УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Математическая экономика

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета*

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2020

Авторы:

Марзан Сергей Андреевич — доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Сендер Александр Николаевич — заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Редактор:

Сендер Николай Никитич — заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Рецензенты:

Матысик О.В. (содержательная экспертиза) — доцент кафедры прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Парфомук С.И. (программно-техническая экспертиза) — заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета

СОДЕРЖАНИЕ

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

Закрыть

Примерный тематический план по дисциплине “Математическая экономика”

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ЛБ
I	**Математическая экономика как самостоятельная дисциплина**	**2**	
1	Основные этапы становления математической экономики.	1	
2	Участники экономики и их задачи. Предмет математической экономики	1	
II	**Отношение предпочтения и функция полезности**	**2**	
1	Отношение предпочтения. Задача потребления	1	
2	Функция полезности.	1	
III	**Предельный анализ и понятие эластичности в теории потребления**	**2**	
IV	**Оптимизационная модель задачи потребительского выбора**	**2**	4
V	**Функция спроса и ее свойства**	**2**	
VI	**Анализ влияния дохода и цен на спрос**	**2**	
VII	**Уравнение Слуцкого**	**2**	
VIII	**Основные элементы модели производства**	**2**	
IX	**Пространство затрат и производственная функция**	**2**	
X	**Предельный анализ и эластичность в теории производства**	**2**	
XI	**Анализ влияния дохода и цен на спрос**	**2**	4
XII	**Математические модели задачи фирмы**	**2**	
XIII	**Решение задачи фирмы. Геометрическая иллюстрация**	**2**	4
XIV	**Анализ влияния цен на объемы затрат и выпуска. Основное уравнение фирмы**	**2**	

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ЛБ
XV	**Экономическое равновесие. Содержательный аспект**	**2**	
XVI	**Рыночный спрос и рыночное предложение. Условия совершенной конкуренции**	**2**	
XVII	**Описание общей модели Вальраса**	**2**	
XVIII	**Модель Эррое-Дебре. Существование конкурентного равновесия**	**2**	
XIX	**Модель регулирования цен и устойчивость конкурентного равновесия**	**2**	**4**
XX	**Модель экономического благосостояния**	**2**	
XXI	**Моделирование ценообразования в монополии**	**2**	
XXII	**Конкурентное равновесие в модели с фиксированными доходами**	**2**	
1	Экзогенные и эндогенные величины.	0,5	
2	Модель конкурентного равновесия с фиксированными доходами.	1	
3	Конкурентное полуравновесие.	0,5	
XXIII	**Формирование цен для случая нескольких товаров. Метод Самуэльсона**	**2**	**2**
XXIV	**Модель межотраслевого баланса**	**1**	**4**
XXV	**Модель межотраслевого баланса в стоимостной форме**	**1**	**4**
XXVI	**Продуктивность балансовой модели**	**2**	
XXVII	**Цены в модели межотраслевого баланса**	**2**	
XXVIII	**Торговые и транспортные услуги**	**1**	
XXIX	**Межотраслевой баланс конкурентно-импортного типа**	**1**	**4**
XXX	**Модель внешнеэкономических связей**	**2**	
XXXI	**Динамические многоотраслевые модели**	**1**	
XXXII	**Модель динамического межотраслевого баланса**	**1**	
XXXIII	**Модель Неймана**	**2**	
XXXIV	**Существование равновесия в модели Неймана**	**2**	

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ЛБ
XXXV	Равновесие в модели динамического МОБ	2	4
XXXVI	Магистральная теория	2	
XXXVII	Теорема и магистрали Моришимы	2	
	Итого	68	34

ЛЕКЦИЯ 1

Математическая экономика как самостоятельная наука

1.1 Основные этапы становления математической экономики

МЭ долго считалась не самостоятельной дисциплиной, а частью общей экономической теории. Но достижения математики, проникновение ее во все сферы жизнедеятельности, бурное развитие компьютерных технологий привели к тому, что хороший экономист, будь он теоретиком или практиком, не может обойтись без свободного владения известными математическими методами и без их применения к экономическим процессам. Более того, проникновение математики в область экономики привело к возникновению новых научных направлений как в экономике, так и в самой математике. Это взаимообогащение двух областей человеческой деятельности и их интенсивное совместное развитие дают полное право считать математическую экономику самостоятельной дисциплиной.

Математическая экономика - дисциплина, в которой рассматриваются вопросы математического моделирования экономических процессов и применения математических методов к решению и анализу экономических задач.

Считается, что исторически впервые методы математического моделирования применены в 1758 г. доктором короля Людовика XV Ф. Кенэ (опубликовал первый вариант работы «Экономические таблицы», в работе сделал попытку описать процесс общественного воспроизводства с применением математических методов исследования).

Более глубокое применение математических методов в экономике началось с работы французского математика О. Курно (19 век). Именно его считают родоначальником МЭ. И к концу 19 века складываются самостоятельные математические направления в экономике. Многие из них исходят из так называемой неоклассической школе, проповедующей теорию предельной полезности (маржинализм). Суть: конкуренция устанавливает равновесие между производством и потреблением. Представитель этой школы Л. Вальрас, чья теория общего конкурентного равновесия в течение многих лет была основным движущим фактором в развитии математической экономики.

В 20 веке продолжалось бурное внедрение математических методов в экономические процессы. Интерес представляют работы по построению и использованию **производственных функций**. В начале века были предложены ПФ для анализа сельскохозяйственного производства США. Американские математики Ч. Кобба и П. Дуглас опубликовали статью «Теория производства», в которой на основе данных по обрабатывающей промышленности США за 1899-1922 гг. эмпирическим путем было определено влияние затрачиваемого капитала и трудовых ресурсов на объем выпускаемой продукции. По настоящее время ПФ Кобба-Дугласа широко применяется в научной литературе.

В 1932 году появилась многосекторная модель расширяющейся экономики Дж. фон Неймана, которая положила начало магистральной теории.

Огромный вклад в развитие МЭ внес В. Леонтьев. В 1936 году он опубликовал основные идеи модели «затраты-выпуск», основанные на модели экономического равновесия Л. Вальраса. В последние годы сформировались новые направления в математике - линейное программирование, теория оптимального управления, динамическое программирование, теория игр и др., - которые нашли широкое применение в экономических исследованиях.

1.2 Участники экономики и их задачи. Предмет математической экономики

Слово «экономика» и производные от него имеют смысл науки о ведении домашнего хозяйства. Отсюда основное содержание экономической науки составляют вопросы рационального ведения хозяйства на различных уровнях (от семьи до страны).

Одной из основных задач человека всю его сознательную жизнь было наиболее рациональное распределение важнейших доступных ему ресурсов для удовлетворения своих потребностей.

Задача рационального ведения хозяйства с математической точки зрения может рассматриваться как некоторая задача оптимизации: найти такие значения некоторых переменных (доступных ресурсов), которые доставляют максимум (или минимум) некоторой функции (математический идентификатор поставленной цели).

В зависимости от решаемой задачи любая хозяйственная единица может выступать в той или иной роли. Обычно выделяют 4 наиболее типичных участников экономики: потребители, производители, профессиональные союзы и правительственные организации.

Под потребителями понимаются отдельные лица или группы лиц, объединенные единым доходом и единой целью: рациональное распределение дохода на потребление.

Под производителем понимаются предприятия, производящие товары для продажи их другим производителям или потребителям и решающие задачу получения максимальной прибыли.

Под товаром понимается любое благо или услуга, которое предназначено для продажи.

Математическая экономика - наука о математическом моделировании экономических процессов и применении математических методов для решения задач рационального ведения хозяйства различными участниками экономики.

ЛЕКЦИЯ 2

Функция полезности и отношение предпочтения

2.1 Отношение предпочтения. Задача потребления

Для получения математической модели задачи потребителя нам нужно формализовать такие понятия как товар, цель потребления товаров, цена товара, бюджет и покупательская способность потребителя.

Мы будем предполагать, что количество каждого товара можно измерять вещественным неотрицательным числом (в штуках, в килограммах, в метрах, в литрах, в человеко-часах и т.д.).Пусть на рынке производится и продается n видов товаров.. Вид товара будем обозначать индексом i, так что $i = 1, ..., n$.Обозначим через x_i количество i-го товара. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ будем называть набором товаров. Если в наборе x для некоторых i $x_i = 0$, то будем говорить, что товар вида i не приобретается данным потребителем. Поэтому множество $R^n_+ = \{x \in R^n | x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$ будем называть пространством товаров. Заметим, что на количество товаров не накладываются ограничения сверху. Иначе говоря, мы предполагаем, что на рынке существует достаточное количество товаров. Иногда в R^n_+ выделяется некоторое подмножество X, как множество реально применяемых товаров, на котором определены интересы данного потребителя. В R^n_+ наборы товаров можно складывать между собой или умножать на неотрицательное число; в R^n_+ вычитание невозможно, если при этом получается отрицательное количество товара. Человек приобретает (покупает) товары с целью максимального удовлетворения своих потребностей. У каждого есть свои вкусы, каждый по-своему оценивает пользу или вред от потребления товара. Поэтому потребитель стремится выбрать в пространстве R^n_+ «лучший» с его индивидуальной точки зрения товар. При сравнении двух наборов x и y одни предпочтут x, другие - y.

Для того чтобы формализовать выбор потребителя с учетом его цели, в пространстве R^n_+ определим (индивидуальное) отношение предпочтения, обозначаемое символом α. При помощи этого отношения любой набор $x \in R^n_+$ можно сравнить с другим набором $y \in R^n_+$. Запись $x\alpha y$ означает, что либо x предпочтительнее y, либо наборы x и y для потребителя безразличны (то есть x по крайней мере так же хорош, как и y). Заметим, что в отношении α набор товаров рассматривается как одно целое (в отличие от векторного неравенства $x \geq y$, понимаемого покомпонентно).

Строгое предпочтение α имеет место, если и только если $x \geq y$, а $y \neq x$ несправедливо.Говорят, что наборы x и y безразличны для данного потребителя (обозначают $\sim$) тогда и только тогда, когда $x\alpha y$ и $y\alpha x$.Индивидуальное отношение $\sim$ можно рассматривать как отображение, которое каждому набору $x \in R^n_+$ ставит в соответствие множество всех тех наборов товаров, которые связаны с x отношением безразличия. Таким образом, отношение безразличия разбивает все пространство $x \in R^n_+$ на классы эквивалентности (безразличия).

Исходя из логики сравнения товаров, потребуем, чтобы отношение удовлетворяло следующим аксиомам:

1. рефлексивность: для любого $x \in R^n_+$справедливо $x\alpha x$
2. транзитивность: для любых $x, y, z \in R^n_+$, таких, что $x\alpha y$, $y\alpha z$ справедливо $x\alpha z$;
3. полнота: для любых $x, y \in R^n_+$ либо $x\alpha y$, $y\alpha x$, либо $x \sim y$.

Кроме того, для отношения безразличия должна иметь место аксиома симметричности: из $x \sim y$ следует $y \sim x$.

Приведем примеры конкретных отношений предпочтения и безразличия.

Пример 2.1. Для сравнения любых наборов $x, y \in R^n_+$, предварительно проведем ранжировку (упорядочение) компонентов этих векторов (то есть видов товаров) по важности для данного потребителя: товар вида i важнее, чем товар вида $i+1, i = 1, ..., n-1$. После этого определим отношение α следующим образом: $x\alpha y$, если выполнено одно из $n+1$ условий:

$$(1)\ x_1 > y_1;$$

$$(2)\ x_1 = y_1, x_2 > y_2;$$

....

$$(n)\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{n-1} = y_{n-1}, x_n > y_n;$$

$$(n+1)\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{n-1} = y_{n-1}, x_n = y_n.$$

Такое отношение называется лексикографическим предпочтением, так как оно определено по правилу составления списка наименований по алфавиту. Самостоятельно покажите, что отношение лексикографического предпочтения удовлетворяет аксиомам 2.1

Пример 2.2. Пусть $X \subset R^n_+$, а $x \in X$ такой набор, что для каждого $y \in X (y \neq x)$ найдется хотя бы один индекс i, для которого $x_i > y_i$. Для такого набора x определим отношение безразличия следующим образом: $x \sim y$, если не имеет место $x_i \geq y_i$ для всех $i = 1, ..., n$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Это отношение безразличия порождает в X множество эквивалентности $\{y \in X | x \sim y\}$ называемое множеством Парето.

Отношение предпочтения на практике выявляется экспериментальным путем, сравнивая наборы товаров попарно и спрашивая потребителя, какой набор он предпочитает. Реально такую работу можно провести в случае небольшого числа товаров. Предпочтение потребителя изменчиво и зависит от многих условий: цен товара, его дохода, имеющегося у него запаса товаров, сезона, состояния здоровья, настроения и т.д. Поэтому нельзя раз и навсегда «прикрепить» за потребителем неизменные принципы предпочтения. Следовательно, при повторном моделировании поведения потребителя его предпочтение нужно формализовать заново «с учетом изменившихся условий». В принципе нет ничего сложного в том, чтобы взять два набора товаров и спросить потребителя, который из них он предлочитаети в результате последовательного опроса найти искомую закономерность. Гораздо сложнее выявить предпочтение целой группы людей или общества, так как невозможно по каждой паре наборов товаров проводить голосование или референдум и ожидать, что результаты будут однозначными. Рассмотрение вопросов «коллективного предпочтения» потребительского сектора мы отложим.

Кроме основных аксиом а1), а2), а3) отношение предпочтения может обладать рядом содержательных свойств. Приведем основные из них:

а4) непрерывность: для любых $x, y \in X$ множество $\{(x, y)|x\alpha y\}$ является открытым подмножеством декартово произведения X х X

а5) ненасыщаемость: для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет $x\alpha y$, а неравенства$x \geq y, x \neq y$, влекут $x\alpha y$;

а6) выпуклость: для любых $x, y \in X$ отношение $x\alpha y$ влечет $\alpha(1-\beta)y\alpha y$, где $0 \leq \beta \leq 1$.

Содержательно непрерывность означает, что если x строго предпочтительнее нее y, то при малом изменении каждого из них отношение

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

строгого предпочтения сохраняется. Как мы увидим в следующем параграфе, ценность этого свойства заключается в том, что непрерывное отношение предпочтения можно заменить (смоделировать) обычной числовой функцией. Примером отношения предпочтения, которое не обладает свойством непрерывности, является лексикографическое предпочтение (см. пример 2.1).

Если все товары хорошего качества, то естественно, большее их количество будет предпочтительнее, чем меньшее. Этот факт и отражен в свойстве ненасыщаемости. Оно означает отсутствие такого набора $x \in X$, что $x\alpha y$ для всех $y \in X$ (отсутствие точки насыщения).

Выпуклость отношения предпочтения означает, что если набор x предпочтительнее набора y, то любая их «смесь» остается предпочтительней чему y.

2.2 Функция полезности

Отношение предпочтения, рассмотренное в предыдущем пункте, является весьма неудобным инструментом изучения потребительского выбора. Оно является больше качественной категорией и не приспособлено для проведения количественных исследований. Поэтому нужен другой механизм, который, с одной стороны, был бы адекватен данному отношению предпочтения, то есть отражал бы все его основные свойства, с другой стороны, являлся бы численным индикатором отношения предпочтения. Таким механизмом и является функция полезности. С функцией работать удобнее, чем с отношением предпочтения, хотя последнее имеет и определенные преимущества. Если отношение предпочтения отражает «склонность» или «желание» потребителя, то функция полезности отражает понятие«выгодности» товаров. Полезность понимается как мера благосостояния и как критерий правильности принимаемых решений. Источником полезности является потребление товара. Термин «полезность» менее индивидуален, чем термин «предпочтение». Действительно, труднее угадать, что человеку хочется, чем определить что ему полезней, так как факт «x полезнее y», в отличии от «x предпочтительнее y», можно оценить по числовой шкале.

Функция полезности должна быть построена с учетом всех тех объективных и субъективных условий, которые влияют на предпочтение потребителя. Например, полезность денег оценивается не только их покупательской способностью. Так, с большой степенью уверенности можно утверждать, что полезность десяти заработанных долларов больше, чем те же десяти долларов найденных случайно на улице. Для наркомана «полезность» набора товаров тем выше, чем больше в нем содержится героина, а для нормального человека - наоборот. При построении функции полезности все эти нюансы, связанные с понятием полезности, учитываются тем обстоятельством, что эта функция строится сугубо на основе отношения предпочтения, то есть каждому отношению предпочтения соответствует своя функция полезности.

Перейдем к строгим определениям.

Определение 2.1. Пусть в R^n_+ определено отношение предпочтения α. Любая функция $U : R^n_+ \to R^1$ такая, что $U(x) \geq U(y)$ тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, называется функцией полезности, соответствующей этому отношению предпочтения.

Если интересы потребителя ограничиваются множеством $X \subset R^n_+$, то функция полезности определяется на этом множестве, $U : X \to R^1$.

В терминах функции полезности отношение безразличия $x\alpha y$ задается равенством $U(x) = U(y)$.

Всегда ли можно представить отношение предпочтения функцией полезности? Можно ли исходя из предпочтения α. найти функцию U, удовлетворяющую определению 2.1? Отвечая на этот вопрос приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для любого отношения предпочтения, определенного и непрерывного в R^n_+, можно построить представляющую его (непрерывную) функцию полезности $U : R^n_+ \to R^1$.

Оказывается, что для любого непрерывного отношения предпочтения можно построить целое семейство функций полезности. Этот факт сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2.2. Пусть $U : R^n_+ \to R^1$ - функция полезности, представляющая отношение предпочтения α. Для любой строго возрастающей функции $f: R^1 \to R^1$ сложная функция (суперпозиция) $U(x) = f(u(x))$ является функцией полезности, так же представляющей это отношение предпочтения α.

Заметим, что для потребителя все эти функции полезности равнозначны. Он не в состоянии отдать предпочтение одной из них перед множеством возможных других, так как все они отражают одно и то же отношение предпочтения. Различие этих функций касается различных «масштабов» измерения полезности и не является принципиальным.

Так как функция полезности должна быть адекватной отношению предпочтения, то для нее можно сформулировать свойства а4), а5), а6). Например, в терминах функции полезности свойство ненасыщаемости читается так:

а'5) для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет неравенство $U(x) \geq U(y)$ и неравенства $x \geq y$,$x \neq y$ влекут $U(x) > U(y)$.

Из этого определения видно, что в случае ненасыщаемости функция U не достигает своего максимума на множестве X: для любого $x \in X$ найдется $y \in X$, который имеет большую полезность чем x.

Аналогом свойства а6) является вогнутость функции полезности:

а'6) для любых $x, y \in XU(\beta x + (1-\beta)y \geq \beta U(x) + (1-\beta)U(y), 0 \leq \beta \leq 1/$.

Если в условии вогнутости имеет место строгое неравенство, то функция полезности называется строго вогнутой. В этом случае, как будет показано далее, выбор потребителя определяется однозначно.

Преимущество функции полезности против отношения предпочтения состоит, в частности, в том, что для анализа потребительского выбора можно использовать мощный аппарат дифференцирования.

Пусть функция полезности и дифференцируема и

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, i = 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Частная производная (2.1) называется предельной полезностью товара вида i. Это есть полезность, получаемая от «дополнительной» доли товара вида i:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{U(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - U(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_i}.$$

Поэтому неравенство (2.1) можно интерпретировать так: для любого набора товаров $x \in R^n_+$ возрастание потребления товара вида i при постоянном уровне потребления других товаров приводит к увеличению полезности. Таким образом, (2.1) - это условие ненасыщаемости, написанное для дифференцируемой функции полезности. Забегая вперед скажем, что именно предельная полезность товара является определяющим цену товара фактором. Здесь нет противоречия с рыночным меха-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

низмом ценообразования, так как при прочих фиксированных условиях спрос на товар определяется его полезностью.

Предположим теперь, что функция U дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные. Для такой функции свойство строгой вогнутости выполнено, если матрица Гессе

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

Напомним, что матрица $\nabla^2 f(x)$ будет отрицательно (положительно) определенной в точке x^0, если

$$(-1)^k \left\|\nabla^2 f(x^0)\right\|_k \geq 0 \left((-1)^k \left\|\nabla^2 f(x^0)\right\|_k \leq 0\right)$$

для всех $k = 1, \ldots, n$. Здесь символом $\left\|\nabla^2 f(x^0)\right\|_k$ обозначен минор k-ого порядка матрицы $\nabla^2 f(x^0)$:

$$\left\|\mathbf{\nabla^2 f(x^0)}\right\|_{\mathbf{k}} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & l \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_k} \\ l \ldots & l \ldots & l \ldots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_1} & l \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} \end{matrix} \right|_{x=x^0}$$

$k = 1, \ldots, n$, где $|\cdot|_{x=x_0}$ – определитель порядка $k \times k$, вычисляемый в точке x^0.

Тогда, в частности, выполнены условия:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0, i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Это неравенство говорит о том, что предельная полезность $\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)$ товара уменьшается по мере того, как продукт потребляется. Неравенства (2.1) и (2.2) отражают хорошо известный в экономической теории закон об убывающей предельной полезности (закон Госсена).

С понятием функции полезности неразрывно связано понятие кривых безразличия, имеющее широкое применение в математической теории потребления.

Определение 2.2. Кривой безразличия для данного набора товаров $x \in R^n_+$ называется геометрическое место точек $y \in R^n_+$, которые находятся в отношении безразличия с этим набором x, то есть множество $\{y \in R^n_+ | U(y) = U(x)\}$.

Так как для всех точек из этого множества полезность одна и та же, то кривые безразличия задаются уравнениями $U(x) = c$, где c – $X \subset R^n_+$ любая $const$. Таким образом, кривая безразличия математически представляется как линия уровня функции полезности. Поэтому для любой функции полезности существует бесконечное множество кривых безразличия (для разных $const$) и они заполняют все пространство R^n_+, образуя так называемую карту безразличия.

Приведем примеры некоторых, наиболее часто применяемых функций полезности и виды их карт безразличия. Эти функции, как показала практика, при определенных условиях достаточно объективно отражают предпочтение потребительского выбора.

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \tag{2.3}$$

где коэффициент b_i является числовой оценкой полезности от потребления единицы товара вида i. Для построения кривых безразличия функции (2.3) в R^2_+ из уравнения

$$x_2 = -\tfrac{b_1}{b_2} x_1 + \tfrac{c}{b_1}$$

При постоянных b_1 и b_2 это есть семейство (по параметру c) параллельных прямых с углом наклона $-\frac{b_1}{b_2}$. Карта кривых безразличия функции (2.3) приведена на рисунке 2.1.

Функция (2.1) учитывает возможность компенсации уменьшения потребления одних товаров другими.

Пример 2.3. Пусть товаром первого вида является кофе, второго – чай, а потребление этих продуктов в количествах x_1 и x_2 дает полезность, равную c, то есть $U(x) = b_1x_1 + b_2x_2 = c$.

Представим, что потребление кофе уменьшилось на α единиц. Тогда полезность упадет до уровня $c - b_1\alpha$. Чтобы компенсировать эту потерю полезности надо увеличить потребление чая на величину β так, чтобы $U(x_1 - \alpha, x_2 + \beta) = c$. Отсюда найдём $\beta = \alpha\frac{b_1}{b_2}$. В результате имеем:

$$u(x_1 - \alpha, x_2 + \beta) = b_1(x_1 - \alpha) + b_2(x_2 + \alpha\tfrac{b_1}{b_2}) = c = u(x_1, x_2)$$

Таким образом, функция (2.3) позволяет определить размер замещения одних товаров другими для того, чтобы полезность оставалась на неизменном уровне.

2. Функция полезности с полным взаимодополнением благ:

$$U(x) = min\left\{\frac{x_i}{b_i},\right\}, i = 1, \ldots, n \qquad (2.4)$$

где b_i – количество товара вида i, приходящееся на единицу полезности. Для построения кривых безразличия функции 2.4 в R^2_+ из уравнения

$$min\left\{\tfrac{x_1}{b_1}, \tfrac{x_2}{b_2}\right\} = c$$

Найдём

$$x_2 = \frac{b_1}{b_2}x_1, \text{ если } \frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} \qquad (2.5)$$

$$x_1 = b_1 c, \text{ если } \frac{x_1}{b_1} < \frac{x_2}{b_2} \qquad (2.6)$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

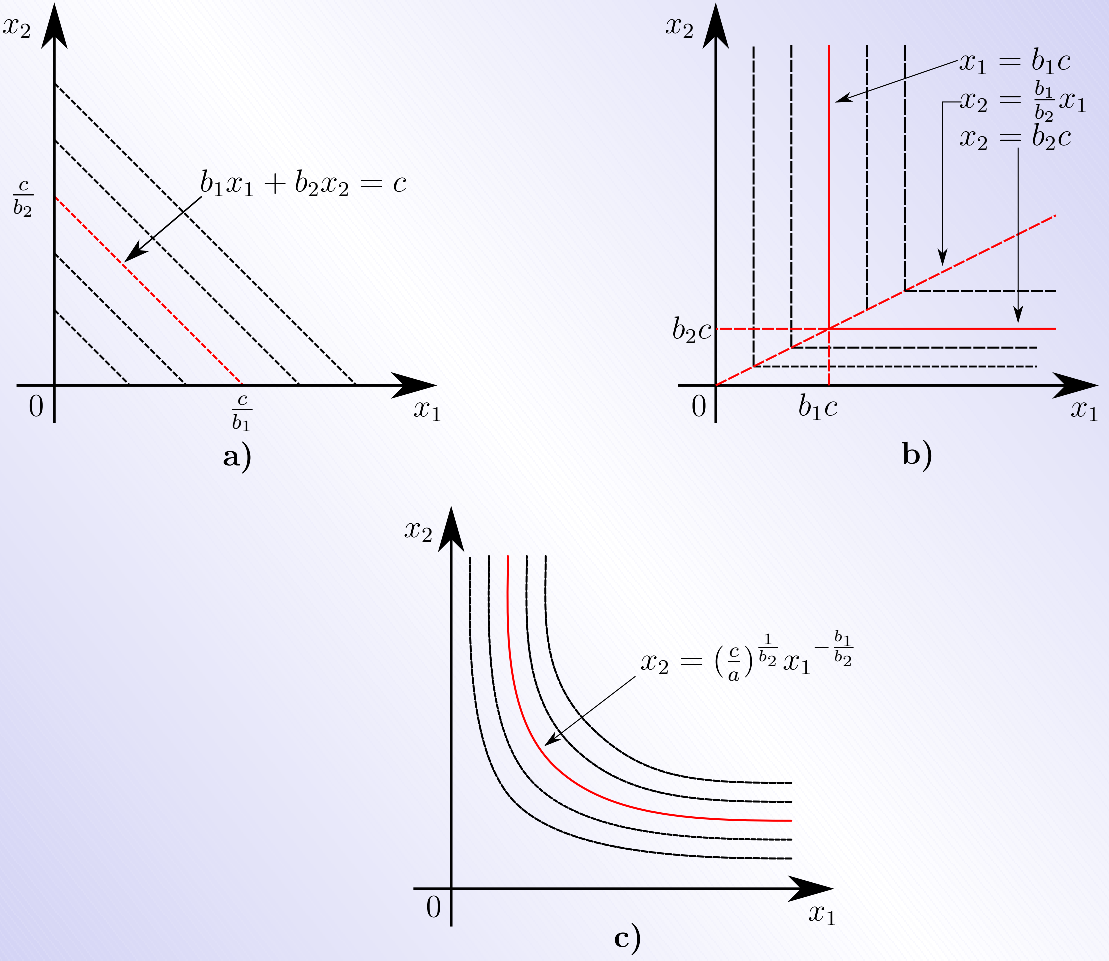


Рисунок 2.1 – Примеры карт безразличия

$$x_2 = b_2 c, \text{ если } \frac{x_1}{b_1} > \frac{x_2}{b_2} \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что карту безразличия функции 2.4 составляют одна линия, проходящая через начало координат и два семейства (по параметру c) линий, параллельных осям координат (рисунок 2.1.b.)

Функция 2.4 учитывает возможность дополнения одних товаров другими.

Пример 2.4. Приобретается набор из двух товаров: кофе в количестве x_1 и сахара в количестве x_2. Потребление этих товаров дает полезность, равную c, то есть

$$U(x) = min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right\} = c$$

В случае 2.5

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{b_2} = const$$

и увеличение (уменьшение) потребления кофе влечет увеличения (уменьшения) сахара.

В случае 2.6 увеличение потребления кофе может привести к нарушению неравенства в 2.6 и, следовательно, к нарушению уровня полезности, если не увеличиться потребление сахара.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Анализ случая (2.7) предлагается читателю провести самостоятельно.

Как показывает пример 2.4, функция 2.7 применяется для определения полезности набора взаимодополняющих друг друга товаров.

3. Неоклассическая функция полезности (функция Кобба-Дугласа):

$$U(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}, b_1 + b_2 +, \ldots, b_n = 1 \tag{2.8}$$

где a - фактор шкалы измерения полезности, $0 < b_i < 1$. Для построения кривых безразличия функции (2.8) в R_+^2 из уравнения $\alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2} = c$ найдём

$$x_2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{\left(\frac{1}{b_2}\right)} x_1^{-\frac{b_1}{b_2}}$$

то есть карту безразличия составляет семейство (по параметру c) гипербол, показанных на рисунке 2.1.c.

В приведенных примерах функции 2.3 и 2.8 заданы явным образом, а функция 2.4 находится как решение системы неравенств $x_i \geq b_i U(x), i = 1, 2$.

Приведем без комментариев еще несколько видов функции полезности.

4. Функция полезности замещающе-дополняющего типа:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \tag{2.9}$$

где функции находятся из системы неравенств

$$x_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j v_j(x), i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

5. Логарифмическая функция полезности (функция Бернулли):

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log(x_i - bi), \text{ где } a_i > 0, x_i > b_i \geq 0. \tag{2.11}$$

Мы перечислили только некоторые из применяемых в теории потребления функций полезности. Список таких «готовых» функций можно продолжить. Однако здесь уместно повторить то, что говорилось ранее о математических моделях в целом - нельзя гарантировать пригодность известных функций для каждого конкретного случая. При моделировании задачи потребителя как раз самым уязвимым местом является функция полезности, адекватно отражающая предпочтения индивидуального потребителя. Поэтому часто требуется не выбрать, а построить для данной конкретной задачи свою функцию полезности. Один из методов приближенного построения функции полезности, использующей понятие предельной нормы замещения.

ЛЕКЦИЯ 3

Предельный анализ и понятие эластичности в теории потребления

В экономической теории и практике широко оперируют так называемыми *суммарными* (или абсолютными) и *средними* (или относительными) величинами различных показателей и факторов: объема потребления, дохода, цены товара, спроса, прибыли, производительности труда, издержек, предложения и т.д. Смысл суммарных и средних величин ясен без всякого дополнительного пояснения. Наряду с ними в равной (или даже в большей) степени важны и *предельные величины*.

Насколько возрастает спрос, если предпринять сезонное снижение цен на 10% ? Как изменится производительность труда фирмы при сокращении рабочего дня на 0,5 часов, а зарплаты на 5% ? Изменится ли прибыль предприятия (если да, то насколько) при приеме на работу дополнительного рабочего? От какого количества товара одного вида готов отказаться потребитель, чтобы получить одну дополнительную единицу другого товара? Такого рода вопросы, связанные с анализом дополнительного эффекта при дополнительных затратах, возникают во всех сферах экономики. Оперируя только суммарными и средними величинами, нельзя на них ответить. На них можно ответить как раз с помощью предельных величин, определяемых математически с помощью производных соответствующих функций.

Применение в экономике дифференциального исчисления и изучение его результатов называется предельным анализом.Заметим, что дифференциальное исчисление оперирует непрерывно определенными (не дискретными) бесконечно малыми величинами, поэтому приведенные выше термины «дополнительных единиц» здесь являются условными.

В этом параграфе речь пойдет о предельных величинах, касающихся только сферы потребления.

Рассмотрим произвольный набор товаров $x \in R^n_+$. Если полезность от x_i обозначить через $U^i(x_i)$, то суммарная полезность набора x есть

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U(i)(x_i).$$

Среднюю полезность набора x схематично можно определить как вектор

$$\frac{u(x)}{x} = \left(\frac{u^1(x_1)}{x_1}, \ldots, \frac{u^n(x_n)}{x_n}\right)$$

где $\frac{u^i(x_i)}{x_i}$ - средняя полезность товара вида i, то есть полезность, приходящаяся на единицу товара i.

Понятие предельной полезности набора x

$$\frac{\partial(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{x_n}\right)$$

мы уже рассматривали в предыдущем параграфе. Вычисляя частное производное $\frac{\partial u}{x_i}$, можно получить ответ на вопрос: как себя поведет полезность $U(x)$ при изменении объема потребления того или иного товара. Полезность товара растет, пока справедливо условие 2.1. Если с ростом потребления товара неравенство 2.1 переходит в обратное, то очевидно, нет смысла и дальше увеличивать его потребление. Поэтому представляет интерес случай, когда $\frac{\partial u}{x_i} = 0$. К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе при выявлении оптимальных объемов потребления товара.

Сравнивая среднюю и предельную полезности, можно обнаружить тенденцию средней полезности «стремиться» к предельной полезности. А именно, среднее значение полезности возрастает (при возрастании потребления), если оно ниже предельной полезности; среднее значение полезности остается постоянным (при изменении потребления), если оно равно значению предельной полезности; среднее значение полезности убывает (при возрастании потребления), если оно превосходит предельную полезность.

Сравним среднюю и предельную полезности для разных функций полезности из предыдущего параграфа.

Средняя полезность набора товаров, обладающего свойством замещения 2.3 равна

$$\frac{u(x)}{x} = \left(\frac{b_1 x_1}{x_1}, \ldots, \frac{b_n x_n}{x_n}\right) = (b_1, \ldots, b_n)$$

где b_i – средняя полезность товара вида i. Предельная полезность есть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (b_1, \ldots, b_n)$$

Следовательно, для функции 2.3 средняя и предельная полезности совпадают. Этот факт является следствием линейности функции U. Подтверждением служит функция полезности для взаимодополняющих друг друга товаров (см. 2.4):

$$\frac{u(x)}{x} = \min\left\{\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \min\left\{\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}\right\},$$

Для функции Кобба-Дугласа (2.8), полагая для простоты $n = 2$, имеем:

$$\frac{u(x)}{x} = \left(\alpha x_1^{b_1 - 1} x_2^{b_2}, \alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2 - 1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(b_1 \alpha x_1^{b_1 - 1} x_2^{b_2}, b_2 \alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2 - 1}\right)$$

С учетом условия $b_1, b_2 < 1$ ясно, что предельная полезность пропорциональна средней и всегда меньше ее.

Предельную величину, как и среднюю, можно считать относительной величиной. Пусть значение некоторой переменной z изменилась от z_1 до z_2. Разницу $\Delta z = z_2 - z_1$ называют *абсолютным изменением* z, а отношение $\frac{\Delta z}{z_1}$ – *относительным изменением* z (изменение, приходящееся на одну единицу исходной величины). В отличие от абсолютного относительное изменение есть величина безымянная. Число $\frac{\Delta z}{z_1} \times 100\%$ называется *процентным изменением* z.

При помощи предельных величин можно формализовать понятие *эластичности*, играющую важную роль при анализе взаимосвязи между экономическими показателями и факторами.

Эластичность (коэффициент эластичности) является численной оценкой относительного изменения экономического показателя под действием относительного изменения некоторого экономического фактора при неизменности других влияющих на этот показатель факторов. Таким образом, эластичность показателя - это его чувствительность к изменению влияющего на него фактора.

Возникает естественный вопрос: зачем нужно вводить сложное понятие «эластичность», когда те же изменения можно описать предельными величинами? Как то: изменение полезности от объема потребления товара $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, изменение предложения (y_i) от его цены $\frac{\partial y_i}{\partial p_i}$ - и т.д. Дело в том, что предельные величины, (как и средние) зависят от единицы

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

измерения. Например, величина $\frac{\partial y_i}{\partial p_i}$ в *кг./руб.* есть одно число, а та же величина в *тонна/руб.* – другое. Такая неоднозначность приводит к техническим неудобствам. Эта проблема снимается, если чувствительность экономического показателя измеряется эластичностью, так как последняя определена как безымянная величина.

Пусть имеется некоторый экономический показатель z, зависящий от ряда факторов $y_1, \ldots, y_n$, то есть $z = z(y) = z(y_1, \ldots, y_n)$. Эластичность показателя z по y_i обозначим $\varepsilon_{y_i}(z)$ и выведем общую формулу для ее вычисления.

По определению эластичности

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta y_i}{y_i}} = \frac{\Delta z}{\Delta y_i} \times \frac{y_i}{z} \tag{3.1}$$

Переходя к пределу в правой части при $\Delta y_i \to 0$, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \left(\lim_{\Delta y_i \to 0} \frac{\Delta z}{z}\right) \frac{\Delta y_i}{y_i} = \frac{\Delta z}{\Delta y_i} \times \frac{y_i}{z} \tag{3.2}$$

Видим, что «эластичность z по y_i» вычисляется как произведение «предельной величины z по y_i» на «среднюю величину y_i по z». Умножая числитель и знаменатель дроби 2.11 на 100%, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\frac{\Delta z}{z} \times 100\%}{\frac{\Delta y_i}{y_i} \times 100\%} \tag{3.3}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

Отсюда, эластичность z по y_i есть отношение процентного изменения z на процентное изменение y_i.

Интересно узнать, насколько процентов изменится z, если y_i изменится на 1%? Иначе говоря, нужно найти процентное изменение z при процентном изменении y_i , равном единице, то есть $\frac{\Delta y_i}{y_i}100\% = 1$ Тогда из 3.2 сразу получаем искомое процентное изменение:

$$\frac{\Delta z_i}{z_i}100\% = \varepsilon_{y_i}(x)|_{1\%}.$$

Отсюда, эластичность z по y_i есть процентное изменение показателя z при изменении фактора y_i на 1%.

Как видно из (3.1), знак эластичности в каждой точке y зависит от знаков $\frac{\partial z}{\partial y_i}$ и $\frac{y_i}{z}$. Предположим для простоты, что $\frac{y_i}{z} > 0$. Тогда, если z возрастает по y_i (в точке y), тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} > 0$ и эластичность положительна; если z убывает по y_i, тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} < 0$ и эластичность отрицательна. В этом смысле представляет интерес случай, когда $\frac{\partial z}{\partial y_i} = 0$, анализ которого и его содержательную интерпретацию мы оставим читателю.

Пороговым значением для эластичности является число 1. Для объяснения этого рассмотрим графическое изображение эластичности функции спроса *(c)* на один товар, зависящей только от его цены: *c=c(p)*. Известно, что спрос является убывающей функцией цены. Вычислим эластичность $\varepsilon_p(c)$ в произвольной точке *A(p,c)* графика функции *c=c(p)* (рисунок 3.1).

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

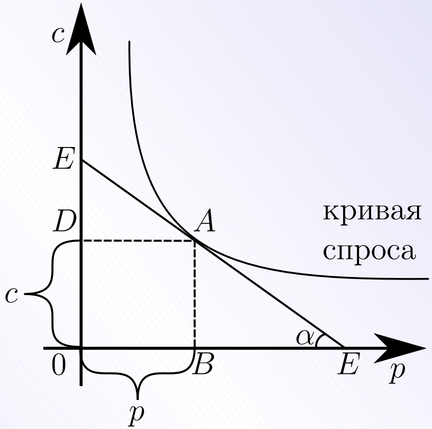


Рисунок 3.1 – Схема вычисления

Пресечение касательной в точке A с осями координат обозначим через E и N. По определению

$$\varepsilon_p(c) = \frac{dc}{dp}\frac{p}{c}.$$

Выразим правую часть равенства через элементы графика. Из $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BE}$ имеем

$$BE = \frac{AB}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{OD}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{c}{-\frac{dc}{dp}}$$

здесь знак минус показывает убывание функции c в точке A). Из подобия треугольников ABE и ADN имеем:

$$\frac{AN}{AE} = \frac{AD}{BE} = \frac{OB}{BE} = \frac{p}{\frac{-c}{\frac{dc}{dp}}} = -\frac{dc}{dp}\frac{c}{p} = -\varepsilon_p(c)$$

Следовательно,

$$\varepsilon_p(c) = -\frac{AN}{AE}. \tag{3.4}$$

Можно показать, что для возрастающей функции (например, предложения, как функции от цены) эластичность по абсолютной величине также будет равна отношению AN/AE. Потому в общем случае эластичность следует оценивать по ее абсолютной величине. Эта величина равна 1, если в (3.3) числитель равен знаменателю; больше 1, если числитель больше знаменателя и меньше 1 - если числитель меньше знаменателя. Это говорит о том, что эластичность $\varepsilon_{y_i}(z)$ зависит от кривизны графика функции z в рассматриваемой точке.

Если $|\varepsilon_{y_i}(z)| > 1$, то функция z называется эластичной (по y_i); если $|\varepsilon_{y_i}(z)| < 1$, то функция z называется неэластичной (по y_i); если $|\varepsilon_{y_i}(z)| = 1$, то говорят, что функция z имеет единичную эластичность (по y_i).

Относительно спроса различают товары эластичного спроса и товары неэластичного спроса. Для товаров первого вида повышению цены на 1% соответствует понижение спроса более, чем на 1% и, наоборот, понижение цены на 1% приводит к росту покупок более, чем на 1% ($|\varepsilon_p(c)| > 1$). Для товаров второго вида повышение цены на 1% влечет за собой понижение спроса менее, чем на 1% и, наоборот, уменьшение цены на 1% приводит к росту покупок менее чем на 1% ($|\varepsilon_p(c)| < 1$). К этому вопросу мы еще раз вернемся после формализации понятия спроса.

Вычислим эластичность некоторых из функций полезности, для простоты будем полагать $n = 2$.

$$\varepsilon_{x_i}(u) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_i}{u} = \frac{b_i x_i}{b_1 x_1 + b_2 x_2}, i = 1, 2$$

Например, в точке $\vec{x} = \left(\frac{1}{b_1}, \frac{2}{b_2}\right)$ получаем:

$$\varepsilon_{x_1}(u)|_{x_1 = \overline{x}_1} = \frac{1}{3}, \varepsilon_{x_2}(u)|_{x_2 = \overline{x}_2} = \frac{2}{3}$$

Видим, что в точке $\overline{x}$ полезность в целом неэластична; при этом неэластичность по второму товару «выше», чем по первому товару. Более детальный анализ эластичности функции (2.3) оставляем читателю.

Для функции Кобба-Дугласа (2.8) имеем:

$$\varepsilon_{x_1}(u) = b_1 \alpha x_1^{b_1 - 1} x_2^{b_2} \frac{x_1}{\alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2}} = b_1$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

$$\varepsilon_{x_2}(u) = b_2 \alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2-1} \frac{x_2}{\alpha x_1^{b_1} x_2^{b_2}} = b_2$$

Итак, параметры b_1 и b_2 в функции Кобба-Дугласа как раз являются коэффициентами эластичности по видам товаров; они постоянны, то есть не зависят от объема потребления. Поэтому функция Кобба-Дугласа относится к классу функций полезности с постоянной эластичностью (вернее, неэластичностью, так как $b_1, b_2 < 1$).

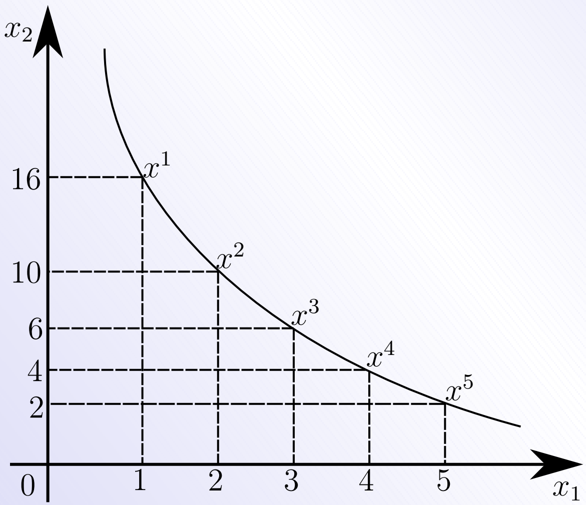


Рисунок 3.2 – Замещение наборов товаров

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

В завершение параграфа рассмотрим еще одно понятие, определяемое с помощью дифференцирования.

Предположим, что имеется шесть наборов товаров

$$x^1 = (1, 16),\ x^2 = (2, 10),\ x^3 = (3, 6),\ x^4 = (4, 4),\ x^5 = (5, 2)$$

с одинаковой полезности, то есть $U(x^1) = \ldots = U(x^5)$. Пусть первый вид товара *(i=1)* - продукт питания, второй *(i=2)* - одежда. Эти точки лежат на одной кривой безразличия *u(x)=c* (рисунок 3.2). Как видно из графика, замена набора x^1 набором x^2 требует отказа от 6 единиц одежды взамен на одну единицу продукта питания; замена x^2 на x^3 - отказа от 4 единиц одежды ради одной единицы продукта питания и т.д. Чтобы количественно определить объем некоторого товара, которым потребитель готов пожертвовать ради другого товара, используют меру, называемую предельной нормой замещения. Более точно, предельная норма замещения показывает, на сколько единиц нужно уменьшить (увеличить) количество одного товара при увеличении (уменьшении) другого товара на единицу, чтобы при этом полезность осталась неизменной.

Обозначим предельную норму замещения i-го товара j-м товаром через S_{ij} и выведем формулу для ее вычисления.

Пусть при уменьшении потребления j-го товара на величину Δx_j для поддержания прежнего уровня полезности необходимо увеличить потребление i-го товара на величину Δx_i:

$$U(x_1,\dots,x_n) = U(x_1,\dots,x_i+dx_i,\dots,x_j+dx_j,\dots,x_n) \qquad (3.5)$$

где $dx_i = \Delta x_i$, $dx_j = -\Delta x_j$. По определению предельной нормы замещения

$$S_{ij} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\Big|_{U=const} \qquad (3.6)$$

Из (3.5) получаем

$$\Delta U = U(x_1,\dots,x_i+dx_i,\dots,x_j+dx_j,\dots,x_n) - U(x_1,\dots,x_n) = 0 \quad (3.7)$$

Для полного приращения ΔU функции U в математическом анализе существует формула:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} + \varepsilon(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n), \qquad (3.8)$$

где $\varepsilon > 0$ таково, что

$$\lim_{\Delta x_i\to 0} \varepsilon(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n) = 0 \qquad (3.9)$$

есть полный дифференциал функции U. Из (3.7)-(3.9) с учетом того, что $dx_k = 0$ для $k \neq i, j$, имеем

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U}{\partial x_j}dx_j = 0$$

Отсюда

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$$

и из (3.6) получаем окончательно

$$S_{ij} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_j}}{\frac{\partial U}{dx_j}} \tag{3.10}$$

Следовательно, предельная норма замещения товаров выражается через отношение их предельных полезностей. Например, для функции Кобба-Дугласа 2.8 имеем:

$$S_{ij} = \frac{b_i}{b_j}\frac{x_j}{x_i}, i, j = 1, ..., n(i \neq j)$$

Из закона об убывающей предельной полезности следует выпуклость кривых безразличия. Поэтому при движении вниз вдоль кривой безразличия (рисунок 3.2) S_{12} убывает:

$$S_{12}(x^1) = 6, S_{12}(x^2) = 4, S_{12}(x^3) = 2, S_{12}(x^4) = 1$$

Этот факт в экономике называется законом убывающей предельной нормы замещения: при стремлении поддерживать неизменным уровень полезности путем замещения *i-го* товара *j-м* товаром, субъективное удовлетворение, получаемое от предельного потребления *i-го* товара, в сравнении с удовлетворением, получаемым от предельного потребления товара j, будет неуклонно уменьшаться.

Формы кривых безразличия показывают на разные степени желательности замены одного товара другим. Пусть кривые безразличия для двух различных потребителей относительно напитка $(i=1)$ и сока $(i=2)$ имеют следующий вид (рисунок 3.3 и рисунок 3.4):

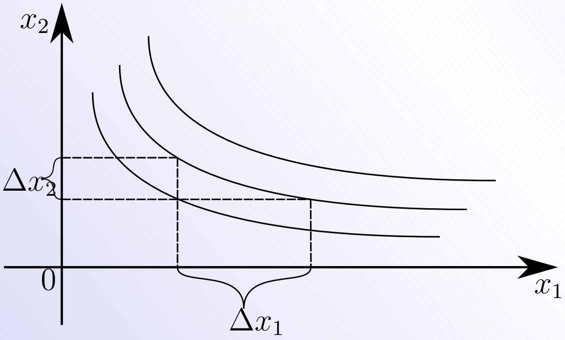


Рисунок 3.3 – Предпочтение первого потребителя.

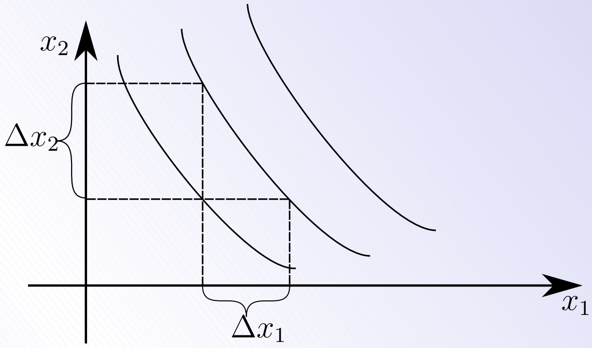


Рисунок 3.4 – Предпочтение второго потребителя

У первого потребителя (рисунок 3.3) низкая предельная норма замещения напитка соком - он готов отказаться от очень небольшого количества сока ради напитка ($\Delta x_2 < \Delta x_1$). У второго потребителя (рисунок 3.4), наоборот, высокая предельная норма замещения напитка соком ($\Delta x_2 > \Delta x_1$).

Предельная норма замещения применяется при изучении спроса (например, что нужнее в данный момент для домашнего хозяйства, один диван или два кресла; насколько нужно жертвовать технической характеристикой автомобиля ради увеличения комфорта и т.д.). Формализацию понятия спроса, изучению его природы и свойств посвящены следующие параграфы этой главы.

ЛЕКЦИЯ 4

Оптимизационная модель задачи потребительского выбора

В этом параграфе мы приведем и исследуем классическую математическую модель задачи индивидуального потребительского выбора. Содержательно эту задачу можно сформулировать так: потребителю нужно приобрести (купить) на рынке необходимые ему виды товаров в таком количестве, чтобы их потребление доставило максимальное удовлетворение (пользу); при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его дохода (бюджета).

Последнее условие называется бюджетным ограничением и оно подчеркивает всегда ограниченные покупательские возможности потребителя.

Обращает на себя внимание «скудность» постановки задачи. Так, например, не говорится о минимальном прожиточном уровне, ниже которого объем потребления не может опускаться; нет ограничения на доход потребителя и т.д. Однако, следует исходить из того, что эта постановка общая и в случае необходимости более подробного моделирования все недостающие сведения можно «прочитать между строчками» этой постановки. Мы же будем принимать эту постановку как исходную, ее и будем моделировать.

В начале параграфа 2.1 мы перечислили те важнейшие факторы, которые будучи формализованы и связаны подходящими математическими соотношениями и дают требуемую модель. Это товар и его цена, цель и бюджет потребителя, его покупательская способность.

Приведем сначала необходимые обозначения, хотя некоторые из них уже были введены в параграфах 2.1 и 2.2.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+$ – набор товаров, где x_i – количество товаров вида i,n – число видов товаров, R^n_+ – пространство товаров; $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор цен товаров, где p_i – цена единицы товара вида i; K – доход (бюджет) потребителя.

Мы рассматриваем статическую задачу, поэтому эти величины не зависят от фактора времени. Параметры p_i и K считаются постоянными величинами, причем цены считаются рыночными, а доход не структуризуется, то есть нас не интересует из каких частей он складывается. Компоненты xi вектора являются неизвестными переменными. Модель составляется как раз для определения «оптимальных» значений этих переменных для данного потребителя. Цель потребителя будем описывать с помощью функции полезности $U : R^n_+ \to R^1$ (смотри параграф 2.2 и определение 2.1), относительно которой будем предполагать выполнение условий (2.1) и (2.2) . Наконец, мы рассматриваем некоторого «обобщенного» потребителя, никак не характеризуя его индивидуальные особенности, за исключением априорного предложения о существовании функции полезности, отражающей его индивидуальные предпочтения в R^n_+ (см. теорему 2.1).

С учетом всего сказанного выше, модель задачи потребительского выбора имеет вид:

$$U(x) \to max \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\langle p, x\rangle \leq K,$$

$$x \geq 0 \tag{4.2}$$

Обозначим через *B(p,K)*множество всевозможных товаров, допустимых потребителю при ценах p и доходе K:

$$B(p, K) = \{x \in R^n_+ | \, \langle p, x\rangle \leq K\} \tag{4.3}$$

называемое бюджетным множеством. Графическое изображение этого множества показано на рисунке 4.1.

Граница $\overline{B}(p, K) = \{x \in R^n_+ | \, \langle p, x\rangle = K\}$ множество $B(p, K)$ называется бюджетной линией.

