Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»

А.Н.Сендер

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Брест 2003

УДК 372.8:51(091)(072)
ББК 22.1г+74.262.21
С31

Рецензенты:

Доктор педагогических наук, профессор
Н.К.Степаненков

Доктор философских наук, профессор
П.В.Кикель

Кандидат физико-математических наук, профессор
А.Д.Гусак

Научный редактор

Профессор кафедры естественно-математических дисциплин
В.Н.Медведская

Печатается по решению редакционно-издательского совета БрГУ им. А.С.Пушкина

Сендер, А.Н.

С31 История и методология начального курса математики: Монография / А.Н.Сендер; Брест. гос. ун-т им. А.С.Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ им А.С.Пушкина, 2003. – 155 с.

ISBN 985-473-028-Х.

Монография посвящена проблеме формирования историко-методологических знаний у учащихся начальных школ при изучении математики. Рассматриваются также вопросы содержания методологической подготовки будущего учителя.

Адресуется студентам педагогических факультетов, учителям, аспирантам вузов.

УДК 372.8:51(091)(072)
ББК 22.1г+74.262.21

ISBN 985-473-028-Х

Введение

Непрерывный процесс развития общества, обновления условий жизни, изменения характера производительного труда ставит перед образовательными учреждениями все новые и более сложные задачи. А потому педагогическая наука находится в постоянном поиске технологий обучения, наиболее отвечающих перспективам общественного развития. В век научно-технической революции, как никогда ранее, от учителя требуется готовность и способность к проявлению самостоятельности и творчества в организации эффективной учебно-познавательной деятельности учащихся, в которой изначально должны быть заложены предпосылки развития и воспитания личности, формирования мировоззренческих позиций и взглядов. Профессионализм такого высокого уровня возможен только на основе глубокой интеграции двух систем научных знаний, частнопредметных и методологических, т.к. именно обобщенные знания о методах и закономерностях познания, об аппарате и структуре конкретной науки, о ее развитии и функционировании дают надежный ориентир для верного проектирования и конструирования учебного процесса, для воплощения в жизнь концепции современного школьного образования.

Формирование методологических знаний и умений в настоящее время рассматривается как одна из главных задач педагогического образования. В соответствии с этим данное пособие подготовлено в расчете на достижение двух целей – научной и практической. Научная предполагает информирование читателя о концепции, содержании, принципах и значении методологической подготовки будущего учителя, ибо овладение науковедческими знаниями дает "ключ" к творческому решению новых проблем, возникающих в педагогическом процессе. Практическая цель состоит в том, чтобы на конкретных примерах проиллюстрировать применение методологии науки, дать учителю материал и образец для самостоятельного творчества.

Названными целями обусловлена структура изложения. В первой главе определяются научный статус методологии вообще и методологии математики в частности. Рациональное сближение, сочетание и интеграция содержания математической науки с философией и с методологией математики рассматривается в качестве необходимого условия формирования методологических знаний и умений, строящегося по принципам систематичности и системности и рассматриваемого как комплекс целевого, содержательного, технологического и результативного компонентов. При таком подходе можно говорить о формировании методологических знаний профессиональной деятельности: овладение умением работать с любой информацией, развитие мышления, формирование индивидуального стиля деятельности и творческого подхода к решению новых познавательных и практических задач.

Исторический принцип и метод в изучении математики является конкретизацией общефилософской идеи развития. Логика развития математической науки в определенной мере находит отражение в содержании и структуре школьного предмета "математика", но ее воздействие может быть усилено за счет технологического компонента обучения. Непосредственная практическая реализация принципа историзма в обучении позволяет: продемонстрировать учащимся истоки математических понятий, идей, методов, научных направлений; пробудить познавательную активность и интерес к математике; формировать диалектико-материалистических мышление и нравственные качества личности, осуществляя тем самым гуманизацию и гуманитаризацию математического образования.

Во второй и третьей главах читателю предлагается обширный исторический материал, "разбросанный" в многочисленных учебно-методических изданиях, вузовских учебниках и журнальных статьях. В настоящем пособии предпринята попытка не только объединить в одной книге информацию, необходимую учителю для реализации принципа историзма в обучении математике, но и осуществить дидактическую обработку этой информации. С этой целью подобранный материал распределен по разделам "Изучение целых неотрицательных чисел" (§2.2), "Текстовые задачи" (§2.3), "Изучение величин" (§2.4), "Изучение геометрического материала" (§2.5), а некоторая его часть представлена в форме сообщений учителя учащимся или фрагментов уроков, т.е. является в некотором роде образцом для собственного творчества учителя.

В третьей главе внимание акцентируется на проблеме трансформирования методологических знаний в образовательный процесс школы. Раскрывается сущность экспериментальных (наблюдение, эксперимент, измерение) и общелогических (сравнение, анализ, синтез и т.д.) методов познания, которыми широко пользуется любая наука, в том числе и математика. Приводятся многочисленные примеры организации учебной деятельности учащихся с применением названных методов.

Пособие адресовано прежде всего студентам педагогического факультета и учителям начальных классов, но может оказаться полезным преподавателям математики средних и высших учебных заведений, а также школьникам старших классов.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам: Кикелю П.В., доктору философских наук, профессору, Степаненкову Н.К., доктору педагогических наук, профессору, Гусаку А.А., профессору, а также научному редактору – профессору кафедры естественно-математических дисциплин Медведской В.Н., за ознакомление с рукописью и полезные замечания, способствовавшие ее улучшению.

Глава 1

Методология математической науки как основа профессиональной подготовки учителя

§1.1. Методологическая концепция системы педагогического и математического образования

Любое образование, и в особенности профессиональное, не может быть полноценным, если оно сводится только к накоплению предметных знаний. Совершенно необходимо, чтобы одновременно были рассмотрены и соответствующие методологические аспекты науки, ибо методология – это фундамент мировоззрения, это ориентир для обнаружения верного направления познавательных поисков, это основа для осмысления природы науки. Все это говорит о том, что исследование методологических вопросов науки и формирование на их основе методологических знаний у познающего реальность, является чрезвычайно важной задачей. Для практического решения этой проблемы необходимо прежде всего определить научный статус методологии вообще и методологии конкретной научной дисциплины (например, математики), в частности.

В словаре иностранных слов методология трактуется: а) как учение о научном методе познания; б) как совокупность методов, применимых в какой-либо науке [84, с. 308]. Соответственно и многие ученые считают, что методология, понимаемая как совокупность методов познания, – это одно, а учение о методологии – это совсем другое, причем учение о методологии рассматривается в этом случае как частная научная дисциплина. Такой точки зрения придерживается, например, болгарский философ Н. Стефанов. Он считает, что следовать "традиции, согласно которой учение о методологии есть часть философии или логики, означает или непонимание различия между философским исследованием, или же молчаливое допущение, что в отношении методологии философия может изменить своим принципам и задачам, другими словами, перейти свои границы" [87, с. 156]. Рассуждая своеобразно и оригинально, Н. Стефанов делает вывод о том, что не философия определяет статус методологии, а наоборот методология как наука определяет место и роль философии в научном познании.

И.Д. Андреев еще более сужает место методологии, определяя ее как "составную часть, сторону, аспект логики научного познания, поскольку последняя включает в себя все основные закономерности познавательного процесса, в том числе и логику формирования и функционирования различных методов познания" [6, с. 291].

В "Философской энциклопедии" методология определяется как "философское учение о методах познания и преобразования действительности; применение принципов мировоззрения к процессу познания, к духовному творчеству вообще и к практике" [64, с. 421]. При этом имеются в виду не только общефилософские, но и частные научные методы. Здесь, нам кажется, необходимо развести такие понятия как методология науки вообще и методология конкретной научной дисциплины. Если рассматривать методологию как знание о знаниях, то методология частной науки представляет собой учение не только о наиболее общих методах научного познания, но и о приложении этих методов к анализу природы знания частной науки. Причем некоторые общие методы познания иногда неприменимы к исследованиям в области частных наук. Например, аксиоматичесвий метод вряд ли используется в таких науках как литература, геология и ряд других.

Методологические знания в курсе математики – это обобщённые знания о методах и структуре математической науки, закономерностях её развития и функционирования. На лекциях и практических занятиях преподаватель целенаправленно или спонтанно знакомит студентов с методами разного уровня познания в математической науке. Первый уровень – частнонаучные методы. Это основной путь получения конкретного результата, уровень непосредственной техники математического исследования. Сюда можно отнести, например, метод неопределенных коэффициентов, метод вариации постоянных в теории дифференциальных уравнений. Второй уровень – методология конкретной науки, ее принципы. Это такие частнонаучные методы, в результате систематического применения которых сформировались целые научные направления, новые дисциплины. Например, в качестве такого принципа в аналитической геометрии выступает метод координат, принцип максимума – основной метод теории оптимального управления. Третий уровень – общенаучные методы, среди которых выделяют общелогические (сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, индукция, дедукция, аналогия, моделирование); методы эмпирического исследования (наблюдение, описание, измерение, эксперимент), методы теоретического исследования (мысленный эксперимент, идеализация, формализация, аксиоматический метод). Четвертый уровень – философский, предполагающий рассмотрение общих условий движения к истине. В качестве универсального метода познания выступает диалектическая логика. В математике она проявляется опосредованно: по законам диалектики математика развивается; диалектика участвует в разрешении методологических проблем математики и т.д.

Исследование общенаучных методов познания ставит перед методологией математики ряд принципиальных проблем: роль общенаучных методов в математике, их развитие и модификация для целей математического исследования; математизация научного знания как общенаучный метод познания, межпредметные связи математики. Важным общенаучным методом является системный подход к изучаемым явлениям. Это объясняется тем обстоятельством, что для большинства наук накопление фактических данных не составляет их единственного содержания. На определенном этапе развития науки возникает необходимость теоретического осмысления накопленных данных, так как без такого шага ее дальнейшее развитие оказывается невозможным. Так, например, введение множества натуральных чисел, отношений и операций над ними привело к созданию различных теорий натурального числа.

Кроме знаний о методах научного познания к методологическим относятся межпредметные знания, носящие пограничный характер между философией и математикой.

Конструирование учебного материала по методологическим вопросам включает следующие звенья: а) выделение необходимого комплекса методологических вопросов, б) определение содержания по выделенным методологическим вопросам. К ним в математике следует, например, отнести следующие:

– Существуют ли математические объекты?

– Какую сторону действительности прежде всего изучает математика?

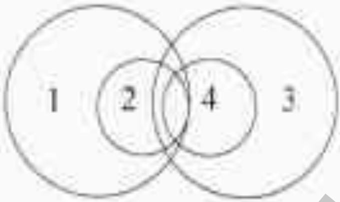
– Как находят в математике отражение философские категории пространства и времени, явления и сущности, дискретного и непрерывного, конечного и бесконечного?

Особенностью перечисленных парных категорий является их диалектическое единство, т.е. в реальном процессе они обязательно присутствуют одновременно как противоположности, как разные стороны процесса. Примером такого единства противоположностей может служить определение конечного и бесконечного множеств в математике: конечное множество – это множество, не допускающее биекции на свое собственное подмножество, а бесконечное – допускающее такую биекцию. Например, между бесконечными множествами натуральных и четных чисел, которое является частью, подмножеством первого, можно установить взаимно однозначное соответствие, а между множествами $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $\{2,4,6,8\}$ этого сделать нельзя, т.к. они конечны.

Формирование у студентов науковедческих знаний средствами математики возможно на основе взаимосвязи понятий, законов, методов, теорий. Овладение методологическими знаниями обеспечивает целостное представление о методологии математики, является движущей силой процесса обучения в вузе и дальнейшего самообразования, даёт возможность трансформировать эти знания в образовательный процесс школы для оптимального построения учебного процесса, для формирования методологических знаний у учащихся, а потому является одной из важнейших целей высшего педагогического образования.

Для педагогических специальностей к методологии наук следует отнести и методологию обучения. Так, методология математики – это учение о философских проблемах математики, о ее основаниях, это учение о причинах объективности математического знания, об исторической обусловленности ее природы, о логических аспектах математического знания, о закономерностях и методах математической деятельности, связанной с психологией творчества. В таком контексте методология математики смыкается с психологией познания, обучения и педагогикой.

На кругах Эйлера соподчиненность этих наук иллюстрируется следующим образом:



1 – философия
2 – методология
3 – методология частной науки
4 – методология обучения

Включение методологии обучения в состав методологии частной науки мы обосновываем методологическим анализом сущности методов обучения, который выявляет их соответствие методам познания, что подтверждает необходимость многоаспектного рассмотрения методов обучения – гноссологического, логико-содержательного, психологического, педагогического.

С понятием методологии семантически связано понятие методологических знаний, формирование которых у субъекта – важная задача познания. Что пониманием под таковыми? В психолого-педагогической литературе достаточно часто идентифицируют понятия "методологические знания" и "интеллектуальные умения". В последние Менчинская Н.А. включает умения учащихся, "во-первых, подчинять свои познавательные процессы поставленной перед ним задаче, и, во-вторых, выбирать и использовать наиболее эффективные способы для решения этой задачи" [61, с. 46]. Общим у них является то, что методологические знания и интеллектуальные умения определяют эффективность выполнения определенной деятельности. Но эти научные понятия отличаются процессуальными характеристиками: во-первых, умения, это знание в действии; во-вторых, интеллектуальные умения соотносятся в основном с процессом обучения, в отличие от методологических знаний, которые связаны с процессом познания вообще. Мы полностью разделяем мнение И.Д. Андреева: "Познание представляет собой деятельность, в которой субъект ставит перед собой определенные задачи и решает их с помощью тех или иных средств, руководствуясь знанием всех составляющих ее элементов. Это знание и называют методологическим, оно является необходимым условием осуществления познавательной деятельности" [6, с. 294].

Методологические и конкретные, предметные знания определяются бинарностью логического мышления, философско-психологический аспект которого позволяет выделить два типа работы мышления: рассудок и разум. Рассудок оперирует сложившимися знаниями. Рассудок позволяет правильно классифицировать явления, приводить знания в систему, обеспечивает успешную адаптацию индивида к простым познавательным ситуациям. Ограниченность рассудка заключается в его негибкости и категоричности, в неспособности выйти за пределы анализируемого содержания. Разум же дает знания более глубокого и обобщенного характера. Разум обладает способностью анализировать, обобщать, схватывать единство противоположностей, постичь сущностные характеристики объектов и явлений. Выход за пределы наличного знания и порождение новых понятий – основное отличие разума от рассудка, предполагающего оперирование уже известными понятиями. О важности разума говорил еще Гегель, утверждая, что "рассудок без разума ничто, разум же и без рассудка – нечто". В логическом мышлении рассудок и разум внутренне связаны, как методологические и предметные знания в едином, целостном процессе познания.

Н.Ф. Талызина, Е.Н. Кабанова-Меллер подчеркивали настоятельную необходимость введения в школьные программы наряду с фактическими знаниями и знания методологические, в частности, знания об интеллектуальных приемах. Но чтобы формировать такие знания у учащихся школ, нужно соответственно подготовить наше студенчество.

Формирование методологических знаний у студентов педагогического учебного заведения состоит из нескольких компонентов: целевого , содержательного, технологического, результативного. Целевой компонент связан с совершенствованием подготовки будущего учителя: обучение профессиональному педагогическому мастерству и творческому; результативный – с достижением поставленных задач и целей.

Содержательный компонент определяется тем фактическим материалом, на основе которого возможно формирование методологических знаний. Во-первых, это содержание каждого учебного предмета, в рамках которого формируются предметные знания, умения и способности как результат и одновременно средство познания в области конкретной научной дисциплины. Сюда, в зависимости от специализации учителя, можно отнести знания математики, физики, биологии и других наук. Во-вторых, это межпредметные знания, наличествующие через межпредметные связи, через зависимости между группами учебных предметов. При этом содержание каждого предмета выступает не только в его самостоятельном значении, но и как сторона, момент отражения комплексного и всестороннего процесса познания реальной действительности. Так, например, формирование межпредметных знаний на основе философии, педагогики и специальных дисциплин выполняет следующие функции: развивает научно-материалистическое мировоззрение, служит методологической основой изучения профилирующих дисциплин.

Например, при объяснении основного закона философии мало знать и обосновывать первичность материи и вторичность сознания, надо ещё понимать и учитывать, что материя в виде человеческого мозга и рецепторных органов рождает сознание, знания, умения и навыки, которые есть ничто иное, как результат функционирования вышеуказанной материи. Значит, учителю любого профиля необходимо твердо знать, что он воздействует прежде всего на сознание ученика, а его знания и умения – это следствие, продукт его психической деятельности. Будущему учителю естественно-математических дисциплин необходимы философские знания и как средство формирования у своих учеников научной картины мира, процессов и методов его познания. Опираясь на них, они будут более осознанно формировать. Например, использование важнейшего философского принципа о значении практики в доказательстве истины, стимулирует у школьников стремление к проведению экспериментальной работы как виду практики и способствует осознанному восприятию значимости научных приложений, пониманию существенных границ применимости научных законов. Одним словом, элементы философских знаний используются и как предпосылка, и как средство осознанного усвоения научных, предметных знаний, на основе которых, в свою очередь, у школьников формируются и мировоззрение.

Однако студенты затрудняются переносить на педагогическую деятельность различные философские категории, в частности такую, как форма и содержание, не осознавая, что учебные планы, программы и учебники определяют содержание образования, а уроки, семинары, практические занятия служат формой реализации этого содержания. Причинно-следственные связи студенты уверенно объясняют на природных и социальных явлениях, а адаптировать их применительно к конкретному, допустим, неуспевающему ученику не могут и на практике чаще всего пытаются устранять не причину, а следствие.

Таким образом, разумная конвергенция содержания специальных дисциплин с философией, методологией данного научного направления создает условия для формирования методологических знаний.

Плодотворность учета и использования этих условий зависит от технологии обучения, т.е. процессуального компонента формирования методологических знаний у студентов в процессе изучения специальных дисциплин. Например, математика может заполнить общий научный подход к решению задач, возникающих при овладении студентами знаниями и по другим дисциплинам, и в более широком плане – развить способности к трансформации науковедческих знаний в образовательный трансформации науковедческих знаний в образовательный процесс школы. Знакомство студентов с методами разного уровня познания в математической науке не должно ограничиваться только указанием номенклатуры общенаучных или математических методов, способствующих решению определенных видов задач. Оно включает и разъяснения, что без этих методов многие практические задачи решаются заметно труднее или вообще не могут быть решены.

Большое значение в технологии обучения имеет использование на занятиях понятий единичного, особенного и всеобщего и выявление их диалектической взаимосвязи. Говоря о математике, мы ее понимаем как "особенное" по отношению к науке вообще (всеобщее), а изучение определенной математической теории в этом триумвирате есть проявление единичного.

В философии к основным методологическим понятиям, которые встречаются и в процессе обучения математике, относят объяснение, обоснование, доказательство. Инициируя у студентов, будущих педагогов, объяснения, обоснования и доказательства математических утверждений, преподаватели тем самым реализуют преемственность вузовского и школьного образования: под руководством владеющего этими методами учителя ученики постепенно начнут осознавать, что в познании важно продвинуться от понимания явлений к пониманию причинных связей, лежащих в их основе, и, наконец, к пониманию закономерностей

Задаче формирования методологических знаний наиболее соответствует технология проблемного обучения, которое характеризуется следующими особенностями: а) показывает образцы проблем и способы их решения; б) дает знания типов проблемных ситуаций и опыт их решения, который может быть использован и как источник аргументации.

При выполнении проблемных заданий студенты не только сами учатся находить разнообразные методы решения задач, но и приобретают опыт, который могут в дальнейшей своей работе использовать для развития у своих учеников логики, интеллектуальных умений, способности к нестандартному подходу к решению задач.

Формирование методологических знаний должно строиться на принципах систематичности и системности. Принцип систематичности реализуется в таком построении учебно-воспитательного процесса в вузе, при котором методологическое образование студентов осуществляется не от случая к случаю, а постоянно и целенаправленно. Принцип системности следует понимать так, что каждый учебный предмет вуза потенциально способствует формированию методологических знаний студентов и эту возможность нельзя упускать. При таком подходе можно говорить о формировании методологических знаний профессиональной деятельности, к которым можно отнести методологические знания частной науки, овладение сложными навыками и умениями работы с любой информацией, развитие мышления, формирование индивидуального стиля деятельности, творческого подхода к решению познавательных и практических задач и т.д.

Формирование методологических знаний у студентов является также эффективным средством реализации гуманитарной функции профессионального образования. Кроме того, методологические знания выполняют и такие функции, как воспитательная, мировоззренческая, познавательная.

§1.2. Методологическая подготовка будущего педагога

В настоящее время, когда объем научной информации в мире за 7-8 лет удваивается, одна из главных задач образования состоит не столько в "передаче" знания, поскольку этот экстенсивный путь не оптимален, сколько в формировании у учащихся школ и студентов вузов методологических знаний и умений, т.е. знаний о наиболее общих методах научного познания и умения применить их в познавательной деятельности. К таковым относятся, например, умения осуществлять анализ и синтез, классифицировать объекты и явления, моделировать, осуществлять абстрагирование, отличать главное от второстепенного, обобщить и применять обобщение для объяснения различных вопросов, давать сравнительную оценку явлениям и т.д. Владение методологическими знаниями и умениями является одним из путей устранения перегрузки учащихся школ и студентов вузов, т.к. применение обобщенных методов познания легко возмещает незнание многих фактов. Аналогичной точки зрения придерживались многие известные методисты, психологи, педагоги, среди которых В.С. Шубинский, занимавшийся решением проблемы философского образования в средней школе, и др. Однако актуальности данная проблема не потеряла, так как до сих пор необходимость ее решения больше декларируется, чем осуществляется на самом деле. Справедливости ради стоит сказать, что в Российской Федерации курс "Философия образования" введен в учебный план многих высших педагогических учебных заведений. Во Франции на всех ступенях обучения большое внимание уделяется овладению учащейся молодежью математическими методами, и исследовательскими навыками. Было бы замечательно, если бы в каждом вузе педагогического профиля читался курс по философии и методологии математики, но его, увы, нет. Что же касается курса философии вообще, то в нем, как правило, разделы философии образования и методологии науки либо затрагиваются вскользь, либо вообще не рассматриваются. Выход из этого положения, по нашему мнению, – введение спецкурсов по истории и методологии науки, с одной стороны, и формирование методологических знаний у студентов в рамках специальных дисциплин, с другой стороны.

Мы остановимся на формировании методологических знаний средствами математики. Причем, чтобы формировать такие знания у учащихся школ, в частности, начальной, необходимо соответствующим образом подготовить студенчество. Математика в вузе представлена в основном как система предметных знаний. Однако математическая наука включает в себя не только совокупность знаний, но и процесс их добывания и приведения в систему. Поэтому методологический аспект математических знаний должен быть раскрыт в такой же мере, как и предметный. Этот аспект многоплановой подготовки включает знания об общих методах познания, межпредметные знания философско-математического характера, а также знания о методах передачи научной информации, т.е. методологию обучения математике. Осуществляется он путем трансформации вузовских знаний студентов в учебно-воспитательный процесс школы путем преобразования научной системы знаний в учебную.

О наличии у студентов методологических знаний косвенно говорят данные их самооценки. Так студентам психолого-педагогического факультета БрГУ им. А.С. Пушкина была предложена карта самооценки по девятибалльной шкале своего уровня методологических знаний. В анкете содержалось 24 вопроса. Таким образом, максимально возможное количество баллов – 216. Та же анкета была предложена и преподавателям университета, причем тем, которые активно занимаются научной, учебно-методической работой. Каково же было удивление, когда средний балл самооценки студентов составил 150, а преподавателей 147 баллов. Оценка же методологических знаний студентов методом независимых экспертов выявила отсутствие корреляции с результатами самооценки. Данные этого анкетирования говорят, прежде всего, о несформированности у студентов рефлексно-оценочной деятельности.

Невысокий уровень методологических знаний студентов, как показывает повседневная практика, проявляется в неумении: установить связи между явлениями и процессами, образующими одну систему; находить причинно-следственные отношения; осознать глубокие сущностные основания, по которым он делает то или иное умозаключение; сформулировать соответствующее обобщение, результат сравнения. В реальном учебном процессе это выражается в следующем:

– студенты не умеют применять в процессе ответов на вопросы т.н. принцип достаточного основания, утверждающего, что обосновать некоторое утверждение означает привести убедительные и достаточные аргументы;

– в процессе осуществления различных мыслительных операций студенты редко способны применить в качестве способа обоснования того или иного утверждения прием выведения из этого утверждения различных следствий;

– в процессе использования определений студенты зачастую пренебрегают правилом соразмерности определяемого и определяющего понятий, объясняют понятия через себя и т.д.;

– не умеют осуществлять качественную оценку результата решения задачи, не владеют методом размерности (например, при решении задач по физике) для контроля правильности полученного результата, объединяют разнородные величины в одну (например, идентифицируют массу и вес тела).

Сформированность у выпускников методологических знаний в процессе изучения математики создает предпосылки для решения методических и воспитательных задач, которые возникают в процессе педагогической деятельности, направленной на формирование методологических знаний школьников. У учителя начальных классов наиболее важная цель – сформировать интерес у детей к познанию вообще. Познание начинается со знания о незнании. И этот вид знания, быть может, является самым ценным, самым необходимым. На уроках математики или на внеклассных занятиях планомерную и продолжительную работу в этом направлении можно начать с обсуждения следующих ключевых вопросов по следующей схеме (например, в форме беседы):

– Хорошо ли быть знающим человеком и, что нужно делать для того, чтобы что-то знать? (Учиться; читать; обсуждать, но главное – мыслить.)

– Как сделать, чтобы твои мысли приносили плоды, результат? (Нужно понимать, что никто в твою голову мышление не вложит. Мысли твои и надо не бояться умственного труда.)

– С чего начинается мышление? (Во-первых, с удивления, с вопроса, во-вторых, с желания узнать мысли других людей. Постановка вопроса – это не только осознание того, что мы еще не знаем, но и готовность к поиску.)

Способность к удивлению – одна из наиболее важных и необходимых для плодотворного познания природная способность человека, которая ярко проявляется в детстве и которую важно сохранить и в зрелом возрасте. Альберт Эйнштейн писал, что ему посчастливилось сохранить эту способность, и именно благодаря ей он начал задумываться над такими, казалось бы, ясными проблемами, как природа пространства и времени. Именно эти размышления привели его к знанию о незнании.

Пустая голова не думает, а потому знакомство с мыслями других и есть вторая ступень собственного познания, независимо от того, согласен ты с чужими мыслями или нет.

Непредвзятое принятие того, что слышишь, – одно из правил развития своего мышления. Нельзя, узнавая что-то для тебя новое, узнать это в действительности, если ты заранее хочешь возразить, не согласиться, отбросить. Чтобы этого не допустить, нужно быть открытым к знаниям других людей. Сначала впусти знание, и только потом можешь оставаться при закрытых дверях, чтобы осмыслить сказанное и сделать своим достоянием ту частицу знаний, которую можешь переработать, осмыслить.

Методологические знания формируются, конечно, не в процессе бесед или запоминания названий методов, а в процессе постепенного, последовательного, системного усвоения предметных знаний, при осознании в действии роли и значения методологических знаний. Элементы методологических знаний влияют на формирование у учащихся научного мировоззрения, творческого мышления, воспитание эмоционально-мотивационной сферы.

§1.3. Исторический метод в науке и его реализация в математике

Исторический метод в познании впервые был применен Кантом и Лапласом в астрономии, Лайелем в геологии, Дарвином в биологии, К. Марксом и Ф. Энгельсом в социологии. Утверждение исторического метода неразрывно связано с проникновением в науку идеи развития, опирающейся на всю совокупность знаний о природе и общественной жизни, на весь исторический опыт деятельности людей. "Будучи конкретизацией общефилософской идеи развития, он содержит в себе понимание действительности как исторического процесса, смены ряда этапов, каждый из которых рассматривается относительно завершенным, устойчивым, признание в объективной реальности причинно-следственных связей, закономерностей, обслуживающих переход от одного этапа развития к другому" [7, с.129].

В структурно-организационном плане исторический метод представляет собой систему мыслительных операций, благодаря которым достигается научный результат. В системе своего познавательного действия он объединяет элементы сравнения, гипотетического предположения, логического обобщения, дедукции и т.д.

Важнейшими задачами исторического метода, определяющими его содержание, являются: "воссоздание или реконструкция отдельных этапов развития исследуемых объектов и исторических событий в конкретных условиях их существования, установление хронологической последовательности переходов от одних стадий или ступеней к другим, возможностей и границ применения знаний о современных явлениях и процессах к анализу следов прошлого, реконструирование событий прошлого, выделение этапов развития целостных систем, причин и закономерностей их развития" [7, с.129-130].

Историческое познание имеет дело с фактами, явлениями и событиями, рассматриваемыми в той последовательности, в какой они развивались в самой действительности. Но суть исторического метода не сводится только к эмпирическому описанию исследуемых объектов и восстановлению исторических событий. Задача исторического познания состоит в том, чтобы на основе восстановления и обобщения эмпирического материала установить причины явлений, закономерности их развития.

В специальных науках исторический метод применяется достаточно эффективно. Это напрямую связано с категорией знания. Содержание знаний постоянно изменяется, развивается под влиянием следующих факторов:

1) изменяется сам предмет науки, следовательно, изменяется и знание о нем;
2) предмет может остаться тем же, но содержание знаний о нём расширяется и углубляется благодаря успехам познавательной работы человеческого ума.

В теории некоторых наук, например, в геологии, биологии, истории и др. одновременно исследуются как история самого предмета, так и история его познания. В теории же таких наук как математика, физика, химия и др. история самого предмета не рассматривается, но не может не учитываться история познания предмета. Историческое развитие этих наук состоит в переработке полученных знаний и приобретении новых. Например, в геометрии нет истории самих геометрических фигур и тел, но есть история учений о пространственных формах и отношениях тел от Евклида до наших дней. В научно-методологических работах, посвящённых философским проблемам современной математики, подчеркивается наличие историзма в математической науке. (А.Г. Барабашев, Е.А. Беляев, В.Я. Перминов и др.).

На предмет математики тоже можно смотреть исторически. Так Энгельсом дано определение математики как науки, которая занимается изучением количественных отношений и пространственных форм объектов действительного мира. Анализируя это определение, А.Н. Колмогоров справедливо отмечает, что пространственные формы можно рассмотреть как частный вид количественных отношений, если этому последнему термину придать достаточно широкое толкование [86, с. 474]. Согласно Н. Бурбаки, математику можно определить как науку о математических структурах и их приложениях. Предметом современной математики, с точки зрения Э. Кольмана, являются "пространственные формы и количественные отношения действительного мира, а также такие отношения материального мира, такие структуры, которые подобны первым или вторым" [90, с.209-210].

В разных математических дисциплинах объект математики, т.е. реальная действительность, отражается и воспроизводится в сознании познающего субъекта в разных формах. В арифметике количественные отношения реальных совокупностей вещей трансформируются в абстрактное понятие числа и действия с числами, в результате предмет арифметики сложился как числа, операции над ними и свойства чисел и операций. В геометрии система понятий, составляющих ее предмет, формировалась на основе наблюдения над пространственными формами реальных тел и отношения их частей. В соответствии с этим предмет геометрии – геометрические фигуры и отношения между ними (пересечения, равенства, параллельности и т.д.). Алгебра как вершина математики постоянных величин в течение веков имела своим предметом "буквенные выражения", способы их преобразований, уравнения, неравенства, т.е. была наукой о решении уравнений. Позднее её предмет меняется: теперь алгебра трактуется как наука об алгебраических структурах, таких как группы, кольца, поля алгебры, об операциях над структурами и их элементами, о свойствах этих структур.

В исторически более молодых математических науках акцент в определении предмета всё более смещается в сторону операционного аспекта: предмет аналитической геометрии – свойства геометрических объектов, изучаемые алгебраическими методами, т.е. предмет науки в значительной степени определяется её методом. Ещё в большей степени это относится к математическому анализу. Мало сказать, что его предметом являются функции, надо обязательно уточнить, что свойства функции исследуются с помощью методов дифференцирования, интегрирования и предельного перехода. Изучение классов функций приводит к отпочкованию от математического анализа теории функций действительного переменного. Он дал жизнь ряду научных дисциплин, в том числе функциональному анализу, позволяющему исследовать функциональные пространства, операторы и операторные уравнения; топологии, которая изучает топологические пространства. Таким образом, в математике сложились два типа структур: арифметическая, т.е. числовые множества и геометрическая, т.е. множества геометрических объектов, исследования которых естественным образом порождало новые структуры.

Предмет математики в его нынешнем виде – это математические структуры, операции над ними и их элементами, свойства элементов, структур и операций. Под структурой понимается форма, организация, строение объекта как системы; структура характеризует отношения между объектами системы, устойчивые связи. Примерами структур являются: группа, кольцо, поле, метрическое пространство, функциональное пространство и т.д.

Приведенные определения предмета математики позволяют говорить о развитии знания об изучаемом ею объекте, а не о изменении и развитии самого объекта.

В научно-философской литературе исторический метод очень часто рассматривается не как самостоятельный в научном познании, а только в соединении с логическим, как непременный элемент философской диады, именуемой "историческое и логическое". Под историческим чаще всего понимается объективный процесс изменения и развития природы, общества и человеческого духа, соответственно под логическим – отражение, идеальное воспроизведение этого процесса в человеческой голове в форме понятий, суждений и умозаключений. Историческое и логическое в таком их понимании соотносятся как конкретно-историческое развитие природного и социального бытия и его отражение в теоретической форме. Для материалиста логическое есть понятие, выраженное в понятии историческое [37, с.265]. Так, например, М.М. Розенталь, тщательно анализирующий в своих работах проблему исторического и логического, отмечает, что логическое в его соотношении с историческим характеризует две важнейшие черты: 1) сжатое, сокращенное воспроизведение исторического, очищенного от всего случайного, второстепенного, освобожденное от конкретной исторической формы развития познания, в логическом историческое , так сказать, сконденсировано, преобразовано; 2) логическое воспроизводит историческое на высшей основе, т.е. на основе, доступной современным уровням познания, оно перерабатывает историческое с точки зрения современной ступени познания" [77, с.182].

Категории исторического и логического рассматриваются в работах П.В. Копнина, Э.В. Ильенкова, Б.М. Кедрова и др. при анализе проблем диалектики, логики, гносеологи. В БСЭС дается следующее разъяснение исторического и логического: "Логическое и историческое, философские категории, выражающие соотношение между логическим развитием мысли о предмете и реальным процессом его развития (историей предмета); историческое – процесс возникновения и развития предмета; логическое – теоретическое воспроизведение развитого и развивающегося предмета во всех его существенных, закономерных связях и отношениях. Логическое отражает историческое в отвлеченных от всех случайностей и отклонений реального процесса развития, но в строгом соответствии с его внутренними закономерностями; раскрывая сущность исторического, логическое выступает способом его всестороннего исследования. Единство логического и исторического – основа марксистского принципа историзма" [55, с. 731].

Единство исторического и логического будет иметь место, если изучать сущность предмета в контексте реального исторического процесса

Как справедливо заметил Гегель, "слово история означает в нашем языке как объективную, так и субъективную сторону, как историю деяний, так и сами деяния, им обозначается как то, что совершалось, так и историческое повествование" [24, с.58].

При рассмотрении истории математики тоже следует иметь в виду наличие в ней двух сторон: субъективной и объективной. Субъективная сторона – это анализ деятельности математиков разных эпох и народов, объективная – анализ объективного хода развития математических понятий, идей, структур. С любой точки зрения наибольший интерес представляют те моменты истории, которые рождают новые методологические идеи.

Здесь следует разграничить понятия исторического метода в науке и историзма как методологического принципа. Исторический метод, по мнению Г.А. Подкорытова, есть метод, "применяемый при исследовании объектов, развитие которых образует их историю в виде системы сменяющих друг друга во времени и генетически взаимосвязанных элементов" [73, с.69]. Исторический метод реализует в познании одно из основных методологических требований: чтобы познать предмет в настоящем, надо знать его прошлое, чтобы вскрыть сущность предмета, необходимо проследить его историю.

И.С. Кон следующим образом разводит эти понятия: "Понятие историзма шире, чем понятие исторического метода, поскольку принцип историзма обязателен и для теоретического исследования" [48, с. 453]. Таким образом, согласно мнению И.С. Кона, исторический метод для теоретического исследования не обязателен.

По мнению же Г.А. Подкорытова, "историзм как методологический принцип шире исторического метода потому, что он объединяет в себе и исторический взгляд на вещи (теорию их) и исторический метод их познания" [73, с.72].

Выделяют шесть познавательных императивов, которые с помощью принципа историзма обеспечивают гносеологический процесс любой науки [2]. В контексте математической науки они формулируются следующим образом:

1. Требование качественной ретроспективности.

Чтобы вскрыть сущность предмета, необходимо "воспроизвести" исторический процесс его развития. В контексте изучения математики под этим требованием имеется в виду рассмотрение вопросов зарождения, становления и дальнейшего развития этой науки.

2. Требование предпосылочного рассмотрения, т.е. причин возникновения и развития математики.

К таковым относятся: а) практика, б) внутренние потребности самой науки. Например, натуральные числа появились из-за потребности счета, который в свою очередь возник в связи с необходимостью сравнивать множества (орудий охоты, людей в племени, животных в стаде и др.).

3. Требование применять в ходе познания предмета основные законы диалектики.

Так по законам диалектики развивается сама математическая наука, ее понятия, диалектика участвует в разрешении методологических проблем математики и т.д.

4. Требование выделять этапы развития науки.

В истории развития математики академик АН СССР А.Н. Колмогоров выделяет 4 периода: 1) зарождения математики, 2) элементарной математики, 3) создание математики переменных величин, 4) современной математики. В первый период, период зарождения математики, человечество выработало понятие о натуральном числе, приемы счета, записи чисел, арифметических операций над ними, установило практические сведения из геометрии. Период элементарной математики иногда называют периодом развития учения о постоянных величинах. В этот период оформились основные разделы элементарной математики: арифметика, геометрия, алгебра и тригонометрия. Третий период развития математики связывают с введением в математику переменной величины на базе учения о бесконечно малых величинах.

5. Рассмотрение объекта исследования с точки зрения процесса развития науки.

Об этом мы говорили выше, когда речь шла о вариативности объекта исследования в математике.

6. Требование определять направление и характер развития науки (прогрессивное, гармоничное, конфликтное).

В истории математики все они в той или иной мере имели место. Так, например, период прогрессивного развития математики связан с расцветом науки и культуры в Древней Греции, с созданием пифагорейской школы, в которой число рассматривалось как мера и сущность всех вещей. Математическая наука того времени приобрела гармонический характер. Но затем математики-пифагорейцы подошли вплотную к открытию иррациональных чисел, но не могли смириться с существованием их, так как эти числа не были такими "красивыми", "гармоничными", как натуральные или рациональные. Наступает этап конфликтного развития науки. Указанием этого примера ограничимся в пояснении данного познавательного императива, связанного с реализацией принципа историзма.

В единстве исторического и логического в познании и проявляется диалектико-материалистический характер этого процесса: требование базировать теорию на прочном фундаменте исторических фактов и вскрывать логику истории.

§ 1.4. Историческое и логическое в обучении математике

Логика развития математической науки находит отражение в построении школьного курса математики. Содержание школьного предмета начинается с понятия натурального числа и заканчивается основами дифференциального и интегрального исчисления. И это не случайно, так как подобная структура содержания основывается на единстве "логического и исторического". Для целей обучения важно уяснить себе, что логический анализ фактов и понятий, относящихся к современному уровню науки означает, в принципе, историческое понимание объектов исследования, даже если история его создания специально не изучается. В логике как бы скрыта история. Педагогическая целесообразность обращения к историческому материалу в преподавании математики обусловлена рядом причин. Прежде всего, сходством методов познания в науке – математике и в математике – учебном предмете. Рассмотрение истории данной науки демонстрирует то, что потребности практики, а также самой математической науки послужили источниками новых понятий, идей, методов, научных направлений. Так, потребности в счете и измерении привели к понятию числа; развитие сельского хозяйства, мореплавания и астрономии – к формированию геометрических и алгебраических знаний. Введение Декартом метода координат способствовало появлению и разработке аналитической геометрии, исследования Абеля и Галуа – современной алгебры, развитию науки и техники в целом.

