формулы.

Так, например, хорошее понимание смысла и назначения формулы Бернулли о вероятности $P_n(m)$ иметь m успехов в n независимых испытаниях прокладывает прямую тропинку к доказательству справедливости формулы разложения бинома Ньютона $(a + b)^n$ для любых a, b и натурального n. Пусть в n независимых испытаниях «успех» имеет место m раз с вероятностью p в каждом испытании и «неудача» имеет место $n - m$ раз с вероятностью $q = 1 - p$ в каждом испытании. По формуле $P_n(m) = C^n{}_m\, p^m q^{n-m}$ можно вычислить

– $P_n(0)$ – вероятность события A_0 – 0 успехов в n испытаниях;
– $P_n(1)$ – вероятность события A_1 – 1 успехов в n испытаниях;
– $P_n(2)$ – вероятность события A_2 – 2 успехов в n испытаниях и т.д.;
– $P_n(n)$ – вероятность события A_n – n успехов в n испытаниях.

Ясно, что A_0, A_1, ... , A_n – несовместные события и их объединение (сумма) образует достоверное событие, поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} P\mathrm{n}\ (m) = 1. \qquad (1)$$

Из $q = 1 - p \Rightarrow p + q = 1$ следует, что и

$$(p + q)^n = 1. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^{n} P\mathrm{n}\ (m) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}^m\mathrm{n}\ p^m q^{n-m}. \qquad (3)$$

А это и есть формула разложения бинома Ньютона для частного случая $a + b = 1$ при $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$.

Обобщим формулу (3) сначала на случай произвольных положительных a и b. Сумму $a + b$ умножим и разделим на $c = a + b$, $c\cdot\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^{\mathrm{n}}$.

Тогда $(a + b)^{\mathrm{n}} = c\cdot\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^{\mathrm{n}}$.

Законно положить $\frac{a}{c} = p$ и $\frac{b}{c} = q$, т.к. $\frac{a}{c} < 1$, $\frac{b}{c} < 1$ и $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$

Тогда

$$(a + b)^{\mathrm{n}} = c^{\mathrm{n}}(p + q)^n = c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}^m\mathrm{n}\ p^m q^{n-m} =$$

$$= c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}^m\mathrm{n}\ \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{m}} \left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{n-m}} = c^n\cdot\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}^m\mathrm{n}\ \frac{\mathrm{a^m b^{n-m}}}{\mathrm{c^n}}.$$

После сокращения на c^n получаем:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m},$$

что и требовалось доказать для случая, когда a и b положительны.

Пусть теперь $a < 0$ и $b < 0$. Это значит, что $c = a + b$ также отрицательно, но $p = \frac{a}{c}$ и $q = \frac{b}{c}$ оба положительны, следовательно, выведенная формула бинома Ньютона имеет место и в случае отрицательных a и b.

Пусть, наконец, a и b разных знаков. Достаточно ограничиться дополнительным соглашением $a + b > 0$, откуда $a > -b$. Положим для определенности, что $a > 0$ и выберем положительное c такое, что $-b < c < a$.

Тогда $a + b = (a - c) + (b + c)$.

Т.к. слагаемые в скобках оба положительные, то на основании доказанного $(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C^m n(a - c)^m (b + c)^{n-m}$.

Левая часть этого равенства не зависит от c, поэтому и в правой части после раскрытия скобок и приведения подобных членов останется только сумма $\sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m}$.

Осталось разобрать случай, когда хотя бы одно из чисел, a или b, равно нулю. Пусть, например, $b = 0$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m b^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} C^m n\, a^m 0^{n-m} = C^n n\, a^n \cdot 0^0 =$$
$$= a^n = (a+0)^n = (a+b)^n,$$

т.к. $0^0 = 1$. Следовательно, формула разложения бинома Ньютона верна и в этом случае. Так, формула бинома Ньютона окончательно обоснована для произвольных a, b и натурального n.

УДК 519.24

Е.И. МИРСКАЯ
Брест, БрГУ имени А.С.Пушкина

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ

Одной из задач спектрального анализа временных рядов является построение состоятельных в среднеквадратическом смысле оценок спектральной плотности и исследование их статистических свойств. Оценки спектральной плотности, использующие непересекающиеся блоки данных, для одномерных случайных процессов были предложены Бартлеттом. Уэлч предложил использовать пересекающиеся блоки данных.

В данной работе с помощью метода Уэлча [1] проведен сравнительный анализ дисперсии оценки спектральной плотности в зависимости от степени пересечения интервалов для временного ряда, представляющего ежемесячные данные по геомагнитной активности (магнитные бури на Земле) с 1987 г. по 2014 г.

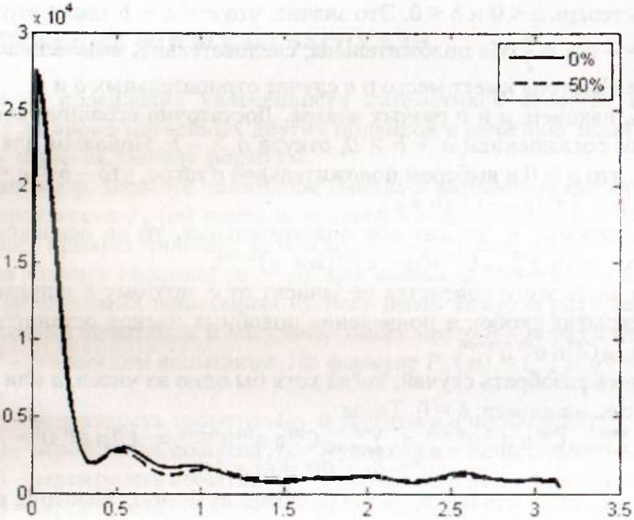

Рисунок 1 – Графики оценки спектральной плотности, построенные для временного ряда с использованием окна Ханна для пересечений 0 % и 50 %

Рассмотрим действительный многомерный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$ с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1),..., X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T=S(N-M)+M$, где S – число пересекающихся интервалов разбиения длины N, где N и M принимают целочисленные значения, $0\le M<N$.

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ рассмотрим статистику, построенную по методу Уэлча

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{S}\sum_{S=1}^{S} I_{ab}^{S(N-M)}(\lambda). \qquad (1)$$

Показано, что оценка (1) является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса. Также доказана

Теорема 1. *Пусть взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$ непрерывна в точках $\lambda_1,\lambda_2 \in \Pi$ и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на Π^3, тогда оценка $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{N\to\infty} D\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{S} f_{aa}(\lambda) f_{bb}(\lambda), \lambda \neq 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi), \\ \frac{1}{S}\left[f_{aa}(0) f_{bb}(0) + f_{ab}^2(0)\right], \lambda = 0 (\mathrm{mod}\, \pi). \end{cases}$$

Построение оценки (1) производилось с помощью пакета MatLab .

Уменьшение дисперсии оценок достигается за счет увеличения перекрытия интервалов разбиения наблюдений.

Из графиков следует, что меньшей дисперсией обладает оценка, построенная с использованием пересечения 50 %.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15. – P. 70–73.

УДК 519.24

Е.И. МИРСКАЯ, Д.А. МУРИНА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t \in Z$, с $MX(t)=0$ неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предположим, что число наблюдений T представимо в виде $T = SN-(S-1)Q$, где S – число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а N, Q – целые числа, $0 \le Q < N$.