УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Электронный учебно-методический комплекс для студентов математического факультета специальности «Математика. Информатика»

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2012

Авторы:

Будько Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, доцент.

Будько Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информатики и компьютерных систем

Рецензенты:

Кафедра высшей математики Брестского государственного технического университета

Савчук Вячеслав Федорович – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования, доцент.

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) содержит курс лекций (теоретическая часть) и упражнений (практическая часть), контрольные тесты по разделам «Логика высказываний», «Логика предикатов» и «Исчисление высказываний» дисциплины «Математическая логика». Наличие большого количества примеров и разобранных решений задач поможет в самостоятельном изучении курса математической логики.

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. В правой части экрана находится навигационная панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;

– кнопка «Приложение» предназначена для быстрого перехода к разделу «Приложение», в котором приводятся основные теоремы, законы математической логики, список важнейших равносильностей и терминологический словарь;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК.

Контрольные тесты, включенные в данный ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. Это связано с тем, что в ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, применять язык математической логики для моделирования рассуждений, исследовать структуру математических доказательств.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данный курс является начальным курсом математической логики. Освоение курса способствует повышению уровня математической культуры студентов, развитию у них умения проводить логические рассуждения и доказательства. Полученные знания будут полезны при изучении всех математических дисциплин и информатики.

Курс состоит из четырёх разделов. Первый раздел «Введение в математическую логику» посвящен истории математической логики, ее предмету и роли в вопросах обоснования математики.

Второй раздел «Логика высказываний» вводит студентов в круг основных понятий математической логики: высказывание, логические операции, формулы, их нормальные формы, законы логики, - и знакомит студентов с используемой символикой. Основным вопросом этого раздела является проблема разрешения для формул логики высказываний.

В третьем разделе «Логика предикатов» вводятся понятия предиката и кванторов и основные правила оперирования с ними, описываются формулы логики предикатов, дается понятие их интерпретации, вводится понятие применения языка логики предикатов для записи математических утверждений и определений.

В четвёртом разделе «Исчисление высказываний» вводится понятие языка аксиоматической теории, понятие вывода, рассматриваются такие свойства аксиоматической теории как полнота и непротиворечивость.

Цель ЭУМК: познакомить студентов с основными понятиями математической логики и методами формализации рассуждений.

Задачи ЭУМК:

- содействовать изучению основ языка математической логики и его возможностей для моделирования рассуждений;
- содействовать изучению методов распознавания правильных рассуждений.

Студент должен **знать:**

- основные понятия, законы и проблемы математической логики;
- методы вывода формул исчисления высказываний;
- приложения математической логики в программировании и математической кибернетике.

Студент должен **уметь:**

- применять язык математической логики для моделирования рассуждений;
- строить модели простых математических рассуждений с использованием языка логики предикатов;

- исследовать структуру математических доказательств.

Структура ЭУМК и особенности подачи материала

ЭУМК включает 5 частей: программный материал, теоретическая часть (курс лекций), практическая часть (задачи и упражнения), контрольные тесты и приложение.

Программный материал отражает содержание, соответствующее типовой учебной программе по учебной дисциплине «Математическая логика», и состоит из содержания учебного материала и примерной тематики практических занятий.

Каждый раздел дисциплины снабжён теоретической частью (курсом лекций), практической частью (упражнениями и задачами) и контрольными тестами, что позволяет последовательно по отдельным темам эффективно усваивать учебный материал студентами. Курс лекций полностью охватывает содержание учебной программы по дисциплине «Математическая логика».

В рамках ЭУМК студентам предложены контрольные тесты, которыми они могут пользоваться для самоконтроля после проработки материалов лекций и практических заданий (упражнения и задачи).

Приложение служит справочным материалом и содержит основные теоремы, законы математической логики, список важнейших равносильностей и терминологический словарь.

В соответствии с учебными программами на освоение дисциплины «Математическая логика» отводится 36 аудиторных часов для студентов дневной формы получения образования, из них: 18 часов - лекции, 18 часов - практические занятия.

Дисциплина изучается на первом курсе во втором семестре. Итоговый учёт успеваемости студентов осуществляется в форме **зачёта** во втором семестре, где учитываются работа студентов на практических занятиях, их оценки самостоятельной и контрольной работ.

Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение в математическую логику.
Дедуктивный характер математики. История математической логики, ее предмет и роль в вопросах обоснования математики. Парадоксы и программа Гильберта обоснования математики.

Раздел 2. Логика высказываний.
Тема 1. Высказывания и операция над ними. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями.
Тема 2. Формулы и их виды. Законы логики высказываний. Формулы и таблицы истинности. Тавтологии, противоречии, выполнимые формулы. Основные законы логики высказываний.
Тема 3. Равносильные формулы и нормальные формы. Равносильные формулы и равносильные преобразования. Нормальные и совершенные нормальные формы, методы их построения.

Раздел 3. Логика предикатов.
Тема 1. Понятие предиката. Кванторы. Формулы логики предикатов. Свободные и связанные переменные. Интерпретации. Логическая общезначимость, выполнимость и равносильность формул. Некоторые равносильные преобразования формул логики предикатов.

Тема 2. Проблема разрешения в логике предикатов.
Тема 3. Использование языка логики предикатов в математике.
Тема 4. Структура математических доказательств.
Запись математических утверждений определений и противоположных утверждений в виде формул логики предикатов. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Метод доказательства «от противного».

Раздел 4. Исчисление высказываний.
Тема 1. Язык. Аксиомы. Правила вывода. Вывод из гипотез.
Тема 2. Теорема дедукции. Примеры выводимых формул.
Тема 3. Непротиворечивость и полнота исчисления высказываний

Примерная тематика практических занятий

Занятие 1. Логика высказываний. Пункты 2.2.1, 2.2.2
Занятие 2. Логика высказываний. Пункты 2.2.3, 2.2.4
Занятие 3. Логика высказываний. Пункты 2.2.6, 2.2.7
Занятие 4. Логика предикатов. Пункты 3.2.1, 3.2.2
Занятие 5. Логика предикатов. Пункты 3.2.3, 3.2.4
Занятие 6. Логика предикатов. Пункты 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7
Занятие 7. Исчисление высказываний. Пункт 4.2
Занятие 8. Исчисление высказываний. Пункт 4.2
Занятие 9. Итоговая контрольная работа

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1
Введение в математическую логику

Математика является наукой дедуктивной. Это значит, истинность математических утверждений в отличии от утверждений естественных наук устанавливается не на основании опыта и наблюдений, а выводится (дедуцируется) с помощью логических рассуждений из небольшого числа исходных утверждений. Исходные утверждения называют аксиомами или постулатами. Их истинность принимают без доказательства. Истинность остальных утверждений (их называют теоремами) доказывают (выводят) из аксиом. Понятия, участвующие в определениях подразделяют на исходные (общепринятые и очевидные) и производные, которые определяются через исходные. Математика приняла форму дедуктивной науки в Древней Греции и сохранила эту форму по сей день. Во II веке до н.э. Евклид в своих «Началах» дал аксиоматическое (дедуктивное) изложение геометрии, которое в течение двух тысячелетий считалось идеальным примером дедуктивного построения знаний. Однако затем выяснилось, что изложение в «Началах» далеко от безупречного аксиоматико -дедуктивного построения.

Отметим две **слабые** стороны:

1. Делается попытка дать определение не только производным, но и основным понятиям. Это противоречит основному принципу, со-

гласно которому базисные понятия не нуждаются в определении.

2. Приводимые Евклидом постулаты и аксиомы не являются достаточными для доказательства теорем геометрии. В доказательствах используются многочисленные другие утверждения, считающиеся очевидными, но нигде явно не сформулированные.

Эти недостатки были исправлены геометрами в конце 19 века. В это же время была постепенно разработана строгая аксиоматическая форма и для других математических дисциплин: для арифметики, алгебры, анализа. Возникает вопрос, почему только в конце 19 века были устранены недостатки в "Началах" Евклида. Дело в том, что до середины 19 века математики обращали недостаточное внимание на логическую строгость. Считалось, что некоторые исходные положения столь очевидны, что их не надо не только доказывать, но даже формулировать в явном виде. Математика, и в частности геометрия, имела дело с исключительно наглядными и привычными представлениями. И в истинности исходных положений сомневаться не приходилось. Ситуация изменилась в 19 веке. Возникла геометрия сколь угодно большой размерности — четырех-, пяти- и вообще n-мерных пространств. Стали изучать бесконечномерные пространства. Алгебра перешла от изучения операций над числами к изучению операций над элементами произвольной природы. Все эти новые области математики имеют дело с очень отвлеченными и мало наглядными конструкциями. Наглядность и очевидность исходных понятий и утверждений больше не являются критерием правильности математических построений. Поэтому особенное значение приобретает логическая строгость математических теорий. Очень важным является явная формулировка всех аксиом и посылок. Большое значение для изменения точки зрения на вопрос об очевидности аксиом и основных понятий имело возникновение неевклидовой геометрии, созданной в первой половине 19 века великим русским математиком Н.И. Лобачевским и венгерским математиком Я. Бойаи. Значение этой геометрии с точки зрения логики состоит в том, что она очень существенно подорвала наивное мнение, согласно которому истинность аксиом при дедуктивном построении некоторой математической дисциплины должна непосредственно усматриваться на основании наглядной очевидности. Геометрия Лобачевского заставила задуматься о том, что же является фундаментом, основой математики. После того как Рене Декарт открыл метод координат стали думать, что такой основой может быть арифметика. На этом пути различные теории чисел и геометрия были сведены к теории натуральных чисел. Такое сведение называется арифметизацией. Была доказана возможность полной арифметизации математического анализа и теории функций. Известный французский математик Ж. Пуанкаре на втором международном конгрессе математиков даже заявил: “ Теперь в математике остались только целые числа и конечные или бесконечные системы целых чисел. Математика полностью арифметизированна”. Немецкий математик Г. Кантор в 1874–1897 г.г. разработал теорию множеств. Она оказалась той научной дисциплиной, которая довела единые методы для изучения конечных и бесконечных систем предметов. Работы Б. Больцано, Р. Дедекинда , Г. Фреге, Б. Рассела по теории множеств красотой и силой своих результатов и перспективами их использования в основаниях математики привлекли внимание ведущих математиков того времени. Однако интерес к логике оставался не столь жгучим до тех пор пока математический мир на был потрясен открытием парадоксов, вошедших в историю математики под названием антиномий. Приведем примеры парадоксов.

Логические парадоксы.

1. **Парадокс Расселя (1902).** Под множеством понимается совокупность каких – либо объектов. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества сами могут быть элементами множеств. Так например, множество всех множеств целых чисел имеет своими элементами множества. Большинство множеств не является элементами самих себя. Например, множество всех котов не является элементом самого себя, так как оно не кот. Однако есть множества, которые содержат себя как элементы, например множество всех множеств. Теперь определим множество: его элементами являются все такие элементы множества X, что X не есть элемент X. Может быть одно из двух: есть элемент самого себя

или нет. В обоих случаях получаем противоречие. Действительно, по определению множество A, если A есть элемент A, то A не есть элемент A; и если A не есть элемент A, то по определению A есть элемент A.

2. **Парадокс брадобрея.** Парадокс Расселя можно сформулировать без привлечения теории множеств. Представим себе, что один из солдат оказался по профессии парикмахером. Узнав об этом, командир полка приказал ему брить всех тех и только тех, кто сам себя не бреет. Все шло хорошо, пока не пришла пора брить самого себя. Оказалось, что побрить себя нельзя, так как приказано брить только тех, кто себя не бреет. Не брить себя тоже нельзя, так как приказано брить всех, кто себя не бреет.

Семантические парадоксы.

Некто говорит: «Я лгу». Если он при этом лжет, то сказанное им есть ложь и следовательно он не лжет. Если он при этом не лжет, то сказанное им есть истина и следовательно, он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и не лжет одновременно. В логических парадоксах используются только понятия теории множеств, в то время как в семантических парадоксах применяются такие понятия как «истинность» и др., которые вовсе не обязательны появляться в обычном математическом языке. Поэтому семантические парадоксы представляют большую угрозу для спокойствия математиков, чем логические.

Открытие антиномий потрясло математику как землетрясение. Наличие парадоксов в таких областях как теория множеств и логика заставило опасаться, что многие результаты, полученные в математике, тоже противоречивы. Все в математике стало казаться неустойчивым, потому что сам фундамент математики дал трещину. Математики по-разному реагировали на это землетрясение. Одни стали во всем сомневаться. Например Ю. Дедекинд после того как стал известен парадокс Расселя на время прекратил публикацию своих работ. Математик Р. Фреге кончал в это время издание своего труда, которому посвятил десять лет жизни. И в первой же фразе послесловия он пишет, что фундамент построенного им здания поколеблен Расселом. Пуанкаре изменил свое отношение к теории множеств. Были конечно и такие математики, которые продолжали применять теорию множеств, ту ее часть, где не были обнаружены антиномии. Но многие математики стали искать пути устранения противоречий.

Было предложено несколько программ «спасения» математики от «ужаса» парадоксов. Мы остановимся на двух из них, различные модификации которых обсуждаются и сегодня.

Первая. И в содержательных аксиоматических теориях и в современных формальных теориях речь идет о логическом выводе одних утверждений из других. Логическим выводом является построение цепочки утверждений по некоторым логическим законам. Но что представляют собой эти логические законы нигде не описываются. И теперь описание таких законов в силу большой абстрактности современной математики стало необходимым. В связи с этим возникла новая математическая дисциплина – метаматематика или теория доказательств, опирающаяся существенно на понятия и методы математической логики. Основание этой дисциплины положили труды Д. Гильберта, П. Бернайса, Д. фон Неймана, Ж. Эрбрана и др. Объектами изучения метаматематики являются дедуктивные математические теории. В ней исследуются свойства и отношения между системами аксиом, строение доказательств, взаимосвязь между теоремами. Основные проблемы метаматематики: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Под этим понимается следующее. **Проблема непреротиворечивости** состоит в выяснении непротиворечивости аксиом, т.е. надо выяснить невозможность получить в качестве логических следствий двух утверждений А и не А. **Проблема полноты:** достаточно ли аксиом, чтобы из них можно было бы вывести любое истинное утверждение данной теории. **Проблема разрешимости:** требуется установить, существует или нет эффективная процедура, отвечающая на вопрос : выводимо или нет произвольное утверждение данной теории из аксиом системы.

Для решения указанных проблем и ряда других проблем в метаматематике Гильбертом был предложен некоторый общий метод формализации процедуры логических заключений. Суть его заключается в попытке построения такой формализации математики, что средствами этой системы можно доказать свою собственную непротиворечивость. Другой подход связан с критикой ряда положений, которые в математике использовались без должного обоснования. Основателем этого направления является Л. Брауэр и это направление носит название интуиционизм. Интуиционисты утверждают, что такие законы, как закон исключенного третьего «P или не P» верен лишь для конечных множеств и нет оснований распространять его без ограничений на все множества. Но если подчиниться столь суровым требованиям, то многие теоремы математики станут невыводимыми. Поэтому интуиционизм нашел себе мало приверженцев среди математиков.

Математики всех направлений внесли большой вклад в математику. Было получено много новых, глубоких и важных результатов. Основным итогом здесь является становление математической логики как самостоятельной математической дисциплины. Принципиальным достижением математической логики является разработка современного аксиоматического метода, который может быть охарактеризован следующими тремя чертами:

1. Явная формулировка исходных аксиом той или иной теории.

2. Явная формулировка логических средств (правил вывода) для исследовательского построения этой теории.

3. Использование искусственно построенных формальных языков для изложения всех положений (теорем) рассматриваемой теории.

Основным объектом изучения в математической логике являются различные исчисления. В понятие исчисления входят следующие объекты:

а) язык (формальный) исчисления;

б) аксиомы исчисления;

в) правила вывода.

Понятие исчисления позволяет дать строгое математическое определение понятию доказательства и получить точные утверждения о невозможности доказательства тех или иных предложений теории. Исчисление позволяет формализовать многие разделы математики и других наук. Исчисление высказываний и исчисление предикатов являются формализациями логики, древнейшей науки о законах правильного мышления. Первые попытки формализации логики связаны с именами Аристотеля, Дж. Буля, но действительная формализация была осуществлена только с созданием математической логики. Итальянский математик Пеано много сделал для разработки формальных языков логики. Одним из наиболее замечательных достижений математической логики явилось нахождение математического определения понятию алгоритма. Понятие алгоритма использовалось очень давно. Выдающийся математик Лейбниц даже мечтал о нахождении универсального алгоритма для решения всех математических проблем. Точное определение понятия алгоритма позволило довольно быстро разрушить эту утопию. Оказалось, что во многих областях математики (алгебра, теория чисел, топология, теория вероятностей) имеются алгоритмически неразрешимые проблемы. Большой вклад в разработку теории алгоритмов внесли Э. Пост, А. Тьюринг, С. Клини и советские математики А.И. Мальцев, П.С. Новиков, А.А. Марков. Математическая логика имеет большое значение. С каждым годом идеи и методы математической логики все глубже проникают в кибернетику, вычислительную математику, структурную лингвистику, программирование и в другие области.

Раздел 2
Логика высказываний

2.1 Теоретическая часть

2.1.1 Высказывания. Операции над высказываниями.

Понятие высказывания является начальным, неопределяемым понятием. Можно пояснить, что под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно вполне определенно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Это предложение может быть записано как на обычном «словесном» языке, так и на любом «специальном» языке (математическом, химическом и т.д.).

Примеры высказываний:

1. Каждый студент-бюджетник математического факультета получает стипендию;
2. $2+3=5$;
3. $H + O_2 = HO_2$.

Первое из этих высказываний является ложным, второе – истинным, третье – ложным. Как следует из пояснения высказываниями не являются вопросительные, восклицательные, побудительные предложения, а также – определения. Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием. Так нельзя отнести к высказываниям предложения такого вида: «Розы – самые красивые цветы», «$n + 3 \geq 7$». Действительно, одним людям больше нравятся розы, другим тюльпаны, а третьим - подснежники. Поэтому не может быть единого мнения о том, какие цветы являются самыми красивыми, то есть нет и не может быть единого мнения об истинности первого предложения. Истинность второго предложения также нельзя определить, так как неизвестно о каком n идет речь.

Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным и не является одновременно тем и другим. Но не для всякого высказывания можно сразу определить его истинность. Более того, имеются высказывания, истинность которых еще не определена. Но все эти предложения считаются высказываниями, поскольку о каждом из них известно, что оно либо истинно, либо ложно и не является одновременно тем и другим. В качестве примера приведем такое предложение: «Автор этих строк проживёт не менее ста лет». Истинность этого высказывания еще не определена и будем надеяться определится не скоро.

Отметим, что логика высказываний не занимается выяснением того, почему то или иное высказывание является истинным (или ложным), а не наоборот. Это не входит в предмет логики высказываний. Не исследуется также и вопрос о смысловой содержательности высказываний. Высказывание рассматривается лишь как величина, принимающая одно из двух значений: истина или ложь. Эти значения обозначим соответственно через 1 и 0. Сами высказывания будем обозначать большими прописными буквами латинского алфавита.

В обычной речи при помощи связок «и», «или», «если ..., то ...» и др. из данных высказываний образуют новые. Например, если даны два высказывания «π меньше 4»; «π больше 3», то из них при помощи связки «и» можно образовать новое высказывание «π больше 3 и π меньше 4».

Мы уже упомянули, что в логике высказываний каждое высказывание рассматривается лишь как величина, принимающая одно из двух значений: 0, 1. Поэтому для таких величин вполне естественно можно определить операции, соответствующее связкам «и», «или», «если ..., то ...», «...тогда и только тогда, когда ...», «не». Эти операции позволяют из данных высказываний получить новые.

Пусть даны два произвольных высказывания A, B, истинность которых неизвестна.

Определение 2.1. Конъюнкцией называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое A∧B. Высказывание A∧B истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A,B истинны.

Запись «A∧B» читают «A и B». Соответственно A и B называют первым и вторым членом конъюнкции A∧B. Конъюнкцию A∧B записывают иногда еще и в виде A$\cdot B$, AB, $A\&B$.

Пример 2.1. *Если A есть высказывание «$3 < 7$», а B – высказы-*

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

вание «13 – четное число», то конъюнкция $A \wedge B$ этих высказываний «$3 < 7$ и 13 – четное число» является ложным высказывание, так как один из членов конъюнкции принимает значение «ложь».

Замечание 2.1. *В арифметике операция и ее результат имеют разные названия («сложение» и «сумма», «вычитание» и «разность» и т.д.). В логике высказываний операция и ее результат имеют одинаковые названия. Поэтому результат операций конъюнкции – высказывание $A \wedge B$ называют конъюнкцией.*

Определение 2.2. Дизъюнкцией называют операцию, которая двум высказываниям A,B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \vee B$. Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A,B ложны.

Запись «$A \vee B$» читают «A или B». Соответственно A и B называют первым и вторым членом дизъюнкции $A \vee B$. Союз «или» в дизъюнкции имеет неразделительный смысл, так как дизъюнкция истинна, если истинен хотя бы один ее член. Разделительному союзу или соответствует операция, обозначаемая символом $\oplus$ и называемая сложением по модулю 2. Высказывание $A \oplus B$ истинно только тогда, когда истинно лишь одно высказывание A или B

Пример 2.2. *Высказывание A есть «6 делится на 2 без остатка», высказывание B – «Париж – столица Англии». Тогда дизъюнкция «6* *делится на 2 или Париж – столица Англии» является истинным высказыванием, так как первый член дизъюнкции принимает значении «истина».*

Определение 2.3. Импликацией называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое A→B. Высказывание A→B ложно лишь тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Запись «A→B» читают «A влечет B», «если A, то B», «из A следует B», «B только тогда, когда A», «B при условии, что A», «A имплицирует B». A называют посылкой или условием импликации A→B, а B – заключением. Отметим, что для импликации A→B встречаются также и другие обозначения A⟹B, A⊃B.

Из определения 2.3 вытекают следующие свойства:

1. Импликация с ложной посылкой всегда истинна.

2. Импликация с истинным заключением всегда истинна.

Эти свойства формулируют иногда и по-другому: "из ложного следует все что угодно "истина следует из чего угодно".

Пример 2.3. *Из высказываний «Скворцы живут на Северном полюсе» и «$3 > 2$», которые обозначим соответственно через A и B, при* *помощи импликации образуем новое высказывание «Если скворцы живут на Северном полюсе, то $3 > 2$». Полученное высказывание A→B в силу свойства 1 будет истинно. Посылка A импликации A→B ложна.*

Нас не должно смущать, что в рассмотренном примере оказались соединенными столь разные «вещи», как скворцы и отношение «>». Мы уже упоминали, что логика высказываний не рассматривает вопрос о смысловой содержательности высказываний, она рассматривает высказывания лишь как величины, принимающие значения 0, 1. Поэтому с этой точки зрения (а мы ее будем придерживаться на протяжении всего нашего курса) приведенный пример вполне корректен.

Определение 2.4. Эквиваленцией называют операцию, которая двум высказываниям A,B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое A↔B. Высказывание A↔B истинно лишь тогда, когда оба высказывания A,B истинны или оба ложны.

Запись $A \leftrightarrow B$ читают «A тогда и только тогда, когда B», «A эквивалентно B», «A в том и только в том случае, если B», «A необходимо и достаточно для B». Эквиваленцию $A \leftrightarrow B$ записывают еще и в виде $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \equiv B$.

Пример 2.4. *Пусть даны два высказывания: «Сумма внутренних углов треугольника равна 180°» и «$\pi < 4$». Обозначим эти высказывания соответственно через A и B и образуем эквиваленцию A↔B:*

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

«Сумма внутренних углов равна 180° *тогда и только тогда, когда* $\pi < 4$*». Поскольку высказывания являются истинными, то и их эквиваленция также будет истинным высказыванием.*

Заметим, что названия рассмотренных операций происходят от латинских слов:
conjunctio — соединение, союз, связь;
disjunctio — разделение, различие;
implicatio — тесно связаны, сплетение;

Эти операции можно определить и при помощи так называемых **таблиц истинности** (табл.1).

Таблица 1

A	B	$A \bigwedge B$	$A \bigvee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определим последнюю рассматриваемую операцию - отрицание.

Определение 2.5. Отрицанием называют операцию, которая высказыванию A ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $\overline{\mathrm{A}}$. Высказывание $\overline{\mathrm{A}}$ истинно лишь тогда, когда A ложно. Запись $\overline{\mathrm{A}}$ читают «не A» или «неверно, что A». Отрицание $\overline{\mathrm{A}}$ записывают еще и в виде $\rceil A$.

Пример 2.5. *Если A есть высказывание «В параллелограмме противоположные стороны параллельны», то высказывание «Неверно, что в параллелограмме противоположные стороны параллельны» является отрицанием* $\overline{A}$ *и принимает значение ложь, поскольку A-истинно.*

Замечание 2.2. *Операции конъюнкцию и дизъюнкцию можно определить и для* $n \geq 2$ *высказываний. Высказывание* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ *истинно лишь тогда, когда истинны все высказывания* $A_1, A_2, \ldots A_n$, *а высказывание* $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ *ложно лишь тогда, когда ложны все высказывания* $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

2.1.2 Формулы и их виды.

Мы уже видели, что применяя к высказываниям операции мы получаем новые, более сложные высказывания. В свою очередь к этим новым высказываниям вновь можно применять операции, в результате чего получаем еще более сложные высказывания и так далее. Все эти высказывания будут записаны в виде формул, которые являются основным объектом исследований.

Дадим строгое определение формулы.

Определение 2.6. 1. Всякая буква, обозначающая высказывание (конкретное или произвольное), является формулой.

2. Символы 0 и 1 являются формулами.

3. Если P – формула, то $\overline{P}$ – формула.

4. Если P и Q – формулы, то $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ – формулы.

5. Формулами являются только те выражения, которые можно получить при помощи п. 1-4.

Определение 2.7. Формулы, получаемые по пунктам 1, 2 называются элементарными, все остальные - неэлементарными или составными.

Пример 2.6. *Приведем примеры формул:* A, B, C, 1, 0,$(A \wedge B)$, $((A \wedge B) \rightarrow C)$, $(A \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)))$. *Здесь первые пять формул являются элементарными, оставшиеся три – неэлементарными.*

Выражения $A \to B$, $(A \vee B) \to C$, $(A \Leftrightarrow B$ не являются *формулами*, так как первые два из них не заключены в скобки, а у третьего отсутствует правая скобка.

Замечание 2.3. *Формулы*, получаемые по определению 2.6, содержат достаточно большое число скобок. Некоторые из них можно опустить, придерживаясь следующего правила. Операции по силе своего действия в порядке убывания, располагаются следующим образом $-, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Учитывая это, скобки опускают, таким образом, чтобы после их восстановления слева направо получить исходную *формулу*. Поясним сказанное на примерах. При этом вначале рассмотрим пример с восстановлением скобок, а затем с их опусканием.

Пример 2.7. . Восстановить скобки: $A \to B \to C \wedge A \wedge \overline{B \vee C}$.

Наименьшую область действия имеет операция *отрицания*. Но согласно п. 3 определения 2.6 та часть *формулы*, над которой имеется знак отрицания, во внешние скобки не заключаются. Поэтому скобок, соответствующих операции *отрицания* нет, и, следовательно, восстанавливать их не надо. Переходим к следующей операции - *конъюнкции*, и восстанавливаем скобки слева направо:

$A \to B \to (C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C}$,

$A \to B \to ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C})$

За *конъюнкцией* следует *дизъюнкция* и в рассматриваемой формуле имеется только один символ этой операции. Восстанавливаем скобки, *соответствующие этой операции:* $A \to B \to ((C \wedge A) \wedge (\overline{B \vee C}))$.