Любая наука имеет свои методы и теории. Развитие математики в целом связано с использованием дедуктивных доказательств. Если теория – это системное знание, в котором отражается определенная совокупность связей объективной реальности, то логический метод – также знание, но уже направленное на получение нового знания. В этом проявляется субъективная сторона метода, а объективную сторону составляет содержание самого знания. Метод развивается вместе с теорией, а она развивается вместе с методологией. Поэтому Гегель определил метод как «сам себя конструирующий путь». Теория как совокупность теоретических законов и метод как совокупность приемов исследования – это две стороны науки, которые находятся в диалектическом единстве: наука = теория + метод. На этом основан важный принцип методологии: единство предмета и метода. С одной стороны, предмет любой науки включает в себя и изучение метода; с другой стороны, метод есть теория в действии, в этом смысле он отождествляется со всей наукой и включает в себя предмет. Из указанного принципа вытекает, что вместе с наукой развивается ее предмет и метод. А значит и в обучении математике единство исторического и логического обеспечивает формирование методологических знаний.

Принцип историзма определяет также один из возможных путей реализации гуманизации и гуманитаризации обучения в школе. Так, например, историко-научный материал оказывает большое воздействие на возникновение у школьника интереса к знаниям. Учебный материал, в котором присутствует человеческая личность, борьба за истину, раскрываются противоречия в науке, воспринимается учащимися более активно, чем голые научные результаты. Содержание исторических сведений, в которых обращено внимание не только на то, кто, что, когда открыл, доказал, сформулировал, но и на то, почему и как возникла у учёного та или иная идея, каков его ход мысли при обосновании идей, каков его метод исследования, демонстрирует природу открытий, предостерегает от неверных представлений, позволяет проникнуть в сложный мир человеческих отношений. Таким образом, изложение программного материала, построенное на основе реализации принципа историзма, вызывает познавательную активность школьников.

Кроме того, историзм в преподавании предмета, в частности, математики, влияет на качество знаний учащихся. Это объясняется тем, что исторический материал служит средством формирования у школьников убеждённости в познаваемости мира. Структурирование учебного материала на основе реализации принципа историзма вскрывает сущность явлений и процессов, показывает, по возможности, движение к этой сущности, процесс перехода от незнания к знанию со всеми его основными трудностями и противоречиями. Историко-научный материал позволяет школьнику понять, что наука развивается через диалектическое движение знания от относительной истины к абсолютной, что развитие идеи идёт в целом по спирали: новое знание, отрицая старое, в то же время не отбрасывает его, а вбирает в себя и развивает его объективную истину, что движущими силами процесса познания являются потребности практики и самой науки.

Ретроспективный анализ развития школьного естественно-математического образования позволяет выделить три подхода к обучению соответствующим предметам с точки зрения исследуемой проблемы: индуктивно-исторический, дедуктивно-аксиоматический и историко-методологический. Рассмотрим эти три подхода в контексте изучения математики в средней школе.

Индуктивно-исторический подход предполагает следующую логическую цепочку усвоения знаний: в "снятом" виде излагается история формирования определенного понятия, закона теории, а затем учащиеся постепенно подводятся к современному состоянию данного вопроса. При такой организации обучения школьники знакомятся с развитием научного познания в данной области, например, математической науки от истоков в ее будущность, что в определенной степени способствует формированию их математического мышления.

Естественно, история науки не может служить основой для построения современного учебного курса ни на одной ступени обучения. Учебный предмет не может строиться в хронологическом порядке аналогично развитию соответствующей науки. Такой подход к обучению приводит к тому, что учащиеся вслед за учеными, хотя и в имплицитном виде, должны пройти трудный путь к истине, поэтому не остается времени развернуть материал в логическом плане, показать, как из него дедуктивно следуют частные выводы. У учащихся при таком подходе формируется эмпирическое мышление, далекое от творческого. Индукция воспринимается как единственный путь познания. В результате этого историко-индуктивная концепция обучения, абсолютизирующая одну из сторон методологического принципа единства исторического и логического, оказывается не совсем верной как с точки зрения гносеологии, так и дидактики, а потому встречает достаточное противодействие со стороны психологов и дидактов.

Сторонники дедуктивно-аксиоматической концепции в обучении математике акцентируют свое внимание на том, что школа должна учить лишь прочно установленным основам современной математики. Признавая в определенной степени правомерность этой точки зрения, следует отметить, что дедуктивно-аксиоматическое построение математики с 1 по 12 классы средней школы не всегда возможно и разумно. Призывы некоторых методистов знакомить школьников только с современными представлениями, теориями без показа способов получения этих знаний в науке может привести к догматизму, т.к. не будет осознано самое главное – идея развития в математике.

Дедуктивно-аксиоматический подход, игнорируя необходимость понимания прошлого для усвоения современных научных данных абсолютизирует вторую сторону диалектического единства исторического и логического, и полностью опирается на формальную логику. Естественно, формальная логика имеет большое значение в дидактике, а тем более в математике: 1) она позволяет сделать логический анализ содержания обучения; 2) использовать законы логики при изучении учебного материала; 3) применять логические операции в обучении (определение, классификация, индукция, дедукция, конъюнкция, дизъюнкция, и т.д.); 4) развивать навыки мыслительной деятельности. Однако в настоящее время большое внимание уделяется формированию творческих способностей учащихся, умению самостоятельно добывать знания, а здесь возможности формальной логики ограничены. Необходимо проникновение в школьный курс диалектической логики.

Историко-методологическая концепция обучения математики также базируется на единстве исторического и логического. Суть этого подхода заключается в таком изложении учебного материала, при котором основные идеи, математические понятия, структуры, теории представлены в их генезисе и развитии, показаны способы получения знаний. При таком подходе исторический аспект подчинён методологическому, являясь средством для формирования у учащихся собственно методологических и науковедческих знаний.

Историко-методологический подход обобщает положительный опыт двух первых концепций в обучении, освобождаясь от их недостатков. Если при историко-индуктивном подходе рассматривался тот или иной вопрос с момента его действительного возникновения, то при историко-методологическом подходе изучение вопроса начинается с того момента, который диктуется как соображениями генезиса основной идеи, так и современного состояния теории.

Итак, историческое и логическое не являются альтернативными при их реализации в математической науке и в обучении математике. И то, и другое подчинено задаче всестороннего и наиболее глубокого познания математической действительности, формированию методологических знаний, гармонизации процесса обучения.

§1.5. Исторический аспект начального курса математики

Процесс адаптации выпускников вуза к реалиям педагогической деятельности – важнейший период в становлении профессионала. Он будет проходить быстрее и менее "болезненно", если в процессе обучения в вузе у студентов будет сформирована профессиональная направленность, одним из критериев стабилизации которой служит стремление к дальнейшему самообразованию и самовоспитанию, к повышению своей квалификации. Успех адаптационного периода зависит от умения студентов трансформировать полученные в вузе знания на образовательный процесс школы.

Как известно, деятельность педагога предполагает реализацию следующих основных компонентов: целевого, содержательного, процессуального и результативного. Целевой компонент определяется целями обучения, воспитания и развития учащихся в рамках преподаваемого учебного предмета. Содержательный компонент рассматривается с позиции изоморфизма вузовского и школьного образования и выражается в установлении структурно-логической связи вузовских и школьных дисциплин и связан с отбором содержания учебного материала в соответствии с принципами дидактики, возрастными и психологическими возможностями учащихся и т.д. Процессуальный компонент определяется выбором технологий обучения и воспитания. Так, по мнению Кондрашовой Л.В., "технология обучения – это совокупность действий, ведущих к педагогическому взаимодействию между сторонами педагогического процесса, направленных на обеспечение глубины и прочности знаний, действенности умений, развитости познавательных способностей при грамотном использовании коммуникативных механизмов в сочетании с профессионализмом и мастерством педагога" [49, с.79]. Результативный компонент отражает выполнение поставленных педагогом целей обучения, заключающихся не только в овладении учащимися знаниями, умениями и навыками по предмету, но и в воспитании и развитии личности школьника, становлении его нравственного облика. Результативный компонент интегрирует показатели хода учебно-воспитательной деятельности, отражая наряду с процессуальными характеристиками, личностное развитие как ученика, так и педагога – его профессионально значимые качества, опыт практической деятельности

Остановимся на всех указанных компонентах применительно к педагогической деятельности учителя начальных классов. Изменение акцентов в целевом компоненте связано с пересмотром ориентиров с примата прагматических знаний на развитие общей (в том числе и математической) культуры школьника, формирование целостной личности с гибким, полноценным мышлением. Это возможно, если учитель будет стоять на позиции гуманистической педагогики. Данный тезис находит подтверждение в концепции гуманитаризации образования в Республике Беларусь, в которой под содержанием гуманитарного образования понимается "вся совокупность основ тех наук (в их постоянном развитии), которые позволяют человеку познать себя, окружающий мир, учат, как развивать всю жизнь человеческого общества на основах культурного наследия." [50, с.27]. Причем гуманитаризация образования предполагает, с одной стороны, усиление внимания к расширению номенклатуры учебных дисциплин гуманитарного цикла, а с другой, – обогащение естественно-научных дисциплин материалом, раскрывающим борьбу научный идей, человеческих судеб ученых-первооткрывателей и т.д. Здесь имеется в виду не столько добавление недостающего фрагмента знаний (например, естественно-научного к гуманитарному и наоборот), сколько развитие интеллектуального и эмоционального аппарата личности через включение якобы альтернативной компоненты в содержание образования. Гуманитарные и естественно-научные типы образования предлагается рассматривать с позиции дополнительности методологических категорий классической и неклассической стратегий мышления (синтеза конвергентного и дивергентного мышления).

В контексте рассматриваемой проблемы можно конкретизировать цели обучения: установление (объяснение) диалектики развития математической науки, установление причинно-следственных связей, изучение математической культуры и ее развития у различных народов, уделив особое внимание Беларуси, формирование математической культуры учащихся.

Гуманитарный аспект содержания математики в начальной школе может найти воплощение через реализацию принципа историзма в обучении.

Любая наука имеет множество аспектов, к которым относятся история, философия, методология этой науки, психология научного творчества и т.д. Каждое из указанных направлений изучает соответствующая отрасль науковедения. Естественно, знания, полученные в этих областях, имеют важное значение для понимания данной науки в целом.

Возникает вопрос, должна ли найти отражение эта взаимосвязь математики с историей науки, философией, методологией данного научного направления в школьном курсе. Необходимость разумной конвергенции этих составляющих нам представляется несомненной, т.к. в этом случае создаются условия для формирования у учащихся школ диалектико-материалистического мировоззрения, познавательного интереса к предмету, методологических знаний. Постановка и решение этих важнейших задач не нашли должного отражения ни в программах, ни в учебниках математики средней школы.

Анализируя учебники по математике для начальной школы замечаем, что при всем их оригинальном структурном построении, логике и содержательной насыщенности исторический аспект остался вне поля зрения авторов. Это ни в коей мере не умаляет заслуг авторского коллектива, а, возможно, дает учителю поле для творчества. Но если учителю математики средней школы, которому приходится довольно часто искать ответы на вопросы методологического и исторического характера, помогают знания из вузовского курса "История математики", учебно-методических пособий типа "История математики в средней школе", то решение этой проблемы учителями начальных классов полностью зависит от их увлеченности и желания.

По результатам анкетирования учителей начальной школы, выявлены трудности, препятствующие реализации принципа историзма в школьной практике:

1. Ограниченность времени на изучение программного материала.
2. Отсутствие у учителя материала с историческим содержанием.
3. Недостаточная информированность о имеющейся литературе и других пособиях.
4. Недостаточная методическая оснащенность кабинета математики (литература, дидактический и раздаточный материал).

Учителя высказали также пожелание получить соответствующую дополнительную подготовку, в том числе и на курсах повышения квалификации.

Выход из этого положения, по нашему мнению, – введение спецкурсов по истории и методологии математики, с одной стороны, и формирование историко-методологических знаний у студентов при изучении специальных дисциплин, например, курса математики на психолого-педагогическом факультете, с другой. Полученные знания помогут выпускникам вуза, осуществляя единство исторического и логического в познании, эффективнее строить процесс обучения в начальной школе.

Содержание начального курса математики составляют арифметика натуральных чисел, величины, геометрический и алгебраический материал. По этим же направлениям должен быть рассмотрен историко-научный компонент математики в начальной школе. Так, при знакомстве с натуральными числами первого десятка в подготовительном классе учителю могут понадобиться сведения из истории возникновения названий чисел, записи их в непозиционных системах счисления, например, славянской, римской и египетской. Историко-математический материал при изучении таких величин, как длина, масса, площадь, объем, время, цена, стоимость может быть следующим: старые русские меры длины (дюйм, аршин, сажень, локоть, пядь, вершок, верста); меры площади (квадратная верста, кв. сажень, кв. фут, кв. дюйм, десятина); меры объема (куб. сажень, куб. дюйм, куб. фут, а также для жидких тел: ведро, бочка, штоф, бутылка); старинные меры времени и виды часов (солнечные, песочные, водяные, механические) и др. Знакомя учеников с геометрическим материалом, полезно рассказать о греческой математике. В Древней Греции геометрию причисляли к семи свободным искусствам наряду с грамматикой, риторикой, диалектикой, арифметикой, астрономией, музыкой, и человек не считался грамотным, если не владел хотя бы одним из этих семи. Уместно будет рассказать ученикам о происхождении названий таких геометрических понятий как точка, линия, об интересе к числам древних греков, которые, положив числа в основу всего окружающего, пытались с их помощью объяснить мир.

Правомерно выделить следующие критерии отбора учебного материала по математике с историческим содержанием и его использования на уроках.

1. Доступность для понимания учеником:

а) в изложении текста,

б) в изображении схемы или рисунка.

2. Соответствие исторического материала содержанию учебной программы и объему выделенного ею времени:

а) соответствие темпу усвоения учебного материала,

б) соответствие темпу воспроизведения знаний,

в) актуальность для интеллектуального развития учащихся.

3. Значимость материала в развитии математики:

4. Научная достоверность:

а) в описании открытий,

б) в описании способов или методов,

в) в описании исторических событий.

5. Эмоциональность:

а) относительная новизна,

б) факты, иллюстрирующие личный опыт (переживания) ученого,

в) опора на познавательные интересы учащихся.

6. Наличие соответствующего дидактического материала с историческим содержанием.

Процессуальный компонент при рассмотрении историко-математического материала может быть различным: это и проблемное изложение, и дидактические игры, и внеклассные формы занятий. Так проблемное обучение, построенное на историко-научном материале, характеризуется следующими особенностями: а) показывает образцы проблем и способы их решения; б) дает знания типов проблемных ситуаций и опыт их решения. Еще один путь – это интеграция исторических знаний и математических задач, использующих эти знания. Например: "В XV веке суммарная площадь Пскова, Великого Новгорода и Нижнего Новгорода была равна 940 га, из которых четвертую часть составляла площадь Пскова. Вычислите площадь каждого из этих трех городов, если известно, что Нижний имел площадь на 105 га меньше, чем Новгород Великий".

Результативный компонент изучения математики определяется знаниями учеников по изученной теме. Использование историко-научного материала усиливает учебно-познавательную мотивацию, повышает интерес к предмету, формирует диалектико-материалистическое мышление. Реализация принципа историзма в обучении способствует также формированию ценных нравственных качеств: целеустремленность, работоспособность, критичность, самокритичность, умение признавать свои заблуждения и в то же время бережно и внимательно относиться к работе других, воспитанию самостоятельности, (отсутствие догматизма, готовность пойти против авторитета во имя истины), патриотизма и интернационализма учащихся.

Глава 2

Реализация исторического метода в начальном обучении математике

§2.1. Исторические сведения из начального этапа развития математики

Анализ методов познания в науке – математике и в математике – учебном предмете предполагает обращение к истории математики. В ней убедительно демонстрируется, что проблемы практики, а также самой математической науки служили источниками новых понятий, идей, методов, научных направлений.

В задачу данной книги не входит рассмотрение вопросов истории возникновения и развития всей математики, а только истории ее начального этапа, связанного с формированием понятия натурального числа, геометрической фигуры, величины.

Общеизвестно, что натуральное число относится к определяемым понятиям в математике, и определение его можно дать как в аксиоматической, так и в количественной теории. Однако в истории математики видные ученые относились к этому неоднозначно. Так, например, известный французский математик А.Пуанкаре считал, что натуральные числа должны быть признаны неопределяемыми объектами. Как и Л.Кронекер, он был убежден, что ни аксиоматическое, ни теоретико-множественное описание натуральных чисел неправомерно.

В истории человечества необходимы были тысячелетия, чтобы возникли некоторые операции, которые затем были положены в основание математики. Этот начальный этап относится ко времени, когда человек от примитивного использования орудий для добывания пищи (охота и земледелие) перешел к их исследованию и совершенствованию:

а) разделение целого на части (стадия обработки орудия, раздел добычи);

б) составление нового целого из частей (составные орудия, жилище);

в) установление однозначного соответствия (оружие – охотники);

г) замена конкретного множества другим, более абстрагированным от качественных особенностей (насечки на кости, дереве);

д) простейшие парные соотношения (2 руки, день и ночь, тепло и холод и т.д.).

Нанесение, например, древними людьми параллельных насечек на кости фиксировало количество каких-либо предметов (орудий для охоты, участников охоты и т.п.), т.е. условная фиксация количества появилась намного раньше отвлеченного натурального числа. "Фиксация количества элементов во множестве с помощью, скажем, нарезок и его обозначение –

числительным – это совершенно разные когнитивные процессы" [70, с. 23]. Но из умения пользоваться данной операцией, т.е. заменой конкретного множества другим, еще не следует, что у человека формируется понятие числа. Количество предметов определяется с помощью взаимно-однозначного соответствия, без "сосчитывания" самих предметов. Таким образом, вначале было установление взаимно-однозначного соответствия между конкретным множеством и другим множеством-посредником, элементами которого могли служить камешки, палочки, насечки на кости. Это был первый шаг на пути к формированию понятия числа.

Словесная фиксация количества была следующим шагом в приближении к понятию числа. Потребовалось достаточно много времени для того, чтобы было понято, что для подсчета различных предметов удобно иметь единый "инструмент" – множество, с которым соотносились бы пересчитываемые предметы. Таким множеством чаще всего служило множество пальцев рук и ног человека. У некоторых народов, например, у чукчей, количество из пяти элементов до сих пор обозначается словом "рука", из десяти – "две руки", из пятнадцати – нога, двадцати – человек". В процессе моторно-зрительного счета в языке появляются первые числительные – один, два, и т.д. Причем это были "именованные числа": две руки, 5 баранов, 10 овец, 7 жен, т.е. первоначальное число не отделялось от природы сосчитываемых элементов множеств, оно было конкретным и связанным с совокупностью определенных предметов, а не абстрактным, которое является объектом математики.

Абстрактное понятие отвлеченного числа сложилось значительно позднее. Тот факт, что 3 козы и 3 жены имеют нечто общее, т.е. то, что их – "три" – отнюдь не очевиден (маленькие дети этого не понимают, но они хорошо отличают одну козу от трех). Когда произошло отвлечение от природы объектов и установилось отношение между группами объектов (пальцы – камни, козы – жены и т.д.), возникло представление о натуральном ряде чисел.

Развитие понятия натурального числа имеет свое продолжение и заключается в отыскании способов обозначения чисел, позволяющих характеризовать любые множества так, чтобы при этом сами числа могли бы легко заучиваться и использоваться. По сути дела ставится вопрос о системе счисления.

В процессе формирования математического счета и появления понятия целого числа К.А. Рыбников выделяет следующие логические этапы: [80, с.52].

1. Идентификация элементов множества, отвлечение от ряда их индивидуальных свойств, частных особенностей.

2. Сравнение множеств путем операции поэлементного сопоставления (в ходе обмена, например).

3. Выделение множеств, играющих роль эталона при сопоставлениях (пальцы рук и ног, наборы камешков).

4. Возникновение абстрактных понятий чисел, вначале небольших индивидуальных.

5. Сравнение натуральных чисел по их величине, формирование конечного ряда натуральных чисел, удлинение ряда.

6. Появление обозначений для чисел, развитие числовой символики.

7. Формирование систем чисел и систем символов.

На ранних этапах математического знания первоначальное количество чисел было сильно ограничено и состояло из: один, два, много, т.е. числа больше двух, обозначались словом "много". Хотя справедливости ради следует отметить, что споры по поводу того, является ли единица числом или нет велись вплоть до XIV века. С. Стевин (1548-1620) приводил следующие аргументы в пользу того, что единица есть число: "1) части имеют ту же природу, что и целое; поэтому если целое есть число, то его часть – единица – также есть число; 2) если из данного числа вычитается то, что не является числом, то число должно оставаться прежним, но если из числа вычесть 1, число не останется прежним. Значить, нельзя утверждать, что 1 не есть число" [31, с. 154].

Нуль признан числом лишь в XVII веке. В Древней Индии для обозначения отсутствующего разряда числа рисовали кружочек и обозначали "сунья", что значит "пустой". При переводе этого слова на арабский получили слово "сифр". Заимствовав от арабов этот термин, европейцы осуществили транскрипцию слова "сифр" как "цифра", которое и вошло в математический тезаурус для обозначения десяти значков для записи чисел 0,1,2,3,...9. Само же название "нуль" происходит от латинского *nullus* – никакой. Именно это слово имело место для названия числа нуль в латинских рукописных переводах с арабского языка.

Следующим этапом в развитии математики после появления натуральных чисел стала организация их в системы. Для ранних периодов истории культуры народов характерно разнообразие числовых систем, каждая из которых имела определенное основание. Вероятно до того, как человек пришел к десятичному счислению, он пользовался при счете пальцами руки. Это привело к созданию пятеричной системы счисления, следы которой сохранились в римской нумерации, где в записи чисел фиксируется способ их получения из чисел 1 и 5 путем сложения или вычитания: VI=V+I, VII=V+II; VIII=V+III, IV=V–I, IX=X–I.

Система римского счета основана на трех принципах:

1). Буква, повторяемая дважды или трижды, удваивает или утраивает свое значение (III=3, XXX=30, CC=200 и т.п.).

2). Одна или более букв, помещенных после другой буквы большего значения, увеличивает значение этой буквы на величину более мелкой (VI=6, LXX=70, MCC=1200, где X=10, L=50, C=100, M=1000)

3). Буква, помещенная перед другой буквой, имеющей большее значение, уменьшает это значение на величину более мелкой буквы (IV=4, XL=40, CM=900).

4). Горизонтальная черта, помещенная над буквой, увеличивает ее значение в тысячу раз ($CX = 110$, $\overline{CX} = 110000$).

Знакомство учащихся начальной школы с римской системой счисления можно начать при изучении чисел первого десятка. При этом интересны могут быть следующие задания:

– Запишите число 7 с помощью четырех спичек, шесть – с помощью трех, десять – с помощью двух (Речь идет о их записи в римской системе счисления.).

– У меня 3 спички. Если я к ним прибавлю еще две спички, то получу восемь. Как это может случиться? (VIII)

– Доказать "на спичках", что 9 без 3 равно четырем, а 11 без трех равно шести, 10 без двух равно пяти.

Учитель сам может придумывать аналогичные задания и предлагать их в соответствующих темах, в разделе "Повторение" или во внеклассной работе.

К непозиционным относится и славянская нумерация, которой пользовались на Руси. В ней цифры обозначались буквами церковного алфавита. Для того, чтобы буква стала числом, наверху ставили особый знак "титло" (~). Например, число 20 изображалось $\tilde{К}$.

Египетская система счисления также была непозиционной. В ней числа от 1 до 9 изображались с помощью соответствующего количества черточек: I(1), II(2), III(3), IIII(4), $\dfrac{III}{II}$(5), $\dfrac{III}{III}$(6), $\dfrac{IIII}{III}$(7), $\dfrac{IIII}{IIII}$(8), $\begin{array}{c}III\\ \hline III\\ \hline III\end{array}$(9);

10 изображалось – ∩; (стилизация сомкнутых рук) 20 – ∩∩, и т.д., 100 – С.

Однако в непозиционных системах счисления очень сложно выполнять арифметические действия над числами, особенно непреодолимы трудности, связанные с умножением и делением. Поэтому постепенно произошел переход от непозиционных систем счисления к позиционным. Были разработаны пяти –, десяти –, двенадцати, шестидесятиричные, двоичная системы счисления. Разные народы выбирали то или иное основание системы. Это имело свои исторические корни. Вавилоняне предпочли число 60, англичане – 12 (счет дюжинами). Двенадцатеричная система у некоторых народов связана с тем, что используется лунный календарь (12 оборотов Луны вокруг Солнца, 12 знаков Зодиака). Остатки шестидесятиричной системы счисления мы находим, например, при делении 1 часа на 60 мин; 1 минуты на 60 с.

Двоичная система счисления возникла на востоке около 4 тыс. лет до н.э. В двоичной системе счисления все числа записываются всего с помощью двух цифр: 0 и 1. Так, например, число $4=2^2$ обозначается – 100, а число $13=2^3+2^2+1$ записывается как 1101. То обстоятельство, что при пользовании двоичной системой счисления требуется только 2 цифры, послужило основанием очень важного ее использования – в электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Введение позиционной десятичной системы счисления объясняется удобством ее применения, так как у человека при себе всегда есть 10 предметов посредников (пальцы). Известный русский математик Н.Н. Лузин акцентирует на это внимание, заявляя, что если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалась бы восьмеричной системой. Ученые, между тем, считают, что двенадцатеричная система счисления была бы удобнее в обиходе, чем десятичная, т.к. число 12 имеет четыре делителя, кроме самого себя и единицы, (делится без остатка на 2, 3,4, 6), а число 10 только два делителя (2 и 5).

Если проследить историю науки, то наибольший вклад в развитие философии, математики, естествознания внесли древние греки. "Теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено обращаться к грекам" [97, с. 340–341]. В древней Греции сформировался культ числа. Пифагорейская школа в основу своего учения ставит число, считая его истоком, сущностью бытия. В школе Пифагора были убеждены, что "мир управляется числом и мерой". Числам приписывались мистические свойства: одни несут добро, другие – зло, третьи – успех.

При этом единица считалась зародышем числа, а не собственно числом, так как положительное число есть множество единиц, а единица не реализует эффект множественности. Древние греки не признавали и нуль в качестве числа. Единица – символом славы и могущества. Пифагор и его единомышленники ставили единицу выше всех чисел, считали, что именно она является началом всего, что именно от нее пошел весь мир, что единица – "героиня", "прима" всякого счета.

Древние греки утверждали, что 2 – символ любви и неустойчивости. Это мягкость и тактичность, стремление сгладить острые углы. Число 2 находится между светом и темнотой, теплом и холодом, богатством и бедностью.

В далекие годы люди с большой трудностью научились считать сначала до двух и только через много-много лет начали в счете двигаться вперед. Каждый раз за двойкой начиналось что-то неизвестное, таинственное.

Когда считали "один, два, много", то после двух было "все". Поэтому число 3, которое идет при счете за числом 2, обозначает "все". Долгое время число 3 было для многих народов границей в счете, символом полноты, точности.

Древние люди считали число четыре символом устойчивости и прочности. Оно представлено квадратом, четыре стороны которого обозначают четыре стороны света, четыре поры года, четыре стихии – Огонь, Землю, Воздух и Воду.

Числу пять математик Пифагор отводил важное место, считал его самым счастливым из всех чисел. Для древних людей число 5 было символом риска, ему предписывали непредвиденность, энергичность и независимость.

Пифагор считал 6 сверхъестественным числом, потому что оно обладает отличными качествами: получается в результате сложения или умножения всех чисел, на которые делится. Шесть делится на 1,2,3 и если сложить или перемножить эти числа, то снова получится 6: $1+2+3=1\cdot2\cdot3=6$. Такими особенностями не обладает ни одно другое число.

Особенно большим уважением в древности было окружено число 7. Еще в древнем Вавилоне были известны семь планет, к которым присоединяли тогда Солнце и Месяц. Все непонятные явления природы приписывали богам, представления о которых постепенно соединились с семью планетами. По планетам стали исчислять время. Так родилась семидневная неделя. Название дней связали с именами богов. Семь стало священным числом. Его считали магическим потому, что человек воспринимает окружающий мир (звук, запах, вкус, цвет) через семь "дырок" в голове (два глаза, два уха, две ноздри, рот). Приписывая числу 7 таинственную силу, знахари нередко давали больному семь разных лекарств, настаивали на семи травах и рекомендовали пить их семь дней. В радуге 7 цветов и неслучайно на свете семь чудес.

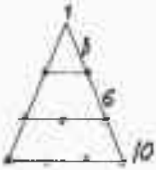
Сказочное число 7 широко использовалось в сказках, мифах древнего мира. Одиссей семь лет был в плену у нимфы Калипсо. У вавилонцев подземное царство окружено семью стенами. Мусульмане считают, что небосвод состоит из 7 небес. У индусов есть обычай дарить на счастье семь слоников. Великий христианский пост тянется семь недель.

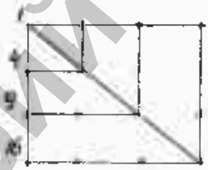
Число 8 древние люди считали воплощением надежности, которая доведена до совершенства. Оно символизируется двойным квадратом. Когда поделишь это число пополам, оно будет иметь равные части (4;4). А если эти части поделить еще раз, то вновь полученные части тоже будут равными (2,2,2,2).

Таинственную силу приписывали числу 9: в одно время добрую, а в другую – недобрую. У древних греков за этим числом закрепилась добрая слава. Так, жюри на Олимпийских играх состояло из 9 судей, существовало 9 муз – заступниц науки и искусства. Почему греки так относились к 9? Просто они уже давно умели считать до десяти, и потому это число их не пугало. Оно было признаком полноты, достатка, а не чем-то неизвестным, темным.

Число 10 выступало в древности символом гармонии и полноты. Десяток стал основой десятичной системы счисления, которую используют во всем мире.

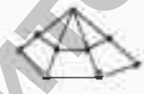
Пифагорейцы уделяли много внимания теории чисел, которую они отличали от низкой науки арифметического счета. Пифагор и его ученики воспринимали числа довольно конкретно как точки, расположенные по геометрическим фигурам. Такое понимание чисел привело их к исследованию чисел треугольных, квадратных, пятиугольных, т.е. таких, из которых можно построить перечисленные фигуры, если представить их в виде соответственно расположенных точек.





$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$



$$1+4+...+(3n-2)=\frac{4(3n-1)}{2}$$

Античные математики очень важным считали изучать вместе с каждым числом все его делители, причем числа, имеющие много делителей называли избыточными, а мало – недостаточными. В качестве меры числа бралось не количество делителей, а их сумма (за исключением самого себя), и сравнивали с этим числом. Например, для числа 9 сумма делителей:1+3=4, 4<9, следовательно, 9 – недостаточное число. Для 24 сумма делителей: 1+2+3+4+6+8+12=36, 36>24, следовательно, 36 – избыточное число.

Интересными являются так называемые совершенные числа, т.е. такие, у которых сумма делителей (включая единицу, но исключая само число), равно данному числу, например, 6=1+2+3. Предполагают, что совершенные числа были известны уже в Древнем Вавилоне и Древнем Египте. Во всяком случае, вплоть до V-го века н.э. в Египте, где сохранялся пальцевой счет, рука с загнутым безымянным пальцем и выпрямленными остальными изображала 6 – первое совершенное число. Тем самым этот палец как бы стал причастен к совершенству и потому получил привилегию нести на себе обручальное кольцо.

Евклидом (III в до н.э.) была доказана теорема о нахождении совершенных чисел:

Теорема Евклида: В тех случаях, когда число $p=1+2+4+8+...+2^n=2^{n+1}-1$ –простое, число $2^n \cdot p$ является совершенным.

Например, число $p=7=2^3-1$ - простое, значит число $2^2 \cdot 7=28$ – совершенное. Действительно, сумма делителей числа 28 равна $1+2+4+7+14=28$, т.е. это число совершенное.

Эти страницы истории интересны и доступны даже младшим школьникам. После того, как дети познакомятся с названием чисел при делении (делимое, делитель, частное), можно предложить им найти все делители числа 6. Потом рассказать о совершенных числах, к которым и относится число 6.

При изучении последующих таблиц (с числами 4,5,6,7,8,9) учеников можно познакомить с совершенным числом 28, а также с "избыточными" и "недостаточными" числами.

Были найдены древними греками так называемые "дружественные" числа. Числа a и b они называли дружественными, если сумма делителей первого числа равна второму и наоборот. Примером являются числа 220 и 284:

сумма делителей числа 220: $1+2+4+10+5+20+11+22+44+55+110=284$;
сумма делителей числа 284: $1+2+4+71+142=220$.

По преданию на вопрос: "Кого следует считать другом?", Пифагор ответил: "Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284".

Нахождением дружественных чисел занимались такие известные математики, как Пифагор, Евклид, Декарт, Эйлер.

Знакомство школьников с дружественными числами возможно уже в начальных классах при изучении темы "Умножение и деление" в концентре "Тысяча". Здесь же можно познакомить их с еще одним трехзначным совершенным числом 496, сумма делителей которого равна этому числу.

Среди натуральных чисел интересны так называемые пифагоровы тройки (3,4,5;6,8,10;5,12,13). Это три числа a, b, c, которые удовлетворяют условию $a^2+b^2=c^2$ (*). В такой тройке чисел интегрируется их геометрическая и арифметическая сущность: если в треугольнике стороны будут равны 3, 4 и 5 см (дм) соответственно, то один из углов треугольника будет прямой и наоборот, если треугольник – прямоугольный, то длины сторон будут образовывать пифагорову тройку, характеризующуюся указанным выше равенством (*). Древнегреческий ученый Платон считал, что тройка (3, 4, 5) – это символ супружества. Он истолковал катет длины 4 как женское начало, вертикальный катет 3 как мужское начало, а гипотенузу как их потомство. В древности пифагоровы тройки использовались на практике – в землемерном деле, в архитектуре, на что имеются ссылки даже в Библии. Там, например, повествуется, что при построении скинии использовались ковры, основной квадрат которых имел измерение 3×4 локтя (исход 37.10), а при возведении Соломонова храма были изготовлены подставки для жертвенных чаш с боковыми гранями размером 3×4 локтя (1 кн Царств., 7.27). Упоминание этих чисел в связи с великими святынями иудеев должно выражать нечто больше, чем просто гордость практически полезным знанием. Возможно, тройка (3, 4, 5) воспринималась как место соединения духовного и материального мира.

Рассказать младшим школьникам о пифагоровых тройках можно при решении задач на построение прямоугольных треугольников или при вычислении суммы длин всех сторон (периметра) прямоугольного треугольника, которых в учебниках предлагается достаточно много. Например, на сторонах прямого угла отложить 3 см и 4 см. Соединить полученные точки и измерить третью сторону треугольника (5см). Учитель: "Треугольник со сторонами – 3, 4, 5 называется египетским. Он имеет интересное свойство, которое вы сейчас откроете сами. Умножьте длину каждой стороны треугольника саму на себя. Сложите два меньших из полученных произведений. Вы получили большее произведение". Таким образом, можно, по сути дела, в неявном виде подойти к теореме Пифагора.

Классификация чисел на четные и нечетные также приписывается пифагорейцам, причем четные числа они называли "женскими", а нечетные "мужскими". Платон утверждал, что арифметика есть учение о четных и нечетных числах. Пифагорейская школа (VI–V вв. до н.э.), по свидетельству Аристотеля, включила в таблицу своих категорий и противопоставление четного и нечетного, из которой уже в Древней Греции возникла распространенная игра в "чет и нечет".

В Древней Греции (Платон, Евклид) давали определение четного числа как числа, разбивающегося на два одинаковых натуральных слагаемых, указывали, что четные и нечетные числа встречаются в равном количестве. Евклид определил нечетное число как число, отличающееся от четного на единицу и не разбивающегося на два одинаковых слагаемых. Решая предложенные задачи, дети убеждаются, что действительно любое четное число можно представить как сумму двух одинаковых чисел, например, 6=3+3, 8=4+4; 10=5+5, а нечетные числа нельзя. Сумма двух четных чисел будет обязательно четной, например, 4+4=8; 6+8=14; сумма трех нечетных – нечетным, так как сумма двух нечетных – четное число, а четное и нечетное – нечетное. (3+5+7=15, 3+5=8; 8+7=15).

Рассказывая о четных и нечетных числах, учитель может предложить учащимися решить следующую задачу:

1. Найти кратчайшим путем сумму четных чисел от 2 до 16 включительно, т.е. 2+4+6+8+10+12+14+16:

Наблюдательный ребенок заметит, что суммы двух чисел, равностоящих от концов этой последовательности, одинаковы, т.е. 2+16=18; 4+14=18; 6+12=18; 8+10=18. И таких сумм будет 4, т.е. общая сумма всех указанных четных чисел равна 18·4=72.

2. Найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 15. Аналогично решая, получаем 16·4=64.

При изучении темы "Четырехзначные числа" можно вернуться к заданиям этого вида. Например:

"Избавляя себя от лишних вычислений, найти сумму всех четных чисел от 2 до 100 включительно".

2+100=102; 4+98=102… 46+56=102; 48+54=102; 50+52=102. И таких пар будет 50. Следовательно, сумма всех четных чисел от 2 до 100 равна 102·50=5100.

Тут же уместно будет рассказать учащимся о первом собственном открытии великого немецкого математика К. Гаусса. В третьем классе, где он учился, учитель предложил найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. В решении мальчика ярко проявилась его математическая зоркость. Ему оказалось достаточным взглянуть на запись задания 1+2+3+…+98+ +99+100, чтобы заметить, что сумма каждой пары слагаемых, которые одинаково отстоят от концов записанного выражения, равна 101 (1+100; 2+99; 3+98; … 50+51). А таких пар, рассуждал К. Гаусс, в 2 раза меньше, чем слагаемых, т.е. 50. Выходит, что вся сумма равна 101·50=5050.

Говоря о многозначных числах, учитель должен сделать акцент на их практической значимости, т.к. мы с ними встречаемся в повседневной жизни, делая какие-либо расчеты или читая о достижениях науки и техники. С другой стороны, основываясь на философском единстве конечного и бесконечного, учителю необходимо подвести учащихся к осознанию идеи бесконечности натурального ряда чисел. И здесь без знакомства учеников с большими числами не обойтись.

Например, миллиард (реже его называют биллионом) – это единица с девятью нулями (10^9). Многим известен и триллион – единица с 12 нулями. Названия еще более крупных чисел мало распространены, поскольку для экономии места их обычно записывают как степени десяти да так и произносят: например, десять в двадцать четвертой степени. Все же приведем несколько названий числовых великанов: 10^{15} – квадрильон, 10^{18} – квинтильон, 10^{21} – секстильон, 10^{24} – септильон, 10^{27} – октильон, 10^{30} – нональон, 10^{33} – декальон.

В Древней Руси применялись элементы практической арифметики и геометрии. Существовали специальные названия для больших чисел. Кирик Новгородец в XII веке называл 10000 "несведи". В рукописях XVII века применялись наименования "тьма" =10000, "легион" =10 тем =100000, "леодр" =10 легионов = 1000000.

Американский математик Кастнер (XXвек), чтобы приобщить своих учеников к манипулированию большими числами, изобрел "самое большое" число, назвав его "гугол". Это единица со ста нулями, то есть 10^{100}. Хотя натуральный ряд чисел бесконечен и в принципе нельзя назвать такое большое число, к которому мы не могли бы прибавить хотя бы единицу, чтобы оно стало еще больше, однако гугол в определенном смысле представляет собой границу исчисляемого мира. Дело в том, что во всей Вселенной невозможно найти гугол чего бы то ни было. Даже современный компьютер не может достичь гугола путем простого сложения: 1+1+1+1… за все время существования Вселенной, хотя за несколько минут пришел бы к нему путем геометрической прогрессии.

Деление чисел на четные и нечетные в истории математики положило начало такой науке о числах как теоретическая арифметика.

В начальной школе учащихся знакомят с так называемыми магическими квадратами. Впервые о таких квадратах ученики узнают в подготовительном классе при выполнении заданий следующего содержания: "Запиши в свободных клеточках числа 4, 6, 7, 8, 9 так, чтобы сумма чисел в каждом ряду и столбце равнялась 15" или "Проверь, являются ли квадраты магическими".

	1	
	5	3
2		

Так что же такое магические квадраты? Учащимся будет небезынтересно узнать, что числа в них расположены таким образом, что их сумма по строкам, столбцам и диагоналям одна и та же. Это – основное свойство любого магического квадрата. В самом древнем из известных магическом квадрате сумма равна 15. В другом, древнеиндийском, сумма равна 34.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

В далеком прошлом отсталые, суеверные люди считали все эти необычайные свойства таинственными. Отсюда произошло и название этих, известных еще древним арабам и индусам квадратов,– магические, или "волшебные". В Европе они появились в XV веке благодаря византийскому писателю Мосхокуло. Средневековые звездочеты верили в магическую силу таких квадратов. По их убеждению они могли служить талисманом против чумы. Однако магические квадраты представляют известный интерес и в науке о числе, поэтому ими занимались некоторые видные ученые. Например, знаменитый французский математик XVII века П. Ферма. Но и в наше время математики не пренебрегают вопросом о магических квадратах.