Оптимальным решением задачи (4.1)-(4.2) называется такой вектор $x^* = (x^*_1, ..., x^*_n)$, что

$$U(x^*) = \max_{x \in B(p,k)} U(x) \tag{4.4}$$

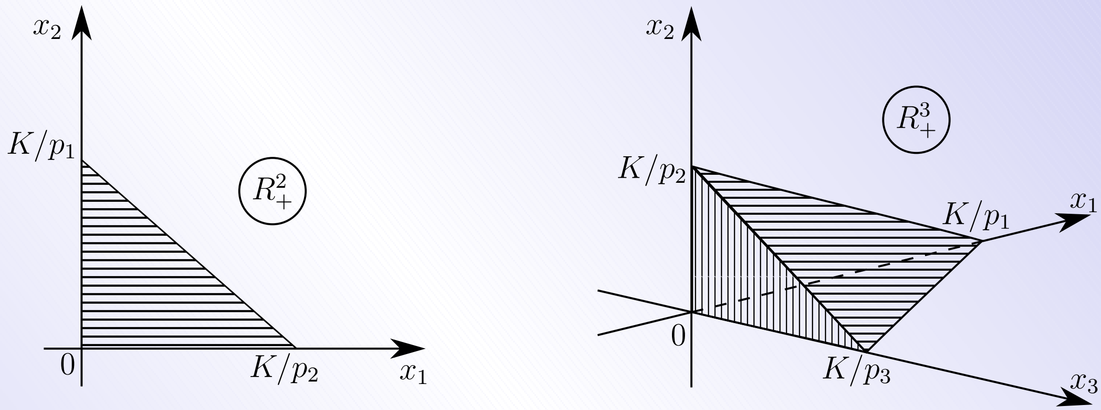


Рисунок 4.1 – Графическое изображение бюджетного множества

Определение 4.1. Оптимальное решение x^* задачи ((4.1)-(4.2)) называется спросом потребителя.

Данное формальное определение спроса отражает классическое понятие спроса как платежеспособную потребность.

Всегда ли существует оптимальное решение задачи (4.1)-(4.2)?

Поскольку мы имеем дело с оптимизационной задачей (линейной или нет в зависимости от функции полезности U) (смотри § 2.2), то на этот вопрос следует ответить с точки зрения теоремы Вейерштрасса. Так как функция полезности непрерывна по факту ее существования (см. теорему 2.1), основная сложность заключается в компактности множества (4.3), на котором ищется максимум функции U (смотрите (4.4)). В метрическом пространстве R^n_+, как известно, компактность множества равнозначно его замкнутости и ограниченности. Так как бюджетное множество замкнуто по определению, то остается изучить его ограниченность.

Покажем, что ограниченность не всегда имеет место. Предположим, для некоторого $ip_i = 0$. Как следует из (4.2), в этом случае «допустимым» становится любой вектор $\widetilde{x} = x_1, \ldots, x_{n-1}, \infty, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то есть $\widetilde{x} \in B(p, K)$, что говорит о неограниченности бюджетного множества. А это, в свою очередь, может привести к отсутствию оптимального решения задачи (4.1) - (4.2) (например, в случае неограниченности функции U, что является следствием ненасыщаемости потребителя (смотрите свойство а'5 в § 2.2). Однако, если потребитель ненасыщаем по всем товарам, то множество *B(p,k)* оказывается ограниченным. Более строже этот факт сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 4.1. Пусть бюджетное множество (4.3) обладает следующим свойством: если в последовательности $x^k \in B(p, K)$ при $k \to \infty$ имеет место $x^k_i \to \infty$ для некоторого j, то для всех *i=1,...,n*. Тогда бюджетное множество ограничено и в задаче (4.1)-(4.2) существует оптимальное решение. Если при этом функция u строго вогнута на множестве, то оптимальное решение единственно.

Итак, при фиксированных ценах $p_1, \dots, p_n$ и заданном доходе K оптимальное потребление определяется компонентами $x_1^*, \dots, x_n^*$ решения задачи x^* (4.1)-(4.2).

Выяснив существование оптимального решения задачи потребителя, займемся вопросом его вычисления. Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа для нашей задачи:

$$L(x, \lambda, \mu) = U(x) + \lambda(K - \langle p, x\rangle) + \mu x$$

где λ, μ множители Лагранжа. Выпишем необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера), которые благодаря условиям (2.2) будут и достаточными:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p + \mu = 0, \\ \lambda(K - \langle p, x\rangle) = 0, \\ \mu x = 0 \\ (K - \langle p, x\rangle) = 0 \\ x \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0 \end{cases}$$

Не умаляя общности рассуждений, примем следующее предложение: потребитель приобретает все виды товаров, то есть $x_i > 0$ для всех i=1,...,n (в противном случае можно уменьшить размерность пространства R_+^n) и будем считать, что $p_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда из третьего

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

равенства следует $\mu = 0$ и необходимые и достаточные условия принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p = 0, \tag{4.5}$$

$$\lambda(K - \langle p, x\rangle) = 0 \tag{4.6}$$

$$K - \langle p, x\rangle \geq 0 \tag{4.7}$$

$$x \geq 0, \lambda > 0 \tag{4.8}$$

Эта система разрешима относительно $n+1$ неизвестных $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, так как имеется $n+1$ уравнение (4.5) и (4.5). Все переменные и частные производные здесь вычисляются в точке x^*. Значение λ соответствующее (в силу уравнений (4.5) и (4.5)) точке x^* обозначим λ^*.

Для пары $(x^*,\ \lambda^*)$ из (4.5) получаем:

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = \cdots = \frac{1}{p_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} \tag{4.9}$$

означает, что предельная полезность одной единицы денег одинаково для каждого товара и именно при таком распределении бюджета потребитель получает максимум полезности. Для объяснения этого факта обратимся к рисунку 3.3. Если полезность от расходования дополнительного доллара на продукт питания выше, чем от доллара на одежду, то потребитель может увеличить полезность за счет роста расходов на питание. Таким образом, увеличение расходов на питание вызовет уменьшение расходов на одежду и это будет продолжаться до тех пор, пока предельная полезность на питание будет выше чем на одежду. По закону Госсена предельная полезность продуктов питания постепенно снизится, вызывая рост расходов на одежду. Только тогда, когда предельная полезность дополнительного доллара расходов становится одинаковой для питания и одежды, будет достигнут максимум полезности.

Из равенства (4.9) следует так же вывод о том, что цены должны определяться исходя из предельной полезности товаров и денег:

$$p_i = \frac{1}{\lambda^*}\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x=x^*}, i = 1, ..., n$$

Так как $\lambda^* > 0$ (следует из (4.5)), то из (4.6) получаем

$$K - \langle p, x^* \rangle = 0.$$

Последнее означает, что точка максимума x^* задачи (4.1)–(4.2) лежит на бюджетной линии. В случае двух товаров имеем (смотри рисунок 4.2):

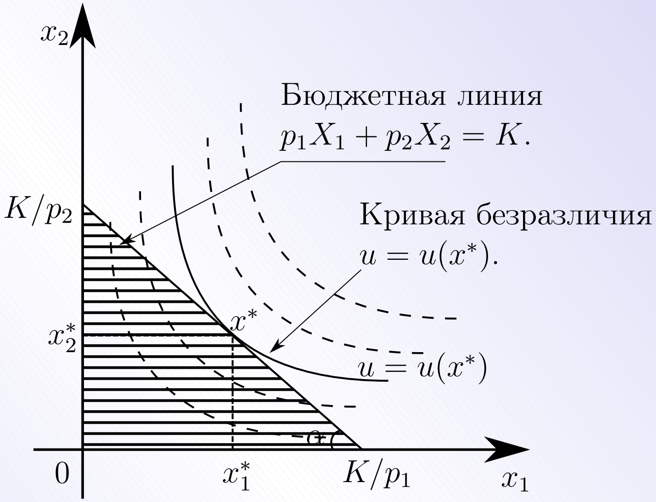


Рисунок 4.2 – Решение задачи потребителя

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \lambda p_2 = 0, \\ K - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Наклон бюджетной линии равен

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\frac{K}{p_2}}{\frac{K}{p_1}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

Наклон кривой безразличия $U(x_1, x_2) = const$ находится из выражения $dU = 0$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

и составляет

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$$

Так как в точке касания x^* наклон кривой безразличия равен наклону бюджетной линии, то

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

или

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \tag{4.10}$$

Как видно из (4.9), и в частности, из (4.10),

$$S_{i,j}|_{x=x^*} = \frac{p_i}{p_j}, i, j = 1, ..., n,$$

то есть в оптимальном наборе товаров $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ предельная норма замещения товара i товаром j оценивается отношением их цен (то есть зависит исключительно от их цен).

Как показывает рисунок 4.2, оптимальное решение задачи (4.1)–(4.2) геометрически является точкой касания кривой безразличия и бюджетной линии. Для строго вогнутой функции полезности такая точка касания единственна (смотри теорему 4.1).

С помощью рисунка 4.2 можно анализировать различные последствия, связанные с изменением цен и дохода.

Будем считать, что все товары нормальные (качественные), то есть при увеличении дохода потребление увеличивается. Нас интересуют следующие вопросы:

а) изменение покупательской способности: как изменится спрос на товары при изменении их цен и неизменном доходе?

б) эффект замещения: как изменится потребление товаров, когда при изменении цен полезность должна оставаться на прежнем уровне?

в) эффект дохода: как изменится потребление товаров при изменении дохода потребителя и неизменных ценах?

Обсудим случай а). Предположим, что снижается цена первого товара. Тогда бюджетная линия из положения AB переходит в положение AC (4.3).

Так как кривые безразличия заполняют все пространство R^2_+, то обязательно найдется одна кривая безразличия, имеющая с бюджетной линией AC точку касания. Обозначим эту точку x^{**}. Она и будет оптимальным решением задачи потребителя при новых ценах. В точке x^{**} полезность будет больше чем в точке x^*, за счет увеличения на величину $x_1^{**} - x_1^* > 0$ потребления первого товара. Это стало возможным в результате роста покупательской способности потребителя (его реального

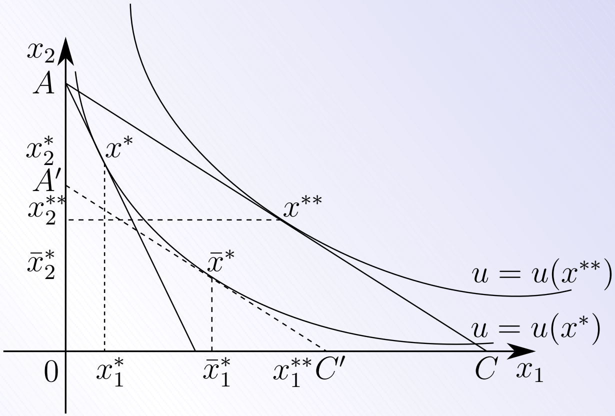


Рисунок 4.3 – Эффекты замещения и дохода

дохода), благодаря снижению цены на первый товар. Что произошло при этом с объемом потребления второго товара? Он снизился на величину $x_1^{**} - x_1^* > 0$. Здесь отражена та реальность, когда люди потребляют большее количество (качественного) товара, который подешевел, и меньшее количество тех товаров, которые остались на прежнем ценовом уровне или подорожали.

Читателю предлагается самостоятельно анализировать случаи уменьшения цены товара и одновременного изменения цен на оба вида товара.

Рассмотрим эффект замещения (случай б). Предположим опять, что первый продукт стал более дешевым (по сравнению с тем, что было в точке x^*). Так как при этом полезность не должна меняться, то эффект

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

замещения отражается смещением точки x^* вдоль кривой безразличия $U = U(x^*)$, то есть новое оптимальное решение $\overline{x^*}$ задачи потребителя будет находится на одной кривой безразличия с точкой x^* (4.3). Бюджетная линия $A'C'$, касающаяся кривой безразличия $U = U(x^*)$ в точке $\overline{x^*}$, параллельна изменившейся бюджетной линии AC и удалена от нее на величину изменения реального дохода (покупательской способности). Следовательно, эффект замещения представляется величиной $\overline{x_1^*} - x_1^*$.

Проверив эффект дохода (случай в)) самостоятельно убедитесь, что он характеризуется ростом потребления первого товара на величину $\overline{x_1^*} - x_1^*$.

Мы видим, что пользуясь решением задачи (4.1)–(4.1) можно анализировать различные ситуации и ответить на многие вопросы, круг и глубина которых зависит от творческих способностей исследователя.

В зависимости от условий конкретной задачи, свойств товаров и прочего в выражении (4.1) можно либо использовать одну из известных функций полезности, например, одну из функций (2.3), (2.4), (2.8)–(3.1), либо построить новую функцию полезности.

Надо заметить, что в теории потребления нет общих или универсальных методов построения функций полезности. Известны лишь частные методы для некоторых отдельных классов таких функций. Приведем один способ приближенного построения так называемых аддитивных функций полезности. Такие функции применяются в тех случаях, когда полезность набора товаров $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n_+$ складывается как сумма полезностей товаров отдельных видов:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_i) \tag{4.11}$$

Будем считать, что функция (4.11) задана на *n-мерном* параллелепипеде:

$$a_i \leq x_i \leq b_i (b_i > a_i) i = 1, \ldots, n$$

Обозначим $X_i = [a_i, b_i]$. Тогда пространство товаров имеет вид:

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cdot \ldots X_n.$$

(это и есть n-мерный параллелепипед).

Идеи метода заключаются в построении линий безразличия на каждом из *n-1* граней параллелепипеда X. Исходной информацией для этого является определяемость линий безразличия условиями замещения товаров (смотри рисунок 4.3).

Алгоритм метода следующий.

1. Выявление взаимозаменяемых товаров: в общем случае товары вида i_0 и j_0 будут взаимозаменяемыми, если существует последовательность взаимозаменяемых пар

$$\{(i_0, j_1), (j_1, j_2), \ldots, (j_k, j_0)\}$$

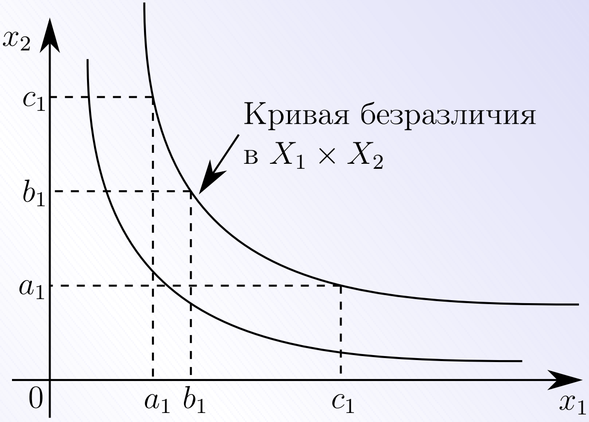


Рисунок 4.4 – Точки разбиения

2. Вычисление предельных норм замещения: для каждой пары (i,j) из (3.4) вычисляют величину S_{ij} по формуле (3.9) или (3.5).

3. Построение кривых безразличия на гранях параллелепипеда X: с помощью чисел S_{ij}, полученных в п.2, стоят по одной линии безразличия в прямоугольниках $X_i \times X_j$(смотри рисунок (3.2))

4. Разбиение граней одного из прямоугольников $X_i \times X_j$ точками: выбирают один из прямоугольников, например,$X_1 \times X_2$ и для кривой безразличия строят ее близкое смещение (то есть новую кривую безразличия) (смотри рисунок 4.4); разбиение отрезков X_1 и X_2 получают с помощью «лестницы» между двумя кривыми безразличия.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

5. Построение функции полезности для товара $i=1$: для полученного в пункте 4 разбиения отрезка X_1 строят функцию полезности $U_1(x_1)$ предполагая, что на каждом интервале разбиения функция U_1 возрастает на одну единицу (рисунок 4.5).

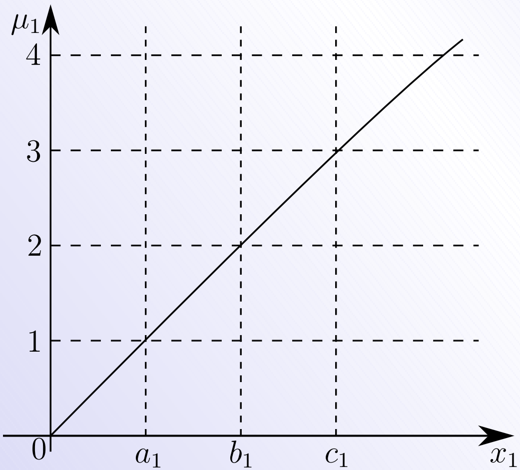


Рисунок 4.5 – График функции полезности μ_1

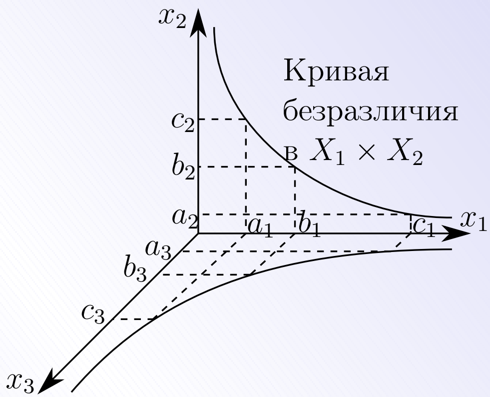


Рисунок 4.6 – Разбиение отрезка X_3

6. Последовательное разбиение остальных отрезков X_i: эту процедуру проводят индуктивно, как показано на рисунке 4.6.

7. Последовательное построение функции полезности для остальных товаров: для получения в пункте 6. последовательных разбиений отрезков X_i строят функции полезности $U_i(x_i)$ как в пункте 5.

8. Построение общей функции полезности: после того, как получены все U_i, i=1,...,n , полагают $U(x) = U_1(x_1) + \ldots U_n(x_n)$.

Заметим, что точность аппроксимации функции полезности U зависит от близости исходной и смещенной кривых безразличия в пункте 4.

ЛЕКЦИЯ 5

Функция спроса и ее свойства

В предыдущем параграфе спрос был определен как оптимальное решение x^* задачи потребителя (4.1) – (4.2) (смотри определение 4.1). Спрос есть платежеспособная потребность, а платежеспособность предполагает соответствие цен и дохода. Поэтому мы можем утверждать, что общее решение задачи потребителя вычисляется как функция от цен и дохода :$x^* = x^*(p, K)$. Точно так же $\lambda^* = \lambda^*(p, K)$. К этому же выводу можно прийти исходя из вида задачи (4.1) – (4.2), так как p и K являются параметрами этой задачи.

Решение оптимизационной задачи - это лишь один из способов определения спроса, который схематично можно представить так:

$$(p, K) \xrightarrow{D} x^*(p, K),$$

где D – отображение, представленное максимизацией функции U с учетом бюджетного ограничения. В общем случае D - это некоторая со-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

вокупность правил, с помощью которых потребитель определяет свой спрос.

Пусть $X \subset R^n_+$ – множество допустимых наборов товаров, $P \subset R^n_+$ - пространство цен. Функцией спроса (индивидуального потребителя) называется отображение D, которое каждой паре $(p, K) \in P \times R^1_+$ ставит в соответствие множество наиболее предпочтительных наборов товаров

$$D : P \times R^n_+ \to 2^X, \tag{5.1}$$

где 2^X - множество всех подмножеств множества X. Это же отображение можно записать как

$$(p, K) \to D(p, K) \subset X.$$

Любая точка $x^* \in D(p, K)$ называется спросом (при ценах p и доходе K).

Итак, в общем случае функция спроса – это многозначное отображение. Действительно, если x^* – вектор спроса, а множество $D^* = \{y \in X : y \sim x^*\}$ не пусто, то любая точка множества D^* является спросом.

Для отображения D, представленного задачей (4.1)–(4.2), имеем:

$$\begin{cases} \left\{x^* \in B(p, K) : U(x^*) = \max\limits_{x \in B(p,K)} U(x)\right\}, & \text{если максимум достигается} \\ \varnothing, & \text{если максимум не достигается.} \end{cases}$$

Если в (4.1) функция полезности U строго вогнута, то функция спроса D однозначна, т.е. множество $D(p,k)$ состоит из одной точки x^* максимума функции $U : x^* = D(p,K)$.

В случае неоднозначности функции спроса возникает дополнительная проблема выбора единственной точки $x^* \in D(p,K)$. Этот вопрос будет рассмотрен в главе далее.

Принимая во внимание тот факт, что доход потребителя зависит от цен товаров, можно в пространстве $P \subset R^n_+$ определить функцию спроса $\widetilde{D} : p \to 2^X$, так что $\widetilde{D}(p) = D(p, K(p))$.

При увеличении цен на товары, вообще говоря, доход потребителя должен быть компенсирован. Это требование формализуется как свойство однородности первой степени (или линейной однородности) функции дохода: для любых $a \geq 0 K\ (\alpha \cdot p) = \alpha K(p)$. Как должен при этом измениться спрос? Интуитивно ясно, что если повышение цен пропорциональным образом компенсируется повышением дохода, то спрос должен оставаться на прежнем уровне.

Если для любых $a \geq 0$

$$D(\alpha \cdot p, K(\alpha \cdot p)) = D(\alpha \cdot p, \alpha \cdot K(p)) = D(p, K(p)), \qquad (5.2)$$

то говорят, что функция спроса однозначна нулевой степени(относительно всех цен и дохода). Это есть инвариантность спроса относительно пропорционального повышения цен и дохода.

Для n функций спроса

$$x_1^* = x_1^*(p, K), \ldots, x_n^* = x_n^*(p, K) \tag{5.3}$$

полученных как решение задачи (4.1) – (4.2), это свойство выполнено. Действительно, при изменении цен в α раз задача (4.1) – (4.2) деформируется в следующую:

$$U(x) \to \max,$$

$$\langle \alpha p, x \rangle \leq K(\alpha, p))$$

$$x \geq 0$$

Оптимальной решение этой задачи обозначим $x^*(\alpha p, K(\alpha p))$. Бюджетное ограничение можно записать как $\alpha \langle p, x \rangle \leq \alpha K(p)$. Так как $a \geq 0$, то мы приходим к исходной задаче, так что $x^*(\alpha p, K(\alpha p)) = x_i^*(p, K), i = 1, \ldots, n$.

Для функции спроса однородной нулевой степени объем потребления зависит не от цен, как таковых, и дохода, а от отношений цен (относительных цен) и от отношения денежного дохода к цене (реального дохода). Выбирая какой-либо товар, например, товар i=1 , в качестве «единицы измерения» (эквивалента) и полагая коэффициент пропорциональности $\alpha = \frac{1}{p_1}$, функцию спроса можно записать в виде:

$$x_i^* = x_i^*(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_n}{p_1}, \frac{K}{p_1}, i = 1, \ldots, n,$$

где $\frac{p_i}{p_1}$ – относительная цена, $\frac{K}{p_1}$ – реальный доход. В качестве коэффициента пропорциональности можно выбрать, например, величины

$$\alpha = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i)} \text{или} \alpha = \frac{1}{K}$$

Какова чувствительность спроса $x^*(p, K(p))$ на изменение цен и дохода? Как мы видели в § 2.2, она измеряется эластичностью.

Напомним, что эластичность спроса по цене показывает, какое процентное изменение спроса последует за однопроцентным увеличением цены товара:

$$\varepsilon_{p_i}(x_i^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^*}, i = 1, \ldots, n.$$

Так как $\varepsilon_{p_i}(x_i^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^*}, i = 1, \ldots, n.$(закон спроса для нормальных товаров), $x_i^* > 0, p_i \geq 0$,то $\varepsilon_{p_i}(x_i^*) \leq 0$. Так как при движении по кривой безразличия $U = U(x^*)$ величина $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ меняется (за исключением некоторых тривиальных случаев) и тем более изменяются ? и , то эластичность спроса по цене в различных точках кривой безразличия различна.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

Тривиальным является случай, когда функция спроса линейна:

$$x_i^* = a_i - b_i p_i, a_i, b_i - const$$

В этом случае $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ постоянна и равна - b_i, однако, эластичность не постоянна, ввиду непостоянства отношения $\frac{p_i}{x_i^*}$. Например (рисунок 5.1), в случае одного товара:

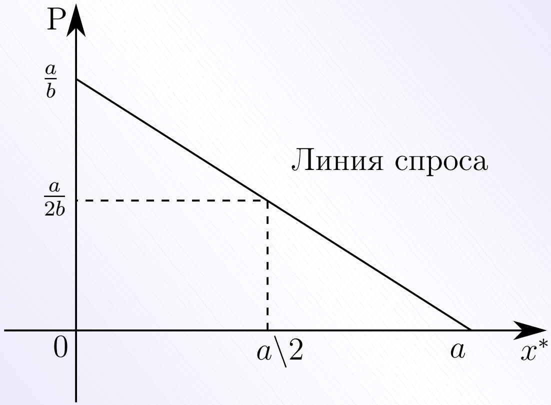


Рисунок 5.1 – Линейная функция спроса

$$\varepsilon_p(x^*)|_{(a,0)} = 0 \ \varepsilon_p(x^*)|_{(\frac{a}{2},\frac{a}{2b})} = -1 \ \varepsilon_p(x^*)|_{(0,\frac{a}{b})} = -\infty$$

Имеется еще два тривиальных (особых) случая эластичности спроса по цене, показанных на рисунке 5.2.

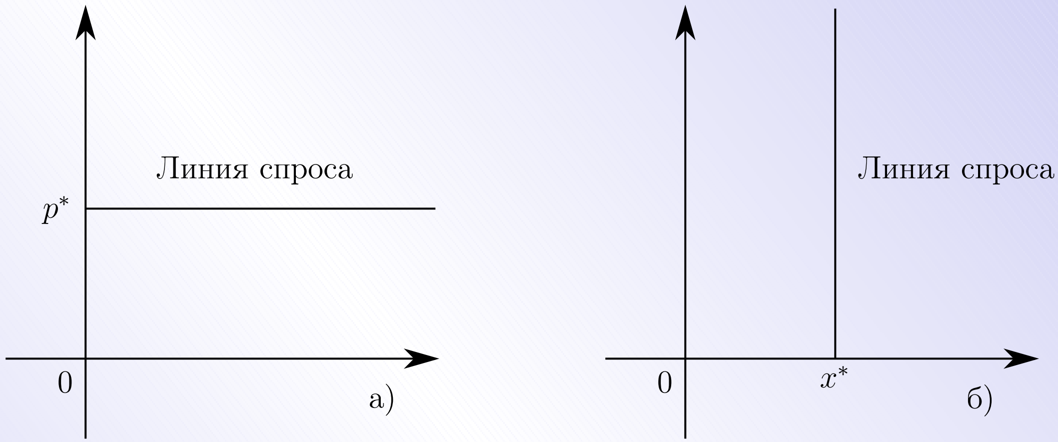


Рисунок 5.2 – Линейная функция спроса

В случае а) $\varepsilon_p(x^*) = -\infty$ – имеется только одна цена p^* , по которой потребитель будет приобретать товар; даже при малейшем увеличении цены выше этого уровня требуемое количество товара упадет до нуля, и любое снижение цены приведет к неограниченному росту спроса. Кривая же спроса, изображенная на рисунке 5.2 б) совершенно неэластична. Потребитель приобретет фиксированное количество товара x^* независимо от цены.

Координатная запись функции спроса $x_i^* = x_i^*(p_1, \ldots, p_n, K)$ говорит о том, что спрос на один вид товара зависит, вообще говоря, от цен и других товаров.

Процентное изменение количества товара вида i при однопроцентном увеличении цены товара вида $j (i \neq i)$ называется перекрестной эластичностью спроса по цене:

$$\varepsilon_{p_j}(x_i^*) = \lim_{\Delta p_j \to 0} \left(\frac{\frac{\Delta x_i^*}{\Delta x_i^*}}{\frac{\Delta p_j}{p_j}} \right) = \frac{p_j}{\Delta x_i^*} \cdot \lim_{\Delta p_j \to 0} \left(\frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j} \right)$$

или

$$\varepsilon_{p_j}(x_i^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^*} \qquad (5.4)$$

Для взаимозаменяемых товаров (таких, как чай и кофе) повышение цены товара j увеличивает спрос на товар i, поэтому перекрестная эластичность положительна. Для взаимодополняющих друг друга товаров (таких, как кофе и сахар) повышение цены одного товара влечет понижение спроса на другой, поэтому перекрестная эластичность отрицательна.

До сих пор мы говорили о точечной эластичности, т.е. о эластичности, измеряемой в отдельной точке кривой спроса. Если требуется измерение эластичности на отрезке (точнее, на дуге) кривой спроса, то применяют дуговую эластичность спроса по цене:

$$\varepsilon_{\bar{p}_i}(x_i^*) = \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_i} \cdot \frac{\bar{p}_i}{\bar{x}_i^*} \qquad (5.5)$$

$$\Delta x_i^* = x_i^{*''} - x_i^{*'}, \Delta p_i = p_i^{''} - p_i^{'},$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

Закрыть

$$\bar{p}_i = \frac{p_i'' + p_i'}{2}, x_i^* = \frac{x_i^{*''} + x_i^{*'}}{2},$$

$p_i', x_i^{*'}$ $(p_i'', x_i^{*''})$ - цена и количество товара в начальной (конечной) точке рассматриваемой дуги кривой спроса. Дуговая эластичность тем точнее, чем ближе друг к другу точки $p_i', x_i^{*'}$ и $(p_i'', x_i^{*''})$. Устремляя расстояние между ними к нулю, очевидно, мы получим формулу точечной эластичности.

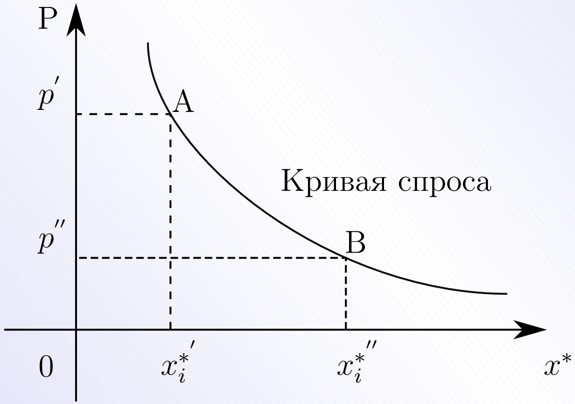


Рисунок 5.3 – Схема примера 5.1

Пример 5.1. Пусть кривая спроса имеет вид р $= 200 - (x^*)^2$. Требуется вычислить эластичность спроса по цене при изменении последней

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования
На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

от p'=136 до $p'' = 119$ (рисунок 5.3). Прежде всего, пользуясь формулой спроса, найдем соответствующие этим ценам количества товаров:

$$x_i^{*'} = \pm\sqrt{200 - p'} = \pm\sqrt{200 - 136},$$

$$x_i^{*''} = \pm\sqrt{200 - p''} = \pm\sqrt{200 - 119},$$

Отбрасывая отрицательные значения корней, как не имеющих смысла, найдем: $x^{*'} = 8, x^{*''} = 9$. Теперь наша задача сводится к вычислению дуговой эластичности спроса $p = 200 - (x^*)^2$ по цене для участка (дуги) кривой спроса от точки A=(136,8) до точки B=(119,9). Пользуясь формулой (5.5), получаем:

$$\bar{\varepsilon}_p(x^*) = \frac{1}{17} \cdot \frac{127{,}5}{8{,}5} = 0,88$$

Для сравнения вычислим точечную эластичность в точке A:

$$\varepsilon_p(x^*)|_{(136,8)} = \frac{dx^*}{dp}|_{(136,8)} \cdot \frac{136}{8} = \frac{d(200-p)^{(\frac{1}{2})}}{dp}|_{p=136} \cdot \frac{136}{8} =$$

$$= \frac{1}{2(200-136)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{136}{8} = \frac{1}{16} \cdot \frac{136}{8} = \frac{136}{128} = 1,0625$$

(Здесь мы учли неравенство $x^* > 0$).

$$\varepsilon_k(x^*) = \frac{\partial x^*}{\partial K} \cdot \frac{K}{x^*}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Пользуясь схемой проведенного выше анализа эластичности спроса по цене, читатель самостоятельно может провести анализ эластичности спроса по доходу.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 6

Анализ влияния дохода и цен на спрос

Как мы видели в предыдущих параграфах, для оценки различных ситуаций в сфере потребления применяются предельный спрос и предельная полезность денег по ценам $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right.$ и $\left.\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}\right)$ и доходу $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial K}\right.$ и $\left.\frac{\partial \lambda^*}{\partial K}\right)$. Поэтому желательно иметь формулы для их вычисления. Если общее решение задачи (4.1)–(4.2) для конкретной функции полезности U найдено в виде функций

$$x_1^*(p, K), \ \ldots, \ x_n^*(p, K, \lambda^*(p, K)) \tag{6.1}$$

от $n+1$ параметра $p_1, \ \ldots, \ p_n, K$, то требуемые предельные величины можно найти, вычисляя частные производные функций (6.1) по p_i и K. Но эти же предельные величины можно найти не решая задачу (4.1)–(4.2), а сразу из системы необходимых и достаточных условий оптимальности (4.5)–(4.8).

Зная теперь, что оптимальное решение x^* задачи (4.1)–(4.2)) лежит на бюджетной линии (смотри рисунок 4.2), мы можем априори считать, что доход будет использован полностью. Тогда в (4.2)) будет строгое равенство, и система (4.5)–(4.8) примет вид:

$$\begin{cases} K - \langle p, x \rangle = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial p} - \lambda p = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Так как эта система зависит от параметров p, K и содержит неизвестные λ, x, то нам удобно ввести обозначения:

$$\varphi^1(\lambda, x, p, K) = K - \langle p, x\rangle$$

$$\varphi^1(\lambda, x, p, K) = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p. \tag{6.3}$$

Как и ранее, будем предполагать, что функция U дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям (2.1) – (2.2).

Система (6.2) будет разрешимой относительно $n+1$ переменных $x_1, \ldots,$ x_n, λ, если определитель матрицы Якоби (матрица первых производных системы (6.2)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Покажем, что это так и есть. С учетом обозначений (6.3) получаем:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

где p' - транспонированный вектор p,H – матрица Гессе (матрица вторых производных системы (6.2)). В координатной форме

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & l\ldots & -p_n \\ -p_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & l\ldots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ l\ldots & l\ldots & l\ldots & l\ldots \\ -p_n & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & l\ldots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

– есть «окаймляющая» ценами товаров матрица Гессе. По условию (2.2) матрица Гессе отрицательно определена (смотри § 2.2) и поэтому невырожденна. Следовательно, определитель матрицы Якоби не равен нулю, и система (6.2) имеет решение (по λ и x).

Перейдем к вычислению требуемых предельных величин.

Вычисление предельных величин $\frac{\partial x_i^*}{\partial K}$ и $\frac{\partial \lambda^*}{\partial K}$ (влияние дохода на x^* и λ^*).

Подставим (6.1) в систему (6.2):

$$\begin{cases} K - \langle p, x^*(p,K)\rangle \equiv 0, \\ \frac{\partial U(x^*(p,K))}{\partial x} - \lambda^*(p,K)p \equiv 0. \end{cases}$$

и продифференцируем ее по K:

$$\begin{cases} 1 - p\frac{\partial x^*}{\partial K} = 0, \\ H\frac{\partial x^*}{\partial K} - p\frac{\partial \lambda^*}{\partial K} = 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в форме, удобной для перехода к матричной записи:

$$\begin{cases} -p\frac{\partial x^*}{\partial K} = -1, \\ H\frac{\partial x^*}{\partial K} - p\frac{\partial \lambda^*}{\partial K} = 0. \end{cases}$$

В матричной форме эта система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial K} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial K}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial K}\right)$$

Решая систему (6.5), можно найти искомые предельные величины по доходу.

Вычисление предельных величин $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial \lambda_i^*}{\partial p_i}$, (влияние цены p_i на x^* и λ^* при условии постоянства остальных цен $p_j (j \neq i)$ и дохода K).

Дифференцируя систему (6.5) по p_i, получаем (в координатной форме):

$$\begin{cases} -x_i^* - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{j,i} = 0. j = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{6.6}$$

где

$$\delta_{ji} = \begin{cases} -p\frac{\partial x^*}{\partial p} = x^* \\ -p'\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} + H\frac{\partial x^*}{\partial p} = \lambda^* E_n; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n}$$

E_n- единичная $n \times n$ – матрица ($E_n = \|\delta_{i,j}\|$ – матрица с нулевыми элементами за исключением диагональных, равных 1) .

Решая систему (6.7), можно найти искомые предельные величины по цене *i-го* товара.

Вычисление предельных величин $(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j})_{comp}$, $(\frac{\partial \lambda_i^*}{\partial p_j})_{comp}$ (влияние цен $p_1, \ \ldots \ , p_n$ на x^* и λ^* при условии компенсации дохода так, чтобы полезность была неизменной).

Используя систему (6.2), найдем полные дифференциалы функций U и K:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \lambda \langle p, dx \rangle ,$$

$$dK = d\lambda \langle p, x \rangle = \lambda \langle p, dx \rangle + \lambda \langle dp, x \rangle .$$

Для того, чтобы полезность оставалась неизменной, т.е. чтобы $dU = 0$, необходимо, чтобы $p \cdot dx = 0$ (так как $\lambda > 0$), а это справедливо, если $dK = \langle dp \cdot x \rangle = dp_1 x_1 + \cdots + dp_n x_n$. Содержательно это означает, что при возрастании, например, цены p_i до $p_i + dp_i$ приращение дохода, обеспечивающее неизменность полезности, равно $dK = dp_i \cdot x_i$.

Дифференцируя (6.4) по p_i, когда $dK = dp_i \cdot x_i$, получаем:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{ji} = 0, i = 1, ..., n, \end{cases}$$

Поясним, что первое уравнение этой системы получается из (6.6) при условии

$$\langle p, dx \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0,$$

так как в этом случае из (6.6) следует x_j^*.

$$\begin{cases} -p(\frac{\partial x_i^*}{\partial p})_{comp} = 0, \\ -p(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p})_{comp} + H(\frac{\partial x^*}{\partial p})_{comp} = \lambda^* E_n, \end{cases}$$

где $(\cdot)_{comp}$ – означает компенсированное изменение цен.

Запишем теперь в матричную форму:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{\partial \lambda^*}{\partial p})_{comp} \\ (\frac{\partial x^*}{\partial p})_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix} \qquad (6.8)$$

Решая систему (6.8), можно найти искомые предельные величины при компенсированном изменении цен.

Все три матричных (6.5), (6.7) и (6.8) могут быть объединены в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial P} & \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x^* & 0 \\ 0 & \lambda^* E_n & \lambda^* E_n \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

Это уравнение называется основным матричным уравнением теории потребления. Матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial P} & \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix}$$

называется матрицей сравнительной статики, а ее элементы – показателями сравнительной статики. Такое название объясняется тем, что эти показатели характеризуют чувствительность x^* и λ^* к изменениям параметров p и K путем сравнения положения оптимума в статике до и после того, как эти параметры изменились.

Поскольку левая часть уравнения (6.9) есть невырожденная матрица (ибо такой является Якобиан), то оно может быть разрешено относительно показателей сравнительной статики. Решение уравнения (6.9) связано с понятием уравнения Слуцкого, чему и будет посвящен следующий параграф.

ЛЕКЦИЯ 7
Уравнение Слуцкого

Основное матричное уравнение (6.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda^*}{\partial K} & \frac{\partial\lambda^*}{\partial P} & (\frac{\partial\lambda^*}{\partial p})_{comp} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & (\frac{\partial x^*}{\partial p})_{comp} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Решение этой системы относительно показателей сравнительной статики по спросу имеет вид:

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = -\mu H^{-1} p', \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = (\mu H^{-1} p')x^* + (\mu H^{-1} p') \cdot (\mu H^{-1} p' \lambda^*) + H^{-1}\lambda^* \tag{7.3}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = (\mu H^{-1} p') \cdot (\mu H^{-1} p' \lambda^*) + H^{-1}\lambda^* \tag{7.4}$$

Здесь – обратная матрица Гессе, а $\mu = \frac{-1}{pH^{-1}p'} > 0$ – скалярная величина. Можно показать, что

$$\mu = -\frac{\partial\lambda^*}{\partial K} = -\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial u(x^*(p,k))}{\partial K}\right) = -\frac{\partial^2 u^*}{\partial K^2}$$

поэтому скаляр μ можно интерпретировать как коэффициент убывания предельной полезности денег.

Сравнивая (7.3) и (7.4) замечаем, что

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\mu H^{-1} p'\right) x^* + \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}$$

Сопоставляя это уравнение с (7.2), получаем,

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial K} \cdot x^*. \tag{7.5}$$

Равенство (7.5) называется **уравнением Слуцкого**. Это же уравнение называют основным уравнением теории ценности.

В координатной форме уравнение Слуцкого выглядит так:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = (\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i})_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} * x_i^*, i, j = 1, \ \ldots, \ n. \tag{7.6}$$

Левую часть уравнения принято называть общим эффектом (от влияния цены на спрос), первое слагаемое в правой части - влиянием замены (т.е. компенсированного изменения цены на спрос), второе слагаемое - влиянием дохода (влияние изменения дохода на спрос). Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^*, i, j = 1, \ \ldots, \ n. \tag{7.7}$$

Из (7.7) следует, что матрица влияния замены симметрична и отрицательно определена (установите это самостоятельно). Из отрицательной определенности следует

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0, j = 1, \ \ldots, \ n \tag{7.8}$$

Отсюда вывод – компенсированное возрастание цены товара приводит к уменьшению спроса на этот товар.

Их симметричности матрицы влияния замены и уравнения (7.7) получаем:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*}{\partial K} \cdot x_j^*, i, j = 1, \ \ldots, \ n$$

Поэтому уравнение Слуцкого, в частности, означает, что:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^*, j = 1, \ \ldots, \ n \tag{7.9}$$

Здесь производная $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}$ называется влиянием на спрос (на j-й товар) изменения частной цены (цены j-го товара). Равенство (7.9) используют для характеристики типов товаров.

Определение 7.1. Товар вида j называется нормальным, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; товаром Гиффина, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$; ценным, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$; малоценным, если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$. Два товара i и j являются взаимозаменяемыми, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ взаимодополняемыми, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$

Как следует из (7.8) и (7.9), должно быть

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^* < 0$$

С учетом условия x_j^* приходим к следующим выводам:

а) если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$, то обязательно $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$;

б) если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$, то обязательно $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$.

Отсюда, товар Гиффина не может быть ценным, т.е. он обязательно малоценный.

В общем случае каждый товар попадает в одну из следующих категорий.

1. Нормальный и ценный $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0; \frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0\right)$;

2. Нормальный и малоценный $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0; \frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0\right)$;

3. Товар Гиффина и малоценный $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0; \frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0\right)$.

Существование товара Гиффина кажется не вполне реальным. Действительно, его определение противоречит закону о спросе (спрос есть убывающая функция цены). Однако, когда какой-либо популярный среди населения товар продается по слишком низкой цене, появляется подозрение о его качестве. Это может оказаться причиной снижения спроса на него. Последующее же поднятие цены может повысить спрос на этот товар.

Нормальный и ценный товар отличается от нормального малоценного товара высоким качеством. Например, фрукты южных сортов по питательным и вкусовым качествам превосходят северные сорта, но они и дороже; масло дороже маргарина, так как качество его выше; вычислительная техника завода-изготовителя, как правило, качественнее и поэтому дороже, чем та же техника, но лицензионной сборки и т.д.).

Умножим обе части равенства (7.4) на вектор p:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \cdot p' = -p\left(\frac{1}{pH^{-1}p'} \cdot \mu H^{-1}p'\right) \cdot (pH^{-1}\lambda^*) + pH^{-1}\lambda^* =$$

$$= -pH^{-1}\lambda^* + pH^{-1}\lambda^* = 0$$

Следовательно, в координатной форме имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \cdot p_i' = 0, i = 1, \ \dots, \ n \qquad (7.10)$$

Принимая во внимание положительность всех цен и неравенство (7.8), приходим к выводу о том, что для каждого j существует i $(i \neq j)$ такое, что

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$$

Таким образом, в наборе $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ каждому товару соответствует по крайней мере один такой товар, который составляет с ним взаимозаменяемую пару.

Из уравнения Слуцкого (7.5) и равенства (7.10) получаем

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} \cdot p^{'} = -\frac{\partial x^*}{\partial K} \langle p, x^* \rangle$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} \cdot p^{'} + \frac{\partial x^*}{\partial K} K = 0$$

Запишем это равенство в координатной форме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \cdot p_i + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} K = 0, i = 1, \ldots, n$$

и разделим обе части каждого из n равенств на $x_j^* > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_j^*} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \frac{K}{x_j^*} = 0, i = 1, \ldots, n$$

В обозначениях эластичности (смотри (3.2), (5.2)) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{p_i}(x_j^*) + \varepsilon_K((x_j^*)) = 0, i = 1, \ldots, n$$

Отсюда вывод: для каждого товара j сумма всех n перекрестных эластичностей спроса по цене и эластичности спроса по доходу должна быть равна нулю, т.е. сумма всех эластичностей по цене равна отрицательной эластичности по доходу.

Умножая (7.2) на вектор цен p, получим

$$p \cdot \frac{\partial x^*}{\partial K} = \frac{pH^{-1}p'}{pH^{-1}p'} = 1$$

(условие агрегации Энгеля). В координатной форме имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial K} = 1 \tag{7.11}$$

Отсюда должно быть $\frac{\partial x_j^*}{\partial K}$ для некоторого j=1, ..., n. Следовательно, в наборе $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ все товары одновременно не могут быть малоценными.

С учетом (7.10) и (7.11)) из уравнения Слуцкого можно получить (убедитесь в этом самостоятельно)

$$p\frac{\partial x^*}{\partial K} + x^* = 0$$

(условие агрегации Курно). В координатной форме имеем:

$$x_i^* = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}, i = 1, \ \ldots, \ n.$$

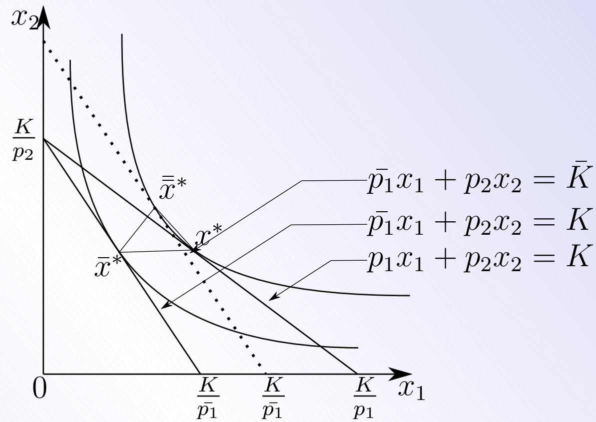


Рисунок 7.1 – Геометрическая иллюстрация уравнения Слуцкого

Отсюда вывод: значение спроса на товар вида i равно отрицательной взвешенной сумме изменений спроса на все товары по отношению к цене товара i, в которой в качестве весов выступают цены товаров.

Изучая уравнение Слуцкого можно получить и другие выводы по интересующим исследователя проблемам теории ценности и потребления.

В завершение параграфа приведем геометрическую интерпретацию изложенного выше материала для $n=2$ (рисунок 7.1). Пусть p_1 возрастает до $\bar{p}_1$, а $\bar{x}^*$ – решение задачи потребителя для параметров $\bar{p}_1, p_2$, K. Тогда $\bar{x}^*$ лежит в пересечении бюджетной линии, проходящей через точки $(\frac{K}{\bar{p}_1}, 0)$ и $(\frac{K}{\bar{p}_2}, 0)$ с кривой безразличия $U = U(\bar{x}^*)$. Общий эффект $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$ изменения p_1 выражается отрезком $[x^*, \bar{x}^*]$.

Точка $\bar{x}^*$ лежит левее x^* (т.к. $\bar{x_1}^* < x^*$ из-за $\bar{p_1} > p_2$), т.е. при возрастании цены первого товара спрос на него снизился. Следовательно, товар 1 нормален $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} < 0$. Предположим теперь, что происходит компенсированное увеличение цены p_1 до $\bar{p_1}$. Через $\bar{K}$ обозначим соответствующее компенсированное изменение (увеличение) дохода, т.е.

Геометрически бюджетная линия изменится (пройдет через $\frac{\bar{K}}{\bar{p_1}}, 0, 0, \frac{\bar{K}}{\bar{p_2}}$), а точка будет лежать в пересечении этой бюджетной линии с кривой безразличия (по определению компенсированного изменения цены p_1).

Так как бюджетная линия $\bar{p_1}x_1 + p_2x_2 = \bar{K}$ параллельна бюджетной линии $\bar{p_1}x_1 + p_2x_2 = K$ (один и тот же наклон $\bar{p_1}/p_2$), то точка $\bar{\bar{x}}^*$ будет лежать левее точки . Это подтверждение того, что влияние замены отрицательно. Влияние замены $(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1})_{comp}$ выражается отрезком $[x^*, \bar{\bar{x}}^*]$, а влияние дохода $\frac{\partial x_1^*}{\partial K}$ выражается отрезком $[\bar{\bar{x}}^*]$. Точка $\bar{x}^*$ лежит левее точки $\bar{\bar{x}}^*$ ($\bar{x}^* < \bar{\bar{x}}^*$), т.е. при возрастании дохода (от K до $\bar{K}$) спрос на товар 1 увеличился. Следовательно, товар 1 является ценным $(\frac{\partial x_1^*}{\partial K} > 0)$.

Лабораторная работа 1. Решение типичных задач теории потребления

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X1	X2	Y1	Y2	Z1	Z2	Q
Вариант 1	**5**	**13**	**16**	**4**	**8**	**12**	**4**	**9**	**14**	**3**	**120**	**0**	**20**	**1**	**37**	**12**	**12**	**12**	**2**	**0.4**	**0.04**	**10**	**100**	**1**	**100**	**121**	**1000**	**12500**
Вариант 2	5	9	15	4	8	9	4	10	16	0	40	0	40	1	34	13	12	11	1	0.4	0.07	10	200	1	100	12	200	4500
Вариант 3	8	13	16	4	8	12	4	9	14	3	120	0	20	1	35	12	12	12	2	0.4	0.04	10	100	1	100	121	1000	13000

1. Пусть фирме "Рога и копыта"необходимо привезти со склада некоторые виды ресурсов: ткань, нитки и пуговицы. Они необходимы для производства костюмов, платьев и курток. Ткань измеряется в отрезах, нитки - в мотках, пуговицы - поштучно. Известно, что для изготовления одного костюма нужно A отрезов ткани, B мотков ниток и C пуговиц; для пошива одного платья: D отрезов ткани, E мотков ниток и F пуговиц; для одной куртки соответственно G отрезов, H мотков и I пуговиц. Торговая фирма "Рога изобилия"может закупить у фирмы "Рога и копыта"одежду: от J до K костюмов, от L до M платьев, от N до P курток ($J \leq K$, $L \leq M$, $N \leq P$). Цены, которые предлагаются торговой фирмой, следующие: за один костюм - R млн руб., за платье - S млн руб., за одну куртку - T млн руб. Необходимо выяснить, сколько материала необходимо привезти со склада и сколько товаров изготовить, для того, чтобы получить максимальный доход.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

2. Допустим, что на складе ничего нет, а некая фирма "С гулькин нос"предлагает любое количество исходных ресурсов: тканей, ниток и пуговиц. Необходимо выяснить, сколько сколько товаров закупить у фирмы "С гулькин нос"для обеспечения производства своих товаров для того, чтобы получить максимальную прибыль после их продажи. Цены на товары: отрез ткани - U млн руб.; моток ниток - V млн руб., пуговица - W млн руб.

3. У фирмы "С гулькин нос"товар закончился, а некая фирма "Купи-продай"предлагает нужные нашей фирме ("Рога и копыта") товары по тем же ценам, что и старый партнер. Но количество товаров для продажи ограничено. Ткани можно закупить от X1 до X2 отрезов, ниток: от Y1 до Y2 мотков, пуговиц - от Z1 до Z2 штук. Необходимо выяснить, сколько товара нужно купить фирме "Рога и копыта"у "Купи-продай чтобы получить максимальную прибыль.

4. В последнее трудное время при рыночной экономике у фирмы "Рога и копыта"сформировался некий бюджетный фонд Q млн руб. Только за счет него фирма может купить товары у постоянного партнера - фирмы "Купи-продай". Необходимо решить предыдущую задачу с учетом такой корректировки.

Лабораторная работа 2. Задача теории потребления для двух товаров

Фирма "Весёлый Роджер"занимается производством пиротехники двух видов: петарды и ракеты. Для их производства используются, в основном, два вида товара - порох и картон. Известны цены на эти товары (p) и цены на готовую продукцию (c). На закупку сырья есть ограничения снизу и сверху (b^* b^*).

Ограничения на производство нет

Бюджет фирмы ограничен величиной K.

Затраты пороха и картона показаны в матрице A.

Определить оптимальное количество производства двух товаров, чтобы прибыль была максимальной.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

вариант 1		вариант 2		вариант 3	
c	p	c	p	c	p
20	1	24	2	25	3
22	3	20	1,5	20	1,5
A		A		A	
5	3	1	2	2	4
2	1	2	1	4	3
b*	b.	b*	b.	b*	b.
30	0	35	0	35	0
50	0	40	0	40	0
K	70	K	70	K	80

вариант 4		вариант 5		вариант 6	
c	p	c	p	c	p
28	3	26	1	26	1
30	2	30	2	30	1
A		A		A	
1	3	1	2	1	2
2	2	4	1	4	2
b*	b.	b*	b.	b*	b.
35	5	35	10	40	5
50	10	50	10	50	10
K	85	K	90	K	90

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

вариант 7		вариант 8		вариант 9	
c	p	c	p	c	p
28	2	25	3	28	1
30	2	20	1,5	30	2
A		A		A	
2	2	2	4	2	2
4	2	4	3	4	2
b*	b.	b*	b.	b*	b.
25	5	35	10	40	5
55	10	50	10	50	10
K	100	K	90	K	80

вариант 10	
c	p
26	1
28	1
A	
1	3
2	2
b*	b.
40	10
50	10
K	70

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 8

Основные элементы модели производства

Под производством понимается процесс взаимодействия экономических факторов, завершаемый выпуском какой-либо продукции. Правила, предписывающие определенный порядок взаимодействия экономических факторов, составляют способ производства или, иначе говоря, технологию производства. Производство – основная область деятельности фирмы (или предприятия). Фирма – это организация, производящая затраты экономических ресурсов для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям, в том числе, другим фирмам. Производственными единицами являются не только заводы и фабрики, но и отдельные лица – фермеры, ремесленники и др.