Имеются два символа операции импликация. *Скобки, соответствующие этой операции, выставляются слева на право:*

$(A \to B) \to ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C})$,

$((A \to B) \to ((C \wedge A) \wedge \overline{B \vee C}))$.

Символов операции эквиваленция *нет. Восстановление закончено.*

Пример 2.8. *Опустить возможно большее число скобок:*

$(((A \to B) \wedge B) \vee C)$

Опустив две пары скобок получим формулу

$(A \to B) \wedge B \vee C$.

Оставшуюся пару скобок опустить нельзя, иначе после восстановления всех скобок получим формулу*, отличную от исходной:* $(A \to (B \wedge B) \vee C)$.

Рассмотрим еще такой вопрос, как определение истинностного значения формулы. Пусть к примеру имеется формула $(\overline{A \to B} \vee C) \wedge B$. Если A, B и C придать соответствующие значения 1, 0 и 1, то нетрудно убедиться, что вся формула примет значение 0. Таким образом при указанном наборе истинностных значений для A, B и C формула принимает значение 0. Найдем теперь истинностные значения формулы для всевозможных наборов значений A, B и C. При решении таких задач строят истинностные таблицы. При этом могут оказаться полезными следующие рекомендации:

1. Если формула состоит из n различных букв $A_1, A_2, ..., A_n$. то число столбцов в таблице равно $n + m$, число строк равно - 2^n, где m - число всех операций в формуле.

2. В таблице вначале следует n столбцов, соответствующих буквам $A_1, A_2, ..., A_n$. Половину первого столбца A_1 заполняют нулями, а вторую половину единицами. Во втором столбце A_2 первую четверть заполняют нулями, вторую - единицами, третью - нулями, четвертую - единицами. В третьем столбце поочередно нулями и единицами заполняются восьмые части, в четвертом шестнадцатые и т.д.

3. m столбцов, соответствующих операциям, заполняем в том порядке, в котором операции выполняются в формуле. Последний столбец и будет указывать значение формулы для всевозможных наборов значений букв, входящих в формулу.

Пример 2.9. *Построим теперь истинностную таблицу для рассмотренной формулы* $(\overline{A \to B} \vee C) \wedge B$. *Здесь* $n = 3$, *а* $m = 4$. *Поэтому в таблице будет* $m + n = 7$ *столбцов и* $2^n = 8$ *строк. Столбцы для* A, B *и* C *заполняются указанным в пункте 2 способом. Из всех операций формулы первой выполняется импликация. Поэтому первым будет столбец* $A \to B$. *Заполняем его согласно определения операции импликации. Второй выполняется операция отрицание и поэтому второй столбец* $\overline{A \to B}$ *заполняется путем отрицания значения первого.*

В третьем столбце $\overline{A \to B} \vee C$ записываются значения *дизъюнкции* *соответствующих значений второго столбца и столбца C. Четвертый столбец $(\overline{A \to B} \vee C) \wedge B$ заполняется аналогично. Его значения и являются значениями рассматриваемой формулы (табл.2).*

Таблица 2

A	B	C	$A \to B$	$\overline{\mathrm{A} \to \mathrm{B}}$	$\overline{A \to B} \vee C$	$(\overline{A \to B} \vee C) \wedge B$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

2.1.3 Равносильные формулы.

Определение 2.8. Пусть даны две формулы P и Q, и пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - совокупность всех различных букв, входящих хотя бы в одну из этих формул. Тогда формулы P и Q называется равносильными, если при любом наборе значений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ эти формулы принимают одинаковые истинностные значения.

Примеры равносильных формул: $\overline{\overline{X}}$ и X, $(X \wedge X)$ и X, $(X \vee Y)$ и $(Y \vee X)$, $(X \rightarrow Y)$ и $(\overline{X} \vee Y)$.

Как доказать равносильность формул? Как следует из определения необходимо сравнить истинностные значения формул на каждом наборе $X_1, X_2, ..., X_n$ - совокупности всех различных букв, входящих в формулы. Такое сравнение удобно проводить по истинностной таблице формул. Докажем таким образом равносильность формул $P = \overline{A} \vee B$ и $Q = A \rightarrow B$ (табл. 3).

Таблица 3

A	B	$\overline{\text{A}}$	$\overline{\text{A}} \vee$ B	A$\rightarrow$B
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Сравнив столбцы значений формул $\overline{A} \vee B$, $A \to B$ мы видим, что на каждом наборе значений A, B формулы принимают одинаковые истинностные значения, то есть являются равносильными. Вместе с тем равносильность некоторых формул следует непосредственно из определений соответствующих операций. Это можно сказать, например, о формулах $(X \wedge Y)$ и $(Y \wedge X)$, $(X \vee Y)$ и $(Y \vee X)$

Замечание 2.4. *Тот факт, что формулы P и Q равносильны, фиксируют в виде $P \equiv Q$. Знак $\equiv$ это знак равносильности, а саму запись $P \equiv Q$ читают «P равносильна Q». Символ $\equiv$ не является символом операции и поэтому выражение $P \equiv Q$ не является формулой. Знак $\equiv$ выражает отношение.*

Замечание 2.5. *Легко видеть, что отношение равносильности обладает свойствами:*

– рефлексивности, то есть $P \equiv P$, для любой формулы P,

– симметричности, то есть, если $P \equiv Q$, то $Q \equiv P$, для любых формул P, Q,

– транзитивности, то есть, если $P \equiv Q$ и $Q \equiv S$, то $P \equiv S$, для любых формул P, Q, S.

Следовательно, отношение равносильности является отношением эквивалентности. Оно разбивает множество всех формул на непересекающиеся классы эквивалентности. В каждом таком классе любые две формулы равносильны и никакие формулы из различных классов не являются равносильными.

Приведём список важнейших равносильностей:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$
2. $A \wedge A \equiv A$
3. $A \vee A \equiv A$
4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
5. $A \vee B \equiv B \vee A$
6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
7. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
10. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
11. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$
12. $A \wedge \bar{A} \equiv 0$
13. $A \vee \bar{A} \equiv 1$
14. $A \wedge 1 \equiv A$
15. $A \vee 0 \equiv A$
16. $A \wedge 0 \equiv 0$
17. $A \vee 1 \equiv 1$
18. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
19. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

20. $A \to B \equiv \bar{A} \vee B$
21. $A \to B \equiv \bar{B} \to \bar{A}$
22. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Одну из этих равносильностей – равносильность 20 мы уже доказали. Остальные равносильности могут быть доказаны таким же способом – построением истинностных таблиц. Ещё один способ доказательства некоторых равносильностей будет указан в пункте 2.1.5. Прокоментируем некоторые равносильности и укажем вытекающие из них свойства.

Определение 2.9. Формула называется элементарной конъюнкцией или логическим произведением, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1. В формуле могут быть символы только двух операций: $\wedge$ и $\overline{}$;
2. Символ $\overline{}$ относится только к элементарным высказываниям.

Члены логического произведения называются логическими сомножителями или просто сомножителями.

Равносильность 6 выражает свойство ассоциативности конъюнкции. Оно показывает, что в логическом произведении операции $\wedge$ можно выполнять в любом порядке, поскольку при любом порядке их выполнения будем получать формулу равносильную (в силу 6) исходной. Поэтому скобки в логическом произведении, указывающие на порядок выполнения операций, можно опустить.

Равносильность 4 (коммутативность конъюнкции) указывает на то, что в логическом произведении сомножители можно переставлять в любом порядке. Учитывая ещё и равносильность 2 получим свойство:

Свойство 2.1. *В логическом произведении из каждых нескольких одинаковых сомножителей можно оставить один, исключив остальные.*

Свойство 2.2. *В логическом произведении сомножители 1 можно опустить.*

Свойство 2.3. *Если в логическом произведении имеется сомножитель 0, то и произведение равно 0.*

Свойства 2.2 и 2.3 основаны на равносильностях 14 и 16 соответственно.

Определение 2.10. Формула называется элементарной дизъюнкцией или логической суммой, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1. В формуле могут быть символы только двух операций: $\vee$ и $\overline{}$;
2. Символ $\overline{}$ относится только к элементарным высказываниям.

Члены логической суммы называются логическими слагаемыми или просто слагаемыми. По аналогии с приведенными выше рассуждениями заключаем, что на основании равносильности 7 скобки в логической сумме можно опустить. Равносильность 5 указывает на то, что слагаемые в сумме можно переставлять в любом порядке. Из равносильностей 3, 15, 17 получаем следующих три свойства.

Свойство 2.4. *В логической сумме из каждых нескольких одинаковых слагаемых можно оставить один, исключив остальные.*

Свойство 2.5. *Если в логической сумме хотя бы одно из слагаемых равно 1, то и вся сумма равна 1.*

Свойство 2.6. *В логической сумме слагаемые 0 можно опустить.*

На основании равносильности 12 и свойства 2.3 можно сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

Свойство 2.7. *Если в логическом произведении имеется сомножитель вместе со своим отрицанием, то все произведение равно 0.*

Свойство 2.8. *Если в логической сумме имеется слагаемое вместе со своим отрицанием, то вся сумма равна 1.*

Истинность последнего свойства следует из равносильности 13 и свойства 2.5.

Известно, что в алгебре операция умножения дистрибутивна относительно сложения: $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$. В логике высказываний дистрибутивностью обладает конъюнкция относительно дизъюнкции (равносильность 8). Но в отличие от алгебры дистрибутивна также дизъюнкция относительно конъюнкции (равносильность 9). Эти две равносильности легко запомнить по аналогии с дистрибутивностью умножения относительно сложения.

Легко запомнить также и равносильности 10, 11: отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний.

Замечание 2.6. *Из определения 2.8 следует, что если в формуле P некоторую ее часть заменить на равносильную ей формулу, получим формулу, равносильную P.*

Такое преобразование называется равносильным. С помощью равносильных преобразований формулы можно приводить к более простому виду или к некоторой специальной форме. При этом номера применяемых равносильностей будем записывать сверху над соответствующими символами $\equiv$.

Пример 2.10. *Упростить формулу* $\overline{A \to B} \vee (B \to A)$:

$$\overline{A \to B} \vee (B \to A) \overset{20}{\equiv} \overline{\bar{A} \vee B} \vee (\bar{B} \vee A) \overset{11}{\equiv} (\bar{\bar{A}} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{B} \vee A) \overset{1}{\equiv}$$

$$\overset{1}{\equiv} (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{B} \vee A) \overset{5}{\equiv} (A \wedge \bar{B}) \vee (A \vee \bar{B}) \overset{7}{\equiv} ((A \wedge \bar{B}) \vee A) \vee \bar{B} \overset{5}{\equiv}$$
$$\overset{3}{\equiv} (A \vee (A \wedge \bar{B})) \vee \bar{B} \overset{19}{\equiv} A \vee \bar{B}.$$

2.1.4 Тавтологии.

Определение 2.11. Формула называется тавтологией, если она принимает значение 1 при любом наборе значений входящих в нее букв.

Тавтологии называют иногда еще тождественно-истинными формулами или законами логики. Приведем примеры тавтологий: $A \vee \overline{A}$, $A \to A$, $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$.

Как доказать, что формула является тавтологией? Для этого достаточно построить таблицу истинности для данной формулы. Если в последнем столбце таблицы будут одни только единицы, то формула по определению будет тавтологией. Хороший способ построения тавтологий дает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Формулы P и Q равносильны тогда и только тогда, когда формула $P \leftrightarrow Q$ является тавтологией.*

Истинность теоремы вытекает из определений эквиваленции, равносильности и определения тавтологии.

Замечание 2.7. *На основании теоремы 2.1 список равносильностей (пункт 2.1.) можно преобразовать в список тавтологий, заменив знак $\equiv$ на символ $\leftrightarrow$.*

Докажем еще две теоремы о тавтологиях.

Теорема 2.2. *Если формулы A и $A \to B$ являются тавтологиями, то и формула B также является тавтологией.*

Доказательство. Пусть формулы A и $A \to B$ являются тавтологиями. Предположим, что формула B тавтологией не является. Это означает, что имеется набор значений букв, входящих в формулу B, на котором формула B принимает значение 0. Тогда на этом же наборе формула $A \to B$ примет значение 0, поскольку A как тавтология всегда принимает значение 1, а B приняла значение 0. Пришли к противоречию, так как по условию формула $A \to B$ является тавтологией, а мы получили, что она приняла значение 0. Следовательно, наше предположение неверно и формула B является тавтологией. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть в формулу P входят буквы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и пусть формула Q получена из P заменой букв $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно формулами $B_1, B_2, \ldots, Bn$. Тогда если формула P является тавтологией, то и формула Q также будет является тавтологией.*

Доказательство. Пусть формула P является тавтологией. Буквам, из которых составлены формулы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ придадим произвольные, но фиксированные истинностные значения. На этом наборе формулы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ примут некоторые истинностные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Придадим эти значения соответственно буквам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулы P и формулам $B_1, B_2, \ldots, B_n$ формулы Q. Очевидно, формулы P и Q

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Закрыть

примут одинаковые истинностные значения и это значение будет 1, поскольку P тавтология. Таким образом, на произвольном наборе истинностных значений букв, входящих в формулу Q, формула Q приняла значение 1. Это и означает, что формула Q является тавтологией. Теорема доказана.

Замечание 2.8. *Теорема 2.3 показывает, что подстановка в тавтологию формул вместо букв дает тавтологию. Поэтому тавтологий можно образовать сколько угодно и, следовательно, их множество бесконечно.*

Мы уже сказали, что 22 тавтолигии можно получить из списка равносильностей. Укажем еще ряд тавтологий. Их особенность в том, что в каждой из них последней выполняется импликация и поэтому эти тавтологии называют тавтологическими импликациями. Они дают обоснование некоторым способам математических доказательств. Об этом речь пойдет позже, а пока ограничимся приведением их списка:

1. $A \wedge (A \to B) \to B$ – закон заключения;
2. $A \wedge B \to A$
   $A \wedge B \to B$ – законы удаления коньюнкции;
3. $A \to A \vee B$
   $B \to A \vee B$ – законы введения дизъюнкции;

4. $(A \vee B) \wedge \overline{B} \to A$ – закон удаления дизъюнкции;

5. $A \to \overline{\overline{A}}$ – закон введения двойного отрицания;

6. $\overline{\overline{A}} \to A$ – закон удаления двойного отрицания;

7. $(A \to B) \wedge (B \to A) \to (A \leftrightarrow B)$ – закон введения эквиваленции;

8. $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
$(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$ – законы удаления эквиваленции;

9. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ – закон контрапозиции;
10. $(\overline{A} \to B) \wedge (\overline{A} \to \overline{B}) \to A$ – закон доказательства от противного;

11. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ – закон силлогизма;
12. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ – закон сложения посылок;
13. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ – закон умножения заключений;

14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$ – закон транзитивности эквиваленции.

Заметим, что имеются формулы, которые являют собой полную «противоположность» тавтологиям.

Определение 2.12. Формула называется противоречием, если при любом наборе значений входящих в нее букв она принимает значение 0.

Противоречия называют еще и тождественно-ложными формулами. Приведем примеры таких формул: $A \wedge \overline{A}$, $A \leftrightarrow \overline{A}$, $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \wedge A)$.

Замечание 2.9. Формула A является тавтологией тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ является противоречием.

Определим еще один класс формул.

Определение 2.13. Формула называется выполнимой, если имеется хотя бы один набор значений букв, входящих в формулу, на котором формула принимает значение 1.

Из соответствующих определений следует, что всякая тождественно - истинная формула является выполнимой и никакая тождественно - ложная формула выполнимой не является.

2.1.5 Двойственность формул.

Если внимательно посмотреть на равносильности 2-19, то можно обнаружить интересную закономерность. Во-первых, там нет символов $\to$ и $\Leftrightarrow$. Во-вторых, в каждой паре равносильностей(2 и 3, 4 и 5 и т.д.) одну из них можно получить из другой путем замены всех символов $\vee$ на $\wedge$ и наоборот, а также всех символов 1 на 0 и 0 на 1. В этом выражается так называемый закон двойственности. Приступим к его рассмотрению. В этом пункте речь пойдет только от тех формулах, которые не содержат символов $\to$ и $\Leftrightarrow$.

Определение 2.14. Формула B называется двойственной к формуле A, если B можно получить из A путем замены всех символов $\vee$ на $\wedge$ и наоборот, а также всех символов 1 на 0 и 0 на 1.

Пример 2.11. *Если A есть $(X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee X_3)$, то двойственная ей формула B есть $(X_1 \wedge X_2) \vee (\overline{X_1} \wedge X_3)$ и если A есть $\overline{X_1 \vee X_2} \wedge X_1$, то B есть $\overline{X_1 \wedge X_2} \vee X_1$.*

Очевидно, если формула B двойственна к A, то и A двойственна к B. Формулу, двойственную к A, обозначают A^*, а чтобы отметить то, что формула A составлена из букв $X_1, \ldots, X_n$ пишут $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ Отметим следующие очевидные свойства:

1. Если $A = \overline{B}$, то $A^* = \overline{B^*}$;
2. Если $A = B_1 \wedge B_2$, то $A^* = B_1^* \wedge B_2^*$;
3. Если $A = B_1 \vee B_2$, то $A^* = B_1^* \vee B_2^*$.

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

Лемма 2.1. *Если формула* $A^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *двойственна к формуле* $A(X_1, X_2, ..., X_n)$, *то имеет место равносильность*

$$\overline{A(X_1, X_2, ..., X_n)} \equiv A^*(\overline{X_1}, \overline{X_2}, ..., \overline{X_n})$$

Доказательство. Доказательство леммы проведем по принципу математической индукции относительно $r(A)$– числа всех символов операций в формуле A.

1. $r(A) = 0$, то есть формула не содержит символов операций. По определению 2.6 такая формула состоит из одной буквы X_1, или из одного символа 0 или 1. В первом случае $\overline{A(X_1)}=\overline{X_1}$, $A^*(\overline{X_1})=\overline{X_1}$, то есть $\overline{A(X_1)} \equiv A^*(\overline{X_1})$. Во втором случае пусть формула A состоит из одного символа 0. Тогда левая часть доказываемой равносильности будет иметь вид $\overline{0} \equiv 1$, правая — $0^* \equiv 1$. Аналогично рассматривается и оставшийся случай.

2. Предположим, что лемма выполняется для всех формул, содержащих не более k символов операций. Докажем, что лемма выполняется для формулы A такой, что $r(A) = k + 1$. Для формулы A возможен один из следующих случаев:

а) A имеет вид $\overline{B}$, то есть $A(X_1, \ldots, X_n)=\overline{B(X_1, \ldots, X_n)}$. Поскольку $r(A) = k + 1$ и A есть $\overline{B}$, то $r(B) = k$. Поэтому для формулы B лемма по предположению выполняется, в силу чего

$$\overline{B(X_1, X_2, \ldots, X_n)} \equiv B^*(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_n})$$

По свойству 1 имеем: $A^*(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n}) \equiv \overline{B^*(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})}$. Теперь, применяя последовательно условие а), предположение и свойство 1 получим $\overline{A(X_1,X_2,\dots,X_n)} \equiv \overline{\overline{B(X_1,X_2,\dots,X_n)}} \equiv \overline{B^*(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})} \equiv$
$\equiv A^*(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})$;

б) А имеет вид $B_1 \wedge B_2$, то есть $A(X_1,\dots,X_n) = B_1(X_1,\dots,X_n) \wedge B_2(X_1,\dots,X_n)$. Так как $r(A) = k + 1$ и $A = B_1 \wedge B_2$, то $r(B_1) \le k$ и $r(B_2) \le k$. Поэтому для формул B_1, B_2 лемма по предположению выполняется. На этом основании можно утверждать, что $\overline{B_1(X_1,\dots,X_n)}$ $\equiv B_1^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})$,

$\overline{B_2(X_1,\dots,X_n)} \equiv B_2^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})$. В силу свойства 2 получим: $A^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}) \equiv B_1^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}) \vee B_2^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})$ Теперь, применяя последовательно условие б), равносильность 10, предположение и свойство 2 получаем: $\overline{A(X_1,\dots,X_n)} = \overline{B_1(X_1,\dots,X_n) \wedge B_2(X_1,\dots,X_n)} \equiv \overline{B_1(X_1,\dots,X_n)} \vee \overline{B_2(X_1,\dots,X_n)} \equiv B_1^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}) \vee B_2^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}) \equiv A^*(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})$;

в) А имеет вид $B_1 \vee B_2$. Этот случай рассматривается аналогично б).

Лемма 2.1 доказана.

Докажем теперь закон двойственности, суть которого выражает следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если формулы $A(X_1,\dots,X_n)$ и $B(X_1,\dots,X_n)$ равносильны, то и двойственные им формулы $A^*(X_1,\dots,X_n)$ и*

$B^*(X_1,\ldots,X_n)$ *также равносильны.*

Доказательство. Пусть $A(X_1,\ldots,X_n) \equiv B(X_1,\ldots,X_n)$. Применяя лемму 2.1 получим, что

$$A(X_1,\ldots,X_n) \equiv \overline{A^*(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})},\ B(X_1,\ldots,X_n) \equiv \overline{B^*(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})}$$

Основываясь на этих равносильностях и условии теоремы заключаем, что

$$\overline{A^*(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})} \equiv \overline{B^*(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n})},$$

откуда по определению равносильности делаем вывод

$$A^*(X_1,\ldots,X_n) \equiv B^*(X_1,\ldots,X_n)$$

Теорема доказана.

Замечание 2.10. *Если доказана равносильность двух формул, не содержащих символов $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$, то закон двойственности позволяет считать доказанной еще одну равносильность, получаемую из исходной заменой всех символов $\wedge$ на $\vee$ и наоборот, а также заменой 1 на 0 и 0 на 1. Это можно сказать о любой равносильности (не только о 2 – 19), исключая равносильности 10, 11, поскольку они применялись при доказательстве закона двойственности. Поэтому, в частности, при доказательстве равносильностей 2 – 19 (исключая 10,11)достаточно доказать из каждой пары (2 и 3, 4 и 5, и т.д.) только одну.*

2.1.6 Нормальные формы

В пункте 2.1.4 была определена элементарная коньюнкция.

Определение 2.15. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Пример 2.12. $(A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee C, (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee C$ – *эти ДНФ состоят соответственно из трех и двух дизъюнктивных членов (элементарных конъюнкций). ДНФ может состоять и из одного дизъюнктивного члена:* $\overline{A} \wedge \overline{B}, C$.

Определение 2.16. ДНФ называется совершенной (СДНФ), если каждая буква формулы входит в каждый дизъюнктивный член ровно один раз (с отрицанием или без него).

Пример 2.13. $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}), (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$.

Докажем теперь теорему о представлении формул специальными формами.

Теорема 2.5. *Всякую формулу, тождественно не равную нулю, можно единственным образом представить в виде равносильной ей СДНФ.*

Доказательство. Пусть дана формула $P(A_1, A_2, \dots, A_n) \not\equiv 0$. Очевидно, формулу P можно задать и истинностной таблицей с 2^n строками и $n+1$ столбцами. В первых n столбцах будут записаны наборы

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ значений $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в последнем $(n+1)$-ом столбце – значения формулы P для этих наборов.

Для каждой строки $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ таблицы определим элементарную конъюнкцию $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge \ldots A_n^{\sigma_n}$, где

$$\sigma_i = \begin{cases} A_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \overline{A_i}, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge \ldots A_n^{\sigma_n} \equiv 1$ тогда и только тогда, когда для каждого i $(1 \le i \le n)$ выполняется условие $A_i \equiv \sigma_i$.

Теперь из элементарных конъюнкций $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge \ldots A_n^{\sigma_n}$ таких, что $P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, составим дизъюнкцию. Такая дизъюнкция элементарных конъюнкций будет являться СДНФ, поскольку каждый дизъюнктивный член (элементарная конъюнкция) содержит каждую из букв $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ровно один раз (с отрицанием или без него).

Покажем, что формула определяемая этой СДНФ, совпадает с P. Для этого возьмем произвольный набор $v_1, v_2, \ldots, v_n$ истинностных значений и покажем, что на этом наборе формула P и построенная СДНФ, принимают одинаковые значения.

а) $P(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1$. Тогда в СДНФ имеется дизъюнктивный член $A_1^{v_1}, A_2^{v_2}, \ldots, A_n^{v_n}$, соответствующий строке $v_1, v_2, \ldots, v_n$ таблицы формулы P. При подстановке в этот член значений $v_1, v_2, ..., v_n$ вместо соответственно $A_1, A_2, ..., A_n$ получим, что $v_1^{v1} \wedge v_2^{v2} \wedge ... \wedge v_n^{vn} = 1$, так как для каждого $1 \leq i \leq n$ выполняется условие $A_i = v_i$. Тогда и СДНФ примет значение 1, поскольку один ее член принял значение 1.

b) $\mathrm{P}(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$. В этом случае в СДНФ нет дизъюнктивного члена $A_1^{v1} \wedge A_2^{v2} \wedge ... \wedge A_n^{vn}$ соответствующего строке $v_1, v_2, ..., v_n$ таблицы. Подставим значения $v_1, v_2, ..., v_n$ во все дизъюнктивные члены СДНФ. Так как в таблице нет одинаковых строк, то для каждого дизъюнктивного члена $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_n^{\sigma_n}$ найдется хотя бы один номер $1 \leq j \leq n$ для которого $A_j = v_j \neq \sigma_j$. Но тогда $A_j^{\sigma_j} = 0$ и в силу замечания весь дизъюнктивный член $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_n^{\sigma_n}$ обращается в 0. Дизъюнкция же нулей даст нуль, то есть СДНФ примет значение 0.

Покажем, что для каждой формулы можно построить только одну СДНФ.

Предположим , что формула $P(A_1, A_2, ..., A_n)$ имеет две разные СДНФ, обозначим их S и Q. Само собой разумеется, что значения формул определяемых S и Q, и значение формулы P совпадают, то есть на каждом фиксированном наборе значений $v_1, v_2, ..., v_n$ эти три формулы принимают одинаковые значения.

Так как S и Q различны, то у S имеется дизъюнктивный член, которого нет у Q (или наоборот). Пусть это будет $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_n^{\sigma_n}$. Тогда на наборе $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ этот дизъюнктивный член, а следовательно и S, примет значение 1. У Q дизъюнктивного члена $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_n^{\sigma_n}$ нет, и у Q все дизъюнктивные члены на наборе $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ будут принимать значение 0. Это же значение 0 примет Q как дизъюнкция нулей. Таким образом, формулы определяемые S и Q, на одном и том же наборе $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ приняли различные значения ($S = 1, Q = 0$), что противоречит условию равносильности этих формул. Следовательно, наше предположение неверно и формула P имеет единственную СДНФ. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует способ построения СДНФ по таблице формулы $P(A_1, A_2, ..., A_n)$.

1. В таблице отмечают строки $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, для которых $P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

2. Для каждой такой строки $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ строят элементарную конъюнкцию $A_1^{\sigma_1} \wedge A_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge A_n^{\sigma_n}$, где

$$A_j^{\sigma_j} = \begin{cases} A_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \overline{A_i}, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

3. Из построенных элементарных конъюнкций составляют дизъюнкцию, которая и будет являться СДНФ.