Итак, пифагорейцы считали, что все сущее может быть определено с помощью числа, основной элемент их учения: первоначально есть число. Философское учение пифагорейцев о числе нашло отражение в известном афоризме Л. Кронекера "Господь бог создал натуральное число, все остальное дело рук человеческих". Борьба вокруг этого положения остается весьма проблематичной в зарубежной философии, психологии и истории математики.

Можно вспомнить и известные слова И. Канта, что понятие натурального числа является врожденным, априорным, которым люди владеют до всякого опыта [42, с. 21–24, 39–46, 48–50]. Это свидетельствует о том, что учение Платона о врожденных идеях применяется в контексте математики.

Поскольку арифметика – наука, которая изучает числа и операции над ними, необходимо остановиться на истории введения арифметических операций. До XV века почти не было стабильных общепринятых арифметических знаков. В XV-XVI веках операции сложения и вычитания обозначались буквами соответственно p (первая в слове plus, означающее более), для вычитания – буква m (первая в слове minus – менее.) Для сложения употреблялось также латинское слово et (означающее "и"), которое, как полагают, в скорописи постепенно превратилось в знак "+". Знаки "+" и "-" встречаются в рукописях в начале 80-х годов XV века, но в печати впервые появляются в "Арифметике" Видмана. В XVII веке "минус" обозначали и знаком ÷ возможно для того, чтобы не смешивать знак минус со знаком препинания (тире). Знак ÷ используется и в "Арифметике" Л.Ф. Магницкого.

Знак умножения "×" введен в 1631 году английским математиком Вильямом Оутредом (1574 – 1660). Точкой для обозначения умножения систематически пользовался знаменитый немецкий математик XVII века Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716). Он же ввел и двоеточие для обозначения действия деления.

Знак "=" был введен английским врачом Робертом Рекордом в 1557 году.

Цифры, используемые для записи чисел, знаки арифметических действий являются частью математической символики, которая позволяет сжимать информацию, делать ее обозримой и удобной для последующей обработки.

После понятия натурального числа довольно рано возникла потребность введения так называемых аликвотных дробей (дробей вида 1/n), а поскольку доли – это и есть аликвотные дроби, то о них можно будет сообщить ученикам начальной школы. Каждую дробь легко представить в виде суммы дробей с числителем равным 1 и одинаковыми знаменателями, например, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, но можно и с помощью других аликвотных дробей. Например, в папирусе Ринда, которому уже более 3700 лет, используется следующая замена:

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Школьникам можно предложить отыскать дроби, представленные в виде суммы аликвотных. Например,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}.$$

Обратимся к истории возникновения величин. Поскольку именованные числа были промежуточным этапом в становлении понятия натурального числа, то логично предположить, что понятие величины исторически предшествует понятию натурального числа. Еще в античности Евдоксом (IV в. до н.э.) произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом:

1. Если а=в и с=в, то а=с.
2. Если а=с, то а+в=с+в.
3. Если а=с, то а–в=с–в.
4. Совмещающиеся равны.
5. Целое больше части.

Если исходить из реальных практических истоков математики, то естественно предположить, что первыми возникли величины, связанные с измерением длины, массы, времени. Эволюция измерения длин, как процесса сравнения с выбранным эталоном, проходила ряд этапов.

Первые единицы длины люди нашли на подвижных частях своего тела – руках и ногах. Так, например, малой единицей длины была взята длина сустава пальца, называемая дюймом (1 дюйм =2,54см.). Мера длины, равная 0,1дюйма, называлась линией (очевидно потому, что ее можно было отложить при помощи линейки). К наиболее мелким старинным русским мерам длины относится точка, равная 0,1 линии. Эта весьма малая мера, видимо, в свое время была пределом совершенства в измерениях, и, возможно, так появилось слово точность. За большую была взята ступня ног человека, названная фут (1 фут = 12 дюймам = 30,5 см). За еще большую единицу принимали локоть, который использовался при измерении длины ткани (1 локоть=54см). Следующая единица – шаг, названный нашими предками аршином, равен 71 см. Далее сажень – 2,134м, который определяется расстоянием от ступни человека до конца пальца вытянутой вертикально руки.

Для сравнения приведем старобелорусские единицы длины:

а) XV – XVIII век.
Цаля =2,7 см.
Перст = 2,7 см.
Стопа = 12 цалей =32,5 см.
Прентик =0,75 локтя =48,7 см.
Локоть =24 цали =64,96 см.
Сажень =3 локтя =194,82 см.
Аршин = 2,7 м (в старобелорусский период)
Прут, прент = 7,5 локтя = 4,87 м.
Шнур =75 локтей = 48,7 м.
Верста =798 саженей = 15554,7 м.
Верста большая = 1000 саженей = 1948,2 м.
Миля = 5 верст = 7,798 км.
Гони, гон, стая = около 80–100 м, протяженность, от одного конца поля до другого.

б) с XIX по начало XX века.
Точка ≈0,25 мм.
Линия = 10 точек =2,54 мм.
Вершок = 4,44 см.
Четверть =17,77 см.
Верста =1066,8 м.
Миля =7,467 км. (Морская миля в СССР = 1,852 км.). А также использовались дюйм, аршин, сажень и фут.

Следующий этап связан с установлением при феодализме в каждом владении своих обязательных мер длины. Это объясняется тем, что размеры человеческого тела различны и колеблются около некоторого среднего значения. Так, например, локоть был московский, варшавский, краковский и т.д. Точно также до XVII века применялся сажень=153см, в первой половине XVII в. -189 см, а во второй половине – 216см. В России Петр 1 дал указ о клеймении мер, чтобы их нельзя было "ни урезать, ни упиловать". Только после этого сажень стал иметь длину 213см.

Третий этап связан с введением метрической системы. Метрическая система мер впервые была утверждена французским Конвентом 1 августа 1889г с целью избежания путаницы и злоупотреблений, возникающих вследствие множества различных мер для установления одной общей системы мер. Первая международная конференция мер была в Париже в

1889г. С 1889 г десятичная система мер начинает постепенно использоваться и в других странах, в том числе и в России.

Эволюция единиц измерения массы тел также проходит 3 стадии.

1.Сначала измеряли сыпучие тела (рожь, пшеницу, овес и другие зерновые культуры) и жидкие тела (масло, мед, вино и др.) только мерами емкости: кадками, коробами, кулями, мешками, ведрами, кружками.

2. Но уже в Египте и Вавилоне (за 2000 лет до нашей эры) появились весы и гири. В средние века уже обращалось внимание на правильность взвешивания. Княжеские уставы предписывали церквам "всяческая мерила и спуды, и свесы, и ставила… блюсти без пакости, ни умалити, ни умножити".

Единицей веса у нашего народа являлся пуд (спуды – подавать). 1 кадь =14 пудов делилась на 2 половника или 4 четверти. 1четверть=2, 09 гектолитра, гарнец=3,279литра.

Бочка =40 ведер= 4,9 гектолитра, ведро= 10 штофов=12,299 литра, штоф = 2 бутылки= 1,299литра, бутылка=0, 6149 литра.

Кроме перечисленных выше к концу XVII века сложилась следующая система русских мер: 1ласт= 72 пуда, берковец= 10 пудам, фунт= 409,5г, золотник=4, 266г.

3. Возникновение метрической системы масс: 1кг и его производные, (грамм, тонна и др.).

Для сравнения приведем старобелорусские единицы массы:

а) XV–XVII вв.

Меры сыпучих вещей и жидкостей:

Полбочак =813 л.
Бочка виленская =406,54 л.
Корец =101,62 л.
Солянка =67,75 л.
Осьмина =51 л.
Медница =19,76 л.
Горнец маленький =2,8237 л.
Горнец большой =5, 6474 л.
Шанок старый =48 гарцев.
Барило =60 л.
Ведро =11,28 л.
Четверть = 3 л.
Кварта =0,7 л.
Полкварта = 0,35 л.
Кватерка =0,175 л.

Меры массы:

Лашт = 120 пудов.
Кап = 12 пудов.
Беркавец = 74,96 кг.
Кантар = 37,482 кг.
Пуд = 15–18,7 кг.
Фунт =360–450 г.
Пундель =9,37 кг.
Безмен = 6–10 фунтов.
Камень =14,993 кг.
Око = 1,12 кг.
Литра =280,8 г.
Гривна = 195,5 г.
Лот = 11,71 г.
Золотник = около 3,9 г.

XVIII–XIX вв.
Кадь = 839,64 л.
Ласт =2518,82 л.
Юфть = 419,82 л.
Четверть = 209,91 л.
Осьмина = 104,955 л.
Четвярик = 26,239 л.
Гарнец =3,2798 л.
Четвертка = 6,56 л.
Осьмушка = 3,28 л.

Меры жидкости:
Мерник =4 десятни.
Десятня = 10 ведер.
Ведро = 12,29 л.
Кружка = 1,53 л.
Фунтовик – 2 полфунтовика.

Меры массы у многих народов связаны с денежными единицами. Причина этого кроется в том, что до употребления чеканных монет денежными единицами служили единицы массы металла. Так у древних римлян асс служил основной единицей измерения массы, а также денежной единицей и делился на 12 равных частей – унций. Три унции назывались четвертью, четыре унции – третью, шесть унций – половина. Характерен следующий отрывок из произведения знаменитого римского поэта 1 века до н.э. Горация о беседе учителя с учеником в одной из римских школ этой эпохи:

"Учитель. Пусть скажет Сын Альбина, сколько останется, если от 5 унций отнять 1 унцию?

Ученик. Одна треть.

Учитель. Правильно, ты сумеешь беречь свое имущество".

И еще один пример: название "английский фунт" есть и денежная единица (фунт стерлингов) и единица массы, равная 409,5 грамма.

В России сначала появились кожаные деньги, а потом металлические. Русская монетная система с 1530 года практически опиралась на один номинал – крохотную (массой менее полуграмма) серебряную монетку, названную "копейкой" по изображению на ней воина на коне с копьем в руке. С этой монетой связан так называемый "медный бунт" в 1662 году, когда по приказанию царя Алексея Михайловича вместо серебряной стала выпускаться медная копейка.

Печатал копейку и Лжедмитрий I, и Владислав Жигимонтович, изгнанный из Москвы народным ополчением Минина и Пожарского. Распространение тогда же получила деньга (полкопейки) и еще более мелкая – полушка (четверть копейки).

При Петре 1 были выпущены серебряные гривенники (в 10 копеек), полтинники (50 копеек), продолжалась чеканка копейки.

Первые русские бумажные деньги были выпущены в 1769 году.

Необходимость измерения времени в истории человечества связана с такой практической деятельностью человека, как земледелие, собирательство и т.п. Древние египтяне заметили, что разлив Нила так необходимый для земледелия, начинается вскоре после появления на небе звезды Сириус. Эти и другие примеры свидетельствуют о том, что первый этап эволюции единиц измерения времени связан с периодичностью явлений природы: смена дня и ночи; смена времен года (разлив рек, цветение, созревание, отлет и прилет птиц и т.д.); смена формы луны от новолуния к полнолунию. Все это послужило первым шагом к ориентировке во времени.

Второй этап в эволюции единиц измерения времени связан с общественным развитием человечества. При образовании древних государств усилилась потребность в указаниях дат, законов, распоряжений, заключений, сделок и т.д., вообще в измерении времени. В 46 году до н.э. в Риме по поручению императора Юлия Цезаря, астрономы Созиген (из Александрии) и Флавий (из Рима) установили так называемый Юлианский календарь, представляющий собой систему счета дней, месяцев и годов и только во 2 веке н.э. астроном Птолемей разделил сутки на 24 равные части (часы.). Час делился на 60 минут, минута на 60 секунд. Появились первые инструменты для измерения времени – часы (песочные, водяные).

Началом 3 этапа в исчислении времени послужил переход в конце XVI века от Юлианского календаря на Григорианский. Это связано с тем, что в Юлианском календаре имелась неточность: в нем год в среднем исчислялся приблизительно на 11 минут меньше, чем реальная продолжительность полного оборота Земли вокруг Солнца. Ошибка незначительная, но за 130 лет приводит к потере целых суток. Юлианский же календарь действовал на протяжении почти 13 веков, что привело к потере 10 суток. Этот расчет проделал врач Лилио из Италии и в 1582 году убедил папу Григория XIII в необходимости перехода на новый стиль.

Перейдем к вопросу о возникновении начальных геометрических представлений. Оперирование древними людьми индивидуально воспринимаемыми пространственными телами постепенно привело к появлению геометрических абстракций (тело, фигура), позволяющих идентифицировать реальные объекты по сходству их геометрических характеристик. Следующим этапом было сравнение множеств сходных по этим характеристикам тел и выделение абстрагированного эталона – идеального тела. Абстрагирование такого рода связано прежде всего с формированием представлений о таких первичных понятиях, как точка, прямая. Представим себе, например, процесс "сжатия" круга, когда его диаметр стремится к нулю. В результате мы получим точку, т.е. нечто, что по выражению Евклида, "не имеет ни ширины, ни длины". Представим себе далее луч света, проникающий через маленькое отверстие в неосвещенную комнату. Если диаметр отверстия будет стремиться к нулю и мы продолжим луч в обе стороны, то получим прямую, что по описанию Евклида, "имеет длину, но не имеет ширины".

Данные истории материальной культуры убедительно доказывают, что еще в эпоху, когда люди пользовались кремневыми орудиями для труда и охоты, они придавали им преднамеренно геометризированную форму: треугольников, ромбов, трапеций. Конечно, эти формы образовывались постепенно и не вследствие стремлений к геометризации, а потому, что оказывались наиболее приспособленными к определенному виду труда, к тому, чтобы резать, рубить, скрести и т.п.

Дальнейший толчок развитию геометрических представлений дали ремесла: гончарное, строительное и др. Особенно сильное влияние оказало в этом направлении земледелие, когда задачи проведения границ участков, определения площадей, длин и т.п. сделались жизненно насущными. К этому времени и относят зарождение геометрии. Слово "геометрия", состоящее из двух слов, "гео" и "метрия", и означает "землемерие". Появление орнаментов на изделиях знаменовало уже закрепление представлений о равенстве, подобии, симметрии фигур. В своем дальнейшем развитии геометрия изучает формы тел, свойства фигур, их отношения и преобразования.

Как наука геометрия оформилась к III в до нашей эры благодаря трудам ряда греческих математиков и философов (Фалес, Пифагор, Гиппократ, Евдокс). И, конечно же, Евклиду, который привел в систему накопленные к тому времени знания, сделал геометрию аксиоматической и дедуктивной наукой. Его "Начала", изложенные в 13 книгах, на протяжении 2000 лет служили учебным пособием по геометрии. По мнению профессора П.В. Кикеля, "геометрия Евклида являет собой "первое отделение" количества в плоскости математической реальности, включающей в себя очевидное положение повседневного опыта. Ее положения, что вытекали из опыта и подтверждались опытом, уже были не объективной реальностью, а математической, живущей по собственным законам, которые в первую очередь "заставляют" математика отделить эту реальность от объективной" [45, с. 48].

В свете сказанного отметим, что рассмотрение истории возникновения числа, величины и геометрической фигуры является достаточно актуальным не только в истории науки, но и в учебном предмете "математика".

§2.2. Элементы истории математики при изучении целых неотрицательных чисел

В программе по математике для начальной школы нет конкретных указаний на то, что сведения из истории математики следует сообщать учащимся. Школьные учебники, как правило, таких сведений не содержат. Анализ ныне действующих учебных программ и учебников для начальной школы позволяет установить взаимосвязь элементов истории математики с изучением натуральных чисел. Источники по истории математики содержат богатый исторический материал, но его следует дидактически обработать, т.е. видоизменить так, чтобы элементы истории гармонично вливались в урок и в комплексе решали как образовательные и развивающие, так и воспитательные задачи.

Не претендуя на окончательное определение места использования элементов истории на уроках математики в начальной школе, предлагаем лишь один из вариантов введения исторических сведений в урок.

Подготовительный класс

Тема. Число и цифра 1.

Какое число вы любите больше всего? Вас удивляет такой вопрос: как можно любить или не любить какие-нибудь цифры, числа? Но не все так думают. Некоторые считают, что есть числа "плохие" и "хорошие", например, число 7 – хорошее, а 13 – плохое.

Впервые мистические отношения к числам возникло несколько тысяч лет тому назад. Особенным уважением были окружены числа в древней Греции. Знаменитый математик Пифагор утверждал, что числа управляют миром. Он создал школу единомышленников, которые верили в магию чисел и думали, что за каждым предметом стоит какое-то число. Числа, рассуждали они, несут с собой добро и зло, счастье и несчастье.

Была даже целая наука – нумерология, в которой каждое имя человека имело свое число. Если имя соответствовало характеру человека – это хорошо, если нет – плохо.

Пифагор и его ученики ставили единицу выше всех других чисел, считали, что именно она является началом всего, от нее произошел весь мир.

Тема. Число и цифра 3.

В далекие времена люди с большим трудом научились сначала считать до двух и только через много-много лет начали в счете двигаться вперед. Каждый раз за числом два начиналось нечто неизвестное, таинственное. Поэтому долгое время число 3 было для многих народов границей в счете, символом полноты. Число 3 обозначало весь окружающий мир – его делили на землю, подземное и небесное царство.

Число 3 стало для многих народов святым. В древнем Вавилоне поклонялись трем главным богам: Солнцу, Луне и Венере. Его называли еще счастливым или магическим, потому что оно состоит из суммы предшествующих ему чисел 2 и 1, а также символизирует треугольник, который представляет прошлое, настоящее и будущее.

Число 3 стало самым любимым в мифах и сказках. Помните сказки о трех поросятах, о трех медведях, трех братьях, которые три раза пытались достигнуть какой-то цели?

Тема. Число и цифра 5.

Первым счетным инструментом человеку служили пальцы рук или ног. Пальцы оказались так тесно связаны с числами, что на древнегреческом языке понятие "считать" выражалось словом "пятерить", которое происходит от слова "пятерия" - ладонь с расставленными пальцами. Знаки I и V, используемые в римской нумерации, напоминает нам один вытянутый палец и всю пятерню вытянутых пальцев руки, т.е. I – 1, V – 5.

Тема. Число и цифра 7.

Особым уважением в древности было окружено число 7. Отголоски этого дошли и до наших дней. Сегодня мы употребляем поговорки и пословицы типа "на седьмом небе" и т.д. Когда-то семь было наибольшим числом, что подтверждает пословица "семеро одного не ждут", где 7 употребляется в значении "все".

Семь считали священным числом. Так человек воспринимает окружающий мир (звук, запах, вкус, свет) через семь "дырок" в голове – два глаза, два уха, две ноздри и рот.

Рим и Киев были построены на семи холмах. Согласно индийским легендам, Будда сидел под фиговым деревом с семью плодами. Приписывая числу 7 таинственную силу, знахари нередко давали больному семь разных лекарств, настаивали на семи травах и рекомендовали пить их семь дней. В радуге семь цветов, в музыке семь нот и упоминание о семи чудесах света (пирамиды, висячие сады семирамиды, храм греческой богини Артемиды в городе Эфесе, Зевс Олимпийский, гробница царя Мавсола, колосс Родосский, маяк на острове Фарос) тоже неслучайно.

Тема. Число 15.

Интерес к изучению свойств натуральных чисел появился в глубокой древности вместе с возникновением понятия числа. Среди различных занимательных вопросов этой науки были удивительные свойства чисел в магических (волшебных) квадратах.

Числовой квадрат называют магическим, если суммы чисел каждого горизонтального, вертикального рядов и обеих диагоналей одинаковы. Например, для квадрата, состоящего из девяти клеток, таким магическим числом может быть 15.

Магические квадраты были известны в Китае и Индии еще до нашей эры. В Европе о них узнали в XVI в. В этот период самой страшной болезнью была чума, "черная смерть", как ее называли в народе. Считали, что человек, способный составить и заполнить магический квадрат, не заболеет чумой, т.к. волшебные квадраты обладают и некой оберегающей, целительной силой.

Тема. Числа первого десятка.

Сегодня математические символы, такие как "+", "−", "=", ">", "<", кажутся нам привычными и общепринятыми. Однако так было не всегда. Каждый математик пользовался своими символами. И лишь создание международных научных журналов в XVII – XVIII вв. выдвинуло вопрос о принятии общих интернациональных символом.

Знаки "+" и "−" появляются как бы случайно, возникновение их не ясно. Возможно, они были позаимствованы из торговой практики, где применялись для обозначения перевеса или недовеса.

Употребляемый в настоящее время знак равенства введен англичанином Р. Рекордом в 1557 г. с обоснованием: "Никакие два предмета не могут в большей степени быть равны между собой, как две параллельные линии" (7, с. 113). Знак "=" не сразу и даже не скоро нашел признание. Многие авторы употребляли для обозначения равенства знак "T".

Для обозначения неравенства в разные эпохи использовались различные знаки. Предложенные Т. Гарриотом в 1631 г. теперешние знаки ">" и "<" быстро получили всеобщее признание.

На судьбу математических знаков оказало влияние типографское оснащение. В типографиях не было наборного знака "=" и потому они не могли его дать в математических книгах, нужно было сначала заказать этот знак. В те времена это делалось нескоро. С другой стороны, для введения в употребление знаков ">" и "<" заказывать новые знаки не требовалось, т.к. в типографиях была латинская литера V, которая, будучи повернутой на бок, давала знаки ">" и "<".

Тема. Числа второго десятка.

Вы не задумывались над вопросом, как считали в глубокой древности? Люди научились считать очень давно и первым природным инструментов счета были пальцы рук. Затем и пальцы ног стали использовать при счете. Зная это, становится понятным, почему одно гренландское племя число 18 называет как "с другой ноги 3". Раскроем его смысл: число пальцев обеих рук 10, число пальцев одной ноги 5, и другой 3; итого 18. Сходным образом объясняется карибское наименование числа 18: "все мои руки, 3, моя рука", т.е. 18=10+3+5.

Сведения о результатах счета первоначально сохранялись при помощи засечек на дереве, на камне или узелков на веревке. О распространенности записей при помощи засечек свидетельствует выражение "заруби себе на носу". Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая иногда "для памяти" узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, записывая таким образом итог счета. Ряд веревок с завязанными на них узлами представлял собой счетный прибор, в принципе, аналогичный нашим счетам.

История свидетельствует, что царь Дарий после похода на Дунай выделил воинов для охраны построенного моста. Он приказал им возвращаться домой только после того, как развяжут последний узел на ремне, который он им оставил, но в день надо развязывать только по одному узлу.

Первый класс

Тема. Числа от 21 до 100.

Прислушаемся к звучанию некоторых чисел. Одиннадцать – один-на-десять, двенадцать – два-на-десять и т.д. А когда дошли до числа 19, пришлось задумываться? Название чисел, идущих за числом 19, стали образовывать иначе: "двадцать" – это два десятка, "тридцать" – три десятка. Дальше в русском языке произошла таинственная вещь. Число 40 долгое время называли "четыредцать". Но семьсот лет тому назад вместо этого появилось название "сорок". До сих пор ученые спорят, откуда взялось это слово. Многие считают, что оно произошло от слова "сорочка" (на полную шубу шло 40 штук соболиных шкурок).

В названиях чисел, следующих за числом 40, слово "дцать" исчезает. Появляются по-новому устроенные слова: 50, 60, 70, 80.

"Девятьдесят" показалось нашим предкам неудобным и это число стали называть "десяносто", т.е. "десять до ста", а потом звук "с" был заменен на "в" и число получило название "девяносто".

Второй класс

Тема. Четные и нечетные числа.

Деление натуральных чисел на четные и нечетные ввел греческий математик Пифагор 2500 лет назад. Но названия этим числам в пифагорейской школе были другие – четные числа называли "мужскими", а нечетные – "женскими".

Тема. Таблица умножения на 6.

Пифагор считал 6 удивительным числом, потому что оно обладает интересным отличительным свойством: получается в результате сложения всех чисел, на которые делится. Шесть делится на 1, 2, 3, и если сложить эти числа, то опять получим 6: 1+2+3=6. Никакое другое однозначное число не обладает такими свойствами, поэтому число 6 древние греки называли совершенным. Знаменитый греческий философ и математик Никомах Герасский, живший в I в., отмечал, что совершенные числа красивы, а красивые вещи редки и немногочисленны. До сих пор неизвестно, сколько имеется совершенных чисел.

Число 6 мы найдем и в природе: у всех насекомых 6 ног, а пчелы строят соты в форме правильного шестиугольника.

Тема. Таблица умножения на 8.

В Римской школе таблица умножения заучивалась только до 5, а дальнейшая ее часть восполнялась счетом на пальцах. Правило гласило, что для перемножения чисел *а* и *в*, которые оба больше 5 и меньше 10, нужно вытянуть на одной и другой руках столько пальцев, на сколько единиц данные числа, каждое в отдельности, превышают 5, сумма чисел вытянутых пальцев дает десятки произведения; к ним надо прибавить произведение чисел, соответствующих остающимся загнутым пальцам

Например, 7·8: 7–5=2, 8–5=3, 2+3=5 – число десятков. Загнутыми оказались 3 пальца на одной руке и два пальца на другой: 2·3=6 – число единиц; значит, 7·8=56.

Тема. Таблица умножения на 9.

Вот еще один из способов с помощью пальцев рук запомнить таблицу умножения на 9.

Положим обе руки рядом на стол, по порядку занумеруем пальцы обеих рук следующим образом: мизинец слева обозначим 1, безымянный цифрой 2 и т.д., большой палец левой руки получит имя "пять", а большой палец правой руки – "шесть". Последующие числа используем для обозначения остальных пальцев правой руки. Правый мизинец, таким образом, будет символизировать число 10. Если надо умножить на 9 любое из однозначных чисел, то для этого, не двигая рук со стола, надо загнуть тот палец, номер которого означает это число. Тогда число пальцев, слева от загнутого пальца определит число десятков, а число пальцев лежащих справа – число единиц произведения.

Этот способ был описан в учебнике по арифметике Магницкого.

<u>Третий класс</u>

Тема. Письменное умножение на двузначное число.

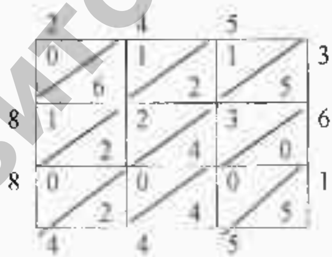
Мы не можем выполнить умножение многозначных чисел, если не помним наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т.е. таблицы умножения. Однако существует способ перемножать числа и без знания таблицы. Способ этот употребителен был в обиходе русских крестьян и унаследован от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа. Вот пример: 32·13⇒16·26⇒8·52⇒4·104⇒2·208⇒1·416. Последнее удвоенное число и дает искомый результат.

Как быть, если приходится делить пополам число нечетное? Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо, гласит правило, в случае нечетного числа отнять единицу и делить оставшееся четное число пополам; но зато в конце к последнему произведению нужно будет прибавить все те числа правого столбца, которые стоят в паре с нечетными числами левого столбца. Сумма и будет искомым произведением. Приведем пример:

19·17
9·34
4·68
2·136
1·272+17+34=323.

Тема. Письменное умножение.

В "Арифметике" Магницкого описывается способ умножения многозначных чисел под названием "решетка". Например, умножение числа 245 на число 361 этим способом примет следующий вид:



Поразрядно умножая число, записывали результаты в клеточки: число десятков над косой чертой, число единиц под ней. Затем производили сложение по диагоналям. Переход через разряд соответствует переходу на следующую диагональ. Получили:

245·361=88445.

Тема. Письменное деление многозначных чисел.

Мало кто подозревает, что нынешние способы выполнения арифметических действий не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату.

Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы современный школьник мог перенестись на четыре, на три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления – последнее всего больше. "Умноженье – мое мученье, а с делением - беда", - говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, единого выработанного практикой алгоритма для каждого действия. В ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления – приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый "магистр деления" (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия.

Способы эти носили подчас довольно игривые названия (умножение "кубком, или чашей", "алмазом", деление "лодкой, или галерой"); под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций.

Фрагменты уроков

Тема: Запись и чтение чисел в десятичной системе исчисления (Математика 4).

Цель: систематизировать знания о принципах нумерации чисел в десятичной системе счисления; познакомить учащихся с историей возникновения числа 0.

– Ребята, запишите цифры, которые используются для записи любых чисел (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.)

– Запишите число 30. Увеличьте его в 10 раз, 100 раз. Как изменилась запись числа? (Справа дописали еще 0, два нуля.) (30, 300.)

– Запишите число 7. Допишите справа один 0, два 0. Как изменилось число? (7, 70, 700.) (Увеличилось в 10, 100 раз.)

– Запишите в таблицу разрядов числа 102 и 12, 1905 и 195. Какой цифрой отличаются числа 102 и 12, 1905 и 195? (Цифрой 0.)

– Что обозначает цифра 0 в числах 102 и 1905? (Отсутствие разряда десятков в записи числа.)

– Оказалось, что 0 – удивительный значок, превращающий одно число в другое. Без него число 102 стало бы 12, а 1905 – 195.

В глубокой древности, когда еще не было цифры 0, чтобы записать именно число 102, а не 12, приходилось записывать его на отдельной доске-абаке. Там были отдельные клетки для каждого разряда, подобно таблице разрядов и классов, которую вы видите в учебнике

На каждую графу абака клали кружок с нужной цифрой, а место нуля оставляли пустым. Потом это место стали накрывать пустым кружком. Поэтому нуль имеет форму овала, а не квадрата или треугольника.

Обозначать нуль кружком впервые начали в Индии. На древнеиндийском языке "кружок" – значит "сунья". Арабы перевели это слово на свой язык и нуль стал называться "сифр". Потом именем нуля стали называть его братьев и сестер. Теперь 1, 2, 3,...9 – цифры. А само слово нуль появилось позже (от лат. nullus – никакой).

Тема. Нумерация многозначных чисел.

Цель: обобщить отличительный признак десятичной системы счисления; познакомить учащихся с недесятичными системами счисления (исторический аспект); учить записывать числа с помощью двоичного кода.

– Назовите все цифры. Сколько их? Достаточно их для записи любого числа?

– Посчитайте до 100 десятками, до 1000 сотнями.

– Сколько единиц в 1 десятке? десятков в сотне? сотен в тысяче? (10)

– Десять единиц одного разряда дают одну единицу следующего разряда. Поэтому нашу систему счисления называют десятичной. В ее основе число 10. Эта система счисления сейчас принята почти у всех народов мира. Но так было не всегда. В разное время многие народы пользовались системами счисления, отличными от десятичной. Посмотрите на свои пальцы. Из скольких частей (фаланг) состоит каждый палец, кроме большого? (Из трех.)

- Перебирая большим пальцем правой руки фаланги остальных четырех пальцев, посчитайте, сколько их. На четырех пальцах 12 фаланг. Поэтому очень распространенной была 12-ричная система счисления. (Это ножи, вилки, тарелки, салфетки). До сих пор в речи вместо слова "12" употребляют слово "дюжина". Многие предметы считают дюжинами, а не десятками. Какие? (Так, например, считают ножи, вилки, тарелки, салфетки.) (Сервиз, как правило, тоже бывает на 12 персон.)

– Отдельное наименование имеет и 12 дюжин – "гросс" Что это за число? ($12 \cdot 12 = 144$.)

– Где еще остались следы этой системы? (1 год = 12 месяцев. 1 сутки = 24 ч.)

– В древнем Вавилоне, Греции, Риме пользовались 60-теричной системой. Самое удивительное то, что следы счета шестидесятками сохранились до сих пор. Подумайте, где? (При измерении времени мы делим час на 60 минут, а минуту – на 60 секунд.)

- Вспомните, как начинаются многие русские сказки? Где происходят события, описанные в них? ("...За тридевять земель, в тридесятом царстве ...".)

– Что означают эти числительные: тридевять, тридесять? (3 раза по 9, 3 раза по 10.)

– В числительном тридевять сохранились следы древней народной системы счета девятками. Счет девятками долго существовал в народе и после введения десятичной системы счисления.

Как вы думаете, почему победила десятичная система? (Потому что на руках 10 пальцев.)

– Может быть, если бы у человека руки были четырехпалые, то мы предпочли бы восьмеричную систему счисления. А если бы у нас, как у лошадей, на руках и ногах были копыта, то арифметика была бы такой же, как у папуасов – мы считали бы парами. Но, тем не менее, именно двоичная система счисления оказалась самой полезной для современной техники. На ее основе работают современные быстродействующие вычислительные машины.

– Мы попробуем записать числа от 1 до 15 используя только 2 цифры – 0 и 1. Нам помогут чудесные полоски: .

Сравните их длины (Каждая из них длиннее предыдущей в 2 раза.)

– Пусть первая полоска обозначает 1, вторая – 2, третья – 4 и четвертая – 8.

Давайте представим числа от 1 до 15, используя эти полоски, причем каждую полоску можно использовать только один раз. (Выполняется практическое моделирование чисел с помощью полосок. Число вхождений каждой из них в образ соответствующего числа фиксируется в таблице разрядов знаками 0 и 1.).

	тыс.	сот.	дес.	ед.
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Тема. Миллион. Класс миллионов.

Цель: познакомить с числом миллион; обобщить принцип поклассового объединения разрядов; формировать представление о бесконечности ряда натуральных чисел.

– Назовите наименьшее натуральное число? (Единица.)

– Кто назовет наибольшее натуральное число (Называют несколько вариантов: миллиард, 1000 миллиардов и т.д.)?

– Какое бы число вы не назвали, я добавлю к нему единицу и получу число еще большее. Вы согласны? Самое большое число назвать невозможно, т.к. ряд натуральных чисел бесконечен. Люди очень долго не могли понять это. Сначала они умели считать только до двух, а все остальное они называли словом "много".

Переход к следующему числу был очень медленный. Наибольшее освоенное число натурального ряда, граничащее с несчитаемым, часто приобретало особый ареал чудесного и служило основанием для возникновения суеверий, связанных с разными числами. С каким числом связано наибольшее число суеверий? (С числом 13. Его называют "чертовой дюжиной" и вообще считают несчастливым, проклятым.)

- Да, это так. Даже теперь в некоторых американских высотных домах нет 13 этажа, в гостиницах нет 13 номера, т.к. население избегает этих номеров.

Когда-то в Париже существовали конторы для доставления "четырнадцатого", если на обеде где-нибудь собравшихся оказалась "чертова дюжина". Однако для славянских народов число 13 было самым обычным. Наши предки даже храмы строили с 13-ю куполами, чего не встретишь на Западе. В какой-то период исторического развития самым большим числом было 40. Вспомните, как называется гусеница, у которой якобы 40 ног? (Сороконожка.)

– Название "сороконожка" означает не то, что у нее 40 ножек, а то, что у нее ножек много, это "многоножка".

– В названии какой арабской сказки упоминается число 40? (В сказке про Али-Бабу и сорок разбойников.).

Еще в прошлом веке считалось, что охотник имеет право убить за свою жизнь только сорок медведей, а сорок первый окажется для него роковым. Эти примеры доказывают, что потребовались многие тысячелетия, пока люди пришли к выводу о неограниченности ряда натуральных чисел, что не существует наибольшего числа. Вместе с тем существуют очень большие числа, например, миллион – 1000000. Сочинитель этого слово венецианский купец Марко Поло. Передавая одним словом несметные богатства Востока, он произносит: "Мильоне", что обозначает большая тысяча, т.е. тысяча тысяч.

Тема. Умножение на разрядные единицы.

Цель: вывести правило умножения на 10, 100, 1000; воспитывать интерес к изучению математики.

– Запишите сумму последовательных чисел от 1 до 20 и вычислите ее (Через 1–2 минуты учитель выясняет, способ вычислений, которым пользуются учащиеся. Вероятнее всего они занимаются непосредственно сложением заданных чисел и уже начали испытывать определенные трудности). – Такое вычисление займет у нас много времени. -Найдите сумму чисел, стоящих на местах с одинаковым номером, если отсчитывать их слева и справа. Сколько таких пар? (10 пар.)	– Чему равна сумма членов каждой пары? (21.) – Используя результаты проделанной работы найдите сумму 1+2+3+…+20. ($1+2+3+\ldots+20=21\cdot10=210$). – Эту закономерность заметил еще в конце 18 века маленький немецкий школьник Карл Гаусс (1777–1855). На одном из уроков математики учитель предложил ему вычислить сумму 1+2+3+…+20. Каково же было удивление наставника, когда Карл уже через минуту назвал правильный результат и объяснил, как он произвел подсчет. Этот школьник вырос и стал знаменитым ученым.

§2.3.Текстовые задачи как средство реализации принципа историзма при обучении в начальной школе

Необходимость формирования целостности восприятия мира у школьников, устранения поляризации между предметами естественнонаучного и гуманитарного циклов привела к расширению межпредметных связей, созданию интегративных курсов в учебном процессе.

Для одних дисциплин межпредметность и интегративность очевидна: русское (белорусское) чтение – русский (белорусский) язык, чтение – "Человек и Мир", "Человек и Мир" – изобразительное искусство; для других – более завуалирована и не лежит на поверхности. Примером такой связи является "математика – история." В качестве синтезирующего начала этих предметов выступает диалектическая пара "историческое-логическое", которая способствует их слиянию и в то же время сохраняет индивидуальность и специфику каждого из учебных предметов.

"Историческое" в данном случае выступает как последовательное рассмотрение явлений и событий в том порядке, который имел место в истории. "Логическое" же устанавливает причины и условия, выявляет закономерности возникновения и развития, создает целостность мировосприятия.

Мы ведем речь не о механическом соединении математики и истории, а стремимся найти области органичного пересечения двух наук, разъединенных в разные учебные предметы. Такое пересечение возможно на основе принципа историзма, который позволяет изменить отношение к математике, как к очень трудному, не всегда понятному предмету.

Потенциальные возможности в реализации принципа историзма имеет решение специально подобранных текстовых задач, которые можно классифицировать следующим образом:

1. Старинные задачи по элементарной математике.

2. Математические задачи с историческим содержанием.

3. Задачи, в которых используются старинные единицы измерения величин.

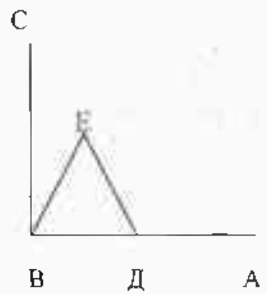
Приведем примеры задач каждого вида. Некоторые из них могут быть предложены учащимся в начальной школе.

Старинные задачи. По элементарной математике

1. Задача древнего Вавилона:

Разделить прямой угол на три равные части.

Решение: Древние вавилоняне умели строить равносторонний треугольник, а с его помощью делить прямой угол на три равные части. Пусть дан прямой угол АВС. Требуется разделить этот угол на три равные части. Для этой цели на отрезке ВД стороны ВА построим равносторонний треугольник ВЕД. Тогда угол СВЕ и будет составлять одну треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол ЕВД и задача будет решена.



2. Задача Пифагора:

Доказать, что сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

Решение: По-видимому, в школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Единица представлялась в виде квадрата, а последовательные числа – в виде гномов, т.е. фигур г-образной формы, состоящих из нечетного числа квадратов (единиц):

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=4+5=3^2$

$1+3+5+7=9+7=16=4^2$

и т.д.

Алгебраически эта задача решается очень просто. Последовательность нечетных чисел, начиная с единицы, представляет собой арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, …, (2n+1). Число членов этой прогрессии равняется n+1. Сумма всех членов указанной прогрессии будет

$$S=\frac{(1+2n+1)(n+1)}{2}=(n+1)^2.$$

3. Задача из "Греческой антологии":

"У Пифагора спросили:– Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

– Вот сколько, – ответил философ, – половина изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины".

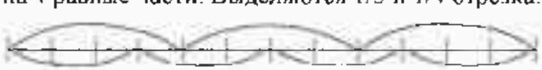
Решение: Задача сводится к уравнению $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$, где x – число учеников, посещающих школу Пифагора. Решая уравнение, получим x=28. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 человек, что и нужно было найти.

Эту задачу можно решить арифметическим способом. Число учеников должно быть таким, чтобы оно делилось на 2, 4 и 7. Наименьшим таким число является число 28. 28 удовлетворяет условию задачи. Осуществим проверку: 14+7+4+3=28. Следующим числом, которое делится на 2, 4, 7 является число 56., но оно не удовлетворяет условию задачи; 28+14+8+ +3=53, а не 56.

4. Задача Ал-Кальсади:

Найти число, одна треть и одна четверть которого составляют число 21.