Производство можно представить как систему «затраты-выпуск», в которой выпуском является то, что фактически произведено, а затратами – то, что потребляется с целью выпуска (капитал, труд, энергия, сырье). Поэтому формально можно сказать, что **производство – это функция, которая каждому набору затрат и конкретной технологии ставит в соответствие определенный выпуск.** Именно такое упрощенное понимание производства как «черного ящика» заложено в математической модели производства. Во «вход» этого черного ящика подаются затраты, а на «выходе» получаем выпуск (произведенную продукцию).

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Подобное описание производства на первый взгляд кажется сильно абстрактным, так как в нем не отражены технологические процессы, происходящие внутри черного ящика. В математической модели технология производства учитывается обычно посредством задания соотношений между затратами и выпуском т.е. нормой затрат каждого из ресурсов, необходимых для получения одной единицы выпускаемой продукции. Такой подход объясняется тем, что математическая экономика изучает суть экономических процессов, а сугубо технические операции как таковые (а не их экономические следствия) остаются за рамками этой науки.

Задача фирмы, как производственной единицы, сложна и многогранна – начиная от организации производства и кончая благотворительной деятельностью. Естественно, математической моделью нельзя охватить весь спектр деятельности фирмы и отразить все преследуемые цели. Поэтому при формализации задачи рационального функционирования фирмы учитываются лишь основные конечные цели.

Конечной целью фирмы является получение наибольшей прибыли от реализации своей продукции. Напомним в этой связи, что прибыль понимается как разность двух величин: выручки от реализации продукции (дохода) и издержек производства. Издержки производства равны общим выплатам за все виды затрат, иначе говоря, издержки - это денежный эквивалент материальных затрат. В общем случае издержки состоят из двух слагаемых: постоянных издержек и переменных издержек.

Постоянные издержки (расходы на закупку и ремонт оборудования, содержание фирмы, страховку и пр.) фирма несет независимо от объема выпуска. Переменные издержки (расходы на заработную плату, сырье и пр.) касаются использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей и меняются вместе с объемом выпуска.

Согласно с поставленной целью, задача фирмы сводится к поиску такого способа производства (сочетания затрат и выпуска), который обеспечивает ей наибольшую прибыль с учетом и в рамках имеющихся у нее ограниченных ресурсов. Данная трактовка цели фирмы и наилучшего способа производства не является единственно возможной. Речь идет о некоторой гипотезе относительно предпочтений производителя, а не о логической необходимости. В действительности же мотивы принимаемых руководителями фирм решений могут быть продиктованы другими соображениями, например, гуманного или социально-политического характера. Поэтому в отличие от математической теории потребления, где существовала единственная, логически оправданная оптимизационная модель потребителя, здесь нецелесообразно говорить об «оптимизационной модели фирмы» как таковой. Задачи фирмы могут существенно отличаться как преследуемой целью, так и временным периодом ее решения.

Обсужденную выше задачу будем называть задачей фирмы на максимизацию прибыли. Двойственной к ней (в некотором смысле) является задача фирмы на минимизацию издержек при фиксированном уровне планируемого выпуска (дохода). Именно такая формализация цели производства в последнее время становится более популярной в связи с глобальной проблемой «устойчивого развития» общества, так как она созвучна с задачами рационального использования природных ресурсов.

Из приведенного выше краткого описания сути производства видно, что основными факторами, которые должны быть учтены при моделировании задачи фирмы, являются выпуск продукции, затраты ресурсов, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы. Перед тем, как построить ту или иную оптимизационную модель задачи фирмы, более подробно остановимся на способах формализации этих понятий и рассмотрим некоторые их свойства.

ЛЕКЦИЯ 9

Пространство затрат и производственная функция

Предположим, что фирма производит n видов продуктов. Виды продуктов будем обозначать индексом j, а их количества – через y_j, j=1,...,n. Технология производства каждого вида продукта требует использования ряда ресурсов в некоторых количествах. Двойными индексами k_j обозначим виды ресурсов, используемых для выпуска продукта вида j. Пусть $k_j = 1, 2, \ldots, m_j$. Обозначим через x_{k_j} – количества этих ресурсов, $k_j = 1, 2, \ldots m_j, y_j, j = 1, \ldots, n$. Следовательно, имеется всего $m_1 + \cdots + m_n$ видов ресурсов.

Использование такой двойной индексации привлекательно с точки зрения информативности (видно, какой ресурс относится к какому продукту), но неудобно чисто технически. Во-первых, усложняется запись формул; во-вторых, увеличивается размерность задачи (т.к. среди m_1, $\ldots$, m_n могут быть одни и те же наименования) и, в-третьих, такие операции как сложение, вычитание затрат в векторной форме, а также составление уравнений становятся невозможными без дополнительных преобразований индексов (идентификация, упорядочение и т.д.).

Поэтому в дальнейшем виды ресурсов будем обозначать одинарными индексами k, их количества – x_k, где $k = 1, \ldots, m$. Здесь m – достаточно большое число (равное сумме $m_1 + \cdots + m_n$, где каждый ресурс считается только один раз). Теперь можно говорить, что для производства

n видов продуктов фирма использует m видов затрат. Это не приводит к недоразумениям, так как в случае неиспользования k*-го* ресурса для выпуска данного продукта полагаем $x_k = 0$.

Введем в рассмотрение два вида векторов: $x = (x_1, \ldots, x_m)$ – вектор затрат и $y = y_1, \ldots, y_n$ – вектор выпуска. Положительный ортант

$$R^m_+ = \{x \in R^m | x_k \geq 0, k = 1, \ldots, m\}$$

называется пространством затрат. Аналогично определяется пространство выпуска:

$$R^n_+ = \{y \in R^n | y_j \geq 0, j = 1, \ldots, m\}$$

Для отражения реальных возможностей фирмы в математических моделях часто применяются более узкие множества $X \subset R^m_+$ и $Y \subset R^n_+$.

Технологическая связь между затратами и выпуском описывается с помощью производственной функции.

Определение 9.1. Любая функция $f : R^m_+ \to R^n_+$, ставящая в соответствие каждому вектору затрат x вектор $y = f(x)$ максимального выпуска, который может быть получен при этих затратах, называется производственной функцией.

Это есть определение производственной функции для многопродуктовой фирмы, т.е. векторной производственной функции. Если фирма выпускает только один вид продукта, то производственная функция является скалярной: $f : R^m_+ \to R^1_+$ или

$$y = f(x_1, \ \ldots, \ x_n) \tag{9.1}$$

В общем случае производственную функцию можно записать в неявной форме: $F(x,y,A)=0$, где А – $n \times m$ – матрица параметров (технологическая матрица). В некоторых моделях применяется следующее выражение для производственной функции: $F(z_1, \ \ldots, \ z_r, A) = 0$, где переменные z_l со знаком «-» обозначают затраты, а со знаком «+» – выпуски.

Если в качестве независимых переменных (аргументов) выступают затраты (смотри (9.1)), то производственную функцию иногда называют функцией выпуска, если же фиксирована величина выпуска (y), то производственная функция является функцией затрат $(x = f^{-1}(y))$. Таким образом, функция выпуска и функция затрат являются взаимно обратными друг другу функциями.

Применение производственных функций не ограничивается выявлением зависимости затраты-выпуск. Различные приемы математического аппарата позволяют использовать их для вычисления численных характеристик производства, анализа эффективности изменения масштаба производства и технологического прогресса, исследования эластичности производственных факторов, рационального ведения хозяйства, оптимального планирования и прогнозирования вариантов развития фирмы и др.

Поэтому очень важно, чтобы производственная функция объективно отражала моделируемую действительность, т.е. чтобы она удовлетворяла содержательно-логическим и экономическим требованиям. Основные из них следующие:

в число аргументов производственной функции должны быть включены все существенные для данного процесса факторы;

все величины должны иметь отчетливый экономический смысл;

все экономические величины, входящие в производственную функцию, должны быть измеримы;

выпуск продукции без затрат невозможен;

если величина какого-либо ресурса ограничена, то выпуск не может расти бесконечно;

увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Вопрос об адекватном описании экономической реальности на языке производственных функций тесно связан с их математическими свойствами. Ради простоты эти свойства приведем для однопродуктового производства, т.е. для производственной функции вида (9.1).

1. Монотонность: из $x^1,\ x^2 \in R^m_+$ и $x^1 \geq x^2$ следует $f(x^1) \geq f(x^2)$.

2. Вогнутость: для любых $x^1, x^2 \in R^m_+$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ справедливо неравенство $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2)$.

3. Поведение в начале координат: $f(0) = 0$.

4. Однородность: $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$, где $\lambda > 0$ - масштабное число, $\alpha > 0$ - степень однородности.

Если производственная функция дифференцируема по всем аргументам, то свойства 1 и 2 соответственно могут быть заменены следующими неравенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \geq 0, k = 1,\ \ldots,\ m \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k^2} < 0, k = 1,\ \ldots,\ m \tag{9.3}$$

Частные производные называются предельными продуктами. Условие (9.2), как и свойство 1, означает, что увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Условие (9.3) показывает, что увеличение затрат одного вида ресурса (при постоянном уровне затрат других ресурсов) приводит ко все меньшему приросту выпуска. Это свойство в экономической теории называется **законом убывающей доходности (отдачи)**.

Свойство 3 является отражением бездеятельности, так как без затрат нет и выпуска. Свойство 4 описывает реакцию производства на изменение затрат. Параметр λ показывает масштаб изменения производства (расширения производства – если $\lambda > 1$, сужения производства - если $\lambda < 1$), а α – эффект от изменения масштабов производства. Если $\alpha > 0$, то одновременное увеличение всех факторов в λ раз приводит к возрастанию объема выпуска больше, чем в λ раз ($\lambda^{\alpha} > \lambda$), т.е. эффект от расширения масштаба производства положителен. При $\alpha = 1$ получаем: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ – выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты. Такие функции называются линейно-однородными (или однородными в первой степени).

Если

$$f(\lambda x) > \lambda f(x)(f(\lambda x) < \lambda f(x))$$

то говорят о возрастающем (убывающем) доходе от расширения масштаба производства. Заметим, что свойство 4 определено в точке, тогда как свойства 1 и 2 – во всем пространстве затрат.

Как мы видим, перечисленные (желательные) свойства производственной функции вполне согласуются с ее определением, так как они касаются только соотношения затраты-выпуск. Действительно, здесь нет никаких требований на бесперебойную работу станков, нормирования движения конвейера и т.д. Поэтому производственная функция, как отображение количественной связи между затратами и выпуском, представляет собой регрессионную модель (см. §2.5). Следовательно, она может быть построена на основе статистических данных и с применением методов математической статистики. Оставляя подробное обсуждение этого вопроса до §4.4, сейчас мы приведем примеры наиболее удачно построенных и потому часто применяемых на практике производственных функций. При этом для простоты будем рассматривать двухфакторную однопродуктовую производственную функцию вида

$$y = f(x_1, x_2)$$

Производственная функция Кобба-Дугласа. Первый успешный опыт построения производственной функции, как уравнения регрессии на базе статистических данных, был получен американскими учеными - математиком Д. Коббом и экономистом П. Дугласом в 1928 году. Предложенная ими функция изначально имела вид:

$$Y = \alpha K^{\alpha} L^{1-\alpha}(f(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\alpha} x_2^{\alpha}) \tag{9.4}$$

где Y – объем выпуска, K – величина производственных фондов (капитал), L – затраты труда, $\alpha > 0$ – числовые параметры (масштабное число и показатель эластичности). Благодаря своей простоте и рациональности, эта функция широко применяется до сих пор и получила дальнейшие обобщения в различных направлениях. Функцию Кобба-Дугласа иногда мы будем записывать в виде

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\alpha} x_2^{\alpha}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Легко проверить, что $Y(0,0)$ и

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \geq 0, \frac{\partial Y}{\partial L} \geq 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$$

Кроме того, функция (9.4) линейно-однородна:

$$Y(\lambda K, \lambda L) = \alpha(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda \alpha K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda Y(K, L)$$

Таким образом, функция Кобба-Дугласа (9.4) обладает всеми вышеуказанными свойствами.

$$f(x) = \alpha x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$$

Для учета технического прогресса в функцию Кобба-Дугласа вводят специальный множитель (технического прогресса) e^{vt}, где t – параметр времени, v – постоянное число, характеризующее темп развития. В результате функция принимает «динамический» вид:

$$f(x) = \alpha e^{vt} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

где не обязательно $\alpha + \beta = 1$. Как будет показано в следующем параграфе, показатели степени в функции (9.4) имеют смысл эластичности выпуска по капиталу и труду.

2. Производственная функция CES (с постоянной эластичностью замещения) имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = \alpha[\delta x_1^{-p} + (1-\delta)x_2^{-p}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} \qquad (9.5)$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент шкалы, $\delta > 0$ – коэффициент распределения, ρ – коэффициент замещения, γ – степень однородности. Если выполнены условия

$$0 < \gamma \leq 1, \rho > -1$$

то функция (9.5) удовлетворяет неравенствам (9.2) и (9.3) (проверьте это самостоятельно). С учетом технического прогресса функция CES записывается:

$$f(x_1, x_2) = \alpha e^{vt}[\delta x_1^{-p} + (1-\delta)x_2^{-p}]^{-\frac{\gamma}{\rho}}$$

Название данной функции следует из того факта, что для нее эластичность замещения постоянна (см. §4.3).

Производственная функция с фиксированными пропорциями. Эта функция получается из (9.5) при $\rho \to 0$ и имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1^{\gamma}, \beta x_2^{\gamma}\} \tag{9.6}$$

Производственная функция затрат-выпуска (функция Леонтьева) получается из (9.6) при $\gamma = 1$:

$$f(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$$

Содержательно эта функция задает пропорцию, с помощью которой определяется количество затрат каждого вида, необходимое для производства одной единицы выпускаемой продукции. Поэтому в литературе часто встречаются другие формы записи:

$$f(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\} \tag{9.7}$$

где $x_k \geq c_k y, k = 1, 2$

Здесь $c_k \geq 0$ – количество затрат вида k, необходимое для производства одной единицы продукции, а y – выпуск.

Производственная функция анализа способов производственной деятельности. Данная функция обобщает производственную функцию затрат-выпуска на случай, когда существует некоторое число *(r)* базовых процессов (способов производственной деятельности), каждый из которых может протекать с любой неотрицательной интенсивностью. Она имеет вид «оптимизационной задачи»

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{r} d_j y_j, \text{ где} \sum_{j=1}^{r} x_{kj} y_j \leq x_k, k = 1, 2 \tag{9.8}$$

Здесь y_j – выпуск продукции при единичной интенсивности *j-го* базового процесса, d_j – уровень интенсивности, x_{kj} – количество затрат вида k, необходимых при единичной интенсивности способа j. Как видно из (9.8), если выпуск, произведенный при единичной интенсивности и затраты, необходимые на единицу интенсивности, известны, то общий выпуск и общие затраты находятся путем сложения выпуска и затрат соответственно для каждого базового процесса при выбранных интенсивностях. Заметим, что задача максимизации функции f по $y_1, \ldots, y_r$ в (9.8) при заданных ограничениях-неравенствах является моделью анализа производственной деятельности (максимизация выпуска при ограниченных ресурсах).

Линейная производственная функция (функция с взаимозамещением ресурсов) применяется при наличии линейной зависимости выпуска от затрат:

$$f(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \tag{9.9}$$

где $a_k \geq 0$ - норма затрат *k-го* вида для производства единицы продукции (предельный физический продукт затрат). Среди приведенных здесь производственных функций наиболее общей является функция CES. Действительно, как будет показано в §4.3 с применением понятий предельной нормы замещения и эластичности замещения, она обобщает функции Кобба-Дугласа, Леонтьева и линейную производственную функцию.

Исследование функций (9.5)–(9.9) на предмет соответствия их свойствам 3, 4 и условиям (9.2), (9.3), предлагается провести читателю самостоятельно.

Для анализа процесса производства и различных его показателей наряду с предельными продуктами,

$$f_1^{\Pi}(x_1) = \frac{\partial f(x_1, \bar{x_2})}{\partial x_1}, f_2^{\Pi}(x_2) = \frac{\partial f(x_1, \bar{x_2})}{\partial x_2},$$

Кафедра алгебры,
геометрии
и математического
моделирования

(верхние черточки обозначают фиксированные значения переменных), показывающими величины дополнительных доходов, получаемых при использовании дополнительных количеств затрат, применяются понятия средних продуктов.

Средним продуктом по k-му виду затрат называется объем выпуска, приходящийся на единицу затрат k-го вида при фиксированном уровне затрат других видов:

$$f_1^C(x_1) = \frac{f(x_1, \bar{x_2})}{x_1}, f_2^C(x_2) = \frac{f(\bar{x_1}, x_2)}{x_2}$$

Зафиксируем затраты второго вида на некотором уровне $\bar{x}_2$ и сравним графики трех функций:

$$f_1^0 = f_1^0(x_1) = f(x_1, \bar{x_2}), f_1^C = f_1^C(x_1), f_1^{\Pi} = f_1^{\Pi}(x_1)$$

Пусть график функции f_1^0 имеет три критические точки (как это показано на рисунке 9.1): $\widehat{x}_1$ – точка перегиба, $\widetilde{x}_1$ – точка касания с лучом из начала координат, ${}^*_1$ – точка максимума. Эти точки соответствуют трем стадиям производства. Первая стадия соответствует отрезку $[0, \widetilde{x}_1]$ и характеризуется превосходством предельного продукта над средним: $f_1^{\Pi} > f_1^C > 0$. Следовательно, на этой стадии осуществление дополнительных затрат целесообразно. Вторая стадия соответствует отрезку $[\widetilde{x}_1, x_1^*]$ и характеризуется превосходством среднего продукта над предельным: $f_1^c > f_1^{\Pi} \geq 0$ (дополнительные затраты не целесообразны).

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

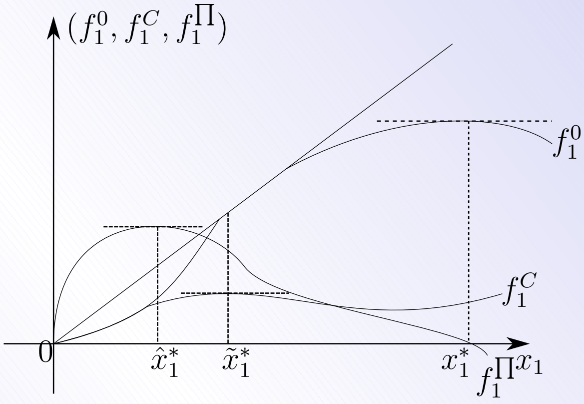


Рисунок 9.1 – Кривые выпуска

На третьей стадии $(x_1^*, \infty) f_1^\Pi < 0$ и дополнительные затраты приводят к обратному эффекту. Это объясняется тем, что x_1^* является оптимальным объемом затрат и дальнейшее увеличение их неразумно.

Для конкретных наименований ресурсов средние и предельные величины приобретают смысл конкретных экономических показателей. Рассмотрим, например, функцию Кобба-Дугласа (9.4), где $x_1 = \mathrm{K}$ – капитал, а $x_2 = \mathrm{L}$ – труд. Средние продукты

$$f_L^C = \frac{Y}{L} = \alpha K^\alpha L^{-\alpha},$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

$$f_K^C = \frac{Y}{L} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

имеют смысл соответственно средней производительности труда и средней производительности капитала (средней фондоотдачи). Видно, что средняя производительность труда убывает с ростом трудовых ресурсов. Это и понятно, так как производственные фонды (K) остаются неизменными, и потому вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Аналогичное рассуждение верно и для фондоотдачи как функции от капитала.

Для функции (9.4) предельные продукты

$$f_L^{\Pi} = \frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)f_L^C,$$

$$f_K^{\Pi} = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha\alpha K(\alpha-1)L^{1-\alpha} = \alpha f_K^C$$

имеют смысл соответственно предельной производительности труда и предельной производительности капитала (предельной фондоотдачи). В микроэкономической теории производства считается, что предельная производительность труда ($\partial Y/\partial L$) равна заработной плате (цене труда), а предельная производительность капитала ($\partial Y/\partial K$) – рентным платежам (цене услуг капитальных благ). Из условия (9.2) следует, что

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Закрыть

при неизменных основных фондах (трудовых затратах) увеличение численности работающих (объема основных фондов) приводит к падению предельной производительности труда (предельной фондоотдачи). Видно, что для функции Кобба-Дугласа предельные продукты пропорциональны средним продуктам и меньше их.

ЛЕКЦИЯ 10

Предельный анализ и эластичность в теории производства

Пояснение сути предельного анализа в экономической теории было дано в §3 при изучении теории потребления. Там же были приведены общие определения связанных с ним понятий средних и предельных величин, их относительных и процентных изменений, эластичности и предельной нормы замещения. В этом параграфе речь пойдет о применении этих понятий в сфере производства. Многие методологические аспекты предельного анализа в производстве схожи с теми положениями, которые подробно были изучены в §3 для теории потребления. Поэтому здесь изложение материала будет сравнительно лаконичным и сопровождается ссылками к этому параграфу.

Сначала остановимся на понятии эластичности производства. Уже знакомое нам из §4.2 свойство однородности производственной функции оценивает технологию производства в различных точках пространства затрат. А именно, производственная функция в одних точках этого пространства может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства, а в других - его увеличением или, наоборот, уменьшением. Локальным показателем измерения дохода от расширения масштаба производства и служит эластичность производства. Ее мы будем обозначать символом $\varepsilon_\lambda(f(x))$ («эластичность f по λ в точке x»). Формально (смотри (3.1)) мы можем написать:

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = (\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta f(\lambda x)}{\Delta\lambda})\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}$$

Однако это соотношение не отражает изменение масштаба производства в точке x. Поэтому вычислительная формула эластичности производства выглядит так:

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \lim_{\lambda x\to x}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}$$

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)} \tag{10.1}$$

В случае постоянства дохода при расширении масштаба производства (т.е. для линейно-однородной производственной функции) эластичность производства равна единице. Действительно,

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)} = \lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial[\lambda f(x)]}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda f(x)} = \lim_{\lambda\to 1} f(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = 1$$

Пример 10.1. Вычислить эластичность производства, описываемого

a) функцией Кобба-Дугласа (9.4);

b) линейной функцией (9.9).

Для функции Кобба-Дугласа имеем:

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \lim_{\lambda\to 1} \frac{\partial[\alpha(\lambda x_1)^{\alpha_1}(\lambda x_2)^{\alpha_2}]}{\partial\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\alpha(\lambda x_1)^{\alpha_1}(\lambda x_2)^{\alpha_2}} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 1} \frac{\partial[\alpha\lambda^{a_1+a_2}x_1^{a_1}x_2^{a_2}]}{\partial\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\alpha\lambda^{a_1+a_2}x_1^{a_1}x_2^{a_2}} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 1}[\alpha(\alpha_1+\alpha_2)\lambda^{a_1+a_2-1}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\frac{1}{\alpha\lambda^{a_1+a_2-1}x_1^{a_1}x_2^{a_2}}] = \lim_{\lambda\to 1}(a_1+a_2) =$$

$$= (a_1+a_2) = 1$$

Для линейной производственной функции имеем:

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \lim_{\lambda\to 1} \frac{\partial(a_1\lambda x_1 + a_2 + \lambda x_2)}{\partial\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a_1\lambda x_1 + a_2\lambda x_2} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 1}(a_1x_1 + a_2x_2)\frac{1}{a_1x_1 + a_2x_2} = 1$$

Как легко видеть, здесь мы воспользовались линейной однородностью этих двух функций.

Самостоятельно убедитесь в том, что в случае возрастания (убывания) дохода при изменении масштаба производства его эластичность больше (меньше) единицы. Вычислите эластичность производства, описываемого функциями (9.5)–(9.8).

Естественно, что предпочтение отдается производству с большей эластичностью, так как увеличивать затраты имеет смысл, если только это приводит к увеличению выпуска. Объективность оценки эластичности производства безусловно зависит от того, насколько адекватно производственная функция, как модель, отражает взаимосвязь затрат с выпуском. Можно говорить, что каждая производственная функция «по-своему» оценивает эластичность производства.

Для практического анализа производства также представляет интерес эластичность выпуска по видам ресурсов как величина, характеризующая процент прироста продукции при увеличении затрат на 1%:

$$\varepsilon_{x_k}(f(x)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f(x)}, k = 1, \ldots, m \tag{10.2}$$

Теорема 10.1. Эластичность производства, описываемого дифференцируемой линейно-однородной функцией, в любой точке пространства затрат равна сумме эластичностей выпуска по всем видам затрат.

Доказательство. Дифференцируя по λ обе части равенства $f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \ \ldots, \ \lambda x_m)$ по правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot \frac{\partial(\lambda x_k)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot x_k$$

Пользуясь этим равенством, выражение (10.1) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{\lambda(f(x))} = \lim_{\lambda \to 1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x_k)} \cdot \frac{\lambda x_k}{f(\lambda x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f(x)}$$

Здесь мы воспользовались линейной однородностью производственной функции f. Теперь ясно, что (см. (3.2))

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{x_k}(f(x))$$

а это и требовалось доказать.

Пример 10.2. Проверить утверждение теоремы 10.1 для производственных функций примера 10.1.

Для функции Кобба-Дугласа имеем:

$$\varepsilon_{x_1}(f(x)) = \frac{\alpha_1 x_1}{f(x)}, \varepsilon_{x_2}(f(x)) = \frac{\alpha_2 x_2}{f(x)},$$

$$\varepsilon_\lambda(f(x)) = \frac{\alpha_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{f(x)} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}$$

(смотри пример 10.1).

На практике по разным причинам часто возникает необходимость замены одних ресурсов другими. Например, при расширении производства фирма должна решить: либо полностью автоматизировать производство за счет дорогостоящего оборудования и сократить количество рабочих мест (сократить фонд заработной платы), либо использовать предназначенные для этого средства для частичной модернизации технологии и увеличения фонда заработной платы. Что выгодно для фирмы? Для получения ответа на этот вопрос вводят понятия предельной нормы замещения одних ресурсов другими и эластичности замещения одних ресурсов другими.

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска. Предположим, что двухфакторное производство описывается производственной функцией *Y=F(K,L)*, где Y – выпуск, K – капитал (основные фонды), L – трудовые ресурсы. Предположим, часть рабочих (ΔL) уволилась. На какую величину ΔK следует увеличить основные фонды, чтобы выпуск остался на прежнем уровне, т.е. чтобы имело место равенство $F(K+\Delta K, L-\Delta L) = F(K, L)$? Рассуждая как в §3 (смотри (3.4) – (3.10)), получаем, что количество основных фондов надо увеличить на величину

$$S_{LK} = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}.$$

Число S_{LK} называется предельной нормой замещения трудовых ресурсов основными фондами. (Самостоятельно вычислите S_{LK} и убедитесь, что $S_{LK} \cdot S_{LK1} = 1$) .

Например, для функции Кобба-Дугласа (9.4)

$$S_{LK} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$$

т.е. предельная норма замещения прямо пропорциональна фондовооруженности – чем больше фондовооруженность, тем выше уровень компенсации одной единицы трудовых ресурсов основными фондами.

В общем случае, т.е. для производственной функции $y = f(x_1, \ldots, x_m)$, формула для вычисления предельной нормы замещения *i-го* ресурса *k-м* ресурсом имеет вид:

$$S_{ik} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_k}}, i, k = 1, \ \ldots, \ m \tag{10.3}$$

Предлагается читателю самостоятельно вычислить предельные нормы замещения и провести их анализ для производственных функций (2.5) – (2.9).

Из формул (10.2) и (10.3) вытекает взаимосвязь между эластичностью и предельной нормой замещения: для любых i и k

$$S_{ik} = \frac{\varepsilon_{x_i}(f(x))}{\varepsilon(fx)} \cdot \frac{x_k}{x_i}.$$

Отсюда, в частности, можно сделать вывод о том, что для тех ресурсов, по которым выпуск неэластичен ($\varepsilon_{x_k}(f(x)) = 0$), нет смысла говорить о предельной норме замещения ими других ресурсов. Дробь $\frac{x_k}{x_i}$, где i – заменяемый, а k – замещающий ресурсы, показывает, сколько единиц замещающего ресурса приходится на одну единицу заменяемого ресурса.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Итак, предельная норма замещения показывает величину ресурса одного вида, которой производитель готов пожертвовать ради одной единицы ресурса другого вида. Поставим теперь «обратный» вопрос: как изменится величина $\frac{x_k}{x_i}$ при изменении предельной нормы замещения S_{ik} на 1%? Согласно определения эластичности, это есть «эластичность $\frac{x_k}{x_i}$ по S_{ij}». По формуле вычисления эластичности (10.2) имеем:

$$\varepsilon_{S_{ik}}(\frac{x_k}{x_i}) = \frac{d(\frac{x_k}{x_i})}{dS_{ik}} \cdot \frac{S_{ik}}{\frac{x_k}{x_i}} = \frac{d(\frac{x_k}{x_i})/\frac{x_k}{x_i}}{dS_{ik}/S_{ik}} \tag{10.4}$$

Эта величина называется эластичностью предельной нормы замещения (или просто эластичностью замещения). Введем более простое обозначение $\sigma_{ik} = \varepsilon_{S_{ik}}(\frac{x_k}{x_i})$. С учетом известной формулы

$$\frac{df}{f} = d\ln f$$

где $f > 0$, эластичность (10.4) можно представить в виде:

$$\sigma_{ik} = \frac{dln(\frac{x_k}{x_i})}{d\ln(S_{ij})}. \tag{10.5}$$

Для практики особый интерес представляет случай постоянства эластичности замещения, т.е. независимость отношения $\frac{x_k}{x_i}$ от предельной нормы замещения s_{ij}.

Покажем, что таким свойством обладает производственная функция CES (для простоты рассмотрим случай двухфакторного производства (смотри (2.5)). С этой целью сперва вычислим предельную норму замещения для функции CES:

$$S_{12}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}=\frac{-\alpha\frac{\gamma}{\rho}[\delta x_1^{-p}+(1-\delta)x_2^{-p}]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot(-\delta\rho x_1^{-p-1})}{-\alpha\frac{\gamma}{\rho}[\delta x_1^{-p}+(1-\delta)x_2^{-p}]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot(-(1-\delta)p x_2^{-p-1})}=\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}$$

Подставляя это в формулу (10.4), получим:

$$\sigma_{12}=\frac{d(x_2/x_1)}{\frac{\delta}{1-\delta}d(x_2/x_1)^{\rho+1}}\cdot\frac{\frac{\delta}{1-\delta}(x_2/x_1)^{\rho+1}}{x_2/x_1}=\frac{d(x_2/x_1)}{d(x_2/x_2)^{\rho+1}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=\left[\frac{d(x_2/x_1)^{\rho+1}}{d(x_2/x_1)}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=$$
$$(\rho+1)^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}=\frac{1}{\rho+1}=\mathrm{const}$$

Аналогичным образом можно показать, что $\sigma_{21}=\mathrm{const}$ и, более того, $\sigma_{21}=\sigma_{12}$ (убедитесь в этом). Поэтому эластичность замещения для функции CES можно обозначить просто как σ. Легко видеть, что

$$\lim_{\rho\to 0}=1,\ \lim_{\rho\to\infty}=0 \qquad (10.6)$$

Нулевая эластичность означает отсутствие замещения. В общем, чем больше величина σ, тем шире возможность замещения одних ресурсов другими. Стремление значения σ к бесконечности означает, что каждый ресурс используется независимо от других. В каких ситуациях или при каких особых условиях производства такие случаи имеют место? Попытка ответа на этот вопрос и приведение конкретных примеров из практики будет хорошим упражнением для закрепления теоретического знания. Такую возможность мы предоставляем читателю.

Завершая эту тему, заметим, что к классу производственных функций с постоянной эластичностью относится и функция Кобба-Дугласа. Для нее $\sigma = 1$ (проверьте это). Поэтому с учетом (10.6) можно сказать, что при $\rho \to 0$ производственная функция CES идентична с функцией Кобба-Дугласа. Предоставляем читателю доказать, что при $\rho \to 0$ функция CES идентична производственным функциям с фиксированными пропорциями (2.6) и Леонтьева (2.7).

ЛЕКЦИЯ 11

Анализ влияния дохода и цен на спрос

Все те применения производственных функций, о которых было рассказано в предыдущих параграфах, будут иметь место на практике экономических исследований и приносить реальную пользу только в том случае, если они как модели взаимосвязи «затраты-выпуск» будут адекватно отражать действительность. Поэтому важная задача теории - разработка достоверных и реалистических методов построения производственных функций.

По существу, производственная функция f есть совокупность «правил», с помощью которых для каждого набора затрат $(x_1, \dots, x_m)$ определяется соответствующий выпуск y: $y = f(x_1, \dots, x_m)$. Поэтому построение производственной функции означает нахождение математической формулы, отражающей эти правила или, иначе говоря, закономерности превращения набора ресурсов в конечный продукт. Этот процесс условно можно представить схемой:

В блоке f (смотри рисунок 11.1), образно говоря, происходит «смешивание» ресурсов в определенных «пропорциях» таким образом, чтобы получился требуемый продукт. Эти «пропорции» определяются спецификой производства и математически выражаются с помощью различных коэффициентов и показателей степени для величин $x_1, \dots, x_m$. «Смешивание» их математически выражается с помощью разных фор-

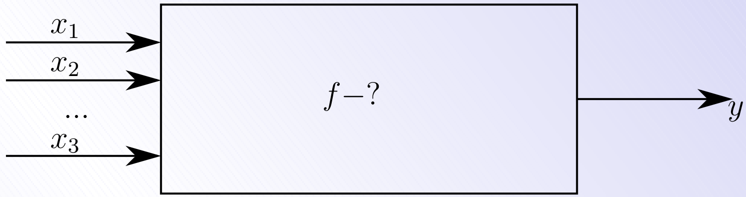


Рисунок 11.1 – Схема превращения ресурсов в конечный пункт

мальных операций между ними (суммирования, произведения, логарифмирования и т.д.), вид и сочетание которых также определяется спецификой моделируемого производства. Так что вопрос построения производственной функции в каждом конкретном случае сводится к нахождению этих «пропорций» и к определению характера их «смешивания».

Из сказанного выше следует, что для построения производственных функций нужно знать технологию производства, ее структуру и организацию, а также принципы работы сложных машин и оборудования, т.е. надо быть одновременно и технологом, и инженером, и математиком. Оказывается, что знание всего этого сложного производственного механизма не требуется, если владеть подходящими математическими приемами. Речь идет об использовании методов регрессионного анализа (см. §2.5) на основе статистических (опытных, экспертных) данных о затратах и выпуске. Не умаляя достоинства других математических и иных методов построения производственных функций, можно сказать, что именно методы регрессионного анализа наилучшим образом оправдали себя на практике и потому являются наиболее популярными. Поскольку вопросы построения производственных функций на основе экспериментальных данных являются предметом изучения специального раздела – эконометрики, то сами эти методы будут изучаться в главе IX. Здесь же мы коснемся лишь содержательной стороны построения конкретных видов производственных функций.

Идею применения статистических данных для построения производственной функции можно объяснить на рисунке 11.1. Имеются известные величины $x_1, \ldots, x_m, y$ (реальные результаты производства) и одно неизвестное выражение f, их связующее. Наблюдая в течение достаточно большого периода времени функционирования производства за различными значениями затрат $x_1, \ldots, x_m$ и соответствующими им значениями выпуска y, можно выявить закономерность f:

$$(x_1, \ldots, x_m) \xrightarrow{f} y$$

Например, свою знаменитую функцию (2.4) Кобб и Дуглас получили на основе изучения статистических данных по расходованию капитала (K), труда (L) и индекса производства (Y) в американской обрабатывающей промышленности за период с 1899 по 1922 гг. Практическая значимость этой функции подтверждается тем, что соответствующая замена исходных данных позволяет использовать ее для анализа любого производства.

Кратко остановимся на этапах построения производственной функции. Пусть нам известны виды ресурсов ($i = 1, \ldots, m$), используемых для выпуска данной продукции, и имеется необходимое количество статистических данных по объемам затрат $x_1, \ldots, x_m$ и выпуска y. Требуется установить зависимость $y = f(x_1, \ldots, x_m)$, т.е. найти аналитический вид производственной функции f. Эта задача распадается на два этапа:

1. спецификация функции f, т.е. выявление общего вида функции f от аргументов $x_1, \ldots, x_m$ с неопределенными параметрами (коэффициентами и показателями степеней при x_i и свободным членом);

2. оценка параметров – определение конкретных числовых значений неизвестных параметров.

Картина «расположения» статистических данных в пространстве затраты-выпуск может подсказать линейный или нелинейный характер зависимости функции f от аргументов $x_1, \ldots, x_m$. Например, в случае линейной производственной функции результатом спецификации будет гипотеза о линейной зависимости вида

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + \alpha \tag{11.1}$$

в случае производственной функции Кобба-Дугласа – в виде мультипликативной функции

$$f(x) = \beta \prod_{k=1}^{m} x_k^{b_k} \tag{11.2}$$

в случае производственной функции CES – в виде степенного многочлена

$$f(x) = c(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k^r)^l, \tag{11.3}$$

и т.д. Здесь $\alpha, \alpha_k, \beta, \beta_k, c, c_k, r, l$ являются неизвестными параметрами, подлежащими определению (оценке).

Чаще остальных на практике применяется аппроксимация вида (11.1), называемая линейной регрессией. Для определения ее параметров используется (линейный) метод наименьших квадратов. В некоторых случаях к линейной аппроксимации удается свести и нелинейные относительно ресурсов производственные функции. Например, логарифмируя функцию (11.2), получим:

$$\ln f(x) = \ln b + \sum_{k=1}^{m} b_k \ln x_k$$

Далее, вводя обозначения

$$z = \ln f(x), \mathrm{B} = \ln b, z_i = \ln x_i$$

приходим к линейной регрессии вида (11.1):

$$z = \text{B} + b_1 z_1 + \dots + b_m z_m$$

Применяя такой способ на основе статистических данных упомянутого выше периода, Кобб и Дуглас получили следующую оценку параметров для своей функции:

$$\alpha \approx 1,01, \alpha_1 \approx 0,27, \alpha_2 \approx 0,73,$$

и, следовательно, их производственная функция выглядела так:

$$Y = 1,01 \cdot K^{0,27} \cdot L^{0,73}$$

Дальнейший анализ показал, что за исключением некоторых случаев (например, учета технического прогресса), имеет место соотношение $\alpha_1 + \alpha_2 \approx 1$. Так как величина $\alpha_1 + \alpha_2$ показывает эластичность производства, равенство $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ является признаком линейной однородности производственной функции (см. §4.3 и пример 10.1). Этот факт позволяет записывать функцию Кобба-Дугласа в виде $Y = \alpha K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$.

В отличие от функции Кобба-Дугласа, функция (4.1) даже после логарифмирования остается нелинейной. Поэтому для оценки параметров функции CES применяется более сложный нелинейный метод наименьших квадратов.

ЛЕКЦИЯ 12

Математические модели задачи фирмы

В этом параграфе будут рассмотрены оптимизационные модели производства. Строго говоря, мы будем моделировать не само производство, как таковое, а задачу принятия решения относительно планирования производства. Поэтому будем предполагать выполненными следующие аксиомы:

любое производство начинается с этапа планирования;

принимаются только реалистичные планы;

принятые планы выполняются.

На основе этих положений задача фирмы как организации, производящей затраты производственных ресурсов для изготовления товаров, сводится к определению количества выпускаемой продукции и необходимых для этого затрат.

Фирма должна решить свою задачу наилучшим (т.е. оптимальным) образом. При этом «оптимальность» можно понимать двояко: либо как получение наибольшей прибыли (с учетом имеющихся возможностей фирмы относительно затрат ресурсов), либо как достижение необходимого (фиксированного) уровня выпуска с наименьшими затратами. Фирма может поставить перед собой только одну из этих целей. В противном случае задача будет некорректной, т.е. нереализуемой. Действительно, нельзя осуществить наибольший выпуск при наименьших затратах. В теории многокритериальной оптимизации этот факт устанавливается строго.

С точки зрения временного промежутка (горизонта планирования) можно различить задачи двух типов – задачу текущего производства (краткосрочная задача) и задачу перспективного развития (долгосрочная задача).

Краткосрочная задача ставится на один производственный цикл - от начала производства товара до момента выхода фирмы со своим товаром на рынок. Здесь решается задача рационального использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей, сырья, расходов на заработную плату. Поэтому математические модели краткосрочной задачи фирмы представляют собой оптимизационные задачи с ограничениями.

Долгосрочная задача охватывает период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращивания или сокращения основных фондов, изменения структуры производства, определения долгосрочных инвестиций, страховок и др. Эти затраты непосредственно не зависят от объема текущего выпуска. Поэтому математические модели долгосрочной задачи фирмы являются задачами безусловной оптимизации.

Для моделирования задач фирмы нам нужно формализовать, как это было замечено в конце §4.1, такие понятия, как затраты, выпуск, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы.

Не умаляя общности, будем считать, что фирма производит один вид продукта, используя m видов ресурсов. Эти величины, как и ранее, будем обозначать соответственно через y и $x_1, \ldots, x_m$. Предположим, что «технология» производства достаточно хорошо изучена, т.е. известна производственная функция $F : y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через p цену выпускаемой продукции, а через w_k - цену *k-го* вида ресурса,k=*1,...,m*. Эти цены порождают понятия дохода (выручки от продажи произведенной продукции) и издержек (см. §4.1). Доход от реализации готовой продукции $y = f(x)$ определяется формулой $p \cdot f(x)$. Издержки, соответствующие вектору затрат $x = (x_1, \ldots, x_m)$, т.е. общие выплаты за все виды затрат, равны $w_1x_1 + \cdots + w_mx_m$. Эти издержки называются переменными издержками, так как они связаны (меняются вместе) с объемом выпуска. Кроме того, фирма несет и постоянные издержки (обозначим c_0), связанные с расходами на содержание фирмы. Поэтому общие издержки (обозначим C) складываются из двух компонент:

$$C(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + c_0$$

Поскольку постоянные издержки не связаны с выпуском, то при составлении краткосрочных моделей мы их учитывать не будем. Тогда общий результат производства *(x,y)* (затраты-выпуск) можно оценить

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

величиной

$$p \cdot f(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k.$$

Если эта величина положительна, то пара (x,y) приносит прибыль, в противном случае – убыток.

С помощью полученных формул построим математические модели различных задач фирмы.

1. Долгосрочная задача. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому модель задачи имеет вид:

$$P(x_1, \ldots, x_m) = p \cdot f(x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max,$$

$$x_k \geq 0, k = 1, \ldots, m.$$

Это есть задача безусловной максимизации прибыли. Здесь постоянные затраты c_0 не учтены, так как они не влияют на максимизацию функции P по переменным затратам $x_1, \ldots, x_m$. В векторной форме долгосрочная задача имеет вид:

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max \tag{12.1}$$

$$x \geq 0$$

где $w = (w_1, \ldots, w_m)$ – вектор цен затрат.

2. Краткосрочная задача. Эта задача планируется с учетом наличных на данный период запасов ресурсов, поэтому ее модель строится на условную оптимизацию:

$$P(x_1, \dots, x_m) = p \cdot f(x_1, \dots, x_m) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max$$

при ограничениях

$$x_k \in X_k, k = 1, \dots, m,$$

где $X_k \subset R_+^m$ - множество допустимых значений затрат *k-го* вида. Введя обозначение $X = X_1 \times \dots \times X_m$ множества допустимых наборов затрат, эту задачу можно написать в векторной форме

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max \tag{12.2}$$

при ограничениях $x \in X$

Здесь явный вид множества X может быть описан различными способами. Например, в виде

$$X = \{x \in R_+^m | a_i \le x_i \le b_i, i = 1, \dots, m\} \text{ (параллелепипеда)}$$

$$X = \{x \in R_+^m | Ax \le b\} \text{ (многогранника)}$$

$$X = \{x \in R_+^m | g_1(x) \le 0, l = 1, \dots, r\} \text{ (криволинейного многообразия)}$$

и т.д.

3. Задача многопродуктового производства. Предположим теперь, что фирма выпускает не один, а несколько *(n)* видов продуктов. Пусть для каждого *j-го* вида продукта известны производственная функция $f_j : y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$ и цена p_j *(k = 1,...,m)*; для каждого *k-го* вида ресурса известны функция g_k , описывающая суммарные затраты этого ресурса для производства всех n видов продуктов, и его наличное количество $b_k > 0$ *(k = 1,...,m)*.В этом случае модели долгосрочной и краткосрочной задач соответственно имеют вид:

$$P(x) = \langle p, f(x) \rangle - \langle w, x \rangle \to \max,$$

$$x \geq 0,$$

и

$$P(x) = \langle p, f(x) \rangle - \langle w, x \rangle \to \max, \tag{12.3}$$

при ограничениях

$$g(x) \leq b, x \geq 0.$$

Здесь $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор цен выпускаемых товаров, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ – вектор-функция затрат, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ – вектор наличных запасов ресурсов.

4. Задача на минимизацию затрат. Во всех приведенных выше моделях производства ставится задача максимизации прибыли, т.е. целевая функция имеет смысл прибыли. Для постановки задачи на минимизацию затрат предположим, что фирма планирует выпуск продуктов

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

в объемах $y_1^*, \ldots, y_n^*$, т.е. рассмотрим фиксированные объемы выпуска. В этом случае оптимизационная задача производства может быть поставлена следующим образом:

$$C(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \min, \tag{12.4}$$

при ограничениях

$$f_j(x_1, \ldots, x_m) = y_j^*, j = 1, \ldots, n,$$

$$x_k \geq 0, k = 1, \ldots, m$$

Желая «перевыполнить» план выпуска, ограничения-равенства можно заменить на ограничения-неравенства $f_j(x_1, \ldots, x_m) \geq y_j^*, j = 1, \ldots, n.$

5. Видоизменения постановок задач. В зависимости от целей и характера исследования производства, можно пользоваться различными модификациями приведенных выше моделей. Например, в задачах (12.1) и (12.2) по тем или иным техническим соображениям производственную функцию можно «исключить» из целевой функции, записывая их в виде

$$P(x) = py - \langle w, x \rangle \to \max$$

при ограничениях

$$y = f(x), x \geq 0,$$

и

$$P(x) = py - \langle w, x\rangle \to \max$$

при ограничениях

$$y = f(x), x \in X$$

Задачу производства можно поставить в «чисто финансовой» форме. Предположим, что для приобретения необходимых ресурсов выделена фиксированная сумма v. Тогда задачу максимизации дохода можно поставить в следующей форме:

$$\langle p, f(x)\rangle \to \max$$

при ограничениях

$$\langle w, x\rangle \leq v, x \geq 0.$$

Любое видоизменение моделей допустимо, если оно адекватно описывает реальную задачу. Оценивается не вид модели, а практическая польза от ее применения.

Видно, что во всех моделях производства максимизация и минимизация целевой функции осуществляется по переменным $x_1, \ldots, x_m$, т.е. фирма принимает решение только относительно объемов затрат. Поэтому решениями этих задач являются оптимальные значения $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ векторов затрат. Выбор метода нахождения оптимального решения задач зависит прежде всего от линейности или нелинейности участвующих в их постановке функций f и g. Если эти функции нелинейны, то соответствующую задачу можно решить методом множителей Лагранжа или каким-либо приближенным методом. В случае линейности всех функций можно применить симплекс-метод.

Для примера рассмотрим задачу (12.3). Если в ней функции $f_1, \dots, f_n$, $g_1, \dots, g_m$ дифференцируемы в R^m_+ и среди них имеются нелинейные, то ее оптимальное решение x^* можно найти с помощью функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j, f_j(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k(x) - b) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k$$

и необходимых условий оптимальности Куна-Таккера (3.9)–(3.11) (см. примеры 2.7 и 2.8).

Предположим, что все функции в (12.3) линейные:

$$f_j(x) = c_{j_1} x_1 + \ldots + c_{j_m} x_m, j = 1, \ldots, n;$$

$$g_k(x) = a_{k_1} x_1 + \ldots + a_{k_m} x_m, k = 1, \ldots, m.$$

В этом случае целевая функция задачи (12.3) принимает вид:

$$P(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m,$$

где $c_k = p_1 c_{1k} + \ldots + p_n c_n k + w_k, k = 1, \ldots, m$, а ограничения

$$a_1 1 x_1 + \ldots + a_{1m} x_m \leq b_1,$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

$$l \ldots \ldots l \ldots l \ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m \leq b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0.$$

Следовательно, мы имеем задачу линейного программирования

$$\langle c, x \rangle \to \max$$

при ограничениях

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_m)$, A – технологическая матрица, элементы a_{jk} которой показывают расход ресурса вида i для производства единицы продукта вида k. Двойственная к ней задача

$$\langle b, z \rangle \to \min$$

при ограничениях

$$A^T z \geq c, z \geq 0,$$

имеет смысл минимизации затрат при фиксированном объеме выпуска.

ЛЕКЦИЯ 13

Решение задачи фирмы. Геометрическая иллюстрация

Пусть в задаче (12.1) производственная функция f дважды дифференцируема в R_+^m и удовлетворяет условиям (2.2)-(2.3). Для нахождения ее оптимального решения $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ (относительно затрат) построим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = pf(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k,$$

где $\lambda_k > 0$ и выпишем необходимые условия Куна-Такера:

$$p\frac{\partial f}{\partial x_k}|_{x=x^*} - w_k - \lambda_k = 0, k = 1, \dots, m \text{ (стационарность)},$$

$$\lambda_k x_k^* = 0, k = 1, \dots, m \text{ (дополняющая нежесткость)},$$

$$x_k^* \geq 0, k = 1, \dots, m \text{ (допустимость)}$$

Ввиду предположения о выполнении (2.3) эти условия становятся и достаточными условиями оптимальности. Упростим их, предположив $x_k^* > 0, k = 1, \dots, m$. Содержательно это означает необходимость затрат всех видов. Это условие не является жестким, так как в случае $x_k^* = 0$ можно было исключить ресурс k-го вида из рассмотрения, сократив тем самым размерность пространства затрат.

С учетом последнего предположения из условия дополняющей нежесткости следует $\lambda_k = 0, k = 1, \ldots, m$. Заметим сразу, что это не противоречит условию о невозможности одновременного равенства нулю всех множителей Лагранжа – оно является следствием изменения условия задачи (12.1). В результате необходимый и достаточный признак оптимальности принимает вид:

$$p\frac{\partial f}{\partial x_k}|_{x=x^*} - w_k = 0, k = 1, \ldots, m \qquad (13.1)$$

Величину $p\frac{\partial f}{\partial x_k}$ естественно назвать стоимостью предельного продукта. Поэтому (13.1) содержательно означает равенство стоимости предельного продукта и платы за ресурсы в точке x^*:

$$p\frac{\partial f}{\partial x_k}|_{x=x^*} = w_k, k = 1, \ldots, m$$

Обозначим

$$\psi_k(x) = p\frac{\partial f}{\partial x_k} - w_k, k = 1, \ldots, m$$

и составим матрицу Якоби для системы (13.1):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & l\ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} \\ l\ldots & l\ldots & l\ldots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & l\ldots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} |_{x=x^*}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Из алгебры известно, что если матрица Якоби невырожденна, то система (13.1) имеет решение. Здесь невырожденность следует из условий (2.2)-(2.3). Таким образом, система (13.1) разрешима и оптимальное решение задачи (12.1) может быть выражено как функция *m+1* параметров $p, w_1, \ldots, w_m$:

$$x^* = x^*(p, w) = x^*(p, w_1, \ldots, w_m). \tag{13.2}$$

В координатной форме имеем m функций спроса на затраты

$$x_k^* = x_k^*(p, w_1, \ldots, w_m), k = 1, \ldots, m,$$

выражающих оптимальные объемы затрат в зависимости от цен.

Оказывается, спрос не зависит от масштаба цен, точнее, от пропорционального изменения цены продукции и цен ресурсов. Действительно, из (12.1) для любых $\alpha > 0$ имеем:

$$\alpha pf(x) - \langle \alpha w, x \rangle = \alpha(pf(x) - \langle w, x \rangle) = \alpha P(x).$$

Так как постоянный коэффициент α не влияет на максимизацию функции P по x, то задача

$$\alpha P(x) \to \max, x \geq 0$$

имеет такое же оптимальное решение, что и задача (12.1). Следовательно,

$$x^*(\alpha p, \alpha w) = x^*(p, w), \alpha > 0$$

и функции спроса на затраты являются однородными нулевой степени функциями.

Подставляя решение (13.2) в производственную функцию f, получаем выпуск как функцию от тех же $m+1$ параметров:

$$f(x^*(p, w)) = f^*(p, w) = f^*(p, w_1, ..., w_m). \qquad (13.3)$$

Это есть функция предложения готовой продукции. Так как

$$f^*(\alpha p, \alpha w) = f(x^*(p, w)) = f^*(p, w),$$

то функция предложения также является однородной нулевой степени функцией, т.е. объем предложения товара остается неизменным при повышении (снижении) цен на ресурсы, если в той же пропорции повышается (снижается) цена готовой продукции.

Рассмотрим теперь геометрическую иллюстрацию оптимального решения (13.2) задачи (12.1) в пространстве затрат. Для этого введем два геометрических понятия - изокванты и изокосты.