Пример 2.14. *Для формулы $P(A_1, A_2, A_3)$ заданной таблицей 4, построим СДНФ.*

Таблица 4

A_1	A_2	A_3	$P(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вначале отмечаем строки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, для которых $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=1$. Это будут первая, четвертая, пятая и восьмая строки. Затем выпишем соответствующие им элементарные конъюнкции:

$$A_1^0 \wedge A_2^0 \wedge A_3^0 = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3}$$
$$A_1^0 \wedge A_2^1 \wedge A_3^1 = \overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3$$

$$A_1^1 \wedge A_2^0 \wedge A_3^0 = A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3}$$
$$A_1^1 \wedge A_2^1 \wedge A_3^1 = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$$

Составим из построенных элементарных конъюнкций СДНФ: $(\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3}) \vee (\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3}) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$.

Замечание 2.11. *Аналогично ДНФ и СДНФ определяются КНФ и СКНФ. Приведем лишь пример СКНФ :* $(A \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$

Теорема 2.6. *Всякую формулу, тождественно не равную 1, можно единственным образом представить в виде равносильной ей СКНФ.*

Замечание 2.12. *Теорема доказывается аналогично теореме 1.5. Способ построения элементарных дизъюнкций будет ясен из предлогаемого ниже алгоритма построения СКНФ по таблице формулы* $P(A_1, A_2, ..., A_n)$.

1. *В таблице отмечают строки* $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, *для которых* $P(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$;
2. *Для каждой такой строки* $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ *строим элементарную дизъюнкцию* $A_1^{\overline{\sigma_1}} \vee A_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee A_n^{\overline{\sigma_n}}$;
3. *Из построенных элементарных дизъюнкций составляют конъюнкцию.*

Пример 2.15. *Построим СКНФ для формулы* $P(A_1, A_2, A_3)$, *заданной таблицей 4.*

Вначале отметим строки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, для которых $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$; вторая, третья, шестая, седьмая. Выпишем соответствующие им элементарные дизъюнкции $A_1^{\overline{\sigma_1}} \vee A_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee A_n^{\overline{\sigma_n}}$ для этих строк:

$$\begin{aligned}
A_1^{\overline{0}} \vee A_2^{\overline{0}} \vee A_3^{\overline{1}} &= A_1^1 \vee A_2^1 \vee A_3^0 = A_1 \vee A_2 \vee \overline{A_3};\\
A_1^{\overline{0}} \vee A_2^{\overline{1}} \vee A_3^{\overline{0}} &= A_1^1 \vee A_2^0 \vee A_3^1 = A_1 \vee \overline{A_2} \vee A_3;\\
A_1^{\overline{1}} \vee A_2^{\overline{0}} \vee A_3^{\overline{1}} &= A_1^0 \vee A_2^1 \vee A_3^0 = \overline{A_1} \vee A_2 \vee \overline{A_3};\\
A_1^{\overline{1}} \vee A_2^{\overline{1}} \vee A_3^{\overline{0}} &= A_1^0 \vee A_2^0 \vee A_3^1 = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee A_3.
\end{aligned}$$

Составим СКНФ:

$(A_1 \vee A_2 \vee \overline{A_3}) \wedge (A_1 \vee \overline{A_2} \vee A_3 \wedge (\overline{A_1} \vee A_2 \vee \overline{A_3}) \wedge (\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee A_3)$

Замечание 2.13. *Из способов построения СДНФ и СКНФ можно заметить следующую закономерность. Если СДНФ для формулы $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ состоит из m дизъюнктивных членов , то СКНФ для этой же формулы состоит из $2^n - m$ членов.*

2.1.7 Логические следствия

Определение 2.17. Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$, если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ является тавтологией.

Если формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, то пишут $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, а саму запись $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ читают «Из $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следует B».

Пример 2.16. *Можно проверить, что формула $A \wedge (A \to B) \to B$ является тавтологией. Поэтому формула B является логическим следствием формул A, $A \to B$, то есть $A, A \to B \models B$.*

Замечание 2.14. *Из определения следует, что тавтология является логическим следствием любого множества формул. Если же формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ является противоречием, то из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следует любая формула.*

Логическое следование является отношением, определенном на множестве всех формул. Легко проверить, что оно, как и отношение равносильности, обладает свойствами рефлексивности и транзитивности. Но, в отличие от равносильности, отношение логического следования не обладает свойством симметричности. Поэтому оно не является отношением эквивалентности.

Понятие логического следования позволяет проверять правильность рассуждений. Всякое рассуждение состоит из множества высказываний, одно из которых называют заключением, а остальные – посылками.

Пример 2.17. *Приведем примеры рассуждений.*

1. Если многоугольник $ABCDE$ – правильный, то его можно вписать в окружность. Многоугольник $ABCDE$ не является правильным. Следовательно, многоугольник $ABCDE$ нельзя вписать в окружность.

2. Если 2 – четное число, то 4 – четное число. 4 – четное число. Следовательно, 2 – четное число.

3. Если 8 – простое число, то 10 – простое число. 8 – простое число. Следовательно, 10 – простое число.

4. Если в $\triangle ABC$ угол A – прямой, то $a^2 = b^2 + c^2$. В $\triangle ABC$ угол A – прямой. Следовательно, $a^2 = b^2 + c^2$.

Рассуждение считается правильным, если из конъюнкции его посылок логически следует заключение. Исходя из этого, для проверки правильности рассуждения достаточно выполнить следующие действия:

1. Формализовать все посылки и заключение, то есть представить в виде формул;

2. Проверить, является ли формула, соответствующая заключению, логическим следствием формул, соотвествующих посылкам. Если – да, то рассуждение правильное, иначе – неправильное.

Проверим правильность рассуждения 1. Для этого обозначим высказывания:

A – Многоугольник $ABCDE$ – правильный.

B – Многоугольник $ABCDE$ можно вписать в оркужность.

Тогда формулы, соответствующие двум посылкам рассуждения и его заключению, примут вид $A \to B$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Установим, является ли формулы $\overline{B}$ логическим следствием формул $A \to B$ и $\overline{A}$. С этой целью проверим, является ли формула $(A \to B) \wedge \overline{A} \to \overline{B}$ тавтологией:$(A \to B) \wedge \overline{A} \to \overline{B} \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge \overline{A} \to \overline{B} \equiv \overline{A} \to \overline{B}$. Формула $\overline{A} \to \overline{B}$ тавтологией не является и поэтому рассуждение 1 правильным не является. Таким же образом можно установить, что рассуждения 3 и 4 – правильные, а рассуждение 2 правильным не является.

Свойство 1. Если рассужение правильное, то из этого еще не следует истинность заключения.

Так, например, рассужение 3 – правильное, но его заключение – ложно.

Свойство 2. Если заключение истинно, то из этого еще не следует правильность рассуждения.

К примеру, в рассуждении 2 истинно и заключение и все посылки, но само рассуждение правильным не является.

Свойство 3. Если в правильном рассуждении все посылки истинны, то и заключение истинно.

Действительно, из определения импликации и конъюнкции следует, что рассуждение является правильным в двух случаях:

– когда хотя бы одна из посылок является ложной;

– когда все посылки истинны и заключение истинно.

Поэтому, если в правильном рассуждении посылки истинны (второй случай), то и заключение должно быть истинным.

Таким образом, отличие между правильными и неправильными рассуждениями заключается в следующем. В правильном рассуждении истинность всех посылок гарантирует истинность заключения. В неправильном рассуждении при истинных посылках заключением может быть как истинным, так и ложным.

Пусть даны формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$. Поставим задачу: найти все различные формулы, которые логически следуют из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$. Под различными будем понимать неравносильные формулы. Равносильные формулы будем считать одниковыми. Потребуем, чтобы формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ не являлась противоречием, иначе из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ логически следовала бы любая формула.

Поставленную задачу можно сформулировать и по-другому: найти все различные формулы X такие, чтобы формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to X$ являлась тавтологией. Исходя из нашего допущения о различных формулах будем считать, что формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ имеет вид СКНФ и потребуем, чтобы каждая построенная формула X была представлена в виде СКНФ. Уточненную таким образом задачу можно решить, основываясь на следующей теореме.

Теорема 2.7. *Если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ представленна в виде СКНФ и состоит из k конъюктивных членов, то всевозможными логическими следствиями формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются только лишь следующие формулы:*

– каждый из k конъюктивных членов;

– каждые два, три, четыре, и т.д. k различных конъюктивных члена, соединенные символами $\wedge$.

Доказательство. Пусть формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ представлена в виде СКНФ и состоит из k конъюктивных членов, обозначим их через $C_1, C_2, \dots, C_k$. Покажем, что каждая конъюнкция $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$, составленная из m $(1 \leq m \leq k)$ конъюктивных членов $C_1, C_2, \dots, C_k$, является логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для этого достаточно показать, что формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ является тавтологией. По условию формула $C_1, C_2, \dots, C_k$ равносильна формуле $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Покажем, что формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \to C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_m}$ является тавтологией. Для этого возьмем произвольный, но фиксированный набор значений букв, из которых составлены формулы $C_1, C_2, \dots, C_k$ и подставим эти значения во все формулы C_i $(i \geq 1)$. Формулы $C_1, C_2, \dots, C_k$ на этом наборе примут некоторые истинностные значения, которые обозначим соответственно через $\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_k$.

Возможны следующие случаи:

а) Для каждого C_{i_j} $(1 \leq j \leq m)$ значение $v_{i_j} = 1$. В этом случае формула $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_m}$ примет значение 1, в силу чего это же значение 1 примет и формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m \to C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_m}$;

б) Имеется член C_{i_j} $(1 \leq j \leq m)$, для которого $v_{i_j} = 0$. Тогда формула $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_m}$ примет значение 0. Член C_{i_j} взят из множества $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, поэтому он будет и в конъюнкции $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$. Эта конъюнкция в силу условия б) примет значение 0. Тогда импликация $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k \to C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_m}$ примет значение 1.

Таким образом, на произвольном, но фиксированном наборе формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k \to C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_m}$ приняла значение 1. А это означает, что формула является тавтологией.

Осталось показать, что никаких других логических следствий, кроме как вида $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_m}$, нет. Для этого возьмем СКНФ $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \ldots \wedge C'_{i_p}$, в которой хотя бы один член C'_{i_j} $(1 \leq j \leq p)$ отличен от $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Пусть таким членом будет, например, C'_{i_p}. В C'_{i_p} вместо букв подставим значение 0, а вместо отрицаний букв - значение 1. Очевидно, на этом наборе C'_{i_p}, а следовательно и $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \ldots \wedge C'_{i_p}$ примет значение 0. Среди $C_1, C_2, \ldots, C_k$ члена C'_{i_p} нет. Поэтому при тех значениях, которые подставлены в C'_{i_p}, каждый из членов $C_1, C_2, \ldots, C_k$ примет значение 1, так как в каждом из этих членов хотя бы одна буква, вместо которой будет подставлена 1 или отрицание буквы, вместо которой будет подставлен 0. Тогда формула $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$ примет значение 1, а поскольку формула $C'_{i_1} \wedge C'_{i_2} \wedge \ldots \wedge C'_{i_p}$ приняла значение 0, то импликация $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k \to C'_{i_2} \wedge \ldots \wedge C'_{i_p}$ примет значение 0. Следовательно, импликация тавтологией не является и поэтому формула $C'_{i_2} \wedge \ldots \wedge C'_{i_p}$ логическим следсвием не является.

Таким образом, никаких следствий, кроме как вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, нет. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает способ построения всех различных логических следствий из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Формулу $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ приводят к СКНФ.

2. Выписывают все конъюнктивные члены, а также каждые два, три, четыре и т. д. различных конъюнктивных члена, соединенные символами $\wedge$.

Пример 2.18. *Найти все логические следсвия из формул A и $A \leftrightarrow B$.*

1. Формулу $A \wedge (A \leftrightarrow B)$ приводим к СКНФ:

$$A \wedge (A \leftrightarrow B) \equiv A \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \equiv (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}).$$

2. Выписываем все логические следствия:

$A \vee B$, $\overline{A} \vee B$, $A \vee \overline{B}$, $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$, $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$, $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$, $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$.

Сформулируем задачу, обратную к только что рассмотренной: найти все совокупности формул, из которых логически следует формула $P(X_1, \ldots, X_n)$. Прежде чем приступить к решению этой задачи, найдем

Начало

Содержание

Приложение

Назад

Закрыть

решение другой задачи, более узкой: указать все формулы $Q(X_1, \ldots, X_n)$, из которых логически следует формула $P(X_1, \ldots, X_n)$. Это значит, требуется найти все формулы $Q(X_1, \ldots, X_n)$ такие, чтобы формула $Q(X_1, \ldots, X_n) \to P(X_1, \ldots, X_n)$ являлась тавтологией.

Укажем способ решения этой задачи.

1. Формулу $P(X_1, ..., X_n)$ представляем в виде СКНФ. Число конъюнктивных членов $X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee ... \vee X_n^{v_n}$ в этой СКНФ обозначим через m.

2. Требуемыми формулами $Q(X_1, ..., X_n)$ будут следующие:
- $2^n - m$ формул вида $P(X_1, ..., X_n) \wedge (X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee ... \vee X_n^{v_n})$, где $X_1^{v_1} \vee X_2^{v_2} \vee ... \vee X_n^{v_n}$ - конъюктивный член, не входящий в $P(X_1, ..., X_n)$;

- Формула $P(X_1, ..., X_n)$ и каждые два, три, четыре и т. д. $2^n - m$ конъюнктивных члена, не входящие в $P(X_1, ..., X_n)$ и соединенные символами $\wedge$.

То, что из формул, получаемых по указанному алгоритму, действительно логически следует формула $P(X_1, ..., X_n)$, показывается аналогично доказательству теоремы 1 . Покажем, что никаких других формул $Q(X_1, ..., X_n)$, из которых бы логически следовала формула $P(X_1, ..., X_n)$, нет. В самом деле, если формула $P(X_1, ..., X_n)$ состоит из m конъюнктивных членов, то теорема 1 утверждает, что формула $Q(X_1, ..., X_n)$ должна состоять не менее чем из m конъюнктивных членов. А указанный способ решения как раз и дает всевозможные формулы $Q(X_1, ..., X_n)$, состоящие не менее чем из m конъюнктивных членов.

Пример 2.19. *Найти все формулы вида $Q(X_1, X_2)$, из которых логически следует формула $P(X_1, X_2) = X_1 \to (X_1 \leftrightarrow X_2)$.*

Представим $P(X_1, X_2)$ в виде СКНФ: $X_1 \to (X_1 \leftrightarrow X_2) \equiv \overline{X}_1 \vee (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \equiv \overline{X}_1 \vee X_2$. *Тогда конъюктивных членов, не входящих в эту СКНФ будет три:* $X_1 \vee X_2$, $X_1 \vee \overline{X_2}$, $\overline{X_1} \vee \overline{X_2}$. *Поэтому различными формулами $Q(X_1, X_2)$ такими, что из каждой из них логически следует формула $P(X_1, X_2)$ будет следующие:*

– $\overline{X_1} \vee X_2 \wedge (X_1 \vee X_2)$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$;

– $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$, $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$;

– $(\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})$.

Полученные формулы можно упростить. Выполнив равносильные преобразования, получим следующие формулы:
X_2, $X_1 \leftrightarrow X_2$, $\overline{X_1}$, $X_1 \wedge X_2$, $\overline{X_1} \wedge X_2$, $\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2$, 0.

Вернемся теперь к первоначально поставленной обратной задаче и сравним два множества, образованные относительно одной и той же формулы $P(X_1, ..., X_n)$. Элементами первого из них являются всевозможные формулы $Q(X_1, ..., X_n)$ из только что решенной задачи, пред-

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

ставленные в виде СКНФ. Каждая совокупность формул, из которых логически следует формула $P(X_1,...,X_n)$, образует формулу второго множества. Эта формула получается соединением символами $\wedge$ всех формул совокупности и затем - представлением полученной формулы в виде СКНФ. Легко показать, что эти два множества совпадают. Поэтому каждая формула $Q(X_1,...,X_n)$ из только что решенной задачи определяет следующую совокупность формул, из которых логически следует формула $P(X_1,...,X_n)$. Если $Q(X_1,...,X_n)$ состоит из m_i конъюнктивных членов, то такими совокупностями будут:

- m_i конъюнктивных членов формулы $Q(X_1,...,X_n)$;

- Всевозможные совокупности по $(m_i-1),(m_i-2),...,1$ формул, в каждую из которых входят все m_i конъюнктивных членов.

В качестве примера приведем построение совокупностей по одной только формуле $(\overline{X_1}\vee X_2)\wedge(X_1\vee X_2)\wedge(X_1\vee\overline{X_2})$ из предыдущего примера. Это - четвертая формула. Она определяет следующие совокупности:

$\overline{X_1}\vee X_2$, $X_1\vee X_2$, $X_1\vee\overline{X_2}$; $(\overline{X_1}\vee X_2)\wedge(X_1\vee X_2)$, $X_1\vee\overline{X_2}$; $(\overline{X_1}\vee X_2)\wedge(X_1\vee\overline{X_2})$, $X_1\vee X_2$; $\overline{X_1}\vee X_2$, $(X_1\vee X_2)\wedge(X_1\vee\overline{X_2})$; $(\overline{X_1}\vee X_2)\wedge(X_1\vee X_2)\wedge(X_1\vee\overline{X_2})$.

Легко убедиться в том, что каждая формула из первых трех (предыдущий пример) определяет по одной совокупности формул, каждая формула из вторых трех - по 5 совокупностей, а последняя - 15.

2.2 Практическая часть

2.2.1 Высказывания. Операции над высказываниями

Под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Операции над высказываниями ($\overline{\ \ }$ – отрицание, $\wedge$ – конъюнкция, $\vee$ – дизъюнкция, $\rightarrow$ – импликация и $\leftrightarrow$ – эквиваленция) определяются следующим образом:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0

Образец 1. Выполним 1) из 1.10. Для этого в рассматриваемом высказывании выделим элементарные высказывания и введем для них следующие обозначения:

A - идет дождь;

B - кто-то выключил душ.

Тогда рассматриваемое высказывание символически запишется следующим образом: $A \vee \overline{B}$

Образец 2. Выполним 3) из 1.13. Импликация $A \rightarrow B$ принимает значение 0 в единственном случае: когда A=1, B=0. Поэтому для рассматриваемого примера получаем $\overline{A \vee (A \leftrightarrow B)} = 1$, C=0.

По определению операции отрицания получаем, что $A \vee (A \leftrightarrow B)$=0.

Дизъюнкция принимает значение 0, только лишь тогда, когда оба дизъюнктивных члена принимают значение 0; A=0, $A \leftrightarrow B$=0.

Наконец, из определения эквиваленции следует, что если A=0 и $A \leftrightarrow B$=0, то B=1.

Таким образом, A=0, B=1, C=0.

1.1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

1. 2+2=5
2. Да здравствуют студенты математического факультета!
3. Который час?
4. Красная роза.
5. x+3=7.
6. 1 июня 2127 года в 13 часов в Бресте будет идти дождь.
7. Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.
8. Розы – самые красивые цветы.
9. Для любых чисел a и b выполняется равенство $a + b = b + a$.
10. Имеется такое число x, что $x^2 - 2x + 3 = 0$.

1.2. Определите истинность высказываний в примере 1.1.

1.3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний

1. Число 28 делится без остатка на число 7.
2. $3<2$.
3. $\triangle ABC$ – прямоугольный.
4. Стена – белая.
5. $2+3=5$.
6. Все простые числа – нечетны.
7. Четырехугольник ABCD является ромбом.

1.4. Если $A \leftrightarrow B=1$ ($A \leftrightarrow B=0$),то что можно сказать об истинности значений высказываний:

1. $A \leftrightarrow \bar{B}$
2. $\bar{A} \leftrightarrow B$
3. $\bar{A} \rightarrow B$
4. $B \rightarrow A$

1.5. Существуют ли три таких высказывания A,B,C, чтобы одновременно было $A \wedge B = 1$, $A \wedge C = 0$, $(A \wedge B) \wedge \bar{C} = 0$.

1.6. Можно ли определить значение высказывания A, если известно, что:

1. $A \wedge B = 1$
2. $A \wedge B = 0$
3. $A \wedge B = 0, B = 1$
4. $A \wedge B = 0, B = 0$.

1.7. Определите значение истинности высказывания $A \to (B \wedge C)$, зная, что:

1. $A = 0$
2. $A = 1, B = 0$
3. $B = 1, C = 1$.

1.8. Какие данные являются лишними для нахождения значения импликации $(A \vee B) \to C$:

1. $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$;
2. $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$;
3. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$;

4. A=0, B=0, C=1.

1.9. Можно ли определить значения истинности высказывания $(A \to B) \vee C$, зная только то, что:

1. $A = 0$
2. $C = 0$
3. $A = 0, B = 0$
4. $A = 1, C = 0$
5. $A = 0, B = 1$
6. $B = 0$

1.10. Записать символически следующие высказывания:

1. Идет дождь или кто-то не выключил душ.
2. Студент не может заниматься, если он устал или голоден.
3. Если Олег счастлив, то Ольга несчастлива, и если Олег несчастлив, то Ольга счастлива.
4. Петр встанет, и он или Иван уйдет.
5. Петр встанет и уйдет или Иван уйдет.

6. Или Петр пойдет на дискотеку и Иван не пойдет на её, или Петр не пойдет на дискотеку и Иван отлично проведет время.

7. Если вечером будет туман, то Иван останется дома или должен будет взять такси.

8. Необходимое и достаточное условие счастья для ленивого студента состоит в том, чтобы поменьше учиться и получать хорошую стипендию.

9. Если «Спартак» или «Динамо» проиграют и «Торпедо» выиграет, то «Арарат» потеряет первое место и «Заря» покинет высшую лигу.

1.11. Пусть A будет «сегодня ясно», B - «сегодня идет дождь», C - «сегодня идет снег», D - «Вчера было пасмурно». Переведите на обычный язык следующие высказывания:

1. $\mathrm{A} \rightarrow \overline{\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}}$;
2. $\mathrm{D} \leftrightarrow \mathrm{A}$;
3. $\mathrm{D} \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$;
4. $(\mathrm{D} \rightarrow \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}$;
5. $A \leftrightarrow ((B \wedge \overline{C} \vee D)$;
6. $(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \wedge \overline{\mathrm{C}} \vee D)$.

1.12. Запишите следующие высказывания в символической форме:

1. A достаточно для B;
2. B необходимо для A;
3. B тогда, когда A;
4. B только тогда, когда A;
5. без B нет A;
6. A лишь тогда, когда B;
7. A тогда и только тогда, когда B;
8. A тогда, когда B;
9. A необходимо и достаточно для B;
10. если A, то B;
11. A необходимое следствие из B;
12. A при условии, что B;
13. A влечет B;
14. в случае A имеет место B;

15. не только A, но и B;

16. как A, так и B;

17. A вместе с B;

18. если A, то B и обратно.

1.13. Найдите значение A,B,C, если

1. $\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}=0$;

2. $\overline{\mathrm{A} \rightarrow \overline{\mathrm{B}}}=1$;

3. $\overline{\mathrm{A} \vee (\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B})} \rightarrow \mathrm{C}=0$;

4. $A \vee (A \wedge B) = 0$;

5. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \vee C) = 1$;

6.
$$\begin{cases} A \rightarrow C = 0; \\ A \vee B = 1; \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \leftrightarrow \mathrm{C} = 1; \\ C \vee \overline{\mathrm{A}} = 0; \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases}(A \wedge B) \vee C \to A = 1;\\ A \vee \overline{\mathrm{C}} = 0;\end{cases}$$

9.

$$\begin{cases}A \leftrightarrow B = 0;\\ A \vee C = 0;\end{cases}$$

10.

$$\begin{cases}(A \wedge \mathrm{B}) \vee \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{A} = 1;\\ C \vee \overline{\mathrm{B}} = 0;\end{cases}$$

11.

$$\begin{cases}A \to \overline{\mathrm{B}} = 0;\\ A \wedge B \leftrightarrow C = 1;\end{cases}$$

1.14. Определите истинностные значения формул при указанных условиях:

1. $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\to\mathrm{C}\leftrightarrow\mathrm{A}\wedge\mathrm{C}$ - при условии, что $\mathrm{A}\wedge\mathrm{C} = 1$;
2. $(\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B})\wedge(\mathrm{A}\to\mathrm{C})\to\mathrm{D}\to\overline{\mathrm{D}}$ - при условии, что $\mathrm{D} = 1$;
3. $(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\to(\mathrm{A}\wedge\mathrm{C})$ - при условии, что $\mathrm{A} = 1$, $\mathrm{C} = 0$.

1.15. Пусть через A обозначено высказывание «Это число – целое», через B – высказывание «Это число положительное», через C – высказывание «Это число простое», через D – «Это число делится на 3». Прочитайте следующие высказывания:

1. $(A \vee B) \to \overline{C}$;
2. $(A \wedge B) \to D$;
3. $(A \vee \overline{A}) \to (B \wedge C)$;
4. $(B \wedge \overline{B}) \leftrightarrow (A \vee D)$;
5. $D \leftrightarrow (\overline{C} \wedge A)$;
6. $(A \wedge C) \to D$;
7. $(A \wedge D) \to \overline{C}$;
8. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$;
9. $\overline{A} \vee \overline{D}$;
10. $(A \wedge B \wedge C) \vee D$;
11. $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$.

1.16. Запишите символически следующие предложения:

1. Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6.

2. Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.

3. Если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции.

4. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.

5. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в поскости π (высказывание A), и прямые a и b не паралельны $a \nparallel b$ (высказывание B), то прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости π (высказывание C).

6. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в поскости π (высказывание A), и неперпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой плоскости (высказывание $\overline{C}$), то прямые a и b параллельны ($a \parallel b$ – высказывание $\overline{B}$).

7. Если две прямые a и b, лежащие в плоскости π, непараллельны $a \nparallel b$ (высказывание B) и прямая l неперпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в плоскости π (высказывание $\overline{C}$), то l неперпендикулярна одной из прямых a или b (высказывание $\overline{A}$).

1.17. Из трех данных высказываний A, B, C постройте такое составное высказывание, которое:

1. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;
2. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;
3. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;
4. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;
5. истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;
6. истинно тогда и только тогда, когда ложны высказывания A и B;
7. ложно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;
8. ложно тогда и только тогда, когда ложны высказывания A и B;
9. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;
10. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;

11. ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C.

1.18. Определите значение последней формулы, исходя из значений всех предыдущих формул:

1. $A \to B = 1$, $A \leftrightarrow B = 0$, $B \to A =$;
2. $A \to B = 1$, $(\overline{A} \wedge B) \to (\overline{A} \vee B) =$;
3. $A \leftrightarrow B = 0$, $\overline{B} \to A =$;
4. $A \wedge B = 0$, $A \to B = 1$, $B \to \overline{A} =$;
5. $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $(\overline{A} \to B) \leftrightarrow A =$;
6. $A \vee B = 1$, $A \to B = 1$, $\overline{B} \to A =$;
7. $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $A =$;
8. $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $B =$;
9. $A \wedge B = 0$, $A \vee B = 1$, $A \to B = 1$, $B \to A =$;
10. $A \to (B \leftrightarrow A) = 0$, $A \to B =$;
11. $(A \vee B) \to A = 1$, $A \to B = 1$, $\overline{A} \leftrightarrow \neg B =$;
12. $A \leftrightarrow B = 1$, $(A \to B) \wedge (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}) =$.