Решение: Это число должно делиться на 3 и на 4, а значит и на 12, т.е. искомое число состоит из 12 частей. В начальных классах способ ее решения поможет найти моделирование искомого числа в виде произвольного отрезка, который сначала делится на три равные части, а потом каждая из них еще на 4 равные части. Выделяются 1/3 и 1/4 отрезка.



1/3 искомого числа содержит 4 маленькие части, а 1/4 – 3 такие же части. Согласно условию, 4 ч.+3 ч.=7 ч. Что и составляет число 21. 7 ч.=21, 1 ч.=21:7=3, 3·12=36. Ответ: искомое число равно 36.

5. Задачи из арифметики Л.Ф.Магницкого:

а) Спросил некто учителя: " Сколько у тебя учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына." Учитель ответил: "Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100". Спрашивается, сколько было у учителя учеников.

б) Один воин вышел из города и проходил по 12 верст в день, а другой вышел одновременно с первым и шел таким образом: в первый день прошел 1 версту, во второй день 2 версты, в третий день 3 версты и так прибавлял каждый день по одной версте, пока не настиг первого. Через сколько дней второй воин настигнет первого?

Решение: В первый день второй воин отстанет на 12–1=11 верст, во второй еще на 12–2=10 верст, в третий еще на 12–3=9 верст и т.д. На двенадцатый день отставание составит 11+10+9+...+2+1+0 верст. А затем расстояние между ними начнет сокращаться. В тринадцатый день на 13–12=1 версту, в четырнадцатый день еще на 15–12=3 версты и, наконец, в двадцать третий день на 23-12=11 верст. В этот день расстояние между ними уменьшится на 1+2+3+...+10+11 верст. Это значит, что второй воин по происшествии 23 дней догонит первого.

в) Один путник идет из одного в города в другой 17 дней, а второй из другого города в первый 20 дней. Через сколько они встретятся, если выйдут навстречу друг другу одновременно.

6. Задача из "Курса чистой математики" Е.Д. Войтяховского:

Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который перебегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут – 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца.

7. Две Задачи из "Азбуки" Л. Н. Толстого:

а) Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собою и тогда у всех 5 братьев стало поровну. Много ли стоили дома?

Решение Л.Н. Толстого: Три старшие дали двум меньшим три раза по восьмисот: 800·3=2400. Меньшие разделили 2400 на 2 части: 2400:2=1200, и у всех стало поровну, по 1200. Стало быть, дома стоили по 2000 рублей. А всего наследства было на 6000.

б) Мужик вышел пешком из Тулы в Москву в 5 часов утра. В 13 часов выехал барин из Тулы в Москву. Мужик идет 5 верст в каждый час, а барин едет 10 верст в каждый час. На какой версте барин догонит мужика?

Указание к решению: "До тех пор, пока барин выехал из Тулы, сколько мужик ушел? Когда барин выехал и мужик шел, на сколько барин приближался к мужику в каждый час? Во сколько ж часов барин нагонит мужика?

8. Некто на вопрос о возрасте двух его сыновей отвечал: "Первый мой сын втрое старше второго, а обоим им вместе столько лет, сколько было мне 29 лет тому назад; мне теперь 45 лет". Найти лета обоих сыновей.

Решение: Если через x обозначить возраст младшего сына, то по условию задачи можно составить, например, следующее уравнение: $x+3x-45-29$; решив которое, ответим на поставленный вопрос.

9 Задача Пуассона:

Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается, каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт.

Первое решение:

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Второе решение:

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

10. Вычислить в уме, какие два натуральных числа, нужно взять, чтобы разность их квадратов равнялась 133.

Решение:

$(x+y)(x-y)=1\cdot 133=19\cdot 7;$

$\begin{cases} x+y=19 \\ x-y=7 \end{cases}$

$x=13$, $y=6$.

Далее,

$\begin{cases} x+y=133 \\ x-y=1 \end{cases}$

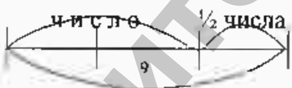
откуда $x=67$, $y=66$.

Следующие задачи взяты из древнеегипетского Московского папируса (папирус, расшифрованный русскими учеными, хранится в музее Изобразительных искусств в Москве.). Московский папирус представляет свиток, изготовленный из растений. Его длина 5,5 м, а ширина 8 см. На нем и записаны задачи, которые решали древние египтяне около 2000 лет назад.

11. *Число и его половина равна 9. Найти это число.*

а) $x+\dfrac{x}{2}=9 \Leftrightarrow 3x=18;\ x=6.$

б)



1) 2ч+1ч=3ч
2) 9 : 3=3
3) 3·2=6

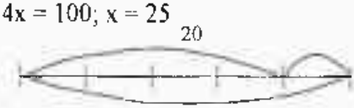
Задачи из папируса Ахмеса.

Папирус назван по имени одного из древнейших писцов, рукою которого он был написан. Его длина 544 см, ширина 33 см. Хранится в Лондоне, в Британском музее. Он был приобретен в прошлом веке англичанином Риндом и потому его называют иногда папирусом Ринда.

12. Если от числа отнять его пятую часть, то получим число 20. Найдите это число.

а) $x-\dfrac{x}{5}=20 \Leftrightarrow 4x=100;\ x=25$

б)



Ответ: искомое число равно 25.

13. Количество и его четвертая часть дают вместе 15. Найти это количество. (Задачу можно сформулировать по-другому. Число и его четвертая часть дают вместе 15. Найти это число.)

1) 4+1=5 (частей)
2) 15:5=3
3) 3·4=12
Число 12.

В папирусе Ахмеса решение данной задачи записано так: "Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1, вместе 5. Затем 15 делится на 5; частное умножается на 4 и получается неизвестное 12".

Египетский метод решения является, как видим, методом предположения. В качестве неизвестного берут произвольное число, которое делится на 4 и его четвертую часть легко найти. Например, 4, 4:4=1; Далее: 4+1=5. Но по условию задачи эта сумма должна быть 15, а не 5, т.е. в 3 раза больше. Следовательно, и исходное число в 3 раза больше того, которое мы взяли, т.е. 4·3=12.

Этот метод широко применялся в Азии и Европе в средние века и получил название "метода ложного положения"

14. Задача Евклида:

Мул и осел под вьюком по дороге с мешками шагали,
Жалобно охал осел, непосильною ношей придавлен.
Это подметивший мул обратился к попутчику с речью:
"Что же, старина, ты заныл и рыдаешь, будто девчонка?
Нес бы вдвойне я, чем ты, если б отдал одну ты мне меру".
"Если бы ты у меня лишь одну взял, то мы бы сравнялись".
Сколько нес каждый из них, о геометр, поведай нам это?
(7 и 5 мер).

15. Задача из учебника арифметики Л.Ф. Магницкого:

Идет один человек в другой город и проходит в день по сорок верст, а другой человек идет навстречу ему из другого города и в день проходит 30 верст. Расстояние между городами 700 верст. Через сколько дней они встретятся?

16. Послан человек из Москвы в Вологду и велено ему в хождении своем совершать во всякий день по 40 верст. Потом за ним послали второго человека и приказали ему проходить в день по 45 верст. На какой день второй человек догонит первого?

17. Новгородский купец купил сукно трех сортов, всего 106 аршин. Первого купил на 12 аршин больше, чем второго, а второго на 9 аршин больше, чем третьего. Сколько сукна каждого сорта было куплено?

18. Задачи Диофанта:

а) Требуется число 100 разделить два разa так, чтобы большая часть его от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

Решение: результат первого деления: 20, 80.

Результат второго деления 40, 60.

б) Найти два числа, сумма которых 20, а произведение 96.

Ответ: 12 и 8. Можно решить алгебраически или способом подбора. Последний вполне доступен и для учащихся начальных классов.

19. Старинная китайская задача:

В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

Решение:

1) 35x2=70 – столько было бы ног, если были бы только фазаны.

2) 94–70=24 – столько лишних ног. Эти "лишние" ноги у кроликов, причем у каждого на две ноги больше, чем у фазана. Значит, кроликов столько, сколько раз по 2 содержится в 24.

3) 24:2=12 – кроликов.

4) 35–12=23 – фазанов.

Ответ: 12 кроликов, 23 фазана.

20. Одному курьеру приказано прибыть к назначенному месту в 12 дней, к которому он прежде, ехав всякие сутки по 228 верст (1 верста ≈1,07 км.), прибыл в 15 дней. Спрашивается, по сколько верст должен он проезжать в сутки, дабы поспеть к тому месту в назначенное время. (Задачник Войтяховского).

Математические задачи с историческим содержанием

1. Великий русский математик Н.И. Лобачевский родился в XVIII веке и прожил 64 года, из них 56 лет в XIX веке. Найдите годы рождения и смерти Н.И. Лобачевского.

2. Великое княжество Литовское просуществовало с 1240 года до 1795 года. Сколько лет Великому княжеству Литовскому?

3. Могилев был основан в 1267 году, Гомель около 1141 года, Брест - в 1019 году. Гродно впервые упоминается в 1128 году. Расположите эти города, начиная с самого древнего города.

4. Из повести про Ефросинию Полоцкую:

"Паставіла Еуфрасіння царкву каменную Святога Спаса, і збудавалі тую царкву за 30 тыдняў." Сколько дней заняло строительство церкви?

5. Раньше книги переписывались от руки. В день писалось 2 листа. За сколько дней был бы переписан ваш учебник математики?

6. К "семи чудесам света" относят маяк на острове Фарос, высотой 140 м и бронзовую статую Радос, высота которой была на 108 м меньше маяка. Какова высота Колосса Радосского?

7. Московский Кремль в XI веке занимал площадь 15000 м^2. Площадь Кремля, построенного при Юрии Долгоруком, была на 75000 м^2 больше, чем в XI веке. Вычислите площадь нового Кремля.

8. В V веке до н.э. в Древней Греции скульптура как искусство достигает наивысшего расцвета. Мастер Поликлет рассчитал идеальные размеры всех частей тела и их соотношения между собой. В отношениях к росту человека голова составляла $\frac{1}{7}$ часть, лицо и кисть руки – $\frac{1}{10}$ часть, ступня – $\frac{1}{6}$. Найди, зная свой рост, чему должны быть равны эти части тела.

9. На протяжении нескольких тысячелетий самым высоким сооружением на земном шаре считалась пирамида Хеопса. Она достигала высоты 146 м 60 см. В 1967 году в Москве была построена Останкинская телевизионная башня высотой 536 м. На сколько метров она выше пирамиды Хеопса?

10. Штык-обелиск (цельносваренная металлоконструкция, облицованная титаном) в Брестской крепости имеет высоту 100 м и весит 620 т. Какую массу имел бы штык Брестской крепости, если бы его высота была на 10 м больше? На 10 м меньше?

11. В XIII веке на Руси произошли 3 очень важных события, причем они следовали через год одно за другим. Вычислите даты этих событий, если известно, что их сумма равна 3720.

С точки зрения математики надо найти 3 последовательных четных числа:

$x+(x+2)+(x+4)=3720$

$3x+6=3720$

$3x=3714$

$x=1238$

1238 г – нашествие Батыя на Москву.

$x+2=1240$

1240 г – Невская битва.

$x+4=1242$

1242 г – Ледовое побоище.

12. В XIV веке произошла важная битва, что нет в Росси человека, который о ней не знает. Вычислите дату битвы, если известно, что она является числом, в котором цифра единиц нуль, цифра десятков в восемь раз больше цифры тысяч. (1380).

13. В XV веке в России произошло событие, по своему значению не уступающее битве на Дону. Вычислите это число, если известно, что в нем цифра десятков на 8 больше цифры единиц и в 2 раза больше цифры сотен. (1480).

14. Известный белорусский первопечатник и просветитель Ф. Скорина родился за десять лет до конца XV века. Сколько лет он прожил, если известно, что год смерти его – есть число симметричное (В 1551 году он умер, прожил 61 год.).

15. Перед Великой Отечественной войной (XX век) произошло объединение Восточной и Западной Беларуси. В каком году это произошло, если известно, что цифра единиц совпадает с цифрой сотен, а цифра десятков в 3 раза меньше цифры единиц. (1939 г.).

16. До воссоединения площадь Беларуси составляла 52 тыс. км^2. Сейчас она в 4 раза больше. Чему равна площадь Беларуси в наше время?

17. В XIX веке белорусский народ участвовал в национально-освободительном Польском восстании. В каком году это было, если известно, что сумма первой и второй цифр в записи этого числа равна сумме третьей и четвертой. Причем цифра единиц в 2 раза меньше цифры десятков (1863 г.).

18. Самая длинная река Беларуси – Днепр. Найдите длину реки Днепр, если известно, что она на 200 км длиннее Припяти, а длина Припяти на 7 км больше, чем Сожи. Длина реки Сож равна 493 км.

19. Город Полоцк был основан в 862 г. Сколько лет сейчас городу Полоцку?

20. Протяженность границы Беларуси с Россией составляет 990 км. Это на 60 км больше, чем с Украиной. Найдите длину границы Беларуси с Украиной.

21. Площадь Беларуси составляет 1/50 от площади Европы. Найдите площадь Европы, если площадь Беларуси равна 208 тыс. км^2.

22. В Европе много стран, площадь которых почти такая же, как и Беларуси. Например, площадь Великобритании равна 244 тыс. км^2 и она на 36 тыс. км^2 больше площади Беларуси. Найдите площадь Беларуси.

23. Площадь озера Нарочь равна 80 км^2, что на 36 км^2 больше площади озера Червоное. Площадь озера Червоное на 27 км^2 больше площади озера Черное. Найдите площади озера Червоного и озера Черного.

24. Город Витебск в 1074 году отметил свое 1000-летие. В каком году он был основан?

25. Город Брест старше Гомеля на 123 года. Гомель младше Гродно на 14 лет. Найдите возраст городов Брест и Гомель, если город Гродно был основан в 1128 году. Найдите годы основания этих городов.

26. Город Полоцк основан в 862 году, а Туров – в 980 году. На сколько лет Полоцк старше Турова?

27. Известно, что во время Великой Отечественной войны погиб каждый четвертый белорус. Найдите число погибших, если до войны на нашей территории проживало 9200000 человек.

28. На Великой Отечественной войне погибло очень много белорусов. Сколько лет понадобилось Беларуси для достижения довоенного уровня населения, если он стал таким же лишь в 1972 году?

Решение: 1972–1941–31 (год).

29. Известное слово "фары" связано с седьмым чудом света. На острове Фарос в устье Нила рядом с городом Александрией был в 280 г. до н.э. был построен самый большой маяк древности. Высота этой трехъярусной богини достигала 120 м. На ее вершине в открытой каменной беседке день и ночь пылал костер, указывая путь кораблям. К сожалению, он не сохранился до наших дней, но давайте посчитаем, сколько лет ему исполнилось бы в этом году?

30. Об основании древнего города Карфагена существует следующее предание. Дидона, дочь тирского царя, потеряв мужа, убитого рукой ее брата, бежала в Африку и высадилась со многими жителями Тира на ее северном берегу. Здесь она купила у нумидийского царя столько земли, "сколько занимает воловья шкура". Когда сделка состоялась, Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие ремешки и благодаря такой уловке охватила участок земли, достаточный для сооружения крепости. Так будто бы возникла крепость Карфаген, к которой впоследствии был пристроен город. Попробуйте вычислить, какую, приблизительно площадь могла, согласно этому преданию, занять крепость, если считать, что воловья шкура имеет поверхность 4 $м^2$ а ширину ремешков, на которые Дидона ее разрезала, принять равной 1 мм.

Решение: если площадь воловьей шкуры 4 $м^2$ (4000000 $мм^2$), а ширина ремешка 1 мм, то общая длина вырезанных ремешков – 4000000 мм = =4000 м=4 км. Таким ремнем можно окружить квадратный участок в 1 $км^2$, а круглый участок – в 1,3 $км^2$.

31. В трех книгах Евклида находится 28 определений. Сколько определений в каждой книге, если в первой их в 4 раза меньше, чем в трех книгах вместе, а во второй на 8 определений больше, чем в первой книге?

32. Двенадцатая книга "Начала" Евклида содержит 18 предложений, из которых: 2 предложения о пирамидах, 6 – о конусах, о цилиндрах говорится в 2 раза меньше, чем о пирамидах и конусах, остальные предложения о шарах. Сколько предложений о шарах?

33. Первый циркуль, который особенно широко используется в картографии, был изобретен великим итальянским ученым Галилео Галилеем в 1606 году. Сколько лет прошло с момента создания циркуля? (Однако, согласно римскому поэту Овидию (I век н.э.), циркуль был изобретен в Древней Греции).

34. Русский ученый-математик Федор Буссе написал учебник по математике для начальной школы в 1859 году. Сколько лет прошло с момента написания учебника?

35. Французский писатель, физик и математик Блез Паскаль, который родился в 1623 году, изобрел первую вычислительную машину в возрасте 19 лет. В каком году это произошло?

36. Первый настольный электронный калькулятор появился в 1863 году. Сколько лет калькулятору?

37. Первой ЭВМ с хранимой программой была английская машина, построенная в Кембридже в 1949 году, что на 19 лет раньше, чем был изобретен А.А. Гороховым первый персональный компьютер в СССР. Когда же был изобретен первый персональный компьютер?

Задачи, в которых даны старинные единицы измерения величин

1. Купец за 540 рублей купил 138 аршин черного и синего сукна. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное – 3 руб.? Данная задача взята из рассказа А.П.Чехова "Репетитор".

Решение: $5\cdot138=690$ (руб.) – заплатил бы, если бы купил 138 аршин синего сукна

$690-540=150$ (руб.) – на столько больше заплатил бы, потому что синее сукно дороже.

$5-3=2$ – на столько синее сукно дороже

$150:2=75$ (аршин)

$138-75=63$ (аршин)

Ответ: черного – 75 аршин, синего – 63 аршин.

2. Издавна считалось, что друзьями могут считаться те люди, которые вместе съедят пуд соли. За сколько времени 2 человека могут съесть пуд соли, если известно, что суточная норма потребления соли на одного человека – 10 граммов, а старинная мера пуд равна 16 кг?

Решение: 16 кг=16000 г.

$10\cdot2=20$ (г) – потребляют 2 человека за одни сутки.

$16000:20=800$ (дней) – за столько дней 2 человека съедят пуд соли.

800 дней= 2 года 70 дней.

Ответ: 2 года 70 дней.

3. В русском языке есть выражение "от горшка два вершка", которое обозначает человека низкого роста или же человека глупого, чего-то не знающего. Может ли рост человека на самом деле быть равным 2 вершка (1 вершок старинная мера длины, равная 4 см.)?

4. Есть в русском языке выражение "семи пядей во лбу". Так говорят об очень умном человеке. Пядь – старинная мера длины, равная 19 см. Может ли быть лоб такой величины?

5. О человеке иногда говорит "косая сажень в плечах"? Может ли у человека ширина плеч быть такого размера?

(1 косая сажень =2,48 м=248 см.).

Обычный человек не может иметь ширину плеч 248 см. Так говорят в переносном смысле об очень сильном человеке.

6. В сказке П.П. Ершова "Конек-Горбунок" есть такие слова:

"Что ж он видит? – Прекрасных двух коней золотогривых.
Да игрушечку-конька.
Ростом только в 3 вершка.
На спине с двумя горбами. Да с аршинными ушами.
Какой рост у конька-горбунка и какой длины уши?

<u>Решение</u>: Вершок =4 см, Значит, высота коня = 12 см

1 аршин =71 см, значит, длина его ушей 71 см.

7. Одним из видов развлечений в Древнем мире являлись скачки на колесницах. Скачка состояла из 7 кругов по 600 ярдов, что занимало в среднем 20 минут. Чему равна скорость колесницы, если известно, что 1 ярд =90 см. Вырази скорость в м/мин.

8. Олимпийские игры впервые состоялись в Олимпии (Южная Греция) в 776 г. до н.э. Греческий стадион представлял собой прямоугольник длиной 200 ярдов, а ширина составляла пятую часть длины. Вычислить площадь греческого стадиона.

9. Разделить полтину на половину.

<u>Решение</u>: Так как полтина – 50 копеек, то 50 копеек надо разделить на 1/2. Тогда получим 100 копеек =1руб.

10. Длина бревна 5 аршин. В одну минуту от этого бревна отпиливают по одному аршину. Во сколько минут будет распилено бревно (4 минуты.)?

11. *Канат длиной 11 аршин рабочие разрезали на 2 части так, что в одной из них оказалось столько вершков, сколько в другой дюймов. Какой длины каждый кусок?*

<u>Решение</u>. Напомним, что 1 аршин=16 вершков=28дюймов. Выразив длину бревна, равную 11 аршинам, в вершках (16·11=176) и разделив эти 176 вершков на общее число вершков и дюймов в 1 аршине (16+28=44), получим, что меньшая часть бревна равняется 4 аршинам, а большая – 7 аршинам.

12. В 16 веке на территории Беларуси монету называли "талер". Какова ее масса, если известно, что в 5 таких монетах 150 граммов.

В предложенных задачах условие обладает историко-познавательной ценностью, процесс их решения математизирован, а ответ содержит в себе новую информацию.

§2.4.Исторический материал для изучения величин

Кроме целых неотрицательных чисел и действий над ними в курсе математики начальных классов программой предусмотрено ознакомление учащихся с элементами алгебры и геометрии, а также с некоторыми величинами и их измерением. Этим преследуются как образовательные и практические, так и воспитательные и развивающие цели.

Без величин нельзя изучать природу, реальную действительность. В соответствующих величинах отражены свойства различных объектов, явлений реального мира. Так, например, свойству пространственной протяженности соответствует длина, свойству инертности – величина, называемая массой, и т.п. В силу этого величины являются предметом рассмотрения многих наук, в том числе математики.

Важность понятия величины в математике, ее значительный удельный вес подчеркиваются Ф. Энгельсом: "Математика – это наука о величинах, она исходит из понятий величины".

Математику как науку, изучающую свойства величин, "поскольку они перечисляются и измеримы", характеризует и Д'Аламбер (1717–1783).

Понятие величины, как и другие понятия математики, формировались постепенно в результате абстрагирования от качественных особенностей свойств реальных объектов, в результате чего выделились только количественные отношения. Величины – это не сама реальность, а лишь ее отображения, но они верно отражают свойства окружающей действительности.

В процессе длительной эволюции понятие величины обобщалось. Такие первые обобщения длины, площади, объема в виде аксиом, косвенно определяющих понятие скалярной величины, были даны еще Евклидом (от латинского scalaris – ступенчатый; совокупность скалярной величины можно изобразить на линейной шкале – "scala", откуда и название).

На примере длины отрезка посредством предметной деятельности, с опорой на конкретно-чувственное восприятие представляется возможность познакомить младших школьников со свойствами, общими для большинства скалярных величин. Работа начинается со сравнения длин реальных предметов на глаз и способом наложения или приложения. Обращается внимание на то, что длины, например, двух полосок равны, если они при наложении совпадают.

Измерение длины содержит две задачи: измерить длину данного объекта и отмерить объект по данной длине.

В результате у учащихся формируются представления: о скалярной величине как об элементе множества скалярных величин; о том, что величины эти могут быть разных родов; если они одного рода, то их можно сравнивать, складывать и вычитать, причем складывать можно в любом порядке; числовое значение скалярной величины получают в результате измерений; запись числового значения величины осуществляется с указанием единицы измерения.

Формируемые таким образом знания о величинах и их измерениях являются отражением объективных законов природы, некоторыми математическими моделями реальных ситуаций.

В процессе исследования возможности включения в содержание учебного материала сведений из истории математики нами были разработаны фрагменты уроков по разделам "Время. Меры времени" и "Масса. Меры массы" программы для начальных классов.

Тема "Год, месяц, неделя" (1 класс)

Цель: познакомить учащихся с единицами времени: год, месяц, неделя и отношениями между ними; познакомить учащихся с эволюционными процессами единиц измерения времени.

Оборудование: табель-календарь текущего года, отрывной календарь, настольный календарь, индивидуальные календари текущего и прошедшего годов, таблица записи чисел римскими цифрами.

Ход урока

– Мы начинаем изучение темы "Время и его измерение." Какие единицы измерения времени вы знаете? На этом уроке мы познакомимся с такими единицами времени, как год, месяц и неделя.

– Ребята, какой сейчас месяц?

– Какой месяц был до него?

– Какое сегодня число?

– Какое число было вчера?

– Какой сегодня день недели?

– Какой день недели был вчера?

– Какой день недели будет завтра?

Как люди узнают ответы на такие вопросы?

– Ребята, знаете ли вы, что такое календарь?

– Посмотрите, какие календари лежат у меня на столе. (Показ настольного, отрывного, табеля-календаря с пояснением их значения).

– Таким образом, календарь содержит последовательный перечень чисел, дней недели, месяцев года. Календарь– это таблица или книжка, в которых в определенной последовательности дан перечень чисел, дней недели, месяцев года.

– Что можно узнать по календарю? (По календарю можно узнать, сколько месяцев в году, как они называются, какой месяц за каким следует, сколько в каждом месяце дней и недель.)

– Посмотрите, как много листков в отрывном календаре. Каждый листок – это день. Вот как много дней должно пройти до наступления Нового года! Что вы видите на листках календаря? (Числа).

– Что показывают эти числа? (Какой это день недели).

– А еще что вы видите возле чисел? (Название месяцев).

– Что еще можно увидеть на этом календаре? (Время восхода и захода солнца.).

– Да, по календарю можно еще определить продолжительность дня и ночи.

– Давайте сейчас обратимся к табелю-календарю. Что вы видите?

– В этом календаре месяцы записаны в общепринятой последовательности. Каждый месяц разбит на недели.

– А сколько дней в неделе?

– Дни недели записаны по порядку и сокращенно. Назовите их.

– Ребята, а сколько месяцев в году? Назовите их по порядку?

– С какого числа и месяца начинается год?

– С какого месяца и числа начинался прошедший год?

– Каким днем недели было 1 января в этом году?

– А в прошедшем?

Так с какого дня всегда начинается Новый год?

А всегда ли 1 января попадает на один и тот же день недели?

– Ребята, по календарю кроме дат и дней недели можно определить и время года. Календарная зима начинается 1 декабря и продолжается 3 месяца. Назовите их. (Декабрь, январь, февраль.)

– С какого месяца по календарю начинается весна?

– Какие весенние месяцы? (Март, апрель, май.)

– Какое время года наступает после весны?

– Сколько летних месяцев в году? Назовите их.

– Назовите осенние месяцы. Сколько их?

– Сколько месяцев в году?

– Ребята, как вы думаете, всегда ли в году было 12 месяцев?

– На самом деле год не всегда содержал 12 месяцев. Давным-давно, когда появился первый календарь, год состоял из 10 месяцев, в каждом из которых было по 30 дней. Год у древних народов начинался не зимой, как сейчас, а летом или весной. Древние египтяне за год принимали промежуток времени от одного разлива реки Нил до другого. В Древней Руси год начинался в марте. В Иране и в наши дни год начинается с 21 марта, а в Эфиопии – с 11 или 12 сентября. Сначала и месяцы не имели названий, а обозначались порядковыми номерами. С течением времени месяцы получили названия. Первый месяц года (март) назывался мартиус в честь бога войны Марса. Второй месяц априлиус (апрель) означал время раскрытия почек на деревьях. Май был назван по имени бога Маюса, покровителя роста. Июнь посвящен богине неба Юноне. Июль и август названы в честь диктатора Юлия Цезаря и императора Августа, которые хотели систематизировать существующие в те времена календари. Название четырех последних месяцев происходит от порядковых числительных на латинском языке: сентябрь – седьмой, октябрь – восьмой, ноябрь – девятый, декабрь – десятый. Но прошли столетия и календарные месяцы перестали соответствовать природным явлениям: летние месяцы стали приходится на зиму, осенние – на весну. Поэтому была проведена реформа и вместо 10 месяцев в календаре стало 12. Число дней в месяце колебалось от 28 до 31. Началом года стал январь, названный в честь двуликого бога Януса, который мог одновременно видеть прошлое и будущее; вторым – февраль, что означает время религиозного покаяния.

– Ребята, посмотрите на свои календари и скажите, сколько дней в январе?

– Назовите месяцы, в которых столько же дней. (Март, май, июнь, август, октябрь, декабрь.)

– Назовите месяцы, в которых по 30 дней. (Апрель, июнь, сентябрь, ноябрь.)

– Какой самый короткий месяц? (Февраль.)

Сколько дней в этом месяце? Всегда ли 28? Посмотрите на календарь 2000 года, найдите месяц февраль, сколько в нем дней? (29.)

– Год, в котором февраль содержит 29 дней, называют високосным. Високосный год бывает один раз в 4 года.

– Сколько дней содержит каждая неделя?

Неделя как единица измерения времени возникла в Древнем Вавилоне много лет назад. Одни народы считали, что число 7 – магическое, обладает волшебной силой. Другие появление семидневной недели связывали с числом видимых небесных тел (Луна, Солнце, Марс, Меркурий, Венера, Юпитер, Сатурн). Каждый день недели у разных народов назывался поразному. На Руси еженедельный праздничный выходной день называли неделей – днем, когда ничего не делают (совр. "воскресенье"). День, следующий после "недели", назвали понедельником, второй день недели – вторником; среда – средний день недели; четверг, пятница были названы порядковыми номерами этих дней недели; название суббота происходит от древнееврейского "шабат" – покой, отдых. В настоящее время неделя – это единица измерения времени, равная 7 дням.

– Больше или меньше недели длились зимние каникулы?

– Сколько длятся летние каникулы меньше месяца или больше? Сколько месяцев? Сколько дней? Недель?

– В феврале 4 недели. Сколько дней в феврале? (28 или 29.)

– Какая единица измерения времени меньше года, но больше недели (Месяц.)?

Тема. Сутки как единица времени. (2 класс)

Цель: 1) сформировать представление о сутках; 2) закрепить знания о ранее изученных единицах времени.

Оборудование: табель–календарь; картинки, изображающие один и тот же пейзаж, но в разное время суток; круговая диаграмма суток.

Ход урока

Учитель предлагает сравнить четыре заранее заготовленные иллюстрации.

– Определите, что в них общего? (На них нарисован один и тот же пейзаж.)

– А чем они отличаются? (На одних изображено утро, на других – день, вечер и ночь.)

– Действительно, на одной из этих картинок мы видим утренний пейзаж, на другой – этот же пейзаж, но днем, на третьей – вечером, на четвертой – ночью.

– Может кто-нибудь из вас знает, как назвать одним словом весь тот период, в течение которого пройдут утро, день, вечер, ночь? (Целый день.)

– Правильнее будет сказать сутки. Запомните: все эти четыре временных отрезка вместе называют сутки, а утро, день, вечер, ночь – это части суток.

– Этот круг (учитель демонстрирует классу диаграмму суток) изображает сутки. Почему он разделен на 4 части? Что обозначает каждая часть? (Утро, день, вечер, ночь – части суток.) Каким цветом закрашено утро? День? Вечер? Ночь? Правильно ли расположены по порядку эти части суток на диаграмме?

– Что является сигналом того, что начинается утро? (Восход Солнца.)

– А когда наступает ночь? (С захода Солнца.)

– Расскажите о том, как сменяют друг друга части суток.

– Проходит ночь,– на небо восходит Солнце, оно освещает Землю и будит природу, наступает утро.

– Еще в глубокой древности люди заметили периодическую смену дня и ночи. На смену утру приходит день, потом вечер и ночь. Затем начинаются новые сутки, а потом все повторяется сначала. Так проходят недели, месяцы, годы.. С этим явлением человек связал чередование труда и отдыха.

– Вспомните, вы изучали по природоведению, что вызывает смену дня и ночи? (Вращение Земли вокруг своей оси.) Полный оборот вокруг оси Земля делает за одни сутки. Итак, сутки – это время обращения Земли вокруг своей оси. Но наша Земля вращается еще и вокруг Солнца. Год –

это время обращения Земли вокруг Солнца. Такие единицы, как год и сутки, взяты из природы, а остальные придуманы людьми.

– Так из чего складываются сутки? Как их можно назвать по-другому?

– Какая сейчас часть суток?

– Назовите остальные части суток.

– Что такое сутки? Год?

– Сейчас посмотрите на свои табели–календари и скажите, сколько месяцев в году?

– Можно ли сказать, что в неделе 7 суток?

– Сколько суток в апреле?

– Сколько суток по календарю длится зима?

– На сколько суток дольше длится март, чем февраль?

Вставьте пропущенные числа:

1 год=…сут.

1 мес.=…сут.

1 нед.=…сут.

– Сколько в сентябре полных недель? Сколько это суток?

– Какое сегодня число?

– Сколько суток осталось до весенних каникул? Сколько это полных недель?

– Сколько суток будут длится каникулы?

Тема. Час. Минута.

Цель: 1) познакомить учащихся с понятиями "час" и "минута" как с единицами измерения времени; 2) закрепить умение правильно определять время по часам; 3) развивать познавательный интерес к предмету.

Оборудование: табель-календарь, таблица отношений единиц времени, циферблат с подвижными стрелками, таблица с изображением различных часов (от песочных до электронных).

Ход урока

– Назовите известные вам единицы времени, начиная с самой крупной (Год, месяц, неделя, сутки.)

– Сколько месяцев в году? Назовите их по порядку.

– Какой месяц в году самый короткий? Сколько в нем суток? Сколько полных недель? – Как вы думаете, есть ли единицы измерения времени, меньше, чем сутки? (Час, минута.) – Сегодня на уроке мы больше узнаем об этих единицах измерения времени, узнаем соотношение между ними. Посмотрите на эти часы. Как называют большую стрелку часов? Маленькую?

– Внимательно рассмотрите циферблат часов. (По кругу циферблата на одинаковом расстоянии друг от друга расположены числа от 1 до 12. Между ними короткие черточки.)

– Сосчитайте, сколько расстояний между двумя соседними большими черточками. (5.) Одно такое расстояние большая стрелка проходит за 1 минуту

– Поэтому ее и называют минутной. А сколько времени движется маленькая стрелка от одной большой черточки до другой? (1 час). Отсюда и ее название часовая.

– Движение минутной и часовой стрелок взаимосвязано: часовая стрелка перемещается от одного большого деления к следующему большому делению только тогда, когда минутная стрелка сделает полный оборот. Давайте посчитаем, сколько же минут в 1 часе? (5·12=60.)

– Запишите в тетради:

1 ч=60 мин.

1 сут.=24 ч.

1 год=365 суток.

– На циферблате часов обозначено 12 часовых делений, а в сутках 24 часа. Значит, сколько раз часовая стрелка сделает полный оборот? (2 раза).

– Прочитайте показания часов. (3 часа.)

– Это может быть днем, а может быть и ночью. Поэтому надо указывать не только число, но и часть суток: 3 часа дня или 3 часа ночи.

– Сейчас 9 часов утра, а что вы будете делать в 9 часов вечера?

– Сколько часов составляет половина суток? Четверть суток? Сколько часов в двух сутках? Сколько минут в половине часа? В четверти часа? Сколько всего минут в 1 ч 15 мин; в 2 ч; в 2 ч. 30 мин.

– Подумайте и расположите на своих циферблатах стрелки так, чтобы часы показывали 9 часов. Как это будет выглядеть?

– Как будут располагаться стрелки через 1 час?

– За сколько минут большая стрелка пройдет половину круга? (За 30 минут или полчаса.) Четверть круга? (За 15 минут или четверть часа.)

– Сколько полных оборотов сделает минутная стрелка за 1 час?

– Прочитайте всеми возможными способами 5 ч. 45 мин. (Пять часов 45 мин; без четверти 6; 45 минут шестого; без 15 минут 6.).

– Заполните пропуски в таблице:

1 год=…сут.

1 сут=…ч.

1 ч.=…мин.

– Как вы думаете, всегда ли часы были такими, как сейчас?

– На самом деле часы не всегда имели такой привычный для нас вид, как в настоящее время. Посмотрите на плакат (на нем изображены различные виды часов – от песочных до электронных).

Для того чтобы измерять небольшие промежутки времени, египетские ученые изобрели часы. Первые часы были солнечными.

– Вавилоняне изобрели солнечные часы в виде палочки, прикрепленной вертикально на дне выдолбенной в камне чаше в форме полушара. Часть окружности, проходимую тенью палочки в течение дня, вавилоняне делили на 12 равных частей. Считалось, что час прошел, когда тень проходила от одной зарубки до другой.

– В какое время суток "работали" такие солнечные часы? (Только днем и в солнечную погоду.) Позднее египтяне изобрели водяные часы, которые могли показывать время и ночью. Они назывались "ночные часы".

Водяные часы – это сосуд, из которого через дырочку постоянно вытекает вода. Дырочка таких размеров, что вода через нее вытекает ровно час. Потом нужно снова наполнять сосуд водой. Это не очень удобный, но достаточно точный способ измерения времени. Видимо от этих часов и пошло выражение время истекло, время течет.

– А вот песочные часы. Их и до сих пор используют в медицине для определения промежутка времени, отведенного на ту или иную процедуру (в ванне, в бассейне и т.п.) В настоящее время существуют часы разных видов – от механических до электронных. (Показ плаката с изображением различных часов, на которых отмечено разное время).

– Определите время, которое показывают каждые часы.

– Прочитайте показания часов всеми известными вам способами.

– Какие часы показывают одно и то же время?

Тема. Килограмм.

– Знаете ли вы, когда человек впервые начал использовать весы?

– Какой народ и когда изобрел весы, мы не знаем до сих пор. Видимо, это было сделано многими народами независимо друг от друга. До наших дней дошло много изображений весов. Одними из первых весов, относящимися ко второму тысячелетию до новой эры, были рычажные весы. На Руси пользовались весами двух видов: безменом и чашечными, которые в те времена назывались скалвой. Эти весы были более точными, и немецкие купцы, торговавшие с Новгородом, взвешивали все товары только на скалве. И в наши дни человека, готового на ссору из-за мелких расчетов, называют сквалыжником.

Тема. Сравнение длин предметов.

– Знаете ли вы, что в 1989 году у линейки был юбилей. Ей исполнилось 200 лет. Однако линейкой пользовались и в более ранние времена. В средневековье, например, немецкие монахи для разметки линий на листах пергамента пользовались тонкими свинцовыми пластинками. А в ряде стран Европы, в том числе и в Древней Руси, для этих целей применяли железные прутья. В летописях их называют "шильцами". Когда в 1789 году во Франции началась работа по внедрению метрической системы мер, в Париже были изготовлены две платиновые линейки с делениями. Каждая длиной в 1 м и шириной в 25 мм. Их считают эталоном метра. По этому образцу затем изготовили деревянные линейки для академиков, а позднее и для парижских студентов. У школьников линейки появились только в конце XIX века. В годы вторжения армии Наполеона в Россию в 1812 году линейка в качестве военного трофея попала к нам. В 1899 году по инициативе знаменитого химика Д.И. Менделеева приступили к производству линейки и в России.

Тема. Сантиметр.

– Сейчас мы измеряем длину многих предметов в сантиметрах. А когда-то давно, они использовали другие меры длины. Мы читали с вами сказку Андерсена "Дюймовочка", сказку о девочке очень маленького роста. Имя этой девочки произошло от старинной английской меры длины - дюйм. В те времена дюймом считали длину сустава большого пальца. Покажите, какая эта девочка была маленькая. Величина дюйма окончательно определилась в 1324 году в Англии, когда король Эдвард II определил законный дюйм, как длину "трех ячменных зерен, вынутых из средней части колоса и приставленных одно к другому своими концами." В Англии до сих пор употребляется мера "ячменное зерно", равная одной трети дюйма. 1 дюйм равен приблизительно 2 см.

Тема. Единицы измерения длины.

– Сначала для того, чтобы измерить длину участка или какое-то расстояние на местности использовали такую меру, как шаг. Однако вскоре люди увидели, что для измерения полей шаг является слишком малой мерой. Поэтому была введена в употребление мера трость или двойной шаг, а потом – двойная трость или перша. Для измерения очень больших расстояний шаг оказался неудобной мерой. В Риме входит в употребление миля, равная 1000 двойных шагов. Еще большие расстояния измерялись переходами (за определенный промежуток времени), привалами, днями передвижений. В Японии такой мерой длины был лошадиный башмак – путь, проходимый лошадью, пока износится привязываемая к ее ногам соломенная подошва, заменяющая подкову. У многих народов мерой расстояния была "стрела" – дальность полета стрелы. Наши выражения "на ружейный выстрел", позднее "на пушечный выстрел" напоминают о подобных единицах расстояния.

Тема. Единицы измерения длины.

– Мы знаем, что в древности расстояния измеряли шагами, но размеры ткани или веревки было неудобно измерять ими. Поэтому люди и при-думали другие единицы измерения длины. У египтян, а затем и у других древних народов появляется мера локоть – расстояние от конца пальцев до локтя. Измеряемая ткань удобно наматывалась на такой эталон длины; полный оборот ткани около него составлял двойной локоть. Обхват ствола дерева удобно было мерить растянутыми руками: так появилась мера сажень – расстояние между кончиками пальцев вытянутых в противоположных направлениях рук.