Изокванты в теории производства играют такую же роль, что и кривые безразличия в теории потребления.

Определение 13.1. Изоквантой производственной функции

$$f : R^m_+ \to R^1$$

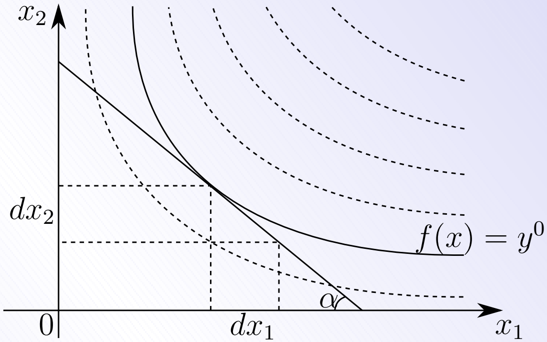


Рисунок 13.1 – Изокванта

называется геометрическое место всех векторов затрат x, использование которых приводит к одному и тому же объему выпуска продукции Y^0 : $\{x \in R_+^m | f(x) = y^0\}$.

Таким образом, изокванта – это линия уровня производственной функции. Для различных уровней выпуска y^0 линии уровня $f(x) = y^0$ заполняют все пространство затрат (R_+^m) и составляют карту изоквант. Для примера на рисунке 13.1 приведен вид изоквант

$$\alpha x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = y^0 (y^0 = \text{const})$$

производственной функции Кобба-Дугласа.

Пусть производственная функция $y = f(x_1, x_2)$ дифференцируема по обеим переменным. Тогда вдоль изокванты $y = f(x_1, x_2) = \text{const}$ имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2\right)\Big|_{\text{изокв.}} = 0$$

Отсюда найдем отношение:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{изокв.}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} \qquad (13.4)$$

Следовательно, наклон $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dx_2}{dx_1}$ изокванты производственной функции выражается через отношение предельных продуктов. Дальнейшие геометрические построения, связанные с изоквантами, проведем на рисунке 13.2.

Имея карту изоквант

$$\left\{x \in R_+^2 | f(x_1, x_2) = y^0, y^0 = \text{const}\right\},$$

проведем касательные к каждой из них с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1} = \infty \frac{df}{dx_2} = 0$.

Эти касательные проходят параллельно к оси $Ox_2(\alpha = 90^0)$. Так как изокванты заполняют все пространство R_+^2, то, соединяя точки касания, получим непрерывную линию Г-1, которую назовем границей первого ресурса.

Аналогично проведем касательные к изоквантам с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1} = 0(\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0)$. Эти касательные проходят параллельно к оси $Ox_1(\alpha = 0^0)$.

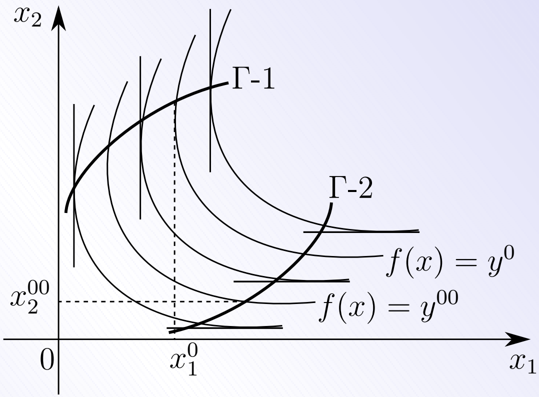


Рисунок 13.2 – Особая область

Соединяя точки касания, получаем непрерывную линию Г-2, которую назовем границей второго ресурса.

Построенная область в R^2_+, заключенная между линиями Г-1 и Г-2, называется особой областью. Она характеризуется наотрицательностью обоих предельных продуктов $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$, так как для $0^0 \leq \alpha \leq 90^0 \operatorname{tg} \alpha$ неположителен. Можно показать, что в особой области справедливы и неравенства (2.3), т.е. это та область затрат, где выполнен закон убывающей доходности. Пользуясь условиями (2.3), можно доказать, что особая область является выпуклым подмножеством пространства затрат.

Граница первого ресурса Г-1 является геометрическим местом минимального количества затрат x_1, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, для производства продукции в размере y^0 необходимо затратить первый ресурс как минимум в x_1^0 единиц (рисунок 13.2). Точно также, граница второго ресурса Г-2 является геометрическим местом минимального количества затрат x_2, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, чтобы произвести продукцию в количестве y^{00}, необходимо как минимум x_2^{00} единиц второго ресурса.

Изокосты являются своего рода бюджетной линией.

Определение 13.2. Изокостой называется геометрическое место векторов затрат, для которых издержки производства постоянны:

$$\left\{ x \in R_+^m | \sum_{k=1}^{m} w_k x_k = \text{const} \right\}.$$

Для двухфакторного производства изокоста задается уравнением

$$C(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = \text{const}$$

Так как цены w_1 и w_2 предполагаются заданными, дифференцируя последнее уравнение, имеем:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{изокос.}} = -\frac{w_1}{w_2}. \tag{13.5}$$

Следовательно, для разных *const* изокосты являются параллельными линиями с одним и тем же наклоном (рисунок 13.3) и этот наклон выражается через отношение цен на ресурсы.

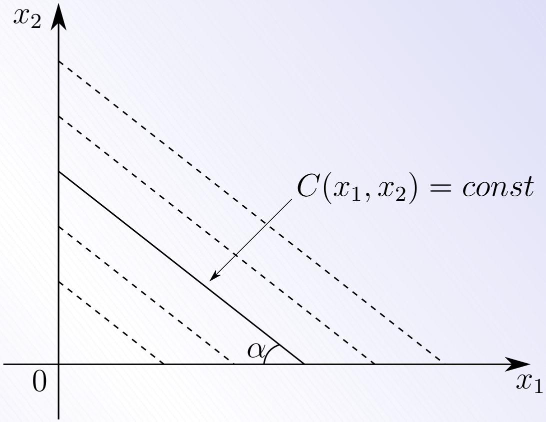


Рисунок 13.3 – Изокосты

Сравнивая (13.4) и (13.5), видим:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{изокв.}} = \frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{изоскос.}}. \tag{13.6}$$

Покажем, что равенство (13.6) достигается именно в точке x^*, являющейся решением задачи (12.1). Из (13.1) в случае двухфакторного производства имеем:

$$p\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x=x^*} = w_1, p\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{x=x^*} = w_2,$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

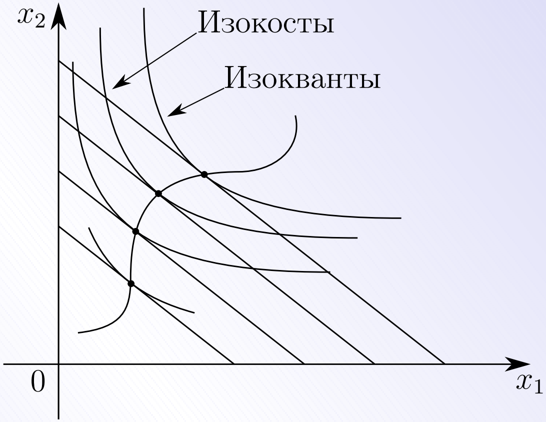


Рисунок 13.4 – Долгосрочный пусть расширения

Разделяя первое равенство на второе почленно, получаем

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}\Big|_{x=x^*} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Сопоставляя полученное равенство с (13.4) и (13.5), приходим к выводу: совпадение наклонов изокванты и изокосты имеет место в одной и той же точке x^*, являющейся оптимальным решением задачи (12.1), и эта точка, конечно, является точкой касания изокосты и изокванты (рисунок 13.4).

Так как изокванты и изокосты заполняют все пространство затрат, соединяя все точки их касания, получаем непрерывную линию. Как легко понять, эта линия расположена в особой области, изображенной на рисунке 13.2, и потому чем дальше на ней расположена точка x^*, тем больше соответствующие значения затрат и выпуска. Поэтому данная линия называется долгосрочным путем расширения производства. Таким образом, геометрическое место пересечений изоквант и изокост показывает оптимальный сценарий развития производства. Этот путь описывает, с одной стороны, затраты, максимизирующие прибыль фирмы, при любом фиксированном уровне издержек, с другой – затраты, минимизирующие издержки, при заданном уровне выпуска (читателю предлагается самостоятельно обосновать эти положения, пользуясь рисунком 13.4). Поэтому долгосрочный путь расширения иногда называют кривой издержек, имея в виду, что вдоль нее оптимальные издержки выражаются как функция от выпуска.

В случае краткосрочной задачи (12.2) (или (12.3)) необходимый и достаточный признак оптимальности будет иметь более сложный, чем (13.1), вид из-за наличия ограничений. Однако и в этом случае при выполнении условий (2.2)–(2.3) краткосрочный путь расширения, как геометрическое место векторов оптимальных затрат, будет проходить в особой области. Причем можно высказать гипотезу о том, что если множество допустимых затрат X (см. задачу (12.2)) краткосрочной задачи имеет непустое пересечение с долгосрочным путем расширения, то краткосрочный путь расширения совпадает (в области X) с долгосрочным путем, т.е. он является частью долгосрочного пути расширения (в

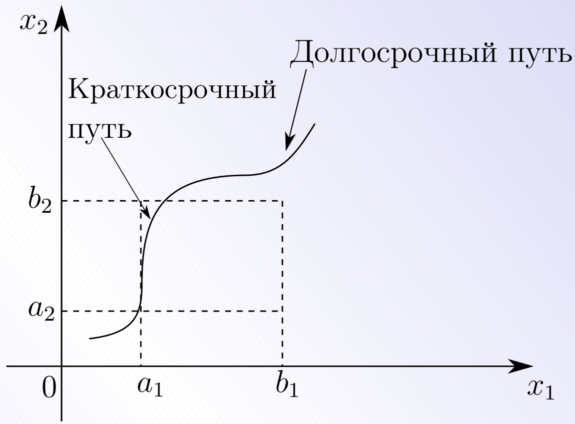


Рисунок 13.5 – Долгосрочный пусть расширения

случае $X = \left\{x \in R^2_+ | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2\right\}$ смотри рисунок 13.5). Предлагаем читателю доказать эту гипотезу для конкретных видов множества X из задачи (12.2), используя примененную выше для задачи (12.2) методику.

Если эта гипотеза верна, то для каждой точки $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ на краткосрочном пути существует такое постоянное число c^*, что изокоста $w_1 x1 + w_2 x_2 = c^*$ и изокванта $f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*)$ из долгосрочной задачи будут иметь точкой касания точку x^*. Последнее означает совпадение краткосрочной и долгосрочной кривых издержек, что говорит о согласованности краткосрочной задачи фирмы с ее долгосрочными планами.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

ЛЕКЦИЯ 14

Анализ влияния цен на объемы затрат и выпуска. Основное уравнение фирмы.

Применяя методику, использовавшуюся в §3.6 для анализа влияния цен на спрос потребителя, можно исследовать чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям параметров $p, w_1, \dots, w_n$. Для этого сделаем дополнительное к условиям предыдущего параграфа предположение: функции x_{k^*} и f^* дифференцируемы по всем переменным.

Подставляя в систему (13.1) функции спроса (13.2) и присоединяя к ней выражение для функции предложения (13.3), получим замкнутую тождественную систему из $m+1$ уравнения с $m+1$ параметром:

$$\begin{cases} f^*(p, w_1, \dots, w_m) = f(x^*(p, w_1, \dots, w_m)), \\ p\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^*(p, w_1, \dots, w_m)) = w_k, k = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{14.1}$$

Так как чувствительность оптимальных затрат и выпуска по ценам оценивается величинами

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \frac{\partial x_k^*}{\partial w_i}, k, i = 1, \dots, m, \frac{\partial f^*}{\partial p}, \frac{\partial f^*}{\partial w_k}, k = 1, \dots, m.$$

то систему (14.1) будем дифференцировать по переменным $p, w_1, \dots, w_m$. Первые $2m$ частных производных характеризуют изменение оптимального объема затрат при изменении цены готовой продукции и цен ресурсов; вторая группа частных производных показывает реакцию объема оптимального выпуска на колебание тех же цен.

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = (\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial x_m^*}{\partial p}), \frac{\partial f^*}{\partial w} = (\frac{\partial f^*}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial f^*}{\partial w_m}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & l \ldots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_m} \\ l \ldots & l \ldots & l \ldots \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & l \ldots & \frac{\partial x_m^*}{\partial w_m} \end{pmatrix}$$

Как и раньше, будем считать выполненными условия (2.2)–(2.3), т.е. анализ чувствительности затрат и выпуска проведем в пределах особой области, изображенной на рисунке 13.2.

Сначала продифференцируем обе части системы (14.1) по p:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^*}{\partial p} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} + p \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p} = 0, k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Применяя обозначение матрицы Гессе (см. §2.2)

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \right\|_{m \times m}$$

перепишем эту систему в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\nabla^2 f \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

Продифференцируем теперь систему (14.1) по w_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w_k} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, k = 1, \ldots, m \\ p \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k} = \delta_{kl}, l = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

где δ_{kl} – использованный ранее в §3.6 символ Кронекера.

Применяя обозначение единичной матрицы $E_m = \|\delta_{kl}\|_{m\times m}$ перепишем эту систему в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w}, \\ p \cdot \nabla^2 f \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w} = E_m. \end{cases} \tag{14.3}$$

Запишем теперь системы (14.2) и (14.3) в матричных формах:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ O & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial p} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-\frac{\partial f}{\partial x})^T \end{pmatrix} \tag{14.4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ O & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{\partial f^*}{\partial w})^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ E_m \end{pmatrix} \tag{14.5}$$

Здесь через O обозначен m-мерный вектор-столбец с нулевыми элементами, T – знак транспонирования.

Объединяя уравнения (14.4) и (14.5) в одно, получим основное матричное уравнение теории производства (фирмы):

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ O & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial p} & (\frac{\partial f^*}{\partial w})^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & O \\ (-\frac{\partial f}{\partial x})^T & E_m \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

Это есть система из $(m+1)^2$ уравнений с $(m+1)^2$ неизвестными показателями сравнительной статики. Разрешая ее относительно показателей сравнительной статики, перепишем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial p} & (\frac{\partial f^*}{\partial w})^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ O & p\nabla^2 f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & O \\ (-\frac{\partial f}{\partial x})^T & E_m \end{pmatrix}$$

Выполним матричное умножение в последнем уравнении и найдем решение. Запишем его в векторной форме:

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}(\frac{\partial f}{\partial x})(\nabla^2 f)^{-1}(\frac{\partial f}{\partial x})^T, \tag{14.7}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}(\nabla^2 f)^{-1}(\frac{\partial f}{\partial x})^T, \tag{14.8}$$

$$(\frac{\partial f^*}{\partial w})^T = \frac{1}{p}(\frac{\partial f}{\partial x})^T(\nabla^2 f)^{-1}, \tag{14.9}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p}(\nabla^2 f)^{-1}, \qquad (14.10)$$

где $(\nabla^2 f)^{-1}$ – обратная матрица Гессе.

Как и в теории потребления (см. §3.7), при помощи показателей сравнительной статики можно классифицировать типы затрат.

Определение 14.1. Затраты (ресурсы) вида k называются нормальными, если $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0$; ценными (малоценными), если $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} > 0 (\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0)$. Два вида затрат i и k называются взаимозаменяемыми (взаимодополняемыми), если $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} > 0, \frac{\partial x_k^*}{\partial w_i} > 0 (\frac{\partial x_k^*}{\partial w_i} < 0, \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} < 0)$

Неравенство $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} > 0$ означает возрастание затрат k-го вида с ростом их цены. Такие затраты исключены, так как напрямую уменьшают прибыль фирмы (смотри целевые функции задач (12.1) – (12.3)). Поэтому кривая спроса на затраты всегда является убывающей и, в отличие от теории потребления, здесь нет товаров Гиффина.

Некоторые выводы относительно чувствительности затрат и выпуска по ценам, к которым можно прийти, анализируя соотношения (14.7)–(14.10), таковы:

1. повышение цены на выпускаемый продукт всегда приводит к увеличению объема выпуска;

2. повышение цены на выпускаемый продукт влечет повышение спроса на некоторые виды затрат;

3. в рамках закона об убывающей доходности нельзя обходиться исключительно малоценными затратами;

4. повышение платы за малоценные ресурсы ведет к увеличению объема выпуска;

5. повышение платы за некоторый вид затрат приводит к увеличению объема выпуска;

6. повышение цен на затраты приводит к сокращению спроса на них;

7. чувствительность объема затрат k-го вида на изменение цен затрат i-го вида такая же, что и чувствительность объема затрат i-го вида на изменение цен затрат k-го вида;

8. для взаимозаменяемых затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет увеличение (уменьшение) спроса на другую;

9. для взаимодополняющих друг друга затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет уменьшение (увеличение) спроса на другую.

Обоснуем кратко эти утверждения, часть которых подтверждает «очевидные истины».

Первый вывод следует из неравенства

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} \qquad (14.11)$$

которое немедленно вытекает из (14.7) с учетом отрицательной определенности обратной матрицы Гессе $(\nabla^2 f^{-1})$ и неотрицательности предельного продукта ($\frac{\partial f}{\partial x_k}$) в особой области. Данное неравенство подтверждает факт о том, что кривая предложения продукта является возрастающей.

Неравенство (14.11) с учетом (14.1) перепишется как

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} > 0, k = 1, \ldots, m \qquad (14.12)$$

Такое соотношение возможно только в том случае, если для некоторых k будет иметь место неравенство

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p} > 0 \qquad (14.13)$$

которое и является обоснованием второго вывода.

Сравнивая (14.8) и (14.9), можно заметить, что

$$\frac{\partial f^*}{\partial w_k} = -\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, k = 1, \ldots, m \qquad (14.14)$$

Поэтому вывод 2. можно уточнить так: повышение цены выпускаемой продукции приводит к повышению спроса на затраты k-го вида всегда, если и только если увеличение платы за этот вид затрат приводит к сокращению объема выпуска. Действительно, с учетом (14.14) неравенство (14.13) влечет неравенство $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$. В частности, если x_k

– малоценные затраты (т.е. $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0$), то увеличение цены w_k приведет к увеличению выпуска (т.е. $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} > 0$), о чем и утверждает вывод 4.

Обоснованность вывода 3. следует также из неравенства (14.14).

Из соотношений (14.11), (14.12) и (14.14) получаем:

$$0 < \frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial w} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial w_k}$$

Поэтому в особой области для некоторых видов затрат выполнено неравенство

$$\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$$

Оно доказывает справедливость вывода 5.

Соотношение (14.10) указывает на симметричность матрицы $\frac{\partial x^*}{\partial w}$, причем, как и правая часть этого уравнения, она отрицательно определена. Поэтому ее диагональные элементы отрицательны:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0, k = 1, \dots, m$$

Отсюда следует вывод 6. Симметричность матрицы $\frac{\partial x^*}{\partial w}$ означает, что

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, k, i = 1, \dots, m$$

Содержательный смысл этого равенства приведен в выводе 7.

Выводы 8. и 9. вытекают непосредственно из определений взаимозаменяемых и взаимодополняемых затрат.

Лабораторная работа 3. Производственная функция

I. Построение ПФ.

Для данных из лабораторной работы 1 построить производственную функцию вида ПФ Кобба-Дугласа.

$$Y = F(K, L) = aK^m L^p$$

Для этого нужно:

1) привести функцию к линейному виду (логарифмирование левой и правой части уравнения). Получим функцию вида: $\ln(Y) = \ln(a) + m * \ln(K) + p * \ln(L)$;

2) используя метод наименьших квадратов рассчитать параметры уравнения линейной регрессии $m, p, \ln(a)$ (в качестве членов регресии использовать логарифмы исходных данных);

3) сделать обратные преобразования и найти значения m, p, a и записать производственную функцию.

II. Анализ ПФ

Для построенной ПФ определить:

1) влияние изменения масштабов производства на эффективность (эластичность производства) ε;

2) эластичность выпуска по отношению к затратам трудовых ресурсов и производственных фондов $\varepsilon_K, \varepsilon_L$; 3) сколько основных фондов необходимо ввести дополнительно при уменьшении затрат труда на еди-

ницу при неизменном выпуске продукции (предельная норма замещения труда капиталом) h_{LK};

4) на сколько процентов изменится соотношение производственных фондов и трудовых ресурсов при изменении предельной нормы замещений на 1% при неизменном продукте (эластичность замещения факторов) σ;

5) выяснить, взаимозаменямы ли ресурсы или нет.

Лабораторная работа 4. Теория фирмы

Мы работаем на предприятии, производящем цемент. Всего имеется три технологии выпуска цемента. В таблице заданы затраты ресурсов при работе каждой технологии, производительности технологий за фиксированный период времени, цены за единицу каждого ресурса. Цена реализации цемента - 300. Выяснить:

1. Является ли данное производство убыточным, и если нет, то при помощи поиска решений:

а) Решить задачу ЛП при, например, фиксированном выпуске $Q = 10000$;

б) Решить конкретную задачу для фирмы при возможной затрате электроэнергии равной 50000;

2. Решить данную задачу, если для закупок ресурсов выделяется сумма в 20000 ден. единиц.

Везде вывести оптимальные значения интенсивностей, объемов ресурсов, дохода, издержек, прибыли.

Дополнительно (+1 балл на экзамен). Решить ЗАСПД фирмы без учет пункта 1, когда на закупку ресурсов наложены (соответственно сверху: глина, известь, топливо - по 500, вода и энергия - по 100000, снизу: аналогично по 50 и по 10000);

3. Найти значение минимальной цены на цемент при которой его производство неубыточно.

4. Найти максимальные цены на ресурсы при которых производство неубыточно.

1 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	17	50	210	163	14	39
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	25	33	194	207	12	45
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	58	18	210	202	10	57
Цена за единицу ресурса:	51	61	21	8	30	

2 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	19	47	209	163	11	65
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	35	38	192	207	10	49
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	60	11	204	202	10	45
Цена за единицу ресурса:	52	69	20	10	33	

3 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	20	45	204	164	11	35
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	33	39	189	205	12	38
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	55	12	204	204	16	40
Цена за единицу ресурса:	53	61	21	12	31	

4 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	17	46	205	161	14	35
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	34	30	191	208	9	38
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	62	15	204	202	11	39
Цена за единицу ресурса:	56	62	22	8	36	

5 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	18	54	202	163	9	44
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	26	30	188	206	12	47
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	56	11	207	201	8	49
Цена за единицу ресурса:	57	58	19	11	39	

6 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	15	46	205	156	14	36
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	33	34	187	204	17	38
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	55	12	206	200	7	39
Цена за единицу ресурса:	57	58	19	7	36	

7 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	17	50	210	163	14	55
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	25	33	194	207	12	45
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	58	18	210	202	10	35
Цена за единицу ресурса:	51	61	21	8	30	

8 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	19	52	203	156	5	50
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	32	36	194	205	8	45
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	63	18	210	205	7	37
Цена за единицу ресурса:	50	59	21	7	30	

9 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	17	48	205	156	6	45
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	33	34	189	203	15	55
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	54	16	208	209	6	59
Цена за единицу ресурса:	56	66	25	6	37	

10 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	21	46	202	157	11	34
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	32	37	191	207	13	57
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	60	18	202	200	15	63
Цена за единицу ресурса:	57	57	16	10	34	

11 вариант	Глина	Известь	Вода	Энергия	Топливо	Производительность технологии
Технология выпуска с помощью изготовления шлама	15	51	205	156	9	58
Технология выпуска с помощью изготовления клинкера	31	32	194	208	8	45
Технология выпуска с помощью изготовления шлакопортландцемента	60	13	205	207	13	46
Цена за единицу ресурса:	54	62	24	14	36	

Дополнительная задача

Предприятие производит цемент и может использовать 3 технологии выпуска цемента. Таблица содержит затраты ресурсов при единичной интенсивности работы каждой технологии, производительность технологий и цены за единицу каждого ресурса. Цена реализации цемента – 300 денежных единиц.

Введем обозначения:

Данные задачи:

$q = (q_1, q_2, q_3)$ – вектор производительностей технологий.

$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ – вектор цен за единицу используемых ресурсов.

$p_0 = 300$ – цена единицы продукции.

A – матрица затрат. Элемент a_{ij} – количество i-го ресурса потребляемого j-ой технологией при ее единичной интенсивности.

Переменные задачи:

$z = (z_1, z_2, z_3)$ – вектор интенсивностей технологических процессов.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – вектор затрат производственных факторов. (x_i – количество i-го фактора, необходимое для обслуживания действующих технологических процессов).

$F = p_0 q^T z - p^T x$– целевая функция (прибыль=выручка-затраты)

Для выяснения вопроса убыточности или безубыточности производства используется неравенство $p_0 q^j - p^T a_j \geq 0$. Если для всех $j = 1, 2, 3$ неравенство не выполняется, то производство является убыточным.

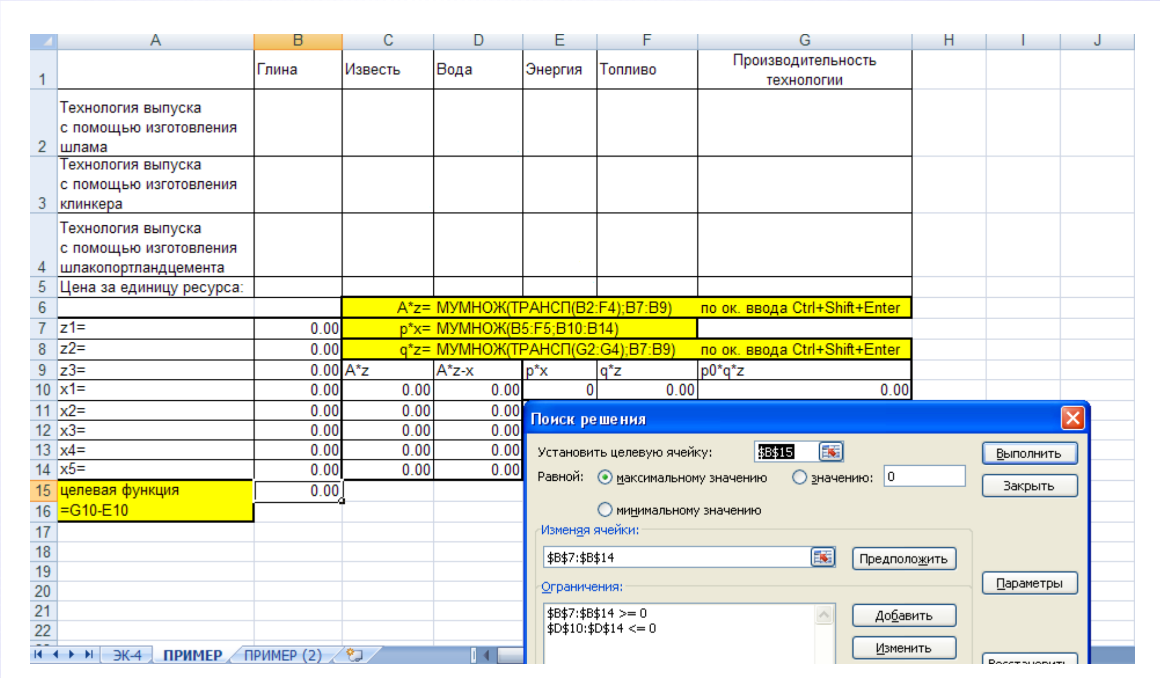
Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Математическая модель ЗАСПД

$$F = p_0 q^T z - p^T x \to \max$$

$$Az - x \le 0$$

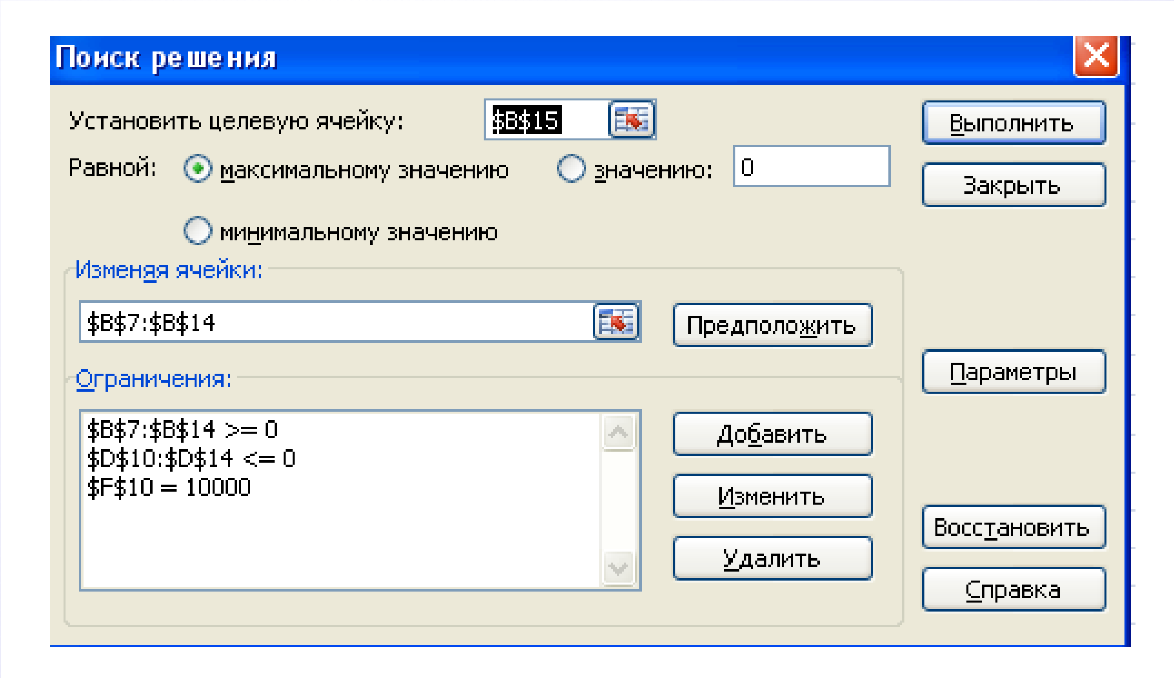
$$z \ge 0, x \ge 0$$



Ограничения для поиска решений:

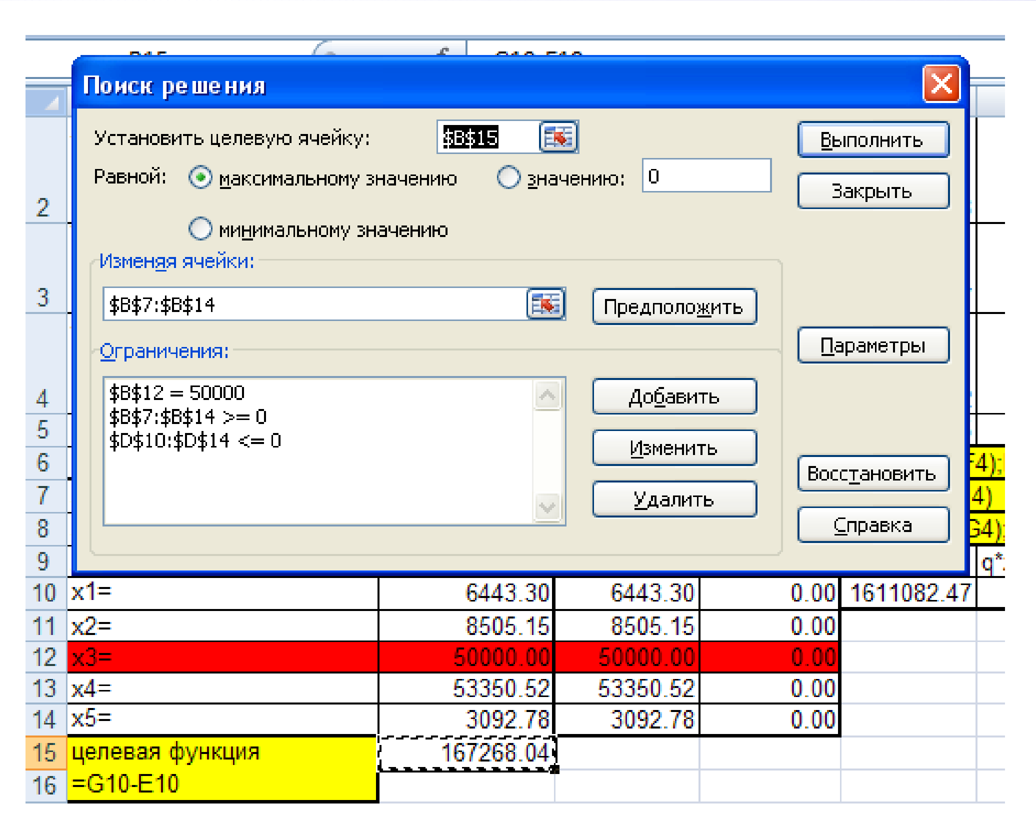
1.а при фиксированном объеме выпуска Q:

$$q^T z = Q$$

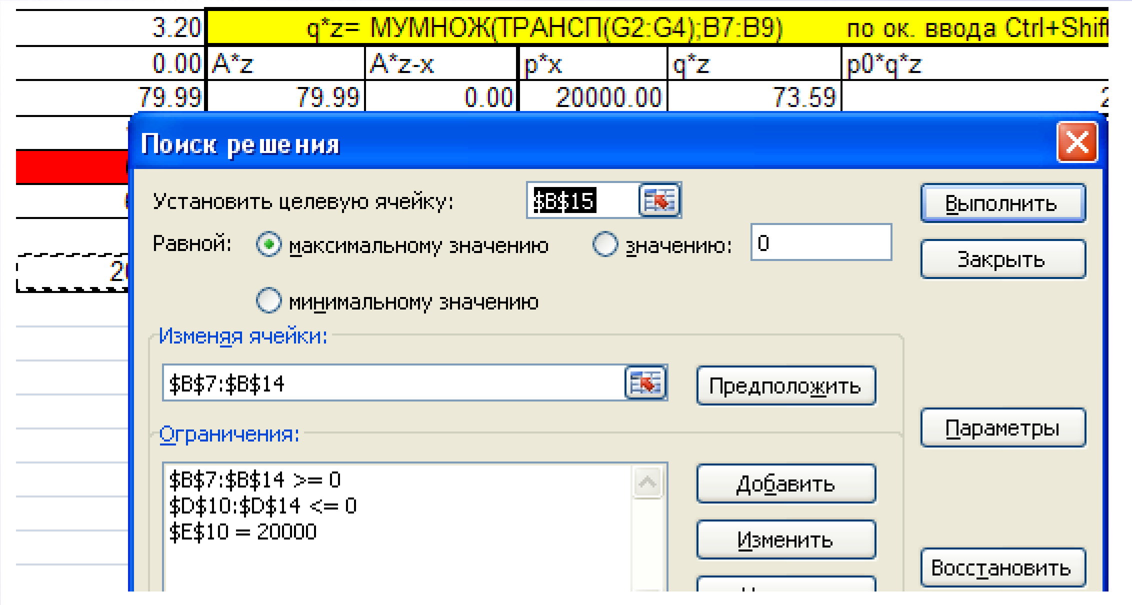


(Подсказка! При оптимальном решении задачи в производстве будет задействован лишь один технологический процесс. Т. е. вектор z будет иметь все нулевые компоненты, кроме одной.)

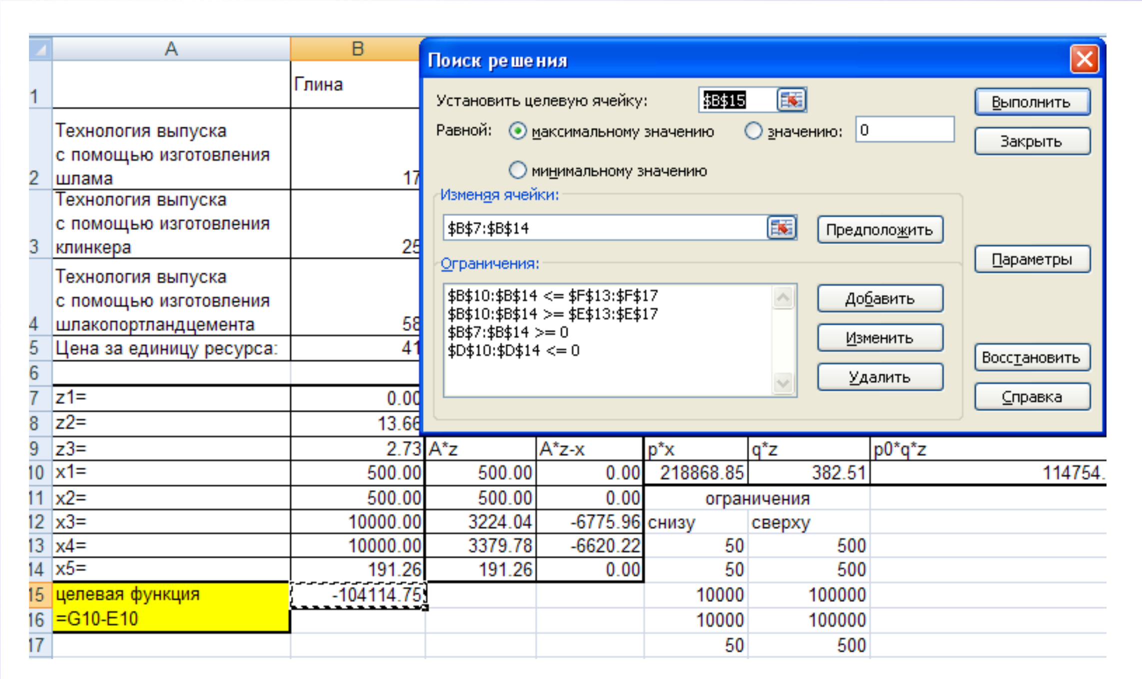
1.б при фиксированном факторе производства (например, x_3)



1.в при фиксированных затратах $C = p^T x$



2. ЗАСПД с ограниченными факторами



На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

ЛЕКЦИЯ 15

Экономическое равновесие. Содержательный аспект

В предшествующих главах мы изучали поведение двух субъектов микроэкономики – потребителя и фирмы – изолированно друг от друга. В данной главе приступаем к рассмотрению взаимодействия этих субъектов в процессе образования более крупной структуры – рынка. Такая последовательность изложения продиктована необходимостью предварительного ознакомления читателя с математическими определениями спроса и предложения, как решений соответствующих оптимизационных моделей.

Взаимодействие между складывающимися на рынке готовой продукции потребительским спросом и предложением фирм приводит к понятию равновесия. Равновесие в общепринятом в экономике смысле, как равенство спроса и предложения, было определено нами при обсуждении основных рыночных категорий. Это наиболее важная, но все же узкая (частная) трактовка понятия равновесия, предполагающая наличие «уравнивающих» друг друга факторов. О равновесии можно говорить общо, как о характеристике состояния любой системы, на которую воздействуют различные стороны (в частности, только одна сторона), каждая со своими интересами. В таком общем смысле равновесие - это то состояние системы, которое устраивает всех заинтересованных в ее состоянии сторон, за неимением ничего лучшего.

Приведем несколько конкретных понятий равновесия.

1. Равновесие в задачах принятия решения со многими участниками Предположим, что интересы участников (лиц, принимающих решения) не противоположны, но и не совпадают. Однако степень достижения своей цели каждым из них зависит как от его собственных решений, так и от действий всех остальных участников. Под равновесным состоянием данной системы понимается такая ситуация (совокупность выбранных решений), когда отклонение от этой ситуации разве что ухудшает положение уклониста (при условии, что остальные участники придерживаются этой ситуации). Равновесная ситуация не обеспечивает участникам «наилучшее достижение цели», но, если такая ситуация существует, то, в условиях отсутствия обмена информациями участникам ничего другого не остается, как придерживаться ее (дабы хуже не было). Это так называемое равновесие по Нэшу. Оно широко применяется в теории игр – разделе Исследования операций, посвященном математическим моделям задач принятия решения в условиях конфликта и неопределенности.

2. Равновесные действия противоборствующих сторон. Такая ситуация предполагает наличие двух лиц, принимающих решения, с прямо противоположными интересами (например, две конкурирующие фирмы, выпускающие один и тот же товар, имеющие один и тот же рынок сбыта). Здесь каждая сторона принимает решение с учетом «закона подлости», т.е. выбирает лучшее из тех решений, которые «разрешены» ее противником. Равновесным является то состояние, одностороннее отклонение от которого невыгодно уклонисту. Такое равновесие называется седловой точкой и, если оно существует, то противники вынуждены ее придерживаться. Видно, что седловая точка является частным случаем равновесия по Нэшу.

3. Равновесие на основе угроз. Этот принцип применяется в задачах принятия решения с обменом информацией. Равновесным называется такое состояние системы, когда любое мотивированное предложение (угроза) одних участников, направленное на изменение данного состояния системы, встречает мотивированное возражение (контругрозу) со стороны других участников.

4. Равновесие в задаче потребителя. Как видно из материала главы III (см. §3.4), наилучшее состояние потребителя описывается точками, в которых бюджетные линии касаются соответствующих кривых безразличия. Эти точки характеризуют спрос, во-первых, как платежеспособную потребность в товарах, во-вторых, как набор товаров, максимизирующий полезность потребителя. Отклоняясь от них в своем выборе, потребитель нарушил бы одно из условий «оптимальности». Поэтому данные точки и отражают равновесное состояние потребителя. Аналитически это состояние характеризуется равенством между отношением цен товаров и предельной нормой замещения (см. (**??**)).

5. Равновесие в задаче фирмы. Условия равновесия в задаче фирмы концептуально схожи с соотношениями, формируемыми в теории спроса. Цель фирмы – максимизация прибыли (или минимизация издержек) при ограниченных ресурсах (при фиксированном уровне выпуска). Набор затрат ресурсов, удовлетворяющих этим условиям, и отражает равновесное состояние производства. Реализация других объемов затрат может привести лишь к нарушению условий «оптимальности». Аналитически состояние равновесия фирмы выражается равенством между отношением цен на соответствующие факторы производства и готовый продукт и предельной нормой замещения (см. § 4.6).

Характерным свойством «равновесии» в приведенных примерах является их устойчивость против отклонения. Присуще ли это свойство экономическому равновесию?

Чтобы обсудить этот вопрос, рассмотрим рынок одного товара, относительно которого будем говорить о совокупном спросе потребительского сектора и о совокупном предложении производственного сектора, пока (до §5.2) не уточняя эти категории и оставляя их понимание на интуитивном уровне.

Пусть, как и в главах III и IV, цена товара фиксирована. Это положение соответствует условиям совершенной конкуренции (смотри рисунок 16.1 в §1.2), когда отдельные участники экономики не влияют на цену товара. Пусть имеет место равновесие: $c^*(p, K) = f^*(p_1, w_1, \ldots, w_m)$, где c^* – совокупный спрос, f^* – совокупное предложение, p – цена товара, k - доход потребительского сектора, w_i – цены затрат. Формально это равновесие может быть нарушено либо по «воле» рынка, который распоряжается ценой товара, либо по воле покупателя (управляющего спросом, например, посредством изменения величины дохода) или производителя (управляющего предложением, например, посредством изменения объемов затрат). В первом случае будем говорить о ценовых причинах нарушения равновесия, во втором – о неценовых причинах.

Рассмотрим сначала неценовые причины (вызванные влиянием сезонности, моды, изменением экономической политики и т.д.). Предположим, что при неизменном предложении потребитель «сознательно» отклоняется от равновесия, увеличивая или уменьшая спрос:

$$a)\ \bar{c} > f^*,\ b)\ \bar{\bar{c}} < f^*.$$

Если при фиксированном спросе от равновесия отклоняется производитель, то соответственно придем к одному из двух неравенств:

$$c)\ c^* > \bar{f},\ d)\ c^* < \bar{\bar{f}}.$$

В этих соотношениях случаи a) и c) приводят к дефициту (смотри рисунок 15.1), т.е., в конечном счете, к повышению цены, что выгодно производителю и невыгодно потребителю. Следовательно, в случаях a) и c) неценовые причины вызывают изменение равновесной цены. Случаи b) и d) приводят к излишкам (смотри рисунок 15.1), т.е., в конечном счете, к снижению цены, что выгодно потребителю и невыгодно произ-

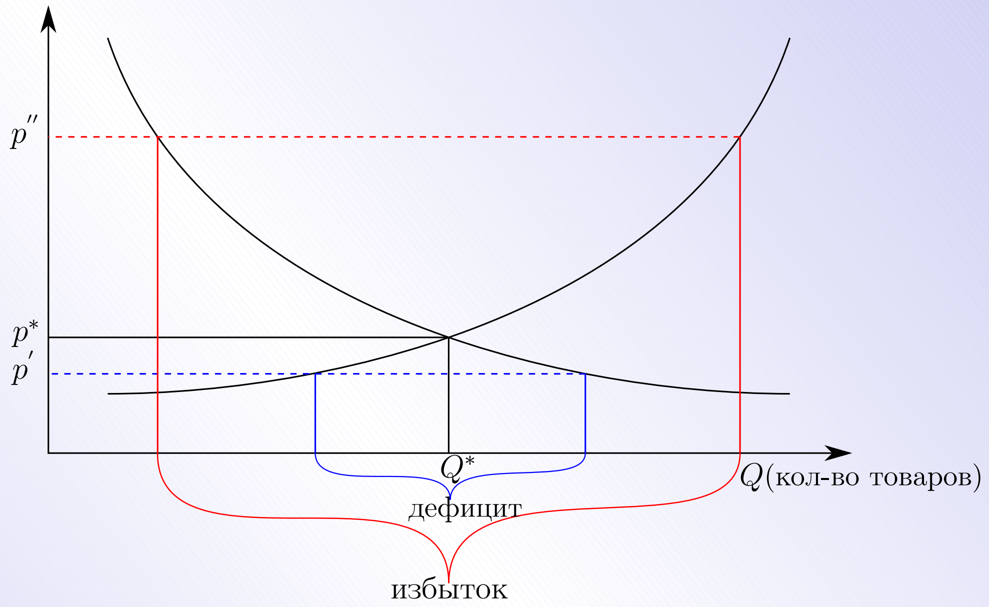


Рисунок 15.1 – Кривая спроса и предложения и точка равновесия

водителю. Следовательно, в случаях b) и d) неценовые причины также вызывают изменение равновесной цены.

Исходя из таких рассуждений, можно было бы заключить, что потребителю выгодно отклонение от равновесия в сторону снижения спроса, а производителю – в сторону снижения предложения. Однако для достоверности таких утверждений нужно ответить на следующие вопросы. На сколько нужно уменьшить спрос, чтобы соответствующее снижение цены действительно было выгодно для потребителя, т.е. чтобы сэкономленные средства с остатком компенсировали ущерб от уменьшения спроса? Каким должен быть этот остаток? Аналогичные вопросы возникают и для определения конкретной выгоды производителя. Очевидно, на эти вопросы можно ответить, применяя понятие предельной нормы замещения (см.§§3.3.–4.3.). При желании читатель может самостоятельно провести такой анализ.

Как мы видим, по отношению к экономическому равновесию однозначно нельзя утверждать о его устойчивости против отклонения. Но зато эти рассуждения помогают обнаружить устойчивость другого характера – тенденцию экономического равновесия к устойчивости против колебания цены, какой бы причиной оно ни было вызвано. Поясним это положение.

Будем исходить из того факта, что экономическое равновесие может быть нарушено как по ценовым, так и по неценовым причинам. Пусть на уровне цен p^* имеет место равновесие $c^*(p^*, \bullet) = f^*(p^*, \bullet)$ (точки здесь заменяют прочие, в частности, неценовые, переменные). Допустим, что по какой-то неценовой причине повысился спрос до уровня Q''. Как видно из рисунка 15.2, спрос Q'' соответствует цене $p' < p^*$, так что

$$c^*(p', \bullet) = Q'' > Q^*,\ \ f^*(p', \bullet) = Q' < Q*,$$

т.е. спрос стал больше предложения. Цене p' соответствуют две точки: (p', Q') и (p', Q''). Естественно поставить вопрос: может ли цена p'

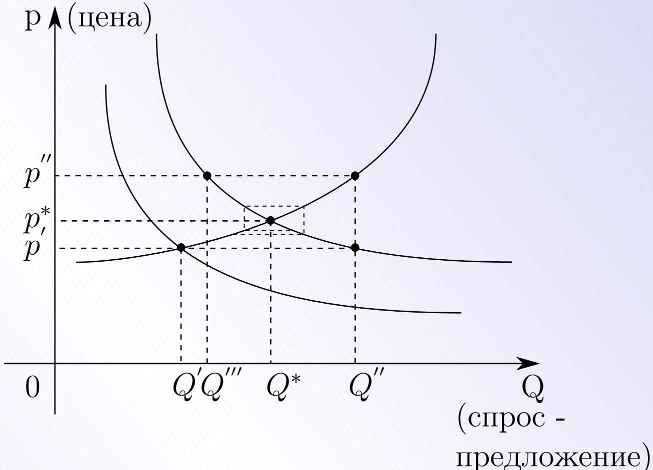


Рисунок 15.2 – Устойчивость равновесия против колебания цен

быть равновесной, иначе, может ли одна из этих двух точек быть равновесным состоянием? Обратимся к точке (p', Q') (относительно точки (p', Q'') рассуждения зеркально аналогичны).

Для того чтобы точка (p', Q') оказалась равновесной, кривая спроса должна сместиться и пройти через эту точку. Когда это возможно? Формально, тогда, когда выполняется равенство $c^*(p', \bullet) = f^*(p', \bullet)$. Содержательно, бюджет потребителя должен уменьшиться ровно на величину $p^*Q^* - p'Q'$, и тогда бюджетная линия в пространстве товаров параллельно сместится от точки Q^* до точки Q'. Такое изменение ситуации приведет к уменьшению дохода производителя ($p'Q' < p^*Q^*$), и оно вызвано двумя причинами: снижением цены ($p' < p^*$) и выпуска ($Q^{'} < Q^{*}$). Что может противопоставить этому производитель? При данных неизменных технологических условиях - ничего, так как нежелание снизить цену своего товара или объема выпуска приведет к еще худшему результату. Таким образом, неценовые причины могут привести к переходу в новое состояние равновесия, и это свидетельствует о неустойчивости равновесия против неценовых возмущений в экономике.

Обсудим теперь ценовую причину. Пусть цена товара упала до величины $p^{'} < p^{*}$. Как видно из рисунка 15.2, при этой цене спрос превышает предложение ($Q^{''} > Q^{'}$), что влечет повышение цены товара. Но до какого уровня? Если предложение подтягивается до нового уровня спроса, т.е. до величины $Q^{''}$, то, согласно кривой предложения, цена должна повышаться до величины $p^{''}$. Но такой цене соответствует спрос $Q^{'''} < Q^{''}$. Продолжая эти рассуждения, можно заметить, что цена последовательно приближается к равновесному значению p^{*}, а спрос и предложение сходятся к общему (равновесному) значению Q^{*}. Здесь описана идея процедуры рыночного регулирования цены «невидимой рукой Адама Смита». По расположению вспомогательных линий на графике эту процедуру называют паутинообразной моделью регулирования цены товара. Аналогичную картину можно получить при исходном предположении о повышении цены над p^{*}.

В результате мы можем сделать вывод о том, что экономическое равновесие устойчиво против ценовых возмущений. Более подробное обсуждение устойчивости как сходимости процедуры регулирования к равновесной цене отложим до §5.5.

Паутинообразная модель описывает приспособление цены во времени к вариациям спроса и предложения. Опишем ее детально на примере линейных функций.

Пример 15.1. Для рынка одного товара вывести формулу паутинообразного регулирования цены при условии, что функции спроса и предложения линейно зависят от цены, и предложение реагирует на изменение спроса с временным лагом (с опозданием на некоторый промежуток времени).

Линейность функций спроса и предложения означает представимость их в виде:

$$c^*(p) = -ap + b, f^*(p) = cp + d, a, b, c, d > 0.$$

Пусть a $>$ c, т.е. наклон кривой спроса больше, чем наклон кривой предложения. Для отражения последовательного изменения значений, величины c^*, f, и р снабдим индексом времени t: c_t^*, f_t^*, p_t. Моменты изменения их значений (моменты регулирования) обозначим через $t_1, t_2, \dots$. Для простоты положим $t_k - t_{k-1} = 1$, т.е. $t = 0, 1, 2, \dots$. Пусть в начальный момент времени t=*0* спрос c_0^* соответствует уровню цены p_0 (смотри рисунок 15.3) и превышает предложение, т.е. $c_0^* > f_0^*$. Предложение подтягивается к уровню c_0^* к моменту t=1 $f_1^* = c_0^*$ и соответствует уровню цены $p_1 > p_0$. Но этой цене в момент t=1 соответствует

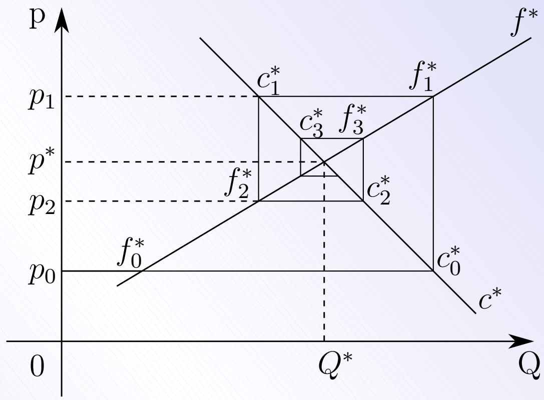


Рисунок 15.3 – Устойчивость равновесия против колебания цен

другой уровень спроса $c_1^* < f_1^*$, который вынуждает цену уменьшиться до уровня $p_2 < p_1$. Далее предложение снижается до уровня c_1^* к моменту t=2 $f_2^* = c_1^*$ и т.д. Продолжая эти построения, мы приходим к общей закономерности: $f_{t+1}^* = c_t^*$ или

$$cp_{t+1} + d = -ap_t + b.$$

Отсюда получаем искомую рекуррентную формулу приспособления цены к уровням спроса и предложения:

$$p_{t+1} = -\frac{a}{c}p_t + \frac{b-d}{c}, t = 0, 1, 2, \ldots \tag{15.1}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Зная «начальную» цену p_0 , по формуле (15.1) можно вычислить цену товара на любом шаге приближения к равновесному значению p^*. Сходимость этой процедуры ($\{p_t\}_{t=0}^{\infty} \to p$) для любых p_0 будет изучена в §5.5.