1.19. Для каждой из помещенных ниже формул определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить её логическое значение (если достаточно, то укажите это значение; если недостаточно, то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значения);

1. $A \wedge (B \to C)$, $B \to C = 0$;
2. $A \vee (B \to C)$, $B = 0$;
3. $\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\overline{B} \wedge \overline{A})$, $A = 1$;
4. $(A \to B) \to (\overline{A} \to \overline{B})$, $B = 1$;
5. $(A \wedge B) \to (A \vee C)$, $A = 0$;
6. $\overline{(B \to A)} \leftrightarrow \overline{(A \vee C)}$, $A = 0$;
7. $(A \leftrightarrow B) \vee (A \wedge C)$, $A = 0$.

1.20. Существуют ли три таких высказывания A, B, C, чтобы одновременно выполнялись для них следующие условия:

1. $A \wedge B = 1$, $A \wedge C = 0$, $A \wedge B \wedge \overline{C} = 0$;
2. $B \to A = 1$, $A \vee C = 0$, $A \leftrightarrow (B \wedge \overline{C}) = 0$;
3. $A \vee B = 0$, $\overline{B} \wedge C = 1$, $(A \vee \overline{C}) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{C}) = 1$;
4. $A \wedge \overline{B} = 1$, $B \vee C = 1$, $\overline{(B \to A)} \vee C = 0$;

5. $\overline{A} \wedge B = 0$, $A \vee C = 0$, $(A \vee B) \wedge \overline{C} = 1$;

6. $A \vee B = 0$, $B \vee C = 1$, $(C \to A) \vee (C \to B) = 1$;

7. $A \to B = 0$, $A \to C = 1$, $(C \to A) \to (C \to B) = 1$;

8. $A \vee C = 1$, $A \vee B = 0$, $C \to (A \vee B) = 1$;

9. $B \vee C = 0$, $\overline{C} \to A = 0$, $A \to B = 0$;

10. $A \wedge C = 1$, $C \leftrightarrow \overline{B} = 0$, $A \to B = 1$;

11. $A \vee \overline{B} = 0$, $B \to (A \vee C) = 0$, $\overline{C} \to \overline{B} = 1$.

Для проверки знаний по данному разделу предлагаем Вам выполнить следующее тестовое задание.

2.2.2 Формулы.

Образец 1. Выполним 3) из 2.2. Поскольку операции по силе своего действия в порядке убывания располагаются -,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$, и для отрицания скобки не восстанавливаются, то в первую очередь восстанавливаем скобки для конъюнкции. Восстанавливаем их слева направо: $A\rightarrow(B \wedge C)\wedge A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow((B \wedge C)\wedge A)\leftrightarrow B$. За $\wedge$ следует $\vee$, но её в рассматриваемой формуле нет. Восстанавливаем скобки для импликации: $(A\rightarrow((B\wedge C)\wedge A))\leftrightarrow B$. Наконец, в последнюю очередь восстанавливаем скобки для эквиваленции: $((A \rightarrow((B \wedge C)\wedge A))\leftrightarrow B)$.

2.1.Какие из следующих выражений являются формулами?

1. $A\wedge B$;
2. $A\wedge(\vee B)$;
3. $(A\rightarrow B\vee C)$;
4. $((A\vee B)\rightarrow C)$;
5. $(A\wedge B)$;
6. $(A\rightarrow(B\vee C)$;

2.2. Восстановите скобки:

1. $A\rightarrow B\rightarrow B$

2. $A \vee B \wedge C$;

3. $A \rightarrow B \wedge C \wedge A \leftrightarrow B$;

4. $A \leftrightarrow B \rightarrow C \vee A \wedge B$;

5. $A \vee B \rightarrow B \vee C \wedge B$;

6. $\overline{A \rightarrow B} \wedge C \vee B$;

7. $A \vee B \rightarrow B \vee C \wedge B$;

8. $A \wedge \overline{\overline{B \vee C} \rightarrow A} \leftrightarrow B$;

9. $A \vee \overline{\overline{B \leftrightarrow C} \rightarrow B} \vee B \wedge C$;

2.3. Опустите возможно большее число скобок:

1. $((A \rightarrow B) \rightarrow B)$;

2. $((A \wedge B) \vee ((A \rightarrow B) \wedge A))$;

3. $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C))$;

4. $(((A \vee B) \leftrightarrow (B \rightarrow C)) \vee (B \wedge C))$;

5. $(((\overline{A \vee B}) \wedge C) \rightarrow A)$;

6. $(((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \vee B)) \wedge (A \vee B))$;

7. $(A \to (B \to (C \to A)))$;

8. $(((\overline{A} \leftrightarrow B) \wedge (B \vee \overline{C})) \leftrightarrow A)$.

2.4. В примере 2.3 выпишите все подформулы, то есть те части формул, которые сами являются формулами.
2.5.Составьте таблицы истинности для формул из примера 2.2.

2.2.3 Равносильные формулы

Список основных равносильностей.

1. $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \equiv \mathrm{A}$	12. $\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{A}} \equiv 0$
2. $\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\equiv\mathrm{A}$	13. $\mathrm{A}\vee\overline{\mathrm{A}} \equiv 1$
3. $\mathrm{A}\vee\mathrm{A}\equiv\mathrm{A}$	14. $\mathrm{A}\wedge 1\equiv\mathrm{A}$
4. $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\equiv\mathrm{B}\wedge\mathrm{A}$	15. $\mathrm{A}\vee 0\equiv\mathrm{A}$
5. $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\equiv\mathrm{B}\vee\mathrm{A}$	16. $\mathrm{A}\wedge 0\equiv 0$
6. $\mathrm{A}\wedge(\mathrm{B}\wedge\mathrm{C})\equiv(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})\wedge\mathrm{C}$	17. $\mathrm{A}\vee 1\equiv 1$
7. $\mathrm{A}\vee(\mathrm{B}\vee\mathrm{C})\equiv(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\vee\mathrm{C}$	18. $\mathrm{A}\wedge(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\equiv\mathrm{A}$
8. $\mathrm{A}\wedge(\mathrm{B}\vee\mathrm{C})\equiv(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})\wedge(\mathrm{A}\vee\mathrm{C})$	19. $\mathrm{A}\vee(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})\equiv\mathrm{A}$
9. $\mathrm{A}\vee(\mathrm{B}\wedge\mathrm{C})\equiv(\mathrm{A}\vee\mathrm{B})\wedge(\mathrm{A}\vee\mathrm{C})$	20.$\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}\equiv \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}$
10. $\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \equiv \overline{\mathrm{A}} \vee \overline{\mathrm{B}}$	21. $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}\equiv \overline{\mathrm{B}} \rightarrow \overline{\mathrm{A}}$
11. $\overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} \equiv \overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}$	22. $\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}\equiv(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\wedge(\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{A})$

Образец 1. Упростить 1) из 3.4.:

$$(\overline{\overline{A} \vee B} \rightarrow A \vee B) \wedge \mathrm{B} \overset{20}{\equiv} (\overline{\overline{\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}}} \vee \mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \mathrm{B} \overset{1}{\equiv} (\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \mathrm{B} \overset{5}{\equiv}$$

$$(\overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{B}) \wedge \mathrm{B} \overset{3}{\equiv} (1 \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{B}) \wedge \mathrm{B} \overset{3}{\equiv} (1 \vee \mathrm{B}) \wedge \mathrm{B} \overset{17}{\equiv} 1 \wedge \mathrm{B} \overset{14}{\equiv} \mathrm{B}.$$

Образец 2. Упростить схему 1) из 3.6:

1) Записываем формулу соответствующую схеме:

$(A \wedge B) \vee (C \vee A) \wedge \overline{B}$

2) Упрощаем формулу :

$(A \wedge B) \vee (C \vee A) \wedge \overline{B} \overset{8}{\equiv} (A \wedge B) \vee (C \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{B}) \overset{5}{\equiv} (C \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \overset{20}{\equiv} (C \wedge \overline{B}) \vee A$

3) Составляем схему, соответствующую полученной формуле:

`5n.png`

3.1. Упростите:

1. $A \wedge (A \vee B) \wedge B$;
2. $A \vee \overline{A} \wedge B$;
3. $\overline{A} \vee A \wedge B$;
4. $A \wedge B(\overline{A} \vee B)$;
5. $A \vee A \vee A \wedge A \wedge B \wedge C$;
6. $A \wedge B \vee \overline{A} \vee A$;
7. $(\overline{A} \vee B \leftrightarrow C) \wedge B \vee A$;
8. $(A \to B \leftrightarrow C) \wedge B \vee \overline{B}$;

9. $A \vee A \wedge B \wedge B \wedge (D \leftrightarrow C)$;

10. $A \leftrightarrow A \leftrightarrow A$;

11. $A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$;

12. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$;

13. $A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$;

3.2. Следующие формулы приведите к более простому виду:

1. $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \overline{C})$;

2. $\overline{\overline{A} \vee B} \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$;

3. $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \vee (A \rightarrow B) \wedge A$;

4. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (A \vee B)$;

5. $(A \wedge C) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee (B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$;

6. $(A \leftrightarrow \overline{B}) \rightarrow C \rightarrow (A \leftrightarrow \overline{C})$;

7. $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow (A \rightarrow B \leftrightarrow C)$.

3.3. Проверьте, являются ли следующие формулы противоречиями:

1. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge ((A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B))$;

2. $(A \wedge \overline{B} \to \overline{A} \vee A \wedge B) \wedge)(\overline{A} \vee A \wedge B \to A \wedge \overline{B})$;

3. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to \overline{A \to C}$;

4. $(A \to B) \wedge (A \to \overline{B}) \wedge A$;

5. $(A \wedge \overline{B} \vee A \wedge \overline{C}) \leftrightarrow (A \to B \wedge A \to C)$.

3.4. Упростите:

1. $(\overline{\overline{A} \vee B} \to A \vee B) \wedge B$

2. $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \vee (A \to B) \wedge A$

3. $(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$

4. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (C \to A)$

5. $\overline{(A \to B) \wedge (B \to \overline{A})}$

6. $\overline{(A \wedge B) \wedge (A \to \overline{B})}$

7. $\overline{(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)}$

8. $(A \to \overline{B}) \vee \overline{(A \vee B)}$

9. $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B})$

10. $(A \to B) \wedge (B \to A) \to (A \leftrightarrow B)$

3.5. Проверьте равносильны ли следующие формулы:

1. $A \to (B \leftrightarrow C)$ и $(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$
2. $A \vee (B \leftrightarrow C)$ и $(A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$
3. $A \wedge (B \leftrightarrow C)$ и $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)$
4. $A \to (B \vee C)$ и $(A \to B) \vee (A \to C)$
5. $A \to (B \wedge C)$ и $(A \to B) \wedge (A \to C)$
6. $(A \to B) \to (A \to C)$ и $A \to (B \to C)$
7. $(\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{C})$ и $(A \wedge B) \vee \overline{C \wedge (\overline{C} \wedge A)}$
8. $A \to (A \wedge B \to (A \to B \to B) \wedge C)$ и $B \to (A \to C)$
9. $\overline{A} \wedge \overline{C} \vee A \wedge B \vee A \wedge \overline{C}$ и $A \wedge \overline{B \wedge C} \vee \overline{A} \wedge C$

Для проверки знаний по данному разделу предлагаем Вам выполнить следующие тестовое задание.

2.2.4 Тавтологии

Образцом решения примеров для этого пункта является доказательство теоремы 2.2.

4.1. Докажите что если $A \wedge B$ есть тавтология, то тавталогиями являются A и B.
4.2. Докажите что если A - тавтология, то тавтологиями являются $A \vee B$ и $B \to A$, где B - произвольная формула.
4.3. Для следующих формул составьте таблицы истинности. Определите, для которых из них истинностные значения всей формулы, можно определить без промежуточных выкладок:

1. $(A \to A) \vee B$;
2. $C \to (A \leftrightarrow A)$;
3. $A \to \overline{A}$;
4. $(A \to A) \to A$;
5. $A \to (A \leftrightarrow A)$;
6. $A \wedge B \vee \overline{C} \to (A \to A)$;
7. $C \wedge D \vee A \wedge B \to B \vee \overline{B}$;

8. $(A \vee B \vee \overline{A}) \wedge (C \vee A \vee \overline{C})$;

9. $(B \leftrightarrow B) \wedge (C \rightarrow C) \wedge (A \vee \overline{A})$;

10. $(A \wedge B) \wedge (A \wedge A) \vee \overline{A \wedge B}$

4.4. Запись $\models A$ означает, что формула A является тавтологией. Докажите следующие утверждения:

1. Если $\models A$ и $\models A \rightarrow B$, то $\models B$;

2. Если $\models A \vee B$ и $\models A \vee C$, то $\models B \vee C$;

3. Если $\models A \vee B, \models A \rightarrow C$ и $\models C \rightarrow D$, то $\models C \vee D$;

4. Если $\models \overline{A} \vee B$ и $\models \overline{B} \vee \overline{C}$, то $\models A \rightarrow \overline{C}$;

5. Если $\models A$ и $\models A \leftrightarrow B$, то $\models B$.

4.5. Составив соответствующие таблицы истинности, докажите, что все следующие формулы являются тавтологиями:

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$;

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

3. $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$;

4. $P \rightarrow (P \vee Q)$;

5. $(P \wedge Q) \to P$;

6. $(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$;

7. $((P \to Q) \wedge (P \to \overline{Q})) \to \overline{P}$;

8. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$("разбор случаев");

9. $(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$;

10. $\overline{\overline{P}} \to P$;

11. $(P \to Q) \vee (Q \to P)$;

12. $(P \to Q) \to ((Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q))$;

13. $((P \to Q) \to P) \to P$;

14. $(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)$;

15. $(P \to R) \to ((P \vee Q) \to (R \vee Q))$;

16. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

17. $(F_1 \to (F_2 \to G)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2) \to G)$;

18. $(F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_m \to G)\ldots)) \leftrightarrow ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G)$;

19. $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$;

20. $(\overline{P} \to P) \to P$;

21. $((P \wedge Q) \to R) \to (P \wedge (Q \to R))$;

22. $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$.

2.2.5 Нормальные формы.

Образец 1. Построить СДНФ и КНФ для 1) из 5.1.

$A \to (B \wedge C) \vee \overline{B} \overset{20}{\equiv} \overline{A} \vee (B \wedge C) \vee \overline{B}$ – ДНФ, состоящая из трех дизъюнктивных членов.

Преобразуем ДНФ в КНФ: $\overline{A} \vee (B \wedge C) \vee \overline{B} \overset{9}{\equiv} (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C) \vee \overline{B} \overset{9}{\equiv} (\overline{A} \vee B \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \overset{13}{\equiv} (\overline{A} \vee 1) \wedge (\overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \overset{17}{\equiv} 1 \wedge (\overline{A} \vee C \vee \overline{B}) \overset{14}{\equiv} \overline{A} \vee C \vee \overline{B} \overset{5}{\equiv} \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$ - КНФ, состоящая из одного конъюктивного члена.

Образец 2. Преобразовать ДНФ в СДНФ формулу 1) из 5.2.

Для преобразования ДНФ в СДНФ применяется равносильность

$A \equiv A \wedge B \vee A \wedge \overline{B}$

В рассматриваемой ДНФ $A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \vee B$ у второго дизъюнктивного члена не хватает буквы С. Добавим её по указанной выше равносильности:

$A \wedge \overline{B} \equiv A \wedge \overline{B} \wedge C \vee A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$

У третьего дизъюнктивного члена не хватает букв А и С. Добавим вначале букву А, а затем - букву С:

$B \equiv B \wedge A \vee B \wedge \overline{A} \equiv B \wedge A \wedge C \vee B \wedge A \wedge \overline{C} \vee B \wedge \overline{A} \wedge C \vee B \wedge \overline{A} \wedge \overline{C}$

В итоге получаем:

$A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \vee B \equiv A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \wedge C \vee A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee B \wedge A \wedge C \vee B \wedge A \wedge \overline{C} \vee B \wedge \overline{A} \wedge C \vee B \wedge \overline{A} \wedge \overline{C} \equiv A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \wedge C \vee A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee A \wedge B \wedge C \vee \overline{A} \wedge B \wedge C \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►
98
Закрыть

Образец 3. Преобразовать КНФ в СКНФ формулу 1) из 5.3. Для преобразования КНФ в СКНФ применяется равносильность $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$. Само преобразование выполняется аналогично преобразованию ДНФ в СДНФ.

5.1. Построить ДНФ, СДНФ:

1. $A \to (B \wedge C) \vee \overline{B}$;
2. $B \to (A \vee \overline{C})$;
3. $(A \vee B) \to C$;
4. $(A \to B) \to (A \to C)$;
5. $(A \vee B) \leftrightarrow C$;
6. $(A \wedge B) \vee \overline{B}$;
7. $(A \vee C) \to (\overline{A} \wedge B)$;
8. $B \leftrightarrow (A \to B)$;
9. $(A \to B) \leftrightarrow \overline{A}$;
10. $(B \vee C) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$;
11. $(C \leftrightarrow B) \vee B$;
12. $(B \vee \overline{A}) \leftrightarrow \overline{B}$.

5.2. Преобразовать ДНФ в СДНФ:

1. $A \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \vee B$;
2. $A \vee A \wedge B \vee \overline{A} \wedge B \wedge C$;
3. $A \wedge B \vee \overline{A}$;
4. $A \wedge B \vee \overline{B} \vee A \wedge \overline{C}$;
5. $B \vee C \wedge \overline{B} \vee A \wedge \overline{B}$;
6. $C \wedge B \vee \overline{A} \vee A \wedge B$
7. $A \wedge \overline{B} \wedge C \vee A \vee \overline{B}$;
8. $A \vee C \wedge A \vee \overline{B} \wedge A$;
9. $B \wedge \overline{A} \vee \overline{B} \wedge C$;
10. $A \vee \overline{B} \wedge \overline{A} \wedge \overline{C} \vee B$.

5.3. Преобразовать КНФ в СКНФ:

1. $(A \vee B \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$;
2. $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{C})$;
3. $B \wedge (A \vee \overline{B})$;

4. $A \wedge (\overline{B} \vee C) \wedge \overline{C}$;

5. $(C \vee B) \wedge A \wedge (B \vee \overline{A})$;

6. $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{C}) \wedge B$;

7. $(B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A) \wedge \overline{A}$;

8. $A \wedge B \wedge (\overline{A} \vee C)$;

9. $(A \vee B) \wedge \overline{B} \wedge C$.

5.4. Для формул $P(A_1, A_2, A_3)$, заданных следующими таблицами, построить СДНФ, СКНФ:

1.

A_1	A_2	A_3	$P(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2.

A_1	A_2	A_3	$P(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

3.

A_1	A_2	A_3	$P(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4.

A_1	A_2	A_3	$P(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2.2.6 Логическое следствие.

Образец. Решим 11) из 6.12. Для этого составим таблицу истинности исходных формул:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to R$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сопоставляя столбцы (*) и (**), видим, что во всякой строке, в которой в столбце (**) стоит 1, в столбце (*) также стоит 1, но не наоборот (например третья строка). Это означает, что первая данная формула является логическим следствием второй, но вторая в свою очередь, не является логическим следствием первой.

6.1. Запись $A_1, A_2, ..., A_n \models B$ означает, что формула B является логическим следствием посылок $A_1, A_2, ..., A_n$. Проверить истинность следующих утверждений:

1. $\mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \overline{\mathrm{B}}\models \mathrm{A}\leftrightarrow \mathrm{B}$;
2. $\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B} \models \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}$;
3. $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B},\ \overline{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B} \models \overline{\mathrm{B}}$;
4. $\mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \overline{\mathrm{C}} \to \overline{\mathrm{B}},\ \mathrm{A}\wedge\mathrm{B} \models \overline{\mathrm{C}} \to \overline{\mathrm{A}}$;
5. $\mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \overline{\mathrm{B}} \models \overline{\mathrm{A}}$;
6. $\mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \mathrm{B}\to\mathrm{C} \models \mathrm{A}\to\mathrm{C}$;
7. $\mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \mathrm{B}\models\mathrm{A}$;
8. $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\ \overline{\mathrm{A}} \models \overline{\mathrm{B}}$.

6.2. Придумать конкретные утверждения вида 1) - 8) из пункта 6.1.
6.3. Если рассуждения правильные, но по крайней мере одна из посылок ложная, то что можно утверждать об истинности заключения?
6.4. Если рассуждения правильное, но заключение ложно, то что можно утверждать об истинности посылок?

6.5. Следует ли из этих посылок, что данное число оканчивается цифрой 5:

1. Если цело число оканчивается нулем или цифрой 5, то оно делится на 5;
2. Данное число делится на 5;
3. Данное число не оканчивается нулем.

6.6. Можно ли на основании посылок «Если предмет интересен, то он полезен» и «Предмет интересен» заключить, что «Предмет бесполезен»?

6.7. Доказать:

1. $A, A \rightarrow B \models B$;
2. $A, B \models A \wedge B$;
3. $A, B \models A \vee B$;
4. $A \models A \vee B$;
5. $A \rightarrow B, \overline{B} \models \overline{A}$;
6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$;
7. $A \rightarrow B \models \overline{B} \rightarrow \overline{A}$;
8. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \models B \rightarrow (A \rightarrow C)$;

9. $A \to (B \to C) \models A \wedge B \to C$;

10. $A \wedge B \to C \models A \to (B \to C)$;

11. $A \wedge B \models B$;

12. $A_1, A_2, ..., A_n \models A_i$ для каждого $i (1 \leq i \leq n)$.

6.8. Проверьте правильность следующих рассуждений:

1. Если Иванов сдаёт экзамен по матлогике, то Петров сдаёт зачёт по философии. Иванов сдаёт экзамен по матлогике или экзамен по алгебре. Если Иванов сдаёт экзамен по алгебре, то Сидоров сдаёт экзамен по геометрии. Следовательно, Петров сдаёт зачет по философии.

2. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Следовательно, Смит был убийцей.

3. Если курс ценных бумаг растёт или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растёт курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс

акций не понижается, либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка.

4. Для того чтобы сдать экзамен необходимо достать учебник или конспект. Я достану учебник в том случае, если мой приятель не уедет домой. Он уедет только в том случае, если я достану конспект. Значит я сдам экзамен.

5. Если Пётр поедет в Свердловск, то Иван уедет в Киев. Пётр поедет в Свердловск или в Челябинск. Если Пётр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет в Киев.

6.9. Найдите все следствия из посылок:

1. $A \to B$ и A;
2. $A \leftrightarrow B$ и $\overline{A}$;
3. $A \vee B$ и A и B;
4. $A \to B$ и $B \to C$.

6.10. Найдите все следствия из посылок:

1. Если сумма цифр целого числа делится на 3, то число делится на 3 или 9;

2. Если число делится на 9, то оно делится на 3.

6.11. Найдите все посылки, следствием которых служат формулы:

1. $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$;
2. $\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{B}}$;
3. $\overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}}$;
4. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \to \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$.

6.12 Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

1. $(P \to Q) \to R$, $P \vee Q \vee R$;
2. $P \to (Q \to R)$, $(P \to Q) \to R$;
3. $R \to (Q \vee \overline{P})$, $P \to (Q \wedge R)$;
4. $P \to (Q \wedge R)$, $(P \wedge Q) \to R)$;
5. $(P \vee R) \leftrightarrow Q$, $(P \vee Q) \leftrightarrow R$;
6. $P \vee (Q \to R) \vee Q$, $(P \vee Q) \leftrightarrow R$;
7. $(P \leftrightarrow Q) \to (Q \leftrightarrow R)$, $P \to (Q \to R)$;
8. $P \to Q$, $(P \to R) \vee Q$;

9. $(P \wedge Q) \to R$, $(P \to Q) \vee R$;

10. $(P \to Q) \to (P \to R)$, $(P \to Q) \to R$;

11. $(P \wedge Q) \to R$, $(P \vee Q) \to R$;

12. $(P \wedge Q) \to R$, $P \vee (Q \to R)$.

2.2.7 Логические задачи.

7.1. Требуется спроектировать электрическую цепь для спальни с одной электрической лампочкой, где желательно иметь два включателя. Один у двери и второй – над постелью; при этом поворот каждого выключателя независимо от состояния второго выключателя должен размыкать цепь, если до этого она была замкнута и замыкать, если ранее она была разомкнута.

7.2. Жили четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дитрих и Фридрих. Фамилии друзей те же, что и имена, только так, что ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковыми, кроме того, фамилия Дитриха не Альберт. Определите фамилию и имя каждого мальчика, если дано, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого фамилия Карла.

7.3. Три ученика различных школ города Бреста приехали на отдых в один летний лагерь.

На вопрос вожатого, в каких школах Бреста они учатся, каждый дал ответ:

Петя: «Я учусь в школе № 4, а Леня – в школе №8»;

Леня: «Я учусь в школе № 4, а Петя – в школе №3»;

Коля: «Я учусь в школе № 4, а Петя – в школе №8».

Вожатый, удивленный противоречиями в ответах ребят, попросил их объяснить, где правда, а где ложь.Тогда ребята признались, что в ответах каждого из них одно утверждение верно, а другое ложно.В какой школе учится каждый из мальчиков?

7.4. По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом – ложь. Вот, что они утверждали:

Браун: «Я совершил это, Джон не виноват».

Джон : «Браун не виноват, преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виноват Браун».

Требуется определить имена старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

2.2.8 Теоремы

Образцы решения примеров даны в [10].

8.1. Сформулируйте утверждения, обратные следующим теоремам:

1. Если последовательность рациональных чисел сходится, то она фундаментальна;
2. Если последовательность сходится, то она ограничена;
3. Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны;
4. Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны;
5. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

8.2. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам из примера 8.1 Какие из этих предложений сами являются теоремами?

8.3. Для каждой теоремы из примера 8.1 сформулируйте теорему обратную противоположной.

8.4. Для каждой из следующих теорем найдите все теоремы, то есть верные утверждения, обратные и противоположные ей (если они есть), и теорему, противоположную обратной:

1. если $a = 0$ и $b = 0$, то $a^2 + b^2 = 0$ $(a, b$ - действительные числа);
2. если a делится на b и b делится на c, то a делится на c $(a, b, c$ - целые числа);
3. если $a - b$ делится на c и a не делится на c, то b делится на c $(a, b, c$ - целые числа);
4. если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм;
5. если три прямые лежат в одной плоскости и две из них перпендикулярны третьей, то эти две прямые параллельны;
6. если прямая а лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и параллельна другой из них, то она параллельна и линии их пересечения;
7. если целое число делится на 12, то оно делится на 3 и на 4;
8. если параллелограмм является квадратом, то его диагонали равны, взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

8.5. Сформулируйте следующие высказывания, используя связку «если...,то...»:

1. A достаточно для B;

2. А необходимо для В;
3. В достаточно для А;
4. В необходимо для А.