Для измерения меньших расстояний или требующих большей точности употреблялась ладонь – ширина кисти рук. Английский крестьянин и любитель лошадей до сих пор определяет высоту лошади обязательно в ладонях.

Также в Англии была введена такая мера длины, как фут, равная средней длине ступни ноги человека.

У англо-американских народов основной мерой длины был ярд. Он равнялся расстоянию от кончика носа до конца среднего пальца вытянутой руки.

Сейчас мы употребляем в языке слово стадион, которое пришло к нам из Вавилона. Стадионом или же стадием называли тогда меру длины, которая равнялась расстоянию, которое человек проходит спокойным шагом за промежуток времени от появления первого луча Солнца при восходе его до того момента, когда весь солнечный диск окажется над горизонтом. Такой "выход" солнца продолжается примерно 2 минуты. За это время человек при средней скорости ходьбы проходит от 185 до 195 м. Итак, 1 сажень=7 футов=3 аршинам.

Тема. Литр.

– О мерах емкости до нашего времени дошло очень мало сведений. Известно, что основной мерой жидкостей было ведро, равное сегодня 12 литрам. В Древней Руси также использовали такую меру емкости, как бочка, равную 40 ведрам, и штоф, равную десятой части ведра. Если же надо было измерить какой-то маленький объем жидкости, то пользовались чаркой – мера емкости, составляющая одну сотую часть ведра. Существовали также различные местные меры емкости, но сведения о них до нас не дошли.

Тема. Время и его измерение.

– Ребята, а знаете ли вы, что обозначает слово календарь?

– Это слово произошло от латинского глагола выкликать. Раньше были специальные люди, которые кликами объявляли о появлении серпа Луны в начале месяца. Оттуда и пошло слово календарь.

– Вам уже известно происхождение названий некоторых месяцев. Но у древних славянских народов были свои названия, некоторые из которых сохранились до сих пор в национальных языках. Эти названия произошли от времени хозяйственных работ и сезонных изменений в природе. Например, в Украине январь называют сечень (время подсекания, рубки деревьев); февраль – люты (сильные морозы); март – берзень (сжигали на корню деревья для золы, которая служила удобрением); апрель и май – квитень и травень (земля покрывалась первыми цветами и травой); июнь – червень (личинки, червячки пчел оживали в это время); июль – липень (цветет липа); август – жнивень (пора жатвы); декабрь – снежень (время снегопадов).

– Как в белорусском языке называются месяцы года и почему?

Тема. Единицы длины.

– Мы уже знакомились с вами с мерами длины у разных народов. На Руси были свои меры длины. Сегодня мы узнаем о них много интересного. Древнейшими из русских мер длины являются локоть и сажень. Длина локтя считалась длина "от локтя до переднего сустава среднего перста". Первое упоминание о сажени, равной трем локтям, имеется в летописи 1017 года. Также на Руси была такая мера, как косая сажень – расстояние от каблука левой ноги до конца пальцев поднятой вверх правой руки. До сих пор сохранилось выражение "косая сажень в плечах" (так говорят о широкоплечем человеке). Широко была распространена мера длины пядь – расстояние от конца большого пальца до конца малого при наибольшем возможном их раздвижении. Из Турции пришла мера аршин.

Большие расстояния измеряли в верстах.

1 верста≈1 км=500 саженям

1 сажень=3 аршина≈2 м

1 аршин=71 см.

Тема. Килограмм. Грамм.

– В Древней Руси пользовались различными мерами массы предметов. Для сыпучих веществ были бочка и кадь (оков) – та же кадь, но окованная железным обручем у краев, чтобы нельзя было ее "урезать". По летописи XVII века кадь была хлебной мерой, вмещавшей около 230 кг ржи. Она делилась на 2 половинки и 8 осьмин.

Тема. Единицы измерения площади.

– Вспомните старинные меры длины.

– В Древней Руси были и свои меры площади. Мерами площади государственных земель с XVI века были десятина и четь (половина десятины). Сначала десятина была квадратом со стороной в 50 саженей. Позже десятиной стали считать прямоугольник со сторонами в 30 и 80 саженей. Крестьянские пашни измерялись четвертями в 1200 саженей квадратных. Существовали еще различные местные меры земли: коробья, веревка. Величины этих мер менялись от одной местности к другой, поэтому не имели постоянного значения.

Тема. Килограмм. Грамм.

– Древнейшей русской весовой единицей является гривна. Масса гривны составлял 410 грамм. Термин "пуд" употреблялся в смысле "вес" или "тяжесть". Должностные лица, проверявшие весы, назывались "пудовщиками" или "вещами". В России использовали также меру масса в 1 фунт, равную приблизительно 410 грамм. Использовали и меньшие меры, к примеру, золотник. От него пошло выражение "мал золотник, да дорог". А что представляет собой этот золотник? Это мера массы, равная примерно 4 граммам.

У разных народов были свои единицы массы. Поэтому сначала более 200 лет назад ученые Франции предложили ввести эталон массы. Для этого изготовили куб, сторона которого равнялась 10 см, наполнили его дистиллированной (очищенной) водой, довели ее температуру до 4^0С и взвесили. Массу этой воды стали считать равной 1 кг. Затем из платины изготовили цилиндрической формы гирю такой же массой, которая и стала эталоном – образцом 1 кг.

Тема. Год, неделя.

– Семидневная неделя возникла в Вавилоне. Дни недели связывались с семью известными вавилонянам "блуждающими" небесными телами: Солнце, Луна, Венера, Марс, Меркурий, Юпитер, Сатурн. Название дней недели во многих языках напоминает об их происхождении.

Римляне имели сначала восьмидневную неделю (каждый восьмой день – базарный). С признанием христианства была введена семидневная неделя с днем отдыха в воскресенье.

Год сначала почти всеми народами определялся по движению Луны. Так поступали в особенности южные народы. Одним из объяснений этого явления было то, что переходы в южных пустынях совершаются из-за дневной жары главным образом ночью при Луне и время, естественно, измерялось по Луне. Но со временем год стали определять по Солнцу.

Тема. Час. Минута.

Первые солнечные часы в Греции установлены Анаксимандром в 550 году, а в Риме – в 164 г. до н.э. По движению тени по 12 частям окружности делили день на 12 часов.

Также известны нам водные часы, определяющие промежутки времени по истечению воды (также устроены песочные часы). Ими пользовались в Древнем Китае, в Египте, в Вавилоне. Древнейший будильник был изобретен Платоном около 350 г. до н.э. В 507 г. до н.э. Боэций изготовил для Бургундского короля водяные часы с боем (металлическими шариками, падавшими в металлическую чашку). Около 815 г. во дворце Византийского императора Теофила имелись большие автоматические часы неизвестного устройства.

Постепенно часы приняли современный вид – циферблата с палочками. Первое упоминание о часах с колесами относится к 1300 году. Первые карманные часы описаны в 1679 г. С этого же времени показания часов достигают точности минуты и на часах появляется минутная стрелка.

§2.5. Принцип историзма в изучении геометрического материала

Знакомство учащихся с геометрическим материалом в начальных классах является своего рода пропедевтической работой для изучения этого материала на следующих этапах обучения. Основными задачами изучения элементов геометрии на начальной ступени являются:

– развитие логического мышления учащихся, привитие им элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений;

– развитие пространственных представлений;

– ознакомление с простейшими дедуктивными умозаключениями на основе наблюдения, сравнения, обобщения;

– формирование элементарных умений и навыков в выполнении построений с помощью основных инструментов: циркуля, линейки, угольника, формирование рациональных приемов построения;

– формирование умений и навыков измерения геометрических величин.

Место элементов истории при изучении геометрического материала мы определяем исходя из анализа ныне действующих учебных программ и учебников для начальной школы, а также соответствия познавательным и возрастным особенностям младших школьников.

Изучаемая тема	Тема исторической справки
Прямые и кривые линии	История возникновения геометрии. Из истории появления прямой линии.
Измерение длины.	Из истории линейки.

Изучаемая тема	Тема исторической справки
Углы. Классификация углов.	Из истории возникновения понятия "угол".
Прямоугольник	Знакомство древних народов с простейшими геометрическими фигурами.
Квадрат	О названиях геометрических фигур.

Изучаемая тема	Тема исторической справки
Классификация треугольников (равносторонний, равнобедренный, разносторонний, остроугольный, прямоугольный, тупоугольный)	Из опыта древних: задачи на построение
Луч	Из истории возникновения понятия луча (наблюдение предметов)
Классификация прямых (параллельные, пересекающиеся перпендикулярные, взаимно перпендикулярные)	Из истории построения древних (строительский опыт)
Параллелограмм	Из истории возникновения понятия.

Треугольник	Исторические задачи
Объемные фигуры: пирамида, куб, шар, призма	Исторические задачи. Из истории пирамиды.

Приведем несколько фрагментов уроков, разработанных в соответствии с данной программой.

Тема. Прямые и кривые линии.

Цели: познакомить с прямыми и кривыми линиями; научить чертить прямую линию; развивать пространственное воображение, логическое мышление.

– С сегодняшнего дня мы будем совершать путешествие по необычной стране. Этой страны нет на карте, но возникла она давным-давно. Называется эта страна Геометрия. Что же это за страна Геометрия? Гео – это земля, а метрия – измерение. Что же получилось? (Измерение земли).

– Да, буквально получилось: измерение земли. Наука об измерении земли появилась в Древнем Египте. В Египте (можно показать на географической карте) есть огромная река Нил. Каждый год эта река выходила из своих берегов и смывала границы земельных участков. Чтобы восстановить эти границы, необходимо было каждый год снова и снова измерять землю. Эту трудоемкую работу и должна была облегчить наука "Геометрия". (Учитель произвольно располагает ворсистую нить на фланелеграфе).

– Ребята, на что похожа эта веревочка? (На линию.) Изобразите на фланелеграфе какую-нибудь другую кривую линию. Сколько разных линий можно получить?

– Придумайте слова, которые похожи на слово линия. (Лен, линейка, линейный и т.д.)

– Лен – это растение. (Учитель демонстрирует картину или гербарий.)

– Что делают изо льна? (Одежду, постельные принадлежности, полотенца и пр.)

– Волокно у льна похоже на линию. Наши предки давно это заметили и возможно название "линия" происходит от слова лен.

– Можно ли с помощью веревки изобразить не кривую линию, а прямую линию?

Древние люди эти действия осуществляли именно при помощи натягивания веревок: древние греки так и называли египетских геометров гарпедонтай – натягиватели веревок.

А чем пользуются современные люди и вы в том числе, чтобы провести прямую линию? (Линейкой.)

Тема. Измерение длины.

Цели: учить измерять длину с помощью линейки, развивать глазомер.

– Как мы можем сравнивать длину предметов? (На глаз, накладыванием, по клеточкам.)

– А как поступить, если мы не можем ни наложить предметы друг на друга, ни посчитать клеточки, потому что их нет?

Для этого у нас есть линейка. В 1989 году у линейки был юбилей. Ей исполнилось двести лет. Однако линейкой пользовались и в более поздние времена. В средневековье, например, немецкие монахи для разметки линии на местах пергамента пользовались тонкими свинцовыми пластиками. А в ряде стран Европы, в том числе и в Древней Руси, для этих целей применяли железные прутья. В летописях их называли "шильцами". У школьников линейки появились в конце XIX века. В Россию линейка попала в 1812 году в качестве военного трофея

Тема. Возникновение геометрических фигур.

Цель: познакомить с геометрическими фигурами (квадрат, треугольник, круг) и историей их возникновения.

– Древний человек для того, чтобы выжить занимался охотой, собирал корешки, позднее он начал обрабатывать землю. Поначалу наш предок в качестве орудий труда использовал различные палки, ветки деревьев. Постепенно человек стал изготовлять орудия, кремневые пластинки, имеющие форму треугольника, ромба и т.д. Эти формы возникали очень медленно, ведь человеку нужно было все испробовать на практике, и только после этого древний человек получал знания о том, какая из форм лучше приспособлена к тому или другому делу. Представления о многообразии форм окружающих предметов стали развиваться после того, как человек начал изготовлять посуду, одежду, строить дома.

Наблюдая и сравнивая, люди заметили, что некоторые животные, орудия труда, одежда, растения имеют подобную форму. Стилизация этих форм и привела к возникновению хорошо известных нам геометрических фигур: круг, квадрат, треугольник и др. Сочетанием этих фигур – орнаментами древний человек украшал свои изделия, изображал фигуры людей и животных.

Тема. Построение прямого угла.

Цели: обратить внимание на соотношение длин сторон прямоугольного треугольника, учить строить прямой угол.

Ребята, постройте треугольник со сторонами 3, 4, 5 см.

Какой это треугольник? (Прямоугольный.)

Почему? (У него есть прямой угол.)

Египтяне тоже знали, что треугольник с такими сторонами является прямоугольным.

Веревку, разделенную узлами на 12=3+4+5 частей, они использовали для построения прямого угла. Догадайтесь, как они это делали? Учитель предлагает веревочку длиной 12 дм с соответственно расположенными на ней узлами и просит вызванных к доске учеников продемонстрировать египетский способ построения прямого угла – зафиксировать положение треугольника, вершинами которого являются узлы на веревке. Правильность построения проверяется затем с помощью угольника.

Тема. Объемные фигуры.

Цели: сформировать представление о некоторых объемных формах, развивать пространственное воображение.

– Какие объемные фигуры вы знаете? (Пирамида, куб, цилиндр.)

– В древности Египет был очень сильным и стабильным государством. Египтяне уважали своих фараонов не только пока они были живы и правили государством, но и после их смерти. Египтяне, не жалея средств, строили своим покойным царям роскошные гробницы в виде пирамид и помещали туда вместе с мумией фараона множество подарков, которые, как они верили, непременно пригодятся умершему в загробной жизни.

– Прочитайте числа, записанные на доске: 147, 233, 230000.

– 147 м – это высота самой большой из всех египетских пирамид, пирамиды Хеопса. 233 м – это длина стороны ее основания. Вся пирамида целиком сложена из тщательно отесанных каменных блоков весом около 3 т каждый, причем на сооружение пирамиды ушло более 2300000 таких блоков.

– Сколько тонн примерно весит пирамида Хеопса?

На уроках при изучении соответствующих геометрических тем можно познакомить учащихся и с нерешенными в математике задачами. Для некоторых детей такие исторические примеры могут ослабить чувство неуверенности в себе, у других – пробудить желание испробовать свои интеллектуальные силы, но для всех детей, скорее всего, они будут интересными и полезными.

1. Задача о трисекции угла.

В геометрии существуют задачи, которые нельзя решить. Одной из таких является задача о разделении угла на три равные части с помощью циркуля и линейки. Как ни старались ученые древности разрешить эту задачу, используя только циркуль и линейку, ничего у них не получилось.

2. Задача о квадратуре круга.

Представьте себе круг, площадь которого вам известна. Можно ли построить квадрат такой же площади? Эту задачу математики называют квадратурой круга. Первоначально ее пытались решить с помощью циркуля и линейки без делений, рассматриваемой как инструмент для проведения прямой линии. Математики древности знали ряд случаев, когда с помощью этих инструментов удавалось преобразовать криволинейную фигуру в равновеликую прямоугольную. Но никому не удавалось решить задачу о квадратуре круга. В 1775 году Парижская академия наук, а затем и другие стали отказываться от рассмотрения работ, посвященных квадратуре круга. А в XIX веке была строго установлена неразрешимость квадратуры круга с помощью циркуля и линейки.

3. Задача удвоения куба.

Существует легенда: во время чумы на острове Демос в Эгейском море оракул приказал для прекращения эпидемии вдвое увеличить объем жертвенника, сделанного в формы куба. Как ни старались древние математики решить эту задачу с помощью циркуля и линейки, ничего у них не получилось.

4. Построение параллельных прямых (измерение углов).

Построить параллельные прямые очень трудно, потому что на глаз невозможно точно определить расстояние между прямыми. Непросто это сделать и с помощью линейки и угольника (учитель показывает способ их прикладывания друг к другу), потому что одному человеку неудобно одновременно пользоваться двумя инструментами. Фалес предложил достаточно простой способ, позволяющей точнее и легче справиться с решением задачи на построение параллельных прямых. Фалес (624–547 до н.э.) родился в городе Милете, занимался торговлей, ему удалось по роду своей деятельности побывать в Египте, познакомится с теми знаниями, которыми обладали египетские жрецы. Открытие, сделанное Фалесом, поможет нам построить параллельные прямые, пользуясь только линейкой. Для этого сначала построим любой угол. На одной его стороне построим два произвольных отрезка. С помощью линейки на другой стороне угла, начиная от любой точки, отложим такие же отрезки. Последовательно соединим концы отрезков и получим параллельные прямые. А как построить две, четыре, семь параллельных прямых?

Тема. Периметр.

Цель: формирование навыка вычислять периметр прямоугольника, квадрата.

– Ребята, что такое периметр прямоугольника? (Это сумма длин всех сторон прямоугольника.)

Слово "периметр" происходит от греческого слова "пери", обозначающего "вокруг, около", и греческого слова "метро", означающего "измеряю", т.е. дословно "измеряю вокруг (около)".

Решите задачу.

Площадь прямоугольного участка равна 16. Чему могут быть равны стороны этого участка?

$16=4\cdot4$; $16=8\cdot2$; $16=16\cdot1$

– Найдите периметр всех этих участков.

$p_1=(4+4)\cdot2=16$

$p_2=(8+2)\cdot2=20$

$p_3=(16+1)\cdot2=34$

– Если пришлось бы строить забор, то на какой участок потребовалось материала меньше? (На участок квадратной формы, потому что у него меньше периметр.)

– Наши предки тоже заметили, что при одинаковой площади с другими участками наименьший периметр имеет квадрат. Поэтому, свои земельные участки они старались сделать квадратной формы. В этом вы можете убедиться, посетив археологический музей Берестье на территории Брестской крепости близ Бреста.

Полезной для запоминания учебного материала, привлекающей внимание учащихся, может оказаться информация о происхождении некоторых геометрических терминов.

Термин "квадрат" происходит от латинского слова "квадратус" – четырехугольный.

Название "конус" происходит от греческого слова "кюбос", означающего "игральная кость".

Название "параллепипед" происходит от греческого слова "паралелос", означает параллельные, и греческого слова "эпипедос", означающего плоскость, поверхность.

Название "призма" происходит от греческого слова, означающего отпиленный кусок.

Название "пирамида" происходит от слова "пеорамис". По одному мнению термин происходит в свою очередь от египетского слова "боковое ребро сооружения", по другому мнению от формы хлебцев в Древней Греции, по третьему мнению – пламя иногда напоминает пирамиду.

Название "цилиндр" происходит от греческого слова, означающего "валик, каток".

Термин "градус" произошел от латинского слова, обозначающего "шар", "ступень". Как заметили вавилонские жрецы, солнечный диск укладывается по дневному пути Солнца 180 раз, то есть "Солнце делает 180 шагов". Тогда путь за сутки равен "360 шагов". Круг стали делить на 360 частей. Обозначения, напоминающие современные, использовались древнегреческим ученым Птолемеем, современные знаки ввел французский ученый Ж. Пелетье (1558).

Не существует единой точки зрения на происхождение колеса – круга. Одни из ученых считают, что возникновение колеса связано с предельным переходом удвоения сторон правильных многоугольников (при $n \to \infty$, где n – количество сторон). По мнению других, возникновение колеса связано с наблюдениями человека за окружающей действительностью: занимаясь вырубкой леса, он замечал, что полученные из них бревна, могут катиться, что и является существенным свойством круга.

Глава 3

Методология начального курса математики

Любая деятельность начинается (определяется) методологией, т.е "формой рефлексивного осмысления предпосылок, средств и методов рационализации и оптимизации деятельности. В более узком смысле методология – учение о методах познания, структуре и динамике научного познания" [56, с.89].

Метод во всякой деятельности – это способ достижения цели. В философской энциклопедии говорится, что "метод есть форма практического и теоретического освоения действительности, исходящего из закономерностей движения изучаемого объекта, система регулятивных принципов преобразующей практической или познавательной теоретической деятельности..., в педагогике – система воспитательных и образовательных средств, в науке – способы исследования и изложения материала" [63, с.409]. Методы научного познания – это совокупность мыслительных и физических операций и приемов, которые ведут к получению новых знаний. Шапоринский С.А. делает два существенных вывода о методах в гносеологии: "1. В гносеологии понятие метода соотносится и со способом преобразования (практической деятельностью), который и в том и в другом случае необходимо основан на знании сущности, закономерностей познаваемого или преобразующего объекта. 2. В логике научного познания в методе вполне правомерно выделяются объективная и субъективная стороны. Любая наука имеет свои методы и теории, различающиеся лишь функциями. Для первой существует критерий истинности, для второй правильности. Критерий истинности обращен к сущности объекта.... Критерий правильности обращен к деятельности по применению метода" [94, с.154].

Если говорить о методах в обучении, то здесь многие дидакты и методисты абсолютизируют субъективную сторону, основанную на деятельностной стороне обучения, а не на объективной, что не совсем правомерно. Рассмотрим основные методы познания и их реализацию при обучении математике в начальной школе.

§3.1. Экспериментальные методы познания

Ценность всякой науки обеспечивается двумя моментами: 1) систематизацией известных фактов и 2) возможностями достоверных предсказаний поведения реальных систем. В этом смысле математика – весьма ценная наука, так как ее систематизация доведена до совершенства, а получаемые путем дедуктивных доказательств выводы не оставляют каких-либо сомнений в их истинности. При этом все базовые математические понятия формируются экспериментальными методами, среди которых наиболее важными являются наблюдение, опыт, измерение. Особенно широко используются эти методы при обучении математике в начальных классах, что определяется конкретно-образным характером мышления младших школьников.

Наблюдение является исходным элементарным процессом зарождения научного знания посредством экспериментального познания. Согласно преданию, Фалес, наблюдая подъем и понижение уровня воды в реке Нил, предсказал затмение Солнца, зафиксированное в 585 г. до н.э.

Наблюдение напрямую связано с чувственным познанием, составляющие которого – ощущение, восприятие, представление. Поэтому обучение школьников, особенно младших, является более эффективным, если изучаемые объекты воспринимаются непосредственно зрительно или с помощью других органов чувств. Реализовать эти условия при обучении математике можно с помощью различных методических приемов, основанных на использовании разнообразных средств наглядности и раздаточного дидактического материала.

На основе наблюдения формируется большинство математических понятий. В начальных классах для раскрытия содержания вводимых понятий широко используется прием показа конкретных предметов, входящих в объемы этих понятий. Например, формируя понятие "квадрат", учитель демонстрирует ученикам квадраты различного цвета и размера, сделанные из бумаги, стекла, пластмассы. Для того, чтобы они правильно выделяли существенные признаки изучаемых предметов, необходимо варьирование (видоизменение) как существенных, так и несущественных признаков этих предметов, т.е. нужно предлагать такие объекты, у которых изменяются как существенные, так и несущественные признаки. Например, среди показанных фигур должны быть не только квадраты разного размера, цвета или материала, но и неквадраты.

Метод наблюдения, реализуемый через показ конкретных предметов, часто выступает доказательством существования определяемых объектов, например, четных и нечетных чисел, математических выражений и т.д.

Эксперимент. Эксперимент, как и наблюдение, относится к эмпирическому уровню не только научного, но и учебного познания. Однако между ними имеется весьма существенное с точки зрения гносеологии отличие, состоящее в том, что эксперимент является одной из основных форм практики как предметно-орудийной преобразующей внешний мир деятельности человека, в то время как наблюдению свойственны черты созерцательности. По-другому говоря, эксперимент отличается от простого наблюдения своим активным характером, вмешательством в естественный ход событий. Это одна из форм практики, выполняющей как эвристическую, так и критериальную функции.

Философское определение эксперимента как метода научного познания дает Штофф В.А.: "Эксперимент есть вид деятельности, предпринимаемой в целях научного познания, открытия объективных закономерностей и состоящей в воздействии на изучаемый объект (процесс) посредством специальных инструментов и приборов, благодаря чему удается: 1) изолировать исследуемый объект от влияния побочных, несущественных и затемняющих его сущность явлений и изучать его в "чистом" виде; 2) многократно воспроизводить ход процесса в строго фиксированных, поддающихся контролю и учету условиях; 3) планомерно изменять, варьировать, комбинировать различные условия в целях получения искомого результата" [95, с. 63].

Если проследить историю возникновения этого метода, то можно отметить, что эксперимент как научный метод имел место, начиная с античности. Так пифагорейцы экспериментально установили зависимость высоты и тональности звуков, издаваемых струнами в зависимости от степени их натяжения. Опыт Пифагора с монохордом отвечает всем требованиям эксперимента. Монохорд – прибор для определения высоты тона струны и ее частей. Состоит он из резонаторного ящика с натянутой над ним струной и расположенной над ней подвижной подставкой для изменения высоты звука. Изобретение монохорда приписывают самому Пифагору. С помощью этого инструмента была создана числовая система интервальных соотношений. Архимед дал классический пример эксперимента при определении плотности, площади поверхности и объема различных тел. Птолемей (83-161гг. н.э.) экспериментально определил коэффициенты преломления воздуха, стекла, воды.

Здесь следует отметить, что любой опыт и базисное эмпирическое знание имеют двоякую природу: в них даны не только свойства (вещи), но и отношения (действия). Ж. Пиаже разъясняет это так: "Если все знание предполагает эксперимент для своего осуществления, то это психологическое утверждение не оправдывает эмпиризма, потому что существует две формы эксперимента: эксперимент физический, ведущий к абстракции свойств, взятых от самих предметов, и эксперимент логико-математический с абстракцией по отношению к действиям и операциям, осуществляемым над предметами, а не по отношению к самому предмету как он есть" [74, с.29-30]. Из этого следует, что математика, эмпирически отражая в своих исходных положениях данную реальность действий и отношений, отнюдь не "второсортна" по сравнению с реальностью физической.

Эксперимент в обучении математике выполняет следующие функции: 1) является источником новых знаний, которые затем систематизируются и обобщаются в понятиях, законах, теориях; 2) эксперимент является критерием истинности любого положения, гипотезы; 3) через эксперимент осуществляется связь математических знаний с жизнью (быт, техника, производство).

Особенно важную роль экспериментальные методы установления математических фактов играют в младших классах, позволяя привлекать непосредственный опыт ребенка. Для этой цели учащимся предлагается выполнение различных манипулятивных действий с рационально подобранными объектами: сгибание, наложение, перемещение фигур и т.д. Например, в дочисловой период при знакомстве с отношениями "больше", "меньше", "столько же" уместно использование метода наложения в поиске ответа на вопрос: "Чего больше?" Этот же метод можно использовать при доказательстве того, что 6 <7, 8> 5 и т.п.

Учитель организует работу учащихся с индивидуальным счетным материалом, предлагая такие задания: "Положите 6 кружков, под ними 7 квадратов. Посмотрите на образец на доске, правильно ли вы это сделали? Каких фигур больше? Сделайте так, чтобы квадратов стало столько же, сколько кружков. А теперь – чтобы квадратов стало больше, чем кружков". Задания повторяются с другими фигурами. Дидактические цели подобных заданий одинаковы: формировать у учащихся умение сравнивать группы предметов и вести счет, раскрыть конкретный смысл натурального числа.

Нередко опыт (эксперимент) более убедителен для учащихся, чем логическое доказательство. Так, например, возможно двояко познакомить с теоремой о равенстве треугольников. Можно излагать ее так, что ученик кроме самой теоремы ничего не усвоит. Эта теорема будет говорить ученику только то, что в ней утверждается, и он сможет повторить ее как отдельное усвоенное сведение. Но эту теорему можно преподать так, что вместе с ней ученик "почувствует" метод, которым она доказана. В последнем случае теорема будет говорить ученику больше того, что можно прочитать в ее формулировке. Увидев путь, которым была доказана эта геометрическая теорема, ученик сможет уже сам продолжить полученное движение мысли, самостоятельно придти к нахождению и доказательству новых теорем аналогичного типа. Обоснование указанной выше теоремы можно осуществить экспериментальным методом (путем наложения треугольников друг на друга) или не совсем строгим доказательством, которое в настоящее время предложено в школьном учебнике геометрии. Если разумно выбран метод доказательства, то при этом происходит обучение не только теореме, но и методу научного знания, а задача обучения как раз и заключается в овладении методами познания.

Практические запросы людей, нуждающихся во все более точных знаниях (потребности измерения площадей земельных участков, вместимости сосудов, счисление времени и т.д.) стимулировали появление прикладной математики, вычислительных методов. С самого начала приемы количественной информации разделились на 2 группы, сообразно объективным различиям между дискретным и непрерывным. Это – счет и измерение.

Счет как метод получения точной количественной информации основан на установлении взаимно-однозначного соответствия между элементами конечного множества и отрезком натуральных чисел, начиная с единицы.

Измерение. Измерение является одним из экспериментальных методов в научном и учебном познании. На важность этого метода обращал внимание еще Г.Галилей, утверждая, что нужно "измерить все измеримое и сделать измеримым все, что пока не поддается измерению".

Какова гносеологическая природа процесса измерения? С одной стороны, это, кажется, очень просто, так как мы каждый день измеряем что-либо: длину окна, ткани, массу сахара, скорость автомобиля и т.д. Но вместе с тем существует определенная наука – метрология, которая занимается выбором и установлением единиц измерения, созданием их эталонов, разработкой методик точных измерений.

В некоторых случаях получение информации о количественных характеристиках предметов или явлений не представляет собой трудностей и может быть достигнуто путем сравнения одних предметов с другими с помощью органов чувств. Так, например, в обыденной жизни мы сравниваем рост и массу членов своей семьи.

Под измерением понимают познавательный процесс, заключающийся в сравнении величины с величиной, принятой за единицу измерения. Сначала в каждой стране пользовались своими единицами измерения, но в конце XVIII века во Франции была создана метрическая система мер, которая в настоящее время применяется во всем мире и в которой были установлены единицы измерения: длины – метр, массы – килограмм, времени – секунда т.д.

Старый платиноиридиевый эталон метра (международный прототип) хранится в подвалах Севра во Франции. Сейчас единицей длины – метром называют 1650763.73 длин волн излучения, соответствующего переходу между уровнями 2 p и 5 d атома криптона 86.

Масса в 1 кг – это масса платиноиридиевого прототипа, утвержденного международной конвенцией в Париже в 1889 г, хранящегося в Севре.

Время 1 с – это интервал времени, в течение которого совершается 9192631,770 колебаний атомов цезия – 33 из возбужденного в нормальное состояние.

Измерение относится к числу количественных методов исследования, цель которых состоит в том, чтобы наиболее полно отобразить в научном знании объективные количественные отношения, выраженные в числе и величине. Следовательно, онтологической основой применения количественных методов является наличие в объекте таких свойств и отношений, которые характеризуются числом и величиной.

В измерение как форму эмпирического познания входят следующие элементы:

– объем измерения, т.е. измеряемая величина;
– материальные средства измерения, среди которых могут быть как приборы и инструменты, сконструированные человеком, так и предметы, данные природой;
– экспериментатор, т.е. познающий субъект, осуществляющий измерение с определенными познавательными целями;
– способ или метод измерения, который представляет собой совокупность практических действий, операций, выполняемых с помощью измерительных приборов, и включает в себя также определенные логические и вычислительные процедуры;
– результат измерения – число, показывающее, сколько в измеренной величине содержится единиц измерения.

Измерения бывают прямые и косвенные. Прямое измерение – это измерение, при котором значение величины определяется непосредственным сравнением с ее единицей. Например, измерение длины отрезка с помощью линейки, площади фигуры с помощью палетки, массы тела с помощью весов. При таком измерении свойства измерительного инструмента играют существенную роль. Так, например, весы должны быть хорошо сконструированы: плечи коромысла должны быть равной длины, гири иметь постоянную удельную массу; длина метра также должна быть постоянной и не меняться в зависимости от температуры. Косвенным называют измерение, при котором числовое значение величины находится по формуле путем вычисления. Например, масса тела определяется как произведение плотности вещества, из которого оно сделано, на объем тела: $m=\rho V$. Чаще всего приходится выполнять косвенные измерения.

Итак, измерения являются познавательным процессом приобретения объективного знания благодаря тому, что оно, будучи экспериментом особого рода, основано на: а) активном воздействии на объект исследования; б) применении измерительных приборов и инструментов; в) учете особенностей реальных взаимодействий между объектом и прибором; г) использовании логико-математических и специально-научных теоретических знаний [95].

С измерением как одним из элементарных методов познавательного процесса учащиеся знакомятся уже в начальной школе, где начинается формирование представлений о величине как некотором свойстве предметов и явлений, связанном, прежде всего, с измерением

Измерение, как известно, заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длин он один, для площадей – другой, для масс – третий и т.д. Но каким бы ни был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное числовое значение при выбранной единице измерения. Таким образом, важным шагом в изучении величин является формирование представлений об измерении. Большую роль в этом деле могут сыграть различные ситуации проблемного характера, для разрешения которых учащиеся младших классов могут использовать имеющийся у них опыт. Например, на доске прикреплены 2 полоски (90 см и 120 см). Учитель обращается с вопросом: "Как Вы думаете, длина какой полоски больше?" Ученики могут высказать правильное предположение, но его нужно обосновать. Сначала они предлагают известный им способ действий (наложение). Учитель ставит условие: полоски снимать нельзя. Отыскивая новый способ действия, ученики могут предложить для этой цели карандаши, ручки, веревочки и т. д. Учитель в свою очередь предлагает им воспользоваться для обоснования ответа планками разных цветов и размеров: красной – 30 см, синей – 15 см. Укладывая красную планку по длине первой и второй полосок, учащиеся, пока еще не осознавая этого, осуществляют измерение. В результате измерения первой полоски они получают число 4, второй – 3 и самостоятельно приходят к выводу, что 4 > 3, а значит, длина первой полоски больше второй.

"А теперь я сам попробую выяснить с помощью планок, какая полоска длиннее", – говорит учитель. Он берет красную планку (30 см) и укладывает ее по длине полоски (120 см) – получает число 4, затем берет синюю полоску (15 см) и укладывает по длине второй полоски (90 см), получает число 6.

У учителя получается 4<6. Значит, длина первой полоски меньше длины второй. Так кто прав: учитель или ученики? Учащиеся находят причину ошибки.

Таким образом, проблемная ситуация позволяет ученикам осознать тот факт, что для сравнения длины полосок необходимо пользоваться одной меркой, и подводит их к пониманию того, что числовое значение величины зависит от выбранной единицы. В результате практической деятельности учащиеся самостоятельно приходят к выводу о необходимости введения единой меры длины, а учитель знакомит их с общепринятой единицей измерения – сантиметром.

После введения первой единицы длины учитель знакомит детей с линейкой и приступает к формированию у них измерительных умений и навыков. Знакомство с каждой новой единицей обязательно связано с практическими действиями школьников. Например, при введении дециметра учитель так должен построить изучение материала, чтобы дети, прежде всего, осознали необходимость введения новой единицы измерения длины. Для этой цели можно снова вернуться к сравнению двух полосок, например, 50 см и 70 см, предложив мерку в 1 см и 1 дм и дать задание – сравнить длины полосок с помощью предложенных мерок. Учащиеся на практике убеждаются в том, что пользоваться меркой в 1 см неудобно: это требует значительного времени, использование же второй мерки позволяет выполнить задание гораздо быстрее. Учитель сообщает, что длина второй мерки 10 см; ее принять называть 1 дециметр.

Аналогично проводится работа при изучении и измерении массы тел, ёмкостей (объёмов) жидкостей. Например, учитель предлагает ученикам 2 яблока, которые незначительно отличаются по массе друг от друга и спрашивает: "Какое яблоко легче, а какое тяжелее?" В данном случае его задача заключается в том, чтобы мнения по поводу массы яблок разошлись. Возникшие разногласия учитель использует для того, чтобы дети убедились в необходимости использования весов для измерения массы тел и их сравнения.

Интересным для учащихся будет знакомство со способом измерения площадей фигур разнообразной формы, предложенным Архимедом. Суть его заключается во взвешивании и сравнении массы фигуры и массы изготовленного из того же материала квадрата со стороной, равной единичному отрезку.

Знакомство учащихся начальной школы с величинами и их измерением имеет не только практическое значение. Сам процесс изучения этого вопроса оказывает влияние на развитие познавательных способностей, на формирование умения видеть проблему и находить пути ее решения.

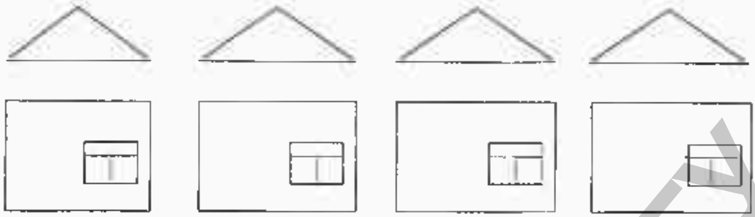
§3.2. Общелогические методы познания

Сравнение – метод познания, состоящий в сопоставлении одинаковых по существенным для данного рассмотрения признакам предметов, посредством которого выявляются их качественные и количественные свойства.

Сравнение как одно из понятий методологии рассматривается в философии, педагогике, психологии, математике и других науках.

Сравнить – значит сопоставить одно с другим с целью выявления их возможных отношений. Задания на сравнение предметов, изображений используются при психологических исследованиях развития мышления вообще и у учащихся младшего школьного возраста, в частности, показательно в этом плане знакомство учеников начальных классов с отношением "больше", "меньше", "столько же".

На доске учитель рисует крыши от домов вдоль одной линии, и под каждой из них – домики без крыши, также расположенные вдоль одной линии.



У ребенка спрашивают: "Больше домиков или крыш? "Дети без труда отвечают, что "их столько же". Или что их "одинаково". Затем, ничего не убирая, и не добавляя, учитель отодвигает предметы, расположенные на одной прямой, например, таким образом, как показано на рисунке:

Эта трансформация осуществляется на глазах ребенка. Затем ему задают тот же вопрос, что и раньше: "Чего больше: домов или крыш?" Дети до 6–7 лет в зависимости от индивидуальных особенностей будут отвечать, что крыш больше, потому что это длиннее, или что это "вылезает", или что больше домов, потому что они более плотно расположены. В процессе установления соответствия между двумя множествами дети приходят к выводу, что количество домов и крыш одинаково со следующими аргументами: "Ничего не добавили и не отняли", "Можно сделать, как было раньше" и т.д.

Подобная организация обучения, в основе которого лежат психологические эксперименты Пиаже, позволяет формировать у учащихся полноценное умение сравнивать познаваемые объекты по заданному основанию, не принимая во внимание несущественные для этого основания признаки.

С помощью сравнений выявляются количественные и качественные характеристики предметов, устанавливаются связи между предметами и явлениями. Деятельность по сравнению объектов, очевидно, лежит в основе отношений эквивалентности и порядка, необходимых для развития понятия числа, т.к. отношения между числами опираются на отношения между объектами.

Сравнение – необходимое средство как чувственного, так и рационального познания. На уровне чувственного познания сравнение протекает в форме наглядного сопоставления объектов и направлено на установление сходства и различия вещей по цвету, форме, величине или другим внешним, непосредственно воспринимаемым качествам.

При рациональном познании задачей сравнения является определение существенных свойств объектов, более глубоких, скрытых от непосредственного восприятия. Оно принимает форму рассуждения с опорой на логические принципы и предметные абстракции.

Соответственно существуют два способа сравнения объектов A и B:

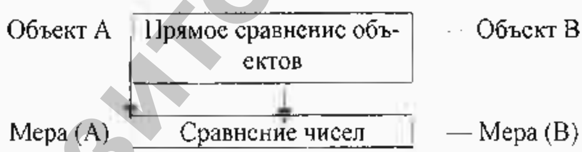
1) прямое, непосредственное сравнение двух объектов.

2) непрямое, опосредованное сравнение, которое состоит в том, чтобы сначала измерить A и B, а затем сравнивать полученные таким образом числа: m(A)*m(B).

Как видим, метод сравнения может опираться и на измерение, как метод исследования, сводящий непосредственное сравнение объектов к сравнению их количественных характеристик.

Однако нужно иметь в виду, что даже в такой простой задаче, как сравнение двух множеств, числа играют относительно сложную роль. Эта роль не всегда очевидна для детей, и если не обращать на нее внимание, то можно спутать отношения между множествами с отношениями между числами, хотя вторые опираются на первые и являются их прообразом.