Читателю предлагается самостоятельно анализировать случай $c_0^* < f_0^*$ в примере 15.1.

Заметим, когда a < c, т.е. наклон кривой спроса меньше, чем наклон кривой предложения, процедура расходится. Нарисуйте соответствующий этому случаю график (паутинообразную модель) и обоснуйте факт расхождения самостоятельно.

ЛЕКЦИЯ 16

Рыночный спрос и рыночное предложение. Условия совершенной конкуренции

В этой главе мы будем изучать математическую модель рынка, предложенную швейцарским экономистом-математиком Леоном Вальрасом и некоторую ее модификацию. Так как основными понятиями любого рынка являются товары, их цены, участники, их спрос и предложение, то эти элементы и будут подвергаться формализации.

Участниками рынка могут быть любые заинтересованные в купле-продаже товаров стороны: индивидуальные потребители, отдельные фирмы, совокупность потребителей некоторого региона, совокупность предприятий данной отрасли, финансовые организации, концерны, целые страны. Одним словом, классификация участников рынка зависит от характера решаемой задачи.

В классических моделях в качестве участников рынка рассматриваются производители товаров (фирмы) и их потребители. Первые выходят на рынок для реализации своей продукции, а вторые – для приобретения необходимых им товаров потребления. Поэтому для классификации участников рынка больше подходят названия продавцов и покупателей. Тем более, что потребители могут выступать в роли продавцов принадлежащих им первичных факторов (труд, земельные участки и др.); точно так же производители выступают в роли покупателей про-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

изводственных ресурсов. Таким образом, любой участник рынка выступает одновременно как продавец и покупатель. Мы можем сказать, что относительно любого товара на рынке существует три группы участников: те, кто продает этот товар, те, кто покупает его, и те, кому этот товар безразличен. Если продавцов (покупателей) данного товара много, то между ними возникает конкуренция. Поэтому рынки можно классифицировать по характеру конкуренции (смотри таблицу 16.1).

Таблица 16.1: Виды рынков (по числу участников)

покупатели / продавцы	Один	Несколько	Много
Один	**сделка**	**олигопсония**	**монополия**
Несколько		ОЛИГОПОЛИЯ	
Много	**монопсония**	**олигопсония**	**совершенная конкуренция**

В обычном понимании рынок – это то место, где продается и покупается большое разнообразие товаров. В случае необходимости рынок можно сегментировать по видам товаров и при соответствующих ограничениях (например, с учетом имеющихся связей с рынками других товаров) изучить рынок интересующего товара отдельно.

В этой главе мы будем рассматривать многотоварный рынок с большим числом участников. Поэтому будем предполагать, что относительно каждого товара имеется большое число продавцов и покупателей.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

В связи с этим возникает необходимость уточнения ранее введенных понятий спроса и предложения, а также условий конкуренции.

Прежде всего, нам надо выяснить и формализовать понятия совокупного (рыночного) спроса и совокупного (рыночного) предложения относительно имеющихся на рынке товаров. Напомним в этой связи, что в главах III и IV были формализованы понятия спроса индивидуального потребителя и предложения отдельно взятой фирмы. Как определить понятия рыночного спроса и рыночного предложения, исходя из понятий индивидуального спроса и предложения? Возможно ли это в принципе? Как формируются кривые рыночного спроса и рыночного предложения? Обладают ли они свойствами, присущими их индивидуальным аналогам?

Проблема агрегирования спроса отдельных индивидов и предложения отдельных фирм является довольно тонкой материей. Это один из тех вопросов, относительно которых строгая методология математики расходится с более близкой к практике экономической теорией. С точки зрения первой эту проблему нельзя считать вполне решенной - не существует общих способов агрегирования, удовлетворяющих всем основополагающим теоретическим постулатам. Экономическая же методология исходит из предпосылки о реальной возможности формирования рыночного спроса и рыночного предложения. Чтобы не отвлекать внимание читателя от основного материала, мы постараемся обосновать это обстоятельство, не вдаваясь в сугубо теоретические подробности.

Относительно формализации совокупного спроса на рынке, на первый взгляд, имеется два возможных подхода. Во-первых, конструировать функцию «коллективной» полезности всех потребителей, желающих приобрести данные товары, и определить рыночный спрос как решение одной общей задачи типа (11.1)–(11.1). Во-вторых, вектор рыночного спроса на товары формировать, исходя из решений индивидуальных задач (11.1)–(11.1) потребителей. В первом случае коллективную функцию полезности можно попытаться построить одним из двух способов: либо на основе отношения «коллективного» предпочтения, либо на основе индивидуальных функций полезности потребителей.

Под предъявителем рыночного спроса мы понимаем совокупного потребителя, как одного из двух участников рынка. Но совокупный потребитель (как и совокупный производитель) не является единой личностью, которая выражает свои мысли одними устами. Реальная действительность сводится к индивидуальным предпочтениям, и только исходя из них можно определить коллективное предпочтение. Оно должно удовлетворять (как и в случае индивидуального предпочтения) системе аксиом и быть непрерывным. Только тогда на основе теоремы **??** можно утверждать о существовании функции полезности, адекватно отражающей коллективное предпочтение.

Обозначим через S множество потребителей и в пространстве товаров R^n_+ введем понятие коллективного предпочтения $(\geq s)$ с помощью следующих аксиом (некоторые из них соответствуют аксиомам индивидуального предпочтения (см. §3.1)):

A1) полнота: для любых $x, y \in R_+^n$ либо $x \geq_s y$, либо $y \geq_s x$, либо ($\sim_s$ – отношение безразличия);

A2) транзитивность: для любых $x, y, z \in R_+^n$, таких, что $x \geq_s y$, $y \geq_s z$, справедливо $x \geq_s z$;

A3) единогласие: если $x \geq_i y$ для всех $i \in S$, то $x \geq_s y$;

A4) независимость: для любых $x, y, z \in R_+^n$ из $x \geq_s y$, $x^{>}_{<_s}, z, y_{<_s} z$, следует ($x \geq_s y^{>}_{<_s}$ любое отношение).

Главный вопрос теперь заключается в том, существует ли отношение предпочтения, удовлетворяющее этим четырем аксиомам? К сожалению, в общем случае ответ будет отрицательным. Более или менее известные способы определения коллективного предпочтения, такие, как «правило большинства», «правило уравновешивания», «правило диктатора», во-первых, более применимы в области политики, чем экономики, во-вторых, приводят к нарушению некоторых из аксиом A1–A4. Это вполне понятно. С одной стороны, легче согласовать идеи, чем потребности, с другой – участники экономики поступают главным образом эгоистически, и не существует единственного способа приспособления их потребностей друг к другу. Во избежание неправильных выводов здесь нужно пояснить: сказанное не означает, что в каждом отдельном случае коллектив не придет к соглашению. Речь идет лишь об отсутствии общих адекватных методов получения коллективного предпочтения.

Теперь проанализируем возможность построения коллективной функции полезности, исходя из индивидуальных функций полезности всех потребителей. Последние, как мы видели в §3.2, вполне реально определяются и существуют. Искомую функцию для потребительского сектора S естественно определить как

$$U_s = \sum_{i \in S} U_i$$

где U_i – функция полезности потребителя i. По определению 3.1, с этой функцией должно быть связано некоторое отношение предпочтения $\geq_s$: $x \geq sy$ тогда и только тогда, когда $U_s(x) \geq U_s(y)$. Оказывается, такое отношение предпочтения удовлетворяет аксиоме единогласия, но противоречит аксиоме независимости (установите это самостоятельно).

Для выявления еще более серьезного возражения против функции U_s представим ее в виде $U_s = \langle 1, U \rangle$, где $1 = (1, \ldots, 1)$, $U = (U_1, \ldots, U_s)$, s – число всех потребителей. Тогда по теореме 3.2 **??** любая функция вида

$$U_s^a = \langle a, U \rangle \,, \tag{16.1}$$

где $a = (a_1, \ldots, a_s), a_i > 0, i = 1, \ldots, S$ является также функцией коллективной полезности. Положим $a = (100, 1, \ldots, 1)$. Легко видеть, что функция U_s^a в этом случае порождает отношение предпочтения, дающее приоритетный вес только первому потребителю. Такое отношение предпочтения явно не совпадает с отношением предпочтения, порожденным исходной функцией U_s. Можно доказать, что только в одном случае все функции вида (16.1) будут соответствовать одному и тому же отношению предпочтения, а именно, когда выполнено дополнительное условие $a_1, + \cdots + a_s = 1$. Каждому набору коэффициентов $(a_1, \ldots, a_s)$ из этого условия будет соответствовать своя функция полезности U_s^a. Возникает новая проблема: какую из этого бесконечно большого числа функций предпочтут потребители?

Резюмируя, можно говорить, что попытка определения коллективной функции полезности на основе индивидуальных функций полезности не решает проблему, так как вопрос существования коллективно предпочитаемых весов $(a_1, \ldots, a_s)$ возвращает проблему к исходной точке. Вообще, задача коллективного предпочтения требует принципиально иных подходов, о которых речь пойдет позже.

Напомним, что мы анализировали возможность построения коллективной функции полезности и пришли к отрицательному заключению: с одной стороны, ее нельзя построить непосредственно, так как нельзя определить строго понятие коллективного предпочтения; с другой – ее не удается построить, используя индивидуальные функции полезности, из-за проблемы неоднозначности.

Теперь проанализируем возможность определения рыночного спроса, исходя из решений индивидуальных оптимизационных задач вида (4.1)–(4.2) для всех потребителей. Такой анализ проведем нестрого, так, как это делают экономисты, на языке кривых спроса. А именно, покажем,

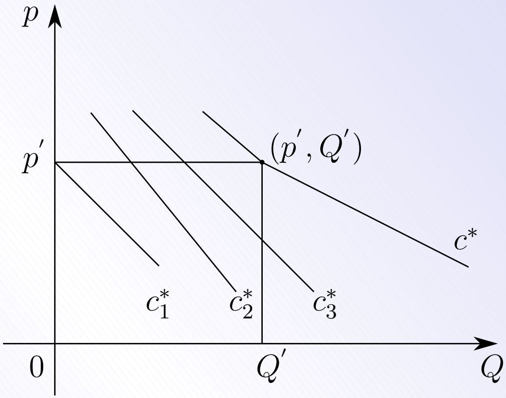


Рисунок 16.1 – Кривая рыночного права

что кривую рыночного спроса (c^*) можно получить как сумму кривых индивидуального спроса (c_i^*) всех потребителей. На рисунке 16.1 показаны линейные графики спроса c_1^*, c_2^*, c_3^* для трех потребителей. Любая точка на кривой рыночного спроса получается для данной цены как сумма по горизонтальной оси координат соответствующих этой же цене точек всех индивидуальных кривых спроса. Аналитически это означает, что $c^* = \sum\limits_{i \in S} c_i^*$.

При этом рыночная кривая спроса не обязательно имеет такой же вид, что и индивидуальные кривые. Как видно из рисунка 16.1, даже для линейных кривых индивидуального спроса рыночная кривая получается нелинейной (изгиб в точке p', Q'). Изменению подвергаются и другие свойства индивидуальных кривых, в частности, такие характеристики, как эластичность спроса, предельная норма замещения и др.

Для теоретического обоснования приведенного выше «графического способа» определения рыночного спроса сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 16.1. Пусть области определения $X_i, i \in S$ функций полезности индивидуальных потребителей есть конусы с вершинами в нуле пространства товаров. Пусть, далее, каждая индивидуальная функция полезности U_i положительно однородна и принимает на X_i хотя бы одно положительное значение. Тогда существует такая функция $v : \sum\limits_{i \in S} X_i \to R^1$ что при любых ценах $p \in R^n_+$ решение задачи $v(x) \to \max, \langle p, x \rangle \leq \sum\limits_{i \in S} B_i, x \geq 0$, совпадает с суммой решений s оптимизационных задач: $U_i(x) \to \max, \langle p, x \rangle \leq B_i, i = 1, \ldots, S, x \geq 0$.

Напомним, что множество X_i называется конусом с вершиной в нуле пространства R^n, если оно вместе с каждой точкой $x \in X_i$ содержит луч $\{\lambda x, \lambda > 0\}$.

По существу, в теореме16.1 сформулированы те условия, при выполнении которых существует коллективная функция полезности (v) и с помощью которых всех потребителей можно представить как одно лицо.

Как и в случае с потребителями, путем суммирования кривых предложения отдельных фирм, полученных в результате решения их оптимизационных задач из главы IV , можно получить понятие кривой рыночного предложения.

Общий вывод такой, что можно найти, во всяком случае, приемлемые для экономической практики способы формализации понятий рыночного спроса и рыночного предложения. Последнее дает моральное право оперировать понятиями совокупного спроса и совокупного предложения.

Представляется необходимым обратить внимание читателя на следующий момент. Совокупный спрос (совокупное предложение) не является результатом кооперирования между потребителями (производителями). Более того, кооперация вообще исключена условиями совершенной конкуренции (см. ниже). Совокупный спрос характеризует суммарную потребность общества в товарах, а совокупное предложение – суммарные возможности производителей этих товаров.

Перейдем теперь к уточнению понятия совершенной конкуренции. Все теоретические построения, рассмотренные раньше относительно потребителей и фирм, базировались на предположении о фиксированности цен товаров и ресурсов, т.е. мы этим самым неявно предполагали функционирование участников экономики в условиях совершенной конкуренции.

В экономической теории принято считать, что рынок с совершенной конкуренцией определяется следующими признаками:

1. наличие большого числа независимых друг от друга фирм, производящих одни и те же товары; при этом доля выпуска каждой фирмы незначительна по сравнению с суммарным выпуском всех фирм;

2. наличие большого числа независимых друг от друга потребителей данных товаров; при этом доход отдельного потребителя незначителен по сравнению с суммарным доходом всех потребителей;

3. полная свобода действий всех участников рынка за исключением соглашений по контролю над рынком;

4. однородность товаров на рынке и их мобильность;

5. совершенное знание рынка (конъюнктуры товаров, их цен) покупателями и продавцами.

При выполнении первых двух условий отдельные покупатели и продавцы воспринимают рыночные цены как заданные извне, не имея возможности на них повлиять. Условие 3) обеспечивает наличие конкуренции как среди покупателей, так и среди продавцов. Требование 4) обуславливает возможность существования единой цены на товар; условие 5) необходимо для принятия оптимального решения участниками рынка по поводу купли и продажи товаров.

Имея в виду влияние этих условий, экономическое равновесие часто называют конкурентным равновесием. Условия совершенной конкуренции считаются наиболее выгодными для общества. Но, как легко догадаться, эти условия носят весьма идеализированный характер, т.е. в действительности невозможно точное выполнение всех этих условий. Поэтому понятие совершенной конкуренции имеет в известной степени абстрактный оттенок. Отсюда вывод – рассматриваемая в данной главе модель Вальраса, предполагающая совершенность конкуренции, описывает функционирование идеального рынка и имеет больше теоретическое, чем практическое значение. Сказанное не умаляет роли модели Вальраса как исходной точки для многих обобщений и модификаций, таких как рыночная модель Эрроу-Дебре, модель расширяющейся экономики Дж. фон Неймана, модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева и др.

ЛЕКЦИЯ 17
Описание общей модели Вальраса

Подготовив почву для формализации понятий совокупного спроса, совокупного предложения и конкурентного равновесия, мы можем перейти к математическому моделированию рынка по Вальрасу. Исходными концепциями модели Вальраса являются:

– дезагрегированность участников рынка: рассматриваются отдельные потребители и отдельные производители;

– совершенность конкуренции;

– общность равновесия.

Последняя концепция означает рассмотрение равновесия по всем товарам сразу, а не по отдельным товарам. Следовательно, в модели Вальраса вводится понятие общего равновесия (т.е. равновесия по всем товарам).

Будем предполагать, что на рынке продаются и покупаются товары двух видов: готовые товары, являющиеся продуктом производства (товары конечного потребления) и производственные ресурсы (первичные факторы производства). Поэтому будем рассматривать «расширенное» пространство товаров R^n , где n – число видов всех товаров. Компонентами вектора $x \in R^n$ являются как выпуски, так и затраты (первичные факторы). Для различения их, затраты снабжают отрицательным знаком (поэтому пишем R^n, а не R^n_+). Если $x \in R^n$ есть вектор чистого выпуска, то все его компоненты, соответствующие затратам, будут равны нулю; если $x \in R^n$ есть вектор только первичных факторов, то все его компоненты, соответствующие конечным продуктам, будут равны нулю.

Индексы (виды) товаров, как и раньше, будем обозначать буквой k ($k = 1, \dots, n$), индексы потребителей – буквой i ($i = 1, \dots, l$) и индексы производителей – буквой j ($j = 1, \dots, m$). Через $p = (p_1, \dots, p_n)$ будем обозначать вектор цен товаров.

Выходя на рынок, каждый потребитель или производитель становится одновременно покупателем одних и продавцом других товаров. Потребитель, т.е. участник рынка, «непосредственно не занятый в производстве», может продавать имеющиеся в его распоряжении первичные факторы и покупает товары производителей. Производитель, т.е. участник рынка, «непосредственно занятый в производстве», продает свою готовую продукцию и покупает первичные факторы у потребителей.

Поэтому каждый потребитель i как участник рынка характеризуется тремя параметрами: начальным запасом товаров $b_i \in R^n$, функцией дохода $K_i = K_i(p)$ и вектор-функцией спроса на продукты производства $D_i = D_i(p)$.

Каждый производитель j характеризуется двумя параметрами: вектор-функцией предложения готовой продукции $S_j = S_j(p)$ и вектор-функцией спроса на затраты $Z_j = Z_j(p)$. Однако в модели Вальраса применяется несколько обобщенная характеристика производителя - с помощью одного множества $Y_j \subset R^m$, трактуемого как множество его (оптимальных) производственных планов. На языке «затраты-выпуск» это множество можно определить следующим образом: $Y_j = \left\{(z_j, S_j) \in R^{2n} | S_j = f(z_j)\right\}$, где f - производственная функция. Очевидно, $Y_j = Y_j(p)$.

С учетом всего вышесказанного, под математической моделью рынка будем понимать совокупность элементов:

$$\left\langle R^n, P, N, \{b_i, K_i, D_i\}_{i=1}^{l}, \{Y_j\}_{j=1}^{m} \right\rangle \tag{17.1}$$

где $P \subset R_+^n$ – пространство цен товаров, N – множество всех участников рынка (N содержит $l+m$ элементов).

Без качественных потерь вместо (17.1), как модель рынка, можно рассматривать совокупность

$$\left\langle R^n, P, N, \{b_i, K_i, D_i\}_{i=1}^{l}, \{S_j, Z_j\}_{j=1}^{m} \right\rangle$$

Природа элементов совокупности (17.1) здесь несколько отличается от той, которая характеризовалась нами в главах III и IV при изолированном рассмотрении потребительского и производственного секторов.

Во-первых, вектор $p = (p_1, \ldots, p_n) \in R^n_+$ содержит цены как товаров конечного потребления, так и затрат. В моделях глав III и IV все цены считались фиксированными. Здесь мы будем исходить из противоположной точки зрения – из изменчивости цен. Причем цены меняются не по желанию отдельных участников рынка, а исключительно под воздействием совокупного спроса и совокупного предложения. Поэтому одним из ключевых является вопрос: существуют ли такие цены, которые устраивают как потребителей, так и производителей?

Исходя из технических соображений, будем предполагать, что пространство цен P включает в себя нуль пространства R^n, т.е. будем допускать существование нулевых цен.

Во-вторых, как уже говорилось выше, каждый участник рынка выступает в двух лицах: как покупатель и как продавец. Очевидно, число продавцов и покупателей для разных товаров будет разным. Поэтому числа и не следует ассоциировать с числом продавцов и покупателей.

В-третьих, доход каждого потребителя предполагается состоящим из двух компонент: 1) выручки от продажи принадлежащего ему начального запаса товаров (b_j), 2) дохода, получаемого от его участия в прибыли производственного сектора (обозначим V_i), например, посредством приобретения ценных бумаг и других видов инвестиционной и трудовой деятельности. Таким образом, мы предполагаем, что

$$K_i(p) = \langle p, b_i \rangle + V_i(p) \tag{17.2}$$

В модели Вальраса считается, что весь доход производственного сектора полностью распределяется между потребителями:

$$\sum_{i=1}^{l} V_i(p) = \left\langle p, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle,$$

где $\xi_j \in Y_j$,а а скалярное произведение справа, с учетом структуры векторов ξ_j, трактуется как прибыль всего производственного сектора. Заметим, что суммирование векторов ξ_j осуществляется покомпонентно.

В-четвертых, функции спроса D_i,Z_j и предложения Z_j, которые можно представить себе как решения соответствующих оптимизационных задач из глав III и IV, предполагаются векторными и множественнозначными. Например, для функции D_i первое свойство означает, что $D_i = (D_i^1, \ldots, D_i^n)$, где D_i^k – скалярная функция спроса на k-ый товар (см.

(12.3)). Второе свойство означает, что функция D_i каждому p ставит в соответствие не один вектор $x_i^*(p) = D_i(p) \in R^n$, а множество таких векторов, т.е. $D_i(p) = \{x_i^*(p)\} \subset R^n$. Это имеет место, например, когда в соотношении (12.3), определяющем спрос, максимум достигается не только в одной точке.

В модели Вальраса понятия совокупных спроса и предложения формализуются следующим образом.

Определение 17.1. Функцией совокупного (рыночного) спроса называется множественнозначная функция

$$D(p) = \sum_{i}^{l} D_i(p) \tag{17.3}$$

Функцией совокупного (рыночного) предложения называется множественнозначная функция

$$S(p) = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j(p) \tag{17.4}$$

При таком определении смысл совокупного спроса полностью соответствует обсужденному в §5.2 способу формирования рыночного спроса на основе решений оптимизационных задач индивидуальных потребителей. Конкретно, это есть сумма индивидуальных функций спроса потребителей. Определение же функции совокупного предложения требует дополнительного пояснения. С этой целью введем обозначения: =

$$b = \sum_{i=1}^{l} b_i, Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j, \xi = \sum_{j=1}^{m} \xi_j$$

По определению, любой элемент множества Y можно представить вектором ξ, где $\xi_j \in Y_j$. Так как Y_j есть множество оптимальных планов производителя j, то компонентами вектора ξ_j являются оптимальные объемы выпуска и затрат, и все они составляют решение одной и той же оптимизационной задачи (см. §§4.5, 4.6). Таким образом, часть компонент вектора ξ, как и векторов ξ_j, отражает предложение готовых продуктов, а часть – спрос на первичные факторы. Поэтому вектор $\xi \in Y$ нельзя называть однозначно предложением. В то же время, вектор $(b+\xi) \in S(p)$ может быть интерпретирован как совокупное предложение, так как часть компонент вектора ξ, соответствующая спросу, «компенсируется» вектором b.

Покажем, что для любого p $D(p) \subset R^n$ и $S(p) \subset R^n$, т.е. областью изменения совокупных функций является то же самое пространство, что и для индивидуальных функций. Рассмотрим сначала двух потребителей. Для любого $x \in D_2 p$ множество $D_1 p + x$ образуется смещением множества $D_1(p)$ в направлении вектора x на длину этого вектора (рисунок 17.1). Поэтому

$$D_1(p) + x \subset R^n$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

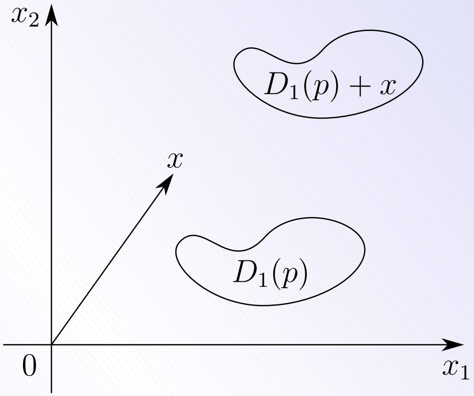


Рисунок 17.1 – Кривая рыночного права

$$D_1(p) + D_2p = \langle D_1(p) + x | x \in D_2(p)\} \subset R^n.$$

Рассмотрим трех потребителей. Для любого $x \in D_3(p)$ множество $D_1(p) + D_2(p) + x$ образуется смещением множества $D_1(p) + D_2(p)$ в направлении вектора x на длину этого вектора. Поэтому $(D_1(p) + D_2(p)) + x \subset R^n$ и $D_1(p) + D_2(p) + D_3(p) = \{(D_1(p) + D_2(p)) + x | x \in D_3(p)\} \subset R^n$. Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\sum_{i=1}^{l} D_i(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} D_i(p) + x | x \in D_l(p) \right\} \subset R^n$$

Точно так же устанавливается включение $Y \subset R^n$. Так как $b_i \in R^n$ и потому $b_i \in R^n$, то множество $b+Y$ образуется смещением множества Y в направлении вектора b на длину этого вектора. Поэтому $S(p) = b + Y \subset R^n$.

Формализовав понятия функций совокупных спроса и предложения, модель рынка (17.1) мы можем представить совокупностью вида

$$\langle R^n, P, D(p), S(p) \rangle . \tag{17.5}$$

Любой вектор $x \in D(p)$ называется совокупным спросом (соответствующим вектору цен p); любой вектор $y \in S(p)$ – совокупным предложением (соответствующим вектору цен p). Эти векторы являются (оптимальными) реакциями совокупного покупателя и совокупного продавца на установившийся на рынке вектор цен. Если при этом x $>$ y, то на рынке возникает дефицит товаров, а при x $<$ y появляются их излишки. Такие цены не могут считаться удовлетворительными, так как в одном случае ущемлены интересы покупателей, а в другом – продавцов. Очевидно, наилучшим вариантом для экономики является равенство x $=$ y. Этот идеальный случай на практике не всегда имеет место. Поэтому целесообразно как-то его ослабить. В модели Вальраса допускается наиболее "гуманный"с точки зрения интересов потребителей вариант обобщения понятия экономического равновесия.

Определение 17.2. Набор векторов x^*, y^*, p^* называется конкурентным равновесием на рынке (17.5), если $p^* \in P$,

$$x^* \in D(p^*), y^* \in S(p^*), \tag{17.6}$$

$$x^* \leq y^*, \tag{17.7}$$

$$\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle . \tag{17.8}$$

В этом случае p^* называется равновесным вектором цен.

По определению функций совокупных спроса и предложения, из включений (17.6) следует

$$x^* = \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \text{где} x_i^* \in D_i(p^*), i = 1, \ldots, l$$

$$y^* = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^*, \text{где} \xi_j^* \in Y_j(p^*), j = 1, \ldots, m.$$

т.е. совокупные спрос и предложение формируются как суммарные величины индивидуальных спросов потребителей и индивидуальных предложений производителей. Поэтому в развернутом виде условия равновесия (17.6)–(17.8) можно переписать так:

$$x_i^* \in D_i(p^*), i = 1, \ldots, l \tag{17.9}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$$\xi_j^* \in Y_j(p^*), j = 1, \dots, m \tag{17.10}$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^* \leq \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* \tag{17.11}$$

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle = \left\langle p^*, (\sum_{i=1}^{*} b_i + \sum_{j=1}^{l} \xi_j^*) \right\rangle \tag{17.12}$$

Экономическое содержание условий, определяющих конкурентное равновесие на рынке (17.5), таково. Условие (17.6) показывает, что на цены p^* каждый потребитель и каждый производитель реагирует наилучшим образом. Это наглядно видно из соотношений (17.9) и (17.10). Условие (17.7) отслеживает, чтобы совокупное предложение не было меньше совокупного спроса. Условие (17.8) требует, чтобы в стоимостном выражении совокупный спрос равнялся совокупному предложению. Условие (17.8) автоматически выполняется в том случае, если в (17.7) имеет место строгое равенство. В этом случае равновесие будет задано соотношениями:

$$x^* \in D(p^*), y^* \in S(p^*), x^* = y^*. \tag{17.13}$$

т.е нужность в условии (17.8) отпадает.

Предположим, что для некоторого товара в(17.7) имеет место строгое неравенство: $(x^*)^k < (y^*)^k$. Тогда в стоимостном выражении получаем неравенство $\langle p^*, x^* \rangle < \langle p^*, y^* \rangle$, не соответствующее условию (17.8). Величина $\varepsilon^k = (y^*)^k - (x^*)^k > 0$ называется излишком. Согласно закона

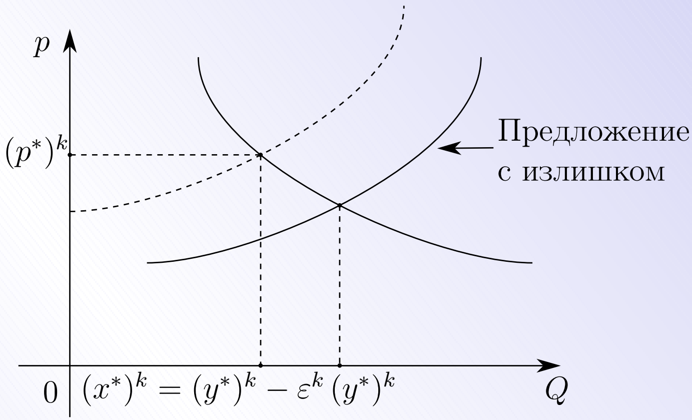


Рисунок 17.2 – Предложение с излишком

предложения, в случае появления излишка цена товара должна быть снижена (смотри §1.2 и рисунок 17.2). Но это приведет к изменению «равновесной» цены $(p^*)^k$. Как выйти из этого противоречия?

Очевидно,

$$\sum_{r=1}^{n}(p^*)^r(x^*)^r = \sum_{r=1}^{n}(p^*)^r(x^*)^r + (p^*)^k[(y^*)^k - \varepsilon^k]$$

несовместимо с равенством

$$(p^*)^k(x^*)^k = (p^*)^k(x^*)^k + 0 \cdot \varepsilon^k$$

Таким образом, формальный выход из рассматриваемой ситуации состоит в том, чтобы считать цену перепроизводимого товара равной нулю. Чисто теоретически этот прием состоятелен, так как не приводит в дальнейшем к противоречиям.

В то же время, следует признать отсутствие экономически осмысленного объяснения существования товара с нулевой ценой. Объявление такого товара «свободным» представляется несостоятельным. Строго говоря, в экономике нет свободных товаров, любой побочный продукт может найти применение, т.е. имеет ненулевую цену. Трудно согласиться и с «хорошо известной экономистам модификацией закона спроса и предложения о существовании перепроизводимых товаров с нулевой ценой», поскольку в случае перепроизводства «спрашиваемая» часть этого товара продается по ненулевой цене. Для экономики существование излишек так же плохо, как и существование дефицита. Все это говорит в пользу целесообразности определения равновесия в виде (17.13).

Итак, модель рынка по Вальрасу построена. Как видим, центральное место в ней занимает понятие конкурентного равновесия. Привлекательность равновесия как состояния рынка (и экономики в целом), заключается в возможности реализации всех произведенных товаров и в удовлетворении спроса всех потребителей. Процесс формирования рыночных цен условно можно сравнить с работой некоторого алгоритма (автомата), состоящего из четырех блоков (рисунок 17.3).

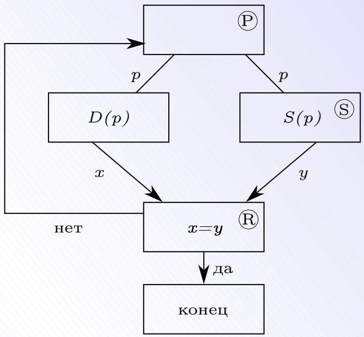


Рисунок 17.3 – Схема формирования равновесных цен

В первом блоке P формируется вектор цен. Информация о векторе p поступает в блоки D и S, в которых формируются соответственно множества $D(p)$ и $S(p)$, содержание которых, в свою очередь, передается в блок R. В блоке R осуществляется попарное сравнение элементов $x \in D(p)$, $y \in S(p)$. Если существует пара или пары (x,y), для которых выполняется условие x=y (или условия (17.7), (17.8)), то процесс заканчивается. В противном случае цены p отвергаются, о чем поступает сигнал в блок P, где формируются новые цены. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет найден равновесный вектор цен.

Утвердительный ответ на этот вопрос связан с разрешением двух важных проблем:

1. установление факта существования конкурентного равновесия в модели Вальраса;

2. разработка сходящейся к равновесной цене вычислительной процедуры (метода) формирования рыночных цен.

Существование равновесия в модели Вальраса не установлено. Причина заключается в уровне формализма этой модели – она весьма абстрактна. Конкретизируя определения составляющих ее элементов и уточняя их функциональные свойства, можно получить разные модификации модели Вальраса. Наиболее известная из них носит название модели Эрроу-Дебре, по именам ее создателей. Существование конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре будет доказано в следующем параграфе.

Проблема разработки численных методов вычисления равновесных цен связана с установлением необходимых и достаточных признаков равновесия. Нужно, чтобы они были конструктивными, т.е. порождали сходящуюся итеративную процедуру, каковой является, например, паутинообразная модель (смотри рисунок 15.3)

ЛЕКЦИЯ 18

Модель Эрроу-Дебре. Существование конкурентного равновесия

Структурно модель Эрроу-Дебре весьма близка к модели Вальраса. От последней она отличается конкретизацией природы происхождения функций предложения и спроса, а также механизма образования дохода потребителя. Покажем это по порядку.

Для каждого производителя j введем множество $Y_j \in R^n$, которое, в отличие от модели Вальраса, здесь будем трактовать как множество производственных планов (а не оптимальных планов), т.е. это есть множество n-мерных векторов $\xi_j \in R^n$, часть компонент которых описывает затраты, а другая часть - соответствующие этим затратам выпуски товаров. Компоненты, соответствующие затратам, как и в модели Вальраса, снабжаются отрицательными знаками. Поэтому скалярное произведение $\langle p, \xi_j \rangle$ показывает прибыль, полученную производителем j в результате реализации плана $\xi_j \in Y_j$. Отсюда оптимальный план ξ_j^*, участвующий в определении совокупного предложения (смотри (17.4) и (17.10)), определяется как решение задачи:

$$\langle p, \xi_j \rangle \to \max \text{при ограничении } \xi_j \in Y_j. \qquad (18.1)$$

Оптимальное решение этой задачи обозначим через $\xi_j^* = \xi_j^*(p)$, а множество всех таких решений (множество оптимальных планов) – через $Y_j^*(p)$. Если задача (18.1) имеет единственное решение, то $Y_j^*(p) = \xi_j^*(p)$.

Доход потребителя i складывается следующим образом. Вводится коэффициент a_{ij}, который показывает долю *i-го* потребителя в прибыли *j-го* производителя. Предполагается (как и в модели Вальраса), что прибыль каждого производителя делится между всеми потребителями полностью, т.е. для любого j=*1,...,m*.

$$\sum_{i=1}^{l} a_i j = 1, a_{ij} \geq 0$$

Пользуясь коэффициентами a_{ij}, суммарные дивиденды V_i, получаемые потребителем i от производственного сектора, можно представить как

$$V_i(p) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \langle p, \xi_j \rangle ,$$

где $\xi_j \in Y_j$. Поэтому общий доход потребителя i при реализации производственных планов $\xi_j (j = 1, \ldots, m)$, вычисляется по формуле

$$K_i(p) = \langle p, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \langle p, \xi_j \rangle . \tag{18.2}$$

Функция спроса потребителя конкретизируется следующим образом. Вводится множество допустимых векторов потребления $X_i \subset R^n$, а предпочтение потребителя на этом множестве задается с помощью функции полезности $U_i : X_i \to R^1$. В результате вектор-функция спроса, как и в главе III, строится как решение задачи:

$$U_i(x_i) \to \max$$

при ограничениях (18.2)

$$\langle p, x_i \rangle \leq K_i(p), x_i \geq 0.$$

Оптимальное решение этой задачи обозначим через $x_i^* = x_i^*(p)$, а множество всех таких решений – через D_i^*. Если задача (18.2) имеет единственное решение, то $D_i^*(p) \equiv x_i^*(p)$.

Таким образом, очерчены конкретные виды множеств в правых частях соотношений (17.3) и (17.4), определяющих функции совокупных спроса и предложения:

$$D(p) = \sum_{i=1}^{l} D_i^*(p), \tag{18.3}$$

$$S(p) = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j^*(p) \tag{18.4}$$

Модель (17.5), в которой функции и определены в виде (18.3) и (18.4), называется моделью Эрроу-Дебре, если выполнены следующие требования.

У-1. Множество Y_j компактно в R^n и содержит нулевой вектор *(j=1,...,m)*.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

У-2. Множество $Y = Y_1 + \cdots + Y_m$ выпукло в R^n.

У-3. Множество X_i замкнуто и выпукло в R^n и таково, что из $\{x_i\} \in X_i, x_i^r \to \infty$ для некоторого r, следует x_i^r для всех (k=1,...,n) (i=1,...,l).

У-4. Функция полезности U_i непрерывно дифференцируема на X_i и строго вогнута (i=1,...,l).

У-5. Функция U_i обладает свойством ненасыщаемости (i=1,...,l).

У-6. Существует $x_i \in X_i$, для которого $b_i > x_i(i = 1, \dots, l)$.

Условие У-1, с учетом непрерывности функции прибыли, обеспечивает существование решения задачи (18.2). Условие У-2 допускает эффективность использования «смешанных» планов производства на уровне всего производственного сектора. Условия У-3 и У-4 имеют технический характер (определение вогнутости и ненасыщаемости функции полезности и их содержательная трактовка были приведены нами в §3.2). Условие У-6 требует наличия у каждого потребителя «существенного» начального запаса всех товаров. Оно считается достаточно жестким, но без него (или незначительного его ослабления) нельзя доказать существование конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре (смотри замечание после доказательства теоремы 5.2)

Эта одна из первых теорем существования была доказана авторами рассматриваемой модели в 1954 году, спустя несколько десятилетий после создания модели Вальраса.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, разъясним несколько терминов и сформулируем вспомогательные утверждения, которые, ввиду их специальной направленности, не обсуждались в главе II.

Пусть $X \subset R^n$, а F – множественнозначное отображение, которое переводит каждую точку $x \in X$ в некоторое подмножество множества X $(x \to F(x, F(x) \subset X)$.

Отображение F называется полунепрерывным сверху, если из соотношений $\{x_r\} \to x_0$, где $x_r \in X$, и $\{y_r\} \to y_0$, где $y_r \in F(x)$, следует $y_0 \in F(x_0)$. Другими словами, для каждого открытого множества U, содержащего множество $F(x_0)$, можно найти такое число $\delta > 0$, что $F(x) \subset U$, как только $\|x - x_0\| < \delta$ (где $\|x - x_0\|$ – расстояние между точками x и x_0).

Непрерывное отображение всегда полунепрерывно сверху, а обратное неверно. Чтобы полунепрерывное сверху отображение было непрерывным, нужно, чтобы оно было одновременно полунепрерывным снизу, т.е. для каждого $y \in F(x_0)$ при $\{x_r\} \to x_0$ существовали такие $y_r \in F(x_r)$, что $\{y_r\} \to y$.

Отображение F называется ограниченным, если для любого $x \in X$ множество $F(x)$ является ограниченным, как подмножество евклидова пространства R^n(см. §2.2).

Лемма 18.1. Пусть P, X – выпуклые и компактные подмножества пространства R^n, $B : P \to 2^X$ – такое множественнозначное отображение, что для любого $p \in P$ множество $B(p)$ есть непустой выпуклый компакт. Тогда множественнозначное отображение $\psi : P \to 2^X$, такое, что

$$\psi(p) = \left\{ x^* \in X | f(x^*) = \max_{x \in B(p)} f(x) \right\}$$

полунепрерывно сверху, если функция $f : X \to R^1$ непрерывна и вогнута.

Пусть $x \in X \to R^n, a_1, \ldots, a_n, a$ – const. Линейное уравнение

$$\langle a, x \rangle = a_1, x_1 + \ldots + a_n, x_n = a$$

называется гиперплоскостью в R^n (или *(n-1)*-мерным линейным многообразием). Это есть обобщение понятия обычной плоскости в R^3. Гиперплоскость $\langle a, x \rangle = a$ делит все пространство R^n на две части: $\langle a, x \rangle > a$ и $\langle a, x \rangle < a$.

Пусть $X, Y \subset R^n$. Говорят, что гиперплоскость $\langle a, x \rangle = a$ разделяет X и Y , если для всех $x \in X$ $\langle a, x \rangle \geq a$, а для всех $y \in Y$ $\langle a, y \rangle \leq a$. Например, если X и Y – выпуклые множества, не имеющие общих точек, то, очевидно, между ними существует разделяющая гиперплоскость.

Лемма 18.2. Пусть $x \subset R^n$ – выпуклое множество, не имеющее общих точек с неотрицательным ортантом R^n_+. Тогда найдется вектор $a \in R^n_+$, у которого хотя бы одна компонента строго положительна и $\langle a, x \rangle \leq 0$ для всех $x \in X$.

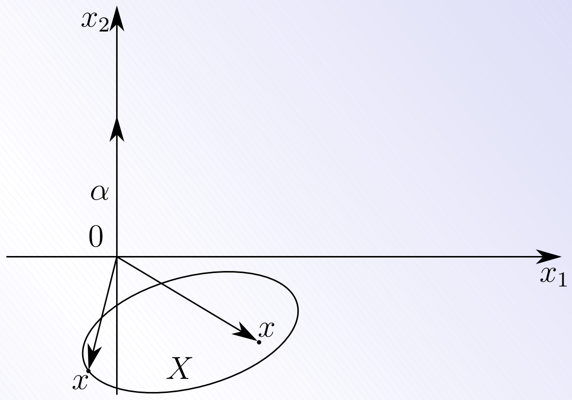


Рисунок 18.1 – Иллюстрация к лемме 5.2

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю (рисунок **??**).

Точка $x_0 \in X$ называется неподвижной точкой множественнозначного отображения F, определенного на X, если $x_0 \in F(x_0)$.

Приведем без доказательства теорему существования неподвижной точки.

Теорема 18.1. Теорема (Какутани). Пусть $x \subset R^n$ – компактное, выпуклое множество, а F – полунепрерывное сверху отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие замкнутое, выпуклое подмножество $F(x) \subset X$. Тогда отображение F имеет неподвижную точку в X.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Доказательство существования равновесия в модели Эрроу-Дебре мы проведем с помощью леммы Гейла, которую сформулируем в терминах элементов рынка (17.5). Сначала пронормируем цены, поделив все p_k на одну и ту же величину $p_1 + \cdots + p_n > 0$. Тогда пространство цен P превращается в стандартный симплекс, лежащий в неотрицательном ортанте R^n_+:

$$P = \left\{ p \in R^n_+ \middle| \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}$$

Пронормировав таким образом цены, мы не меняем существа дела, а переходим к другому масштабу цен. В данном случае преобразование пространства цен в стандартный симплекс преследует чисто технические цели.

Лемма 18.3. Лемма (Гейла). Пусть S – ограниченное, полунепрерывное сверху множественнозначное отображение симплекса P в R^n, удовлетворяющее условиям:

a) $S(p)$ есть непустое выпуклое множество для всех $p \in P$;

b) для всех $z \in S(p)$ $\langle p, z \rangle$. Тогда существуют такие $p \in P$ и $z \in S(p)$, что $z \geq 0$. Условие b) означает, что для каждого $p \in P$ множество $S(p)$ не имеет общих точек с неположительным ортантом R^n_-. Действительно, для любой точки $v \in R^n_-$ и любого $p \in \langle p, v \rangle < 0$ (рисунок 18.2). При этих условиях лемма Гейла утверждает о существовании такого $p \in P$, что $S(p) \cap R^n_+ \neq \emptyset$.

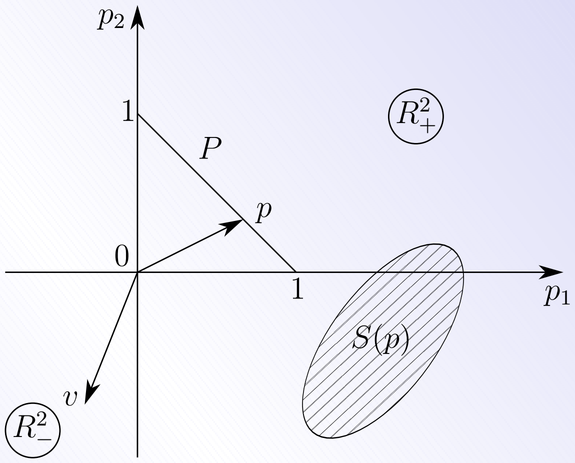


Рисунок 18.2 – Иллюстрация к лемме 5.2

Доказательство проведем от противного: пусть лемма не верна. Это означает, что ни для одного вектора $p \in P$ множество S(p) не имеет общих точек с R^n_+. Покажем, что в этом случае существует такое сколь угодно малое положительное число ε_0 (не зависящее от p и z), что семейство $\{W(p)|p \in P\}$ выпуклых множеств

$$W(p) = \{w \in R^n | w = z + \varepsilon_0 p, z \in S(p)\}$$

также не касается неотрицательного ортанта R^n_+ (рисунок 18.3).

Действительно, если бы это было так, то существовала бы последовательность $\{p_r\} \to \bar{p}$ и точки $z_r \in S(p_r)$,$\{z_r\} \to z$ для которых

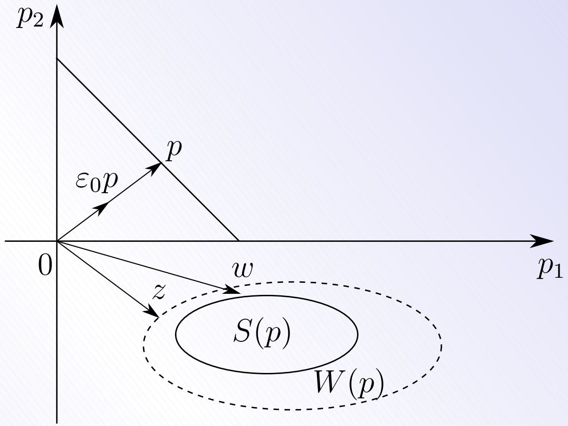


Рисунок 18.3 – Иллюстрация к доказательству леммы

$z_r + \varepsilon_r p_r \geq 0$ при $\varepsilon_r \to 0$ (сходящаяся последовательность $\{z_r\}$ найдется, так как $S(p_r)$ компактны и лежат в ограниченной области пространства R^n). Тогда из полунепрерывности сверху отображения S следуют соотношения $z \in S(\bar{p})$ и $z \geq 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, семейство $\{W(p)|p \in P\}$ не пересекается с неотрицательным ортантом.

Тогда для каждого множества $W(p)$ из этого семейства и положительного ортанта существует разделяющая гиперплоскость $\{p, x\rangle = 0$, такая, что для любого $w \in W(p)$ $\langle p, w\rangle$ (смотри лемму 18.2).

Построим множественнозначное отображение $Q : p \to Q(p) \subset P$, где множество $Q(p)$ состоит из всех тех векторов симплекса P, которые

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

представляют гиперплоскости, разделяющие положительный ортант и множество $\{W(p)|p \in P\}$. Так как это семейство не касается с положительным ортантом, множество $Q(p)$ непусто (смотри лемму 18.2). Отображение Q полунепрерывно сверху, как и отображение W (полунепрерывность последнего вытекает из его вида и аналогичного свойства S). Благодаря этому свойству отображения Q, множество Q(p) выпукло и замкнуто, как и симплекс P. Следовательно, отображение Q удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани и потому имеет в P неподвижную точку $p_0 \in Q(p_0)$. Но, согласно условию b) леммы, для этой точки справедливо неравенство $\langle p_0, z\rangle \geq 0$ при $z \in S(p_0)$. Тогда $\langle p_0, w\rangle > 0$ для $w \in W(p_0)$. Последнее противоречит неподвижности точки p_0 в $Q(p_0)$. Следовательно, наше первоначальное предположение приводит к противоречию, что и доказывает лемму.

Теперь перейдем к основному вопросу.

Теорема 18.2. В модели Эрроу-Дебре существует конкурентное равновесие.

Доказательство. Обозначим для каждого $p \in P$

$$Y^*(p) = \sum_{j=1}^{m} Y_j^*(p)$$

$$g_j(p) = \max_{\xi_j \in Y_j} \langle p, \xi_j \rangle . \tag{18.5}$$

(смотри (18.1)). Как следует из условий У-1 и У-5, множество $Y^*(p)$ есть непустое, компактное и выпуклое множество. Обозначим через $Y^*(p)$ отображение $p \to Y^*(p)$. Из непрерывности (линейности) функций $f_j(p) = \langle p, \xi_j \rangle, j = 1, \ldots, m$, и из леммы 18.1 следует, что Y^* есть ограниченное, полунепрерывное сверху отображение.

Исходя из того, что $Y^*(p) \neq 0 j = 1, \ldots, m$, задача (18.2) должна решаться при ограничении

$$\langle p, x_i \rangle \leq \langle p, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \langle p, \xi_j^* \rangle , \tag{18.6}$$

где ξ_j^* – оптимальное решение задачи (18.1). Из результатов известно, что для оптимального решения задачи (18.2) в (18.6) должно иметь место строгое равенство:

$$\langle p, x_i \rangle = \langle p, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \langle p, \xi_j^* \rangle \tag{18.7}$$

Если это не так, то в силу условия У-5 существует $x_i \in X_i$, для которого $U_i(x_i) > U_i(x_i^*)$, а по условию У-4 можно найти такое $\bar{x}_i = ax_i^{'} + (1-a)x_i^{'}$, где $0 < a < 1$, что $U_i(\bar{x}_i) > U_i(x_i^*)$, причем $\bar{x}_i$ все еще удовлетворяет ограничениям (18.6). Но это противоречит определению x_i^* как точки максимума. Таким образом, равенство (18.7) действительно имеет место.

Так как по условию У-1 $0 \in Y_j$, то по определению максимума $g_j^*(p) = \langle p, \xi_j^* \rangle$. Отсюда и из условий У-1–У-6 следует, что множество $D_i^*(p)$ оптимальных решений задачи (18.2) при ограничениях (18.6) есть непустой выпуклый компакт. Поэтому множество $D(p)$ (смотри ((18.3)) также будет непустым выпуклым компактом. Из условий У-4–У-6 и леммы 18.1 следует, что D есть полунепрерывное сверху множественнозначное отображение.

Построим отображение S для любого $p \in P$ следующим образом:

$$S(p) = \{z \in R^n | z = \xi^* + b - x^*, \xi^* \in Y^*(p), x^* \in D^*(p)\} \tag{18.8}$$

где

$$b = \sum_{i=1}^{l} b_i, x^* = \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \xi^* = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^*$$

Как и выше, можно показать, что S есть ограниченное, полунепрерывное сверху множественнозначное отображение из P в R^n и что множество $S(p)$ непусто, выпукло и замкнуто. Суммируя обе стороны равенства (18.7) по $i = 1, ..., l$, получаем

$$\left\langle p, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle = \left\langle p, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle p, \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* \right\rangle$$

или

$$\langle p, x^* \rangle = \langle p, b \rangle + \langle p, \xi^* \rangle$$

В обозначениях элементов множества S(p) это равенство записывается как

$$\langle p, z\rangle = 0, z \in S(p) \tag{18.9}$$

Мы видим, что отображение S, порождающее для каждого $p \in P$ множество (18.8), удовлетворяет всем условиям леммы Гейла. Из этой леммы следует существование таких $p^* \in P$ и $z^* \in S(p)$, что $z^* \geq 0$. Поэтому набор векторов (x^*, y^*, p^*), где $y^* = b + \xi^*$, образует конкурентное равновесие в модели Эрроу-Дебре. Действительно, условие (17.6) выполнено по построению векторов x^* и y^*; условие (17.7) следует из неравенства $z = \xi^* + b - x^* \geq 0$; условие (17.8) вытекает из (18.9) и, наконец, отображения D и S являются функциями совокупных спроса и предложения в модели Эрроу-Дебре, так как они определены посредством соотношений (18.3) и (18.3). Теорема доказана.

В связи с тем, что наиболее жестким из всех условий, определяющих модель Эрроу-Дебре, является У-6, обсудим одну возможность его ослабления.

Это условие в теореме 18.2 вместе с У-3, У-4 и леммой 18.1 обеспечивает непустоту бюджетных множеств $\{x \in X_i | \langle p, x\rangle \leq K_i(p)\}$ потребителей и полунепрерывность сверху функций их спроса D_i^*. Эти свойства не изменятся, если У-6 заменить следующими условиями: $K_i(p) > 0$ для любого вектора $p \geq 0, p \neq 0$ и $0 \in X_i (i = 1, \ldots, l)$. Так как второе из условий не является жестким, то существование конкурентного равно-

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

Закрыть

весия, помимо условий У-1–У-5, зависит от наличия положительного дохода у всех потребителей. Очевидно, что это условие слабее, чем У-6, так как положительный доход у потребителя может существовать и при отсутствии начального запаса товаров (за счет участия в прибыли производственного сектора). Последнее условие выполняется, если хотя бы одно производственное предприятие рентабельно и все потребители участвуют в прибыли производственного сектора (как минимум, не являются безработными). Это условие представляется не столь жестким и, следовательно, существование экономического равновесия – реальным. Однако не следует забывать, что речь идет о моделях рынка, предполагающих выполнение не совсем реальных условий совершенной конкуренции.

