$$a_j(Z,E)=\sum_{k=1}^{6} d_Z(j,k)(\beta-\bar{\beta})^{k-1}, \quad \bar{\beta}=0,7181287. \qquad (7)$$

Для первых 90 элементов периодической системы элементов авторы вычислили 30 коэффициентов $d_Z(j,k)$. Работа в данном направлении была продолжена в [5]. Авторы получили коэффициенты для 118 элементов, как для электронов, так и для позитронов.

В представленной работе проводится сравнение точности приведенных приближений. Результаты для ряда значений Z и энергии электронов представлены графически. Коэффициенты $d_Z(j,k)$ для Z = 6 и 47 взяты из [4] (исправлена опечатка в коэффициенте $d_{47}(0,6)$), а для Z = 92 – из [5].

Для легких элементов достаточно точные результаты дают все приближения и можно пользоваться простейшей формулой (3). Наилучшее приближение к точному расчету дает методика [4], [5]. Для элементов со средними значениями Z при средних и высоких энергиях приближение [3] дает большую точность, чем [1] и [2]. Для тяжелых элементов приближения [1]–[3] неприменимы. Приближение [4], [5] дает значительную погрешность при малых энергиях электронов. Усредненная по углам погрешность при энергии электронов более 250 кэВ менее 2 %. Таким образом, при энергиях электронов более 250 кэВ рекомендуется для расчетов использовать приближения [4], [5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mott, N. F. The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei / N. F. Mott // Proc. Roy. Soc. A. – 1929. – Vol. 124. – P. 425–442.

2. McKinley, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / William A. McKinley Jr, H. Feshbach // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74, № 12. – P. 1759–1763.

3. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // Phys. Rev. – 1961. – Vol. 121, № 4. – P. 933–939.

4. Teng, L. Analitic Fitting to the Mott Cross Section of Electrons / L. Teng, H. Qing, L. Zhengming // Radiat. Phys. Chem. – 1995. – Vol. 45, № 2. – P. 235–245.

5. An Expression for the Mott Cross Section of Electrons and Positrons on Nuclei with Z up to 118 / M. J. Boschini [et al.] // Radiation Physics and Chemistry. – 2013. – Vol. 90. – P. 39–66.

А.Е. Будько
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ПОЛНЫХ ДРЕВОВИДНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом {0,1}. За один такт головка каждой такой машины обозревает ячейку, записывает туда символ и сдвигается влево (Л) или вправо (П) к соседней ячейке или остается на месте (С).

Пусть программа машины Тьюринга задана списком команд вида $q_i a_t \to a_k D q_j$, где q_i, q_j – внутренние состояния машины, $a_k, a_t \in \{0,1\}$, D – есть Л, П или С. В каждой строке списка находится ровно одна команда. В [2] определен порядок отыскания в списке команды, которую она должна выполнить в данный момент.

В настоящей работе рассматривается нахождение такого порядка следования команд в программе, заданной списком, при котором время отыскания команд было бы наименьшим. При этом под наименьшим будем понимать наименьшее среднее время отыскания как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Порядок следования команд, соответствующий наименьшему среднему времени их отыскания, назовём оптимальным.

Кроме задания программы в виде списка команд будем использовать ещё и представление программы в виде ориентированного графа. В этом графе внутренним состояниям машины Тьюринга будут соответствовать вершины, а дуги будут определять команды. В [1] введена классификация L_0, L_1, L_2... машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. В данной работе рассматриваются машины класса. Их программы, заданные графами, удовлетворяют следующим требованиям:

1. Из каждой неконечной вершины исходят ровно две дуги.

2. В каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга. В начальную вершину не входит ни одна дуга.

3. Граф является связным и не содержит циклов.

Пусть n – число внутренних состояний программы машины, исключая конечное.

Машину Тьюринга назовем полной древовидной, если ее программа, заданная графом такова, что все пути из начальной вершины в конечную имеют одинаковую длину.