В общем виде роль чисел в сравнении объектов можно представить следующим образом:



Так существует способ сравнения отрезков путем наложения их друг на друга. В результате такого непосредственного сравнения отрезки можно расположить по порядку возрастания или убывания их длины. Таким методом можно сравнивать, углы, круги, квадраты. А для произвольных фигур в математике разработан метод опосредованного сравнения с помощью измерения. Для этого сравниваемые (предметы) объекты измеряют с помощью одной и той же единицы измерения, а затем сравнивают полученные числа. Например, для сравнения двух прямоугольников по площади их измеряют с помощью единицы измерения – квадрата со стороной, равной единице длины, после чего остается сравнить полученные числа.

Объекты можно сравнивать не по одному какому-то свойству, а, как правило, по разным и многим признакам. Например, треугольники можно сравнивать по площади, периметру, виду углов, по соотношению сторон.

В качестве объектов прямого сравнения могут выступать и сами числа. Такие познавательные задачи решаются только на ступени рационального познания. Например, для ряда чисел 1, 4, 9, 16, 25, 36 выявляются существенное общее свойство: все они представляют собой квадраты последовательных натуральных чисел.

Выявить общее свойство представленных объектов не всегда бывает легко. Например, по какому общему свойству написана следующая последовательность чисел: 16, 12, 15, 11, 14, 10? Сравнивая эти числа попарно, замечаем:

$16-4=12$; $15-4=11$ $14-4=10$

$12+3=15$; $11+3=14$

Числа этой последовательности составляют так, что последующее число получается из предыдущего попеременно то вычитанием числа 4, то прибавлением числа 3.

Для сравнения чисел существует два основных способа: разностное и кратное сравнение. При разностном сравнении мы находим разность этих чисел и по ней судим, какое из данных чисел больше, а какое меньше и на сколько. При кратном сравнении положительных чисел мы находим их частное и по нему в зависимости от того, больше оно или меньше 1, судим, какое из данных чисел больше, а какое меньше и во сколько раз. Так, сравнивая разностным способом числа 4 и 12, находим, что $12-4=8$. Это значит, что 12 больше 4 на 8 или 4 меньше 12 на 8. Сравнивая же эти числа кратным способом, находим, что $4:12=\frac{1}{3}$, или $12:4=3$. Это значит, что 4 меньше 12 в 3 раза или составляет $\frac{1}{3}$ от 12, а 12 больше 4 в 3 раза.

Сложнее сравнивать алгебраические объекты: многочлены, уравнения, тождества, функции. Например, сравнивая многочлены, можно лишь установить, различаются ли они по числу переменных или по наивысшей степени переменных.

Как видим, сравнение лежит в основе классификации объектов, а измерение есть способ сравнения, и в то же время само измерение производится с помощью сравнения измеряемого объекта с единицей измерения.

Сравнение занимает большое место в процессе школьного обучения и воспитания. К.Д. Ушинский подчёркивал исключительную важность сравнения как "... основы всякого понимания и всякого мышления" [89, с.332].

В дидактике математики сравнение рассматривается как метод или прием обучения, который характеризуется чередованием упражнений на прямые и обратные операции, чередованием любых других задач, когда хотят подчеркнуть их взаимосвязь на основе признаков сходства или различия. Этот метод полезен особенно в тех случаях, когда ученики с трудом различают или даже смешивают задания. Например, учащиеся часто путают задачи на нахождение дроби от данного числа и числа по данной величине его дроби. Одновременное, а не раздельное введение задач обоих названных типов, выявление их сходства и различия, последующее чередование этих задач позволяет формировать у учащихся одновременно две обобщенные ассоциации, каждая из которых соответствует своему типу задачи. Прием сравнения удобно использовать при одновременном изучении многих тем школьного курса математики: сложение и вычитание дробей, умножение положительных и отрицательных чисел и др.

При объяснении и опросе необходимо в учебном материале обобщать сходное и направлять внимание учащихся на выделение отличного. Это удобнее вначале делать на качественном уровне, без употребления чисел, с помощью пар понятий, которыми надо пользоваться на уроках не только математики, но и развития речи:

больше – меньше	правее – левее
выше – ниже	тяжелее – легче
шире – уже	дальше – ближе
длиннее – короче	раньше – позже.

На основе собственных наблюдений и иллюстраций в учебнике дети утверждают: "Петя выше Коли", "Книга тяжелее блокнота" и т.д.

Сравнение как дидактический прием, а не только как метод познания, используется при обучении математике в школе по технологии укрупнения дидактических единиц (УДЕ) (П.М. Эрдниев). П.М. Эрдниев сводит прямые и обратные операции, понятия, отношения в пары (сложение и вычитание, умножение и деление, дифференцирование и интегрирование, показательная функция – логарифмическая), взяв каждую как проявление одной и той же дидактической единицы. Такой прием как раз и приносит желаемый эффект повышения информационной емкости знания, поскольку при образовании, например, пары "умножение – деление" происходит не просто суммирование количества информации, которое несет каждая из составляющих пару операций, а именно приращение информационного содержания.

В технологии УДЕ П. М. Эрдниева ведущим является противопоставление, т.е. подчеркивание отличий изучаемого явления, связанного в некотором отношении с другими. Это хорошо согласуется с психологическими особенностями детей, которые гораздо легче замечают различие между объектами, чем их сходство.

Так при одновременном рассмотрении сложения и вычитания чисел становится возможным на уроке сразу же пользоваться такими рабочими операциями, как проверка сложения вычитанием и наоборот, а также решать все виды простейших уравнений на нахождение неизвестных компонентов ($x+5=7$, $x-4=2$). В младших классах особенно полезно использовать этот подход, например, нахождение части от числа и числа по его части, задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз (на несколько единиц) и т.д.

При таком обучении в сознании учащихся не только закрепляется совокупность знаний, но и фиксируется метод познания – сравнение (противопоставление или сопоставление). В его состав входят следующие основные операции:

а) выделение сходных и различных признаков предметов;

б) деление их на существенные и несущественные;

в) выделение признаков, являющихся основанием сравнения;

г) формулирование вывода из проведенного сравнения.

Обучение сравнению необходимо разделить на два этапа – подготовительный и основной. На первом отрабатываются операции, входящие в прием сравнения, на втором этапе выполняются упражнения на самостоятельное и осознанное применение приема в варьирующихся условиях. Работа по овладению приемом сравнения ведется параллельно с изучением программного учебного материала. Критериями ее результативности могут служить объем сравнения (число сравниваемых признаков), владение правилами сравнения, глубина сделанного вывода, самостоятельное использование сравнения при изучении различного по содержанию учебного материала.

На первом этапе идет обучение выделению всех признаков только одного предмета (объекта) и их соотнесению именно с этим объектом. ***Признак предмета*** – это некоторая его особенность, то, что присуще данному предмету. Например:

1. Дана запись: 2+3=5. Назовите ее признаки. (В ней имеются числа 2, 3 и 5, знаки + и =, числа 2 и 3 – слагаемые, 5 – сумма, причем число 5 стоит справа от знака равенства и т.д.).

2. Дано число 72. Выделите все признаки, присущие этому числу. (Запись числа начинается цифрой 7, оканчивается цифрой 2, причем в этом числе 7 десятков, 2 единицы и т.д.).

3. Запишите число, в котором: а) 4 десятка и 3 единицы; б) число единиц 4, а число десятков на 2 больше.

По мере того как учащиеся овладевают этой операцией, возможен переход к выделению общих признаков двух и более предметов. Для этой цели можно предложить выделить какой-либо признак у данного объекта, затем посмотреть, есть ли такой же признак у другого. Аналогично проводится работа со вторым, третьим признаками. Например:

1. Даны записи: 6+3 и 6–3. Выделим в первой какой-либо признак (число 6). Этот признак содержится и во второй записи. Выделяем число 3. Оно также имеется и в первой и во второй записях. Предлагаем в первой найти такой признак, которого нет во второй записи (знак +), и наоборот, такой признак во второй записи, которого нет в первой (знак –).

2. Приведите примеры двух уравнений, которые имели бы два (три) общих признака, укажите признаки первого уравнения, которыми второе уравнение не обладает ($x+6=8$; $x-6=8$).

3. Можно ли привести примеры таких уравнений, которые не имели бы ни одного общего признака (Нельзя, в уравнении всегда имеются переменная и знак равенства.)?

Каждый предмет имеет существенные и несущественные признаки. Причем понятие "существенный" относительно: один и тот же признак в одних условиях выступает как существенный, в других – как несущественный. Так, например, масса спортсмена имеет существенное значение в некоторых видах спорта, а в обычных жизненных ситуациях ей не придают такого значения. Для учащихся можно ограничиться разъяснением, что признаки предмета, от которых зависит правильность ответа на заданный вопрос или поставленное требование, считаются существенными. (В первое время вместо этого термина можно употреблять слова "главный", "важный", и т.д.).

Например, в задании: "Представьте число 25 в виде суммы двух слагаемых". Существенны следующие признаки: а) число должно изображаться в виде суммы, б) в этой сумме должно быть 2 слагаемых. В задании не говорится, какими (однозначными, двузначными и т.д.) должны быть слагаемые, значит, это несущественный признак. Получаем: $25=12+13$, $25=9+16$, $25=10+15$ и т.д. Эти ответы удовлетворяют требованию задачи.

Если необходимо представить число 25 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых однозначное, то ответы будут уже отличаться: $25=21+4$, $25=22+3$, $25=23+2$, $25=24+1$, $25=20+5$, $25=19+6$, $25=18+7$, $25=17+8$, $25=16+9$. Из приведенных примеров видно, что существенность или несущественность признаков зависит от задания.

Второй этап – обучение приему сравнения. Сравнить – значить установить сходство и различие существенных признаков у этих предметов. Чтобы провести сравнение, прежде всего надо установить, что сопоставляется в данных предметах, затем взять какой-либо существенный признак одного предмета и найти такой же у другого, затем последовательно рассмотреть другие существенные признаки первого предмета и выяснить, имеются ли они у второго, после чего сделать соответствующий вывод. Такой порядок действий является ориентировочной основой для выполнения сравнения. Допустим, нужно сравнить записи: $5\cdot18=5\cdot(10+8)= 5\cdot10+$ $+5\cdot8=50+40=90$;

$8\cdot34=8\cdot(30+4)=8\cdot30+8\cdot4=240+32=272$.

Обращаем внимание на то, что в предлагаемых записях существенными являются следующие признаки: действие умножения, первый множитель – однозначное число, второй – двузначное, причем значение взятых чисел несущественно. Сравниваем по способам решения. Сходными существенными признаками являются: представление данного двузначного числа в виде суммы разрядных слагаемых, умножение однозначного числа на эту сумму. В результате проведенного сравнения можно сделать вывод относительно способа умножения однозначного числа на двузначное.

Следует побуждать учащихся и к самостоятельному использованию сравнения. Например, можно предложить следующее задание: "Сумма чисел в первом столбике равна 74. Как, не складывая числа второго и третьего столбиков, найти их сумму?"

21	22	23
30	31	32
11	12	13
12	13	14

В основе выполнения этого задания по нахождению суммы лежит операция сравнения слагаемых во втором, а затем и в третьем столбцах со слагаемыми первого столбца. Увеличение каждого из четырех слагаемых на 1 (на 2) ведет к увеличению суммы на 4 (на 8). Следовательно, сумма чисел второго столбца равна 74+4=78, а третьего 74+8=82 (или 78+4).

Анализ и синтез. Анализ (в переводе с греческого – разложение, расчленение) – метод познания (логическая операция), состоящий в мысленном или практическом расчленении предмета, явления, свойства или отношения между предметами на составные элементы. Как метод познания используется психологией, методологией, логикой, педагогикой. Психология изучает анализ в процессе отражения действительности в мозгу человека, логика и методология как один из логических приемов получения новых познавательных результатов, педагогика как один из методов обучения.

Анализ играет важную роль и в практической, и в познавательной деятельности. На чувственной ступени познания он включен в процесс ощущений и восприятий. Логический анализ в отличие от чувственного, совершается с помощью отвлеченных понятий. Путем логического анализа человек отделяет предмет от всех случайных, привходящих отношений, в которых он дан ему в чувственном познании, и развивает способность оперировать понятиями. Анализ самого предмета открывает возможность раздельного изучения его частей, свойств, отношений, процессов его изменения и развития.

Анализ выступает в качестве одного из логических методов науки. Его формы разнообразны. Одной из них является логическое или экспериментальное расчленение целого на части, выявляющий строение целого. К такому методу познания относится, например, спектральный анализ, с помощью которого по линейчатому спектру паров какого-либо вещества можно установить, какие химические элементы входят в его состав. Именно так были открыты новые химические элементы: гелий, рубидий, цезий, индий, таллий.

Важным видом анализа является анализ общих свойств предметов и отношений между ними, одни из которых становятся предметом дальнейшего анализа, а от других – отвлекаются. Так, при изучении закона Бойля-Мариотта ($p \cdot V = const$) устанавливается зависимость изменения давления газа p от объема V, отвлекаясь при этом от изменений температуры t.

Анализ общих свойств и отношений приводит к более простым свойствам и отношениям. Например, свойство (1) быть натуральным числом, которое больше 3, можно разложить на более простые свойства: (2) быть положительным числом (т.к. любое натуральное число – положительно); (3) быть целым числом (т.к. любое натуральное число есть целое число); (4) быть больше трех. Свойства (2), (3), (4) более общие, чем сложное свойство (1) т.к. например, свойство (2) присуще не только натуральным числам больше 3, но и числам 1, 2, 3, а также любому действительному числу больше нуля [4, с. 54-56].

Формой анализа является также разделение классов (множеств) предметов на подклассы (непересекающиеся подмножества данного множества). Такого рода анализ называется классификацией и состоит в разделении предметов какой-либо совокупности на классы, производимом на основании принадлежности какого-либо свойства (или свойств) всем предметам данного класса и его отсутствие у предметов других классов.

Например, на основании отношения "делится на 3" все множество натуральных чисел можно разделить на три класса: натуральные числа, которые делятся на 3; натуральные числа, которые при делении на 3 дают остаток 1; натуральные числа, которые при делении на 3 дают остаток 2.

Анализ выступает как метод познания, подчиненный общим требованиям диалектического метода. Изучение закономерностей развития объекта предполагает аналитическое расчленение его на различные стороны, аспекты происходящих в нем изменений, т.е. исследование истории предмета невозможно без разделения ее на отдельные этапы. Вообще следует различать и историю самого предмета. Применение исторического метода очевидно там, где имеется поступательное развитие от низшего к высшему (в явлениях живой природы и общественной жизни). В развитии же таких наук, как математика, механика, химия принимается во внимание история познания предмета, а не история самого предмета. В геологии, географии, социологии в расчет принимается как история познания предмета, так и история самого предмета.

Выделение противоположностей в предметах и явлениях, обнаружение противоречий действительности производятся прежде всего с помощью анализа.

Материалистическая диалектика рассматривает анализ, как один из процессов, ведущих к бесконечному углублению познания объекта.

Анализ только один из методов познавательной деятельности. Он самым тесным образом связан с синтезом.

Синтез (в переводе с греческого – соединение, составление) – метод познания, состоящий в мысленном или практическом соединении ранее выделенных элементов (признаков, свойств, явлений, отношений) предмета в единое целое. Синтез и анализ – фундаментальные процессы умственной деятельности человека. Их физиологическая основа – аналитико-синтетическая деятельность головного мозга. Синтез может осуществляться на различном уровне, начиная от простого механического соединения частей неорганизованного целого до создания научной истории на основе обобщения отдельных фактов и идей. Результатом синтеза может быть нечто качественно новое по сравнению с составляющими его элементами.

Существуют следующие виды синтеза: 1) объединение частей в единое целое (например, мысленное конструирование какого-либо механизма); 2) соединение множества признаков, свойств в единство (например, определение нового понятия); 3) объединение элементов на основе установления между ними связей, отношений (например, открытие закона).

Анализ в математике – это рассуждение, идущее от того, что подлежит доказательству к тому, что уже доказано (установлено ранее). Синтез – рассуждение, которое идет в обратном направлении. Для анализа ведущим является вопрос, как свести доказываемое утверждение к ранее известному (уже доказанному). Он является средством нахождения доказательства и выявления его идеи, но в большинстве случаев сам по себе еще доказательства не составляет. Синтез же, опираясь на данные, найденные анализом, завершает доказательство: он показывает, как из ранее установленных утверждений вытекает доказываемое, дает доказательство теоремы или решение задачи.

Такое понимание анализа и синтеза возникло еще в математической школе Платона и окончательно сложилась после появления "Начал" Евклида. В современной математике термины "анализ" и "аналитический" употребляется чаще уже в другом смысле, который исторически связан с первым. Поскольку решение уравнений можно считать процессом аналитическим (т.к. здесь мы переходим от неявно заданных с помощью уравнений некоторых чисел к их явному определению, когда мы находим корни этих уравнений), то науки, в которых уравнения и связанные с ними методы играют важную роль, стали называться аналитическими. Так, область математики, в которой геометрические объекты задаются уравнением, называется аналитической геометрией. По этой же причине дифференциальное и интегральное исчисление и некоторые другие разделы математики называются математическим анализом. [83, с.15-16]

Анализ и синтез – не только важнейшие методы научного познания, но и обучения. Неразрывная связь анализа с синтезом получила отражение в формуле "анализ через синтез" (С.Л. Рубинштейн), которая означает, что в процессе анализа новые стороны предмета выявляются через включение их в разные контексты. Анализ через синтез – сложный прием умственной деятельности. В психологии он рассматривается как важнейший механизм мышления. При обучении математике этот прием наиболее часто используется как при выполнении различных упражнений, так и при решении текстовых задач. Во внешнем плане он может проявляться в разных видах: переформулировка условия и требования задачи, постановка и разрешение производимых заданий, получение следствий из определенных данных.

Например, требуется узнать, на сколько 45 больше 12. Заменяя это требование на равносильные, а именно: "Чему равна разность 45 и 17? На сколько 17 меньше 45?" т.д., мы выявляем новые стороны данного объекта, которые фиксируются в новых понятиях.

Получение следствий из данного понятия позволяет раскрыть его признаки, которые явно не заданы. Например, из единичного понятия число 387" можно путем анализа получить ряд следствий: это трехзначное число; оно больше 300; меньше четырехсот; нечетное; в нем 3 сотни, 38 десятков, 387 единиц, в виде суммы разрядных слагаемых число можно записать как 300+80+7 и др.

Рассмотрение с различных точек зрения одного и того же объекта является внешним проявлением анализа через синтез. Умение пользоваться этим приемом формируется в процессе выполнения специальных упражнений. Например, дана сумма 47+53. Какие следствия могут быть получены из этой записи? (сумма чисел =100, если из 100 вычесть 47, то получим 53; число 100 больше 53 на 47 и т.д.)

Ценность подобных упражнений в том, что: а) они помогают постепенно овладеть важнейшим механизмом мышления – анализом через синтез, а также различными приемами учебной деятельности; б) их выполнение способствует развитию мышления учащихся, в частности, таких его качеств, как гибкость, умение видеть данный объект в разных качествах и отношениях.; в) они обеспечивают преемственность в обучении математике школьников начальных и старших классов.

Соединенный с анализом в единую аналитико-синтетическую структуру, синтез на разных этапах решения какой-либо мыслительной задачи может занимать различное место: может идти после анализа, а может предшествовать ему. У младших школьников отмечается несоответствие анализа синтезу. Проанализировав задачу, учащиеся нередко затрудняются при объединении полученных элементов. Например, выделив отдельные данные задачи, не могут связать их нужными отношениями, чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос. Поэтому возникает специальная проблема нахождения педагогических приемов руководства процессом синтеза и формирования у учащихся определенных действий по выявлению внутрипредметных связей. Ее решение не может быть дано в общем виде и зависит от конкретного материала. В частности, при решении арифметических задач важную роль играет составление схемы, синтезирующей существенные условия задачи. Кроме того важно, чтобы все отдельные этапы решения задачи (чтение, осмысление, планирование, решение, проверка) объединились в сознании учащихся в целостную программу (план) действий, обязательных для решения любой задачи.

При решении задачи определяющими этапами являются анализ текста и поиск решения задачи. Анализ текста задачи – многоцелевая работа. Во-первых, прежде чем преступить к решению, учащийся должен понять задачу: о чем и что в ней говорится? Во-вторых, в процессе анализа текста необходимо выделить условия и требования задачи. Это тоже не всегда просто, даже если задача решается в одно действие. В третьих, в условии задачи необходимо выделить все данные, которые можно "перевести" на язык математики. Для примера рассмотрим первичный анализ задачи: "В вазе лежали 4 груши, мама положила еще 5 яблок. Сколько фруктов стало в вазе?" Анализ текста задачи учитель проводит следующим образом: "О чем говорится в задаче? (О фруктах.) Что известно из условия? (Было 4 груши.) Что еще мы знаем? (Мама положила еще 5 яблок.) Фруктов стало больше или меньше? (Больше.) А почему стало больше? (Мама еще положила фрукты.).

Важнейшей целью обучения решению текстовых задач является формирование у учащихся общих методов поиска решения, соответствующих интеллектуальным возможностям младших школьников. К таким методам относятся аналитический, синтетический и аналитико-синтетический.

Аналитический метод, состоящий в расчленении исследуемого объекта на составные элементы и исследовании каждого из них в отдельности, может использоваться многократно.

В задаче исследуемый объект описывается в требовании. Однократно или многократно расчленяя объект, приходят, наконец, к составляющим, которые даны в условии задачи (если, конечно, данная задача имеет решение). Аналитический метод состоит в многократном, последовательном использовании анализа в процессе рассуждения от вопроса задачи к ее условию.

Синтетический метод – метод установления связи между составными частями исследуемого объекта и изучения его как единого целого.

Исследуемый объект называется в требовании задачи, а его элементы описываются в условии.

Сущность синтетического метода поиска решения задачи состоит в установлении связей между данными условия задачи и получении таким образом новых данных. Затем устанавливаются связи между полученными данными и так далее, до тех пор, пока не будет получено требуемое. Тем самым осуществляется рассуждение от условия задачи к ее вопросу.

Аналитико-синтетический метод, сочетающий элементы анализа и синтеза, используется на практике значительно чаще, чем чисто аналитический или синтетический.

Основным средством обучения младших школьников приемам поиска решения задач являются образцы рассуждений (вопросов – ответов), которые демонстрирует учитель. Вместе с тем можно проводить и специально организованную в этом направлении работу. Учитель обращает внимание учащихся на то, что в процессе решения задачи он задаст им разные по форме вопросы и что форма вопроса определяет особенности ответа на него. Пусть, например, первоклассникам предложена задача: "На поляне росло 6 белых грибов и 3 подосиновика. Сколько грибов росло на поляне?"

Учитель формулирует вопрос, соответствующий аналитическому методу: "Что нужно знать, чтобы определить, сколько грибов росло на поляне?". Учащиеся отвечают: "Нужно знать, сколько на поляне подосиновиков и сколько белых грибов".

Затем учитель формулирует вопрос, соответствующий синтетическому методу: "Что можно найти, зная, что на поляне росло 6 белых грибов и 3 подосиновика?" Ученики приходят к следующему выводу: "Можно узнать, сколько всего грибов росло на поляне, или на сколько больше белых грибов, чем подосиновиков, или на сколько меньше подосиновиков, чем белых грибов." Затем анализируются особенности первого и второго вопросов и отличие ответов на каждый из них. Выясняется, что первый вопрос задается исходя из того, что спрашивается в задаче, а в задаче спрашивается: "Сколько грибов росло на поляне?". Значит, начиная решать задачу, мы спрашиваем: "Что нужно знать, чтобы определить, сколько грибов росло на поляне?" Чтобы ответить на этот вопрос нужно знать, сколько росло на поляне грибов каждого вида.

Второй вопрос задается исходя из того, что дано в условии задачи: "Известно, что на поляне 6 белых грибов и три подосиновика". Значит, начиная решать задачу, мы спрашиваем: "Что можно определить, зная, что на поляне 6 белых грибов и 3 подосиновика?". Ответов может быть несколько.

Понятно, что такая работа начнет приносить плоды только при систематическом и целенаправленном ее проведении. Конечно, она потребует определенных, возможно, существенных, затрат, но последующая окупаемость это оправдывает.

В конечном итоге управление аналитико-синтетической деятельностью учащихся связано с задачами организации учебной деятельности путем комплексных требований, предъявляемых к процессу учения логикой, психологией, дидактикой, методикой.

Аналогия – метод познания (способ рассуждения), состоящий в констатации сходства предметов в определенных признаках (свойствах, отношениях) и предположении на этом основании об их сходстве в других признаках (свойствах, отношениях), в результате чего делается вывод о наличии у исследуемого предмета неизвестных ранее признаков (свойств, отношений, идентичных с теми, которые зафиксированы у сопоставляемого с ним предмета).

В Древней Греции под аналогией понимали сходство количественных отношений, пропорцию (Евклид, Аристотель). Вывод об одной единичной вещи на основании данных о другой вещи Аристотель называл примером. В средние века аналогией называли одинаковое наименование различных вещей. Иногда под аналогией понимали сходство причинных отношений (Ньютон, Локк, Дидро), иногда сходство следственных отношений (Пойа, Линденбаум). Физики часто под термином "аналогия" понимают субстанциональное сходство (Максвелл, Дирак). Встречается понимание аналогии и как соответствия (Архимед, Кеплер, Резерфорд) [5, с. 56-57].

Следует отличать факт аналогичности некоторых явлений и само отношение аналогии от рассуждения или заключения по аналогии. В связи с этим под аналогией следует понимать все возможные степени сходства любых объектов (систем) во всех или некоторых существенных качествах (признаках, связях, отношениях и т.д.), а под умозаключением по аналогии - метод познания, основанный на выводе о наличии некоторых качеств у одного объекта, сделанный на основании наличия этих качеств у другого объекта, аналогичного первому.

Аналогия основывается на сходстве между предметами, явлениями или процессами. Однако может трактоваться и более широко. Философы справедливо отмечают, что аналогия между предметами или явлениями может заключаться в сходстве на разных уровнях: 1) на уровне результатов, которые дают сравниваемые системы; 2) на уровне поведения или функций, которые ведут к этим результатам; 3) на уровне структур, которые обеспечивают выполнение данных функций; 4) на уровне материалов или элементов, из которых состоят структуры.

Существует и иная классификация аналогий: 1) позитивная; 2) негативная; 3) нейтральная. Позитивной или положительной аналогией называется группа признаков, сходных у сопоставляемых объектов; негативной – группа признаков, которые у них различны; нейтральной – совокупность признаков, о которых еще неизвестно, относятся ли они к первой или второй группе.

В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др. различают следующие виды аналогий: 1) простую аналогию, при которой по сходству объектов в некоторых признаках заключают о сходстве их в других признаках; 2) распространенную аналогию, при которой из сходства явлений делают вывод о сходстве причин. В свою очередь простая и распространенная аналогия может быть: а) строгой аналогией, при которой признаки сравниваемых объектов находятся во взаимной зависимости; б) нестрогой аналогией, при которой, признаки сравниваемых объектов не находятся в явной зависимости.

Вообще говоря, необходимо различать: 1) аналогию как фактическое отношение сходства между исследуемыми объектами; 2) рассуждение по аналогии, т.е. определенный метод научного познания, связанный с получением вероятностных заключений на основании отношения сходства.

Схема, умозаключения по аналогии имеет вид:

$$\frac{a' \in P_1, P_2 \ldots P_n P_{n+1},\ a'' \in P_1, P_2 \ldots P_n}{}$$

Вероятно, что $a'' \in P_{n+1}$, где a' и a'' –сравниваемые объекты; $P_1, P_2 \ldots P_n$ – их признаки или свойства.

В этой записи отражено сходство между сравниваемыми объектами a' и a'' по признакам $P_1, P_2 \ldots P_n$, на основании которого по аналогии осуществляется перенос информации о признаке P_{n+1} с первого предмета на второй. Под чертой записано заключение, имеющее вероятностный характер. Аналогия есть вид умозаключений от единичного к единичному. На основе рассмотрения единичных (частных) суждений переходят также к единичному частному суждению, являющемуся заключением о чем либо.

В научной литературе по проблемам методологии познания (А.И. Уемов, В.А.Штофф и др.) обсуждаются условия, позволяющие повысить степень вероятности выводов по аналогии, среди которых следующие:

1) число сопоставляемых признаков должно быть велико;

2) сравнение предметов должно идти по любым случайно выбранным свойствам;

3) увеличение разнообразия признаков, разнородности сходных свойств у сравниваемых объектов;

4) типичность сравниваемых свойств;

5) однотипность сравниваемых предметов.

Выводы в умозаключениях по аналогии всегда бывают только вероятностны, но это вероятное предположение несет в себе нечто новое. Аналогия не дает ответа на вопрос о правильности предположения. Эта правильность должна проверяться другими средствами

Выделенная связь между общими признаками сравниваемых предметов может быть устойчивой, закономерной или несущественной. Если связь устойчивая, закономерная, то заключение по аналогии будет достоверным. Если связь несущественная, недостаточно обоснованная, то умозаключение по аналогии нуждается в дополнительной проверке и до выполнения этого требования считается вероятностным. Достоверным видом аналогии является изоморфизм. Установив изоморфность двух систем объектов, можно перенести любое свойство, справедливое для одной системы на другую систему. Таким образом, обстоятельно изучив одну систему объектов, можно не исследовать другую, если она находится с первой в отношении изоморфизма. Например, множество всех действительных чисел и множество положительных действительных чисел изоморфны друг другу, множество натуральных чисел и множество четных чисел также находятся в отношении изоморфизма.

История науки свидетельствует о том, что отношение к заключению по аналогии как методу получения новых знаний не было одинаковым со стороны исследователей. Одни полагали, что вывод по аналогии есть достаточно достоверный метод познания. Так, считая аналогию важным методом познания, Кеплер писал: "Я особенно люблю эти аналогии, моих вернейших учителей, участников тайн природы; преимущественно же в геометрии должно им следовать, ибо они странными своими терминами охватывают бесчисленные случаи в своих пределах и любое содержание и ясно обнаруживают перед нашими глазами сущность любой вещи" [16, с. 37].

Ценность аналогии, по Гегелю, зависит от того, на сколько всеобщее, в котором оба единичные оказываются одним и тем же и согласно которому одно единичное становится предикатом другого, является не просто качеством, признаком, а сущностью исследуемых объектов, их существенным качеством. Недостатком доказательства по аналогии Гегель считает сложность отличения существенных признаков от несущественных.

Многие ученые отказывали в доказательной силе вывода по аналогии и усматривали в ней лишь эвристическую функцию в плане указания путей дальнейших исследований, а не в получении достоверного результата. Таким путем было сделано немало научных открытий. Открыв спутники Юпитера, Галилей по аналогии с этим выдвинул новый, достаточно мощный для своего времени аргумент в пользу гелиоцентрической системы мира Коперника.

По аналогии с операциями над различными числами был изобретен аппарат алгебры: если величины в вычислении входят аналогично друг другу, то для получения всех величин достаточно рассчитать лишь одну из них, а затем производить соответствующую подстановку по аналогии. Гюйгенс на основе сходства свойств звука и света прямолинейно распространяться, отражаться и преломляться пришел к выводу о волновой природе света. Дарвиным по аналогии с искусственным отбором была создана эволюционная теория естественного отбора. Вместе с тем следует обратить внимание на некоторые негативные моменты, таящиеся в методе аналогии. Один из них и, пожалуй, главный состоит в том, что при переносе информации с аналога на объект изучения, некоторые несущественные признаки аналога могут рассматриваться как существенные свойства изучаемого объекта, что приводит к ошибкам в рассуждении. Так, приведенный выше пример аналогии свойств звуковых и световых волн, с одной стороны, привел к созданию волновой теории света, а с другой, – к проникновению в эту теорию ошибки о том, что световые волны, как и звуковые, являются продольными, что неверно, так как световые волны – поперечные. Поэтому применение только метода аналогии может привести к серьезным гносеологическим ошибкам, вместе с тем использование этого метода в сочетании с другими методами исследования обеспечивают эффективность научного познания.

Вместе с тем следует отметить, что наиболее достоверная информация об изучаемом объекте получается с помощью модельной аналогии в отличие от традиционной. Если в традиционной аналогии у аналога и изучаемого объекта сравниваются существенные признаки, характеристики, то в модельной сравниваются системы, обладающие сходством не только на уровне элементов, но и на уровне функций, отношений. Известные философы Барабашев А.Г., Беляев Е.А., Перминов В.А, Кикель П.В. отмечают, что фундаментальными задачами философии математики в будущем является изучение сущности математической аналогии [45, с.35].

Аналогия необходимый метод обучения математике. Она содействует переносу знаний по образцу, когда решение аналогичных задач выступает условием формирования умения решать задачи данного типа.

Как было сказано выше, вывод по аналогии в общем случае является лишь предположительным и может оказаться неверным. Однако в условиях обучения это не препятствие для ее использования, так как педагог всегда может поправить школьника, что также играет положительную роль и имеет обучающее значение – ориентирование детей на проверку результатов, полученных по аналогии.

Используя прием аналогии, необходимо иметь в виду следующее:

1. Аналогия основывается на сравнении. Поэтому успех ее применения существенно зависит от того, насколько учащиеся овладели этим приемом.

2. Для использования аналогии необходимо иметь два объекта, один из которых известен учащимся, а второй сравнивается с ним по каким-либо признакам.

3. Прием аналогии способствует повторению изученного в связи с рассмотрением нового учебного материала, что систематизирует знания и умения школьников.

4. Для ориентации учащихся на использование аналогии в качестве метода познания необходимо в доступной форме разъяснить ее сущность, обратив при этом внимание на то, что в математике нередко новый способ вычислений, преобразований и т.д. можно открыть по догадке, внимательно изучая известный способ действий и данное новое задание.

Поясним это на примере темы "Умножение числа на сумму".

На доске записаны выражения: $(7+8)\cdot 4$; $6\cdot(5+7)$.

Способ вычисления выражения, которое записано слева, уже знаком учащимся. После того как ученики самостоятельно найдут значение этого выражения, учитель предлагает им вопрос: "Кто догадается, как можно вычислить значение второго выражения?" В основе догадки лежит прием аналогии. Учащиеся сравнивают выражения: в левом сумма умножается на число, в правом – число на сумму. Делая перенос известного им способа вычисления значения первого выражения на новый случай, ученики находят результат. Высказанную догадку можно доказать, используя переместительное свойство умножения: $6\cdot(5+7)=(5+7)\cdot 6$.

5. Для правильного вывода по аналогии сравниваются признаки объектов, существенные в данной ситуации, на что необходимо сориентировать учащихся. В противном случае аналогия может оказаться проведенной по внешним, несущественным признакам и привести к неверным выводам. Рассмотрим пример.

Требуется объяснить сложение двузначных чисел: $41+57=(40+1)+(50+7)=(40+50)+(7+1)=90+8=98$., а затем трехзначных чисел: $163+231=(100+60+3)+(200+30+1)=(100+200)+(60+30)+(3+1)=394$.

Возможны варианты объяснения:

1. Каждый из этих примеров рассматривается отдельно, без фиксации их общих особенностей (признаков). В этом случае не будет ни вывода по аналогии, ни нужного обобщения: данные числа представляют в виде суммы разрядных слагаемых, отдельно складывают сотни, десятки, единицы, затем находят сумму полученных чисел.

2. Примеры рассматриваются в сравнении. Если при этом акцентировать внимание учащихся на общих и существенных признаках данных примеров (представлении чисел в виде суммы разрядных слагаемых), то возможно правильное обобщение о способе сложения чисел. Но явной направленности на аналогию здесь нет. Для того чтобы использовать этот прием, необходимо соответствующим образом организовать деятельность учащихся: педагог показывает решение первого примера и спрашивает, нельзя ли, изучив способ его решения, высказать догадку о способе нахождения суммы 163+231 (не показывая при этом развернутого решения вто-

рого примера). Выясняется: в первом случае складывали два числа, то же самое предлагается и во втором; в первом данные числа представляли в виде суммы разрядных слагаемых и складывали поразрядно. Во втором случае тоже возможно заменить числа суммой разрядных слагаемых. Возникает догадка: вероятно, так же можно складывать и во втором случае. Выполнив этим способом сложение чисел 163+231, проверяем правильность такого способа действия, сравнивая полученный результат с образцом. В этом случае действия учеников выполняются по аналогии.

Отметим, что в учебнике нередко, как и в приведенном примере, показывается, как нужно делать, т.е. исполнительные операции даются в готовом виде, что исключает потребность в поиске. Используя же аналогию, учащиеся сами ищут и открывают новые способы деятельности, а затем проверяют высказанную догадку.

Анализ методов и приёмов, рекомендуемых учителям начальных классов в методических пособиях, и наблюдения уроков свидетельствуют о достаточно широком применении аналогии для организации самостоятельного установления учениками некоторых закономерностей. Например, включение в подготовительную работу к знакомству с приёмом письменного умножения повторение правила умножения числа на сумму не только актуализирует в сознании детей необходимые теоретические знания, но и создаёт базу для переноса имеющихся знаний в новые условия.

Рассмотрим фрагмент урока в 3"А" классе СШ № 18 г. Бреста /учитель Карлюк Ф.М/ по теме "Умножение на двузначное число".

Ученики устно, с объяснением выполняют умножение чисел 6 и 14, 8 и 15, затем отвечают на вопрос: "Как можно число умножить на сумму?"

При объяснении нового приёма умножения двузначного числа на двузначное на классной доске решается пример 59·47.

– Надо умножить 59 на 47. Как это сделать? /Представить 47 в виде суммы разрядных слагаемых 40 и 7. Получится пример: 59 умножить на сумму чисел 40 и 7; удобнее умножить 59 на 40, потом 59 на 7 и результаты сложить/.

Запись: 59·47=59·(40+7)=59·40+59·7.

Выполняются действия по порядку в столбик. Детям даётся понятие о неполном произведении. Затем идёт обучение записи выполнения умножения двузначных чисел "в столбик".

При ознакомлении с приёмом умножения многозначного числа на трёхзначное ученики сначала подробно объясняют по записи, как умножить на двузначное число, а затем по аналогии, как умножать на трехзначное число.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют умножение трехзначного числа на двузначное и трехзначного на трехзначное число.

```
   254                 428
  x                        x
    46                 266
 1524                 2568
+1016              + 2568
 11684               856
                    113848
```

Аналогия способствует активизации учебного процесса, расширению познавательных возможностей учащихся, эффективному развитию самостоятельного продуктивного мышления учащихся, их математической интуиции. Она обеспечивает более глубокое и прочное усвоение предмета учащимися, так как является важнейшим источником ассоциаций по подобию или по контрасту.

Однако наряду с положительной ролью, которую играют умозаключения по аналогии, они могут приводить учащихся, которые не усвоили или формально усвоили учебный материал, к грубым ошибкам. Учащиеся пытаются заменить аналогией отсутствующие у них знания, тогда как аналогия должна опираться на глубокое знание изученного материала, помогать сознательному усвоению и правильному применению этих знаний. Необходимо требовать от учащихся постоянно обосновывать выполняемые математические операции ссылками на изученный материал, объяснять, где данное правило можно применить, а где нельзя и почему нельзя.

В процессе преподавания необходимо выделять не только истинные аналогии, но и обращать внимания учащихся на ложные, "разрушать" их, чтобы избежать ошибок. Так при переходе по аналогии от частных случаев числовых примеров умножения и деления с числами 0 и 1 к общим правилам, выраженным в буквенном виде, дети допускают следующие ошибки: $0\cdot16=0$, $0\cdot b=b$; $64:64=1$, $b:b=b$; $0:20=0$, $0:b=b$.

Анализ этих ошибок говорит о том, что некоторые учащиеся вторых классов недостаточно усвоили, во-первых, то, что буква в математических выражениях может быть любым числом (кроме нуля в качестве делителя), во-вторых, они не могут правильно провести аналогию с предыдущими решенными числовыми примерами. Учащиеся, допустившие ошибки, не усвоили рассматриваемые правила на таком уровне, который позволил бы им пользоваться обобщенной записью с использованием букв.

Обобщение метод познания, состоящий в установлении общих признаков, свойств и отношений предметов. Обобщение как логическая операция, присутствует в любой деятельности, позволяя обнаружить человеку нечто общее, что есть в многообразии предметов и явлений. Обобщение неразрывно связано с абстракцией, как анализ с синтезом. Обобщение есть метод (процесс) и результат познавательной деятельности. В учении, как одном из видов познания, обобщения играют важную роль, особенно в формировании понятий. Проблема обобщения рассматривается в работах Л.Г. Выготского, С.Л. Рубинштейна, Н.А. Менчинской, М.И. Моро, В.А. Крутецкого и др. Обстоятельный анализ видов обобщения в обучении и их значение в обучении дал Давыдов В.В.[32]. Он выделяет два вида обобщений: эмпирическое и теоретическое. Эмпирическое обобщение рассматривается в неразрывном единстве со сравнением, а теоретическое – на основе анализа.