ЛЕКЦИЯ 19

Модель регулирования цен и устойчивость конкурентного равновесия

Доказав существование конкурентного равновесия в математической модели рынка, естественно задаться вопросом: как найти конкурентное равновесие и, прежде всего, равновесные цены? Поиск равновесия, в отличие от ранее рассмотренных вопросов, по существу, является динамическим (развернутым во времени) действием.

Процесс последовательного приближения к равновесной цене называется регулированием цен. Кто и с какой целью регулирует цены? Ответ заключается в том, что, благодаря законам спроса и предложения, в условиях конкуренции рынок сам приспосабливает цены к вариациям спроса и предложения во времени. В §5.1 была обнаружена «геометрическая» картина такого приспособления. Здесь наша задача состоит в обнаружении аналитической формулы регулирования для численного вычисления равновесных цен.

Итеративный процесс поиска равновесных цен должен обладать свойством сходимости, т.е., в конечном счете, должен привести к искомым ценам с любой предзаданной точностью. В этом случае процесс регулирования цен (или собственно конкурентное равновесие) называется устойчивым.

Таким образом, задача регулирования цен преследует цель определения условий, заставляющих цены, как функций времени, сходиться к равновесным значениям. Математически эта задача сводится к нахождению условий устойчивости решений специально построенных рекуррентных по времени уравнений. Такое уравнение называется динамической моделью регулирования цен. Эта модель может быть как непрерывной, так и дискретной. В первом случае, на основе предположения о непрерывном изменении цен, модель выражается с помощью дифференциальных уравнений. Во втором случае предполагается дискретный характер изменения цен, т.е. фиксируется изменение цен в отдельные моменты времени (или через определенные промежутки времени). Поэтому модель регулирования цен имеет вид разностных уравнений. Непрерывные модели предпочтительны в теоретическом плане. Их преимущество состоит в возможности применения удобного аппарата дифференцирования. Мы будем рассматривать только дискретный случай, наиболее понятный с точки зрения практического восприятия.

Перейдем к конкретным построениям. Для определенности процесс регулирования рассмотрим в модели Эрроу-Дебре. Предварительно уточним некоторые предпосылки и ряд дополнительных сведений.

Во-первых, цены будем снабжать параметром времени t: $p_k(t)$ – цена k-го товара в момент t.

Во-вторых, будем предполагать дискретное изменение времени, т.е. будем рассматривать отдельные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ Причем для упрощения формул будем считать, что $t_{r+1} - t_r = 1$. Это дает возможность вместо последовательности рассматривать последовательность моментов $t, t+1, \ldots,$ начиная с $t = 0$.

В-третьих, вместо пространства товаров R^n будем рассматривать пространство R^{n+1}, где дополнительная *n+1*-ая координата соответствует особому виду товара – «деньгам». Таким образом, размерность всех векторов спроса и предложения будет равна *n+1* . Вектор цен, соответственно, будет задан в пространстве R_+^{n+1}. Причем дополнительная n+1-ая компонента p_0 будет интерпретироваться как «цена денег».

Для некоторого вектора цен $S(p_r)$ и соответствующих ему векторов совокупного спроса $x(p) \in D(p)$ и совокупного предложения $y(p) \in S(p)$ обозначим

$$F(p) = x(p) - y(p) \qquad (19.1)$$

Величина *F(p)*имеет смысл избыточного спроса при ценах p (противоположная величина $E(p) = -F(p) = y(p) - xp$ имеет смысл избыточного предложения). Рассматривая эту величину для всех $S(p_r)$, мы можем говорить о функции избыточного спроса F, определенной на множестве P.

Для равновесного вектора цен имеем (смотри (17.7), (17.8))

$$F(p^*) \leq 0 \qquad (19.2)$$

$$\langle p^*, F(p^*) \rangle \qquad (19.3)$$

Если предположить все цены строго положительными, т.е. p_k^*, $k = 0, 1, \ldots, n$, то равенство (19.3) будет иметь место только в случае строгого равенства в (19.2), т.е.

$$F(p^*) = 0 \tag{19.4}$$

Так как это равенство понимается покомпонентно ($F_k(p^*) = 0, k = 1, \ldots, n$, где F_k – функция избыточного спроса для товара k), то условие (19.3) становится следствием равенства (19.4). Поэтому в случае положительных цен конкурентное равновесие определяется одним условием (19.3).

Функция F обычно предполагается положительно однородной нулевой степени, т.е. для любых $p \in R_+^{n+1}$ и постоянного числа $\lambda > 0 F(\lambda p_0, \lambda p_1, \ldots, \lambda p_n) = F(p_0, p_1, \ldots, p_n)$. Это свойство означает, что на функцию избыточного спроса изменение масштаба цен не влияет, а существенны лишь относительные цены (см. §3.5).

Рассмотрение функции избыточного спроса связано с ее применением в модели регулирования цен. В основе построения искомой формулы итеративного процесса вычисления равновесных цен лежит идея о том, что скорость изменения цен пропорциональна изменению величины избыточного спроса. Действительно, возрастание (убывание) функции избыточного спроса во времени равносильно более быстрому (медленному) росту спроса по сравнению с предложением (смотри (19.1)), а это, согласно закона спроса, сопровождается увеличением (уменьшением) цен товаров. Сказанное математически можно отразить формулой

$$\frac{dp}{dt} = aF(p)$$

или в координатной форме

$$\frac{dp_k}{dt} = aF_k(p), k = 1, \dots, n,$$

где a – коэффициент пропорциональности, $F_k(p) = x_k(p) - y_k(p)$ – функция избыточного спроса для товара k. Здесь мы предполагаем, ради простоты, что пропорциональность изменения цены и избыточного спроса по всем товарам одинакова (и равна числу a). Из последнего уравнения по определению производной получаем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{p_k(t+\Delta t) + p_k(t)}{\Delta t} \right] = aF_k(p(t))$$

Отсюда для достаточно малых $\Delta t > 0$ можно принять приблизительно

$$p_k(t+\Delta t) + p_k(t) \approx aF_k(p(t))\Delta t$$

Принимая величину $t + \Delta t$ как «следующий» за t момент времени, для дискретного случая мы приходим к следующему закону изменения цен:

$$p_k(t+1) = p_k(t) + BF_k(p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), k = 0, 1, \dots, n)$$

или в векторной форме

$$p(t+1) = p(t) + BF(p(t)), t = 0, 1, 2, \ldots \qquad (19.5)$$

Это есть рекуррентное уравнение, когда последующее (по времени) значение цены вычисляется с помощью предыдущего значения. Для его последовательного решения нужно иметь «начальное» условие. Им является значение цены $p^0 = p(0)$ в «начальный» момент времени $\mathrm{t} = 0$, которое считается известным.

Для того, чтобы в уравнении (19.5) было учтено условие положительности цен, можно написать

$$p(t+1) = \max\{0, p(t) + BF(p(t))\} \, t = 0, 1, 2, \ldots \qquad (19.6)$$

Таким образом, динамика процесса регулирования цен описана.

Процесс регулирования можно проводить в нормированных ценах или без нормирования цен. В первом случае вектор $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ нормируется с помощью какого-то выделенного товара (например, нулевого), и получается новый вектор $q = (1, q_1, \ldots, q_n)$, компоненты которого $q_k = p_k/p_0, k = 0, 1, \ldots, n$, являются относительными ценами. В ненормированном процессе все товары являются равноправными. С математической точки зрения ненормированный процесс усложняется множественностью равновесных векторов цен, так как все точки луча λp $(\lambda > 0)$ будут равновесными векторами цен.

Устойчивость конкурентного равновесия, т.е. сходимость итеративного процесса (19.6) к равновесной цене, можно изучать на двух уровнях – на уровне локальной устойчивости и на уровне глобальной устойчивости. Равновесие называется локально устойчивым, если итеративный процесс сходится при начальной точке p_0, достаточно близкой к p^*. Если устойчивость имеет место независимо от местонахождения начальной точки p_0, то равновесие глобально устойчиво.

Одним из условий сходимости процесса (19.6) является так называемая строгая валовая зависимость. Говорят, что для ненормированного процесса регулирования цен имеет место строгая валовая зависимость, если для каждого k функция избыточного спроса F_k есть строго возрастающая функция цены $p_k (\partial F_k/\partial p_k > 0)$.

Экономический смысл этого условия состоит в том, что при повышении цены k-го товара и постоянстве других цен можно ожидать увеличения спроса на остальные (взаимозаменимые) товары.

Приводимая ниже теорема сходимости для уравнения (19.6) предполагает ненормированный процесс регулирования и содержит критерий глобальной устойчивости.

Теорема 19.1. Пусть p^* – строго положительный равновесный вектор в модели Эрроу-Дебре. Пусть функции избыточного спроса F_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, обладают свойством строгой валовой зависимости. Тогда существует такое положительное число B^*, что для всех $B < B^*$ система цен $p(t)$, удовлетворяющая уравнению (19.6), сходится к равновесному вектору цен.

Лабораторная работа 5. Паутинообразная модель

В процессе исследования некоторого рынка, математиками - экономистами получены функции совокупного спроса и предложения. Требуется определить равновесные цены методом нащупывания. Построить кривые спроса и предложения.

$\Phi(p)$ – функция совокупного спроса,

$\Psi(p)$ – функция совокупного предложения.

1	$\Phi=\dfrac{5}{p}+1$	$\Psi=\ln(2*p+1)$
2	$\Phi=\dfrac{30}{p}-3$	$\Psi=\ln(3*p+4)$
3	$\Phi=\dfrac{2}{p}$	$\Psi=\ln(8*p-3)$
4	$\Phi=\dfrac{2}{3p}+2$	$\Psi=\ln(4*p)$
5	$\Phi=\dfrac{1}{p}$	$\Psi=\dfrac{\ln(p+1)}{2}$
6	$\Phi=\dfrac{2}{p^2}$	$\Psi=\dfrac{\ln(2p)}{2}$
7	$\Phi=\dfrac{4}{p}+1$	$\Psi=\dfrac{p^2}{2}+1$
8	$\Phi=\dfrac{1}{p}+4$	$\Psi=2\ln(p)$
9	$\Phi=\dfrac{3}{2p}-\dfrac{1}{10}$	$\Psi=\dfrac{3}{10}\ln(p+2)$
10	$\Phi=\dfrac{2}{p}+\dfrac{1}{2}$	$\Psi=\ln(3p)$

ЛЕКЦИЯ 20

Модель экономического благосостояния

Анализируя предыдущие главы, мы можем прийти к выводу, что одним из важных вопросов, изучаемых в рамках математической экономики, является разработка (моделирование) различных принципов эффективного развития экономики и исследование проблем, с ними связанных. Можно задаться вопросом: зачем надо «придумывать» все новые и новые постулаты и нормативы, регламентирующие возможные пути протекания экономических процессов? Не лучше ли разработать один всеобъемлющий принцип экономического развития и заниматься его анализом и реализацией?

Причины невозможности разработки одного универсального принципа, которому должны подчиняться экономические процессы, лежат в самой экономике, как сложной, многогранной и противоречивой сфере человеческой деятельности. Чем выше уровень требований к такому принципу, тем сложнее его реализация на практике. Например, неплохо было бы потребовать, чтобы производители получали максимальные прибыли при минимальных затратах. Но даже на интуитивном уровне понятно, что этот принцип не реализуем ввиду противоречивости его условий. Каждый принцип оптимальности, будь он дискриптивным или нормативным, имеет свои плюсы и свои минусы. Например, принцип конкурентного равновесия хорош тем, что при таком функционировании экономики потребители получают максимальную полезность в рамках имеющихся у них доходов, производители – максимальные прибыли при существующей технологии, а также удовлетворены спросы и предложения всех членов общества на товары. Это – положительная сторона данного принципа. А отрицательная состоит в том, что равновесие может иметь место при очень низком уровне доходов и технологии и в отсутствие качественного и количественного роста экономики, т.е. в условиях застоя. Поэтому хотелось бы, чтобы равновесной траектории экономики были бы присущи и магистральные свойства, вдоль нее были бы соблюдены оптимальные пропорции потребления и инвестиций, экономический прогресс не нарушал бы экологического равновесия и т.д. Однако такое нагромождение требований к экономическому сценарию может привести к невозможности его практической реализации. Поэтому чем больше будет разработано разумных вариантов «оптимального поведения», тем шире будет возможность выбора подходящего для конкретной ситуации, при конкретных сложившихся условиях, сценария развития экономики. Понятно, что каждый такой принцип должен отвечать определенным требованиям адекватности, реалистичности и справедливости (по этому поводу см. §1.7).

В этом параграфе рассмотрим еще один нормативный принцип экономического поведения, который порождает так называемое экономическое благосостояние. Суть экономического благосостояния, в понимании авторов данной концепции, была изложена в начале §7.1. Возможно, название «экономическое благосостояние» обещает больше, чем есть на самом деле, но мы не имеем права изменять традиционные названия и классическую терминологию. Заметим только, что здесь слово «благосостояние» несет более узкую смысловую нагрузку, чем то, что мы привыкли подразумевать под этим словом в обыденной жизни.

В основе концепции экономического благосостояния лежит ***принцип оптимальности по Парето*** (по имени известного итальянского экономиста).

Изначально этот принцип был разработан для задач многокритериальной оптимизации вида

$$\langle X, f_1, \dots, f_n \rangle \tag{20.1}$$

где X – множество допустимых решений единственного ЛПР (лица, принимающего решение), f_i – заданные на множестве X различные целевые функции, описывающие различные цели, преследуемые этим ЛПР. Таким образом, для каждого выбранного ЛПР решения $x \in X$ получается n чисел $f_1(x), \dots, f_n(x)$, оценивающих качество этого решения.

Допустим, что в X существует такая точка x^*, которая максимизирует (или минимизирует) функцию f, т.е.

$$f_1(x^*) = \max_{x \in X} f_1(x)$$

Нет никакой гарантии, что в этой же точке x^* будут достигнуты максимальные (или минимальные) значения остальных функций $f_2(x), \dots, f_n(x)$

ввиду их различности. Поэтому в задачах многокритериальной оптимизации не будут достигнуты максимумы и минимумы всех функций одновременно (за исключением каких-либо тривиальных случаев). Как тогда должен действовать ЛПР, в чем состоит принцип его оптимального поведения и что называть решением задачи многокритериальной оптимизации?

Ответ на эти вопросы получим, если пойдем по пути ослабления требований, определяющих «оптимальное решение». Одним из наиболее распространенных принципов такого рода и является оптимальность по Парето. Он предъявляет к понятию оптимальности более слабые требования, чем максимизация (или минимизация) целевых функций.

Определение 20.1. Точка $\bar{x} \in X$ называется оптимальной по Парето в задаче многокритериальной оптимизации (20.1), если не существует другой точки $x \in X$, для которой $f_i(x) \geq f_i(\bar{x})$ для всех $i=1,\ldots,n$, причем хотя бы для одного i имеет место строгое неравенство.

Множество всех оптимальных по Парето точек называется ***множеством Парето***.

Смысл оптимальности точки $\bar{x}$ заключается в том, что переход от нее к любой другой точке $x \in X$ (в том числе к другой оптимальной по Парето точке) обязательно сопровождается уменьшением значения хотя бы одной из функций f_i.

Ввиду нежесткости условий, его определяющих, множество Парето почти всегда существует, т.е. непусто.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – такие неотрицательные числа, что $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Для любой точки $x \in X$ выпуклая комбинация

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \tag{20.2}$$

называется ***свёрткой критериев*** в задаче (20.1).

Следующая теорема дает признак оптимальности по Парето.

Теорема 20.1. Пусть в задаче многокритериальной оптимизации (20.1) множество X замкнуто и выпукло, а все функции f_i вогнуты. Тогда

1. если все коэффициенты a_i в (20.2) положительны, то вектор x^*, максимизирующий свертку критериев (20.2) на множестве X, оптимален по Парето;

2. обратно, для любой оптимальной по Парето в задаче (20.1) точки $x^* \in X$ существуют неотрицательные и не все равные нулю числа a_i, такие, что свертка критериев (20.2) достигает максимального значения в точке x^*.

Исходя из того факта, что оптимальность по Парето формализует один из принципов «социальной справедливости», желательно, чтобы равновесные векторы потребления удовлетворяли этому принципу оптимальности. В теории экономического благосостояния оптимальность по Парето изучается наряду с концепцией конкурентного равновесия. Мы хотим получить ответ на вопрос: будут ли оптимальными по Парето векторы потребления, входящие в состояние равновесия (в смысле Вальраса)?

Для доказательства соответствующих теорем возьмем за основу модель Эрроу-Дебре, существование равновесия в которой было доказано в §5.4 (теорема 18.2). Поэтому далее будем пользоваться обозначениями §5.4 и будем предполагать выполненными условия (У-1)-(У-6).

Совместным распределением потребления и производства или просто распределением в модели Эрроу-Дебре будем называть пару $(x, \xi) = (x_1, \ldots, x_l, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, удовлетворяющую условиям

$$x_i \in X, i = 1, \ldots, l, \xi_j \in Y_j, j = 1, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i \leq \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j, \tag{20.3}$$

где X_i – множество допустимых векторов потребления i-го потребителя, Y_j – множество производственных планов j-го производителя, b_i – вектор начальных запасов товаров для i-го потребителя. Обозначим

$$\hat{X} = \prod_{i=1}^{l} X_i, \hat{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

Согласно определения 20.1, распределение $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in \hat{X} \times \hat{Y}$ назовем оптимальным по Парето распределением, если не существует распределения $(x, \xi) \in \hat{X} \times \hat{Y}$, для которого, $U_i(x_i) \geq U_i(\bar{x}_i), i = 1, \ldots, l$, причем хотя бы для одного потребителя имеет место строгое неравенство, где $U_i : X_i \to R^1$ – функция полезности потребителя i (см. (20.2)).

Множество Парето оптимальных распределений можно охарактеризовать как множество коллективно предпочитаемых наборов благ, так как область поиска окончательного распределения от множества $\hat{X}$ сужается до множества Парето.

Следующее утверждение показывает, что оптимальность по Парето является одним из признаков конкурентного равновесия.

Теорема 20.2. Если (x^*, ξ^*, p^*) – конкурентное равновесие в модели Эрроу-Дебре, то распределение (x^*, ξ^*) оптимально по Парето.

Доказательство. Тот факт, что (x^*, ξ^*) является распределением, следует из соотношений (17.9)–(17.11).

Предположим, что распределение (x^*, ξ^*) не является оптимальным по Парето. Тогда найдется такая пара $(x, \xi) \in \hat{X} \times \hat{Y}$, что $U_i(x_i) \geq U_i(x_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Из условия У-5 (см. §5.4) следует существование такого элемента $\in X_i$, что $U_i() > U_i(x_i)$. Составим выпуклую комбинацию $x_i^a = (1-a)x_i + a$, $0 \leq a \leq 1$. Поскольку X_i выпукло (см. У-3), то $x_i^a \in X_i$, а из вогнутости

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

функции U_i (см. У-4) следует $U_i(x_i^a) \geq (1-a)U_i(x_i) + aU_i() > U_i(x_i)$ при $0 < a \leq 1$. Отсюда получаем

$$U_i(x_i^a) > U_i(x_i^*), i = 1, \ldots, l, 0 < a \leq 1 \tag{20.4}$$

Так как x_i^* – решение оптимизационной задачи i-го потребителя, то $U_i(x_i^*)$ является максимальным значением функции U_i на бюджетном множестве i-го потребителя, а сама точка x_i^* лежит на бюджетной линии

$$\langle p^*, x_i^* \rangle = \langle p^*, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left\langle p^*, \xi_j^* \right\rangle .$$

Поэтому из (20.4) следует

$$\langle p^*, x_i^a \rangle > \langle p^*, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left\langle p^*, \xi_j^* \right\rangle . \tag{20.5}$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{a \to 0} x_i^a = x_i$. Поэтому из (20.5) следует

$$\langle p^*, x_i^* \rangle \geq \langle p^*, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left\langle p^*, \xi_j^* \right\rangle . \tag{20.6}$$

где, исходя из нашего предположения, хотя бы для одного i выполняется строгое неравенство. Суммируя обе части этого неравенства по

$i = 1, ..., l$ получаем

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle > \left\langle p^*, \sum_{i=1}^{n} b_i \right\rangle + \left\langle p^*, \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* \right\rangle \tag{20.7}$$

Так как ξ_j^* – решение оптимизационной задачи производителя, то

$$\left\langle p^*, \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* \right\rangle \geq \left\langle p, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle$$

для всех $\xi_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, m$ Тогда из (20.7) получаем

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle > \left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle. \tag{20.8}$$

Если умножить на p^* обе части неравенства (20.3), определяющего распределение (x, ξ), то получим неравенство, противоположное к (20.7). Это противоречие опровергает наше предположение о том, что распределение (x^*, ξ^*) не является оптимальным по Парето.

Теорема доказана.

Следующее утверждение показывает, что оптимальность по Парето распределения $(\bar{x}, \bar{\xi})$ является «почти» достаточным условием существования конкурентного равновесия $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{p})$ для некоторого вектора цен $\bar{p} \geq 0$.

Теорема 20.3. С каждым оптимальным по Парето распределением $(\bar{x}, \bar{\xi})$ в модели Эрроу-Дебре можно связать вектор цен $\bar{p} \geq 0$, такой, что

a) вектор $\bar{\xi}_j$ максимизирует $\langle \bar{p}, \xi_j \rangle$ на множестве $Y_j (j = 1, \dots, m)$;

b) вектор $\bar{x_i}$ минимизирует $\langle \bar{p}, x_i \rangle$ на множестве $\bar{M}_i = \{x_j \in X_i | U_i(x_i)(x_i) \geq U_i(\bar{x_i})\}$ $(i = 1, \dots, l)$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Введем в рассмотрение l+1 вспомогательное множество

$$M_i = \{x_i \in X_i | u_i(x_i) > u_i(\bar{x_i})\} \; i = 1, \dots, l$$

$$Z = \sum_{i=1}^{l} b_i + Y - M,$$

где $Y = Y_1 + \dots + Y_m, M = M_1 + \dots + M_l$. Нетрудно видеть, что множество $\bar{M}_i$ (см. утверждение b) теоремы) является замыканием M_i. Из условия У-5 следует $M_i \neq \oslash$, $i = 1, \dots, l$. Любой элемент $z \in Z$ выглядит так

$$z = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j - \sum_{i=1}^{l} x_i \tag{20.9}$$

Поэтому для любого распределения $(x, \xi) z \geq 0$ (смотри (20.3)).

Благодаря условиям У-3 и У-4, все и, следовательно, Z являются выпуклыми множествами. Применяя лемму 18.2 для выпуклых множеств

M_i и Z, получаем, что существует такой вектор $\bar{p} \geq 0$, для которого $\langle \bar{p}, z \leq 0 \rangle$ для любых $z \in Z$. Подставляя сюда выражение z из (20.9), получаем

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle \leq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} x_i \right\rangle . \tag{20.10}$$

Это же неравенство получается, если в определении множества Z вместо M взять $\bar{M} = \bar{M}_1 + \cdots + \bar{M}_l$. Действительно, составим вектор $x_i^a = \hat{x}_i + a x_i$, где $0 < a \leq 1, \hat{x}_i \in \bar{M}_i, x_i \in \bar{M}$. Из вогнутости U_i следует $x_i^a \in M_i$ и потому неравенство (20.10) остается справедливым при замене всех x_i на x_i^a:

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle \leq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} x_i^a \right\rangle .$$

Переходя к пределу при $a \to 0$, получаем

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle \leq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} \hat{x}_i \right\rangle . \tag{20.11}$$

Так как пара $(\bar{x}, \bar{\xi})$ является распределением, она удовлетворяет неравенству (20.3):

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \leq \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j$$

Умножая последнее неравенство на вектор $\bar{p} \geq 0$, получим

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j \right\rangle \geq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \right\rangle. \tag{20.12}$$

Так как $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$, $i = 1, \ldots, l$, то, подставляя $x_i = \bar{x}_i$,$\xi_j = \bar{\xi}_j$ в (20.11), получим

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j \right\rangle \leq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \right\rangle. \tag{20.13}$$

приравнивая (20.12) и (20.13), приходим к равенству

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle + \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j \right\rangle = \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \right\rangle. \tag{20.14}$$

Вычитая теперь из неравенства (20.10) равенство (20.14), получаем

$$\left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle - \left\langle \bar{p}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\xi}_j \right\rangle \leq \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} x_i \right\rangle - \left\langle \bar{p}, \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \right\rangle. \tag{20.15}$$

для любых $(x_i, \xi_j) \in \bar{M}_i \times Y_j$.

Подставляя в (20.15) $x_i = \bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, l$, и для всех j, кроме одного, получаем

$$\langle \bar{p}, \xi_j \rangle - \langle \bar{p}, \bar{\xi}_j \rangle$$

для всех $\xi_j \in Y_j$. Утверждение a) доказано.

Аналогичное доказательство утверждения b) предоставляется читателю в качестве упражнения.

ЛЕКЦИЯ 21

Моделирование ценообразования в монополии

Познакомившись в §5.2 с условиями совершенной конкуренции, можно заметить, что определяющим признаком такого рынка является наличие большого числа производителей и потребителей одних и тех же товаров и, как следствие, отсутствие влияния с их стороны на рыночные цены этих товаров. Нарушение данного условия приводит к понятию рынка несовершенной конкуренции. В этом смысле крайние положения занимают монополия и монопсония, а промежуточные – олигополия и олигопсония (смотри таблицу 21.1). Суть несовершенной конкуренции в том, что либо продавцы, либо покупатели захватывают рыночную власть над ценообразованием.

Таблица 21.1: Виды рынков (по числу участников)

покупатели / продавцы	Один	Несколько	Много
Один	**сделка**	**олигопсония**	**монополия**
Несколько	ОЛИГОПОЛИЯ		
Много	**монопсония**	**олигопсония**	**совершенная конкуренция**

Начнем с анализа ценообразования в монополии. Так как монополист является единственным производителем товара, исходя из кривой спроса, он самостоятельно определяет объем продаж и цену товара (рисунок

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

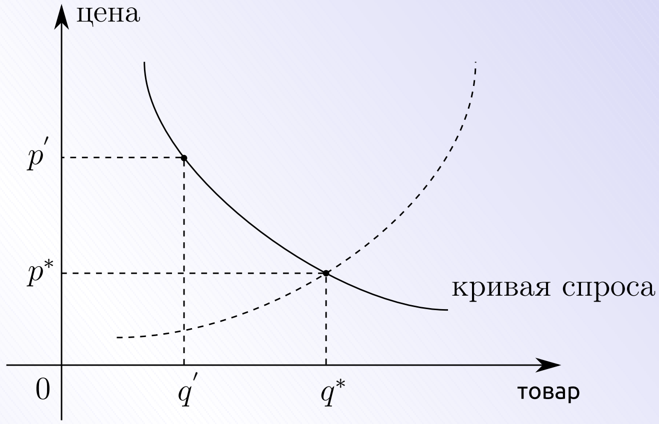


Рисунок 21.1 – Выбор монополиста

21.1). Предположим, что в условиях совершенной конкуренции равновесие достигается в точке (p^*, q^*), а доход данной фирмы, как участника рынка совершенной конкуренции, есть $a \cdot p^*, q^*(a < 1)$. Будучи монополистом, при том же уровне спроса эта фирма добьется данного уровня дохода при меньшем выпуске (q') за счет более высокой цены (p'). Именно в этом заключается приоритетность положения монополиста.

До какого уровня монополист будет повышать цену товара и снижать объем продаж, чтобы получить максимальную прибыль с учетом издержек на производство товара?

Кривая спроса и оценка собственных издержек являются главными ориентирами для фирмы-монополиста при принятии экономического решения. Она принимает решение относительно объема выпуска (или продажи) товара, а его цена определяется с помощью кривой спроса (смотри рисунок 21.1). Следовательно, в условиях монополии цена (p) является функцией от выпуска (p = p(q)), то есть, и, располагая информацией о спросе, фирма может добиться получения максимальной прибыли.

Монополист может увеличить прибыль двумя путями: либо за счет повышения цены на товар, не изменяя при этом объема выпуска, либо за счет сокращения объема выпуска (снизив тем самым издержки на производство), не изменяя цену товара. Каково же оптимальное действие монополиста?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся опять к конкурентному рынку и рассмотрим долгосрочную задачу фирмы (12.1). Так как мы хотим узнать именно об оптимальном объеме производства, переформулируем эту задачу на языке выпуска. Обозначим доход как функцию от выпуска:

$$pf(x) = p \cdot q = R(q)$$

Так как издержки фирмы зависят от объема производства, они также являются функциями от выпуска:

$$\langle w, x \rangle = C(f, (x)) = C(q)$$

Теперь задачу (12.1) можно записать так:

$$P(q) = R(q) - C(q) \to \max \tag{21.1}$$

Условие первого порядка для максимизации прибыли $P(q)$ есть

$$\frac{dP}{dq} = 0 \text{или} \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, фирма должна достичь такого объема выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам. Далее, учитывая тот факт, что $\frac{dR}{dq} = p$, получаем $p^* = \frac{dC}{dq}$, т.е. равновесная цена, если она существует, должна равняться предельным издержкам:

$$\frac{dR}{dq} = p^* = \frac{dC}{dq}. \tag{21.2}$$

Графическая иллюстрация этого равенства показана на рисунке 21.2, где предельные издержки есть возрастающая функция от объема производства, а предельный доход (цена) – убывающая функция того же аргумента.

Вернемся к монополии и проверим, будет ли цена, максимизирующая прибыль монополиста, подчиняться закону (21.2)?

В монополии $p = p(q)$, поэтому

$$R(q) = p(q)q. \tag{21.3}$$

Далее без потери общности будем считать $q > 0$

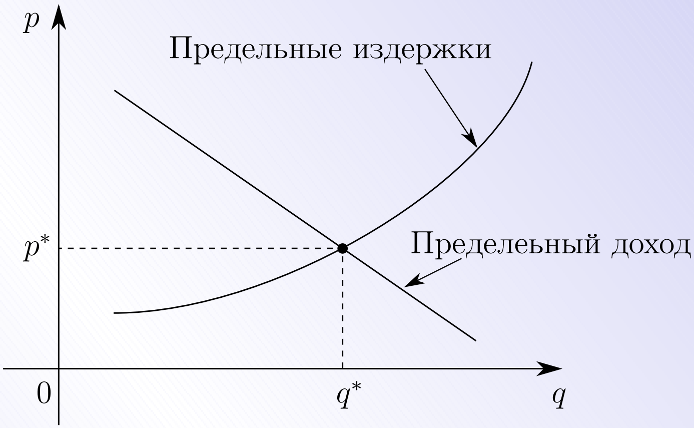


Рисунок 21.2 – Выбор монополиста

Вычислим предельный доход

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dp}{dq}q + p \tag{21.4}$$

Заметим, что и в монополии цена убывает с ростом объема продаж, потому что фирма снижает цену, чтобы продать больше продукции. Поэтому $\frac{dp}{dq} < 0$ и из (21.4) следует $\frac{dR(q)}{dq} < p$.

Как видим, в случае монополии предельный доход меньше цены товара.

Проанализируем теперь издержки монополиста. Как и на конкурентном рынке, цены затрат являются функциями от объема затрат, т.е.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$w_j = w_j(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому издержки на факторы производства выражаются как

$$C_j(x_j) = w_j(x_j) \cdot x_j. \tag{21.5}$$

Будем предполагать, что $x_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$.

Вычислим предельные издержки:

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} = \frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j + w_j. \tag{21.6}$$

По рыночным законам фирма может покупать большее количество данного фактора производства, только предложив более высокую плату. Поэтому $\frac{dw_j}{dx_j} > 0$. Тогда из (1.6) следует

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} > w_j, j = 1, \ldots, m$$

Таким образом, в случае монополии предельные издержки на факторы производства оказываются больше их цен.

Подставляя (21.3) и (21.5) в (21.1), получим оптимизационную

$$P(x, q) = p(q)q - \sum_{j=1}^{m} w_j(x_j)x_j \to \max \tag{21.7}$$

при ограничениях

$$q = f(x_1, \ldots, x_m)$$

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Подчеркнем еще раз, в отличие от задачи (21.1) фирмы на конкурентном рынке, в условиях задачи монополиста (21.7) все цены зависят от объемов продуктов.

Максимум функции прибыли P в задаче (21.7) вычисляется по *m+1* переменной $x_1, \ldots, x_m, q$. Поэтому составим функцию Лагранжа

$$L(x, q, \lambda) = P(x, q) + \lambda(f(x) - q)$$

где λ – множитель Лагранжа. Выпишем необходимые условия оптимальности точки (x, q):

$$\begin{cases} \frac{dp}{dq} \cdot q + p - \lambda = 0, \\ -\frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j - w_j + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, j = 1, \ldots, m, \\ f(x_1, \ldots, x_m) - q = 0 \end{cases}$$

Отсюда имеем, в частности,

$$\lambda = p + \frac{dp}{dq} \cdot q \qquad (21.8)$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j + \frac{dw_j}{dx_j} x_j, j = 1, \ldots, m \qquad (21.9)$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (21.8), есть предельный доход (смотри (21.4)), а сумма, стоящая в правой части (21.9), – предельные издержки по производственному фактору j-го вида (смотри

(21.6)). Поэтому величина, стоящая в левой части (21.9), представляет собой произведение предельного дохода (λ) на предельный продукт j-го вида затрат ($\frac{\partial f}{\partial x_j}$). Это произведение можно трактовать как предельный доход j-го вида затрат.

Исключая из системы необходимых условий множитель Лагранжа λ, получаем

$$\begin{cases} (p + \frac{dp}{dq} \cdot q)\frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j + \frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j, j = 1, \dots, m \\ f(x_1, \dots, x_m) = q \end{cases}$$

Пользуясь равенствами (21.4) и (21.6), перепишем эту систему в виде

$$\frac{dR(q)}{dq} \cdot \frac{\partial f}{dx_j} = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j}, j = 1, \dots, m \tag{21.10}$$

$$f(x_1, \dots x_m) = q \tag{21.11}$$

Оценим отношение предельной стоимости затрат на предельный продукт

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} / \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Во-первых, как следует из (21.10), эта величина для всех j одна и та же. Во-вторых, издержки можно представить как функцию от выпуска, т.е. $C_j = C_j(q)$. Поэтому, пользуясь равенством (21.11), можно

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

формально написать

$$\frac{dC_j(x_j)}{dx_j} / \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{dC_j(q)}{dq} j = 1, \ldots, m$$

Так как эта величина одна и та же для всех j, то, опуская индекс, из системы (21.10)–(21.11) получаем

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dC(q)}{dq} \tag{21.12}$$

Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, монополист должен достичь такого уровня выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам.

Для монополиста мы получили такое же правило оптимального поведения, что и любая фирма в условиях конкурентного рынка. Однако в случае монополии

$$\frac{dR}{dq} = p + \frac{dp}{dq} \cdot q$$

и поэтому оптимальная цена товара отличается от выражения (21.2) в сторону повышения. А именно, через предельный доход она выражается как

$$p^* = \frac{dR}{dq} - \frac{dp}{dq} \cdot q$$

а через предельные издержки –

$$p^* = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j} / \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{dp}{dq} \cdot q j = 1, \ldots, m$$

ЛЕКЦИЯ 22

Конкурентное равновесие в модели с фиксированными доходами

22.1 Экзогенные и эндогенные величины

В большинстве моделей,для которых доказывалось существование равновесия, продполагалось, что доходы потребителей являются однородными функциями цен на рынке таваров. Все эти модели неявно предполагали замкнутость рынка товаров.Однако во многих случаях доходы потребителей не зависят от цен и формируются за счёт других факторов, в частности, от продажи начальной собственности на внешнем рынке. Кроме того, некоторые из производственных факторов могут приобретаться на внешнем рынке. Все эти величины (факторы, переменные), которые привнесены извне рассматриваемой экономической системы, называются ***экзогенными*** *(exogenous factors)* в отличие от ***эндогенных*** *(endogenous)*, которые имеют внутреннее происхождение.

Таким образом, если в экономической системе наряду с эндогенными товарами циркуклируют и экзагенные, т.е. рынок является открытым, говорить о зависимостях доходов потребителей от цен товаров внутреннего рынка не приходится. Поэтому рассмотрим модель, когда доходы не зависят от цен, т.е. являются постоянными. Такая модель называется ***моделью с фиксированными доходами***. Заметим, что в этом случае закон Вальраса в широком смысле для совокупного спроса и совокупного предложения может выполняться не при всех ценах p.

22.2 Модель конкурентного равновесия с фиксированными доходами

Пусть экономическая система состоит из l потребителей и n товаров, $U_i(x), i = \overline{1,l}$, – функции полезности потребителей, $X_i \subset R^n, i = \overline{1,l}$, – множества, на которых определены функции полезности, $K_i, i = \overline{1,l}$, – фиксированные доходы потребителей, Y – совокупное технологическое множество, $D_i(p), p \geq 0$, – функция i-го спроса потребителя: $D_i(p) = x \in X_i(p) : U_i(x) = \max\limits_{x \subset X_i(p)} U_i(x)$, где $X_i(p) = x \in X_i : \langle p, x\rangle \leq K_0, D(p) = \sum\limits_{i=1}^{l} D_i(p)$ – функция совокупного спроса, $S(p)$ – функция совокупного предложения: $S(p) = y^* \in Y : \langle p, x\rangle = \max\limits_{y \in Y}\langle p, x\rangle$.

Определение конкурентного равновесия оставим таким же, как в модели Вальраса.

В.М. Полтеровичем доказано следующее утверждение:

Теорема. Пусть выполняются условия:

1)функции U_i непрерывны и вогнуты на X_i;

2)множества X_i, содержащие нулевой вектор, замкнуты и выпуклы;

3)$K_i \geq 0, i = \overline{1,l}$;

4)Y – выпуклый компакт, причём $Y \subseteq R^n_+$;

5)существует $\overline{y} > 0, \overline{y} \in Y$.

Тогда существует конкурентное равновесие в модели с фиксированными доходами.

Отметим отличие теоремы Эрроу-Дебре. Во-первых, в сформулированной теореме не требуется ненасыщаемость потребителей. Во-вторых, нет никаких условий относительно структуры множеств X_i. В-третьих, предполагается, что все векторы совокупного технологического множества неотрицательны.

Имеются и другие модели, рассматривающие существование конкурентного равновесия, в частности, модель В.Л.Макарова, обобщающая модели Эрроу-Дебре, В.М.Полтеровича и др.

22.3 Конкурентное полуравновесие

Понятие конкурентного равновесия, введенное Л.Вальрасом, привело к многочисленным доказательствам его существования. В 30-е годы XX в. появилось первое доказаетельство, сделанное Вальдом. И только с 50-х годов возник ряд моделей, для которых доказано существование равновесия. Понятно, что при доказательстве накладывался ряд условий, которые в реальной жизни не всегда выполнимы. Поэтому естественно ослабить некоторые из условий и ввести понятие полуравновесного конкурентного состояния. Основная идея этого понятия в том, чо в определении, вместо закона Вальраса в узком смысле, требуется выполнение этого закона в широком смысле (причём не для всех p) с некоторым дополнением, с помощью которого в случае существования конкурентного равновесия оба понятия становятся эквивалентными.

Введём обозначение:

$$P = p \geq 0 : x \leq y + a, x \in D(p), y \in S_0(p), z = y^* + b - x^*, \qquad (22.1)$$

где b – начальный запас товаров.

Совокупность векторов p^*, x^*, y^* назовём ***остояние конкурентного полуравновесия***(*semi-equilibrium*), если имеются следующие условия:

$$\begin{aligned} p^* \in P, x^* \in D(p^*), y^* \in S(p^*), \\ p^{*'} e(p^*) = \max p' e(p), \\ \langle p^*, z\rangle = z \in F(p), p \in P, \end{aligned} \qquad (22.2)$$

где $F(p) = x(p) - y(p)$ – функция избыточного спроса.

Обозначим $\varphi(p) = \langle p, z\rangle$, получим, что если $\varphi(p^*) = 0$, то состояние полуравновесия в определённом выше смысле становится состоянием равновесия в классическом смысле.

Существование полуравновесия для линейных моделей непосредственно дают алгоритмы отыскивания полуравновесных цен.

ЛЕКЦИЯ 23

Формирование цен для случая нескольких товаров. Метод Самуэльсона

В общем случае рынка нескольких товаров один методов процесса формирования цен предложил П.Самуэльсоном. Изложим кратко лишь схему этого метода.

Пусть $F_j(p)$ - функция избыточного спроса на j-й товар, $j = \overline{1,m}$. Будем считать, что функции $F_j(p)$ определены и непрерывны для всех $p \geq 0$. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$dp_j/dt = \lambda_j F_j(p), \; j = \overline{1,m}. \tag{23.1}$$

Числа $\lambda_j > 0, j = \overline{1,m}$, называют **коэффициентами подстройки** цен. Из системы 23.1 видим, что если $F_j(p) > 0$, то цена p_j понижается. Таким образом, система задаёт динамику изменения цен в зависимости от избыточного спроса. Пусть при $t = 0$ имеем некоторые цены $p_j^0, j = \overline{1,m} : p(0) = p^0$. Тогда для определения $p = p(t)$ имеем задачу Коши:

$$dp/dt = \lambda E(p), \; p(0) = p^0, \tag{23.2}$$

где $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{F(p)} = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \\ \dots \\ F_m(p) \end{pmatrix}$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Учитывая, что при рассмотрении равновесия $p \in P = \{p \geq 0 \cdot \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\}$, то при наличии определённых условий на вектор-функцию $F(p)$ решение задачи Коши (23.2) существует. В частности, если $F(p)$ – однозначная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, то решение существует и единственно, причём для всех $t \geq 0$.

Дадим следующее определение: **процесс формирования цен** (23.1) **глобально устойчив**, если при любом наборе цен $p^0 > 0$ существует $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$, где p^* – некоторый набор равновесных цен.

В случае неединственности равновесных цен, а значит, неединственности задачи Коши (23.2), вектор p^* зависит от p^0.

Как видим из определения глобальной устойчивости процесса формирования цен, исследование этого процесса тесным образом связано с исследованием асимптотической устойчивости в целом по Ляпунову решений системы (23.1). Не останавливаясь подробно на изложении этого вопроса, заметим только, что при некоторых условиях, налагаемых на функции избыточного спроса $E_j(p), j = \overline{1, m}$, можно доказать, что процесс формирования цен (23.1) глобальной устойчив, причём доказательство устойчивости сводится к утверждению, что функция $\varphi(p) = p^* F(p)$ является функцией Ляпунова системы (23.1).

Лабораторная работа 6. Метод Самуэльсона

Вариант 1.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 19 + p + 4p'$ и $S(p) = 28 - 2p + 3p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 20$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 2.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 18 + 2p + 6p'$ и $S(p) = 26 - 4p + 2p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 10$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 3.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 26 + 3p + 2p'$ и $S(p) = 26 - 3p + 9p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 15$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 4.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 11 + 3p + 2p'$ и $S(p) = 18 - 12p + 7p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 16$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 5.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 10 + 5p + 3p'$ и $S(p) = 16 - 5p + 2p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 12$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 6.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 29 + 3p + 6p'$ и $S(p) = 15 - 3p + 7p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 18$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 7.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 13 + 4p + 5p'$ и $S(p) = 38 - 4p + 6p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 15$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 8.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 14 + 7p + 8p'$ и $S(p) = 25 - 5p + 7p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 11$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 9.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 13 + 5p + 3p'$ и $S(p) = 21 - 3p + 5p'$. Найти зависимость равновесной цены

цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 12$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

Вариант 10.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид: $D(p) = 22 + 5p + 3p'$ и $S(p) = 23 - 4p + 9p'$. Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 17$. Коэффициент подстройки выбрать самостоятельно.

ЛЕКЦИЯ 24

Модель межотраслевого баланса

Имеется n отраслей производства. Согласно статистическим данным известно, сколько продукции каждой отрасли используется в других отраслях в качестве исходных материалов или комплектующих, а также, сколько этой продукции остается для конечного использования. Все эти данные записываются в виде таблицы, в которой:

– каждая строка таблицы соответствует одной из отраслей, выступающей как производитель определенного вида продукции. Для простоты предполагается, что каждая отрасль производит только один вид продукции. Поскольку в реальной жизни такая ситуация встречается довольно редко, поэтому при составлении баланса осуществляют переход от хозяйственных отраслей к так называемым чистым отраслям. Эта операция называется «очищением отраслей»; данные записываются в виде таблицы, в которой:

– первые n столбцов таблицы соответствуют тем же отраслям, которые теперь уже выступают в роли потребителей продукции других отраслей, используемой для организации своего производства (промежуточное потребление); данные записываются в виде таблицы, в которой:

– в предпоследнем столбце таблицы содержится информация о той части продукции отрасли, которая осталась для конечного использования (информацию этого столбца в балансе часто расшифровывают и приводят не только общий объем потребления, но и данные по видам потребителей: домашние хозяйства, государственные учреждения, накопление, экспорт и т.д.); в последнем столбце таблицы записывается общий объем всей произведенной отраслью продукции (валовой объем), равный сумме промежуточного и конечного потребления. данные записываются в виде таблицы, в которой:

Обозначим через $\ddot{I}$ матрицу промежуточного потребления, состоящую из первых n столбцов нашей таблицы, Y – столбец конечного использования, X – столбец валового выпуска. Тогда:

X_i – валовой выпуск в i-й отрасли;

Y_i – объем конечного потребления в i-й отрасли;

$\ddot{I}_{ij}$ – объем продукции i-й отрасли, использованной в j-й отрасли.

		Потребители (промежуточное потребление)					Конечный спрос	Валовый объём
		1	...	j	...	n		
	1	$\ddot{I}_{11}$	...	$\ddot{I}_{1j}$	...	$\ddot{I}_{1n}$	Y_1	X_1
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	$\ddot{I}_{i1}$	...	$\ddot{I}_{ij}$	...	$\ddot{I}_{in}$	Y_i	X_i
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	$\ddot{I}_{n1}$	...	$\ddot{I}_{nj}$	...	$\ddot{I}_{nn}$	Y_n	X_n

Базисным в теории межотраслевого баланса является следующее предположение: величина

$$A_{ij} = \frac{\ddot{I}_{ij}}{X_j},$$

равная объему продукции i-й отрасли, который используется в j-й отрасли для производства единицы продукции, не зависит от объема производства X_i, а обусловлен технологическими особенностями. Другими словами, промежуточное потребление $\ddot{I}_i$ в j-й отрасли линейно зависит от валового выпуска X_i в этой отрасли:

$$\ddot{I}_j = AX_j$$

При этом матрица A называется *матрицей прямых производственных затрат*.

Используя операции над матрицами и введенные обозначения, можно записать основное балансовое равенство, состоящее в том, что валовой объем равен сумме промежуточного и конечного потребления:

$$X = AX + Y, \text{или} Y = X - AX = (E - A)X \tag{24.1}$$

Полученное равенство позволяет решать задачи планирования следующего характера: известно, что в следующем году структура конечного спроса Y изменится. Предполагая, что технологии производства останутся прежними (т.е. матрица A не изменится), необходимо найти план валового выпуска по отраслям.

С точки зрения алгебры эта задача решается просто, если известно, что у матрицы $(E - A)$ существует обратная: $B = (E - A)^{-1}$ (вопрос о том, когда существует эта матрица, будет обсужден позже). В этом случае решение поставленной задачи находится по формуле:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = BY.$$

Матрица B называется *матрицей полных затрат*. Ее элементы B_{ij} показывают, какое потребуется изменение объема валового выпуска продукции в i-й отрасли, обеспечения увеличения конечного спроса j-й отрасли на единицу.

Матрицей полных производственных затрат называют матрицу $B_{\ddot{\imath}\,i\,\ddot{e}i} = B - E$. Из этой матрицы получаем

$$B_{\ddot{\imath}\,i\,\ddot{e}i} Y = BY - Y = X - Y = AX$$

Таким образом, элементы $B_{\ddot{\imath}\,i\,\ddot{e}i\,i,j}$ матрицы $B_{\ddot{\imath}\,i\,\ddot{e}i}$ показывают, какие необходимы затраты продукции i-й отрасли для обеспечения единичного конечного спроса в j-й отрасли. Из тождества

$$(E - A^2)B = (E + A)(E - A)(E - A)^{-1} = (E + A)$$

получаем равенство $B = E + A + A^2 B = E + A + A^2 (E - A)^{-1}$, откуда $B_{\ddot{\imath}\,i\,\ddot{e}i} = B - E = A + A^2 B = A + A^2 (E - A)^{-1}$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Матрица $A^2(E-A)^{-1}$ называется *матрицей косвенных производственных затрат.* Таким образом, согласно, полные производственные затраты равны сумме прямых и косвенных затрат.

Заметим, что до сих пор нам было безразлично, в каких единицах измерения измерялись объемы продукции в каждой отрасли. Во всем вышеизложенном можно предполагать, что в каждой отрасли существует своя единица измерения, возможно, никак не связанная с другими отраслями. Поэтому баланс, записанный в таблице 1.1, называют балансом в натуральной форме.

ЛЕКЦИЯ 25

Межотраслевой баланс в стоимостной форме

В каждой отрасли кроме сырья и исходных материалов для организации производства расходуются и другие ресурсы: изнашивается оборудование, оплачивается труд работников, делаются налоговые отчисления. Все эти и некоторые другие расходы (к которым относят и прибыль, и полученные субсидии (со знаком минус)) образуют добавленную стоимость, которая обычно выражается в общих для всех отраслей денежных единицах.

Причину отнесения прибыли к расходам можно прокомментировать следующим образом. По известной формуле

$$\ddot{I} = A + D$$

получаем, что

$$A = D + \ddot{I}$$

Следовательно, наше предположение о том, что прибыль входит одним из слагаемых в расходы не нарушает основного баланса.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

		Потребители (промежуточное потребление)					Конечный спрос	Валовый объём
		1	...	j	...	n		
	1	$\ddot{I}_{11} = A_{11} + X_1$	...	$\ddot{I}_{1j} = A_{1j} + X_j$	...	$\ddot{I}_{1n} = A_{1n} + X_n$	X_1	Y_1
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	$\ddot{I}_{i1} = A_{i1} + X_1$	...	$\ddot{I}_{ij} = A_{ij} + X_j$	...	$\ddot{I}_{in} = A_{in} + X_n$	Y_i	X_i
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	$\ddot{I}_{n1} = A_{n1} + X_1$	...	$\ddot{I}_{nj} = A_{nj} + X_j$	...	$\ddot{I}_{nn} = A_{nn} + X_n$	Y_n	X_n
Добавочная стоимость		$L_1 = l_1 x_1$	...	$L_j = l_j x_j$	...	$L_n = l_n x_n$	$L = SL_j$	

Добавленная стоимость компенсируется производителям путем ее оплаты потребителями стоимости продукции по определенным ценам. Поскольку здесь имеется ввиду только конечный спрос, то суммарную добавленную стоимость L записывают не в последний столбец (в который записывалась сумма по всем предыдущим строкам), а в столбец конечного спроса.

Зная величину L_j добавленной стоимости в j-й отрасли, определим $L_j = l_j x_j$ – добавленную стоимость единицы продукции (измеряется в денежных единицах за единицу продукции j-й отрасли).

Обозначим через p_i стоимость продукции в i-й отрасли. Умножив данные в i-й строке на соответствующую стоимость p_i, получим баланс в стоимостной форме (все данные в этой таблице выражаются в общей для всех отраслей денежной форме):

		Потребители (промежуточное потребление)					Конечный спрос	Валовый объём
		1	…	j	…	n		
	1	$p_1 A_{11} X_1$	…	$p_1 A_{1j} X_j$	…	$p_1 A_{1n} X_n$	$p_1 Y_1$	$p_1 X_1$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	i	$p_i A_{i1} X_1$	…	$p_i A_{ij} X_j$	…	$p_i A_{in} X_n$	$p_i Y_i$	$p_i X_i$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	n	$p_n A_{n1} X_1$	…	$p_n A_{nj} X_j$	…	$p_n A_{nn} X_n$	$p_n Y_n$	$p_n X_n$
Добавочная стоимость		$L_1 = l_1 x_1$	…	$L_j = l_j x_j$	…	$L_n = l_n x_n$	$L = SL_j$	
		$p_1 X_1$	…	$p_j X_j$	…	$p_n X_n$		

Оказывается, если добавленная стоимость во всех отраслях известна, то величины p_i определяются однозначно (исходя из требования о равенстве доходов и расходов всех отраслей).

Действительно, сумма доходов i-й отрасли, полученных от промежуточного и конечного использования ее продукции, равна $p_i X_i$. Расходы этой же отрасли можно вычислить, найдя сумму по j-му столбцу таблицы ??. Приравняем найденные величины (напомним, что прибыль учитывается в числе расходов в составе добавленной стоимости). Получим:

$$\sum_k = p_k A_{ki} X_i + l_i X_i, \text{ или } \sum_k p_k A_k i + l_i = p_i \text{ для всех } i = \overline{1, n}.$$

В матричном виде эти равенства можно записать в виде:

$$A^T p + l = p.$$

Если вектор l считается известным, вектор стоимостей p можно найти по формуле:

$$p = (E - A^T)^{-1} \cdot l.$$

Матрица $(E - A^T)$ получается из матрицы $(E - A)$ транспонированием, поэтому обратные матрицы для них существуют одновременно и если

$$B = (E - A)^{-1}, \text{ то } (E - A^T)^{-1} = B^T.$$

Из формулы получим, что

$$l = p - A^T p, \text{ откуда } l^T = p^T - p^T A,$$

следовательно,

$$L = \sum L_i = \sum l_i X_i = l^T \cdot X = (p^T - p^T A)X = p^T(x - AX) =$$

$$= p^T Y = \sum p_i Y_i$$

Таким образом, совокупная добавленная стоимость равна совокупному конечному спросу в стоимостной форме. Для таблицы ??1.2 это

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

означает, что является не только суммой всех чисел в строке добавленной стоимости, но и суммой всех чисел в столбце конечного спроса.