8.6. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если...,то...»:

1. для делимости произведения на некоторое число достаточно, чтобы по меньшей мере один из сомножителей делился на это число;
2. необходимым свойство прямоугольника является равенство его диагоналей;
3. для делимости многочлена $f(x)$ на линейный двучлен – достаточно, чтобы а было корнем этого многочлена;
4. на 5 делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5;
5. две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

8.7. В следующих высказываниях вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

1. a – четное число … для того, чтобы $3a$ было четным числом (a – целое число);

2. a делилось на c … для того, чтобы $a \cdot b$ делилось на (a, b, c – целые числа);

3. a и b делятся на c … для того, чтобы $a + b$ делилось на (a, b, c – целые числа);

4. $x > 1$ … для того, чтобы $x^2 - 1 > 0$;

5. $a \| b$ и $b \| c$ … для того, чтобы $a \| c$ (a, b, c – прямые);

6. для того чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы его диагонали были равны;

7. для того чтобы четырехугольник был параллелограммом …, чтобы его стороны были равны;

8.8. Даны утверждения: A – треугольник равнобедренный; B – два внутренних угла треугольника равны между собой; C – три внутренних угла треугольника равны между собой; D – два внешних угла треугольника равны между собой; – две высоты треугольника равны между собой; – три высоты треугольника равны между собой; L – один из углов треугольника равен 45°.

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

1. Какие из перечисленных утверждений и из каких логически следуют ?

2. Какие из утверждений $B - L$ служат для утверждения достаточным условием; необходимым; необходимым и достаточным условиями одновременно?

2.3 Контрольные тесты

1. Высказываниями не являются:
   а) вопросительные предложения;
   б) определения;
   в) повествовательные предложения;
   г) восклицательные предложения.

   (a) б, в;

   (b) а, г;

   (c) а, б, г;

   (d) а, б, в;

   (e) а, г.

2. Операция конъюнкция задается таблицей:

A	B	а	б	в	г	д
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

   (a) а;

   (b) б;

(c) в;

(d) г;

(e) д.

3. Операция дизъюнкция задается таблицей:

A	B	а	б	в	г	д
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

(a) а;

(b) б;

(c) в;

(d) г;

(e) д.

4. Операция импликация задается таблицей:

A	B	а	б	в	г	д
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0

(a) а;

(b) б;

(c) в;

(d) г;

(e) д.

5. Операция эквиваленция задается таблицей:

A	B	а	б	в	г	д
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1

(a) а;

(b) б;

(c) в;

(d) г;

(e) д.

6. Дана формула $((A \to (B \to C)) \to A)$. Для данной формулы правильно опущены скобки:

(a) $A \to B \to C \to A$;

(b) $A \to (B \to C) \to A$;

(c) $(A \to (B \to C)) \to A$;

(d) $(A \to B \to C) \to A$.

7. Для формулы $A \to B \to C \to B$ правильно восстановлены скобки:

(a) $((A \to B) \to (C \to B))$;

(b) $(A \to (B \to (C \to B)))$;

(c) $(((A \to B) \to C) \to B)$;

(d) $(A \to ((B \to C) \to B))$.

8. Какой из следующих формул равносильна формула $A \wedge (A \vee B)$

(a) B;

(b) $A \vee B$;

(c) $A \wedge B$;

(d) A.

9. Какая из следующих записей является верной равносильностью?

(a) $A \wedge 1 \equiv 1$;

(b) $A \vee 0 \equiv 0$;

(c) $A \to 1 \equiv 0$;

(d) $A \vee 1 \equiv 1$.

10. Какая из следующих формул является тавтологией?

(a) $A \wedge \bar{A}$;

(b) $A \vee \bar{A}$;

(c) $A \to B$;

(d) $A \leftrightarrow B$.

Раздел 3
Логика предикатов

3.1 Теоретическая часть

3.1.1 Предикаты

1. <u>Недостаточность средств логики высказываний.</u> В первой главе мы рассмотрели логику высказываний. Это самый простой и вместе с тем очень важный раздел математической логики. Мы видели, что в рамках логики высказываний можно описывать и анализировать правильность очень многих рассуждений. Многих, но далеко не всех. Приведем примеры таких рассуждений:
1. 3 меньше 5 и 5 меньше 7. Следовательно, 3 меньше 7.
2. Всякое натуральное число есть целое число, 3 есть натуральное число. Следовательно, 3 есть целое число.
3. Плоскость α параллельна плоскости β. Плоскость β параллельна плоскости γ. Следовательно, плоскость α параллельна плоскости γ.
4. Все люди бессмертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ бессмертен.

Введя соответствующие обозначения, каждое рассуждений 1 – 4 можно записать в виде $A \wedge B \to C$. Поскольку формула $A \wedge B \to C$ тавтологией не является, то с точки зрения логики высказываний нельзя ничего сказать о правильности рассуждений 1 – 4. Причиной тому является то, что элементарные высказывания в логике высказываний рассматриваются как целые, нерасчленяемые величины, без внутренней структуры.Правильность же рассуждений 1 – 4 (а следовательно и истинность заключения) зависит не только от истинности составляющих посылок,но и от их внутренней структуры. В логике же высказываний внутреннюю структуру высказываний не исследует, поэтому в логике высказываний невозможно установить правильность подобного рода рассуждений.

Приведем еще один пример такого рассуждения. По меньшей мере один студент сдал все экзамены. Следовательно, каждый экзамен сдал по крайне мере один студент. Поскольку соответствующая формула $A \to B$ тавтологией не является, то нельзя нечего сказать о правильности этого рассуждения.

Рассуждения такого вида описываются и более глубоко исследуются в логике предикатов. Логика предикатов содержит в себе всю логику высказываний и, кроме того, исследует еще внутреннюю структуру высказываний, которые в логике высказываний рассматриваются как элементарные неделимые на части величины.

2. Предикаты. Как было сказано ранее, под высказыванием мы понимаем повествовательное предложение, о котором можно утверждать одно из двух: оно истинно или ложно. Предикатом же будем называть повествовательное предложение, с одной или несколькими переменными, которое превращается в высказывание при подстановке вместо переменных их значений. Как и в случае высказывания, это повествовательное предложение может быть записано не только на обычном словесном языке, но и на любом символьном языке (математическом, техническом и т.д.)

Примеры предикатов:

1. Число x меньше 3.

2. Студент x окончил среднюю школу с золотой медалью.

3. $x + y = 7$.

Каждое из предложений 1 – 3 является предикатом, поскольку подставив вместо переменных их значения, будем получать истинные, либо ложные высказывания. Так, например, при $x = 2$ первое предложение превращается в истинное высказывание, а при $x = 5$ – в ложное.

Предикат каждому набору значений переменных ставит в соответствие истинное, либо ложное высказывание. Это значит предикат является функцией. В свою очередь в логике высказываний истинностное высказывание отождествляется с истинностным значением 1, а ложное высказывание – со значением 0. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 3.1. Предикатом называется функция, множеством значений которой являются истинностные значения 0 и 1.

Если функция является n-местной ($n \geq 1$), то и предикат называется n - местным. Функции в математике обычно обозначают буквами (чаще всего f, g, h) и в скобках указывают список аргументов. Например

$f(x)$, $g(x,y)$, $f_1(x_1,x_2)$, $f_3(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $h(x,y,z)$. Подобную символику введем и для предикатов: предикаты будем обозначать большими буквами латинского алфавита $P, Q, R, S, \ldots$ и в скобках указывать список аргументов: $P(x)$, $Q(x,y)$, $R_1(x_1,x_2)$, $S(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $Q_3(x,y,z)$ и т.д. При этом буквы x, y, z, u, v (с индексами и без них) будут служить для обозначения переменных, а символы $a, b, c, d\ldots$ – для обозначения фиксированных значений этих переменных. Если имеется обозначение предиката и при это нет никаких пометок, дополнительных обозначений, специальных оговорок, то это есть обозначение произвольного предиката и мы это будем называть предикатной переменной.

А такое обозначение, как например,$P(x) = (x < 3)$ является уже обозначением фиксированного одноместного предиката. Напомним еще, что большие буквы латинского алфавита A, B, C. служат для обозначения произвольных высказываний. Их мы будем называть логическими переменными. Фиксированные же высказывания будем каким-то образом отмечать или специально оговаривать.

По поводу обозначений предикатов сделаем еще следующее замечание. Мы будем широко использовать общепринятые обозначения операций, отношений, функций. Например, вместо «x перпендикулярно y», «x параллельно y», « x больше y» и т.д. будем писать $x \perp y, x \parallel y, x > y$ и т.д.

При задании предиката всегда нужно указывать множество M (или множества), на котором определены значения, входящих в предикат переменных. Пусть дан, к примеру предикат $P(x,y) = (x$ перпендикулярно $y)$. Для этого предиката множеством M может служить множество всех прямых, множество всех плоскостей, а может – и множество, состоящее из всех прямых и плоскостей, причем первая переменная принимает значения из множества прямых а вторая – из множества плоскостей. Иногда предикат, у которого все переменные принимают значения из одного и того же множества, называют **однородным**. В нашем примере один и тот же предикат $P(x,y) = (x$ перпендикулярно $y)$, в случае задания его на одном из первых двух множествах является однородным. Если же он задан на множестве прямых и плоскостей, то однородным он уже не является.

Если аргументы предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение из множества M, то будем говорить, что предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дан на множестве M.

Предикаты можно задавать словесными формулировками, формулами и таблицами значений. Так словесной формулировкой заданы предикаты 1 и 2, а формулой предикат – 3. С помощью таблицы 1 можно задать предикат $P(x) = (x < 5)$ определенный на множестве $M = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

Таблица 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

3.Виды предикатов. Пусть дан предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которого принимают значения из множества M. Возьмем произвольный, но фиксированный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из множества M и подставим вместо соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в предикат P. Если предикат P при этом примет значение «истина», то есть $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то говорят, что набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяет предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если же $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, то говорят, что набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не удовлетворяет предикату P.

Пример 3.1. *Рассмотрим предикаты, аргументы которых принимают значения из множества R.*

1. $P(x, y) = (x^2 - y^2 > 0)$. Этому предикату набор (5, -3) удовлетворяет, так как $P(5, -3) = (5^2 - (-3)^2 > 0) = 1$, а набор (1,2) не удовлетворяет, поскольку $P(1, 2) = (1^2 - 2^2 > 0) = 0$.

2. $Q(x) = (x^4 < 0)$. Легко убедиться в том, что предикату $Q(x)$ не удовлетворяет ни один набор, так как для любого $a \in R$ будет $Q(a) = (a^4 < 0) = 0$.

3. $S(x,y) = (x - y + 1 + y = x + 1)$. Очевидно, любой набор (a_1, a_2) удовлетворяет предикату $S(x,y)$.

4. $T(x) = (\frac{1}{x} > 0)$. Этому предикату удовлетворяет любое положительное число и не удовлетворяет никакое отрицательное.

В примере 4 значение предиката $T(x)$ при $x = 0$ не определено. Такие предикаты мы рассматривать не будем. Мы будем исследовать лишь те предикаты, которые определены при всех значениях, входящих в них переменных. Другими словами, функция из определения 3.1 должна быть всюду определенной. Функция же $T(x)$ в примере 4 на множестве R таковой не является.

Определение 3.2. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикат определенный на множестве M. Тогда предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется

- *выполнимым*, если имеется хотя бы один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяющий предикату P;
- *тождественно-истинным*, если всякий набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяет предикату P;
- *тождественно-ложным*, если ни один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, не удовлетворяет предикату P;

В последних примерах предикаты $P(x, y), S(x, y), T(x)$ являются выполнимыми, причем предикат $S(x, y)$ является еще и тождественно-истинным. Предикат $Q(x)$ является тождественно-ложным.

Из определения 3.2 следует, что всякий тождественно-истинный предикат является еще и выполнимым (но не наоборот) и никакой тождественно-ложный предикат выполнимым не является.

3.1.2 Кванторы

Определение 3.3. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда $P(x)$ истинно для любого $x \in M$ и ложно в противном случае. Запись "$\forall x P(x)$" читают "для любого $x P(x)$ истинно". Символ $\forall$ называется квантором всеобщности.

Определение 3.4. Пусть даны предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенные на одном и том же множестве M. Тогда:

- предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются равносильными, если на любом наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M они принимают одинаковые истинностные значения;

- предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называеатся следствием предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если всякий набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяющий предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяет и предикату $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример 3.2. *Рассмотрим следующие предикаты, определенные на множестве N: $P(x)$ =(x – четное), $Q(x)$ =(x делится на 2), $S(x)$ =(x делится на 4). Тогда:*

- *$P(x)$ является следствием $Q(x)$ и наоборот. Кроме того $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны;*
- *$Q(x)$ является следствием $S(x)$, но не наоборот. Кроме того $Q(x)$ и $S(x)$ не равносильны.*

Теорема 3.1. *Пусть даны предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенные на одном и том же множестве M. Тогда предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны в том и только в том случае, когда каждый из них является следствием другого.*

Доказательство теоремы следует из соответствующих определений.

Определение 3.5. *Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M. Тогда под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда существует хотя бы одно $x \in M$ для которого $P(x)$ истинно и ложно в противном случае. Запись $\exists x P(x)$ читают "существует x, для которого $P(x)$ истинно". Знак $\exists$ называется квантором существования.*

Кванторы $\exists$ и $\forall$ называются двойственными друг другу.

Приписывание квантора слева к предикату называется навешиванием квантора на предикат. Кванторы можно навешивать и на многоместные предикаты. Так навесив квантор $\forall x_i (1 \leq i \leq n)$ на предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы получаем $(n-1)$ - местный предикат $\forall x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящий от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Значение предиката $\forall x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ равно 1 тогда и только тогда, когда для любого $x_i \in M$ значение предиката $Q(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ равно 1.

Пример 3.3. *Пусть M – множество натуральных чисел.*

1) Пусть $P(x) = (x > 3)$. Тогда $\forall x P(x) = \forall x (x > 3)$ является ложным высказыванием, а $\exists x P(x) = \exists x (x > 3)$ – истинное высказывание.
2) Пусть $Q(x, y) = (x + y = 5)$ – двуместный предикат.
a) Тогда $\forall x Q(x, y) = \forall x (x + y = 5)$ являетя одноместным предикатом от переменной y. Найдем некоторые его значения:
$\forall x Q(x, 2) = \forall x (x + 2 = 5) = 0$, $\forall x Q(x, 10) = \forall x (x + 10 = 5) = 0$.
b) $\exists y Q(x, y) = \exists y (x + y = 5)$ – является одноместным предикатом от переменной x. Найдем некоторые его значения $\exists y Q(2, y) = (2 + y = 5) = 1$, $\exists y Q(10, y) = (10 + y = 5) = 0$.

3.1.3 Формулы

Определение 3.6. *1. Каждая формула логики высказываний является формулой (логики предикатов).*

2. Символ всякого предиката является формулой.

3. Если A и B формулы, x – переменная, то выражения $\overline{A}$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \iff B)$, $\forall x(A)$, $\exists x(A)$ также являются формулами.

4. Формулами являются только те выражения, которые можно получить по пунктам 1 – 3.

Замечание 3.1. *Формулы, получаемые по п. 1,2 называются простыми, получаемые с применением п. 3 – сложными. Как и в логике высказываний здесь будут такие же правила об опускании скобок, т.е. операции по силе своего действия располагаются следующим образом $-, \wedge, \vee, \Rightarrow, \iff$. Кроме того считается, что кванторы $\forall$, $\exists$ связывают сильнее всех остальных операций.*

Пример 3.4. Приведем примеры формул: $Q(x)$, $R(x, y, z)$,
$\forall x A(x, y, z)$, $A \vee \exists x P(x)$,
$\forall x P(x, y) \Rightarrow \exists y Q(y, z)$, $\forall x(A(x) \wedge B(y))$

Определение 3.7. В формулах $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ формула A называется областью действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$ соответственно.

Пример 3.5. *В следующих примерах область действия квантора* $\forall x$ *подчеркнута линией:* $\forall x\underline{P(x)}$, $A(x) \Rightarrow \forall x\underline{B(x,y)}$, $\exists y(\forall x\underline{B(x,y,z)})$, $\forall x\underline{(A(x) \Rightarrow B(x,y))}$.

Определение 3.8. Вхождение переменной в данную формулу называется связанным, если оно следует за знаком квантора или находится в области действия какого-либо квантора по этой переменной. Вхождение переменной не являющиеся связанными, называются свободными.

Пример 3.6. *В следующих формулах связанные вхождения переменной* x *отмечены одной линией:*
а) $\forall \underline{x} P(\underline{x}, y)$
б) $\forall \underline{x} P(\underline{x}, y) \to \exists y Q(x, y)$
в) $\forall \underline{x}(P(\underline{x}, y) \to \exists y Q(\underline{x}, y))$

Пусть дана некоторая формула A и множество M, на котором определены все входящие в эту формулу предикаты. Тогда истинное значение формулы A зависит от значений переменных трех видов:

1. логические переменные (обозначающие произвольные высказывания);
2. свободные переменные;
3. предикатные переменные (обозначающие произвольные предикаты).

Пример 3.7. *Рассмотрим следующую формулу, определенную на множестве натуральных чисел:* $\forall x P(x,y) \to A$. *Пусть* $P(x,y) = (x > y)$, $y = 3$, $A : 3 < 7$. *Тогда*
$\forall x(x > 3) \to (3 < 7) = 0 \to 0 = 1$
Подставляя конкретные значения этих переменных в формулу A *мы получим истинностное значение формулы* A.

Определение 3.9. Если имеется хотя бы один набор значений переменных, на котором значение формулы A равно 1, то формула называется выполнимой на множестве M.

Определение 3.10. Формула называется выполнимой, если имеется множество, на котором она выполнима.

Замечание 3.2. *Отметим, что в логике предикатов имеются формулы, выполнимые на бесконечных множествах, но не выполнимые ни на одном конечном множестве.*

Определение 3.11. Если значение формулы на любом наборе значений из множества M равно 1, то она называется тождественно-истинной на множестве M.

Определение 3.12. Если формула тождественно-истинна на любом множестве, то она называется общезначимой.

Общезначимыми являются все тавтологии логики высказываний, а также многие другие формулы. Например: $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)})$; $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

3.1.4 Равносильность

Определение 3.13. Пусть даны две формулы A и B, определенные на одном и том же множестве M. Формулы A и B называются равносильными на множестве M, если на любом наборе значений переменных из M они принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $A \equiv_M B$,

Определение 3.14. Две формулы A и B называются равносильными, если они равносильны на любом множестве. В этом случае пишут $A \equiv B$.

Все формулы, которые равносильны в логике высказываний равносильны и в логике предикатов. Список основных равносильностей логики высказываний дан в пункте 2.1.4.

Рассмотрим еще несколько равносильностей

23. $\overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;

24. $\overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;

25. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;

26. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;

27. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q)$;

28. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q)$;

29. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q)$;

30. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q)$;

31. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q)$;
32. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q)$;
33. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q)$;
34. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q)$;
35. $Q \to \forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_i (Q \to P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;
36. $Q \to \exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_i (Q \to P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;
37. $Q \leftrightarrow \forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_i (Q \leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;
38. $Q \leftrightarrow \exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_i (Q \leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
(где Q не содержит x_i: пункты 27–38);
39. $\forall x_i \forall x_j P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_j \forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
40. $\exists x_i \exists x_j P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_j \exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
41. $\forall y P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
42. $\exists y P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
43. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall y P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;
44. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists y P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Пример 3.8. *Упростить:*

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \overset{22}{\equiv} \overline{\exists x(\overline{P(x)})} \lor Q(x)) \lor (\overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x)) \overset{24}{\equiv} \forall x(\overline{\overline{P(x)} \lor Q(x)}) \lor \overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x) \overset{11}{\equiv}$$

$$\forall x(P(x) \land \overline{Q(x)}) \lor \overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x) \overset{25}{\equiv}$$

$$(\forall x P(x) \land \forall x \overline{Q(x)}) \lor \overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x) \overset{9}{\equiv}$$

$$(\forall x P(x) \lor \overline{\forall x P(x)}) \land (\forall x \overline{Q(x)} \lor \overline{\forall x P(x)}) \lor \exists x Q(x) \overset{13}{\equiv}$$

$$1 \land (\forall x \overline{Q(x)} \lor \overline{\forall x P(x)}) \lor \exists x Q(x) \overset{14}{\equiv} \forall x \overline{Q(x)} \lor \overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x) \overset{24}{\equiv}$$

$$\overline{\exists x Q(x)} \lor \overline{\forall x P(x)} \lor \exists x Q(x) \overset{13}{\equiv} 1 \lor \overline{\forall x P(x)} \overset{17}{\equiv} 1$$

3.1.5 Нормальные формы

Определение 3.15. Формула, в которой из операций логики высказываний содержатся лишь $\wedge$, $\vee$, $-$, а знаки отрицания относятся только к простым высказываниям и предикатам, называется предваренной формулой.

Замечание 3.3. *Пользуясь равносильностями* $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$, $A \Leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$ *и 23,24 можно любую формулу преобразовать в равносильную ей предваренную. Например:* $\forall x P(x,y) \to A \equiv \overline{\forall x P(x,y)} \vee A \equiv \exists x \overline{P(x,y)} \vee A$.

Определение 3.16. Предваренная формула называется нормальной, если в ней либо совсем нет кванторов, либо кванторы вынесены за скобки.

Пример 3.9.

Нормальные формулы: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ \overline{A(x,}y,z)$, $\exists x\ \forall y\ (A(x) \wedge B(y)z)))$, $\forall x\ ((A(x) \wedge B(y)) \vee C(z))$, $A(x) \vee \overline{B(y)}$

Формулы, не являющиеся нормальными: $\forall x\ (A(x) \wedge \exists y\ B(y))$, $\forall x\ A(x) \Rightarrow B(y)$.

Теорема 3.2. *Любую формулу логики предикатов можно преобразовать в равносильную ей нормальную формулу.*

Доказательство. Возьмем произвольную формулу и будем считать, что она уже приведена к предваренному виду. Доказательство проведем методом математической индукции по числу операций в формуле.

1. Если формула содержит лишь один знак операций, то она очевидно уже является нормальной формулой.

2. Пусть теорема справедлива для формул, содержащих не более k знаков операций. Докажем, что теорема выполняется и для формул, содержащих $k + 1$ знаков.

Пусть имеется формула R, содержащая $k + 1$ знаков операций. Для формулы R возможны только следующие случаи.

а) $R = \forall x P$. Формула $R = \forall x P$ содержит $k+1$ знак операций. Следовательно, формула P содержит k знаков и по предположению является нормальной. Тогда, очевидно, и формула $\forall x P$ также является нормальной, поскольку приписывая слева к нормальной формуле квантор всеобщности мы вновь получаем нормальную формулу. Например, если $P = \forall \nu\ \exists y\ Q(x, y, z, \nu)$, то $\forall x P = \forall x\ \forall \nu\ \exists y\ Q(x, y, z, \nu)$.

б) $R = \exists x P$. Рассматривается аналогично а).

в) $R = \overline{P}$. P содержит k знаков операций и по предположению имеет равносильную ей нормальную формулу. Применяя равносильности 23,24 можем преобразовать $\overline{P}$ к нормальному виду.

Например. Если $P = \forall x\ \exists y\ \forall z\ \ Q(x, y, z, \nu)$, то

$$\overline{\forall x \exists y \forall z Q(x, y, z, \nu)} \equiv \exists x\ \overline{\exists y \forall z Q(x, y, z, \nu)} \equiv$$

$$\exists x\ \forall y\ \overline{\forall z Q(x, y, z, \nu)} = \exists x\ \forall y\ \exists z\ \overline{Q(x, y, z, \nu)}.$$

г) $R = P \vee Q$, где P и Q уже приведены к нормальному виду. Переименуем в формулах P и Q связанные переменные так, чтобы в формулах P и Q они были разными. Пусть после переименования P и Q есть соответственно, например, $\forall x_1\ \exists x_2\ \forall x_3\ P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\exists y_1\ \forall y_2\ Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Тогда применяя 29-30 получим $\forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists y_1\ \forall y_2\ Q(y_1, y_2, \ldots, y_m) \equiv \forall x_1\ (\exists x_2\ \forall x_3\ P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists y_1\ \forall y_2\ Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \equiv \forall x_1\, \exists x_2 (\forall x_3\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists y_1\, \forall y_2\, Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \equiv \forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3\, (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists y_1\, \forall y_2\, Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \equiv$ аналогично $\forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3\, \exists y_1\, \forall y_2\, (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_m))$

д) $R{=}P \wedge Q$ аналогично.

Теорема доказана.

3.1.6 Проблема разрешения.

Проблема разрешения для логики предикатов ставится также, как и для логики высказываний: необходимо указать эффективный способ (алгоритм) для выяснения того является данная формула выполнимой или нет.

Ели мы умеем решать вопрос о выполнимости, то будем уметь решать вопрос и об общезначимости любой формулы. Действительно, если формула $\overline{A}$- общезначимая, то формула A невыполнима. Если же формула не является общезначимой, то это значит имеется некоторое множество M, на котором A на некоторых наборах принимает значение 1, т.е. A является выполнимой.

Если же $\overline{A}$ - выполнима, то A не является общезначимой и если $\overline{A}$ - невыполнима, то A – общезначима.

При решении проблемы разрешения перебор всех вариантов значений переменных не подходит, так как таких вариантов может быть бесконечное множество. Поэтому нужен другой метод, отличный от перебора. Поиски такого способа велись долго, пока в 1936 г. американский математик А. Черч не доказал, что такого способа (алгоритма) нет.

Однако для некоторых частных случаев формул такой метод имеется.

3.1.7 Применение языка логики предикатов для записи математических предложений.

Для записи математических предложений, теорем, аксиом, определений удобен язык логики предикатов. При этом не существует каких-то правил для записи математичесих предложений. В каждом конкретном случае этот вопрос решается отдельно. Некоторые предикаты будем записывать в символической форме. Например: «x равно y» в виде «x = y», «x меньше y» в виде «x<y», «x минус y по абсолютной величине меньше z» - в виде «|x-y|<z».

Пример 3.10.

1. Закон коммутативности: $\forall z\ \forall y\ \forall x\ ((x + y = z) \Rightarrow (y + x = z))$
2. Запишем такое предложение «любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого». Через R обозначим множество действительных чисел. $\forall x\ \forall y\ ((x \in R) \wedge (y \in R) \Rightarrow (x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)$
3. Определение множества M, ограниченного сверху. $\exists y\ \forall x\ ((x \in M) \Rightarrow (x \leqslant y))$.
4. Определение верхней грани α множества M: $\forall x(x \in M \Rightarrow (x \leqslant \alpha) \wedge \forall \epsilon \exists y((\epsilon\ 0) \Rightarrow (y \in M \wedge (\alpha – \epsilon y)))$

5. Система аксиом групп. Пусть M - множество всех элементов группы

Аксиома 3.1. $\forall x\ \forall y\ \exists z(((x \in M \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \Rightarrow ((x \cdot y = z) \wedge \forall u(x \cdot y = u) \Rightarrow z = u)))$

Аксиома 3.2. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\ \forall v\ \forall w((x \in M) \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \wedge (u \in M) \wedge (v \in M) \wedge (w \in M) \Rightarrow ((x \cdot y = u) \wedge (y \cdot z = v) \wedge (z \cdot u = w) \Rightarrow (x \cdot v = w)))$

Аксиома 3.3. $\forall z\ \forall y\ \exists z((x \in M) \wedge (y \in M) \wedge (z \in M) \Rightarrow ((x \cdot z = y) \wedge \forall u((x \cdot u = y) \Rightarrow (z = u)))$

Теорема 3.3. *Если x делится на y, а y делится на z, то x делится на z*

$\forall x\ \forall y\ \forall z((x \vdots y) \wedge (y \vdots z) \Rightarrow (x \vdots z))$

Теорема 3.4. *Существует бесконечно много простых чисел. Через $Q(x)$обозначен предикат, x - простое число.* $\forall y\ \exists x(Q(x) \wedge\ (x\ y))$

Применяя равносильности 1–46 можно для данных математических утверждений построить им равносильные или противоположные утверждения.