Пусть в программе полной древовидной машины, заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна k. Тогда, очевидно, таких путей в графе будет 2^k. Обозначим эти пути через $H_1, H_2, \dots H_{2^k}$ в порядке их перечисления сверху вниз. При такой нумерации, например, пути H_1 и H_2 будут отличаться только дугами, входящими в конечную вершину. Очевидно также, что количество вершин графа, отличных от конечной, и соответственно – внутренних состояний машины, исключая конечное, будет равно $n = 2^k - 1$. Так как различных путей из начальной вершины в конечную имеется 2^k, то и различных начальных конфигураций для машины M будет 2^k. Два пути назовем соседними по i-му ($1 \leq i \leq k$) ярусу, если они отличаются, начиная только с i-й дуги. Например, пути H_1 и H_2 являются соседними по k-му ярусу, а пути H_1 и H_3 – соседними по $(k-1)$-му ярусу.

Теорема. Пусть в программе полной древовидной машины, заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна k. Тогда:

1. Минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $2^{k-1} \cdot (2^{k+1} + k - 2)$.

2. Оптимальным является тот порядок, при котором:

2.1. Вначале следуют команды произвольно выбранного пути в порядке, определяемом дугами этого пути.

2.2. Затем следует команда пути, соседнего с выбранным по k-му ярусу, которая не входит в список команд выбранного пути.

2.3. Затем следуют команды пути, соседнего с последним выбранным по максимально наибольшему ярусу, которые не вошли в список ранее выбранных путей и т.д.

Так как $n = 2^k - 1$, то $k = \log_2(n+1)$ и имеет место следующее следствие.

Следствие. Если в программе полной древовидной машины, заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна k, то

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2+n+\frac{1}{2}(n+1)\log_2(n+1)$.

2) минимальное среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно $(2^{k-1}\cdot(2^{k+1}+k-2))/2^k=2^k+\frac{1}{2}k-1=n+\frac{1}{2}\cdot\log_2(n+1)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Докл. АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.

2. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах машин Тьюринга класса L_0 / А. Е. Будько // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., Брест, 27–28 апр. 2017 г. – Брест : БрГУ, 2017. – С. 25–26.

Е.В. Головкина, Н.Н. Сендер
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса

Понятно, что дифференциальные модели – это частный случай того множества математических моделей, которые могут быть построены при изучении окружающего нас мира. При этом необходимо отметить, что существуют и различные типы самих дифференциальных моделей. Но в большинстве случаев при описании дифференциальных моделей используются обыкновенные дифференциальные уравнения, одной из характерных особенностей которых является то, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной.

Рассмотрим задачи и их решения из экономической области науки с помощью дифференциальной модели.

Задача 1. Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция В, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь x покупателей. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений изменится число знающих о продукции B пропорционально как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $\frac{N}{\gamma}$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x) \tag{1}$$

с начальными условиями $x = \frac{N}{\gamma}$ при $t = 0$.

В уравнении (1) коэффициент k – это положительный коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (1) находим, что

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C .$$

Полагая $NC=S$, приходим к равенству: $\frac{x}{N-x} = Ae^{nkt}$, где $A = e^S$.

Если это уравнение разрешить относительно x, то получим:

$$x = N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+Pe^{-Nkt}} , \tag{2}$$

где $P = \frac{1}{A}$.

В экономической литературе уравнение (2) обычно называется уравнением логистической кривой. Если учесть теперь начальные условия, то уравнение (2) перепишется в виде $x = \frac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}$. %

Задача 2. Найти функцию, характеризующую изменение национального дохода *y=y(t)*, если известно, что величина потребления задается функцией *C=2t*, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $B = \frac{1}{2}$, $y(0) = 2$.

Простейшая модель воспроизводства национального дохода формулируется при использовании двух допущений:

а) пропорциональности производственного накопления приросту национального дохода в тот же момент времени;

б) независимости динамики потребления.

Эта модель имеет вид: $y(t) = B\frac{dy}{dx} + C(t)$, где B – коэффициент капиталоемкости национального дохода, т.е. отношение производственного накопления к приросту национального дохода; $C(t)$ – непроизводственное потребление, непроизводственное накопление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери, называемые «потреблением».