Формально баланс в стоимостной форме отличается от баланса в натуральном выражении только тем, что в первом случае все данные в балансе выражаются в одних и тех же единицах измерения, тогда как во втором случае в каждой строке баланса может быть своя единица измерения количества продукции. Поэтому над данными баланса в стоимостной форме мы можем совершать те же операции, что и над данными баланса в натуральной форме.

Пусть $X_i^* = p_i X_i$ – валовый выпуск в i-й отрасли в стоимостной форме; $Y_i^* = p_i Y_i$ – объем конечного потребления в i-й отрасли в стоимостной форме; $\ddot{I}_{ij}^* = p_i \ddot{I}_{ij}$ – объем продукции i-й отрасли, использованной в j-й отрасли, в стоимостной форме.

Тогда элементы матрицы прямых производственных затрат в стоимостной форме будут вычисляться по формуле:

$$A_{ij}^* = \frac{\ddot{I}_{ij}^*}{X_i^*} = \frac{p_i \ddot{I}_{ij}}{p_i X_i} = \frac{p_i A_{ij}}{p_j}$$

Определим $l_i^* = \frac{L_i}{X_i^*} = \frac{l_i}{p_i}$ – добавленную стоимость единицы (в стоимостном смысле) продукции j-й отрасли.

Аналогично формуле получаем:

$$\sum_k p_k A^*_{ki} X^*_i + l^*_i X^*_i = X^*_i, \text{ или } \sum_k p_k A^*_{ki} + l^*_i = 1 \text{ для всех } i = \overline{1, n}.$$

В частности, если предположить, что во всех отраслях есть дополнительные расходы, т.е. все $l^*_i > 0$, то получаем, что

$$0 < \sum_k A^*_{ki} < 1 \text{ для всех } i = \overline{1, n}.$$

Рассмотренная модель межотраслевого баланса носит название *модели Леонтьева*.

ЛЕКЦИЯ 26
Продуктивность балансовой модели

Рассмотрим вопрос, который не был изучен в предыдущем параграфе, касающийся существования матрицы $(E - A)^{-1}$.

Определение 26.1. Если все элементы матрицы A (вектора B) неотрицательны, то матрицу A (вектор B) будем называть *неотрицательной (неотрицательным)* и обозначать этот факт так: $A \geq 0$ $(B \geq 0)$. Вектор B назовем *положительным*, если все его координаты положительны.

Заметим, что в модели межотраслевого баланса матрица прямых производственных затрат по своему экономическому смыслу может быть только неотрицательной.

Определение 26.2. Неотрицательную матрицу A назовем *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора Y найдется неотрицательный вектор X, для которого справедливо равенство $X - AX = Y$.

Для модели межотраслевого баланса с матрицей A прямых производственных затрат это означает, что любой неотрицательный конечный спрос может быть удовлетворен (т.е. для него найдется соответствующий план валового выпуска).

Следующая теорема показывает, что продуктивность матрицы A непосредственно связана с обратимостью матрицы $(E - A)$.

Теорема 26.1. *(критерий продуктивности)*. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)$ обратима, причем обратная матрица $B = (E - A)^-1$ неотрицательна.

Доказательство. 1) Пусть существует матрица $B = (E - A)^{-1} \geq 0$. Тогда для каждого $Y \geq 0$ вектор $X = BY$ – неотрицателен как произведение неотрицательных матриц и является искомым решением уравнения $X - AX = Y$. Это и означает продуктивность матрицы A.

2) Пусть матрица A продуктивна. Обозначим через Y_k вектор, все координаты которого равны нулю, за исключением k-й, равной единице.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

Поскольку для всех k вектор Y_k неотрицателен, то по определению продуктивности найдется вектор $X_k \geq 0$, такой что $(E - A)X_k = Y_k$. Пусть матрица B такова, что для всех k ее k-м столбцом является вектор X_k. Тогда по правилам умножения матриц произведение $(E - A)B$ будет матрицей, составленной из вектор-столбцов Y_k, т.е. единичной матрицей. Таким образом, матрица B является обратной к матрице $(B - A)$, причем все ее столбцы неотрицательны.

Теорема доказана.

Следствие 26.1. Если матрица A продуктивна, то система неравенств $X - AX \geq 0$ имеет только неотрицательные решения.

Следующая теорема играет важную роль в математической экономике. В частности, она оказывается полезной и при исследовании продуктивности матриц.

Теорема 26.2. *(Фробениус, Перрон)*. Пусть A – произвольная неотрицательная матрица. Тогда существует собственное значение λ_A матрицы A, такое, что для всех собственных значений λ матрицы A выполняется неравенство $|\lambda| \leq \lambda_A$. Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор x_A матрицы A, соответствующий значению λ_A.

Замечание 26.1. Известно, что набор собственных значений у матриц A и A^T одинаков, к тому же условие $A \geq 0$ равносильно условию $A^T \geq 0$. Следовательно,$\lambda_{A^T} = \lambda_A$. Соответствующий вектор x_{A^T} обозначим через l_A.

Определение 26.3. Число λ_A называется *числом Фробениуса* матрицы A.

Векторы x_A и l_A называются, соответственно, *правым и левым вектором Фробениуса* матрицы A.

Понятие числа Фробениуса позволяет кратко сформулировать условие продуктивности матрицы МОБ.

Теорема 26.3. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A \leq 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица A продуктивна и ее правый и левый векторы Фробениуса равны, соответственно, x_a^T и l_A. По критерию продуктивности у системы уравнений $X - AX = l_A$ существует неотрицательное решение $X_1 \geq 0$.

Тогда

$$0 < |l_A|^2 = (l_A)^T l_A = (l_A)_T (X_1 - AX_1) = (l_A)_T X_1 - (l_A) T \cdot AX_1 =$$

$$= (l_A)^T X_1 - (A^T \cdot l_A)^T \cdot X_1 = (l_A)^T X_1 - (\lambda_A \cdot l_A)^T \cdot X_1 = (1 - \lambda_A)(l_A)^T \cdot X_1$$

Векторы l_A и X_1 неотрицательны, поэтому $(l_A)^T \cdot X_1 \geq 0$. Следовательно, $(1 - \lambda_A > 0)$, т.е. $\lambda_A < 1$.

Достаточность. Если $\lambda_A < 1$, то для всех собственных значений λ матрицы A справедливо неравенство $\lambda < 1$.

Лемма 26.1. Следующие свойства эквивалентны:

1. все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы;

2. при $k \to \infty$ выполняется условие $A^k \to 0$.

Если матрица A неотрицательна и выполняется любое из указанных условий, то ряд $E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$ сходится к неотрицательной матрице B.

Поскольку суммой ряда $E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$ является матрица $B = (E - A)^{-1}$, то у матрицы $(E - A)$ существует обратная матрица, являющаяся неотрицательной. Согласно критерию, это доказывает продуктивность матрицы A.

Теорема доказана.

Доказанная теорема сводит проверку продуктивности матрицы к нахождению ее числа Фробениуса, т.е. наибольшего по модулю собственного значения. Если матрица имеет большие размеры, то эта задача может оказаться не очень легкой (собственно, как и нахождение обратной матрицы для $(E - A)$).

Имеются достаточные условия продуктивности, которые позволяют сильно упростить такую проверку.

Теорема 26.4. Если в модели Леонтьева с матрицей A можно удовлетворить некоторый строго положительный спрос $Y_0 > 0$, то A – продуктивная матрица.

Доказательство. По условию теоремы существует вектор $X_0 \geq 0$, такой что $X_0 - AX_0 = Y_0 > 0$. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, для левого вектора Фробениуса l_A получаем:

$$(l_A)^T \cdot Y_0 = (l_A)^T \cdot (X_0 - AX_0) = (1 - \lambda_A) \cdot (l_A)^T \cdot X_0.$$

Поскольку $l_A \geq 0$, $M_0 \geq 0$ и $Y_0 \geq 0$, то $((l_A)^T \cdot Y_0 > 0)$, $(l_A)^T \cdot X_0 \cdot 0$.

В результате получаем, что $(1 - \lambda_A) > 0)$, или $\lambda_A < 1$, что и доказывает продуктивность матрицы A.

Теорема доказана.

Существует еще один способ оценить величину числа Фробениуса неотрицательной матрицы.

Теорема 26.5. Пусть $A \geq 0$, r_i – сумма i-й строки, c_j – сумма j-го столбца. Тогда

$$\min r_i \leq \lambda_A \leq \max r_i,\ \min c_j \leq \lambda_A \leq \max c_j.$$

Доказательство. Выберем правый вектор Фробениуса x_A для матрицы A так, чтобы выполнялось равенство $\sum x_i = 1$. Тогда

$$\lambda_A = \lambda_A \cdot \sum (x_A)_i = \sum (\lambda_A \cdot x_A)_i =$$

$$= \sum \cdot \sum A_0 \cdot (x_A)_i = \sum_j (x_A)_J \cdot \sum_i A_{ij} = \sum_j (x_A)_j \cdot c_j$$

откуда, в силу $\sum\limits_j (x_A)_j = 1$, немедленно получаем. Для получения аналогичным образом надо использовать левый вектор Фробениуса.

Следствие 26.2. Если у положительной матрицы сумма по каждому столбцу меньше единицы, то эта матрица – продуктивная.

Таким образом, матрица прямых производственных затрат МОБ, рассчитанная для баланса в стоимостной форме, является продуктивной.

ЛЕКЦИЯ 27
Цены в модели межотраслевого баланса

В предыдущих пунктах мы рассмотрели модель баланса с математической точки зрения. Теперь подойдем к этой модели с точки зрения экономистов и убедимся, что в этой модели находят свое отражение основные экономические понятия. Далее покажем, что межотраслевой баланс позволяет естественным образом учесть особенности функционирования отраслей непроизводственной сферы и сферы услуг.

Понятие чистой продукции. *Конечной продукцией* назовем суммарную стоимость конечного потребления всех отраслей баланса $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i Y_i$.

Условно чистая продукция – это сумма добавленных стоимостей по всем отраслям баланса $\sum_{j=1}^{n} L_j$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

Как мы уже выяснили ранее, одно из уравнений баланса выражает равенство между условно-чистой продукцией и конечной продукцией:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i Y_i = \sum_{j=1}^{n} L_j = L$$

Разность между условно-чистой продукцией и затратами на амортизацию называют *чистой продукцией*.

Таким же названием логично обозначать и разность между конечной продукцией и затратами на возмещение основных фондов.

Первая величина носит название *произведенной чистой продукцией*, вторая – *используемой чистой продукцией*.

Основные составляющие произведенной чистой продукции:

– заработная плата;

– прибыль;

– косвенный налог (налог с оборота, НДС).

Основные компоненты используемой чистой продукции:

– потребление (личное и общественное);

– капитальные вложения;

– прирост запасов;

– экспортно-импортное сальдо.

Учёт непроизводственной сферы в МОБ. В структуре баланса могут находиться отрасли, которые формально не передают результаты своей деятельности в виде продукции другим отраслям. Примером могут служить здравоохранение, образование, управление, услуги, которых можно целиком отнести к сфере конечного (личного и общественного) потребления. Объединим эти отрасли под общим название «непроизводственная сфера».

Основной проблемой учета такой отрасли в структуре баланса является тот факт, что здесь понятия «производственное потребление» и «конечное потребление» имеют специфический смысл, связанный с тем, что продукция этой отрасли чаще всего имеет нематериальный характер и напрямую не участвует в межотраслевых потоках.

Добавим к n производственным отраслям $n{+}1$-ю (непроизводственную). Поскольку эта отрасль является только потребителем, в таблице баланса будет n строк и $n{+}1$ столбец. Баланс будем записывать в стоимостной форме. Пусть A – матрица технологических затрат $(n+1 \times n+1)$, $D_{ij} = p_i A_{ij} X_j$ – межотраслевые потоки продукции в стоимостной форме $(n+1 \times n+1q)$.

Предположим, что известны объемы M_i продукции i-й отрасли (в натуральном исчислении), используемой в непроизводственной сфере. Обозначим через $C_i = p_i M_i$ – это же количество продукции в денежном выражении (с использованием факторных цен). Будем считать, что известна также добавленная стоимость непроизводственной сферы L_{n+1}.

В непроизводственной сфере отсутствует понятие валового выпуска. Обозначим через суммарные затраты на эту отрасль, которые вычислим по формуле:

$$W_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} C_i + L_{n+1}$$

	Потребители (промежуточное потребление)						Конечный спрос	Валовый объём
	1	…	j	…	N	n+1		
1	D_{11}	…	D_{1j}	…	D_{1n}	C_1	$p_1 Y_1$	$p_1 X_1$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	D_{i1}	…	D_{ij}	…	D_{in}	C_i	$p_i Y_i$	$p_i X_i$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	D_{n1}	…	D_{nj}	…	$D_{nn} X_n$	C_n	$p_n Y_n$	$p_n X_n$
Добавочная стоимость	L_1	…	L_j	…	L_n	L_{n+1}	L	
	$p_1 X_1$	…	$p_j X_j$	…	$p_n X_n$	W_{n+1}		

Таким образом, по аналогии с обычным балансом, величина W_{n+1} играет роль конечного потребления $p_{n+1}X_{n+1}$ для $n+1$-й отрасли в денежном выражении.

Если ввести обозначение $p_{n+1} = 1$, то можно считать, что $X_{n+1} = W_{n+1}$. Ввиду того, что "продукция" $n+1$-й отрасли не участвует в промежуточном потреблении, можно считать также, что $Y_{n+1} = X_{n+1}$, т.е. конечное потребление совпадает с валовым выпуском.

Один из вариантов учета непроизводственной сферы заключается в том, что эта отрасль рассматривается наравне с остальными (производственными). Поскольку производственные отрасли не используют ее продукцию, компенсировать затраты должны потребители в рамках конечного потребления. Таким образом, первый вариант предполагает платность всех услуг непроизводственной сферы, причем потребители покрывают все расходы отрасли в объеме W_{n+1}.

Цены производителей. Услуги непроизводственной отрасли можно сделать бесплатными для конечных потребителей. Для этого средства на ее функционирование должны быть собраны введением налогов. Существует две основные формы налога:

прямой налог – вычет из фонда заработной платы и прибыли, взимаемый пропорционально величине дохода;

косвенный налог – вычет, пропорциональный объему деятельности в стоимостном выражении (одна из форм – налог на добавленную стоимость).

Основным отличием между этими видами налогов является то, что косвенный налог является одной из составляющих добавленной стоимости и тем самым непосредственно влияет на цену продукции. Увеличение косвенного налога увеличивает добавленную стоимость и увеличивает цены. Прямой налог не изменяет величину добавленной стоимости, а лишь уменьшает величину прибыли предприятия и (или) доходы работников.

Рассмотрим влияние налогов на цены межотраслевого баланса.

Определение 27.1. Цены продукции p, учитывающие косвенные налоги, назовем *ценами производителей*.

Пусть N – совокупная величина прямых налогов, v_i – величина косвенного налога, взимаемого с единицы произведенной продукции в i-й отрасли.

Поскольку введение косвенных налогов фактически изменяет величину добавленной стоимости на единицу продукции, для нахождения вектора цен производителей p необходимо рассматривать систему уравнений, аналогичную системе:

$$A^T p + (l + v) = p,$$

где v – вектор косвенных налогов.

Изменение вектора цен меняет величину совокупных затрат непроизводственной отрасли по формуле

$$W_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i M_i + L_{n+1},$$

где величины M_i и L_{n+1} заданы.

Налоги собираются для покрытия расходов непроизводственной отрасли, поэтому должно выполняться равенство

$$W_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} V_i X_i + N.$$

Систему условий (3.2) – (3.4) можно рассматривать как систему линейных уравнений ($n + 2$ уравнения) относительно переменных p, v, N, W_{n+1}. Поскольку уравнений получается меньше, чем переменных, следовательно, можно говорить о возможности различных политик налогообложения. Можно выбирать оптимальную налоговую политику, для чего необходимо задать критерий оптимальности (целевую функцию) и, возможно, дополнительные ограничения-неравенства. Если целевая функция окажется линейной, получается задача линейного программирования, которая решается стандартным способом.

Примером дополнительных ограничений может служить требование, чтобы после введения налогов рост цен не был очень большим, а критерием оптимальности может служить минимальность прямых налогов.

ЛЕКЦИЯ 28

Торговые и транспортные услуги

Одним из базовых предположений теории межотраслевого баланса является то, что каждая из производственных отраслей покрывает свои дополнительные расходы по организации производства (добавленную стоимость) за счет продажи своей продукции, оставшейся для конечного потребления (после того, как часть продукции потребляется в ходе промежуточного потребления другими отраслями). Однако, существуют отрасли, которые не могут, производя свою продукцию, откладывать ее на склад для последующего потребления. Такая продукция, производимая только в момент ее потребления, обычно называется *услугами*. Эта ситуация типична, например, для транспортных и торговых предприятий, для предприятий, обеспечивающих связь и т.п.

Рассмотрим баланс трех отраслей, из которых первая и вторая отрасли – производственные, а третья занимается оказанием услуг. Продукция третьей отрасли может выражаться услугами торговли и (или) транспортировки.

В отличие от непроизводственных отраслей сфера услуг может оперировать точными цифрами, говорящими о том, на какую сумму оказаны услуги каждой из отраслей. Поэтому для такого баланса можно составить матрицу прямых производственных затрат и, зная величину добавленной стоимости на единицу продукции в каждой отрасли, найти вектор цен производителей (в том числе – и для отрасли услуг).

Существенным отличием третьей отрасли от первых двух является то, что ее продукцию нельзя разделить на две части, одна из которых идет на внутреннее потребление отраслей 1 и 2, а вторая – на конечное потребление.

Пусть задана матрица прямых производственных затрат A. Тогда, зная величину добавленной стоимости на единицу продукции в каждой из отраслей, можно вычислить вектор факторных стоимостей (цен производителей).

Предположим, что нам задан конечный спрос в производственных отраслях Y_1, Y_2 (который, в свою очередь, порождает некоторый спрос на продукцию третьей отрасли).

Пусть цена услуги третьей отрасли для j-го вида продукции (в расчете на единицу продукции) не зависит от объема продукции и равна $\Theta_j p_j$, $j = 1, 2$.

Величина Θ_j не зависит от объема продукции, поэтому потребитель, приобретающий продукцию j-го вида в объеме Y_j, должен заплатить за услуги третьей отрасли $\Theta_j p_j Y_j$.

Конечный спрос на продукцию третьей отрасли в стоимостном выражении составит

$$p_3 Y_3 = \Theta_1 p_1 Y_1 + \Theta_2 p_2 Y_2.$$

Предполагаем также, что спрос на услуги третьей отрасли возникает только при приобретении потребителями продукции других отраслей. Тогда выполняются равенства

$$p_3 \ddot{I}_{3j} = \Theta_1 p_1 \ddot{I}_{1j} + \Theta_2 p_2 \ddot{I}_{2j}, i = 1, 2, 3$$

Зная конечный спрос, запишем баланс в ценах производителей.

	1	2	3	Конечный спрос	Валовый объём
1	$p_1 \prod_{11}$	$p_1 \prod_{12}$	$p_1 \prod_{13}$	$p_1 Y_1$	$p_1 X_1$
2	$p_2 \prod_{21}$	$p_2 \prod_{22}$	$p_2 \prod_{23}$	$p_2 Y_2$	$p_2 X_2$
3	$p_3 \prod_{31}$	$p_3 \prod_{32}$	$p_3 \prod_{33}$	$p_3 Y_3$	$p_3 X_3$
Добавочная стоимость	L_1	L_2	L_3	L	

Заметим, что соблюдается баланс как по всем строкам, так и по всем столбцам.

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: торговые и транспортные расходы можно перенести на счет производителей продукции. Для этого необходимо ввести цены потребителей, равные сумме цены производителя и торговой (транспортной) надбавки Θ_j. При этом финансовый результат от таких цен для всех участников будет эквивалентен тому, как будто торговая (транспортная) отрасль продает свою услугу в качестве обычной продукции.

ЛЕКЦИЯ 29

Межотраслевый баланс конкуретно-импортного типа

Предположим, что кроме собственного производства для удовлетворения конечного спроса используется импорт и экспорт. Тогда вектор конечного спроса Y можно представить в виде:

$$Y = Y_{\hat{a}\acute{\imath}} + Y_{\acute{y}\hat{e}\tilde{n}} - Y_{\grave{e}\grave{\imath}\ddot{\imath}},$$

где $Y_{\text{âí}}$ – внутренний конечный спрос; $Y_{\text{ýêñ}}$ – величина экспорта; $Y_{\text{èìï}}$ – величина импорта.

Тогда: $AX + Y_{\text{âí}}$ – совокупный внутренний спрос; $AX + Y_{\text{âí}} + Y_{\text{ýêñ}}$ – внутреннее валовое производство;

Получаем уравнение:

$$X + Y_{\text{èìï}} = AX + Y_{\text{âí}} + Y_{\text{ýêñ}},$$

или

$$X = AX + Y_{\text{âí}} + Y_{\text{ýêñ}} - Y_{\text{èìï}}. \tag{29.1}$$

Предположим, что импорт каждого вида продукции законодательно ограничен как определенный процент от совокупного внутреннего спроса на эту же продукцию. Тогда

$$Y_{\text{èìï}} = M(AX + Y_{\text{âí}}), \tag{29.2}$$

причем матрица коэффициентов M является диагональной:

$$M = diag(m_1, \dots, m_n),$$

где m_i – доля импорта, разрешенная в i-й отрасли.

Основное уравнение баланса в этом случае можно записать так:

$$X = AX + Y_{\text{âí}} + Y_{\text{ýêñ}} - M(AX + Y_{\text{âí}}, \tag{29.3}$$

откуда

$$(E - A + MA)X = (E - M)Y_{\text{âí}} + Y_{\text{ýêñ}},$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

или

$$X = (E - (E - M)A)^{-1}((E - M)Y_{\hat{a}\acute{\imath}} + Y_{\acute{y}\hat{e}\tilde{n}}.$$

Формула (29.3) позволяет по известной величине экспорта и внутреннего конечного спроса найти объем равновесного валового выпуска и затем по формуле (29.2) найти объем импорта.

ЛЕКЦИЯ 30

Модель внешнеэкономических связей (международной торговли)

Рассмотрим простую линейную модель обмена, которую также называют *моделью международной торговли* или *моделью внешнеэкономических связей.*

Имеется n стран, торгующих друг с другом. Будем считать, что доход p_j страны с номером j складывается от продажи своих товаров либо внутри страны, либо другим странам.

Предположим, что структура рынка – устоявшаяся, т.е. доля a_{ij} дохода j-й страны, которая тратится на импорт продукции из i-й страны, постоянна. Нетрудно заметить, что при этом для всех $j = \overline{1, n}$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \qquad (30.1)$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица, задающая правила торговли (обмена), $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – начальное распределение доходов между странами. Тогда после 1-го тура торговли это распределение будет иметь вид Ap.

Рассмотрим следующие вопросы, связанные с данной моделью.

1) Согласятся ли все страны торговать при таких условиях? Будем считать, что для согласия необходимо, чтобы доходы всех стран не уменьшались, т.е. выполнялось условие $p \leq Ap$.

2) Как ведет себя последовательность $A^k p$, показывающая распределение доходов стран после k туров торговли?

Теорема 30.1. Если матрица A такова, что для всех $j = \overline{1, n}$ выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ и $p \leq Ap$, то справедливо равенство $p = Ap$.

Доказательство. Пусть для всех $i = \overline{1, n}$ выполняется условие $p_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_j$. Если хотя бы для одного индекса выполняется строгое неравенство, то получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j - \quad \text{противоречие.}$$

Таким образом, в первом вопросе неравенство можно, не ограничивая общности, заменить равенством. В результате, этот вопрос переформулируется так:

1) Существует ли для заданной матрицы $A \geq 0$, удовлетворяющей условию (30.1), такое распределение доходов $p \geq 0$, для которого выполняется условие $p = Ap$?

Заметим, что если $p = Ap$, то вектор p обязан быть собственным век-тором матрицы A, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$.

Пусть вектор $e^T = (1, l \dots, 1)$ – вектор, все координаты которого равны единице. Тогда, согласно условию (30.1), имеем:

$$e^T A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}, l \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} \right), \text{или} e^T A = e^T.$$

Таким образом, $\lambda = 1$ – собственное значение матрицы A^T с собственным вектором e. Поскольку собственные числа матриц A и A^T всегда совпадают, следовательно, и у матрицы A есть собственный вектор x, такой что $x = Ax$.

Будет ли вектор x неотрицательным?

Теорема 30.2. Если $A \geq 0$ и для всех $j = \overline{1, n}$ выполняется условие (30.1), то $\lambda = 1$ – фробениусово число матрицы A.

Доказательство. По теореме Фробениуса-Перрона у матрицы A существует неотрицательное собственное значение $\lambda_A \geq 0$ (фробениусово число) и соответствующий ему неотрицательный собственный вектор $x_A \geq 0$. Выберем вектор x_A так, чтобы выполнялось равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{Ai} = 1$.

По определению собственного вектора имеем $\lambda_A x_A = A x_A$. Тогда

$$\lambda_A = \lambda_A \sum_{i=1}^{n} x_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_A \cdot x_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{Aj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_{Aj} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{Aj} = 1.$$

Следствие 30.1. Для любой неотрицательной матрицы A, удовлетворяющей условию (30.1), существует неотрицательный вектор $\ddot{I}_A$ распределения доходов, для которого справедливо равенство $\ddot{I}_A = A\ddot{I}_A$. При этом искомый вектор является вектором Фробениуса матрицы A.

Замечание 30.1. Выбор вектора $\ddot{I}_A$ может быть изменен введением неотрицательного множителя, следовательно, можно считать, что вектор $\ddot{I}_A$ задает только пропорцию между доходами стран.

Второй из поставленных нами вопросов можно задать и так: если первоначальное распределение доходов $\ddot{I}_0$ отличается от $\ddot{I}_A$, то к чему при-ведет в долгосрочной перспективе торговля согласно матрице A?

Теорема 30.3. Пусть $A \geq 0$ и существует предел $\lim A^k x_0 = y_0$. Тогда $Ay_0 = y_0$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что если $\lim A^k x_0 = y_0$, то и $\lim A^{k+1} x_0 = y_0 = \lim A \cdot A^k x_0 = A \lim A^k x_0 = A y_0$.

Отметим, что из условия $x_0 \geq 0$ получается, что $y_0 \geq 0$. Это согласуется с тем, что y_0 – вектор Фробениуса матрицы A. Таким образом, если последовательность $A^k x_0$ имеет предел, то этот предел является вектором Фробениуса.

Теорема 30.4. Пусть $A \geq 0$ и выполняется условие (3.9). Если $\lim A^k x_0 = y_0$, то $\sum_{i=1}^n x_{0i} = \sum_{i=1}^n y)0i$.

Доказательство. Как мы уже показывали, равенство (3.9) означает, что для вектора $e^T = (1, l \ldots, 1)$ выполняется равенство $e^T A = e^T$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n (Ax_0)_i = e^T A x_0 = e^T x_0 = \sum_{i=1}^n x_{0i},$$

аналогично $e^T A^k x_0 = e^T x_0$.

В итоге $\sum_{i=1}^n y_{0i} = e^T y_0 = e^T A^k x_0 = e^T x_0 = \sum_{i=1}^n x_{0i}$.

Теорема (30.4), во-первых, доказывает ограниченность последовательности $A^k x_0$ при неотрицательном начальном векторе x_0. Во-вторых, она позволяет убедиться, что пределом последовательности $A^k x_0$ может быть только вектор Фробениуса у матрицы A с подходящим значением нормы: $\sum_{i=1}^n y_{0i} = \sum_{i=1}^n x_{0i}$.

Таким образом, если у последовательности $A^k x_0$ существует предел, то его нужно искать среди векторов Фробениуса матрицы A. В случае, когда собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному числу 1 образуют одномерное подпространство, такой предел находится однозначно по теореме (30.4).

Вопрос о существовании предела последовательности $A^k x_0$ является более сложным. Как известно, ограниченная последовательность может иметь несколько частичных пределов и, следовательно, в таком случае расходиться.

Определение 30.1. Матрица A называется *устойчивой*, если для каждого вектора X существует предел $\lim A^k x$.

Теорема 30.5. Матрица A устойчива тогда и только тогда, когда существует матрица B, такая что $B = \lim A^k$.

Для исследования устойчивости матриц воспользуемся понятием жордановой нормальной формы матрицы.

Пусть $\lambda_1, l \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A. Тогда найдется такая унитарная матрица Q (матрица называется унитарной, если $Q^{-1} = Q^T$), для которой справедливо равенство

$A = Q^T BQ$, где матрица B является блочно-диагональной:

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & l\ldots & 0 \\ 0 & J_2 & l\ldots & 0 \\ l\ldots & l\ldots & l\ldots & l\ldots \\ 0 & 0 & l\ldots & J_m \end{pmatrix}$$

каждый блок – это так называемая клетка Жордана:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & l\ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & l\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & l\ldots & 0 \\ l\ldots & l\ldots & l\ldots & l\ldots & l\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

λ – одно из собственных значений матрицы A. Нетрудно вычислить, что $A^k = Q^T B^k Q$, причем

$$B^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & l\ldots & 0 \\ 0 & J_2^k & l\ldots & 0 \\ l\ldots & l\ldots & l\ldots & l\ldots \\ 0 & 0 & l\ldots & J_m^k \end{pmatrix}$$

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Для клеток Жордана справедливо формула (C_k^l – биномиальные коэффициенты):

$$J_{ij}^k = \begin{cases} 0, j-i<0; \\ \lambda^{k-l} C_k^l, l=j-i \in [0, \max(k,n)]; \\ 0, j-i>k. \end{cases}$$

Заметим, что:

1) При $|\lambda|>1$ выполняется условие $J_{ii}^k=\lambda^k \to \infty$, поэтому если у матрицы A есть такое собственное значение, то конечного предела A^k не существует.

2) При $|\lambda|=1$ предел последовательности $J_{ii}^k=\lambda^k$ существует только в случае $\lambda=1$. В этом случае, если размер клетки J больше единицы, то $J_{ii+1}^k=k\lambda^{k-1}=k$. Следовательно, если у матрицы A единица является собственным значением, то предел последовательности A^k может существовать только тогда, когда у этой матрицы нет клеток Жордана, соответствующих единице, размера, большего чем 1.

3) При $|\lambda|<1$ имеем $\lambda^{k-1}C_k^l \to 0$ при $k\to+\infty$, поэтому $J^k \to 0$.

Таким образом:

– если все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, то $A^k \to 0$ при $k\to+\infty$;

– если у матрицы A есть собственное значение, по модулю большее, чем единица, то последовательность A^k не имеет предела;

– если наибольшее по модулю собственное значение равно 1, то для сходимости последовательности A^k необходимо и достаточно выполнение следующих условий: а) у матрицы A нет других собственных значений, по модулю равных 1, кроме единицы; б) все клетки Жордана матрицы A, со-ответствующие единице, имеют размер 1; в) наличие у матрицы A собственного значения с модулем, большим 1, делает невозможным существование предела последовательности A^k.

Лабораторная работа 7.

Задан МОБ в натуральном выражении

1. Найти матрицы коэффициентов прямых и полных производственных затрат.

2. Рассчитать равновесный валовый выпуск при увеличении спроса на продукцию 1-й отрасли на 10%.

3. Выясните, каким должен быть равновесный конечный спрос для увеличении валового выпуска продукции только первой отраслью на 10%.

4. Найти величину добавленной стоимости на единицу продукции в каждой отрасли.

5. Рассчитать факторную стоимость единицы продукции в каждой отрасли.

6. Записать баланс в стоимостном выражении.

7. Проверить основные балансовые равенства.

8. Записать матрицы коэффициентов прямых и полных производственных затрат в стоимостном выражении.

9. Рассчитать равновесный валовый выпуск при увеличении спроса на продукцию 1-й отрасли на 10(в стоимостном выражении).

10. Сравнить последний результат с 10%-ным увеличением спроса в натуральном выражении.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

11. Изучить, как повлияет на факторную стоимость продукции увеличение заработной платы во всех отраслях на 15%.

1 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1710	1500	1680	1290	1150	1320	1780	1660	1000	1500	2300	16890
2	1710	1540	1750	1030	1780	1180	1150	1230	1370	1130	2200	16070
3	1430	1650	1170	1380	1220	1560	1030	1730	1440	1340	2200	16150
4	1730	1350	1550	1190	1320	1270	1640	1050	1290	1250	2400	16040
5	1040	1340	1280	1680	1800	1390	1830	1170	1500	1040	2100	16170
6	1340	1650	1730	1000	1050	1120	1730	1550	1710	1130	2100	16110
7	1600	1500	1570	1790	1240	1330	1350	1500	1170	1790	2200	17040
8	1670	1450	1140	1330	1500	1040	1730	1030	1420	1330	2400	16040
9	1320	1260	1020	1440	1720	1560	1580	1080	1120	1610	2200	15910
10	1130	1340	1420	1640	1290	1050	1040	1760	1200	1500	2400	15770
ЗП	262	219	345	327	316	205	251	272	327	282		
Прибыль	1370	1420	1810	1290	1060	1640	1250	1640	1450	1840		
Амортиз	330	450	480	450	440	390	360	320	490	420		
Доб стоим	1962	2089	2635	2067	1816	2235	1861	2232	2267	2542		
	16890	16070	16150	16040	16170	16110	17040	16040	15910	15770		

2 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1710	1030	1300	1310	1230	1180	1200	1550	1250	1600	2300	15660
2	1390	1700	1180	1450	1170	1180	1760	1660	1600	1420	2500	17010
3	1040	1540	1370	1590	1640	1630	1440	1110	1540	1770	2100	16770
4	1490	1100	1010	1720	1480	1730	1140	1610	1500	1490	2100	16370
5	1680	1340	1660	1230	1030	1620	1730	1190	1360	1480	2500	16820
6	1030	1770	1110	1720	1240	1540	1260	1440	1160	1730	2400	16400
7	1060	1770	1470	1740	1010	1800	1190	1750	1390	1340	2100	16620
8	1370	1350	1680	1620	1660	1480	1710	1810	1360	1770	2400	18210
9	1180	1800	1480	1820	1400	1450	1010	1840	1640	1260	2500	17380
10	1540	1730	1480	1520	1110	1240	1450	1080	1250	1650	2100	16150
ЗП	242	344	336	347	250	214	336	223	339	258		
Прибыль	3850	3020	3920	3260	3400	3910	3140	3780	3580	3020		
Амортиз	330	490	440	490	400	330	330	440	380	430		
Доб стоим	4422	3854	4696	4097	4050	4454	3806	4443	4299	3708		
	15660	17010	16770	16370	16820	16400	16620	18210	17380	16150		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

3 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1780	1660	1670	1810	1450	1500	1660	1530	1180	1210	2400	17850
2	1660	1500	1350	1120	1350	1410	1560	1460	1130	1550	2100	16190
3	1660	1550	1500	1220	1450	1460	1710	1590	1230	1120	2400	16890
4	1640	1510	1190	1460	1170	1460	1520	1460	1320	1320	2400	16450
5	1170	1750	1430	1350	1410	1340	1730	1270	1360	1050	2500	16360
6	1020	1140	1600	1130	1410	1530	1790	1330	1760	1280	2100	16090
7	1820	1020	1130	1620	1530	1480	1330	1610	1050	1460	2100	16150
8	1620	1180	1700	1700	1780	1380	1710	1680	1370	1080	2100	17300
9	1110	1790	1620	1700	1010	1610	1570	1280	1720	1680	2500	17590
10	1120	1730	1350	1060	1390	1410	1370	1270	1630	1760	2300	16390
ЗП	2069	2028	2049	2028	2134	2116	2072	2055	2027	2037		
Прибыль	1670	1660	1350	1110	1730	1640	1770	1080	1790	1550		
Амортиз	340	440	380	360	450	390	350	310	300	400		
Доб стоим	4079	4128	3779	3498	4314	4146	4192	3445	4117	3987		
	17850	16190	16890	16450	16360	16090	16150	17300	17590	16390		

4 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1380	1420	1150	1800	1240	1240	1670	1580	1320	1740	2300	16840
2	1620	1040	1330	1240	1290	1440	1520	1350	1520	1500	2100	15950
3	1410	1080	1740	1120	1750	1560	1490	1230	1010	1050	2100	15540
4	1140	1800	1060	1310	1320	1460	1060	1100	1190	1660	2500	15600
5	1560	1480	1690	1030	1680	1080	1500	1220	1690	1780	2200	16910
6	1510	1740	1440	1530	1200	1130	1020	1360	1160	1360	2000	15450
7	1310	1060	1310	1550	1690	1750	1410	1310	1250	1050	2000	15690
8	1170	1470	1720	1620	1720	1600	1780	1030	1170	1350	2100	16730
9	1680	1530	1250	1470	1070	1220	1030	1720	1520	1650	2300	16440
10	1710	1130	1480	1150	1010	1160	1690	1750	1050	1200	2100	15430
ЗП	330	233	231	348	217	297	262	339	266	233		
Прибыль	1150	1020	1550	1260	1010	1510	1810	1780	1510	1740		
Амортиз	280	390	280	370	340	350	440	330	440	280		
Доб стоим	1760	1643	2061	1978	1567	2157	2512	2449	2216	2253		
	16840	15950	15540	15600	16910	15450	15690	16730	16440	15430		

5 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	10790	10680	10590	10550	10500	10490	10700	10300	10730	10180	2100	107610
2	10670	10800	10690	10040	10800	10220	10660	10660	10360	10610	2300	107810
3	10350	10760	10500	10290	10810	10020	10100	10320	10480	10090	2400	106120
4	10030	10770	10340	10000	10160	10080	10130	10690	10790	10650	2100	105740
5	10180	10740	10570	10070	10140	10050	10480	10730	10050	10330	2300	105640
6	10220	10500	10810	10380	10120	10470	10440	10460	10400	10210	2400	106410
7	10180	10340	10780	10220	10250	10350	10720	10160	10810	10590	2400	106800
8	10040	10180	10650	10290	10620	10170	10110	10180	10470	10530	2400	105640
9	10450	10350	10460	10510	10580	10040	10020	10690	10130	10250	2500	105980
10	10790	10510	10210	10590	10130	10210	10360	10100	10200	10690	2200	105990
ЗП	266	296	303	344	204	213	225	211	337	216		
Прибыль	1250	1320	1030	1020	1550	1940	1650	1180	1690	1310		
Амортиз	350	480	390	470	320	450	360	330	370	470		
Доб стоим	1866	2096	1723	1834	2074	2603	2235	1721	2397	1996		
	107610	107810	106120	105740	105640	106410	106800	105640	105980	105990		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

6 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1600	1820	1340	1410	1590	1570	1170	1140	1670	1530	2300	17140
2	1350	1410	1590	1020	1000	1400	1410	1090	1140	1280	2000	14690
3	1370	1790	1240	1800	1660	1540	1020	1070	1460	1380	2300	16630
4	1610	1780	1270	1260	1170	1240	1610	1350	1210	1200	2400	16100
5	1080	1350	1830	1810	1540	1030	1700	1440	1170	1650	2500	17100
6	1290	1190	1840	1350	1300	1600	1490	1240	1150	1820	2500	16770
7	1440	1130	1340	1830	1810	1670	1050	1670	1160	1170	2000	16270
8	1660	1740	1000	1450	1680	1530	1410	1230	1140	1000	2100	15940
9	1430	1610	1150	1050	1670	1310	1780	1170	1520	1360	2200	16250
10	1280	1170	1390	1020	1160	1040	1650	1420	1160	1680	2400	15370
ЗП	319	235	289	297	208	320	295	251	304	259		
Прибыль	1340	1330	1300	1600	1860	1510	1720	1140	1080	1160		
Амортиз	480	360	360	380	430	380	470	500	490	460		
Доб стоим	2139	1925	1949	2277	2498	2210	2485	1891	1874	1879		
	17140	14690	16630	16100	17100	16770	16270	15940	16250	15370		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

7 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1760	1410	1610	1700	1460	1370	1100	1220	1550	1750	2200	17130
2	1270	1150	1390	1260	1600	1580	1260	1750	1340	1770	2300	16670
3	1510	1240	1820	1210	1450	1670	1670	1730	1590	1200	2400	17490
4	1580	1470	1480	1480	1070	1660	1650	1150	1420	1670	2000	16630
5	1300	1290	1590	1370	1230	1450	1320	1510	1290	1070	2300	15720
6	1130	1280	1170	1020	1370	1540	1840	1520	1150	1310	2000	15330
7	1310	1800	1720	1720	1780	1430	1190	1460	1410	1470	2300	17590
8	1400	1550	1200	1790	1690	1570	1460	1620	1350	1800	2300	17730
9	1720	1840	1290	1290	1750	1330	1530	1630	1630	1310	2000	17320
10	1650	1240	1350	1100	1230	1650	1520	1310	1610	1790	2100	16550
ЗП	245	223	243	259	313	208	259	205	285	313		
Прибыль	1380	1120	1130	750	630	710	660	800	1170	580		
Амортиз	500	430	340	350	490	360	310	470	500	390		
Доб стоим	2125	1773	1713	1359	1433	1278	1229	1475	1955	1283		
	17130	16670	17490	16630	15720	15330	17590	17730	17320	16550		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

8 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	2560	2360	2730	2600	2600	2400	2350	2360	2540	2280	2900	27680
2	2380	2070	2290	2140	2680	2590	2580	2010	2310	2260	3300	26610
3	2600	2170	2010	2190	2180	2250	2390	2450	2530	2830	3700	27300
4	2040	2090	2050	2190	2330	2770	2620	2410	2660	2030	2900	26090
5	2690	2570	2230	2000	2210	2370	2300	2320	2610	2470	3100	26870
6	2480	2110	2200	2420	2370	2560	2820	2740	2750	2190	2900	27540
7	2520	2730	2500	2220	2520	2330	2710	2760	2260	2610	3900	29060
8	2420	2560	2790	2580	2780	2260	2330	2420	2510	2370	3100	28120
9	2300	2280	2630	2170	2680	2350	2340	2660	2140	2370	2800	26720
10	2100	2320	2320	2110	2130	2580	2810	2230	2640	2030	2900	26170
ЗП	284	259	289	267	249	231	290	252	310	348		
Прибыль	1420	1300	1040	1610	1610	1900	1800	1340	1140	1710		
Амортиз	490	440	470	480	320	340	440	300	490	400		
Доб стоим	2194	1999	1799	2357	2179	2471	2530	1892	1940	2458		
	27680	26610	27300	26090	26870	27540	29060	28120	26720	26170		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

9 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1730	1700	1360	1290	1510	1710	1260	1250	1610	1400	2000	16820
2	1220	1310	1660	1450	1180	1640	1420	1460	1540	1000	2100	15980
3	1200	1190	1330	1640	1770	1720	1580	1240	1400	1110	2500	16680
4	1700	1470	1410	1060	1490	1660	1660	1600	1160	1120	2400	16730
5	1310	1030	1550	1550	1410	1110	1000	1330	1200	1820	2100	15410
6	1380	1070	1390	1740	1310	1440	1490	1430	1770	1700	2300	17020
7	1360	1220	1420	1210	1120	1300	1130	1330	1620	1650	2300	15660
8	1410	1690	1080	1840	1760	1450	1800	1440	1630	1220	2400	17720
9	1520	1520	1380	1050	1710	1170	1440	1350	1390	1270	2000	15800
10	1720	1670	1740	1180	1030	1680	1380	1060	1290	1470	2300	16520
ЗП	680	720	607	701	680	698	710	605	651	633		
Прибыль	1420	1830	1520	1650	1090	1830	1240	1260	1010	1920		
Амортиз	400	380	480	480	440	470	420	420	350	310		
Доб стоим	2500	2930	2607	2831	2210	2998	2370	2285	2011	2863		
	16820	15980	16680	16730	15410	17020	15660	17720	15800	16520		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд

Закрыть

10 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1220	1650	1190	1340	1060	1760	1570	1170	1360	1450	2000	15770
2	1700	1770	1150	1810	1510	1370	1390	1760	1470	1330	2500	17760
3	1480	1700	1220	1340	1240	1700	1630	1640	1200	1550	2400	17100
4	1610	1340	1690	1310	1540	1470	1120	1290	1300	1130	2500	16300
5	1100	1080	1560	1480	1150	1440	1210	1710	1310	1180	2000	15220
6	1500	1430	1560	1240	1590	1310	1330	1580	1140	1710	2300	16690
7	1060	1290	1550	1750	1220	1530	1530	1170	1340	1000	2300	15740
8	1220	1550	1500	1100	1470	1790	1030	1670	1670	1420	2300	16720
9	1100	1830	1020	1120	1510	1020	1260	1120	1270	1150	2400	14800
10	1500	1520	1210	1590	1370	1830	1020	1090	1690	1490	2300	16610
ЗП	265	266	300	201	220	335	225	327	242	217		
Прибыль	1680	1830	1440	2060	1590	1980	1980	1570	2110	1410		
Амортиз	320	300	500	380	480	400	380	440	310	470		
Доб стоим	2265	2396	2240	2641	2290	2715	2585	2337	2662	2097		
	15770	17760	17100	16300	15220	16690	15740	16720	14800	16610		

11 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	4730	4730	4660	4420	4530	4510	4870	4630	4340	5090	2300	48810
2	4460	4330	4470	4810	4340	4350	5060	4640	4700	4990	2200	48350
3	4900	4930	4660	4440	5040	4680	4360	4540	5010	4650	2200	49410
4	4880	4400	4510	4490	4430	4550	4900	5040	4900	4740	2300	49140
5	4770	4810	4400	4830	4710	4740	5070	4480	4930	4890	2200	49830
6	4640	4940	4780	4400	4930	4590	4310	4330	4730	4620	2100	48370
7	4760	4390	4480	4800	5130	4710	4490	4660	5130	4570	2200	49320
8	5010	4490	4610	4660	4930	4590	4430	4980	4370	4970	2100	49140
9	4590	4950	4760	4340	4940	4770	4770	5120	4370	5000	2300	49910
10	4630	4570	4750	4320	4780	5090	4920	4570	4510	4780	2400	49320
ЗП	348	316	258	342	252	209	262	283	216	339		
Прибыль	1610	1070	1620	1550	1540	1290	1220	1240	1900	1540		
Амортиз	320	330	320	390	380	400	330	380	440	300		
Доб стоим	2278	1716	2198	2282	2172	1899	1812	1903	2556	2179		
	48810	48350	49410	49140	49830	48370	49320	49140	49910	49320		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

12 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	3250	2760	3070	3440	3530	3210	2890	2810	2890	3440	3300	34590
2	3440	3280	3020	2700	2760	2780	3480	3290	2960	3480	3300	34490
3	2750	3400	3060	2870	2960	2830	2930	3100	2860	3210	3400	33370
4	3110	3430	3490	3510	3330	3530	2770	2800	3510	3120	3700	36300
5	2800	2760	3070	3150	3150	2900	3040	2980	3320	2940	3300	33410
6	3160	3310	3260	3130	3070	3190	2920	3180	2740	2940	3500	34400
7	3260	2810	2830	3150	3190	3420	3400	3400	2900	3230	3300	34890
8	2920	3490	3010	3270	2800	3320	2920	3420	3380	2760	3700	34990
9	3240	3120	2940	2910	3010	3490	3470	3200	3530	3430	3300	35640
10	2880	3470	3260	3250	3100	2980	3200	3400	3270	2790	3300	34900
ЗП	337	300	255	234	349	236	294	264	213	254		
Прибыль	1090	1950	1100	1070	1280	1840	1780	1230	1300	1050		
Амортиз	470	480	330	490	380	500	480	380	340	310		
Доб стоим	1897	2730	1685	1794	2009	2576	2554	1874	1853	1614		
	34590	34490	33370	36300	33410	34400	34890	34990	35640	34900		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

13 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	3950	4000	3470	3840	4210	3540	3600	4080	4150	4180	5400	44420
2	3540	4060	3960	3490	4180	4230	3470	3890	4180	3410	5600	44010
3	3510	3620	3420	3800	3670	3940	4110	3610	3800	3900	5400	42780
4	3690	4110	3770	3610	4200	3950	3730	4110	3460	3700	5500	43830
5	3530	3490	4200	3940	3920	4050	3810	3780	3870	4070	5400	44060
6	4190	3820	3890	3740	3420	4200	4160	4130	3910	3410	5300	44170
7	4240	4200	3780	3590	4060	3750	3630	3870	3430	3990	5700	44240
8	4200	4160	4090	3960	4020	3440	4190	3670	3750	4190	5300	44970
9	3740	4110	4010	3470	4100	3810	3420	3790	3980	3980	5600	44010
10	3570	3880	4000	3510	3980	4060	4140	3840	3650	4160	5500	44290
ЗП	267	237	213	228	339	216	253	339	228	299		
Прибыль	1230	1090	1380	1200	1610	1180	1140	1630	1010	1670		
Амортиз	300	430	470	420	400	290	460	430	360	330		
Доб стоим	1797	1757	2063	1848	2349	1686	1853	2399	1598	2299		
	44420	44010	42780	43830	44060	44170	44240	44970	44010	44290		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

14 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	8230	8940	8340	8660	8240	8610	8510	8850	8780	8320	4000	89480
2	8200	8580	8730	8650	9000	8250	8380	8580	8720	8340	3900	89330
3	8400	8660	8330	8530	8560	8510	8990	8460	8750	8610	4000	89800
4	8340	8670	8680	8950	8280	8460	8990	8550	8380	8670	3900	89870
5	8640	8750	8990	8540	8720	8240	8940	9040	8770	8320	3800	90750
6	8570	8680	8280	8490	8460	8880	8530	8350	8660	8500	4300	89700
7	8650	8730	8630	8930	8700	8260	8460	9010	8380	8300	4300	90350
8	8730	8690	8320	8290	8740	8360	8700	8690	8400	8960	4300	90180
9	8560	8480	8230	8280	8260	8300	8780	8520	8480	8700	3900	88490
10	8270	8660	8950	8870	8360	8380	8940	8520	8750	8530	4100	90330
ЗП	349	313	202	300	217	256	281	330	253	269		
Прибыль	1910	1210	1520	1470	1310	1230	1650	1630	1840	1220		
Амортиз	490	450	330	480	470	360	340	470	390	320		
Доб стоим	2749	1973	2052	2250	1997	1846	2271	2430	2483	1809		
	89480	89330	89800	89870	90750	89700	90350	90180	88490	90330		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

15 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Спрос	Всего
1	1330	1360	1500	1760	1450	1720	1490	1700	1620	1620	2400	17950
2	1750	1290	1740	1440	1210	1230	1270	1130	1720	1060	2400	16240
3	1390	1450	1040	1260	1060	1430	1570	1030	1580	1450	2500	15760
4	1640	1800	1750	1070	1510	1270	1100	1350	1380	1220	2000	16090
5	1120	1200	1550	1290	1440	1300	1520	1070	1190	1090	2100	14870
6	1000	1610	1000	1460	1690	1650	1060	1570	1820	1360	2400	16620
7	1510	1590	1030	1200	1410	1720	1780	1210	1290	1400	2000	16140
8	1390	1760	1260	1400	1500	1670	1250	1270	1390	1710	2300	16900
9	1470	1280	1570	1590	1710	1050	1130	1820	1120	1560	2500	16800
10	1710	1560	1430	1500	1300	1330	1310	1730	1230	1610	2100	16810
ЗП	300	285	203	204	302	213	304	272	263	220		
Прибыль	1010	1170	1090	1930	1130	1300	1620	1200	1850	1830		
Амортиз	480	310	430	300	480	440	390	450	390	430		
Доб стоим	1790	1765	1723	2434	1912	1953	2314	1922	2503	2480		
	17950	16240	15760	16090	14870	16620	16140	16900	16800	16810		

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Лабораторная работа 8. Межотраслевой баланс конкурентно-импортного типа

Основные понятия: *Модель межотраслевого баланса конкурентно-импортного типа, совокупный внутренний спрос, конечное потребление.*

Постановка задачи: Конечное потребление делится на внутренний спрос и экспортно-импортное сальдо. Известны величины внутреннего спроса и экспорта. Требуется:

-вычислить импорт продукции каждой из отраслей и определить, какую часть он составляет от совокупного внутреннего спроса на продукцию отрасли;

-рассчитать необходимое увеличение валового выпуска для снижения доли импорта по отношению к совокупному внутреннему спросу одной из отраслей.

Исходные данные:

1.Межотраслевые потоки, конечное потребление, валовый выпуск и совокупная добавленная стоимость для каждой из N отраслей за прошедший год (данные лабораторной работы №1).

2. Объем внутреннего спроса и экспорта по отраслям.