Пример 3.11. *Дать определение множества не ограниченного сверху. Возьмем отрицания от определения множества ограниченного сверху:*

$$\overline{\exists y \forall x((x \in M) \Rightarrow (x \le y))} \equiv \forall y\ \overline{\forall x((x \in M) \Rightarrow (x \le y))} \equiv$$

$$\forall y\ \exists x\ \overline{(x \in M) \Rightarrow (x \le y)} \equiv \forall y\ \exists x\ \overline{(\overline{(x \in M)} \vee (x \le y))} \equiv$$

$$\equiv \forall y\ \exists x\ \overline{\overline{((x \in M)}} \wedge \overline{(x \le y))} \equiv \forall y\ \exists x\ ((x \in M) \wedge (x > y)).$$

3.2 Практическая часть

3.2.1 Предикаты.

1.1 Какие из приведенных предложений являются предикатами? В случае положительного ответа определите тип предиката:

1. 2+2=4;
2. $x + y = 4$, где $x \in N, y \in N$;
3. Лена и Дима;
4. $x + y$;
5. x – член профсоюза, где $x \in$ множество студентов вашей группы;
6. x – столица Беларуси, где $x \in$ {Минск, Брест};
7. река x впадает в море y , где $x \in$ {Волга, Урал, Днепр, Неман}, $y \in$ {Кайспийское, Черное}.

1.2 На множестве натуральных чисел привести примеры различных n-местных предикатов.

1.3 На множестве целых чисел привести примеры предикатов.

1. $P(x, y)$ – выполнимый;
2. $S(x, y, z)$ – тождественно-ложный;

3. $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – тождественно-истинный;

4. $P(x)$ и $Q(y)$ такие, что $P(x) \wedge Q(y)$ – выполнимый, но не тождественно-истинный;

5. $S(x, y), T(x, y)$ – каждый из них не тождественно-истинный, а $S(x, y) \vee T(x, y)$ – тождественно-истинный;

6. $S(x_1)$ и $Q(x_1, x_2, x_3)$ такие, что $S(x_1) \to Q(x_1, x_2, x_3)$ - тождественно-ложный;

7. $S(x_1, x_2), T(x_1, x_2)$ – каждый из которых не тождественно-ложный, а $S(x_1, x_2 \leftrightarrow T(x_1, x_2)$ - тождественно-ложный;

8. $Q(x, y)$ такой, что $Q(3, y)$ - тождественно-истинный.

1.4 На множестве целых чисел привести примеры предикатов $P(x)$ и $Q(y)$ таких, что $P(x)$ является следствием $Q(y)$.

3.2.2 Кванторы.

2.1 Установите истинность следующих высказываний:

1. $\forall x(|x| = x)$,где $x \in N$;
2. $\exists x(|x| = x)$,где $x \in Z$;
3. $\exists x(|x| = -x)$,где $x \in Z$;
4. $\exists x \forall y(x + y = 0)$,где $x, y \in Z$;
5. $\forall x \exists y(x + y = 0)$,где $x, y \in Z$;
6. $\forall x \forall y(x + y = 0)$,где $x, y \in Z$;
7. $\exists x \exists y(x + y = 0)$,где $x, y \in Z$;
8. $\exists x \forall y(x + y = 0)$,где $x, y \in Z$;

2.2 Пусть $M(x, y)$ – предикат «x – является мамой y». Прочитайте следующие высказывания и определите их истинность (x принадлежит множеству женщин, y – множеству всех людей):

1. $\forall x \exists y M(x, y)$;
2. $\forall y \exists x M(x, y)$;
3. $\exists x \forall y M(x, y)$;

4. $\exists y \forall x M(x, y)$;

5. $\forall x \forall y M(x, y)$;

6. $\forall y \forall x M(x, y)$;

7. $\exists x \exists y M(x, y)$;

8. $\exists y \exists x M(x, y)$;

2.3 Определите тип и местность следующих предикатов на множестве целых чисел:

1. $\forall x(x - y \geq 2)$;

2. $\forall x(x \cdot y = 0)$;

3. $\exists y(\sqrt{|x|} + y = 0)$;

4. $\forall x_1(x_1^2 + |x_2 \cdot x_3| \geq 0)$;

5. $\exists y(x + y \geq 2)$;

6. $\exists y(x + y > y + x)$;

7. $\forall x \forall y \forall z(x \cdot y = z)$;

8. $\exists x \exists y \exists z(x \cdot y = z)$.

2.4. На множестве целых чисел построить предикаты:

1. $R(x, y, z)$ – такой, что $\forall y R(x, y, z)$ – тождественно-истинный;
2. $Q(x, y, z)$ – выполнимый, $\forall y Q(x, y, z)$ – тождественно-ложный;
3. $R(x, y, z)$ – такой, что $\exists x R(x, y, z)$ – тождественно-ложный;
4. $S(x, y, z)$ – выполнимый, $\exists y S(x, y, z)$ – тождественно-истинный.

2.5. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел:

1. $\forall x \exists y (x + y = 7)$;
2. $\exists y \forall x (x + y = 7)$;
3. $\exists x \forall y (x + y = 7)$;
4. $\forall x \forall y (x + y = 7)$;
5. $[\forall x \forall y (x + y = 3)] \to (3 = 4)$;
6. $\forall x [(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$;
7. $\forall a \{[(\exists x)(ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;
8. $\forall b \exists a (\forall x) \{x^2 + ax + b > 0\}$;

9. $\forall x[((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$;

10. $\exists b \forall a (\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$;

11. $\exists a \forall b (\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$.

2.6. Определите, является ли один из следующих предикатов, заданный на множестве действительных чисел, следствием другого:

1. $|x| < 3, x^2 - 3x + 2 = 0$;
2. $x^4 = 16, x^2 = -2$;
3. $x - 1 > 0, (x - 2)(x + 5) = 0$;
4. $\sin x = 3, x^2 + 5 = 0$;
5. $x^2 + 5x - 6 > 0, x + 1 = 1 + x$;
6. $x^2 \leqslant 0, x = \sin \pi$;
7. $-5 < x, x < 5$;
8. $\lg x \leqslant 1, 1 \leqslant x \leqslant 10$;
9. $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 \leqslant 1$;
10. $x^2 < y, y \geqslant 0$;
11. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0, |x - 2| = 1$.

3.2.3 Формулы логики предикатов.

Образец 1. Восстановить скобки в формуле
$\forall x\exists yS(x,y)\to B\vee\exists y\forall xT(x,y)$.
Решение. Кванторы воздействуют сильнее, чем операции логики высказываний. Поэтому скобки в первую очередь ставятся для кванторов. Скобки ставятся в соответствии с определением формулы. Согласно п.2 этого определения $S(x,y)$ является формулой. Поэтому на основе п.3 $\exists y(S(x,y))$ – формула. Тогда опять на этом же основании выражение $\forall x(\exists y(S(x,y)))$ тоже является формулой. Аналогично получаем $\exists y(\forall x(T(x,y)))$.

Для кванторов расставили скобки: $\forall x(\exists y(S(x,y)))\to B\vee$ $\vee\exists y(\forall x(T(x,y)))$. Осталось расставить скобки для операций логики высказываний: $\forall x(\exists y(S(x,y)))\to(B\vee\exists y(\forall x(T(x,y)))$, $(\forall x(\exists y(S(x,y))))\to(B\vee\exists y(\forall x(T(x,y)))))$.

3.1. Восстановить скобки:

1. $\forall xS(x,y)\to B\to\exists x\forall yT(x,y)$;
2. $\exists xR(x)\longleftrightarrow\forall x\forall yQ(x,y)\longleftrightarrow C$;
3. $A\to B\longleftrightarrow\forall xR(x)\wedge\forall x\forall yS(x,y)$;
4. $\forall x\exists yR(x,y)\vee B\wedge\forall xS(x)\to C$;

5. $\forall x\overline{R(x,y) \to B} \vee \forall x\forall y R(x,y)$;

6. $B \vee \forall x\overline{R(x) \vee C} \vee B \to \forall x S(x,y)$;

7. $\forall x\overline{R(x,y) \vee \overline{B \to C}} \to A \wedge \forall x S(x)$;

8. $A \vee B \wedge \forall x\overline{S(x) \to \overline{B \vee C}}$.

3.2. Опустить как можно больше скобок:

1. $(\forall x(\exists y(R(x,y)) \to Q(x)) \wedge C)$;

2. $\forall x(\exists y(R(x,y) \to Q(x)))$;

3. $\forall x(\exists y(R(x,y) \to B) \vee Q(x))$;

4. $\forall x(\exists y(R(x,y) \to (B \vee Q(x))))$;

5. $(\forall x(\exists y(R(x,y))) \to (B \vee Q(x)))$;

6. $(\forall x(\exists y(R(x,y))) \wedge (B \longrightarrow Q(x)))$;

7. $(\forall x(\exists y(R(x,y))) \vee (B \wedge Q(x)))$;

8. $((A \to B) \vee (C \to \forall x(\exists y(Q(x,y)))))$;

9. $\forall x(\exists y(R(x,y) \longleftrightarrow (B \vee Q(x))))$;

10. $(A \to \forall x(\exists y((R(x,y) \to B) \to C)))$;

11. $((B \longleftrightarrow (C \wedge B)) \vee \forall x(R(x) \to Q(x)))$.

3.2.4 Равносильность.

Все равносильности, которые имели место в логике высказываний, выполняются и для логики предикатов. Кроме них в логике предикатов есть и свои специфические равносильности:

23. $\overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;

24. $\overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;

25. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge$
$\wedge\, Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;

26. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \exists x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee$
$\vee\, Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$;

27. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q)$;

28. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q \equiv \forall x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q)$;

29. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q)$;

30. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q \equiv \exists x_i (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q)$;

(где Q не содержит x_i, пункты 29, 30, 31, 32)

31. $\forall x_i \forall x_j P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall x_j \forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

32. $\exists x_i \exists x_j P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists x_j \exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

33. $\forall y P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

34. $\exists y P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

35. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \forall y P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

36. $\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \exists y P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

4.1. Определите, имеет ли место следующие равносильности для любых предикатов $P(x, y), Q(x), S(x)$. Если нет, то приведите примеры предикатов, подтверждающих это:

1. $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y)$;
2. $\forall x(Q(x) \vee S(x)) \equiv \forall x(Q(x) \vee \forall x S(x))$;
3. $\exists x(Q(x) \wedge S(x)) \equiv \exists x(Q(x) \wedge \exists x S(x))$;
4. $\forall x \forall y(Q(x) \vee S(xy)) \equiv \forall x(Q(x) \vee \forall y S(y))$;
5. $\forall x Q(x) \to \exists x S(x) \equiv \exists x(Q(x) \to S(x))$;
6. $\exists x Q(x) \vee \forall x S(x) \equiv \exists x(Q(x) \to S(x))$;
7. $\forall x(Q(x) \to S(x)) \equiv \forall x Q(x) \to \forall x S(x))$.

4.2. Имеет ли место следующая равносильность
$\forall x(S(x) \to Q(x)) \equiv M \equiv \forall x S(x) \to \forall x Q(x)$, где

1. $M = \{a\}$,
2. $M = \{a, b\}$.

4.3. Студенты группы МИ-21 хвастаются тем, что они умнее, чем студенты группы МИ-22. На вопрос: "Что значит, что вы умнее? студенты группы МИ-21 дали следующие ответы:

1. Любой из нас умнее любого из них.
2. Самый умный из нас умнее любого из них.
3. Для любого студента нашей группы найдется студент из их группы такой, что наш студент умнее их студента.
4. Каждый студент их группы менее умен хотя бы одного студента нашей группы.
5. В нашей группе имеется студент, который умнее любого студента их группы.

Какие из этих высказываний равнозначные?

4.4. Рассмотрим два определения легкой контрольной работы:

1. Контрольная работа называется легкой, если каждое задание выполнил хотя бы один студент.
2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один студент выполнил все задания.

Может ли контрольная работа быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?
Может ли контрольная работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

3.2.5 Выполнимость формул.

Образец. Доказать общезначимость формулы
$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \to \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$.

Решение. Наиболее распространенными методами доказательств общезначимости формул являются:

1. Метод «от противного»;
2. Метод равносильных преобразований;

1. Предположим, что рассматриваемая формула не является общезначимой. Тогда найдутся конкретные предикаты, обозначим их $P^{\bullet}(x)$ и $Q^{\bullet}(x)$, такие, что формула $\exists x\ (P^{\bullet}(x) \vee Q^{\bullet}(x)) \to \exists x\ P^{\bullet}(x) \vee \exists x\ Q^{\bullet}(x)$ примет значение «0». Это означает, что

$$\begin{cases} \exists x (P^{\bullet}(x) \vee Q^{\bullet}(x)) \equiv 1; \\ \exists x P^{\bullet}(x) \vee \exists x Q^{\bullet}(x) \equiv 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \exists x (P^{\bullet}(x) \vee Q^{\bullet}(x)) \equiv 1; \\ \exists x P^{\bullet}(x) \equiv 0; \\ \exists x Q^{\bullet}(x) \equiv 0; \end{cases}$$

По определению $\exists x\ P^{\bullet}(x) = 1$ тогда и только тогда, когда предикат $P^{\bullet}(x)$ выполнимый. Поскольку $\exists x\ P^{\bullet}(x) \equiv 0$, то предикат $P^{\bullet}(x)$ выполнимым не является. Это означает, что он является тождественно-ложным. Аналогично $Q^{\bullet}(x)$ – тоже является тождественно-ложным. Тогда $P^{\bullet}(x) \vee Q^{\bullet}(x)$ – тождественно-ложный предикат, что противоречит первому равенству. Значит, наше допущение было неправильным и поэтому рассматриваемая формула является общезначимой.

2. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{22}{\equiv}$
$\overset{22}{\equiv} \overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))} \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{26}{\equiv}$
$\overset{26}{\equiv} \forall x\ \overline{(P(x) \vee Q(x))} \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{11}{\equiv}$
$\overset{11}{\equiv} \forall x\ (\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{27}{\equiv}$
$\overset{27}{\equiv} \forall x\ \overline{P(x)} \wedge \forall x\ \overline{Q(x)} \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{26}{\equiv}$
$\overset{26}{\equiv} \overline{\exists x P(x)} \wedge \overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{9}{\equiv}$
$\overset{9}{\equiv} (\overline{\exists x P(x)} \vee \exists x\ P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x\ P(x)) \vee \exists x\ Q\ (x) \overset{13}{\equiv}$
$\overset{13}{\equiv} 1 \wedge (\overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x\ P(x)) \vee \exists x\ Q(x) \overset{14}{\equiv}$
$\overset{14}{\equiv} \overline{\exists x Q(x)} \vee \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \overset{13}{\equiv}$
$\overset{13}{\equiv} 1 \vee \exists x\ P(x) \overset{17}{\equiv} 1$

5.1. В формулах из примера 3.1 область действия квантора общности обозначить одной линией, область действия квантора существования – двумя.

5.2. В следующих формулах связные вхождения переменной x обозначить одной линией, связные вхождения y – двумя.

1. $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$;

2. $\forall x(P(x, y) \to \exists y Q(x, y))$;

3. $\forall x \exists y P(x, y) \to Q(x, y)$;

4. $\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(x,y))$;

5. $\forall x (\exists y P(x,y)) \to Q(x,y)$;

6. $\forall x P(x) \to \exists y Q(x)$;

7. $\exists x (\forall y P(x,y) \to Q(x,y))$;

8. $\exists x (P(x,y) \to \forall y Q(x,y))$.

5.3. В следующих формулах логические переменные отметить одной линией, предикатные – двумя, свободные – волнистой.

1. $A \to \forall x P(x)$;

2. $\forall x P(x,y) \to A$;

3. $\forall x P(x,y) \to A \to \exists y Q(x,y)$;

4. $B \to \forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$;

5. $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y) \to B$;

6. $\forall x p(y) \to \exists y Q(x)$;

7. $\forall x (P(x,y) \to Q(x,y)) \vee \exists y S(y)$;

8. $A \vee \forall x P(x,y) \longleftrightarrow \exists y Q(y)$;

9. $\forall x \exists y Q(x,y) \to P(x,y)$;

10. $\forall x P(x,y) \to (A \to \forall y Q(x,y))$;

11. $\overline{\forall x \exists y Q(x,y)} \vee B \to P(x)$;

12. $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x Q(x,y)$;

13. $\overline{\forall x R(x) \vee \exists x S(x,y)}$;

14. $\forall x \overline{S(x,y)} \vee \exists x T(x,y)$;

15. $\forall x R(x,y) \vee B \longleftrightarrow T(x)$;

16. $\forall x S(x) \longleftrightarrow T(x,y) \wedge B$.

5.4. Являются ли выполнимыми следующие формулы:

1. $\forall x P(x) \to P(y)$;
2. $\forall x P(x)$;
3. $\exists x \forall y (Q(x,y) \wedge \overline{Q(x,y)})$;
4. $\exists x \exists y (P(x) \wedge \overline{P(y)})$;
5. $\forall x\ \forall y\ (P(x,y) \wedge \overline{P(x,y)})$;
6. $P(x) \to \forall y\ P(y)$;
7. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x,y) \vee \overline{Q(y,z)})$;

8. $\overline{P(x)} \to \forall y\ P(y)$;

9. $\exists x\ P(x) \wedge \overline{Q(y)}$;

10. $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \to Q(x,y)$;

11. $\exists x\ \exists y\ (P(x,y) \to \overline{P(x,y)})$;

12. $\exists x\ \forall y\ R(x,y) \to \forall y\ \exists x\ R(x,y)$.

5.5. Доказать общезначимость формул:

1. $\exists x(P(y) \to P(x))$;

2. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$;

3. $\overline{\exists x P(x)} \to \overline{\forall x P(x)}$;

4. $\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)}$;

5. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$;

6. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \overline{\overline{\exists x P(x} \wedge \overline{\forall x Q(x)}}$;

7. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$;

8. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$;

9. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$;

Начало
Содержание
Приложение
Назад
162
Закрыть

10. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$;

11. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$;

12. $Q(y) \to \exists x Q(x)$.

5.6. Являются ли общезначимыми формулы:

1. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$;
2. $\forall x P(x) \to P(y)$;
3. $P(y) \to \forall x P(x)$;
4. $\exists x Q(x) \to Q(y)$;
5. $\forall x \exists y Q(x, y) \to \exists y \forall x Q(x, y)$;
6. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;
7. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$;
8. $\forall x \forall y S(x, y, z) \leftrightarrow \forall y \forall x S(x, y, z)$;
9. $\exists x \exists y S(x, y, z) \leftrightarrow \exists y \exists x S(x, y, z)$.

3.2.6 Нормальные формулы

Образец. Формулу $\forall x \; P(x,y) \to \forall y \; Q(y)$ преобразовать в равносильную ей нормальную.

Решение. Сначала преобразуем формулу в равносильную ей приведенную:

$\forall x \; P(x,y) \to \forall y \; Q(y) \equiv \overline{\forall x P(x,y)} \vee \forall y \; Q(y) \equiv \exists x \; \overline{P(x,y)} \vee \forall y \; Q(y)$.

Теперь преобразуем приведенную формулу в нормальную: квантор $\forall y$ нельзя вынести за скобки, поскольку во второй части формулы имеется переменная y. В таких случаях переименовывают связанные переменные. В нашем случае y в левой части формулы является свободной переменной, а в правой – связанной. Поэтому, применяя равносильность 37, переименовываем переменную y в правой части формулы, например, на m, и после этого выносим квантор $\forall m$ за скобки на основе равносильности 30:

$\exists x \; \overline{P(x,y)} \vee \forall y \; Q(y) \overset{37}{\equiv} \exists x \; \overline{P(x,y)} \vee \forall m \; Q(m) \overset{30}{\equiv} \forall m \; (\exists x \; \overline{P(x,y)} \vee Q(m)) \overset{32}{\equiv} \forall m \, \exists x \, (\overline{P(x,y)} \vee Q(m))$.

6.1. Следующие формулы преобразовать в равносильные им приведенные:

1. $\overline{\forall x S(x)} \vee Q(x,y)$;

2. $\forall x \; R(x) \vee \exists x \; Q(x,y)$;

3. $\exists x \; \forall y \; Q(x,y) \wedge S(x,y)$;

4. $\forall y\ \exists x\ Q(x,y) \wedge \exists y\ S(x,y)$;

5. $\forall x\ (S(x) \vee \exists y\ Q(x,y)) \wedge \forall y\ T(x,y)$;

6. $\exists y\ (R(y) \wedge \forall x\ Q(x,y)) \vee \forall x\ S(x,y)$;

7. $\exists x\ R(x,y) \to \forall x\ \forall y\ Q(x,y)$;

8. $\forall x\ R(x,y) \leftrightarrow \exists y\ Q(x,y)$;

9. $\forall x\ R(x) \leftrightarrow \forall y\ S(x,y)$;

10. $A \vee \forall x\ R(x) \to \forall y\ S(x,y)$;

11. $\forall x\ R(x) \vee A \to \forall y\ S(x,y)$;

12. $\forall x\ R(x) \to A \vee \forall y\ S(x,y)$;

13. $\forall x\ R(x) \to \forall y\ S(x,y) \vee A$;

14. $A \vee \forall x\ S(x,y) \wedge \exists y\ T(x,y) \to B$;

15. $\forall x\ S(x,y) \vee A \wedge \exists y\ T(x,y) \to B$;

16. $\forall x\ S(x,y) \to A \to \exists y\ T(x,y)$;

17. $\forall x\ S(x,y) \to \exists y\ T(x,y) \to A$;

18. $A \to \forall x\ S(x,y) \to \exists y\ T(x,y)$.

6.2. Формулы из примера 6.1 преобразовать в равносильные им нормальные.

3.2.7 Запись предложений с помощью операций логики предикатов.

7.1. Пусть x и y переменные, заданные на множестве всех людей. Введем следующие обозначения:

$М(x)$=«x–*мужчина*»;
$Ж(x)$=«x–*женщина*»;
$С(x,y)$=«y старше чем x»;
$Б(x)$=«x *живет в Бресте*;
$Г(x)$=«x *живет в Гродно*»;
$Ш(x,y)$=«x находится в браке с y»;
$Д(x,y)$=«x есть ребенок (сын или дочь) y»;

Запишите в символическом виде следующие предложения:

1. у каждого человека есть отец и мать;
2. у каждого, у кого есть отец, есть и мать;
3. каждый человек моложе своих родителей;
4. есть человек, жена сына которого старше его самого;
5. если в Бресте живет женщина, у которой есть брат в Гродно, то в Гродно есть мужчина, у которого есть сестра в Бресте;
6. все дети человека x находятся в браке;
7. есть человек, все дети которого находятся в браке.

7.2. Следующие предложения перевести на язык формул:

1. Не все птицы умеют летать.
2. Все рыбы, кроме акул, хорошо относятся к детям.
3. Либо каждый любит кого – нибудь и ни один не любит всех, либо кто – то любит всех, и кто – то не любит никого.
4. Ты можешь обманывать кого – то все время, ты можешь обманывать всех некоторое время, но ты не можешь обманывать всех все время.

7.3. Пусть $P(x)$= «x - простое число», $T(x)$= «x - чётное число», $Q(x)$= «x - нечётное число», $S(x, y)$= «x делится на y». Перевести на русский язык:

1. $P(2) \wedge T(2)$;
2. $\forall x(S(2, x) \to T(x))$;
3. $\forall x(T(x) \wedge S(x, 6))$;
4. $\forall x(\overline{T(x)} \to \overline{S(2, x)})$;
5. $\forall x(T(x) \wedge \forall y(S(x, y) \to P(y)))$;
6. $\forall x(P(x) \to \exists y(T(y) \wedge S(x, y)))$;

7. $\forall x(Q(x) \to \forall y(P(y) \to \overline{S(x,y)}))$.

7.4. Записать следующие предложения:

1. Имеется хотя бы один предмет, обладающий свойством $P(x)$ (выражение «имеет хотя бы один предмет» понимается в том смысле, что «имеется предмет»);
2. Не существует предмета, обладающего свойством $P(x)$ (или «неправда, что существует предмет, обладающий свойством $P(x)$»);
3. Не существует больше одного предметы, обладающего свойством $P(x)$ (или «существует не больше одного предмета, обладающего свойством $P(x)$»);
4. Существует ровно один предмет, обладающий свойством $P(x)$ (или «существует предмет, обладающий свойством $P(x)$ и не существует больше одного предмета, обладающего свойством $P(x)$»);
5. Существует не больше двух предметов, обладающих свойством $P(x)$ (или «для любых трёх предметов x, y, z, если каждый из них обладает свойством $P(x)$, то $x = y$ или $y = z$»);
6. Существует ровно 2 предмета, обладающих свойством $P(x)$ (или «существует хотя бы два предмета, обладающих свойством $P(x)$, и не существует больше двух предметов, обладающих этим свойством»).

3.3 Контрольные тесты

1. Предикатом является функция:

   (a) определенная на множестве истинностных значений $\{0,1\}$;

   (b) принимающая значения из множества истинностных значений $\{0,1\}$;

   (c) аргументы которой и сама функция принимают значения из множества истинностных значений $\{0,1\}$;

   (d) аргументы которой принимают значения из некоторых множеств M.

2. Всякий тождественно истинный предикат:

   (a) является тождественно ложным;

   (b) не является выполнимым;

   (c) является выполнимым;

   (d) является тождественно ложным и не является выполнимым.

3. При навешивании квантора на n-местный $(n \geq 2)$ предикат , предикат превращается в:

   (a) ложное высказывание;

   (b) (n-1) — местный предикат;

(c) $(n+1)$ — местный предикат;

(d) истинное высказывание.

4. Два n-местных предиката, определенные на одном и том же множестве, равносильны тогда и только тогда, когда:

   (a) каждый из них является следствием другого;

   (b) один из них является следствием другого;

   (c) ни один из них не является следствием другого;

   (d) один из них — выполнимый, а другой — тождественно истинный.

5. Какие из следующих утверждений являются истинными?

   (a) каждая формула логики предикатов является формулой логики высказываний;

   (b) имеются формулы логики высказываний, которые не являются формулами логики предикатов;

   (c) никакая формула логики высказываний не является формулой логики предикатов;

   (d) каждая формула логики высказываний является формулой логики предикатов.

6. Какая из следующих записей является верной равносильностью?

(a) $\forall x\ \forall y\ P(x, y) = \forall y\ \forall x\ P(x, y)$;

(b) $\forall x\ \exists y\ P(x, y) = \forall y\ \exists x\ P(x, y)$;

(c) $\exists x\ \forall y\ P(x, y) = \forall y\ \exists x\ P(x, y)$;

(d) $\forall y\ \exists x\ P(x, y) = \exists x\ \forall y\ P(x, y)$.

7. Какой из следующих формул равносильна формула $\forall x\ P(x, y) \vee \exists y\ Q(x, y)$?

(a) $\forall x\ P(x, n) \vee \exists y\ Q(x, y)$;

(b) $\forall x\ P(x, n) \vee \exists n\ Q(x, n)$;

(c) $\forall n\ P(n, y) \vee \exists y\ Q(x, y)$;

(d) $\forall n\ P(n, y) \vee \exists y\ Q(x, y)$.