Если обобщение трактуется как процесс, то имеется в виду переход от свойств отдельного предмета к нахождению этих свойств в группе похожих предметов. Если рассматривать обобщение как результат, то имеется в виду отвлечение от некоторых частных, изменяющихся свойств предметов. Например, из 7 карандашей отдают 2, ученики получают 5 карандашей. Если вместо карандашей берут яблоки или конфеты, тоже получают 5 и приходят к обобщенному понятию разности чисел 7 и 2. Формирование у учащихся обобщений и понятий считается одной из главных целей обучения вообще и математике, в частности.

Формирование понятий на основе эмпирического обобщения можно проиллюстрировать на примере понятия натурального числа 2. На странице учебника нарисованы двое детей, 2 полотенца, 2 кубика, 2 цыпленка. Отыскание того общего, что есть между перечисленными множествами, приводит к выводу, что единственно общим является количество элементов в этих множествах, которое и записывается числом 2.

Эмпирическое обобщение, являясь результатом сравнения, идет по схеме: восприятие – представление – понятие. Этот переход осуществляется от конкретного, чувственного опыта к абстрактному, мыслимому. Вместе с тем, отмечает Давыдов В.В., в рамках эмпирического обобщения понятия рассматриваются как формы фиксации внешних отличительных свойств окружающих предметов, а последние более или менее устойчивы в своем значении для нас, поэтому изменение понятий может состоять лишь в их "уточнении", в "лучшем определении", "в обновлении иллюстрирующих примеров" и т.д. "Развитие знаний здесь может интерпретироваться лишь как расширение их объема, ибо в пределах эмпирической теории нет средства анализа взаимосвязи формы и содержания знания, постоянного теоретического углубления в сущность предмета" [32, с. 97]. Применение только эмпирического обобщения в школьном обучении предполагает сведение всего круга знания лишь к эмпирическим, что явно недостаточно для развития мышления учащихся. Поэтому в старшем школьном возрасте имеет место теоретическое обобщение, которое производится на основе системного анализа отношений и связей объектов. Теоретическое обобщение реализуется при такой организации обучения, в которой учащиеся усваивают знания в процессе решения учебных задач. Тщательно выполненный анализ достаточно содержательной задачи дает возможность учащимся овладеть общим методом решения целого класса задач. Преобразовывая ее условие, они находят общий принцип правильного подхода ко многим другим однородным задачам. Теоретическое обобщение присуще образованию понятий, используемых при создании развернутых систем знаний.

Опираясь на эмпирические данные, В.А. Крутецкий выделил два принципиально разных пути обобщения математического материала, наблюдаемых у школьников: "Наряду с путем постепенного обобщения математического материала на основе варьирования некоторого многообразия частных случаев (путь большинства школьников) существует и другой путь, когда способные ученики, не сопоставляя "сходное", не сравнивая, без специальных упражнений и указаний учителя, осуществляют самостоятельное обобщение математических объектов, отношений, действий "с места" на основании анализа лишь одного явления в ряду сходных явлений" [32, с. 140].

Он выделил 4 уровня обобщения у учащихся:

1. Учащиеся не могут обобщить материал по существенным признакам даже с помощью учителя и после промежуточных однотипных тренировочных упражнений;

2. Учащиеся могут с помощью учителя обобщить материал по существенным признакам, но допускают при этом отдельные ошибки;

3. Учащиеся обобщают материал по существенным признакам самостоятельно, но после нескольких упражнений и с незначительными ошибками (безошибочное обобщение возникает при незначительных подсказках или наводящих вопросах);

4. Учащиеся самостоятельно обобщают материал правильно и сразу, "с места" (без тренировки в решении однотипных задач) [32, с. 145].

Процесс обобщения может быть организован по-разному.

Обобщенные знания или способы действий даются ученикам в готовом виде. Например, правило умножения на 1. В нем фиксируется обобщение, справедливое для любого числа. Так как это обобщение является соглашением в математике, то оно должно быть сообщено ученикам в готовом виде: "принято считать" или "считают". Учебная задача, связанная с процессом такого обобщения, заключается в том, чтобы учащиеся запомнили его и научились правильно применять в варьирующихся условиях.

Обобщенные знания появляются как логический вывод из ранее установленных обобщений. Этот процесс проявляется как процесс рассуждений, приводящий к общему выводу. Так, например, из обобщения, что площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, путем рассуждений можно получить новое обобщение – для нахождения длины прямоугольника нужно его площадь разделить на ширину. При переходе от одного обобщения к другому учебная задача состоит в том, чтобы школьники правильно и обоснованно выполнили необходимые рассуждения, что должно быть заранее предусмотрено и организовано педагогом.

Обобщенные знания являются результатом индуктивных рассуждений (неполная индукция). В этом случае процесс обобщения протекает путем сравнения двух или более объектов по их общим и существенным признакам с целью получить обобщенный вывод. Такое обобщение называют эмпирическим. Оно широко используется в начальном обучении математике. Примером могут служить получение правил деления суммы на число, умножения числа на сумму, переместительного свойства сложения, умножения и др. Во всех этих случаях учебная задача состоит в том, чтобы дети под руководством педагога подметили существенные признаки у всех рассматриваемых объектов и на этой основе сделали вывод.

Чтобы полученное обобщение было верным и соответствовало поставленной учебной задаче, важно правильно подобрать сравниваемые объекты.

Например, предлагается рассмотреть следующие записи:

$8+5=(8+2)+3=10+3=13$;

$8+6=(8+2)+4=10+4=14$;

$8+7=(8+2)+5=10+5=15$.

Сравнивая способы выполненных действий, учащиеся выявляют общий способ прибавления однозначного числа к 8. Однако с точки зрения цели изучения данной темы это будет слишком узкое обобщение, охватывающие только один вариант сложения (с числом 8) с переходом через десяток. Между тем учебная задача заключается в том, чтобы школьники усвоили общий способ сложения всевозможных однозначных чисел с переходом через десяток. Для решения такой задачи сравниваемые объекты подобраны неверно, так как они ориентируют на узкое обобщение: второе слагаемое представляется в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно 2. Таким обобщением нерационально пользоваться при сложении других однозначных чисел с переходом через десяток. Для получения более общего вывода необходимо было варьировать не только второе, но и первое слагаемое.

При изучении умножения однозначного числа на двузначное с использованием эмпирического обобщения нецелесообразно ограничиваться образцами вида:

$7\cdot12=7(10+2)=7\cdot10+7\cdot2$

$8\cdot15=8\cdot(10+5)=8\cdot10+8\cdot5$,

так как здесь также возможно узкое обобщение: из двузначного числа нужно выделить в качестве слагаемого число 10. Для того чтобы этого избежать, нужно предложить образцы, в которых отражены различные случаи, например:

$7 \cdot 12=7 \cdot (10+2)=$

$4 \cdot 26=4 \cdot (20+6)=$

$3 \cdot 41=3 \cdot (40+1)=$

$5 \cdot 34=5 \cdot (30+4)=$

В результате сравнения получим нужное нам обобщение.

Процесс обобщения характеризуется тем, что с самого начала путем анализа одного математического объекта выявляются существенные его особенности, отражающие общие признаки всех объектов из данной области, т.е. в единичном отыскивается общее. Это путь теоретического обобщения. Здесь учебная задача заключается в том, чтобы увидеть в одном объекте существенное, абстрагируясь от частного, единичного.

Например, способ умножения трехзначного числа на однозначное представлен в учебнике в виде образца:

$327 \cdot 4=(300+20+7) \cdot 4=1200+80+28=1308.$

Здесь существенное – представление трехзначного числа в виде суммы разрядных слагаемых и сведение рассматриваемого случая умножения к умножению суммы на однозначное число. Именно это должно быть сразу же выявлено путем анализа образца: в конкретном примере должен быть обнаружен общий способ действия, охватывающий любые случаи такого умножения. Он включает в себя существенно важное – запись данного числа в виде суммы разрядных слагаемых.

Общий способ действий может быть обнаружен учащимися при анализе заданного образца и в других случаях, например, при делении многозначного числа на однозначное; при умножении числа на произведение и т.д. Получение соответствующего обобщения зависит от того, какие вопросы учитель ставит перед учениками и какие методические приемы использует.

В каждом конкретном случае необходимо предварительно установить как широту обобщения, так и вид процесса обобщения и в соответствии с этим ставить и решать учебные задачи, подбирая для этого соответствующие примеры.

Несмотря на то, что в современных концепциях дидактики и психологии принята точка зрения, согласно которой в процессе обучения младших школьников необходимо ориентироваться на эмпирическое обобщение, приведенные выше примеры демонстрируют и возможность теоретического обобщения.

Абстрагирование – это метод познания, состоящий в выделении отдельных сторон предмета или явления и, следовательно, в отвлечении от других его сторон. Признаком теоретичности математического знания и выступает абстрактность. Чтобы научиться считать, писал Энгельс, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но уже обладать способностью отвлекаться при рассмотрении этих предметов от всех прочих их свойств, кроме численности.

Абстрагирование является необходимой логической операцией любого познания, в том числе и учебного, которое тесно связано с обобщением.

Гегель, вероятно, был первым философом и педагогом, который пропагандировал абстрагирование в обучении. Обучение "разумно начинать с самого абстрактного, что только может быть доступно духу ребенка" [32, с. 342]. Что касается обучения отдельным дисциплинам, то здесь Гегель утверждает необходимость руководствоваться диалектическим единством абстрактного и конкретного, всеобщего и особенного в обучении. Например, в геометрии следует начинать не с конкретных пространственных образов, а с точки или линии, затем с треугольника и круга. Абстрактное, по мнению Гегеля, должно вводиться в обучение настолько рано, насколько это будет доступно ребенку, которого ни в коем случае не нужно задерживать на стадии чувственного познания.

Если говорить о современных философах, то нельзя не вспомнить Ильенкова Э.В., который, говоря о всяком познании, апеллирует к восхождению от абстрактного к конкретному.

По мнению В.В. Давыдова, "благодаря абстрагированию человек вычленяет и в процессе восхождения мысленно удерживает специфику того реального отношения вещей, которое определяет становление и целостность многообразных явлений". Данная цитата очень емко подтверждает значение абстрагирования при формировании понятий, которое состоит из следующих этапов: а) выделить существенные и несущественные свойства предметов; б) отделить существенные и общие свойства; в) отбросить несущественные и различные; г) сформулировать полученные суждения. Например, при формировании понятия "квадрат", выделяют следующие существенные признаки этого четырехугольника: а) все стороны равны; б) все углы прямые; в) диагонали равны и взаимноперпендикулярны. При этом не учитывается нарисован ли квадрат, вырезан из бумаги или изготовлен из пластмассы или фанеры; красного, белого или черного цвета. Последние из перечисленных – несущественные свойства квадрата. Заканчивается процесс формирования понятия, в данном случае квадрата, перечислением его существенных свойств, т.е. определением: "Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны".

Всякое понятие в той или иной степени абстрактно, так как чаще всего включает в себя большое количество конкретных объектов или процессов (объем понятия). Множество существенных признаков образуют содержание понятия.

Множество понятий допускает частичное упорядочение по количеству охватываемых им конкретных явлений. Существуют понятия максимальной степени абстрактности – это те понятия, которые включают в себя все сущее. Такими понятиями оперирует философия (например, движение) и математика (множество, точка, натуральное число).

Каждое понятие, которым оперирует конкретный человек, имеет свою степень абстрактности и она заведомо ниже истинной степени, так как ему известны только некоторые "представители" этого понятия. Например, понятие "алгебраическая группа" для нас тем абстрактнее, чем больше примеров групп мы знаем. Приведенные соображения подводят нас к основному специфическому противоречию математики: с одной стороны, понятия математики максимально абстрактны, так как теоретически охватывают совокупность явлений на уровне бесконечности, а с другой, и для каждого конкретного пользователя их абстрактность вполне конечна.

Абстрагирование является важной логической операцией не только при формировании понятий, но и при построении модели, теории, классификации. О значении абстрагирования в науке говорит наличие таких математических абстракций как абстракция актуальной бесконечности и абстракция потенциальной осуществимости. Первая из указанных абстракций широко используется в теории множеств и состоит в отвлечении от принципиальной невозможности завершить процесс построения бесконечного множества объектов и в рассмотрении бесконечной совокупности как математического объекта. Например, образование множества натуральных чисел. При построении множества натуральных чисел используется также абстракция потенциальной осуществимости, которая позволяет рассматривать произвольный объект, порождаемый данным конструктивным процессом. Но, в отличие от абстракции актуальной бесконечности, она не приводит к образованию множества всех порождаемых объектов. Это связано с тем, что абстракция потенциальной осуществимости не предполагает, что может быть осуществлено бесконечное число операций построения, а основана лишь на том, что любая такая операция может быть осуществлена, т.е. сущность состоит в отвлечении от возможных пространственных, временных и материальных препятствий к построению конструктивного объекта.

Таким образом, абстрагирование является важнейшим методом математического познания и одновременно методом обучения математике.

Как писал П.П. Блонский, "овладение таким максимально абстрактным предметом, как математика, хорошо показывает, до какого максимума подымается абстрактное мышление школьников различных возрастов" [14, с. 23].

На примере усвоения математики можно выделить 3 уровня абстракции у учащихся школьного возраста. Так в младших классах дети вступают на первый уровень абстракции: форма блинчика – круг, вместо 5 конфет, 5 кукол – число 5. Это значит, что "в арифметике отвлеченное мышление стоит уже на значительном уровне; когда я оперирую с отвлеченными, хотя бы и определенными, числами (5, 8, 17 и т.д.), я отвлекаюсь от всех качественных своеобразий: после 5, 8, 17 и т.д. может стоять только одно слово – "предмет", т.е. самое общее, самое абстрактное "что-то", "нечто", "что угодно" и т.д." [14, с. 23].

Второй уровень абстракции мышления младших школьников связан с количественными отношениями. Например, владение аппаратом сложения чисел позволяет абстрагироваться от конкретных чисел и овладеть умением нахождения суммы. Абстрактность в подобных случаях проявляется в способности ученика дать речевую характеристику – операционного состава формируемого умения или навыка, т.е. он может объяснить сущность вычислительного приема.

Третий уровень абстракции связан с изучением школьниками алгебры. Учащиеся оперируют уже буквами, за которыми подразумевают любые числа. И затем в процессе овладения такими разделами алгебры, как пропорции и уравнения учащиеся подросткового возраста переходят на 4 уровень абстракции – устанавливают законы количественных отношений.

"В алгебре,– писал П.П. Блонский,– отвлеченное мышление достигает своего кульминационного пункта: здесь мышление отвлекается даже от эмпирических чисел" [14, с. 23]. Современное обучение показывают, что изучение элементов алгебры вполне доступно младшим школьникам.

В советской педагогической психологии разработана концепция учебной деятельности (В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин) и на ее основе – модель построения учебных предметов, которой соответствует представление об усвоении знаний как процессе движения от абстрактного к конкретному, состоящем в переходе от абстрактного и одностороннего знания о предмете ко все более конкретному его воспроизведению в теоретическом мышлении. Стимулировать этот процесс начинают уже в начальной школе, ибо даже любое простое числовое равенство (2+3=5, 20:4=5) может стать отправным пунктом движения от абстрактного к конкретному. Например, учитель предлагает учащимися составить сюжетную задачу по ее решению 20:4=5. Данное равенство можно конкретизировать задачами разных типов: деление по содержанию и деление на равные части, уменьшение числа в несколько раз в прямой и в косвенной форме, кратное сравнение чисел, нахождение доли числа, а также задачами с пропорциональной зависимостью.

Если абстрагирование имеет место при переходе от чувственного (эмпирического) познания к теоретическому, то восхождению от абстрактного к конкретному – наоборот.

Усвоение в начальной школе такой абстракции как десятичная система счисления, по мнению В.В. Давыдова, Н.Г. Салминой, В.П. Сохиной, целесообразно организовать с числами сразу в пределах миллиарда на модели этой абстракции – разрядной сетке. Постепенно по мере усвоения понятия "система счисления" внешние опоры снимаются и учащиеся оперируют только с цифрами, при этом понятие усваивается без специального заучивания. Это как раз пример овладения абстракций на основе чувственного познания. Усвоение абстракций, являющихся результатом абстрагирования, меняет традиционное представление о возрастных возможностях абстрактного мышления.

Моделирование. В основании моделирования лежит процедура использования модели. Модель – это специфическая форма и одновременно средство научного познания. Моделью может быть любая реально существующая или мысленно представляемая система, которая находится в определённых отношениях к другой системе, называемой объектом, так, что при этом выполняются такие условия:

1. Модель и оригинал (объект), представляющие собой системы, рассматриваются как множества некоторых объектов с некоторыми выделенными отношениями между его элементами.

2. Модель в процессе познания является заместителем оригинала.

3. Между моделью и оригиналом устанавливается некоторый изоморфизм, т.е. подобие структур отношений, но вместе с тем модель и оригинал неадекватны, в противном случае отпала бы необходимость в построении модели, т.е. в модели есть качества, которых нет в оригинале и наоборот.

4. Изучение модели позволяет получать информацию об оригинале.

По способу воспроизведения модели могут быть разделены на материальные (по-другому говоря, вещественные, физические, действующие) и мысленные (идеальные, воображаемые).

К числу материальных моделей относятся те, которые сконструированы человеком или взяты из окружающей действительности в качестве образцов. Мысленные модели конструируются в форме мысленных образов, существующих лишь в голове субъекта.

Функции модели в зависимости от того, какие задачи и цели ставит перед собой познающий субъект, могут быть различными:

1. Использование модели может выполнять чисто практические прикладные функции. Так, например, аппарат "искусственная почка" является моделью почки человека и применяется для очистки крови от шлаков, т.е. в данном случае используются некоторые практически ценные для человека свойства модели.

2. Модель может использоваться в целях получения нового знания. В этом случае говорят о моделировании как методе научного познания.

3. Модель может выполнять определённые дидактические функции в обучении. Таковы, например, макеты, схемы, таблицы, чертежи, приме-

няемые в качестве наглядных пособий в процессе обучения для обеспечения доступности и облегчения усвоения уже готового знания.

На основании выполняемых функций модели можно классифицировать на исследовательские, дидактические, прикладного использования.

В коллективной монографии "Моделирование психической деятельности" авторы делят все существующие модели на три типа: физические, вещественно-математические и логико-математические (16).

К первому типу они относят те модели, которые имеют физическую, химическую или биологическую природу, сходную с природой изучаемого явления, сохраняют, как правило, геометрическое подобие оригиналу и отличаются от него лишь размерами, скоростью течения исследуемых явлений и иногда материалом.

Ко второму типу относятся модели, имеющие отличную от прототипа физическую, химическую или биологическую природу, но допускающие одинаковое с оригиналом математическое описание. Например, для исследования сложных механических систем используются более удобные для такого изучения электрические модели.

К моделям третьего типа относятся модели, конструируемые из знаков. В этих моделях природа оригинала и модели не имеют значения. В моделях этого типа важны только логические и математические свойства. Такие модели относятся к абстрактным моделям и строятся как логические и математические исчисления.

С понятием модели напрямую связан процесс моделирования, осуществляемый на основе абстрактно-логического мышления независимо от того, идёт ли речь об эмпирическом или теоретическом познании. Моделирование по существу является ничем иным, как дальнейшим развитием приёмов упрощения и схематизации, облегчающих процесс познания.

В соответствии с многообразием моделей существует множество различных способов моделирования. Так, например, распространена классификация моделирования по принципу применения моделей в той или иной области науки и техники: математическое моделирование, моделирование аэродинамические, моделирование в кораблестроении. Некоторыми авторами способы моделирования разбиваются на 3 вида в соответствии с 3 типами моделей, т.е. на вещественно-физические, вещественно-математические и логико-математические. Нам кажется, что имеет право на существовании классификация видов моделирования на основе функций моделей, выполняемых в познавательном процессе: гносеологическое моделирование, дидактическое, практически-прикладное.

Остановимся подробнее на дидактическом моделировании. Моделирование в учебной деятельности в первую очередь направлено на субъект познания, в отличие от моделирования в научном познании, которое направлено на объект изучения. Дидактическое моделирование, умело проводимое учителем не только помогает ученикам "открывать" знания, но и показывает способ добывания истины. Рассмотрим моделирование как метод обучения математике в начальной школе. Использование учителем моделирования в качестве метода обучения неизбежно и органично влечет за собой формирование соответствующего метода познавательной деятельности у учащихся. Обращение к моделям не только удовлетворяет, связанную с чувственным, опытно-практическим происхождением научных знаний потребность в наглядности, но и позволяет включить, подтолкнуть, направить механизм мышления на самостоятельные обобщения и открытия.

В обучении младших школьников, как и в научном познании, модели используются на четырех уровнях заменителя оригинала изучения – элементов, структур, функций и результатов. Поскольку в начальном обучении большинство математических понятий не определяется, то уяснение и освоение их смысла организуется через практическое оперирование различными множествами предметов, что позволяет детям на основе сравнения, классификации, абстрагирования и обобщения осознанно овладеть языком математики. К примеру, одним из важнейших направлений дочисловой подготовки является обучение счету. Предлагая учащимся соответствующие задания, учитель использует самые разнообразные модели натуральных чисел, которые отличаются друг от друга составом элементов множеств, их пространственным расположением и прочими характеристическими свойствами. Осуществляя операцию счета на все новых и новых моделях, дети постепенно начинают осознавать, что натуральное число, например, 2 является единственным общим свойством класса множеств, равномощных, допустим, множеству глаз у человека.

Выполнение обратных заданий, когда учитель называет число или показывает карточку с цифрой и предлагает детям изобразить соответствующее количество кругов, связано уже с построением самими учащимися предметной модели заданного числа. Изучение состава однозначных чисел и разрядного состава двузначных, трех- и более значных чисел опирается на использование структурных моделей. Например, 5 – это 3 и 2, поэтому берут 3 круга одного цвета и 2 круга другого цвета; 24 – это два десятка и 4 единицы, поэтому для моделирования данного числа используют два пучка счетных палочек, по 10 в каждом, и 4 отдельные палочки. Выполнение действий над структурными моделями чисел, например, 43 и 16, 28+40, 28+4 приводит школьников к "открытию" правил сложения: " Десятки легче прибавлять к десяткам. Единицы легче прибавлять к единицам".

Опорные схемы приемов вычислений являются функциональными моделями способов выполнения арифметических действий:

43+16

40 3 10 6

50 9

59

40

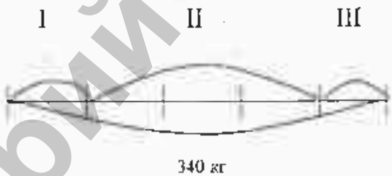
$43 \cdot 2 = 40 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 80 + 6 = 86$

3

$51:17 = \square$

Удачный выбор модели для текстовой задачи не только облегчает поиск плана ее решения, но и может натолкнуть на другие способы ее решения. Например, для задачи: "Маслозавод отправил в три магазина 340 кг масла. Первый магазин получил 1/5 часть всего масла, второй – ¾ того масла, что осталось, а третий – остальное масло. Сколько килограммов масла получил каждый магазин?" Можно предложить две модели – краткую запись и чертеж:

$\left.\begin{array}{l} \text{I – 1/5 всего} \\ \text{II – 3/4 остатка} \\ \text{III – остальное} \end{array}\right| \text{340 кг}$



Краткая запись приводит к решению:

1) 340:5=68 (кг) получил первый магазин;

2) 340–68=272 (кг) осталось;

3) $272:4 \cdot 3=204$ (кг) получил второй магазин;

4) 272–204=68 (кг) получил третий магазин.

А чертеж "подсказывает" другой, более рациональный для этой задачи способ решения:

1) 340:5=68 (кг) получил первый и третий магазины;

2) $68 \cdot 3=204$ (кг) получил второй магазин.

Метод моделирования – неотъемлемый компонент каждого урока математики в начальных классах, т.к. рациональное использование разного рода моделей позволяет учителю организовать познавательную деятельность учащихся и направить ее на решение целого ряда учебных задач: усвоение языка и методов математики, открытие закономерностей, правил, способов решения; отработка навыков их осознанного применения; контроль и самоконтроль качества усвоения программного материала и правильности получаемых результатов. Из урока в урок работая с предметными, условными, знаковыми или воображаемыми моделями, оценивая их роль в познании и в практике, учащиеся постепенно начинают овладевать методом моделирования и самостоятельно применять его для решения новых учебных и познавательных задач.

Для моделирования одной из необходимых мыслительных операций является абстрагирование, в процессе которого отвлекаются от ряда свойств предметов и отношений между ними и выделяют существенные для поставленной учебной задачи свойства и отношения. На основе абстрагирующей деятельности человеческого мышления осуществляется процесс обобщения, т.к. именно абстрагирование выявляет у объекта те его свойства и отношения, которые присущи классу объектов, оставляя другие его стороны без внимания. Таким образом, всякое обобщение есть в то же время и абстрагирование, но не всякое абстрагирование есть обобщение, т.к. абстрагировать можно не только общее, но и единичное. Указанные два взаимосвязанных процесса играют ведущую роль в формировании математических понятий, например, квадрата, треугольника, натурального числа и т.д.

Важной мыслительной процедурой, сопровождающей процесс моделирования, является идеализация, связанная с образованием понятий об объектах, не имеющих своего аналога в действительности, например, "точка", "абсолютно-черное тело", "идеальный газ".

Идеализацию отличает от абстрагирования то, что результат абстрагирования можно экземплифицировать, т.е. указать его прообраз, а результат идеализации нельзя. Показательно в этом смысле понятие "точка", которое в математике относится к неопределяемым. Экземплифицировать точку действительно нельзя указанием на какой-либо объект действительности. В таком случае роль точки может выполнять пятно, оставленное чернильной ручкой на листе бумаги, мелом на доске.

Моделирование предполагает существование не только отношения изоморфизма, но и отношения аналогии между моделью и оригиналом. Понятия аналогии и изоморфизма являются близкими. Общее у них то, что они выражают отношения сходства модели и объекта, однако аналогия не предполагает обязательного однозначного соответствия модели и оригинала.

В принципе любая модель является аналогией, но не каждая аналогия является изоморфизмом. Аналогией может быть сходство признаков, структур и т.д. Изоморфизм – сходство структур, причем такое, при котором элементы структуры модели и оригинала взаимно однозначно соответствуют друг другу. Модели, основанные на отношениях изоморфизма, имеют больше возможностей в познании. Изоморфные модели в определённой мере являются универсальными, а модели-аналоги являются в значительной мере специализированными.

Обычно термин "моделирование" употребляют в смысле метода исследования объектов познания на их моделях. Модель – любой образ, заместитель, заменитель изучаемого объекта.

В качестве моделей идеальных математических объектов могут использоваться:

а) реальные предметы;

б) их изображение (рисунок, макет, муляж, игрушки и пр.);

в) условные заместители реальных объектов;

г) графическое представление математической ситуации (чертёж, схема).

Выбор наиболее оптимальной модели в той или другой конкретной ситуации – важная методическая проблема, от рационального решения которой во многом зависит эффективность обучения.

Индукция (лат. inductio – наведение, побуждение) – способ логического рассуждения, применяя который от знания об отдельных фактах или от менее общего знания переходят к знанию, носящему более общий характер. [52, с.274]. В широком смысле – это метод научного познания и теоретического обобщения опытных данных. Подобным образом трактуется это понятие и в словаре Ожегова С. И [71, с.243] и в психологии. Таким образом, индукция – это способ рассуждения, при котором заключение, являющееся общим суждением, получается на основе менее общего знания или отдельных фактов.

Индуктивное умозаключение имеет вид:

$$\frac{P(a)P(b)P(c)}{(\forall n \in M)P(n)}, \quad a,b,c \in M$$

где a, b, c – предметы (явления), подвергшиеся исследованию, Р – некоторый признак, выявленный при исследовании этих предметов (явлений): a имеет признак P, b имеет признак P, c имеет признак P, из этого заключили, что любой предмет (явление), не подвергшийся исследованию, но принадлежащий данному множеству, имеет признак P.

Индукция может быть полной и неполной.

"Полной индукцией называется умозаключение о принадлежности какого-либо признака всему классу предметов на основании сведений о том, что этот признак является неотъемлемой частью каждого представителя изучаемого класса" [10, с. 250].

Заключение, полученное с помощью полной индукции, логически следует из посылок и при истинности последних является достоверно истинным. Поэтому эти умозаключения относятся к дедуктивным.

"Неполной индукцией называется умозаключение о принадлежности какого-либо признака всему классу предметов на основании того, что этим признаком обладают только некоторые представители этого класса" [10, с. 251]. Неполной индукция относится к классу умозаключений вероятности и наряду с аналогией является важнейшим методом построения гипотез, правдоподобных суждений. В процессе вывода от отдельного, частного к общему совершается скачок от старого знания к новому, от ранее известного к ещё неизвестному

Применение в умозаключении неполной индукции может привести как к истинному, так и к ложному заключению.

В истории математики известны случаи, когда даже великие математики ошибались в своих индуктивных выводах. Например, французский математик Ферма, рассматривая последовательность чисел 5, 17, 257, 65537,... с общим членом $2^{2^n}+1$, заметил, что её первые четыре члена, соответствующие n= 1, 2, 3, 4, являются простыми числами. Он предположил, что следующие члены также являются простыми числами. Однако Эйлер нашёл, что уже следующий член $2^{32}+1$, соответствующий n= 5, не является простым числом: он делится на 641.

Хотя неполная индукция не даёт достоверного знания, и её вывод в результате проверки иногда может оказаться ложным, ценно здесь то, что, во-первых, мы получаем обширный материал для проверки, во-вторых, каждый новый вывод распространяется и на ещё неизвестные объекты – те остальные элементы изучаемого множества, которые не были проверены.

Неполную индукцию называют научной индукцией, если удаётся дать такое научное объяснение, обоснование наблюдаемых частных случаев, которое применимо в принципе ко всем возможным случаям данного рода. Например, метод математической индукции, применяемый для доказательства утверждений, сформулированных для всех неотрицательных целых чисел.

Термин "индукция" кроме значения "индуктивное умозаключение" имеет ещё два других значения.

1. Индукция как метод исследования, при котором для получения общего знания о некотором множестве предметов необходимо исследовать отдельные предметы этого множества, найти в них общие существенные признаки, присущие данному множеству. Другой разновидностью применения индуктивного метода исследования является переход от знания менее общих положений к получению более общих выводов.

2. Индукция как форма изложения научной информации в книге, учебнике, на уроке, лекции, т.е. в процессе обучения, когда от единичных, частных и менее общих положений идут к общим заключениям, выводам, предложениям.

Конкретно-индуктивный метод широко используется в начальных классах. Дети пользуются неполной индукцией, когда после решения специально подобранных примеров формулируют законы сложения и умножения, свойства арифметических действий, правила решения простейших уравнений, простых задач и т.п.

Система упражнений, подобранных с целью индуктивного обобщения полученных при их выполнении результатов, должна отвечать определённым требованиям:

1. Она должна обеспечить наглядную основу формируемого знания.

Средствами наглядности могут быть различные объекты (реальные предметы, их изображения, модели чисел, сами числа, математические выражения и т.д.).

2. Содержать достаточное число фактов для выделения существенных признаков и рассмотрения исследуемого явления с разных сторон. Оптимальное их число определяется опытом детей и сложностью рассматриваемого материала.

3. Неизменность существенных признаков при вариативности несущественных.

4. Учёт порядка изучения вопросов курса, обеспечивающих сопоставление сходных и противопоставление противоположных понятий.

На начальных ступенях процесса познания используют индукцию через простое перечисление, которая является разновидностью неполной индукции. С её помощью заключение о целом классе однородных предметов делается на том основании, что среди наблюдаемых случаев не встречалось факта, противоречащего производимому заключению. Такая индукция имеет определённые достоинства: она удобна в операциях с большими классами. Заключение о целом множестве предметов (однородных) можно сделать на основании двух или нескольких наблюдаемых случаев. Объективным основанием служит их повторяемость при отсутствии среди них противоречащего факта. Степень вероятности заключения индукции через простое перечисление увеличивается с увеличением числа наблюдаемых случаев. Однако, сколько бы явлений (случаев) ни было охвачено наблюдением, не исключена возможность встретить противоречащий случай.

Дедукция (лат. deductio – выведение) – логическое путь от общего к частному. В более специальном смысле термин "дедукция" обозначает процесс логического вывода, т.е. перехода в соответствии с определенными правилами логики от исходных предложений, посылок к их следствиям. [52, с. 73].

Наука всегда стремится к истинному знанию, достоверным выводам, доказуемым суждениям, что особенно характерно для математики. Исключительное значение в ней приобретают умозаключения достоверности, в которых используются надёжные логические способы получения истинного вывода из истинных посылок. Из индуктивных умозаключений к умозаключениям достоверности относятся полная и математическая индукция. Однако, основной вид умозаключения достоверности в математике и науке вообще – дедуктивное умозаключение, обеспечивающее истинность заключения при истинности посылок и соблюдении правил логики. Существует три вида дедуктивных умозаключений.

1. От более общего заключения к менее общему или единичному.

2. От одной общности заключают к общности того же уровня.

3. От единичного заключения к частному.

Достоверно умозаключать от единичного к общему или от частного к общему нельзя – можно получить ложный вывод. Но достоверно умозаключать от единичного к частному можно.

Впервые теорию дедукции разработал Аристотель. Декарт считал, что к познанию вещей человек приходит двумя путями: через опыт и с помощью дедукции, которую он назвал чистым умозаключением; "опыт часто вводит нас в заблуждение, а дедукция избавлена от этого недостатка" [62, с.137]. Однако, именно опыт и наблюдения помогли человеку выработать правила дедуктивного умозаключения.

Термин "дедукция" употребляется также в следующих его значениях.

1. Дедукция как метод исследования предполагает отыскание "ближайшего рода", в который входят предметы исследования, применение к этим предметам соответствующего закона, присущего всему данному роду. Разновидностью этого метода является переход от знания более общих положений к знанию менее общих положений.

2. Дедукция как форма изложения материала в книге, учебнике или на уроке в процессе обучения, когда от общих положений, законов идут к менее общим суждениям, предложениям.

Дедукция играет огромную роль в науке математике и в обучении школьников её основам. Почти все доказуемые предложения, теоремы, формулы, тождества обосновываются, доказываются и выводятся с помощью дедуктивных умозаключений. Этим методом обычно устанавливается истинность математических предложений, которые, благодаря этому, переходят из разряда вероятных суждений, гипотез в фонд математической теории.

В начальном обучении математике дедукция чаще всего используется на этапе применения обобщенных знаний, полученных в большинстве случаев индуктивным путем.

Дедукция и индукция тесно связаны между собой. Индукция служит одним из средств первичного обобщения огромного количества опытного материала, полученного посредством наблюдения и эксперимента. С её помощью сделан ряд научных открытий. Однако, индукция не даёт гарантии на получение достоверного знания: "Самая простая истина самым простым, индуктивным путём полученная, всегда неполна, ибо опыт всегда незакончен" (В.И.Ленин). В науке всякое индуктивное заключение дополняется теоретической проверкой, прежде чем применится на практике.

Большинство посылок дедуктивных умозаключений получены в результате индуктивного обобщения значительного числа эмпирических данных.

Дедукция и индукция составляют две неразрывные стороны единого процесса познания, постоянно взаимодействуют, дополняют друг друга. Указывая на неразрывную взаимосвязь индукции и дедукции в процессе познания, Ф. Энгельс писал: "индукция и дедукция связаны между собой столь же необходимым образом, как синтез и анализ. Вместо того, чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счёт другой, надо стараться применять каждую на своём месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собой, их взаимное дополнение друг друга".

В математике как дедуктивной науке преобладают дедуктивные умозаключения, особенно в доказательствах. Но существенную роль играют и индуктивные методы, сочетающиеся с дедуктивными методами в научном мышлении, познании.

В школьном обучении математике соотношение между индуктивными и дедуктивными методами зависит от возраста школьников. В старших классах преобладают дедуктивные методы, в начальных – индуктивные. Однако и в начальных классах дети постепенно приучаются к использованию простейших дедуктивных умозаключений.

В начальном обучении математике наиболее эффективен индуктивно-дедуктивный метод, когда от рассмотрения частных случаев /задач, примеров/ осуществляется переход к общим выводам и правилам, а затем в свете общих положений осмысливаются другие частные факты. Знание, добытое индуктивным путём, становится основой получения новых знаний дедуктивным путём.

Однако в любом случае конкретно-индуктивный подход введения новых понятий характеризуется тем, что факты, полученные в процессе эмпирического познания действительности, служат исходным материалом для обобщающих выводов по индукции. Индукция здесь выступает как метод исследования, научного познания реального мира.

Усвоение понятий начинается уже в процессе их введения, однако овладение понятием невозможно без его систематического закрепления и повторения на последующих уроках. В начальном обучении математике, где почти все понятия сообщаются детям без логических определений, усвоение их организуется в следующих формах:

1) приведение иллюстрирующих и конкретизирующих данное понятие примеров (назови, чего у нас в классе "3"; запиши произведение чисел 3 и 4; покажи треугольник, четырехугольник и т.п.);

2) использование понятия в суждениях и умозаключениях (например, это треугольник, потому что у него 3 стороны, 3 угла, 3 вершины).

Каждый из этих видов деятельности связан с проведением дедукции, осуществляемой мысленно или с проговариванием вслух. От общего мысль учащихся движется к частному, конкретному (и, конечно, в противоположном направлении).

Еще К.Д.Ушинский подчеркивал значение систематизации знаний: "Голова, наполненная бессвязными знаниями, похожа на кладовую, в которой все в беспорядке и где сам хозяин ничего не отыщет" [43 ,с.66]. Включение новых понятий в систему математических знаний основано на установлении ближайших и более удаленных связей между отдельными понятиями, т.е. на установлении отношений между объемами понятий. С одной стороны, связи между понятиями определяют переходы в процессе рассуждений от одних понятий к другим, с другой стороны, понимание взаимоотношений между понятиями служит основой для усвоения системы понятий.

Изобразим, например, схему системы понятий в теме "Умножение"

Такой подход ориентирует учителя на использование индукции как метода познания, когда отдельные знания путем индуктивных умозаключений обобщаются до соответствующих законов или правил. Эти рекомендации и используют учителя в практике обучения. Проанализируем, к примеру, фрагмент урока во втором классе СШ №6 г. Кобрина по теме "Нахождение неизвестного уменьшаемого и вычитаемого" /учитель Петрачук А.Р./.

С помощью наглядных пособий раскрывается связь между уменьшаемым, вычитаемым и разностью:

– Возьмите 7 кружков, отодвиньте 4 кружка. Сколько кружков осталось? Как узнали? (7-4=3). На доске запись: 7-4=3

– Как называется в этом примере число 7? 4? 3? Придвиньте 4 кружка к 3 кружкам. Сколько стало кружков? Как узнали? (4+3=7). Сравните этот пример с первым. Как получили уменьшаемое 7? /К вычитаемому прибавили разность./ Отодвиньте теперь 3 кружка. Сколько кружков осталось? Как узнали? (7–3 = 4).Сравните этот пример с первым. Как нашли вычитаемое 4? /Из уменьшаемого вычли разность/.

Так же ведется наблюдение по иллюстрации и записи, данной в учебнике, в результате чего формулируются выводы: если к вычитаемому прибавить разность, то получится уменьшаемое; если из уменьшаемого вычесть разность, то получится вычитаемое.

Здесь индукция выступает не только как метод познания, но и как способ обоснования истинности выдвигаемых гипотез. И хотя вывод неполной индукции всегда содержит элемент неисследованного неизвестного, ибо делается на основе рассмотрения части обобщаемых явлений, для младших школьников он является вполне убедительным. На этой ступени обучения, мы думаем, можно не акцентировать внимание детей на вероятностном характере получаемого таким путем знания.

Некоторые вопросы теории в начальном обучении математике вводятся дедуктивно. В арифметике – это правила умножения на 0 и на 1. Выбор этого метода обусловлен тем, что мы не может предложить учащимся для наблюдения ряд частных фактов, т.к. случаи, когда второй множитель 0 или 1, не могут быть подведены под общее определение действия умножения и требуют доопределения понятия "произведение целых неотрицательных чисел".

Ограниченное использование дедукции при введении теоретических знаний объясняется в первую очередь возрастными особенностями младших школьников, которые мыслят конкретными категориями, опираясь при этом на свойства конкретных предметов и явлений, а также их невысокими познавательными возможностями, которые находятся в начальной стадии активного развития и совершенствования. Дедукция широко используется на этапе применения в практике знаний теоретического характера.