3. Отрасль, в которой необходимо произвести снижение доли импорта, а также величину этого снижения выберите самостоятельно.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Величина внутреннего спроса и экспорта, % от конечного потребления (предыдущий период)

1 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	70	65	89	120	115	132	90	101	100	105
Экспорт	40	50	15	5	17	1	11	23	7	11

2 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	90	115	88	120	101	102	78	86	100	95
Экспорт	10	5	17	0	11	0	45	23	0	11

3 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	91	101	68	129	55	132	80	166	98	105
Экспорт	25	4	51	31	48	8	24	2	23	0

4 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	107	110	78	119	125	122	62	126	103	90
Экспорт	0	2	19	13	0	1	54	23	17	13

5 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	97	109	87	99	115	120	98	146	90	105
Экспорт	17	3	35	13	0	1	11	0	23	1

6 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	79	119	77	99	110	112	87	114	119	105
Экспорт	41	0	42	3	0	10	19	0	3	13

8 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	81	150	106	102	101	120	98	105	100	107
Экспорт	27	0	17	10	0	1	11	12	2	11

9 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	70	65	89	120	115	132	90	101	100	105
Экспорт	40	50	15	5	17	1	11	23	7	11

10 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	90	115	88	120	101	102	78	86	100	95
Экспорт	10	5	17	0	11	0	15	23	0	11

11 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	91	101	68	129	55	132	80	166	98	105
Экспорт	25	4	51	31	48	8	24	2	23	0

12 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	107	110	78	119	125	122	62	126	103	90
Экспорт	0	2	19	13	0	1	54	23	17	13

13 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	97	109	87	99	115	120	98	146	90	105
Экспорт	17	3	35	13	0	1	11	0	23	1

14 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	79	119	77	99	110	112	87	114	119	105
Экспорт	41	0	42	3	0	10	19	0	3	13

15 вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Внутренний спрос	91	106	108	129	150	121	108	136	101	100
Экспорт	17	54	15	0	0	11	10	1	23	13

ЛЕКЦИЯ 31

Динамические многоотраслевые модели

Статическая модель межотраслевого баланса обладает следующими особенностями:

1. в ней не учитывается фактор времени, играющий важную роль в принятии плановых решений;

2. в модели Леонтьева все отрасли являются “чистыми отраслями”, т.е. выпускающими только один вид продукции, причем этот вид продукции больше никакой отраслью не выпускается;

3. в модели Леонтьева все отрасли предполагаются равноправными, в то время как в реальности существуют отрасли, сильнее других влияющие на динамику развития экономики, в первую очередь – фондообразующие, такие как строительство и машиностроение.

Для учета этих особенностей можно рассмотрим модель динамического межотраслевого баланса.

ЛЕКЦИЯ 32
Модель динамического межотраслевого баланса

Рассмотрим экономику, производящую и потребляющую n типов товаров, совокупный запас которых оценивается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$. Чтобы подчеркнуть, что величина этого запаса относится к определенному отчетному промежутку времени, вектор $x = x_t$ называется еще интенсивностью производства.

Пусть матрица A задает технологические затраты каждой из n отраслей. *Основной мощностью* i-й отрасли назовем ее максимально возможный валовый выпуск ε, обусловленный наличием основных фондов (производственных площадей, станков и т.п.), $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Обозначим через η_i приращение основной мощности i-ой отрасли, d_{ij} – затраты i-ого продукта, необходимого для увеличения основной мощности j-ой отрасли на единицу.

Если $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, то $M = D\eta$ – материальные затраты на приращение мощностей всех отраслей.

Пусть l_i – количество дополнительных затрат (добавленная стоимость) для производства единицы продукции в i-ой отрасли; c – вектор потребления (расходы продукции компенсацию дополнительных затрат, т.е. та часть продукции, которая идет на компенсацию одной единицы совокупных дополнительных затрат, $c_i = (Y_i - M_i)/L$).

Через L обозначим совокупный объем добавленной стоимости. Индексом t будем обозначать векторы, относящиеся к t-ому промежутку времени, $t = 1, \ldots, T$.

Условия – отражают содержательный смысл модели.

1) Производственные затраты продукции + затраты на расширение производства + затраты на потребление не больше совокупных запасов:

$$AX_i + D\eta_t + L_t c \leq X_t \tag{32.1}$$

2) валовое производство не больше максимально возможного валового производства, ограниченного наличием основных свойств на начало соответствующего периода:

$$X_t \leq \varepsilon_{t-1}, \tag{32.2}$$

3) основные мощности не больше основных мощностей на начало периода + прирост мощностей за период:

$$\varepsilon_t \leq \varepsilon_{t-1} + \eta_t, \tag{32.3}$$

4) совокупные дополнительные расходы не больше заданной величины:

$$l^T X_t \leq L_t, \tag{32.4}$$

5) неотрицательность всех переменных модели:

$$X_t, \varepsilon_t, \eta_t, L_t \geq 0,\ t = 1, \ldots, T. \tag{32.5}$$

Последовательность векторов $z_t = (x_t, x_t, h_t, L_t)$, удовлетворяющих условиям – при всех $t = 1, \ldots, T$, *называется траекторией экономической динамики.* Задача анализа динамического межотраслевого баланса обычно состоит в выборе такой траектории, конечное состояние z_T которой является в некотором смысле оптимальным.

В качестве целевого функционала чаще всего выбирают некоторый линейный функционал:

$$f(z_T) = a_t^T X_T + a_2^T X_T + a_3^T h_T + a_4^T L_T \to \max \tag{32.6}$$

Пусть $z = (x, x, h, L)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} A-l & 0 & D & C \\ l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & -l & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда задача – примет вид:

$$\begin{cases} \alpha^T z_T \to \max \\ A z_t \leq B z_{t-1} \\ z_t \geq 0,\ t = \overline{1, T} \end{cases}, \tag{32.7}$$

где $z_0 = (0, \varepsilon_0, 0, 0)$ – заданный вектор.

ЛЕКЦИЯ 33
Модель Неймана

Рассмотрим модель Неймана, лежащую в основе многих, более сложных моделей.

Модель Неймана задается конечным набором производственных процессов вида (a_j, b_j), $j = \overline{1, m}$, где вектор $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n$ задает коэффициенты производственных затрат, вектор $b_j = (b_{ij})_{i=1}^n$ – коэффициенты запасов (выпуска) товаров.

Производственные процессы (a_j, b_j) называется *базисными*. Обозначим $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. A называется матрицей затрат, B – матрицей выпуска. Базисные производственные процессы можно использовать для составления других, более сложных.

Будем говорить, что каждый неотрицательный вектор x задает *вектор интенсивностей*, при котором j-ый базисный процесс участвует в производстве с интенсивностью x_j. Тогда новый процесс будет описываться векторами затрат-выпуска (Ax, Bx).

Пусть $C = (Ax, Bx)|x \geq 0$ – множество возможных производственных процессов, в которых $Y = Ax$ – вектор затрат товаров, $Z = Bx$ – вектор выпуска.

Рассмотрим T периодов времени. В каждый из периодов времени применяется один из производственных процессов множества C, характеризующийся вектором интенсивностей x_i. Предположим, что модель Неймана замкнута, т.е. мы можем тратить в процессе производства те и только те товары, которые были произведены в предыдущий период, т.е. в любой момент времени $t = 1, \ldots, T$ выполняется неравенство

$$Ax_i \leq Bx_{i-1}. \tag{33.1}$$

Вектор запасов Bx_0, имеющихся к началу 1-го периода, будем считать заданным.

Если поставить задачу о достижении в момент времени T оптимального состояния, задаваемом некоторой линейной целевой функцией, то получится задача вида (32.7).

По аналогии с факторными ценами в модели Леонтьева введем цены в модели Неймана.

Пусть $(p_t)_i \geq 0$ – цена одной единицы i-го продукта в момент времени t. Величина $p_t^T - p_{t-1}^T$ выражает доход процесса (a_j, b_j) за период времени от $t-1$ до t (заметим, что исходные материалы для процесса закупаются в начале периода $(t-1)$, а конечная продукция оценивается по ценам момента времени t).

Основные предположения модели Неймана:

$$p_{t-1}Ax_t = p_tBx_t, \tag{33.2}$$

т.е. общая стоимость использованной продукции равна общей стоимости выпущенной продукции (говорят, что общая сумма денег не меняется и постоянно находится в обращении).

$$p_t B x_{t-1} = p_t, \tag{33.3}$$

т.е. в начале t-го периода вся сумма денег, вырученная от продажи продукции в предыдущем цикле, идет на организацию производства в следующем периоде.

Условие (33.3) можно записать в виде $p_t(Bxt-1-Ax_t)=0$. Используя (33.3), получаем, что при $p_t \geq 0$ условие (33.3) возможно только в случае, когда для всех i выполняется $p_{ti}(Bx_{t-1}-Ax_t)_i = 0$. Если $p_t \geq 0$, то $Ax_i \geq Bx_{t-1}$.

Аналогично, (33.2) запишется как $(p_tB - p_{t-1}A)x_t = 0$. Выражение в скобках есть вектор доходов всех процессов модели. Обычно предполагают, что ни один из процессов (a_j, b_j) не приносит положительного дохода, поэтому получаем, что для всех i выполняется $(p_tB-p_{t-1}A)x_{ti} = 0$. Следовательно, если в момент времени t доход i-го процесса отрицателен $(p_iB - pt - 1A)_i = 0$, то интенсивность использования такого процесса x_{ti}. Таким образом, условие неположительности доходов всех производственных процессов обеспечивает отсутствие «паразитизма», т.е. в этом случае отрицательный доход одного из процессов не может покрываться положительным доходом другого процесса, поэтому компенсируется неиспользованием такого процесса.

Определение 33.1. Траектория интенсивностей x_t называется *стационарной*, если существует $v > 0$: $x_t = vxt - 1$, $t = 1, \ldots,$ или $x_t = v^t x_0$.

Стационарные траектории являются одними из самых простых. При такой траектории интенсивность использования каждого из производственных процессов растет с одинаковым темпом независимо от момента времени.

Последовательность $x_t = v^t x_0$ будет являться стационарной траекторией интенсивностей тогда и только тогда, когда $vAx_0 \geq Bx_0$.

Определение 33.2. Последовательность p_t, $t = 1, ..., T$ называется *траекторией цен*. Траектория цен называется стационарной, если для всех t выполняется равенство $\mu p_t = p_{t-1}$, или $p_t = \mu^{-t} p_0$.

Последовательность $p_t = \mu^{-t} p_0$ задает стационарную траекторию цен тогда и только тогда, когда $\mu pA \geq pB$.

Для последовательностей $x_t = v^t x$ и $p_t = \mu^{-t} p$ условия (33.2) и (33.3) принимают вид $\mu pAx = pBx$ и $vpAx = pBx$. Естественно считать, что $pAx > 0$, поэтому получаем, что $\mu = v$.

Определение 33.3. Говорят, что модель Неймана находится в состоянии *невырожденного динамического равновесия*, с характеристиками (α, x_0, p_0), $\alpha,\ x_0, p_0 \geq 0$, если

$$1)\ \alpha A x_0 \leq B x_0;. \tag{33.4}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

$$2)\ \alpha p_0 A \geq p_0 B; \qquad (33.5)$$

$$3)\ p_0 A x_0 > 0 \text{ (невырожденность)}. \qquad (33.6)$$

При этом множество $\{y | y = \mu x_0, \mu \geq 0\}$ называется *лучом Неймана.*

ЛЕКЦИЯ 34

Существование равновесия в модели Неймана

Невырожденное положение равновесия задаёт одновременно стационарные траектории и интенсивностей, и цен. Поэтому такая ситуация является самой простой для изучения.

Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{array}{l} U \to \min \\ (A - \lambda B)x - Ue_n \leq 0 (e_n = (1, \ldots, l)^T \in \mathbb{R}^m) \\ \sum x_i = 1, x \geq 0 \end{array} \qquad (34.1)$$

Обозначим через решение задачи $U(\lambda)$. Задача

$$\begin{array}{l} V \to \max \\ (A - \lambda B)x - Ve_n \geq 0 (e_n = (1, \ldots, l) \in \mathbb{R}^n) \\ \sum p_i = 1, x \geq 0 \end{array} \qquad (34.2)$$

является двойственной для задачи $V(\lambda)$, поэтому для ее решения справедливо равенство $V(\lambda) = U(\lambda)$.

Теорема 34.1. Тройка (λ, x_0, p_0) задает положение динамического равновесия (возможно – вырожденного) в модели Неймана тогда и только тогда, когда при $\lambda = \alpha^{-1}$ выполняется условие $U(\lambda) = 0$ и пары $(x_0, 0)$, $(p_0, 0)$ являются решениями соответственно задач (34.1) и (34.2).

Доказательство. Пусть (λ, x_0, p_0) – положение равновесия в модели Неймана. Тогда неравенства (33.4) и (33.5) показывают, что пары $(x_0, 0)$, $(p_0, 0)$ являются при $\lambda = \alpha^{-1}$ допустимыми планами, соответственно, для задач (34.1) и (34.2). Поскольку значения целевых функций совпадают (и равны $U(\lambda) = 0$), согласно теории двойственности эти пары являются решениями данных задач.

Доказательство второй части теоремы также не представляет труда.

Теорема 34.1 дает способ конструктивного отыскания положений динамического равновесия. Рассмотрим применение данного способа в одном из случаев. Справедлива следующая лемма.

Лемма 34.1. 1) Функция $U(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$; 2) Пусть $A \geq 0$, причем в матрице A нет нулевых столбцов. Тогда $U(0) > 0$; 3) Пусть $B \geq 0$, причем в матрице B нет нулевых строк. Тогда $U(0) > 0$; $U(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$; 4) Пусть $B \geq 0$. Тогда $U(\lambda)$ – монотонная невозрастающая функция.

Доказательство. 1) Функция $f(x, \lambda) = \max((A - \lambda B)_i x)$ непрерывна по совокупности переменных. Множество $M\,\{x|\sum x_i = 1, x \geq 0\}$ замкнуто и ограничено. По условию задачи $U(\lambda) = \min\{f(x, \lambda)|x \in X\}$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран

Начало

Содержание

Программа по МЭ

Назад

Вперёд

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

2) При $\lambda = 0$ основное ограничение задачи (34.1) имеет вид неравенства $Ax - U(0)e_n \leq 0$, или $(Ax)_i \leq U(0)$ для всех i. Так как $A \geq 0$ и $x \geq 0$, получаем $U(0) \geq 0$. Для $U(0) = 0$ необходимо существование $x \geq 0$, для которого $Ax = 0$. У вектора x по условию есть хотя бы одна положительная координата x_{i0}. Если у матрицы A столбец A_{j0} не нулевой, условие $Ax = 0$ не возможно.

3) Пусть $x_i^* = 1/m$ для всех i. Вычислим минимальное значение $U = u(x^*, \lambda)$, при котором вектор x^* будет допустимым (при этом, очевидно, $U(\lambda) \leq u(x^*, \lambda)$):

$$u(x^*, \lambda) = \max\{(A - \lambda B)_i x^*\} \leq \max\{A_i x^*\} - \lambda \min\{B_i x^*\}.$$

Поскольку у матрицы B нет нулевых строк и $B \geq 0$, то $\min\{B_i x^*\} = C > 0$. Таким образом, $U(\lambda) \leq u(x^*, \lambda) \leq \max\{A_i x^*\} - C\lambda \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$;

4) Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $(x_1, U(\lambda_1))$ – решение задачи (34.1) при $\lambda = \lambda_1$, $(x_2, U(\lambda_2))$ – при $\lambda = \lambda_2$. Тогда при $B \geq 0$

$$(A - \lambda_2 B)x_1 \leq (A - \lambda_1 B)x_1 \leq U(\lambda_1)e_m,$$

т.е. пара $(x_1, U(\lambda_1))$ является допустимой парой в задаче при $\lambda = \lambda_2$. Следовательно, $U(\lambda_2) \leq U(\lambda_1)$.

Лемма доказана.

Теорема 34.2. Пусть $A \geq 0$, $B \geq 0$, в матрице B нет ненулевых строк, в матрице A нет ненулевых столбцов. Тогда в соответствующей модели Неймана существует положение равновесия.

Доказательство. Согласно доказанной лемме, в условиях теоремы функция $U(\lambda)$, задающая оптимальное значение целевой функции в задаче (34.1), имеет точку $\lambda > 0$, в которой $U(\lambda) = 0$. Согласно теореме 34.1 это означает существование положения равновесия $(\lambda^{-1}), x_0, p_0$, в котором x_0 и p_0 – решения задач (34.1) и (34.2).

Заметим, что $p_0(A-\lambda B) \geq 0$, $(A-\lambda B)x_0 \leq 0$. Поскольку $p_0 \geq 0$, $x_0 \geq 0$, получим $p_0(A-\lambda B)x_0 \geq 0$, $p_0(A-\lambda B)x_0 \leq 0$, откуда $p_0(A-\lambda B)x_0 = 0$, или $p_0 A x_0 = \lambda p_0 B x_0$.

ЛЕКЦИЯ 35
Равновесие в модели динамического МОБ

Рассмотренная в параграфе 34.1 модель динамического межотраслевого баланса была сведена к модели Неймана путём определения соответствующих матриц A и B (смотри (32.7)).

Однако в матрице A есть отрицательные элементы, в матрице B – нулевые столбцы и строки, поэтому к этой модели нельзя применять теорему 34.2 о существовании равновесия. Поэтому такую модель (A, B) называют не моделью Неймана, а *моделью неймановского типа*.

Будем считать, что темпу роста соответствует луч Неймана $(x, \varepsilon, \eta, L) \geq 0$, если $x_t = \lambda^{-t}x$, $\varepsilon_t = \lambda^{-t}$, $\eta_t = \lambda^{-t}\eta$, $L_t = \lambda^t L$ – допустимый вектор в задаче МОБ.

Подставляя данный вектор в условия (32.1) – (32.5), получаем систему неравенств для нахождения луча Неймана:

$$\begin{aligned}
&Ax + D\eta + Lc \leq x \\
&x \leq \lambda\varepsilon \\
&\varepsilon \leq \lambda\varepsilon + \eta \\
&l^T x \leq L \\
&x, \varepsilon, \eta, L \geq 0
\end{aligned} \tag{35.1}$$

Найдём условия, при которых система условий имеет нетривиальное решение.

Пусть $r_{ij} = c_j l_j$, $R = (r_{ij})$, $l = (l_j) > 0$, $c = (c_j) \geq 0$, $c \neq 0$. Заметим, что в этом случае

$$cL = (c_i)L = (c_i)L = (c_i \sum l_j X_j) = (\sum c_i l_j X_j) = (\sum r_i l_j X_j) = RX.$$

Поэтому $AX + D\eta + Lc = (A + R)X + D\eta$.

Попробуем найти решение, удовлетворяющее системе равенств

$$\begin{aligned}
&Ax + D\eta + Lc = (A + R)X + D\eta = x \\
&x = \lambda\varepsilon \\
&\varepsilon = \lambda\varepsilon + \eta \\
&l^T x = L
\end{aligned}$$

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Тогда $\varepsilon = \lambda^{-1}\varepsilon$, $\eta = \varepsilon - \lambda\varepsilon = (1-\lambda)\lambda^{-1}\varepsilon$. Первое равенство принимает вид:

$$(A+R)X+D(1-\lambda)\lambda^{-1}x = x, \text{ или } [\lambda(A+R)+(1-\lambda)D]\,x = \lambda x. \quad (35.2)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $D \geq 0$ и $(\eta \geq 0, D\eta = 0) \Rightarrow (\eta = 0)$ (всякое увеличение мощностей требует материальных затрат).

2) $A \geq 0$, число Фробениуса матрицы $A + R$ меньше единицы (экономический смысл условия – технология, задаваемая матрицей A, векторами l и c, позволяет каждому работающему «прокормить себя»).

Лемма 35.1. Пусть $Q(\lambda) \geq 0$ – квадратная неотрицательная матрица, непрерывно зависящая от λ на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2]$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Пусть γ_1 и γ_2 – числа Фробениуса неотрицательной матрицы $Q(\lambda_1)$ и $Q(\lambda_2)$.

Если $\lambda_1 \leq \gamma_1$ и $\gamma_2 \leq \lambda_2$, то задача:

$$\begin{array}{l} \lambda \to \min \\ Q(\lambda)x = \lambda x \\ \sum x_i = 1, x \geq 0 \end{array} .$$

имеем единственное решение λ_0, x_0, причём

1) $Q(\lambda_0)x_0 = \lambda_0 x_0$;

2) λ_0 – число Фробениуса матрицы $Q(\lambda_0)$, которому соответствует вектор x_0;

3) x_0 и $\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_2$.

Теорема 35.1. В модели (32.7) существуют положение равновесия с темпом роста $\alpha = \lambda^{-1}$, которому соответствует единственный луч Неймана $(x, \varepsilon, \eta, L)$, причём:

1) λ – число Фробениуса матрицы $Q(\lambda) = \lambda(A+R) + (1-\lambda)D$.

2) x – правый вектор Фробениуса матрицы $Q(\lambda)$, соответствующий λ;

3) $\varepsilon = \lambda^{-1}x$, $\eta = \lambda^{-1}(1-\lambda)x$, $L = l^T x$.

Доказательство. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \min \\ &Q(\lambda)x = \lambda(A+R) + (1-\lambda)D \le \lambda x \ . \\ &\sum x_i = 1, x \ge 0 \end{aligned} \tag{35.3}$$

$Q(0) = D$; число Фробениуса λ_1 матрицы D больше нуля (по условию 1). $Q(1) = A + R$; число Фробениуса λ_2 матрицы $A + R$ удовлетворяет условию $0 \le \lambda_1 \le 1$.

Для доказательства теоремы воспользуемся доказанной леммой, согласно которой существует решение (λ_0, x) уравнения (35.2), такое что $\lambda_0 \in (0, 1)$. Выполнение условия (35.2) гарантирует выполнение условий при $\varepsilon = \lambda^{-1}x$, $\eta = \lambda^{-1}(1-\lambda)x$, $L = l^T x$. Теорема доказана.

Замечание 35.1. Рассмотрим набор двойственных переменных (p, g, r, s) для задачи (35.3). Тогда: p – левый вектор Фробениуса для матрицы $Q(\lambda)$, $g = \lambda^{-1}(1-\lambda)pD$; $r = pD$; $s = p^T c$.

ЛЕКЦИЯ 36

Магистральная теория

Пусть для всех $t = \overline{1,T}$ выполняются неравенства $Ax_i \leq Bx_{i-1}$, вектор Bx_0 задает начальный запас товаров, p – вектор цен на товары. Требуется найти траекторию интенсивностей $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, такую что $p^T Bx_T \to \max$, или $C^T x_T \to \max$, где $C = B^T p$.

Задача

$$\begin{array}{l} C^T x_t \to \max \\ Ax_t \leq Bx_{t-1} \\ t = \overline{1,T} \\ x \geq 0 \end{array} \quad . \tag{36.1}$$

является стандартной задачей ЛП. Однако размерность этой задачи обычно достаточно большая, поэтому решать её сложно с вычислительной точки зрения. Поэтому желательно уметь находить качественные характеристики оптимальной траектории.

Пусть $||x||$ – некоторая из норм в $\mathbb{R}^m$. Обозначим

$$\rho(x,y) = \left|\left| \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||} \right|\right|, \text{ для всех } x, y \neq 0, x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Указанная функция обладает следующими свойствами:

1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0 \ \rho(\lambda_1 x, \lambda_2 y) = r(x,y)$.

2. $\rho(x,y) = 0$ равносильно $\exists \lambda_1, \lambda_2$: $\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$ – векторы коллинеарны.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

3. Если $\lim x_k = x \neq 0$, $\lim y_k = y \neq 0$, то $\rho(x_k, y_k) = \rho(x, y)$.

Замечание 36.1. Если для всех $t = \overline{1, T}$ выполняется $x_t = \lambda^t x$, то для всех t_1 и t_2 имеет место $\rho(x_{t_1}, y_{t_2})$, т.е. все состояния стационарной траектории рассматриваются (относительно введенной метрики) как одна точка (именно поэтому название траектории присутствует слово "стационарная"). С точки зрения метрики последовательности векторов $x_t = \lambda^t x$ и $x_t \equiv x$ неразличимы.

Определение 36.1. Говорят, что луч $x^* \in \mathbb{R}^{m}$ является *магистралью для задачи*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$, такие что для всякой оптимальной траектории $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ выполняется условие $\rho(x_t, x^*) < \varepsilon$ для всех t, удовлетворяющих условию $T_1(\varepsilon) < t < T - T_2(\varepsilon)$, причем T_1 и T_2 не зависят от T.

Другими словами, вектор называется магистралью, если любая из оптимальных траекторий идет в направлении этого вектора, исключая, возможно, начальный и конечный периоды (периоды выхода на магистраль и ухода с нее).

Утверждение, устанавливающее наличие магистрали для оптимизационной задачи вида называется теоремой о магистрали.

Определение 36.2. Конической ε-окрестностью вектора $x^* \in \mathbb{R}^m$ называется множество $C_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^m | \rho(x, x^*) < \varepsilon\}$.

Таким образом, вектор x^* является *магистралью для задачи*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$, такие что при $T_1(\varepsilon) < t <$

$T - T_2(\varepsilon)$ всякая оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ проходит через окрестность $C_\varepsilon(x^*)$.

Если плановый горизонт T достаточно велик (при фиксированном ε), то почти всё время оптимальная траектория x_t идет вдоль луча x_ε, сохраняя почти постоянными пропорции в интенсивности использования различных производственных процессов.

Типичным при этом оказывается такое положение дел, когда луч x продолжает оставаться магистралью при широких вариациях вектора , задающем целевую функцию.

Магистральная теория может быть эффективно использована в тех случаях, когда нет возможности непосредственно вычислить оптимальную траекторию вследствие большой размерности задачи, а также, если нет уверенности в точности выбора целевого функционала. При принятии плановых решений при каждом шаге можно ориентироваться на луч x, стараясь заставить все отрасли работать с интенсивностями, пропорции которых близки к пропорциям вектора x.

К настоящему моменту существует обширная литература, посвященная изучению магистрального эффекта для различных моделей экономической динамики.

ЛЕКЦИЯ 37

Теорема о магистрали Моришимы

Рассмотрим экономику из n отраслей, задающуюся матрицей межотраслевого баланса A. Для осуществления валового выпуска A необходимо произвести производственные затраты AX. Предлагается, что валовый выпуск X_{t-1} предыдущего периода может быть использован как запас сырья в периоде t. Получаем задачу:

$$\begin{array}{l} C^T x_t \to \max \\ A x_t \le x_{t-1} \\ x \ge 0 \\ t = \overline{1, T} \end{array}, \qquad (37.1)$$

x_0 – известный начальный запас.

Обозначим

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -E & A & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & A & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -E & A \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ C \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

где A, R, 0 – матрицы $n \times n$. Тогда задача (37.1) сводится к задаче линейного программирования

$$\begin{array}{l} C^T x_T \to \min \\ A x_t \leq x_{t-1} \\ x \geq 0 \end{array} . \qquad (37.2)$$

Размерность задачи (матрицы A): $(Tn) \times (Tn)$.

Задачу, двойственную к (37.2), можно записать в виде:

$$\begin{array}{l} x^{0T} p_t \to \min \\ p_t A \geq p_{t+1}, t = \overline{1, T} \\ p_t A \geq c, p_t \geq \end{array} . \qquad (37.3)$$

Определение 37.1. Неотрицательную матрицу A назовем примитивной, если ее векторы Фробениуса образуют одномерное подпространство.

Покажем, что в случае примитивности матрицы A вектор Фробениуса является магистралью для задачи (37.1).

Замечание 37.1. В данном случае векторы Фробениуса матрицы A различаются только длиной, все они задают одну и ту же магистраль.

Лемма 37.1. Пусть $A \geq 0$ – устойчивая матрица, $x \in \mathbb{R}^m$ – ненулевой неотрицательный вектор. Если $x_t = A^t x \to x^*$, то x^* – правый

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

вектор Фробениуса матрицы A, причем для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon)$, такое что при $t > T(\varepsilon)$ выполняется условие $\rho(x_t, x^*) < \varepsilon$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить свойство функции ρ, состоящее в том, что из условия $x_t \to x^* \neq 0$ следует $\rho(x_t, x^*) \to 0$.

Покажем, что для примитивной матрицы функцию $T(\varepsilon)$ в условиях леммы 37.1 можно выбрать не зависящей от выбора x.

Лемма 37.2. Пусть x^* – правый вектор Фробениуса устойчивой примитивной матрицы $A \geq 0$. Тогда для каждого найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для всех ненулевых неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^m$, таких что $x_t = A^t x \to x^*$, условие выполняется для всех $t > T(\varepsilon)$.

Доказательство. Отметим, что в силу примитивности матрицы A для всех $x \geq 0$ последовательности x_t относительно функции ρ имеют "одинаковый предел"т.е. $\rho(x_t, x^*) \to 0$.

По лемме 37.1 для $\varepsilon > 0$ и векторов $x_k \in \mathbb{R}^m$ найдутся $T_k(\varepsilon)$, такие что при $t > T_k(\varepsilon)$ справедливо $\rho(A^t x_k, x^*) < \varepsilon$. Обозначим $T(\varepsilon) = \max\left\{T_k(\varepsilon) | k = \overline{1, m}\right\}$.

Любой вектор $x \geq 0$ представим в виде $x = \sum x_k \varepsilon$, где $x_k \geq 0$. Мы уже показали, что при $t > T(\varepsilon)$ выполняется $x_k \in C_\varepsilon(x^*)$, следовательно (по свойству функции ρ), и $k x_k \varepsilon \in C_\varepsilon(x^*)$. Используя выпуклость нормы, получаем, что $x = \frac{1}{k} \cdot \sum k x_k \varepsilon_k \in C_\varepsilon(x^*)$.

Лемма 37.3. Если вектор Фробениуса x^* устойчивой неотрицательной матрицы A не содержит нулевых элементов, то найдется число T_0, такое что для всех ненулевых неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^m$ для всех $t > T_0$ выполняется условие $x_t = A^t x > 0$.

Доказательство. Если вектор $x* > 0$, то найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое что коническая окрестность $C_{t_0} x^*$ состоит только из положительных векторов. Следовательно, по лемме 37.2 для всех $t > T_0 = T(\varepsilon)$ выполняется условие $x_t = A^t x \in C_{t_0}(x^*)$, вследствие чего $x_t = A^t x > 0$.

Лемма 37.4. Если в задаче (37.1) $x_0 > 0$ и выполняются условия леммы 37.3, то найдется число T_0, такое что для всякой оптимальной траектории $\{x_t\}$ этой задачи при $1 \le t \le T - T_0$ выполняется условие $x_t > 0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y_t = k\lambda^{*-t} x^*$ при некотором $k > 0$. Число k можно подобрать так, чтобы последовательность y_t была допустимой для задачи (37.1). Действительно, при подстановке этой последовательности в условие $Ay_t \le yt - 1$ при $t > 1$ получим равенства, а при $t = 1$ имеем $Ay_1 = k\lambda^{*-1} Ax^* = kx^* \le y_0 = x_0$. Поскольку $x_0 > 0$, выполнение условия $kx^* \le x_0$ можно добиться выбором некоторого $k > 0$. При этом значение целевой функции $C^T y_t = C^T k\lambda^{*-T} x^* = k\lambda^{*-T} C^T x^* > 0$.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
Закрыть

Для оптимальной траектории значение целевой функции не может быть меньшим, чем для траектории $\{y_t\}$, поэтому получаем, что в оптимальной траектории $x_t \neq 0$.

Из ограничений задачи и неотрицательности матрицы A получаем, что $A^{T-1}x_t \leq x_t$. По лемме 37.3 из неотрицательности вектора x_t получаем, что при $T - t > T_0$ вектор $A_{T-t}x_t > 0$, следовательно, при $t < T - T_0$ справедливо неравенство $x_t \geq A^{T-t}x_t > 0$.

Теорема 37.1. Если в задаче (37.1) вектор Фробениуса x^* матрицы A положителен, матрица A является примитивной и устойчивой, то вектор x^* является магистралью для задачи (37.1).

Доказательство. По теореме двойственности в линейном программировании с учетом леммы 37.4 получаем, что для любой оптимальной траектории $\{p_t\}$ двойственной к (37.1) задачи все ее ограничения с номерами $1 \leq t \leq T - T_0$ обращаются в равенства

$$p_{t+1} = p_t A.$$

Таким образом, при $1 \leq t \leq T - T_0$ имеет место равенство $p_t = p_1 A^{t-1}$.

По теореме двойственности оптимальные значения целевых функций равны, поэтому $C^T x_t = x_0^t p_1$, откуда получаем, что $p_1 \neq 0$.

Применим к последовательности $p_t = p_1 A^{t-1}$ лемму 37.3. Получаем, что найдется T_1, для которого при $T_1 \leq t \leq T - T_0$ справедливо условие $p_t > 0$.

Снова применим теорему двойственности, согласно которой при $T_1 \leq t \leq T - T_0$ для оптимальной траектории x_t задачи (37.1) в ограничениях должны выполняться равенства $Ax_t = x_{t-1}$. При данных значениях t получаем, что $x_t = A^{T-T_{0-1}x_{T-T_0}}$.

Согласно лемме 37.2 получаем, что для каждого ε найдется $T(\varepsilon)$, такое, что для $x_t = A^{T-T_0-t}x_{T-T_0}$ при $T - T_0 - t > T(\varepsilon)$ выполняется условие $\rho(x_t, x^*) < \varepsilon$.

Таким образом, при $T_t \leq t \leq T - T_0 - T(\varepsilon) = T - T_2$ для любой оптимальной траектории $\{x_t\}$ задачи (37.1) выполняется условие $\rho(x_t, x^*) < \varepsilon$. Следовательно, вектор x^* является магистралью.

Лабораторная работа 9. Динамический межотраслевой баланс

Основные понятия: *Модель динамического межотраслевого баланса, равновесие в моделях Неймана и моделях неймановского типа, темп роста в положении равновесия, достаточные условия равновесия.*

Постановка задачи: В модели динамического межотраслевого баланса известны:

– технологическая матрица межотраслевых потоков продукции;

– технологическая матрица D затрат на приращение основных мощностей;

– вектор потребления C (доля продукции, компенсирующая единицу совокупной добавленной стоимости);

– вектор l добавленной стоимости на единицу продукции.

Требуется найти состояние равновесия для данной модели, т.е. указать равновесные значения следующих показателей:

– вектора валового выпуска;

– вектора ξ основных мощностей;

– вектора h прироста основных мощностей;

– величины L совокупной добавленной стоимости.

Задание:

1. Проверить выполнение следующих условий:

a. $D \geq 0$ – невырожденная матрица;

b. Пусть $R = Cl^T$. Число Фробениуса матрицы $A + R$ меньше единицы.

2. Составить задачу оптимизации:

$\lambda \to \min$

$Q(\lambda) \leq \lambda X$

$X_1 + \ldots + X_n = 1$

$X \geq 0,$

где $Q(\lambda) = \lambda(A + R) + (1 \breve{\ } \lambda)D.$

3.Найти решение (λ, X) составленной задачи.

4. Записать значения темпа роста α и всех компонентов вектора (X, ξ, h, L) в положении равновесия.

Вариант 1

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,169	0,166	0,192	0,232	0,12	0,095	0,163
2	0,054	0,162	0,106	0,077	0,067	0,007	0,176
3	0,019	0,031	0,075	0,02	0,058	0,146	0,009
4	0,13	0,116	0,174	0,006	0,036	0,18	0,149
5	0,121	0,115	0,022	0,251	0,181	0,153	0,12
6	0,182	0,207	0,028	0,221	0,142	0,184	0,064
7	0,143	0,013	0,205	0,116	0,186	0,088	0,078

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,501	0	0	0	3,018	0,479	0,104
2	2,278	0	3,687	4,133	3,545	0,089	1,881
3	4,534	2,661	3,871	0,625	0	2,766	1,279
4	1,869	0	3,628	1,553	0,465	0,758	1,915
5	0	4,157	0,743	0	3,488	2,682	2,675
6	0	1,161	0,872	1,463	2,704	4,931	2,997
7	0,565	3,114	3,788	0,535	1,216	0	2,384

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,056	0,005	0,043	0,066	0,007	0,095	0,066

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,018	0,019	0,02	0,008	0,021	0,015	0,024

Вариант 2

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,139	0,133	0,215	0,19	0,061	0,03	0,184
2	0,004	0,18	0,119	0,017	0,063	0,145	0,168
3	0,121	0,185	0,068	0,143	0,004	0,034	0,174
4	0,235	0,077	0,227	0,027	0,257	0,189	0,012
5	0,007	0,047	0,183	0,126	0,036	0,053	0,082
6	0,099	0,016	0,004	0,072	0,183	0,093	0,108
7	0,2	0,157	0,169	0,175	0,097	0,187	0,037

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,8	4,795	0	0,326	4,791	0,39	0,242
2	0	0,227	0	0,548	3,786	0,445	4,907
3	2,988	2,082	0,82	4,78	3,922	1,108	3,174
4	0	0	2,527	0,509	0,109	1,055	1,047
5	1,157	0,229	0	1,324	0	0	0,618
6	1,151	1,502	1,853	2,194	1,531	0,533	2,671
7	0,369	4,871	0,539	2,701	0	0	1,826

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,058	0,049	0,058	0,003	0,094	0,011	0,082

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,019	0,02	0,001	0,025	0,03	0,027	0,023

Вариант 3

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,021	0,087	0,09	0,049	0,043	0,056	0,132
2	0,131	0,174	0,099	0,061	0,001	0,05	0,091
3	0,007	0,079	0,028	0,24	0,016	0,118	0,101
4	0,211	0,095	0,347	0,177	0,281	0,244	0,13
5	0,144	0,159	0,043	0,151	0,245	0,154	0,034
6	0,188	0,228	0,073	0,276	0,169	0,161	0,131
7	0,225	0,141	0,282	0,021	0,195	0,111	0,092

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	2,687	0,106	2,991	1,859	1,191
2	0	2,383	2,721	1,768	4,188	4,41	0
3	0,492	0	3,947	1,069	0,698	1,57	4,021
4	1,384	4,187	0,702	3,77	3,435	0,992	0,507
5	0,012	4,77	0	1,388	0	0,074	0,41
6	0,156	4,336	3,313	0	0	3,586	2,49
7	2,274	1,738	0,741	2,466	0	3,658	0

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,053	0,007	0,071	0,04	0,023	0,098	0,02

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,007	0,004	0,004	0,003	0,005	0,011	0,029

Вариант 4

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,094	0,147	0,174	0,02	0,143	0,227	0,137
2	0,178	0,075	0,123	0,15	0,113	0,108	0,067
3	0,132	0,139	0,152	0,161	0,145	0,157	0,076
4	0,144	0,004	0,074	0,08	0,107	0,003	0,12
5	0,143	0,113	0,174	0,176	0,112	0,105	0,123
6	0,194	0,167	0,009	0,082	0,079	0,073	0,088
7	0,102	0,173	0,084	0,14	0,077	0,063	0,12

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,062	1,548	0,675	1,825	4,957	0	2,452
2	1,764	2,405	4,386	0	3,562	0,651	2,056
3	0,748	1,472	0	0,053	3,945	0,168	4,779
4	0,027	2,73	3,083	1,741	0	0	3,307
5	0	4,989	1,559	0	1,272	0,04	0
6	1,971	0,043	2,16	1,943	1,753	2,822	1,635
7	0,23	0	0	3,945	4,838	1,369	3,283

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,036	0,006	0,065	0,054	0,087	0,004	0,047

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,007	0,004	0,004	0,003	0,005	0,011	0,029

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

На весь экран
Начало
Содержание
Программа по МЭ
Назад
Вперёд
◄ ►
◄◄ ►►
Закрыть

Вариант 5

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,084	0,047	0,13	0,038	0,016	0,132	0,212
2	0,018	0,155	0,229	0,09	0,036	0,149	0,004
3	0,136	0,265	0,174	0,163	0,114	0,102	0,003
4	0,15	0,096	0,026	0,042	0,152	0,14	0,134
5	0,099	0,015	0,155	0,057	0,16	0,123	0,217
6	0,267	0,022	0,118	0,157	0,156	0,033	0,143
7	0,067	0,11	0,105	0,168	0,143	0,132	0,113

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,767	0	0	0	0	4,97	3,823
2	3,857	2,296	1,898	1,481	0,623	2,592	0,667
3	0	0	1,859	0,8	0	1,694	0,45
4	0,71	1,043	0	4,538	0	0,262	0,708
5	0	0	3,888	1,804	0	2,132	0
6	4,085	2,047	1,64	3,672	1,334	0,454	0,383
7	4,945	0,266	3,957	0	0,01	3,083	1,545

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,022	0,093	0,044	0,094	0,053	0,09	0,003

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,018	0,029	0,006	0,028	0,022	0,019	0,017

Вариант 6

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,137	0,181	0,158	0,131	0,209	0,272	0,248
2	0,066	0,029	0,187	0,179	0,059	0,292	0,235
3	0,194	0,127	0,067	0,08	0,024	0,085	0,132
4	0,221	0,036	0,088	0,174	0,291	0,158	0,024
5	0,057	0,208	0,08	0,039	0,148	0,068	0,055
6	0,146	0,043	0,165	0,046	0,232	0,01	0,127
7	0,024	0,13	0,001	0,184	0,021	0,093	0,033

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	2,934	1,779	0,802	0	2,678	1,757	3,293
2	2,345	1,544	0,58	1,43	4,626	0	0
3	3,394	0	4,373	0,189	0,188	1,896	2,612
4	2,469	2,491	1,221	2,777	5	2,382	1,159
5	3,41	0,562	4,541	0,4	3,621	0,657	3,145
6	1,084	0,893	0	1,907	1,539	1,083	4,054
7	1,383	0,99	0,605	0	3,204	0,749	2,085

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,009	0,074	0,066	0,05	0,064	0,088	0,01

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,015	0,025	0,025	0,017	0,001	0,002	0,015

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 7

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,187	0,006	0,214	0,09	0,166	0,112	0,053
2	0,073	0,101	0,072	0,011	0,009	0,109	0,112
3	0,135	0,22	0,203	0,158	0,36	0,162	0,134
4	0,166	0,185	0,076	0,228	0,062	0,055	0,142
5	0,079	0,031	0,021	0,078	0,045	0,054	0,099
6	0,157	0,046	0,114	0,201	0,045	0,103	0,015
7	0,08	0,167	0,26	0,22	0,064	0,162	0,17

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	2,04	1,037	4,596	0	4,95	2,77	4,971
2	0	0	0,148	0,894	1,712	2,551	0,39
3	0	1,724	2,035	0	3,698	1,683	1,922
4	1,159	0,901	1,664	0	1,988	1,274	3,144
5	1,792	0	2,718	0	2,51	1,675	3,495
6	1,052	3,418	4,22	2,687	2,676	4,578	1,328
7	4,748	0	1,359	2,777	0	1,842	1,698

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,051	0,062	0,087	0,08	0,062	0,031	0,001

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,012	0,024	0,004	0,001	0,025	0,024	0,027

Вариант 8

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,185	0,007	0,176	0,188	0,194	0,129	0,153
2	0,209	0,229	0,004	0,089	0,145	0,028	0,004
3	0,077	0,168	0,182	0,185	0,016	0,152	0,021
4	0,218	0,216	0,067	0,01	0,123	0,167	0,104
5	0,18	0,056	0,087	0,046	0,056	0,155	0,045
6	0,027	0,227	0,085	0,239	0,12	0,031	0,344
7	0,07	0,08	0,116	0,083	0,089	0,129	0,295

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,033	0	3,666	0	3,599	0	0,5
2	0	3,399	1,436	0	0,706	0	2,061
3	1,383	0,81	1,607	2,343	0,63	1,944	2,957
4	4,987	2,512	0,303	1,039	4,238	1,593	0
5	1,156	4,978	1,35	0,849	0,095	0,078	4,43
6	0,725	2,451	3,63	0,496	2,279	0	1,913
7	0,737	0	2,321	2,369	4,699	0	1,92

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,07	0,076	0,073	0,003	0,042	0,057	0,059

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,003	0,002	0,028	0,016	0,026	0,021	0,003

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 9

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,122	0,082	0,171	0,156	0,143	0,08	0,169
2	0,07	0,255	0,154	0,179	0,147	0,083	0,131
3	0,062	0,169	0,165	0,119	0,162	0,127	0,066
4	0,205	0,051	0,098	0,156	0,115	0,214	0,006
5	0,061	0,113	0,046	0,189	0,019	0,003	0,207
6	0,104	0,245	0,123	0,071	0,084	0,207	0,194
7	0,237	0,014	0,186	0,097	0,038	0,142	0,075

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	4,798	0,446	4,684	1,019	1,616	2	3,979
2	3,754	0	3,698	0	0	0	0
3	0	4,685	2,295	0	0,516	1,116	2,691
4	1,08	0	4,374	2,028	0,269	0,297	1,656
5	3,136	0	2,913	3,231	0	1,013	0
6	0	3,416	0,734	3,961	0	1,608	2,164
7	0	1,25	0,953	2,21	0,586	1,338	4,462

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,053	0,053	0,032	0,057	0,013	0,092	0,079

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,014	0,007	0,006	0,003	0,029	0,014	0,015

Вариант 10

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,258	0,026	0,129	0,207	0,079	0,094	0,062
2	0,001	0,191	0,035	0,044	0,168	0,161	0,049
3	0,093	0,171	0,08	0,211	0,072	0,121	0,151
4	0,168	0,186	0,191	0,163	0,152	0,259	0,185
5	0,214	0,057	0,16	0,042	0,168	0,072	0,038
6	0,117	0,12	0,123	0,135	0,095	0,008	0,054
7	0,135	0,171	0,071	0,098	0,109	0,135	0,184

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,03	3,029	4,203	0,935	1,618	4,79	0
2	3,526	1,933	1,594	0	1,7	1,627	1,536
3	0	0	2,12	0,072	3,378	1,077	4,736
4	0	0,85	0	1,702	4,421	0,189	2,205
5	1,556	1,122	4,313	0,832	0	0,739	4,892
6	2,163	0	0	0,676	0,214	0	0,324
7	0,709	1,582	1,72	3,318	0,66	4,536	2,127

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,082	0,096	0,006	0,037	0,003	0,003	0,004

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,001	0,008	0,021	0,01	0,016	0,015	0,028

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 11

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,021	0,078	0,15	0,081	0,061	0,111	0,152
2	0,059	0,089	0,217	0,123	0,129	0,125	0,072
3	0,282	0,168	0,016	0,02	0,056	0,252	0,099
4	0,097	0,237	0,295	0,005	0,077	0,174	0,208
5	0,167	0,169	0,179	0,115	0,034	0,098	0,01
6	0,033	0,104	0,014	0,169	0,19	0	0,097
7	0,111	0,008	0,128	0,199	0,196	0,089	0,195

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,511	2,108	0,358	0,917	0	1,032	4,541
2	4,917	4,906	4,777	0,001	4,303	0	0
3	0,044	1,062	4,558	0,868	4,08	0	3,283
4	2,593	2,981	0,228	3,142	0,012	0	0
5	0,754	3,646	2,551	1,327	0	3,087	0,875
6	0	1,795	0	0,791	0	0	0
7	1,304	2,121	1,409	1,294	0,734	0	0,139

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,029	0,095	0,007	0,08	0,003	0,006	0,001

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,023	0,015	0	0,029	0,026	0,015	0,017

Вариант 12

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,089	0,124	0,234	0,104	0,069	0,146	0,009
2	0,041	0,178	0,086	0,164	0,23	0,077	0,189
3	0,085	0,124	0,138	0,143	0,03	0,222	0,223
4	0,093	0,185	0,025	0,172	0,147	0,013	0,219
5	0,139	0,006	0,103	0,077	0,163	0,068	0,047
6	0,133	0,092	0,102	0,119	0,133	0,087	0,027
7	0,14	0,044	0,1	0,1	0,149	0,194	0,157

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	2,061	0	0	3,52	1,57	1,976	1,865
2	4,073	3,551	0,459	0,184	3,338	4,569	1,284
3	0	0	2,48	2	4,258	1,006	1,218
4	2,5	0	0,436	0	0,141	4,337	3,576
5	2,727	0,396	3,341	3,894	0	0,174	4,155
6	0,484	0	1,477	2,093	4,021	2,838	0
7	1,651	0,752	2,151	0,438	0	4,743	0,685

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,025	0,061	0,096	0,03	0,003	0,08	0,003

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,028	0,025	0,021	0,012	0,008	0,019	0,013

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вариант 13

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,1	0,207	0,119	0,153	0,152	0,17	0,094
2	0,089	0,022	0,092	0,141	0,07	0,126	0,072
3	0,074	0,189	0,121	0,02	0,197	0,165	0,14
4	0,115	0,02	0,048	0,156	0,034	0,068	0,141
5	0,175	0,158	0,151	0,164	0,047	0,159	0,056
6	0,197	0,139	0,174	0,063	0,155	0,005	0,112
7	0,091	0,214	0,168	0,043	0,189	0,199	0,138

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	3,304	4,367	2,915	1,559	0,302	0,499	0
2	2,443	4,403	0	3,363	3,735	0,804	0,977
3	1,413	0	0	1,883	2,879	3,335	0,456
4	0	4,674	0,832	1,593	1,911	0	0,683
5	3,695	3,586	4,277	1,514	0	1,834	3,88
6	0,34	1,086	0,886	1,691	1,458	1,185	4,062
7	1,905	0	3,516	2,09	0	1,829	0

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,002	0,089	0,099	0,051	0,066	0,051	0,074

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,016	0,005	0,013	0,026	0,016	0,011	0,025

Вариант 14

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,159	0,037	0,005	0,153	0,067	0,034	0,112
2	0,18	0,042	0,255	0,15	0,004	0,092	0,059
3	0,119	0,074	0,12	0,026	0,166	0,075	0,205
4	0,035	0,234	0,123	0,132	0,17	0,171	0,168
5	0,09	0,147	0,122	0,135	0,111	0,117	0,136
6	0,161	0,219	0,172	0,125	0,236	0,188	0,061
7	0,114	0,207	0,053	0,074	0,118	0,14	0,035

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,52	1,784	0,904	1,357	0,841	4,863	2,98
2	4,022	0,132	3,439	1,249	0,732	3,374	2,88
3	1,012	2,391	2,547	4,016	0	3,191	0
4	3,758	0	3,632	4,971	3,71	2,967	0,929
5	4,488	0	1,164	0,578	0,08	1,291	0,316
6	0	4,074	4,532	1,566	2,311	1,8	1,779
7	0,565	3,114	3,788	0,535	1,216	0	2,384

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,054	0,016	0,059	0,062	0,098	0,024	0,04

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,014	0,004	0,015	0,021	0,013	0,018	0,022

Вариант 15

Технологическая матрица A межотраслевых потоков

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,211	0,169	0,264	0,197	0,13	0,137	0,167
2	0,089	0,15	0,112	0,16	0,08	0,044	0,18
3	0,016	0,068	0,063	0,128	0,057	0,06	0,179
4	0,173	0,047	0,01	0,045	0,066	0,165	0,046
5	0,215	0,315	0,255	0,08	0,107	0,048	0,232
6	0,032	0,031	0,239	0,113	0,131	0,101	0,116
7	0,121	0,211	0,022	0,134	0,142	0,149	0,063

Технологическая матрица D прироста основных мощностей

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,963	4,413	1,547	2,525	4,04	2,849	0,832
2	0,88	1,689	0	4,694	3,165	3,114	1,429
3	4,473	1,215	1,782	0,062	0	0,393	1,791
4	0	0,468	0,272	0	0	0	0
5	0	0,976	3,941	2,809	3,248	1,454	4,026
6	3,741	3,614	0,974	0,928	0	4,47	0
7	0	0	0,906	4,255	3,713	0	1,649

Вектор потребления

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
C_i	0,098	0,09	0,041	0,052	0,09	0,061	0,014

Добавленная стоимость

	Отрасль, i						
	1	2	3	4	5	6	7
l_i	0,014	0,001	0,003	0,014	0,029	0,03	0,002

Вопросы, выносимые на экзамен по дисциплине “Математическая экономика“

1. Математическая экономика как самостоятельная дисциплина. Основные этапы становления математической экономики. Предмет математической экономики.

2. Теории потребления: задача потребления, пространство товаров, функция полезности.

3. Теории потребления: предельный анализ и понятие эластичности в теории потребления.

4. Теория потребления: оптимизационная модель задачи потребительского выбора.

5. Теория потребления: функция спроса и ее свойства.

6. Теория потребления: анализ влияния дохода и цен на спрос.

7. Теория потребления: уравнение Слуцкого.

8. Теория производства: основные элементы модели производства, пространство затрат и производственная функция.

9. Теория производства: предельный анализ и эластичность в теории производства.

10. Теория производства: конструирование и оценка производственной функции, математические модели задач фирмы.

11. Теория производства: решение задачи фирмы, геометрическая иллюстрация.

Кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования

12. Теория производства: анализ влияния цен на объем затрат и выпуска, основное уравнение фирмы.

13. Экономическое равновесие спроса и предложения.

14. Рыночный спрос и рыночное предложение Условие совершенной конкуренции.

15. Описание общей модели Вальраса.

16. Модель Эрроу-Дебре.

17. Модель регулирования цен и устойчивость конкурентного равновесия.

18. Модель динамического межотраслевого баланса.

19. Модель Неймана.

20. Существование равновесия в модели Неймана.

21. Равновесие в модели динамического межотраслевого баланса.

22. Магистральная теория.

23. Теорема о магистрали Моришимы.

24. Математическая модель экономического благосостояния.

25. Моделирование ценообразования: математическая модель монополии.

26. Конкурентное равновесие в модели с фиксированными доходами: экзогенные и эндогенные величины, модель конкурентного равновесия с фиксированными доходами.

27. Конкурентное полуравновесие.

28. Формирование цен для случая нескольких товаров. Метод Самуэльсона.

Тестовый опрос по дисциплине “Математическая экономика“