8. Какая из следующих формул является логически общезначимой?

(a) $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ P(x)$;

(b) $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$;

(c) $A \rightarrow \forall x\ P(x)$;

(d) $\forall x\ P(x) \rightarrow A$.

9. Какая из следующих формул является ?

(a) $A \rightarrow \forall x\ P(x)$;

(b) $\forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{A}$;

(c) $\forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{B}$;

(d) $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \vee \forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x})$.

10. Какая из следующих формул является нормальной?

(a) $\mathrm{A} \rightarrow \forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x})$;

(b) $\mathrm{A} \vee \forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x})$;

(c) $\forall \mathrm{x}\ P(\mathrm{x}) \vee \mathrm{A}$;

(d) $\forall \mathrm{x}\ (P(\mathrm{x}) \vee \mathrm{A})$.

Раздел 4
Исчисление высказываний

4.1 Теоретическая часть

4.1.1 Язык. Аксиомы. Правила вывода.

В лекции 2 исследовались высказывания. Было показано, что для выяснения того, является ли данная формула выполнимой, тавтологией, а также для выяснения равносильности двух формул, достаточно было построить таблицу истинности. Такое решение было возможно потому, что каждая буква в формуле являлась только лишь двоичной переменной. В других разделах математической логики буквы в формулах могут принимать сколь угодно много различных значений, они могут быть определены даже на бесконечных множествах. Поэтому для выяснения выполнимости таких формул метод истинностных таблиц уже не подходит. В подобных случаях используется так называемый аксиоматический метод. В этой главе мы рассмотрим применение аксиоматического метода в наиболее простом случае – исследовании высказываний. Аксиоматическая теория, которая будет в результате этого построена, называется **исчислением высказываний**. Но прежде укажем несколько характерных черт, свойственных каждой аксиоматической теории.

1. Язык теории. Он включает в себя алфавит и правила образования формул.

Определение 4.1. *Алфавитом называется множество попарно различных символов.*

Определение 4.2. *Алфавит исчисления высказываний состоит из символов, которые можно разбить на три группы:*
– большие буквы латинского алфавита с индексами или без них A, B, $C, \ldots, A_1, B_3, \ldots;$
– символы $\to$ и $--$;
– скобки (и).

Замечание 4.1. *Отметим, что символам алфавита языка исчисления высказываний не придается пока никакого содержательного смысла.*

Замечание 4.2. *При построении аксиоматической теории разрешается пользоваться только лишь символами алфавита этой теории.*

Правила образования – это те правила, которые позволяют из символов алфавита образовывать формулы.

Определение 4.3. *Формулами исчисления высказываний являются следующие выражения:*

1. *Каждый символ из первой группы алфавита является формулой.*

2. Если P и Q– формулы, то $\overline{P}$ и $(P \to Q)$– формулы.

3. Других формул нет.

Замечание 4.3. *В указанных правилах построения формул присутствуют символы P и Q, не принадлежащие алфавиту. Они являются обозначениями формул и применяются для сокращения записей. Такие символы, не принадлежащие алфавиту, называются метасимволами.*

Так, например, чтобы сформулировать пункт 2 без применения метасимволов мы должны были сказать:
– если конечная последовательность символов является формулой, то, помещая над ней символ , получаем формулу;
– если две конечные последовательности символов являются формулами, то соединяя их символом $\to$ и приписывая слева к полученной символ (, а справа символ), мы получаем формулу.

Как видно метасимволы служат удобным средством для сокращения записей.
Для всякой конечной последовательности символов всегда можно установить, является ли она формулой. Например, последовательность $(A \to (B \to A))$ является формулой.

Действительно, согласно пункту 1 правил, A и B – формулы. Поэтому в силу пункта 2 последовательность $(B \to A)$ тоже является формулой. Наконец, поскольку A и $(B \to A)$ – формулы, то и $(A \to (B \to A))$ тоже формула.

Условимся в формулах опускать внешнюю пару скобок. Например, вместо $(A \to (B \to A))$ будем писать $A \to (B \to A)$.

2. Аксиомы теории. Во множестве формул выделяется некоторое подмножество, формулы которого и объявляются аксиомами. Отметим, что это подмножество может быть и бесконечным.

В рассматриваемом исчислении высказываний аксиомы задаются при помощи следующих трех схем аксиом:

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
3. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$.

Замечание 4.4. *Эти схемы записаны при помощи метасимволов и порождают бесконечное множество аксиом, которые получаются при подстановке конкретных формул на места вхождений метасимволов.*

Пример 4.1.

- $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \to B))$, $A \to (A \to A)$ – *аксиомы по схеме аксиом 1;*
- $(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$, $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ – *аксиомы по схеме аксиом 2;*
- $(\overline{\overline{B}} \to \overline{A}) \to ((\overline{\overline{B}} \to A) \to \overline{B})$, $(\overline{\overline{\overline{B}}} \to \overline{\overline{B}}) \to ((\overline{\overline{\overline{B}}} \to \overline{B}) \to \overline{\overline{B}})$ – *аксиомы по схеме аксиом 3.*

3. Правила вывода теории. Они являются способами образования новых формул из имеющихся. Всякий раз, когда какое - то правило вывода применяется к данным формулам, называемым **посылками правила**, мы получаем (если это возможно) формулу, называемую **заключением правила**.

В рассматриваемом исчислении высказываний будет всего одно правило вывода. Оно называется **modus ponens** (модус поненс) и кратко обозначается MP. В результате применения правила вывода MP к формулам вида A и $A \to B$ получаем формулу B.

Пример 4.2. *Из формул* $A \to (B \to A)$ *и* $(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$ *по правилу MP получим формулу* $(A \to B) \to (A \to A)$.

4.1.2 Вывод. Вывод гипотез.

Определим понятие вывода.

Определение 4.4. *Выводом называется конечная последовательность формул, в которой каждая формула получена по одной из схем аксиом или по правилу вывода MP из предшествующих формул.*

Пример 4.3. *Следующие последовательности формул являются выводами:*

1. $A \to (A \to A)$;

2. $A \to (B \to A), A \to (B \to A)$;

3. $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A)), A \to ((B \to A) \to A), (A \to (B \to A)) \to (A \to A)$.

Покажем например, что последовательности 3) является выводом. Действительно, первая формула последовательно получена по схеме аксиом 2, вторая – по схеме аксиом 1, а третья – по правилу MP из двух предшествующих.

В то же время последовательность $A \to B, A \to (B \to A)$ выводом не является. В самом деле, первую формулу последовательности нельзя получить ни по одной из схем аксиом, поскольку она состоит только лишь из двух символов, а каждая формула, получаемая по какой – нибудь схеме аксиом, содержит не менее трех символов. Первую формулу последовательности нельзя получить по правилу MP, поскольку формула не имеет предшествующих. Таким образом, в последовательности нашлась формула (первая), которую нельзя получить ни по схемам аксиом, ни по правилу вывода MP.

Следовательно, последовательность $A \to B, A \to (B \to A)$ выходом не является.

Определение 4.5. *Формула называется выводимой, если имеется вывод, в котором эта формула стоит на последнем месте. Если формула B выводима, то пишут $\vdash B$, а саму запись $\vdash B$ читают «выводима B».*

Лемма 4.1. $\vdash A \to A$.

Доказательство. Запись $\vdash A \to A$ означает, что выводима формула $A \to A$. Из определения выводимой формулы следует, что для доказательства утверждения $A \vdash A$ надо построить вывод, в котором формула $A \to A$ стояла бы на последнем месте. Построим такой вывод. Он будет состоять из пяти формул.

1. $A \to ((B \to A) \to A)$ – по схеме аксиом 1;
2. $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ – по схеме аксиом 2;
3. $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$ – по МР из 1,2;
4. $A \to (B \to A)$ – по схеме аксиом 1;
5. $A \to A$ – по МР из 3,4.

Лемма 4.1. доказана.
При доказательстве леммы 4.1. последовательность формул, являющихся выводом фомулы $A \to A$, мы записали «в столбец». Слева от этого столбца записаны номера формул последовательности, справа - пояснения, на каком основании эти формулы включены в вывод. Так, первая формула записана на основании схемы аксиом 1, где в качестве B взята $B \to A$, вторая формула - на основании схемы аксиом 2, где в качестве

B выступает $B \to A$, а в качестве C–A. Третья формула получена по правилу выхода MP из первых двух, четвертая – по схеме аксиом 1, а пятая – по MP из третьей и четвертой.

Замечание 4.5. *Следует отметить, что нет никаких правил, которые позволяли бы построить вывод той или иной конкретной выводимой формулы. В каждом отдельном случае следует так подбирать формулы в вывод, чтобы в итоге получить требуемую формулу.*

Лучшим советчиком в таком деле будет, по–видимому, опыт. А его можно приобрести, выполняя возможно большее число упражнений на построение выводов.

Расширим понятие вывода и введем понятие вывода из гипотез.

Определение 4.6. *Пусть дано некоторое (возможно пустое) множество формул Г. Формулы этого множества назовем гипотезами. Тогда выводом формулы B из гипотез Г называется конечная последовательность формул, в которой на последнем месте стоит формула B и каждая формула последовательности является либо гипотезой, либо получена по одной из схем, либо по правилу вывода MP из предшествующих формул.*

Если формула B выводима из гипотез Г, то пишут $\Gamma \vdash B$, а саму запись $\Gamma \vdash B$ читают «из гипотез Г выводима B». При этом, если $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, то иногда вместо $\Gamma \vdash B$ пишут $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B$.

Пример 4.4. *Последовательность* $A \to (B \to C)$, $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, $(A \to B) \to (A \to C)$, $A \to B$, $A \to C$ *является выводом формулы* $A \to C$ *из гипотез* $A \to (B \to C)$, $A \to B$. *Действительно, первую формулу нельзя получить ни по схеме аксиом, ни по правилу MP. Следовательно, она является гипотезой. Вторая формула получена по схеме аксиом 2, а третья – по MP из первой и второй. Формула* $A \to B$ *является гипотезой, поскольку ее нельзя получить ни по схемам аксиом, ни по правилу MP. Наконец, пятая формула получена по правилу MP из третьей и четвертой. Таким образом,* $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$.

Замечание 4.6. *Если в определении 4.5. множество* Γ *является пустым, то получаем определение вывода.*

Рассмотрим несколько свойств выводов из гипотез.

1. $\Gamma, A \vdash A$.
   Это свойство означает, что из гипотез Г и А выводима формула А. Для доказательства этого достаточно построить вывод, состоящий из одной формулы А (гипотезы).

2. Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma, B \vdash A$.
   Запись $\Gamma \vdash D$ не означает, что в выводе формулы D из гипотез Г обязательно присутсвуют все формулы множества Г. Поэтому вывод формулы А из гипотез Г является также и выводом формулы А из Г и В.

3. Если $\Gamma, A, C \vdash B$, то $\Gamma, C, A \vdash B$
Это свойство означает, что при перечислении гипотез, из которых выводима формула B, порядок перечисления значения не имеет.

4. Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.
Докажем это свойство. Пусть выводом формулы B из Г и A является последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_m$, а выводом формулы A из Г – последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Чтобы получить требуемый вывод формулы B из Г в первую последовательность вместо каждого вхождения формулы A (если такое имеется) подставим вторую последовательность. В результате получим вывод этой же формулы B, но в нем формула A будет выводима уже из гипотез множества Г. Поэтому $\Gamma \vdash B$.
Если же в последовательности $B_1, B_2, \ldots, B_m$ формулы A нет, то эта последовательность является выводом формулы B из Г.

4.1.3 Теорема дедукции.

Сформулируем и докажем теорему, известную под названием теорема дедукции.

Теорема 4.1. *Если* $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A \to B$.

Доказательство. Пусть выводом формулы B из Г и A является последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Индукцией покажем, что для каждого

$k \leq n$ имеет место выводимость $\Gamma \vdash A \to B_k$.

1. Докажем, что $\Gamma \vdash A \to B_1$. Так как формула B_1 является первой формулой вывода, то для нее возможны следующие случаи:

   (a) B_1 получена по одной из схем аксиом. Последовательность B_1, $B_1 \to (A \to B_1)$, $A \to B_1$ является выводом, поскольку первая формула получена по одной из схем аксиом, вторая – по схеме аксиом 1, а третья по правилу MP из первой и второй. Следовательно, $\vdash A \to B_1$. Учитывая еще свойство 2, получим $\Gamma \vdash A \to B_1$.

   (b) B_1 является гипотезой. Этот случай рассматривается аналогично a).

   (c) формулой B_1 является формула A. На основании леммы 4.1. можно записать $\vdash A \to A$, откуда в силу условия в) получаем, что $\vdash A \to B_1$. Теперь, применяя свойство 2, получаем $\Gamma \vdash A \to B_1$.

2. Пусть утверждение $\Gamma \vdash A \to B_i$ выполняется для всех $i < k$. Докажем, что $\Gamma \vdash A \to B_k$. Для формулы B_k возможны следующие случаи:

   (a) B_k получена по одной из схем аксиом.

(b) B_k является гипотезой.

(c) формулой B_k является формула A.

(d) B_k получена по правилу вывода MP из формул B_m, B_j, где $m < k$, $j < k$.

Первые три случая рассматриваются аналогично соответствующим случаям из пункта 1. Рассмотрим четвертый случай. Поскольку $m < k$, $j < k$, то по индуктивному предположению получаем, что $\Gamma \vdash A \to B_m$ и $\Gamma \vdash A \to B_j$.

Формула B_k получена по правилу вывода MP из B_m, B_j. Поэтому формула B_j имеет вид $B_m \to B_k$. Тогда утверждение $\Gamma \vdash A \to B_j$ примет вид $\Gamma \vdash A \to (B_m \to B_k)$.

По схеме аксиом 2 запишем формулу $(A \to (B_m \to B_k)) \to ((A \to B_m) \to (A \to B_k))$, из которой и $\vdash \; \to (B_m \to B_k)$ по правилу MP получим $\vdash (A \to B_m) \to (A \to B_k)$.

Наконец, применяя к последней выводимости и выводимости $\Gamma \vdash A \to B_m$ правило вывода MP, получаем $\Gamma \vdash A \to B_k$.

Для $i = k$ утверждение выполняется. Следовательно, $\Gamma \vdash A \to B$. Теорема доказана.

Сформулируем два важных следствия из теоремы, которыми будем достаточно часто пользоваться.

Начало
Содержание
Приложение
Назад
185
Закрыть

Следствие 4.1. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Прежде чем доказать само утверждение, построим вспомагательный вывод.

1. $A \to B$ – гипотеза.
2. $B \to C$ – гипотеза.
3. A – гипотеза.
4. B – по MP из 1, 3.
5. C – по MP из 2, 4.

Таким образом, $A \to B, B \to C, A \vdash C$. Применив теорему дедукции, получим $A \to B, B \to C \vdash A \to C$. Следствие 4.1. доказано.

Замечание 4.7. *При доказательстве следствия был применен весьма полезный прием. Формулу $A \to C$ требовалось вывести из гипотез $A \to B, B \to C$. Мы же, кроме этих двух, взяли еще одну гипотезу A. После этого требуется вывести уже не формулу $A \to C$, а формулу C. Если же предположить противное, то получим утверждение $A \to B, B \to C, A \vdash A \to C$, а это уже не то, что требовалось доказать. Поэтому, взяв в качестве гипотезы еще и A, требуется вывести формулу C. Построив такой вывод и применив теорему дедукции, получим $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.*

Замечание 4.8. *Такой прием (введение дополнительных гипотез) позволяет упростить вывод многих формул. Следует, однако, иметь в виду, что дополнительные гипотезы вводят не произвольным образом, а исходя из структуры выводимой формулы. Так, если выводимая формула имеет вид* $A_1 \to (A_2 \to (\dots(A_m \to B)\dots))$, *то в качестве дополнительных гипотез можно взять и формулы (и только их) любого из множеств* $\{A_1\}$, $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\dots$, $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$. *Если, например, за дополнительные гипотезы взять формулы* A_1, A_2, A_3, *то требуется вывести уже формулу* $A_4 \to (\dots(A_m \to B)\dots)$, *после чего, трижды применив теорему дедукции, выведем формулу* $A_1 \to (A_2 \to (\dots(A_m \to B)\dots))$.

Пример 4.5. *Докажем выводимость формулы* $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. *Поскольку формула* $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ *имеет вид* $A_1 \to (A_1 \to A)$, *то можно взять две дополнительные гипотезы* $B \to C (A_1)$ *и* $A \to B (A_2)$. *Построив затем вывод* $B \to C, A \to B \vdash A \to C (A_1, A_2 \vdash A)$ *и дважды применив теорему дедукции получим* $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) (\vdash A_1 \to (A_2 \to B))$. *Таким образом, задача построения вывода формулы* $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ *сводится к доказательству утверждения* $B \to C, A \to B \vdash A \to C$. *Но его можно получить из следствия 4.1.* $A \to B, B \to C \vdash A \to C$, *воспользовавшись свойством 3 и переставив местами гипотезы* $B \to C, A \to B \vdash A \to C$.

Начало

Содержание

Приложение

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

Следствие 4.2. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C.$

Это следствие доказывается аналогично следствию 4.1.

Замечание 4.9. *Следствия 4.1. и 4.2. являются, по сути, правилами вывода, поскольку позволяют из данных формул образовывать новые. Эти следствия, а также подобные им утверждения, называют иногда производными или вспомогательными правилами вывода. Например, следствие 4.1. (производное правило вывода) называют* **правилом силлогизма**.

Сформулируем и докажем еще утверждение, обратное к теореме дедукции.

Лемма 4.2. *Если* $\Gamma \vdash A \to B$, *то* $\Gamma, A \vdash B$.

Доказательство. Пусть выводом формулы B из и является последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Поскольку этот вывод формулы $A \to B$, то B_m есть $A \to B$. Построим новый вывод $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}, A \to B, A, B$. Следовательно, $\Gamma, A \vdash B$. Лемма доказана.

Следствие 4.3. $\Gamma, A \vdash B$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash A \to B$.

4.1.4 Примеры выводимых формул.

В этом пункте докажем выводимость нескольких формул.

Лемма 4.3. $\vdash \overline{\overline{B}} \to B.$

Доказательство. Построим вывод.

1. $(\overline{B} \to \overline{\overline{B}}) \to ((\overline{B} \to \overline{B}) \to B)$ – по схеме аксиом 3.
2. $\overline{\overline{B}} \to (\overline{B} \to \overline{\overline{B}})$ – по схеме аксиом 1.
3. $\overline{\overline{B}} \to ((\overline{B} \to \overline{B}) \to B)$ – по следствию 4.1. из 1,2.
4. $\overline{B} \to \overline{B}$ – по лемме 4.1.
5. $\overline{\overline{B}} \to B$ – по следствию 4.2. из 3,4.

Лемма доказана.

Лемма 4.4. $\vdash B \to \overline{\overline{B}}.$

Доказательство. Построим вывод.

1. $(\overline{\overline{\overline{B}}} \to \overline{B}) \to ((\overline{\overline{\overline{B}}} \to B) \to \overline{\overline{B}})$ – по схеме аксиом 3.
2. $\overline{\overline{\overline{B}}} \to \overline{B}$ – по лемме 4.3.
3. $(\overline{\overline{\overline{B}}} \to B) \to \overline{\overline{B}}$ – по MP из 1,2.
4. $B \to (\overline{\overline{\overline{B}}} \to B)$ – по схеме аксиом 1.

5. $B \to \overline{\overline{B}}$ – по следствию 4.1. из 3,4.

Лемма доказана.

Лемма 4.5. $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$.

Доказательство.

1. $\overline{B} \to \overline{A}$ – гипотеза.
2. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$ – по схеме аксиом 3.
3. $(\overline{B} \to A) \to B$ – по MP из 1,2.
4. $A \to (\overline{B} \to A)$ – по схеме аксиом 1.
5. $A \to B$ – по следствию 4.1. из 3,4.

Таким образом, $\overline{B} \to \overline{A} \vdash A \to B$. Применяя теорему дедукции, получим $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$.
Лемма доказана.

Лемма 4.6. $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Доказательство.

1. $A \to B$ – гипотеза.
2. $\overline{\overline{A}} \to A$ – по лемме 4.3.

3. $\overline{\overline{A}} \to B$ – по следствию 4.1. из 1,2.

4. $B \to \overline{\overline{B}}$ – по лемме 4.4.

5. $\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}$ – по следствию 4.1. из 3,4.

6. $(\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ – по лемме 4.5.

7. $\overline{B} \to \overline{A}$ – по МР из 5,6.

Таким образом, $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$. Применяя теорему дедукции, получим $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.
Лемма доказана.

Лемма 4.7. $\vdash (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

Доказательство.

1. $A \to B$ – гипотеза.

2. $\overline{A} \to B$ – гипотеза.

3. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ – по лемме 4.6.

4. $\overline{B} \to \overline{A}$ – по МР из 1,3.

5. $\overline{B} \to B$ – по следствию 4.1. из 2,4.

6. $(\overline{B} \to \overline{B}) \to ((\overline{B} \to B) \to B)$ – по схеме аксиом 3.

7. $\overline{B} \to \overline{B}$ – по лемме 4.1.

8. $(\overline{B} \to B) \to B$ – по MP из 6,7.

9. B – по MP из 5,8.

Таким образом, $A \to B, \overline{A} \to B \vdash B$. Дважды применив теорему дедукции, получим $\vdash (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.
Лемма доказана.

Лемма 4.8. $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$.

Лемма 4.9. $\vdash A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$.

Доказательство.

1. A – гипотеза.

2. $A \to B$ – гипотеза.

3. B – по MP из 1,2.

Таким образом, $A, A \to B \vdash B$. Дважды применив теорему дедукции, получим $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$. На основании леммы 4.6. запишем формулу $((A \to B) \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$, из которой и $A \to ((A \to B) \to B)$ по следствию 4.1. получим $\vdash A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$.
Лемма доказана.

Начало
Содержание
Приложение
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Закрыть

4.1.5 Непротиворечивость исчислений высказываний.

Обычно аксиоматические теории строят так, чтобы они описывали какие – то математические теории (теорию множеств, теорию групп, теорию натуральных чисел и т.д.). При этом строить аксиоматическую теорию желательно так, чтобы в соответствующей математической теории не было противоречий. А их не будет в том случае, если аксиоматическая теория является непротиворечивой.

Определение 4.7. *Аксиоматческая теория называется непротиворечивой, если в ней из каждой пары формул вида A и $\overline{A}$ невыводимой является хотя бы одна.*

Замечание 4.10. *Формулам аксиоматической теории соответствуют утверждения (истинные или ложные) соотнесенной математической теории. Поэтому, если аксиоматическая теория непротиворечива, то есть из каждой пары формул вида A и $\overline{A}$ хотя бы одна является невыводимой, то это будет означать, что в соответствующей математической теории для каждого утверждения и его отрицания хотя бы одно из этих двух утверждений является ложным. Это как раз и означает, что в математической теории не будет противоречий.*

Проблема непротиворечивости заключается в выяснении того, является ли данная аксиоматическая теория непротиворечивой.

Покажем, что рассматриваемая нами аксиоматическая теория – исчисление высказываний является непротиворечивой.

Замечание 4.11. *Каждую формулу исчисления высказываний можно рассматривать как формулу логики высказываний. Тогда будем говорить, что формула (исчисления высказываний) является тавтологией, если она является тавтологией для логики высказываний.*

Лемма 4.10. *Всякая выводимая формула является тавтологией.*

Доказательство. Выводимой называется последняя формула в выводе. Мы покажем, что не только последняя, но и каждая формула в выводе является тавтологией. Каждая формула вывода получена по одной из схем аксиом или по правилу вывода MP из предшествующих формул. Для каждой схемы аксиом можно построить таблицу истинности и убедиться в том, что эта таблица определяет тавтологию. Если же формулы A и $A \to B$ являются тавтологиями, то в силу теоремы 2.2 и формула B, получаемая по правилу MP, также является тавтологией. Следовательно, каждая формула вывода, в том числе и последняя, является тавтологией.
Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Рассматриваемое исчисление высказываний непротиворечиво.*

Доказательство. Докажем, что из каждых двух формул вида B и $\overline{B}$ хотя бы одна является невыполнимой.

1. B – невыводнима. Теорема в этом случае доказана.

2. B – выводима. Тогда в силу леммы 4.10. B является тавтологией. Формула $\overline{B}$ в этом случае тавтологией быть не может и поэтому в силу той же леммы 4.10. она невыводима.
   Таким образом, из каждых двух формул вида B и $\overline{B}$ хотя бы одна является невыводимой. Следовательно, рассматриваемое исчисление высказываний непротиворечиво.

Теорема доказана.

Замечание 4.12. *Рассмотрим еще один способ доказательства непротиворечивости исчисления высказываний. Покажем, что если исчисление высказываний противоречиво, то в нем выводима любая формула. Действительно, если исчисление высказываний противоречиво, то в нем имеется хотя бы одна пара выводимых формул вида A и $\overline{A}$, то есть $\vdash A$ и $\vdash \overline{A}$. Можно показать, что имеет место выводимость $A, \overline{A} \vdash B$. Тогда из того, что $\vdash \overline{A}$ и $A, \overline{A} \vdash B$ по свойству 4 получим $A \vdash B$. Еще раз применив это свойство к $\vdash \overline{A}$ и $A \vdash B$ получим $\vdash B$. Таким образом, в противоречивом исчисление высказываний выводима* *любая формула B. Поэтому, если исчисление высказываний непртиворечиво, то в нем имеется хотя бы одна невыводимая формула. В силу этого для доказательства непротиворечивости исчисления высказываний достаточно указать хотя бы одну невыводимую формулу. В ее качестве можно взять, например, формулу $A \to B$. Она невыводима, поскольку не является тавтологией.*

4.1.6 Полнота исчисления высказываний.

В этом параграфе рассмотрим три вида понятия полноты исчисления высказываний: в широком смысле, узком смысле и абсолютную полноту.

Определение 4.8. *Исчисление высказываний называется полным в широком смысле, если в нем выводимы все формулы, которые в логике высказываний яляются тавталогиями.*

Покажем, что рассматриваемое исчисление высказываний является полным в широком смысле. Для этого нам понадобится вспомогательная лемма, но прежде введём следующие обозначения. Через $g(A)$ обозначим число символов $\to$ и $-$ в формуле A. Например, если $A = B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1})$, то $g(A) = 3$.

Пусть $\nu \in \{0, 1\}$. Тогда $A^\nu = \begin{cases} A, \nu = 1 \\ \overline{A}, \nu = 0. \end{cases}$

Теперь сформулируем лемму.

Лемма 4.11. *Пусть A - формула, а $B_1, B_2, \ldots, B_m$ - совокупность всех символов первой группы алфавита, которые входят в формулу A. Придадим $B_1, B_2, \ldots, B_m$ соответственно истинностистные значения $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ и значение, которое примет при этом формула A, обозначим через ν. Тогда*

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, \ldots, B_m^{\nu_m} \vdash A^{\nu}. \qquad (4.1)$$

Прежде, чем доказывать лемму, поясним её смысл на примере. Пусть формула A имеет вид $B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1})$. Тогда для каждой строки таблицы истинности формулы A лемма 4.9 утверждает соответствующую выводимость:

B_1	B_2	$B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1})$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{B_1}, \overline{B_2} \vdash B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1}).$$

$$\overline{B_1}, B_2 \vdash B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1}).$$

$$B_1, \overline{B_2} \vdash B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1}).$$

$$B_1, B_2 \vdash \overline{B_1 \to (B_2 \to \overline{B_1})}.$$

Перейдем теперь к доказательству леммы и проведём его по принципу математической индукции относительно $g(A)$.