Аксиоматический метод – важнейший метод теоретического исследования. Конечно же в первую очередь, в математике, построение которой дает образец реализации аксиоматического метода в науке и демонстрирует его действенность. Аксиоматическое построение других научных дисциплин возможно в той мере, в какой эти науки математизированы. Например, когда биология стала использовать математические методы, когда ее понятийный аппарат мог быть формализован, тогда появилась возможность ее аксиматизации.

Аксиоматический метод построения научной теории основан на установлении неопределяемых понятий, отношений между ними и формулировании основных положений – аксиом, принимаемых без доказательства. Все остальные теоретические положения доказываются. В математике аксиоматический метод зародился в работах древнегреческих геометров. Блестящим образцом применения аксиоматического метода является геометрия Евклида, в которой четко реализована идея получения большинства содержания геометрического материала чисто дедуктивным путем на основании доказательства. В процессе доказательства применяются определенные правила умозаключения, с помощью которых от одних доказанных суждений можно переходить к доказательству других. Обычно это два правила: правило подстановки и правило вывода заключений. Первое правило соответствует аристотелеву заключению – от общего к частному, второе – классической логике, т.е. из истинности посылок следует истинное заключение.

Задачей аксиоматического метода является установление связей между положениями данной дисциплины с целью дальнейшего ее развития. Значение этого метода состоит в том, что отпадает необходимость в непосредственной эмпирической проверке всех суждений данной теории. Все содержание аксиоматической теории выводится из ее аксиом. В аксиомах аккумулирован индуктивный опыт человечества.

Аксиоматический метод находит отражение, например, в теории натуральных чисел. При аксиоматическом подходе натуральное число рассматривают как элемент некоторого множества N, в котором задано отношение "непосредственно следовать за", которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Во множестве N существует элемент, который непосредственно не следует ни за каким элементом этого множества. Его называют единицей.
2. Для каждого элемента a из N существует единственный элемент a', непосредственно следующий за a.
3. Для каждого элемента a из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a.
4. Если множество M есть подмножество множества N и: а) единица содержится в M; б) из того, что a содержится в M, следует, что и a' содержится в M, то множество M совпадает с множеством N.

Отражение аксиоматической теории натурального числа проявляется и в начальной школе: первоначальное знакомство с единицей как наименьшим числом, с принципами образования каждого непосредственно следующего за данным числом и предшествующего ему: т.е. $2=1+1$, $3=2+1$, $1=2-1$, $2=3-1$ и т.д. Некоторые из приемов сложения и умножения являются прямым следствием аксиоматического определения этих операций в данной теории: $5+3=(5+2)+1$, $5\cdot 3=5\cdot 2+5$.

§3.3. Историко-методологическое образование школьников при изучении математики

Развитие самой науки и ее методологии исторически обусловлено, а значит, историко-методологические проблемы науки взаимосвязаны. Следовательно, корректнее говорить о формировании историко-методологических знаний у познающих действительность.

Овладение школьниками историко-методологическими знаниями в обучении:

а) обеспечивает целостное, объективное представление о математике;

б) возмещает незнание многих фактов благодаря знанию обобщенных методов познания;

в) позволяет находить рациональные способы решения задач, проблемных ситуаций;

г) упреждает формальное усвоение знаний, непонимание того, с какой целью вводится тот или иной математический термин, правило;

д) закладывает основы "научного мышления".

Как обеспечить формирование историко-методологических знаний в учебном процессе? Мы полагаем, что знание о научном методе важно в любом предмете, в том числе и в математике.

Первоначальной ступенькой в формировании историко-методологических знаний в начальной школе может стать изучение исторических фактов, в процессе рассмотрения которых ученик получает информацию о том, как возникло то или иное математическое понятие, когда возникло, чем обусловлено его появление, какие изменения оно претерпевало в процессе своего развития.

С целью выяснения роли и места исторического материала в практике обучения, нами были проанализированы учебники по математике для начальной школы РБ (авторы: Т.М. Чеботаревская, А.Т. Катасонова и др.).

Анализ теоретического и практического материала учебников показал, что предлагаемый в них исторический материал сводится к знакомству с: магическими квадратами, известными еще во II тысячелетии до н.э.; римской нумерацией и записью чисел с помощью римских цифр; непозиционной двоичной системой счисления, в которой запись чисел происходит с помощью двух цифр 0 и 1.

Причем работа с магическими квадратами идет на протяжении всей начальной школы (увеличиваются значения чисел) и сводится к заполнению этих фигур недостающими числами и проверке "магичности" квадратов.

Но предлагаемый учебниками материал не затрагивает важные моменты, характерные для записи чисел в римской системе, не рассматривается нумерация чисел за пределами второго десятка, а количество практических заданий для отработки навыка оперирования с числами, записанными с помощью римских цифр, крайне незначительно.

Такое незначительное место исторического материала в учебниках математики начальной школы ни в коей мере не умаляет достоинств рассматриваемого учебника, к которым можно отнести оригинальность построения, логику подачи материала и т.д.

Представляет определенный интерес содержательный компонент учебника и сборника задач по математике для 4-го класса, авторами которого являются Л.А. Латотин и Б.Д. Чеботаревский. В рассматриваемых учебнике и сборнике задач предлагаемый учащимся материал содержит:

1) разнообразные сведения из географии (включая и географию РБ): сведения о реках, озерах, морях, вершинах, водопадах, о территориальном делении, демографическую информацию,

2) экологические задачи, сведения о растительном и животном мире РБ;

3) экономические задачи;

4) задачи с использованием старинных мер длины, площади, объема, массы, старинные задачи (всего 4), хронологические задачи из истории РБ.

Большой заслугой авторов является то, что в изучение математики введен богатый материал из истории белорусских мер, причем значение многих старинных мер дети находят самостоятельно, при осуществлении вычислений. Ученики 4-го класса знакомятся со следующими сведениями из истории математики:

1) меры веса (корректнее было назвать меры массы): пуд, фунт, камень, берсовец, гривна, дукат, лукно, лашт;

2) меры длины: морская миля, прут, локоть, вершок, аршин, четверть, миля, верста, шнур, постав;

3) меры площади: квадратный шнур, морг десятина, четверть;

4) меры объема: бочка виленская, гарнец малый, ведро, медника, гарнец, чаша, карэц, шанок новый, шанок старый.

Учебники содержат и ряд задач, через решение которых дети узнают даты значительных исторических событий на территории Беларуси: битва на реке Стреве, Грюнвальдская битва, даты возникновения белорусских городов, выпуска первой печатной книги Ф. Скорины, И. Федорова и П. Мстиславца, получения Магдебургского права белорусскими городами.

На наш взгляд, авторы учебника и сборника задач по математике для 4 класса Л.А. Латотин в Б. Д. Чеботаревский сделали значительный шаг в работе по введению исторического материала в математическое содержание.

Наше видение роли и места исторического знания в системе математического заключается в том, что синтезирующим началом, объединяющим математику и историю, выступает диалектическая пара понятий "историческое" – "логическое", где историческое – это последовательное рассмотрение явлений и событий в том порядке, который имел место в истории, а логическое – установление причинно-следственных отношений, выявление закономерностей возникновения и развития науки, ее понятий, теорий, создание целостности мировосприятия.

Интеграция двух наук, представленных в разных учебных предметах, возможна на основе использования принципа историзма, реализация которого в учебном процессе способствует:

1) формированию диалектико-материалистического мировоззрения;

2) формированию историко-методологического знания;

3) повышению интереса к математике;

4) систематизации знаний;

5) воспитанию патриотизма и интернационализма через: а) знакомство с древними мерами, существовавшими в Беларуси; б) раскрытие связей и взаимоотношений белорусов с другими народами, влияние соседних государств на развитие математической науки в Беларуси; в) знакомство с белорусскими учеными, их научным вкладом в развитие математики; г) решение математических задач, которые в своем содержании несут историко-познавательную информацию и современные сведения о развитии Беларуси,

6) гуманизации и гуманитаризации математического образования, под которой понимают (в широком смысле) систему организационных, методических, педагогических, психологических мер, направленных на проникновение гуманистических идей и гуманитарных методов в образование, на совершенствование содержания, форм и методов обучения.

В начальной школе это возможно сделать через знакомство с фактами биографий известных математиков, наиболее примечательными в жизни и взглядах ученых; обращение к нравственным качествам, характеризующим математиков; рассказ о трудностях научного поиска.

При обучении младших школьников математике мы выделяем следующие направления реализации принципа историзма:

1. Знакомство с историей народов и географией стран, в которых жили и творили классики математики соответствующей эпохи.

2. Знакомство с известными математиками, их основными идеями.

3. Знакомство с историей возникновения математических понятий, символов, знаков, терминов.

4. Использование литературных источников и исторических документов, которые содержат математическую терминологию.

5. Решение математических задач с использованием древних единиц измерения.

Например, тем, кто отправляется в дальнее путешествие, говорят: "Счастливого пути", а тем, кто уходит в большое плавание: "7 футов под килем (киль – часть корабля)". Что это значит?

6. Решение математических задач с историческим содержанием.

а) Первая книга на Руси по математике написана в 1682 г., а первый печатный учебник по математике появился на Руси спустя 21 год. Его автором был Л.Ф. Магницкий. Найдите год издания первого печатного учебника по математике.

б) Масса царь-пушки – 40 т, масса царь-колокола – 200 т. Существует и Царь-монета, достоинством в 1 рубль и массой ≈ 1кг (точная масса 1024 г), отлитая из меди в 1771 г. На сколько килограммов масса царь-монеты меньше массы царь-пушки? На сколько кг масса царь-колокола больше массы царь-монеты?

7. Искусство, архитектура, скульптура через призму математики.

Это направление дает чудесную возможность приобщить детей к сокровищнице мировой культуры, способствует формированию эстетической культуры, ведь " математика выявляет порядок, симметрию и определенность, а это важнейшие виды прекрасного"(Аристотель). К примеру, к "семи чудесам света" относят Александрийский маяк на острове Фарос, высота которого составляла 140 м, а высота бронзовой статуи Гелиоса в Радосе (Колосс Родосский) на 108 м меньше. Чему равна высота статуи Колосса Родосского?

8. О математике и математиках на Беларуси.

Данное направление мы выделили в отдельный пункт, поскольку считаем его одним из ведущих в патриотическом и интернациональном воспитании, которое на уроках математики может осуществляться через:

а) знакомство со старинными мерами, существовавшими в Беларуси;

б) раскрытие связей и взаимоотношений белорусов с другими народами, влияние соседних государств на развитие математической науки в Беларуси;

в) знакомство с белорусскими учеными, их научным вкладом в развитие математики;

г) решение математических задач, проблемных заданий, которые в своем содержании несут историко-познавательную информацию и современные сведения о развитии Беларуси;

д) раскрытие состояния математической науки на современном этапе, новые достижения белорусских ученых.

Таковы выделяемые направления реализации принципа историзма на уроках математики в начальной школе. Их осуществление связано с логической обработкой изучаемого материала: сравнение, анализ, синтез, обобщение, индукция, дедукция.

Остановимся на этих общелогических методах познания более подробно и рассмотрим возможности их реализации при формировании историко-методологических знаний учащихся через серию математических заданий с историческим материалом.

Сравнение. В обучении математике метод сравнения находит применение при работе с сугубо математическим материалом. Мы же предлагаем организовать сравнительную деятельность на основе интегративного знания, через организацию межпредметных связей математики с историей. Приведем примеры таких заданий:

1.Сравни: "<", ">", "=".

миля	○	верста	фут	○	аршин
аршин	○	сажень	бутыль	○	бочка
пуд	○	фунт	линия	○	дюйм

Сравнение данных величин может проводиться двумя способами: либо исходя из числового значения величин в метрической системе, либо через знание соотношений между данными величинами. К примеру, сравнить такие старинные меры длины, как аршин и сажень можно, зная, что 1 аршин ≈ 71 см, 1 сажень ≈ 2 м. Т.к. 71 см < 2 м, то и 1 аршин < 1 сажени. Второй способ основывается на знании соотношений между саженью и аршином. Т.к. 1 сажень = 3 аршинам => 1 сажень > 1 аршина.

2. Какую из предложенных в скобках мер (миля, верста, сажень, аршин, фут, линия, дюйм) лучше выбрать для:

а) измерения расстояния между городами;

б) измерения длины класса;

в) измерения роста человека;

г) измерения толщины книги.

В данном задании сравнение производится на основании знаний числовых значений старинных мер длины и установлении соответствия старинной меры к требуемому отрезку: расстоянию между городами, длине класса, росту человека, толщине книги.

3. Разрешите спор друзей, которые говорят об одном и том же человеке:

а) "Он видит на сажень сквозь землю";

б) "Он видит на три аршина в землю".

О каком человеке так говорят и какое расстояние больше: сажень или три аршина?

(сажень = 3 аршинам. Правы оказались оба друга.)

4. Почему ниже записанные пары чисел называются "числами-близнецами"?

3 и 5, 5 и 7, 41 и 43

Для получения ответа на этот вопрос необходимо провести сравнение, в результате которого выяснится, что у данных пар чисел, разность равна 2.

5. Запиши величины в порядке убывания, зная, что:

миля >верста, верста >сажень, аршин <сажень, фут >дюйм.

Особенностью этого задания является то, что между такими мерами длины, как миля, верста, сажень, устанавливается взаимное соотношение. А такие меры, как фут и дюйм, выпадают из предложенного ряда. И потому размещение их в ряду по убыванию возможно только при знании числовых значений в метрической системе.

Запиши величины в порядке возрастания, зная, что

пуд >безмен, фунт <безмен, берковец >пуд, берковец <ласт

6 Впиши числа так, чтобы запись была верной:

сажень	=	…аршинам
сажень	=	…футам
аршин	=	…вершкам
фут	=	…дюймам

7. Соедини линией старинную меру с правильным ответом:

3 км
верста ≈ 1 км
5 км

2 дм
дюйм ≈ 2 мм
2 см

16 кг
пуд ≈ 10 кг
5 кг

71 см
аршин ≈ 7 см
71 дм

8. Используя предложенные величины, запиши возможные равенства и неравенства:

1 сажень		3 фута	
3 аршина	4 аршина	1 ярд	12 дюймов
7 футов		4 фута	

Сравнение подготавливает почву для применения аналогии.

Аналогия. Аналогия в деятельности учащихся помогает им открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенные способы деятельности в измененных условиях. Выступая средством активизации учебно-познавательной деятельности учащихся, метод аналогии способствует повышению эффективности процесса обучения.

Приведем примеры заданий с использованием аналогии.

1. Древними русскими мерами длины, употреблявшимися уже в XI-XII вв, были малая пядь и большая пядь. Малая пядь равнялась расстоянию между концами растянутых пальцев, большого и указательного. Как вы думаете, что представляла собою большая пядь? (Ответ: расстояние между раздвинутым большим пальцем и мизинцем.)

2. Объясните происхождение римской цифры X, зная, что предположительно цифра V образовалась следующим образом:

В рассмотренных примерах вывод по аналогии является лишь предположительным и может оказаться неверным. Тем не менее это не должно стать препятствием для использования аналогии. Наоборот, чем больше выводов или предположений по аналогии сделают учащиеся на основании одного задания, тем эффективнее ее обучающее значение. Задача учителя – внимательно проанализировать каждый вариант ответа и подвести детей к самостоятельному выводу либо просто подтвердить или опровергнуть догадку ученика.

При работе с магическими квадратами, на основании признаков "магичности" фигур, можно предложить детям такое задание:

В I в. н.э. был известен такой древнеиндийский магический квадрат. Кроме основных, найди и другие признаки его магичности.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

По аналогии с нахождением основных признаков "магичности" квадрата, дети могут найти следующие особенности этого квадрата: сумма угловых чисел (1, 4, 16, 13) равна 34 (как и сумма чисел по строкам, столбцам и диагоналям); в каждом столбце имеется два рядом стоящих числа, сумма которых 13 или 21 и т.д.

В теме "Величины" на этапе закрепления можно предложить учащимся придумать по аналогии с изученными мерами свою меру длины, площади, меру жидкости и сыпучих веществ. При выполнении такого задания важно, чтобы дети обосновали свой выбор.

Анализ как метод обучения чаще всего находит применение на этапе закрепления знаний и позволяет вскрыть новые связи и отношения внутри рассматриваемого объекта, определить сущностные характеристики предмета. Например, при изучении календаря дети под руководством учителя могут проанализировать его недостатки. В результате работы обнаружится, что в современном календаре наблюдается неравенство месяцев, четвертей года и полугодий; отсутствие согласованности между разными единицами измерения времени. Такую работу, на наш взгляд, следует проводить параллельно с рассмотрением истории становления календаря, его важнейших реформ: 46 г. до н.э. – реформа календаря по указанию Юлия Цезаря, 1582 г. – григорианский календарь.

Или, например, при изучении мер длины можно провести сопоставительный анализ современной метрической системы мер со старинными русскими мерами длины (целесообразно проводить анализ при наличии демонстрационных таблиц сопоставляемых мер, в которых указаны отношения между единицами измерения).

Если анализ носит обучающий характер, то учитель может предложить детям серию направляющих вопросов (либо план, который будет полезен на этапе обобщения знаний):

– Каких мер больше: старинных или современных?

– В каких мерах при записи используются сокращения?

– Найди самую большую и саму маленькую меры в старинной и современной системе мер.

– С помощью этимологического словаря узнай, что означают слова: "верста", "сажень", "аршин", "фут", "дюйм".

– Что легло в основу большинства старинных русских мер длины?

Какие части тела получили наиболее широкое применение в старинных мерах длины? Почему?

– Найди преимущества и недостатки одной системы мер по сравнению с другой.

Важно помнить о том, что анализ находится в тесной взаимосвязи с синтезом, и потому любое разъединение целого на части, должно заканчиваться обобщенным, обоснованным пониманием этого же целого. Недостаточно указать (в результате анализа) какие меры длины использовались на Руси, чему равно их числовое значение в метрической системе мер, каково их происхождение. Гораздо важнее то, чтобы дети осознали и поняли причину, которая побудила людей искать другую систему мер – метрическую, и увидели ее преимущества. А это, в свою очередь, возможно сделать только через синтез, состоящий в мысленном или практическом соединении ранее выделенных элементов (признаков, свойств, отношений) предмета в единое целое с учетом знания, полученного в процессе их исследования относительно независимо от целого.

Как метод познания, синтез обеспечивает более глубокое осмысление элементов знания, полученных в результате анализа и способствует образованию нового знания.

Рассмотрим примеры заданий, решение которых требует применения данного метода:

1.

- Внимательно рассмотри рисунок.
- Перечисли все меры длины, которые находятся внутри круга А.
- Перечисли все меры длины, которые находятся внутри круга В.
- Какие меры длины являются одинаковыми и для круга А, и для круга В?
- Подумай, какие две группы составляют эти меры длины (старинные русские и английские меры длины).
- Какие одинаковые меры длины использовались и в русской, и в английской системах мер.

2 Даны меры длины: аршин, фут, дюйм, пядь большая, пядь малая шаг, локоть.

Распредели данные меры в две группы, связанные с частями человеческого тела. Какие две группы получилось? Что объединяет величины в одну группу? В другую? Чем удобны эти меры длины? В чем вы видите их недостатки?

Обобщение – метод познания, состоящий в установлении общих признаков, свойств и отношений предмета.

Привлечение данного метода в учебный процесс имеет место на заключительном этапе урока или темы и может осуществляться по обобщенному плану либо через свободное оперирование учащимися изученной информацией. К примеру:

1. Расскажи все, что ты знаешь о числе 12.

2. Вспомни интересные факты из жизни Архимеда, С.В. Ковалевской.

3. Какие математические термины, события связаны с историей Древней Греции? Египта?

Отдельно остановимся на таком виде нормативного знания, регламентирующего познавательные действия субъекта, как прием *классификации*. Упражнения на классификацию известных ученикам фактов способствуют развитию их логического мышления, требуют умения анализировать признаки предметов, находить среди них общие, на основе которых объекты можно объединять в группы и распределять в определенном порядке [69, с.24].

Рассмотрим примеры заданий с использованием приема классификации:

1. Распределите нижеизложенные старинные меры в три группы: меры длины, меры жидкости, меры массы.

Бочка, пуд, верста, фунт, ведро, линия, дюйм, бутыль, ласт.

Ответ:	Меры длины			Меры жидкости			Меры массы		
	верста	миля	дюйм	бочка	ведро	бутыль	пуд	фунт	ласт

2. Внимательно прочитай слова и выбери из них:

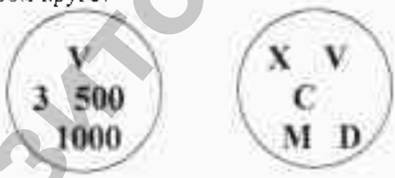
а) меры жидкости;

б) старые русские меры жидкости;

в) меры жидких тел в Великобритании и США.

Бочка, бушель, ведро, галлон, штоф, литр, кварта, пуд.

3. Рассмотри рисунок и скажи, правильно ли размещены числа по группам. Если есть ошибка, то как ее исправить? Какие числа записаны в первом круге? Во втором круге?



4.

	I столбец	II столбец	III столбец
I строка	Миля	верста	аршин
II строка	Точка	линия	сажень
III строка	Ярд	фут	дюйм

Задания:

1) В какой части таблицы меры длины располагаются по убывающему значению их величины? (I стл IIIстр.)

2) В какой строке меры длины располагаются по возрастающему значению их величины? (II строка.)

3) В какой строке размещены старые русские меры длины? (I, II)

4) В какой строке размещены английские меры длины? (III)

5) В каком столбце меры длины связаны с частями человеческого тела? (III.)

6) В каком столбце записаны старые русские меры длины? (III.)

5.Найди лишнее:

а) миля, сажень, ярд, аршин (ярд – из английской системы мер).

б) фут, верста, дюйм, фунт (фунт – мера массы).

в) ярд, фут, дюйм, галлон, миля (галлон – мера жидких тел).

6.Дан ряд чисел: 2, V, 4, X, 7, C, 200, D, M, 2000. Распредели их в следующие группы:

а) однозначные числа;

б) двузначные числа;

в) трехзначные числа;

г) четырехзначные числа;

д) четные числа;

е) нечетные числа;

ж) числа, записанные арабскими цифрами;

з) числа, записанные римскими цифрами.

7. Каждую клетку заполни нужным числом. Объясни, почему ты заполнил клетки именно так:

	четные	нечетные
числа, записанные с помощью римских цифр		
числа, записанные с помощью арабских цифр		

8. Раздели следующие меры измерения величин (английская миля, верста, бутыль, штоф, ярд, галлон, сажень, бочка, кварта, аршин, пинта, ведро, квартер) на группы двумя способами.

Ответ: 1) меры объема жидких тел и меры длины.

2)старинные русские и английские меры объема жидких тел и длины.

9. Напиши над нижеприведенными словами либо числами номер круга, к которому они принадлежат

1) число^3, IV^1, число, записанные римскими цифрами^2.
2) дециметр, метрическая единица, мера длины.
3) фунт, английская мера, мера массы.
4) математики Древней Греции, математики, Архимед.

10.

I, II, IV, VIII, XVI
2, 4, 8, 16, 32
3, 6, 12, 24, 48
2, 6, 18, 54, 162

- Который из числовых рядов лишний?
- Чем он отличается от остальных?
- Найди признаки, по которым ряды чисел похожи.

Ответ: 1. Лишним может быть и первый, и последний ряд.
2. первый ряд – числа, записанные римскими цифрами, остальные ряды – арабскими. Последний ряд – каждое следующее число больше предыдущего в 3 раза, а не в 2 раза.
3. а) в каждом ряду по пять чисел; б) если исходить из того, что последний ряд лишний, то каждое последующее число больше предыдущего в 2 раза.

Приведенные примеры использования приема классификации при обучении математике в начальной школе показывают его многоплановость и широкие возможности для развития мышления детей, формирования их историко-методологических знаний.

Наибольшей продуктивности в формировании методологических знаний можно добиться при проблемном обучении. К примеру, после ознакомления с римской нумерацией можно предложить детям такое задание:

2. В римской нумерации записано какое-то число. Если к нему приставить снизу его перевернутое изображение, то получится число, вдвое больше данного. Найдите это число. (Ответ: X.)

На наш взгляд, детям будет интересно следующее задание, требующее сопоставления между математическим термином и его переводом с латинского либо греческого языка:

3. Большинство математических терминов имеют греческие или латинские корни. Соедини слово, записанное в левом столбце с его предполагаемым переводом с латинского или греческого языков.

фигура	шишка
квадрат	внешний вид, образ
конус	четырехугольник
Трапеция	валик, каток
цилиндр	столик

циркуль	острый конец палки
радиус	спица колеса, луч
центр	поперечник
диаметр	Круг

Интересны, с нашей точки зрения, и задания на смекалку, требующие нестандартного подхода в своем решении. Например,

4. Эстонские моряки измеряют ***его*** трубками, в Испании – сигарой, у некоторых народов – стрелой. Предположите, ***что*** измеряют трубками, сигарой, стрелой? (Расстояние., проходимое судном при нормальной скорости за время, пока курится трубка или сигара; стрела – дальность полета стрелы.)

5. Предложите свой вариант, как славянский алфавит (демонстрация славянского алфавита) "превратить" в числа, не изменяя написания букв.

(На Руси над буквами ставился знак "титло" и тогда буква "превращалась" в число)

6. Название этой денежной единицы происходит от глагола "рубить". Догадайтесь, что это за денежная единица и найдите ее массу, если она составляет половину весовой гривны, равной 410 г.

(Это рубль. В XIV веке прежнюю большую весовую гривну стали рубить пополам, и серебряный слиток весом в половину гривны, в 205 г , и получил название рубля или рублевой гривенки.)

В структуре методологических знаний нет единообразия у ученых. Одни считают, что методологические знания сводятся к овладению такими общелогическими методами познания, как анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, формализация, идеализация и т.д. Другие относят к ним: научные теории, формализацию и формализованные понятия, идеализацию и идеализированный объект, пути открытия законов, группу общенаучных терминов (определение, закон, правило, методы науки и т.д.), структуры различных видов знаний.

Мы считаем, что к историко-метолологическим знаниям следует отнести знания о теории как системе знаний и теорий, как методе познания; группу общенаучных понятий (определение, закон, правило, принцип, гипотеза, методы науки), парные философские категории (причина – следствие, качество – количество, пространство - время), методы обучения, историко-научные знания. Одним из ориентиров для отбора историко-методологических знаний является их функция развития и воспитания школьников в процессе обучения.

Цели обучения, предметное содержание, данные о процессе усвоения предметного материала, частота применения общенаучных понятий в предметном содержании – эти категории отбора, реализованные на историко-математическом материале, дают возможность формировать историко-методологические знания у учащихся начальной школы.

Список использованной литература

1. Акимова С. Занимательная математика. - СПб: Тригон, 1997.– 608 с.
2. Алексеев В.Б., Панин А.В. и др. Теория познания и диалектика. – М.: Высшая школа, 1991.– 384 с.
3. Аменицкий Н.Н., Сахаров И.П. Забавная арифметика. – М.: Наука, 1991. – 128 с.
4. Анализ. // Философская энциклопедия. В 3-х т.. Т.I. – М.: Советская энциклопедия,1960. – С. 54-56.
5. Аналогия. // Философская энциклопедия. В 3-х т. Т.I. – М.: Советская энциклопедия, 1960 – С. 56-57.
6. Андреев И.Д. Проблемы логики и методологии познания. – М.: Наука, 1972. – 320 с.
7. Антонюк Г.А., Бурак П.М. и др. Методологические проблемы научного знания. – Мн.: Наука и техника, 1983. – 239 с.
8. Барабашев А.Г. Будущее математики: Методические аспекты прогнозирования. – М.: Изд-во МГУ, 1991.– 160 с.
9. Барабашев А.Г. Диалектика развития математического знания. / Закономерности развития математического знания/.– М.: МГУ, 1983 – 166 с.
10. Бартон В.И. Логика: Учебное пособие – Мн.: Новое знание, 2001. – 336с.
11. Беларускі гістарычны часопіс. – 1994 – №3. – 128 с.
12. Беларускі гістарычны часопіс. – 1995.– №3. – 200 с.
13. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики. – М.: МГУ, 1981.– 217 с.
14. Блонский П.П. Избранные педагогические и психологические сочинения. В 2-х т. Т.2./ под ред А.В.Петровского. – М.: Педагогика, 1979. – 398 с.
15. Боро В., Цагир Д., Рольфе Ю. и др. Живые числа. Пять экскурсий / Пер. с нем. Е.Б. Гладковой. – М.: Мир, 1985 – 128 с.
16. Братко А.А., Волков П.П., Кочергин А.Н. и др. Моделирование психической деятельности. – М.: Мысль, 1969.– 384 с.
17. Булавко И.Г. О математике и математиках. – Мн.: Народная асвета, 1998.– 144 с.
18. Бурбаки Я. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963 – 292 с.
19. Вернье Жерар. Ребёнок, математика, реальность. (проблемы преподавания математики в начальной школе). – М.: Институт психологии РАН, 1999. – 286 с.
20. Выготский Л.С. Воображение и творчество в детском возрасте. – СПб.: Союз, 1997. – 96 с.

21. Выготский Л.С. Мышление и речь. – М.: Лабиринт, 1996. – 415 с. – (Философия риторики).
22. Габриэлян О. Математика как феномен культуры. – Ереван: Изд-во АН Армянской ССР, 1990.– 175 с.
23. Гегель. Энциклопедия философских наук. – М.. Госполитиздат, 1956 – Т. III – С. 42.
24. Гегель. Энциклопедия философских наук. – М.: Мысль,1968. Т. VIII – С. 58.
25. Гершунский В.С. Философия образования. – М.: Изд-во "Флинта", 1998.– 432 с.
26. Гессен С.М. Основы педагогики. Введение в прикладную философию. – М.: Школа-Пресс, 1995.– 448 с.
27. Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964 – 378 с.
28. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. – М.: Гостехиздат, 1946 – 247 с.
29. Голин Г.М. Образовательные и воспитательные функции методологии научного познания в школьном курсе физики. – М., 1986 – 96с.
30. Гусак А.А. Гісторыя матэматыкі. – Мн.: БДУ, 2000 – 232 с.
31. Гусак А.А., Гусак Г.М., Гусак Е.А. В мире чисел. – Мн.: Народная асвета, 1987.– 191 с.
32. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. Логико-психологические проблемы построения учебных предметов – М.: Педагогика, 1972 – 424 с.
33. Депман И. Рассказы о математике. – Л.: Детгиз, 1954 – 144с.
34. Драздова В.Я. У свеце лікаў і лічбаў. Дапаможнік для настаўнікаў. – Мн.: Універсітэцкае, 1998.– 149 с.
35. Жуков Н.И. Философские основания математики. – Мн.: Университетское, 1990 – 107 с.
36. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. – М.: Педагогика, 1978 – 128 с.
37. Ильенков Э.В. Логическое и историческое. – В кн. "История материалистической диалектики" – М., 1971. – С.265.
38. Индукция // Философская энциклопедия В 3-х т. Т.2. – М.: Советская энциклопедия, 1962. С.274-275.
39. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия. В 3-х томах. Т.1. С древнейших времён до начала Нового времени. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
40. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия. В 3-х томах. Т.2. Математика XVII столетия. – М.: Наука, 1970. – 300 с.
41. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. – М.: Просвещение, 1968 – 288 с.

42. Кант И. Пролегомены / Пер. с нем. – М., 1997. – С. 21-24, 39-46, 48-50.
43. Каплан Б.С. и др. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики. / Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр. Под ред. Столяра А.А. – Мн.: Народная асвета, 1981 – 191 с.
44. Кедров Б.О. О творчестве в науке и технике. – М.: Прогресс, 1987 – 215 с.
45. Кикель П.В. Математика и реальность. – Мн., 1999 – 186 с.
46. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2-х томах. Т.I. Арифметика. Алгебра. Анализ. Пер. с нем. / Под ред. Г.Болтянского.-4-е изд. – М.: Наука, 1987.– 432 с.
47. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991.– 223 с.
48. Кон И.С. Историзм. //Советская историческая энциклопедия. Т. 6.– С. 453.
49. Кондрашова Л.В. Процесс обучения в высшей школе. – Кривой Рог, 2001. – 171 с.
50. Концепция гуманитаризации высшего образования в Республике Беларусь. – Мн.,1998.– 102 с.
51. Копнин П.В. Диалектика. Логика. Наука. – М.: Наука, 1979 – 464 с.
52. Краткий философский словарь / Под ред. А.П. Алексеева – М.: Проспект, 2000 – 400 с.
53. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников: Кн. для уч. и классных руководителей. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.
54. Латотин Л.А. Математика: Учеб. пособие для 4-го класса общеобр. шк. с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – 2-е изд. – Мн.: Народная асвета, 2002. – 317.
55. Логическое и историческое // Большой советский энциклопедический словарь. – М.: Сов. энц., 1991. – С.731.
56. Лукашевич В.К. Анатомия научного метода. – Мн.: 000 "Мисанта", 1999.– 96 с.
57. Мадер В.В. Введение в методологию математики /гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики/. Математика и теория познания. – М.: Интерпранс, 1994 – 448 с.
58. Математика: Учебник для 1-го класса общеобр. шк. с русским языком обучения / Н.И. Касабуцкий, А.Т. Катасонова, А.А. Столяр, Т.М. Чеботаревская. – 3-е изд. – Мн.: Народная асвета, 2000. – 192 с.
59. Математика: Учебник для 3-го класса общеобр. шк. с русским языком обучения / Т.М. Чеботаревская, А.Т. Катасонова, В.Л. Дрозд и др. – 2-е изд. – Мн.: Народная асвета, 2001. – 335 с.
60. Матэматыка: Учебник для 2-го класса общеобр. шк. с русским языком обучения / Т.М. Чеботаревская, А.Т. Катасонова, Н.И. Касабуцкий и др. – 2-е изд. – Мн.: Народная асвета, 2000 – 286 с.

61. Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьников. - М.: Педагогика, 1989 – 224 с.
62. Метельский Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы. Учебное пособие для вузов.-2-е изд. перер. – Мн.: БГУ, 1982 – 256с.
63. Метод // Философская энциклопедия. В 5-ти т. М.: Советская энциклопедия, 1964. – Т.3.- С.409-416.
64. Методология. // Философская энциклопедия. В 5-ти т. М.: Советская энциклопедия, 1964. – Т.3.– С. 420-421.
65. Минковский В.Л. За страницами учебника математики. Пособие для учащихся УІ класса. – М.: Москва, 1966 – 118 с.
66. Моделирование как метод научного исследования. /Гноссологический анализ/. – М.: МГУ, 1965 – 247 с.
67. Моро М.И. Методика обучения математике в I-III классах. – М.: Просвещение, 1975. – 304 с.
68. Мощанский В.Н. Формирование мировоззрения учащихся при изучении физики.-3-е изд., перераб и доп – М.: Просвещение, 1989.– 192 с.
69. Мядзведская В.М., Маташук Н.А. Пачатковае навучанне: матэматыка і лагічнае мысленне: Метад. дапам. для настаўніка пачатковай школы. – Мн.: ЗАТ "Бервіта", 1997 – 160 с.
70. Новиков А.Г. Философские проблемы возникновения и начального этапа развития математики. –Красноярск: Изд. Красноярского университета, 1992 – 160 с.
71. Ожегов С.И. Словарь русского языка. – М.: Русский язык, 1985 – 797 с.
72. Перельман Я.И. Занимательная арифметика. – М.: Триада-Литера, 1994 – 168 с.
73. Подкорытов Г.А. Историзм как метод научного познания. – Л.: ЛГУ, 1967.– 190 с.
74. Преподавание математики // Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления / Пер. с франц. – М., 1980. – С. 29-30.
75. Природа научного познания: логико-методологический аспект / Под ред. Степина В.С.– Мн.: БГУ, 1979.– 272 с.
76. Пуанкаре А. Наука и метод. – Одесса: Высшая школа, 1910 – 400 с.
77. Розенталь М.М. Принципы диалектической логики. – М.: Соцэкизд., 1960. – 182 с.
78. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – СПб.: Питер, 2000. – 720 с.
79. Рузавин Г.И. О природе математического знания. / Очерки по методологии математики/.– М.: Мысль, 1968.– 302 с.
80. Рыбников К.А. Введение в методологию математики. – М., 1979. –128с.

81. Сендер А.Н. формирование методологических знаний студентов – основа профессионализма будущего педагога. // В Техно ОБРАЗ 2001: Технологии непрерывного образования и саморазвития в личности: Материалы междунар. конфер. В 3 ч – /Отв. ред. проф. В.Л. Тарантей/ – Гродно: ГрГУ, 2001.– С. 159-164.

82. Сендер А.Н., Сендер Н.Н. Методологическая концепция педагогического образования. // Превантивна и корекционна педагогическа дейност за преодоляване на употребата и злоупотребата с наркотични вещетсва. Материалы междунар.конфер. – София, 2001 – С. 70–77.

83. Синтез. // Философская энциклопедия. В 5-ти т. – М.: Советская энциклопедия, 1970.– Т.5.– С.15-16.

84. Словарь иностранных слов. – М.: Русский язык., 1985 – 608 с.

85. Смапцер А.П., Кондрашова Л.В. Гуманизация педагогического процесса в современной школе: история и современность. – Минск: Бестпринт, 2001 – 308 с.

86. Современная математика // БСЭ. – М.: Советская энциклопедия, 1974. – Т.15. – С. 474-475.

87. Стефанов Н. Теория и метод в общественных науках. – М., 1967.– 258 с.

88. Теоретические основы методики обучения математики в начальных классах: Пособие для студентов факультета подготовки учителей нач.классов заочного отделения. –М.: Изд-во Институт практической психологии", Воронеж: НПО "МОДЭК", 1996 – 224с.

89. Ушинский К.Д. – Собрание сочинений. В 11 т. Т.7. Родное слово. – М.: Изд-во Академия пед. наук РСФСР, 1949. – 358 с.

90. Философия и естествознание // Кольман Э. Философские проблемы современной математики. – М.: Прогресс, 1965. – С. 209-210.

91. Философия и методология науки. / Под ред. В.Н. Купцова. – М., 1996. – 315с.

92. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. – М.: Просвещение, 1983. – 192 с.

93. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. Изд.3-е, испр. – Мн.: Вышэйшая школа, 1978 – 272 с.

94. Шапоринский С.А. Обучение и научное познание. – М.: Педагогика, 1981.– 208 с.

95. Штофф В.А. Введение в методологию научного познания. – Л.: ЛГУ, 1972.– 191 с.

96 Шубинский В.С. Философское образование в средней школе. – М.: Педагогика, 1991. – 165 с.

97. Энгельс Ф. Анти-Дюринг: Переворот в науке, произведённый господином Е. Дюрингом. – М.: Политиздат, 1983. – 483 с.

98. Эрдниев П.М. Обучение математике в начальных классах. /Книга для учителя/. 2-е изд. доп.– М.: АО "Столетие",1995.– 272 с.
99. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе. /Укрупнение дид. единиц/.– М.: Столетие, 1996. – 320 с.
100. Ярошевский М.Г. Зорина Л.Я. История науки и школьное обучение. – М.: Знание, 1978.– 48 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА 1.
МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ КАК ОСНОВА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ 5

§1.1. Методологическая концепция системы педагогического и математического образования 5
§1.2. Методологическая подготовка будущего педагога 12
§1.3. Исторический метод в науке и его реализация в математике ... 15
§1.4. Историческое и логическое в обучении математике 20
§1.5. Исторический аспект начального курса математики 24

ГЛАВА 2.
РЕАЛИЗАЦИЯ ИСТОРИЧЕСКОГО МЕТОДА В НАЧАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 29

§2.1. Исторические сведения из начального этапа развития математики 29
§2.2. Элементы истории математики при изучении целых неотрицательных чисел 46
§2.3. Текстовые задачи как средство реализации принципа историзма при обучении в начальной школе 57
§2.4. Исторический материал для изучения величин 70
§2.5. Принцип историзма в изучении геометрического материала ... 82

ГЛАВА 3.
МЕТОДОЛОГИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ 89

§3.1. Экспериментальные методы познания 89
§3.2. Общелогические методы познания 96
§3.3. Историко-методологическое образование школьников при изучении математики 135

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 149

ОГЛАВЛЕНИЕ 155

Научное издание

Сендер Анна Николаевна

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Монография

Редактор А.Н.Сендер

Ответственный за выпуск С.К.Гребельная

Подписано в печать 25.04.2003. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 10,49.
Тираж 100 экз. Заказ № 177.
Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина».
224665, Брест, ул. Советская, 8.
Лицензия ЛВ № 307 1.07.98.
Лицензия ЛП № 260 30.04.98.