1. $g(A) = 0$. Это значит, что формула A символов $\to$ и $-$ не содержит и поэтому имеет вид B_1. В этом случае требуемое утверждение $B_1 \vdash B_1$ следует из свойства 1.

2. Пусть для всех формул, содержаших не более чем k символов $\to$ и $-$, лемма выполняется. Докажем лемму для формулы A такой, что $g(A) = \ k + \ 1$.

Для формулы A возможны два случая.

Случай 1. $A = \overline{B}$. Так как $g(A) = k+1$ и $A = \overline{B}$, то $g(B) = k$. Поэтому по индуктивному предположению лемма для формулы B выполняется, то есть

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash B^w \tag{4.2}$$

Случай 1.1. $w = 0$. Поскольку формула B на наборе $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m$ принимает значение $w = 0$, то формула $A = \overline{B}$ на этом же наборе примет значение $\nu = 1$. Тогда из (4.2) получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{B} \tag{4.3}$$

так как $w = 0$. Подставляя в (4.3) A вместо $\overline{B}$ получим (4.2), поскольку $\nu = 1$.

Случай 1.2. $w = 1$. Тогда на наборе $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m$ формула $A = \overline{B}$ примет значение $\nu = 0$. Поскольку $w = 1$, то из (4.2) получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash B \tag{4.4}$$

Теперь из (4.4) и леммы 4.4. $\vdash B \to \overline{\overline{B}}$ по правилу MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{\overline{B}} \tag{4.5}$$

Откуда

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{A} \tag{4.6}$$

так как $A = \overline{B}$. А это и есть (4.1), учитывая, что $\nu = 0$.

Случай 2. $A = B \to C$. Так как $g(A) = k + 1$ и $A = B \to C$, то $g(B) \leq k$ и $g(C) \leq k$. Поэтому в силу индкутивного предположения получаем

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash B^{w_1} \tag{4.7}$$

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash C^{w_2} \tag{4.8}$$

Случай 2.1. $w_1 = 0$. Это значит

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{B} \tag{4.9}$$

На основании леммы 4.8. имеет место выводимость $\vdash \overline{B} \to (B \to C)$, из которой и (4.9) по правилу MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash B \to C \tag{4.10}$$

Поскольку формула B на выборе $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m$ принимает значение $w = 0$, то на том же наборе формула $A = B \to C$ примет значение $\nu = 1$. Поэтому, подствив в (4.10) вместо $B \to C$ формулу A получим (4.1), так как $\nu = 1$.

Случай 2.2. $w_2 = 1$, то есть

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash C \tag{4.11}$$

Этот случай рассматривается аналогично случаю 2.1. Отличие лишь в том, что вместо формулы $\overline{B} \to (B \to C)$, записанной по лемме 4.8., используется формула $C \to (B \to C)$, записанная по схеме аксиом 1.

Случай 2.3. $w_1 = 1, w_2 = 0$. В силу этих условий из (4.7) и (4.8) получаем

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash B \tag{4.12}$$

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{C} \tag{4.13}$$

На основании леммы 4.9. запишем формулу
$B \to (\overline{C} \to \overline{B \to C})$, из которой и (4.12) по правилу MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{C} \to \overline{B \to C} \tag{4.14}$$

Теперь из (4.13) и (4.14) по правилу MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash \overline{B \to C} \tag{4.15}$$

В силу условия случая 2.3. формулы B и C на наборе $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m$ принимают соответственно значения $w_1 = 1$ и $w_2 = 0$. Тогда на этом же наборе формула $A = B \to C$ примет значение $\nu = 0$. Подставив теперь в (4.15) A вместо $B \to C$ получим (4.1), поскольку $\nu = 0$. Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Если формула исчисления высказываний является тавтологией, то она выводима.*

Доказательство. Пусть формула A является тавтологией и пусть $B_1, B_2, ..., B_m$ – совокупность всех символов первой группы алфавита, входящих в формулу A. На основании леммы 4.11. имеет место выводимость

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_m^{\nu_m} \vdash A \tag{4.16}$$

В (4.11) $\nu = 1$, поскольку формула A является тавтологией и поэтому всегда принимает значение $\nu = 1$. Применив к (4.16) теорему дедукции получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_{m-1}^{\nu_m - 1} \vdash B_m^{\nu_m} \to A \tag{4.17}$$

При $\nu_m = 1$ и $\nu_m = 0$ из (4.17) получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_{m-1}^{\nu_m - 1} \vdash B_m \to A \tag{4.18}$$

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, ..., B_{m-1}^{\nu_m - 1} \vdash \overline{B_m} \to A \tag{4.19}$$

На основании леммы 4.7. запишем формулу $(B_m \to A) \to ((\overline{B_m} \to A) \to A)$, применив к которой и (4.18) правило вывода MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, \ldots, B_{m-1}^{\nu_m - 1} \vdash (\overline{B_m} \to A) \to A \tag{4.20}$$

Наконец, применив к (4.19) и (4.20) правило вывода MP получим

$$B_m^{\nu_1}, B_m^{\nu_2}, \ldots, B_{m-1}^{\nu_m - 1} \vdash A \tag{4.21}$$

Таким образом, имея утверждение о выводимости (4.16), мы получим утверждение о выводимости (4.21). Применив еще $m-1$ раз такие же рассуждения мы получим $\vdash A$. Теорема доказана.

Таким образом, если тавтология логики высказываний не содержит символов $\vee, \wedge, \leftrightarrow$, то на выводима. Возникает ворос: как рассматривать выводимость формул, содержащих символы $\vee, \wedge, \leftrightarrow$. Ведь понятие выодимости определено тольо для формул с символами $\to$ и $-$. В этом случае сокращения:

$$A \vee B \text{ означает } \overline{A} \to B \tag{4.22}$$

$$A \wedge B \text{ означает } \overline{A \to \overline{B}} \tag{4.23}$$

$$A \leftrightarrow B \text{ означает } \overline{(\overline{A} \to B) \to \overline{(\overline{B} \to A)}} \tag{4.24}$$

Докажем лемму, позволяющую рассматривать выводимость формул, имеющих символы $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.

Лемма 4.12. *Если формула A содержит хотя бы один из символов $\vee, \wedge, \leftrightarrow$, то она является тавтологией тогда и только тогда, когда формула B, полученная из A при помощи замен (4.22) - (4.24), является выводимой.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда формула A содержит только один символ из множества $\{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$. Пусть это будет, например, символ $\wedge$ и пусть этот символ связывает формулы P и Q. В формулах A вместо $P \wedge Q$ подставим $\overline{P \to \overline{Q}}$ и полученную формулу обозначим через B. В силу теоремы 1.1. формула $(P \wedge Q \leftrightarrow \overline{P \to \overline{Q}}) \to (A \leftrightarrow B)$ является тавтологией и поэтому формулы A и B будут логически эквивалентными, поскольку логически эквиваленты формулы $P \wedge Q$ и $\overline{P \to \overline{Q}}$. Так как формулы A и B логически эквивалентны, то B является тавтологией тогда и только тогда, когда тавтологией является A. В силу леммы 4.10 и теоремы 4.3. A является тавтологией тогда и только тогда, когда A выводима.

Случай, когда в формуле A содержится $k > 1$ символов $\vee, \wedge, \leftrightarrow$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 4.4. *Рассматриваемое исчисление высказываний является полным в широком смысле.*

Определение 4.9. *Исчисление высказываний называется полным в узком смысле, если, присоединив его к схемам аксиом любую недоказуемую формулу, получим противоречивое исчисление высказываний.*

Замечание 4.13. *Можно показать, что рассматриваемое исчисление высказываний является полным в узком смысле.*

Определение 4.10. *Исчисление высазываний является абсолютно полным, если для любой формулы A выводима либо она, либо ее отрицание $\overline{A}$.*

Покажем, что рассматриваемое исчисление высказываний не является абсолютно полным. Для этого достаточно привести одну формулу такую, что ни она сама, ни ее отрицание не является выводимой формулой. В качестве такой формулы можно взять $B \to C$. Поскольку ни одна из формул $B \to C$, $\overline{B \to C}$ не является тавтологией, то ни одна из них не является выводимой. Следовательно, рассматриваемое исчисление высказываний не является абсолютно полным.

К рассмотренным вопросам тесно примыкает и вопрос о разрешимости исчисления высказываний.

Определение 4.11. *Исчисление высказываний называется разрешимым, если имеется метод (алгоритм), позволяющий для любой данной формулы установить, выводима она или нет.*

Рассматриваемое исчисление высказываний является разрешимым. Действительно, формула выводима тогда и только тогда, когда она является товтологией. Поэтому для определения выводимости данной формулы достаточно построить таблицу истинности и посмотреть является ли формула тавтологией.

4.2 Практическая часть

Упражнения

1. Являются ли следующие конечные последовательности формулами?

   (a) $(A \to B) \to (B \to A)$;

   (b) $A \to B) \to$;

   (c) $\to A$;

   (d) $(A \to B(\to B$;

   (e) $(A \to B) \to (A \to (B \to A))$.

2. Получены ли следующие формулы по схемам аксиом?

   (a) $(A \to B) \to (B \to (A \to B))$;

   (b) $(\bar{A} \to \bar{B}) \to ((A \to B) \to (\bar{A} \to \bar{B}))$;

   (c) $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$;

   (d) $(A \to B) \to A$;

   (e) $(\bar{\bar{A}} \to \bar{B}) \to ((\bar{\bar{A}} \to \bar{B}) \to \bar{A})$;

   (f) $(\bar{A} \to \bar{\bar{B}}) \to ((\bar{A} \to \bar{B}) \to A)$.

3. Можно ли применить правило вывода MP к следующим формулам?

   (a) $A \to B$ и $(A \to B) \to A$;

   (b) $A \to (B \to A)$ и A;

   (c) $(A \to B) \to A$ и A;

   (d) $A \to B$ и B.

4. Является ли выводом следующая последовательность формул:

   (a) $A \to (\bar{B} \to A)$;

   (b) $A \to (\bar{B} \to A), A, \bar{B} \to A$;

   (c) $(\bar{A} \to \bar{B})((\bar{A} \to B) \to A), ((\bar{A} \to \bar{B}) \to ((\bar{A} \to B) \to A)) \to (A \to ((\bar{A} \to \bar{B}) \to ((\bar{A} \to B) \to A))), A \to ((\bar{A} \to \bar{B}) \to (\bar{A} \to B) \to A), (\bar{A} \to \bar{B}) \to ((\bar{A} \to B) \to A)$;

   (d) $\bar{A} \to (A \to \bar{A}), (\bar{A} \to (A \to \bar{A})) \to ((\bar{A} \to A)(\bar{A} \to \bar{A})), (\bar{A} \to A) \to (\bar{A} \to \bar{A})$;

   (e) $A \to (B \to C), A, B \to C, B, C$.

5. Показать, что в любом выводе каждая формула является выводимой.

6. Какими способами из данного вывода формулы B можно получить новый вывод (отличный от данного) этой же формулы B.

7. Выводами из каких гипотез являются последовательности формул из упражнения 4.

8. Показать, что любая конечная последовательность формул является выводом не последней формулы из соответствующего множества гипотез.

9. Какими способами из данного вывода формулы A из множества гипотез Γ можно получить новый вывод (отличный от данного) этой же формулы A из этого же множества гипотез Γ.

10. Ниже дается вывод формулы $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. Пояснить, на каком основании записана каждая формула вывода.

   (a) $(B \to C) \to (A \to (B \to\ ))$;

   (b) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

   (c) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to))))$;

   (d) $(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;

   (e) $((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))) \to (((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$;

   (f) $((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;

(g) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

11. Доказать:

(a) $\vdash (\bar{A} \to A) \to A$;

(b) $A, A \to B \vdash B$;

(c) $A, \bar{A} \vdash B$.

12. Доказать:

(a) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$;

(b) $\vdash A \to (B \to B)$;

(c) $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$;

(d) $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$.

(e) $\vdash \bar{\bar{A}} \to (A \to A)$.

(f) $\vdash (A \to \bar{B}) \to (B \to \bar{A})$.

(g) $\vdash (\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to A)$.

(h) $\vdash (A \to B) \to (\overline{A \to \bar{C}} \to \overline{B \to \bar{C}})$.

(i) $\vdash (A \to B) \to ((\bar{A} \to C) \to \bar{B} \to C))$.

(j) $\vdash (A \to B) \to (\overline{C \to \bar{A}} \to \overline{C \to \bar{B}})$.

(k) $\vdash (A \to B) \to ((C \to \bar{B}) \to (C \to \bar{A}))$.

(l) $\vdash (A \to B) \to ((\bar{C} \to A) \to (\bar{C} \to B))$.

(m) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to \overline{B \to C})$.

(n) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.

4.3 Контрольные тесты

1. Схемой аксиом 1 является:

   (a) $A \to (A \to B)$;

   (b) $A \to (B \to A)$;

   (c) $(A \to B) \to A$;

   (d) $(A \to A) \to B$.

2. Схемой аксиом 2 является:

   (a) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B)$;

   (b) $(A \to (C \to B)) \to ((A \to B) \to (A \to C)$;

   (c) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)$;

   (d) $(A \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to (A \to A)$.

3. Схемой аксиом 3 является

   (a) $(\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to \bar{A}) \to B)$;

   (b) $(\bar{B} \to A) \to ((\bar{B} \to \bar{A}) \to B)$;

   (c) $(\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to A) \to B)$;

   (d) $(A \to \bar{B}) \to ((\bar{A} \to B) \to B)$.

4. Правилом вывода МР является:

(a) из B и $A \to B$ получаем B;

(b) из A и $A \to B$ получаем B;

(c) из A и $B \to A$ получаем B;

(d) из A и $A \to B$ получаем A.

5. Последовательность $A \to B$, $B \to C$, $A \to (B \to A)$, A, $B \to A$ является выводом формулы $B \to A$ из гипотез Γ, где Γ есть:

(a) $\{A\}$;

(b) $\{A, A \to B\}$;

(c) $\{A \to B, A, B \to C\}$;

(d) $\{A, B \to C, A \to B, B \to A\}$.

6. Теорема дедукции формулируется следующим образом:

(a) если $\Gamma,\ A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$;

(b) если $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \to B$;

(c) если $\Gamma,\ A \vdash B$, то $\Gamma,\ B \vdash A$;

(d) если $\Gamma,\ B \vdash A$, то $\Gamma,\ A \vdash B$.

7. Следствие 1 из теоремы дедукции формулируется следующим образом:

(a) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$;

(b) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;

(c) $A \to C, B \to C \vdash A \to B$;

(d) $A \to (C \to B), C \vdash A \to B$.

8. Исчисление высказываний является непротиворечивым, если в нем:

   (a) из каждой пары формул вида A и $\bar{A}$ выводимой является хотя-бы одна;

   (b) из каждой пары формул вида A и $\bar{A}$ невыводима хотябы одна;

   (c) каждая тавтология является выводимой формулой;

   (d) каждая тавтология является невыводимой формулой.

9. Какая из следующих формул является выводимой?

   (a) $A \to B$;

   (b) $\bar{A} \to B$;

   (c) $A \to A$;

   (d) $\bar{A} \to A$.

10. Последовательность формул, являющаяся выводом, остается выводом, если:

    (a) в ней поменять местами две формулы, получаемые по правилу вывода;

(b) в ней поменять местами две формулы, получаемые по схемам аксиом;

(c) в ней поменять местами формулу, получаемую по схеме аксиом, и формулу, получаемую по правилу вывода;

(d) в последовательности добавить на первое место формулу, получаемую по схеме аксиом.

Раздел 5
Приложение

5.1 Основные теоремы

5.1.1 Теоремы логики высказываний.

Теорема 5.1. *Формулы P и Q равносильны тогда и только тогда, когда формула $P \leftrightarrow Q$ является тавтологией.*

Теорема 5.2. *Если формулы A и $A \to B$ являются тавтологиями, то и формула B также являются тавтологией.*

Теорема 5.3. *Пусть в формулу P входят буквы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и пусть формула Q получена из P заменой букв $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно формулами $B_1, B_2, \ldots, Bn$. Тогда если формула P является тавтологией, то и формула Q также будет является тавтологией.*

Теорема 5.4. *Если формулы $A(X_1, \ldots, X_n)$ и $B(X_1, \ldots, X_n)$ равносильны, то и двойственные им формулы $A^*(X_1, \ldots, X_n)$ и $B^*(x_1, \ldots, X_n)$ также равносильны.*

Теорема 5.5. *Всякую формулу, тождественно не равную нулю, можно единственным образом представить в виде СДНФ.*

Теорема 5.6. *Всякую формулу тождественно не равную 1, можно единственным образом представить в виде СКНФ.*

Теорема 5.7. *Если формула* $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ *представленна в виде СКНФ и состоит из* k *конъюктивных членов, то всевозможными логическими следствиями формул* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *являются только лишь следующие формулы:*

– каждая из k *конъюктивных членов;*

– каждые два, три, четыре, и т.д. k *различных конъюктивных членов, соединнными символами* $\wedge$.

5.1.2 Теоремы логики предикатов

Теорема 5.8. *Любую формулу логики предикатов можно преобразовать в равносильную ей предваренную нормальную формулу.*

5.2 Законы математической логики

Закон	Название закона
$A \wedge (A \to B) \to B$	закон заключения;
$A \wedge B \to A$ $A \wedge B \to B$	законы удаления конъюнкции;
$A \to A \vee B$ $B \to A \vee B$	законы введения дизъюнкции;
$(A \vee B) \wedge \overline{B} \to A$	закон удаления дизъюнкции;
$A \to \overline{\overline{A}}$	закон введения двойного отрицания;
$\overline{\overline{A}} \to A$	закон удаления двойного отрицания;
$(A \to B) \wedge (B \to A) \to$ $\to (A \leftrightarrow B)$	закон введения эквиваленции;
$(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$ $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$	законы удаления эквиваленции;
$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$	закон контрапозиции;
$(\overline{A} \to B) \wedge (\overline{A} \to \overline{B}) \to A$	закон доказательства от противного;
$(A \to B) \wedge (B \to C) \to$ $\to (A \to C)$	– закон силлогизма;
$(A \to C) \wedge (B \to C) \to$ $\to (A \vee BrightarrowC)$	закон сложения посылок;
$(A \to B) \wedge (A \to C) \to$	

$\to (A \to B \wedge C)$	закон умножения заключений;
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to$ $\to (A \leftrightarrow C)$	– закон транзитивности эквиваленции.

5.3 Список важнейших равносильностей

5.3.1 Список важнейших равносильностей логики высказываний

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$
2. $A \wedge A \equiv A$
3. $A \vee A \equiv A$
4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
5. $A \vee B \equiv B \vee A$
6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
7. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \vee C)$
9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
10. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
11. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$
12. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$
13. $A \vee \overline{A} \equiv 1$
14. $A \wedge 1 \equiv A$
15. $A \vee 0 \equiv A$
16. $A \wedge 0 \equiv 0$
17. $A \vee 1 \equiv 1$
18. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
19. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
20. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \equiv A$
21. $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \equiv A$
22. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \wedge B$
23. $A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$
24. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A\ )$

5.3.2 Список важнейших равносильностей логики предикатов

25. $\overline{\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \exists x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;
26. $\overline{\exists x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \forall x_i \overline{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;
27. $\forall x_i P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \forall x_i Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$

$\forall x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots,x_n))$;

28. $\exists x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee\exists x_i Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv\exists x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q(x_1,x_2,\ldots,x_n))$;

29. $\forall x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q\equiv\forall x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q)$;

30. $\forall x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q\equiv\forall x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q)$;

31. $\exists x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q\equiv\exists x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q)$;

32. $\exists x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q\equiv\exists x_i(P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q)$; (где Q не содержит x_i пункты 29, 30, 31, 32)

33. $\forall x_i\forall x_j P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv\forall x_j\forall x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

34. $\exists x_i\exists x_j P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv\exists x_j\exists x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

35. $\forall y P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

36. $\exists y P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

37. $\forall x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv\forall y P(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$;

38.$\exists x_i P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv\exists y P(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$. Следствие о знаке отрицания

5.4 Терминологический словарь

Конъюнкцией называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \wedge B$. Высказывание $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A,B истинны.

Дизъюнкцией называют операцию, которая двум высказываниям A,B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \vee B$. Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A,B ложны.

Импликацией называют операцию, которая двум высказываниям A, B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \to B$. Высказывание $A \to B$ ложно лишь тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Эквиваленцией называют операцию, которая двум высказываниям A,B ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$. Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно лишь тогда, когда оба высказывания A,B истинны или оба ложны.

Отрицанием называют операцию, которая высказыванию A ставит в соответствие высказывание, обозначаемое $\overline{A}$.
Определение формулы логики высказываний:

1. Всякая буква обозначающая высказывание (конкретное или произвольное) является **формулой**.

2. Символы 0 и 1 являются формулами.

3. Если P - формула, то $\overline{P}$ - формула.

4. Если P и Q - формулы, то $(P \wedge Q)$,$(P \vee Q)$,$(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ - формулы.

5. Формулами являются только те выражения, которые можно получить при помощи п. 1-4.

Определение формулы логики предикатов:

1. Каждая формула логики высказываний является также и формулой логики предикатов.

2. Каждый символ, обозначающий предикат, является формулой.

3. Если P – формула, то следующее выражение – тоже формула: $\overline{P}$, $\forall x(P), \exists x(P)$.

4. Если P и Q – формулы, то выражения $(P \wedge Q), (P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow Q)$, – тоже формулы.

5. Других формул нет.

Определение 5.1. *Пусть даны две формулы P и Q, и пусть* $X_1, X_2, ..., X_n$ *- совокупность всех различных букв, входящих хотя бы в* *одну из этих формул. Тогда формулы P и Q называются* **равносильными**, *если при любом наборе значений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ эти формулы принимают одинаковые истинностные значения.*

Определение 5.2. *Формула называется элементарной конъюнкцией или логическим произведением, если она удовлетворяет седующим требованиям:*

1. *В формуле могут быть символы только двух операции: $\wedge$ и $-$.*
2. *Символ $-$ относится только к элементарным высказываниям.*

Определение 5.3. *Формула называется элементарной дизъюнкцией или логической суммой, если она удовлетворяет следующим требованием:*

1. *В формуле могут быть символы только двух операций: $\vee$ и $-$.*
2. *Символ $-$ относится только к элементарным высказываниям.*

Определение 5.4. *Формула называется тавтологией, если она принимает значение 1 при любом наборе значений входящих в нее букв.*

Определение 5.5. *Формула называется противоречием, если при любом наборе значений входящих в нее букв она принимает значение 0.*

Определение 5.6. *Формула называется выполнимой, если имеется хотя бы один набор значений букв, входящих в формулу, на котором формула принимает значение 1.*

Определение 5.7. *Формула B называется двойственной к формуле A, если B можно получить из A путем замены всех символов $\vee$ на $\wedge$ и на оборот, а также всех символов 1 на 0 и 0 на 1.*

Определение 5.8. *Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).*

Определение 5.9. *ДНФ называется совершенной (СДНФ), если каждая буква формулы входит в каждый дизъюнктивный член ровно один раз (с отрицанием или без него).*

Определение 5.10. *Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$, если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ является тавтологией.*

Определение 5.11. *Предикатом называется функция, множеством значений которой являются истинностные значения 0 и 1. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикат определенный на множестве M. Тогда предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется*

- *выполнимым, если имеется хотя бы один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяющий предикату P;*

- *тождественно-истинным, если всякий набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяет предикату P;*

- *тождественно-ложным, если ни один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, не удовлетворяет предикату P;*

Определение 5.12. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – предикат определенный на множестве M. Тогда предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется

- *выполнимым*, если имеется хотя бы один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяющий предикату P;

- *тождественно-истинным*, если всякий набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, удовлетворяет предикату P;

- *тождественно-ложным*, если ни один набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений из M, не удовлетворяет предикату P;

Определение 5.13. *Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда $P(x)$ истинно для любого $x \in M$ и ложно в противном случае. Запись "$\forall x P(x)$" читают "для любого $x P(x)$ истинно". Символ $\forall x$ называется* **квантором всеобщности**.

Определение 5.14. *Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на некотором множестве M. Тогда под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое истинно тогда, когда существует хотя бы одно $x \in M$ для которого $P(x)$ истинно и ложно в противном случае. Запись $\exists x P(x)$ читают "существует x, для которого $P(x)$ истинно". Знак $\exists$ называется* **квантором существования**.

Определение 5.15. *В формулах $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ формуле A называется областью действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$ соответственно.*

Определение 5.16. *Вхождение переменной в данную формулу называется связанным, если оно следует за знаком квантора $\forall$ или $\exists$ или находится в области действия какаго-либо квантора по этой переменной. Вхождение переменной не являющиеся связанными, называются свободными.*

Определение 5.17. *Если имеется хотя бы один набор значений переменных из множества M, на котором значение формулы A равно 1, то формула называется выполнимой на множестве M.*

Определение 5.18. *Формула называется выполнимой, если имеется множество, на котором она выполнима.*

Определение 5.19. *Если значение формулы на любом наборе значений из множества M равно 1, то она называется тождественно-истинной на множестве M.*

Определение 5.20. *Если формула тождественно-истинна на любом множестве, то она называется общезначимой.*

Определение 5.21. *Пусть даны две формулы A и B, определенные на одном и том же множестве M. Формулы A и B называются равносильными на множестве M, если на любом наборе значений переменных они принимают одинаковые значения. В этом случае пишут $A \equiv_M B$.*

Определение 5.22. *Две формулы A и B называются равносильными, если они равносильны на любом множестве. В этом случае пишут $A \equiv B$.*

Определение 5.23. *Формула, в которой из операций логики высказываний содержатся лишь $\wedge$, $\vee$, $-$, а знаки отрицания относятся только к простым высказываниям и предикатам, называется предваренной формулой.*

Определение 5.24. *Предваренная формула называется* **нормальной**, *если в ней нет кванторов или все кванторы вынесены за скобки.*

Литература

Основная

1. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – Новосибирск, 2008.

2. Шапорев, С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. – СПб., 2005.

3. Игошин, В.Н. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.Н. Игошин. – М., 2007.

4. Игошин, В.Н. Математическая логика и теория алгоритмов / В.Н.Игошин. – М., 2004.

5. Столяр, А.Л. Математическая логика / А.Л. Столяр. – Мн., 1991.

6. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э.Мендельсон. – М., 1976.

7. Мощенский, А.В. Курс математической логики / А.В.Мощенский, В.А.Мощенский. – Мн., 2001.

8. Колмогоров, А.Н. Математическая логика / А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. – М., 2006.

Дополнительная

1. Верещагин, Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления / Н.К.Верещагин, А.М.Шень. – М., 2008.

2. Будько, А.Е. Дискретная математика и математическая логика. Учебно-методические рекомендации для студентов математического факультета./ А.Е.Будько, О.Н.Заверач. – Брест, 2003.

3. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. – М., 1980.

4. Никольская, И.Л. Математическая логика / И.Л.Никольская. – М., 1981.

5. Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С.Новиков. – М., 1973.

6. Тимофеева, И.Л. Математическая логика. Курс лекций / И.Л.Тимофеева. – М., 2007.